

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS



DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

ESTUDIO DE SISTEMAS REDUNDANTES
DISCRETOS EN FIABILIDAD

TESIS DOCTORAL

GEMMA FERNÁNDEZ-CALVILLO VILLODRE

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Gemma Fernández Calvillo Villodre
D.L.: GR. 1992-2009
ISBN: 978-84-692-1869-3

UNIVERSIDAD DE GRANADA



**ESTUDIO DE SISTEMAS REDUNDANTES
DISCRETOS EN FIABILIDAD**

Memoria que para optar al grado de Doctora por la Universidad de Granada presenta la licenciada en Ciencias Matemáticas D^a Gemma Fernández-Calvillo Villodre.

Autora:

D^a Gemma Fernández-Calvillo Villodre

V^o B^o Director:

D. Juan Eloy Ruiz Castro

V^o B^o Director:

D. Rafael Pérez Ocón

2009, GRANADA, ESPAÑA

A mi padre por levantarme cada vez que me caía, a mi madre por la fe que siempre mostró en mí, a Ramón por considerarme la mejor y a mi hermano por estar siempre ahí. Por último, no puedo dejar de dedicar esta Memoria al ser que conoceré personalmente en unos meses y que no ha dejado de darme pataditas durante los últimos retoques de este trabajo.

Prólogo

El planteamiento de un trabajo de investigación viene motivado por distintos estudios y problemas planteados o encontrados previamente y por un objetivo a alcanzar. Antes de comenzar el desarrollo de esta Memoria, queremos mostrar cuáles fueron los aspectos que dieron lugar a su desarrollo y el objetivo que se desea. En el campo de la fiabilidad es habitual el análisis de sistemas reparables y de sistemas redundantes en tiempo continuo. Un problema en este campo es que cuando se modelizan sistemas de mayor complejidad las expresiones que se obtienen son intratables, difíciles de aplicar. Por otro lado la mayoría de los trabajos en fiabilidad consideran que los sistemas evolucionan de forma continua en el tiempo. Pero, muchos sistemas, como algunos sistemas electrónicos, evolucionan de forma discreta y es interesante su análisis. Estas dos premisas son las que llevan a plantearnos la siguiente pregunta, ¿por qué no estudiar la modelización de sistemas complejos con múltiples componentes que evolucionan de forma discreta en el tiempo, obteniendo los resultados de una forma algorítmica y algebraica, solventando así los problemas de aplicabilidad y facilitando la interpretación de las medidas obtenidas? Esta pregunta muestra el objetivo de la Memoria.

Los sistemas reparables con múltiples componentes en tiempo continuo son frecuentemente discutidos en la literatura de fiabilidad. Textos clásicos como los de Barlow y Proschan (1975) [7], Hoyland y Rausand (1994) [13], y Ascher y H. Feingold (1984) [4], analizan el comportamiento y modelización de sistemas reparables y no reparables. Son muchos los artículos que se han centrado en el estudio de sistemas reparables. Así, Kijima (1989) [14] sugirió dos modelos probabilísticos posibles para estudiar sistemas con reparación general. Zhao (1994) [48] propone un modelo generalizado para sistemas en serie con componentes reparables con reparación perfecta o imperfecta. Bruning (1996) [8] analiza el comportamiento de un sistema con dos unidades con reparación preventiva que evita el fallo del sistema. Más recientemente, se han realizado aproximaciones básicas para un conjunto de datos de tiempos de fallo de sistemas reparables en Lindqvist (2006) [17]. Analiza modelos de reparación imperfecta haciendo énfasis en la modelización. Guo y otros (2007) [11] presentan un modelo generalizable basado en la historia de la reparación del sistema. En Barata y otros (2002) [5] se estudia el deterioro de sistemas usando simulación de Monte Carlo y desarrolla un procedimiento de optimización para el mantenimiento del

II

sistema.

Los procesos markovianos han sido utilizados en la modelización de sistemas dinámicos de fiabilidad. Es en Hoyland y Rausand (1994) [13] donde se consideran modelos markovianos en el estudio de sistemas de fiabilidad desde un punto de vista clásico. Liu y Kapur (2006) [18] desarrollan medidas de fiabilidad para sistemas dinámicos con distintos estados discretos de funcionamiento. Maillart (2006) [19] estudia el problema de programar un mantenimiento preventivo para un sistema markoviano con múltiples estados de deterioro. Diamantidis y otros (2007) [9] modelizan problemas de flujos en línea realizando una descomposición por bloques. Esta descomposición es resuelta vía un análisis markoviano.

Otros sistemas ampliamente estudiados son los sistemas redundantes o con unidades en reserva. Este método ha sido muy aplicado para mejorar la fiabilidad y disponibilidad en el diseño de sistemas. Textos clásicos como el de Barlow y Proschan (1975) [7] ya consideran estas técnicas. Pero el estudio de sistemas redundantes sigue siendo un campo de estudio abierto hoy en día. Recientemente, Srinivasan y Subramanian (2006) [46] utilizan puntos de renovación para obtener la disponibilidad y fiabilidad de un sistema en reserva activa con tres unidades. Wang, Ke y Lee (2007) [47] realizan un estudio de la sensibilidad de un sistema con múltiples componentes para determinar la fiabilidad y el tiempo medio hasta el fallo.

DISTRIBUCIONES TIPO FASE

Pero, uno de los principales problemas cuando se analiza el comportamiento de sistemas con tres o más unidades en reserva, es que la construcción del modelo y las medidas asociadas adquieren una estructura prácticamente intratable y difícil de aplicar. En el caso continuo son varias las distribuciones más utilizadas en la práctica como son la distribución exponencial, Erlang y Weibull. Estas dos últimas dan lugar, como se ha mencionado anteriormente, a resultados complejos de aplicar, debido a las expresiones analíticas obtenidas, siendo muy compleja de tratar su transformada de Laplace. Para evitar este problema, un primer paso, ha sido estudiar estos sistemas cuando el tiempo de fallo o el tiempo de reparación se distribuye de forma exponencial. La distribución exponencial tiene un buen comportamiento desde un punto de vista práctico en fiabilidad, simplificando los resultados, pero en muchas ocasiones esta restricción puede ser muy fuerte. Una generalización de la distribución exponencial, con frecuencia utilizada en estudios de fiabilidad, es la distribución tipo fase. Esta clase de distribuciones fue introducida por Neuts (1975) [22] mostrando su versatilidad y buenas propiedades. También Neuts (1981) [23] pone de manifiesto la potencia algorítmica de esta clase de distribuciones. Las distribuciones tipo fase han sido aplicadas en distintos campos como fiabilidad, supervivencia y teoría de colas. Una amplia variedad de modelos estocásticos pueden ser representados mediante distribuciones tipo fase, permitiendo construir nuevos

modelos de forma algorítmica. Cuando esta clase de distribuciones se consideran en la modelización de sistemas de fiabilidad, su construcción y las medidas asociadas se obtienen de forma algorítmica matricial, lo cual simplifica y facilita el estudio y análisis del sistema así como su implementación computacional.

Por otro lado, cuando se consideran distribuciones generales en la modelización de sistemas de fiabilidad de nuevo se obtienen expresiones complejas con aplicación difícil. En el caso continuo este problema ha sido solventado considerando que las distribuciones generales intrínsecas del modelo son aproximadas mediante distribuciones tipo fase, ya que estas distribuciones son densas en la clase de distribuciones continuas no negativas. Así, Neuts y Meier (1981) [24] consideraron distribuciones tipo fase para modelizar un sistema con dos unidades presentando los resultados de forma algorítmica. Gururajan y Srinivasan (1994) [12] modelizan un sistema con dos unidades en reserva activa con tiempos de fallo de las unidades distribuidos tipo fase. Neuts y otros (2000) [25] estudian un sistema unitario sometido a varios tipos de fallos con tiempos de reparación y operatividad distribuidos tipo fase. Pérez-Ocón y Ruiz-Castro (2004) [29] y Ruiz-Castro y otros (2004)[42] desarrollan dos modelos generales con dos unidades independientes con tiempos implícitos distribuidos tipo fase. Un sistema con múltiples componentes dispuestas en G-out-of-M es analizado por medio de un proceso de Markov en Pérez-Ocón y otros (2006) [27]. Los procesos geométricos son considerados en este trabajo para modelizar el desgaste de las unidades.

Los sistemas redundantes con distribuciones tipo fase también han sido estudiados. Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla (2004) [26] modelizan un sistema con unidades en reserva pasiva considerando distribuciones tipo fase. Este sistema es regido mediante un proceso de cuasi-nacimiento-y-muerte (QBD). Este modelo también es analizado en el caso de reserva activa. Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla (2006) [28] estudian un sistema finito reparable con unidades dispuestas en reserva activa y demostraron que este sistema se modeliza mediante un proceso de cuasi-nacimiento-y-muerte con distintos niveles (LDQBD). Utilizan la metodología dada por Naoumov (1997) [21] para calcular la distribución estacionaria del modelo.

SISTEMAS DISCRETOS DE FIABILIDAD

En fiabilidad es habitual considerar que los tiempos de vida implícitos en el funcionamiento de un sistema tienen un comportamiento continuo. Sin embargo, en muchas ocasiones y por distintos motivos, no todos los sistemas pueden ser observados de forma continua debiendo hacerse en ciertos periodos de tiempo discretos. Así, cuando los sistemas son observados en tiempos de inspección, una aproximación discreta puede ser apropiada para modelizar su evolución en el tiempo. También, en otras ocasiones, la estructura interna del sistema es de naturaleza discreta, como por ejemplo sistemas computacionales digitales. En

IV

fiabilidad los modelos discretos son considerados para el análisis del comportamiento de sistemas en campos como la ingeniería electrónica.

Al igual que ocurre en el caso continuo, cuando se consideran distribuciones generales para los tiempos de fallo implícitos en el modelo, los resultados que se obtienen adquieren formas intratables. En el caso discreto es si cabe más complejo dado que sucesos simultáneos sí pueden ocurrir. Este problema era solventado en el caso continuo mediante aproximaciones de las distribuciones generales por distribuciones tipo fase, dado que son densas en la clase de distribuciones no negativas. Pues bien, en el caso discreto esta aproximación es equivalencia e históricamente su estudio ha sido como sigue. Neuts (1975) [22] probó que toda distribución discreta con soporte finito puede ser representada mediante una distribución tipo fase. Entendemos por soporte de una distribución discreta de probabilidad el conjunto de valores donde la probabilidad no es cero. Alfa y Neuts (1995) [3] muestran esta representación. Shi y otros (1996) [44] puntualizaron que, para cualquier variable aleatoria discreta con soporte finito o infinito, se puede construir una cadena de Markov para generalizar el resultado anterior. Cuando el soporte es infinito, entonces la cadena de Markov construida da lugar a una distribución tipo fase infinita (IPH). La representación tipo fase de una distribución IPH tiene la misma estructura matricial formal que una distribución tipo fase, pero en este caso las matrices tienen orden infinito. Shi y Liu (1998) [45] establecieron la representación de la distribución.

Por lo tanto cualquier distribución discreta se puede expresar mediante una estructura matricial. Alfa y Castro (2002) [2] consideran estos resultados para modelizar un sistema discreto de fiabilidad con distribuciones generales. Dado el análisis anterior, un proceso de renovación general discreto se puede expresar de forma algorítmica matricial considerando tiempos entre llegadas distribuidos PH o IPH según si el soporte es finito o infinito respectivamente. Alfa (2004) [1] formalizó la notación de este resultado y lo aplica en sistemas de colas. En este trabajo se muestra la representación tipo fase de una distribución general con soporte finito.

LA MEMORIA

El objetivo principal de esta memoria es modelizar distintos sistemas discretos de fiabilidad de forma algebraica y algorítmica donde los tiempos implícitos del mismo tienen un comportamiento general. De esta forma, se plantea y desarrolla una metodología que resuelve los problemas planteados anteriormente, complejidad en las expresiones obtenidas en presencia de distribuciones generales, aplicabilidad e implementación computacional. Para ello se introducen las distribuciones tipo fase.

No son muchas las referencias existentes de sistemas discretos de fiabilidad y muy pocas las que consideran distribuciones tipo fase. Nosotros desarrollamos sistemas redundantes con unidades en reserva pasiva y activa, considerando en

el primer caso un número finito o infinito de unidades. En todos los modelos se introducen distintos tipos de fallos de las unidades, fallos internos o de desgaste y fallos externos o accidentales. A su vez, estos fallos pueden ser reparables o no reparables. En muchos trabajos se considera que la reparabilidad o no del fallo es independiente del tiempo hasta que se produce el mismo. Nosotros consideramos que esto no tiene por qué ser así, permitiendo que esta reparabilidad dependa de la etapa de funcionamiento en la que se encuentre el sistema. Distintas medidas se obtienen para cada uno de los sistemas, siempre con resultados algebraico matriciales de forma algorítmica. Se calcula la disponibilidad y se analiza el comportamiento del periodo de operatividad y no operatividad de los sistemas. Especial interés se tiene en el estudio del comportamiento del fallo de las unidades y del propio sistema. Para ello se realiza un estudio detallado de la probabilidad condicionada de fallo para cada tipo del mismo. Se obtiene la distribución transitoria y estacionaria de los modelos desarrollando algoritmos para su cálculo. El estudio de las medidas de funcionamiento se realiza en régimen transitorio y estacionario. En estos sistemas se introducen también función de costos y se presentan ejemplos de optimización.

Un problema que se presenta cuando se considera esta metodología para el estudio y modelización de sistemas, es el elevado orden de las distintas matrices que intervienen en el mismo. De forma que, cuando el número de unidades es elevado el orden matricial crece de forma exponencial. Este problema lo resolvemos obteniendo los resultados de forma algorítmica por bloques matriciales y aplicando la RG-factorización matricial descrita en Li y Cao (2004) [16].

Los resultados de esta memoria generalizan trabajos existentes en tiempo continuo que posteriormente pasaremos a comentar. Resaltar, como se mencionó anteriormente, que el estudio del comportamiento de un sistema de fiabilidad en tiempo discreto es más complejo, si cabe, que en el caso continuo, dada la posibilidad de ocurrencias simultáneas.

La memoria está dividida en cinco capítulos donde el primero de ellos está dedicado a la presentación de los conceptos básicos que serán utilizados. El resto de capítulos se desarrollan de forma secuencial, cada uno de ellos con modelos de fiabilidad independientes. En el segundo se presenta un sistema de fiabilidad con unidades en reserva pasiva, en el tercero un sistema con unidades en reserva pasiva y pérdida de unidades, un cuarto con unidades en reserva activa y en el último se presenta un sistema con unidades en reserva activa con pérdida de unidades. Todos los contenidos de la Memoria se han implementado computacionalmente con *Matlab* y cada modelo se ilustra mediante un ejemplo numérico. Hemos querido ser fieles a las distintas publicaciones que ha dado lugar esta memoria, conservando la misma estructura en los distintos capítulos.

En el transcurso de la investigación los resultados obtenidos se han ido presentando en distintos congresos que también se mencionan.

Capítulo 2

En el capítulo 2 se estudian en detalle distintos sistemas discretos con unidades en reserva pasiva. Este capítulo generaliza al estudiado por Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla (2004) [26] considerando tiempo discreto y una mayor caústica para el fallo de las unidades del sistema. Los resultados de este trabajo han sido publicados en las siguientes revistas:

- Reliability Engineering and System Safety (Ruiz-Castro, Pérez-Ocón y Fernández- Villodre (2008) [39])
- IEEE Transactions on Reliability (Ruiz-Castro, Fernández- Villodre y Pérez-Ocón (2009) [34]).

Por otro lado, los contenidos de este capítulo se han presentado en distintos congresos de carácter nacional e internacional como son:

- SEIO 2006 (Ruiz-Castro y otros (2006) [41]). Se presenta el modelo descrito en este capítulo en el caso de haber un número finito de unidades sin considerar fallos accidentales.
- ESREL 2006 (Ruiz-Castro y otros (2006)[35]). Se presenta el modelo con un número ilimitado de unidades sin considerar fallos accidentales.
- ASMDA 2007 (Ruiz-Castro y otros (2007)[36]). Se presenta el modelo con un número ilimitado de unidades considerando fallos accidentales y la simplificación del mismo.
- ESREL 2008 (Ruiz-Castro y otros (2008) [38]). Se presenta el modelo descrito en este capítulo en el caso de haber un número finito de unidades considerando fallos accidentales y reparabilidad de los mismos dependiente del tiempo hasta el fallo.

Capítulo 3

En este capítulo 3 se analiza un sistema con múltiples unidades en reserva pasiva donde el fallo no reparable ocasiona la pérdida de la unidad. El hecho de considerar pérdida de unidades generaliza el capítulo anterior en cierto sentido, no siendo el nuevo estudio una consecuencia inmediata del anterior.

Este capítulo se ha publicado en la revista

- Discrete Events Dynamic Systems (Ruiz-Castro, Fernández-Villodre y Pérez-Ocón (2009) [33]).

Los contenidos de este capítulo se han presentado en el congreso

- SEIO 2007 (Ruiz-Castro y otros (2007) [40]). Se presenta el modelo del sistema de este capítulo considerando fallos externos distribuidos de forma geométrica y reparabilidad de éstos independiente del tiempo de fallo.

Capítulo 4

En el capítulo 4 se presenta y estudia un sistema con un número finito de unidades dispuestas en reserva activa. Este sistema generaliza al descrito en el capítulo 2, obteniéndose este primero cuando las unidades en reserva tienen un comportamiento pasivo. Por otro lado, este capítulo también generaliza el sistema propuesto por Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla (2006) [28]. En este trabajo se modeliza un sistema con unidades en reserva activa con tiempos de vida de las unidades en reserva distribuidos de forma exponencial. Nosotros consideramos la distribución del tiempo de funcionamiento de la unidad principal y de las unidades en reserva distribuidas de forma general, considerando su representación tipo fase e introducimos distintos tipos de fallo. Los fallos de las unidades pueden ser internos o externos, con tiempos entre fallos distribuidos de forma general, siendo estos reparables o no reparables. En este capítulo se estudia el comportamiento del sistema en régimen transitorio y estacionario, haciendo hincapié en las medidas de interés, disponibilidad y probabilidad condicionada de fallo. En este modelo se introducen costos. El contenido de este capítulo ha sido publicado en la revista

- IIE Transactions (Ruiz-Castro, Fernández-Villodre y Pérez-Ocón (2009) [32]).

Se ha presentado el modelo en el congreso internacional

- MMR 2007 (Ruiz-Castro y otros (2007) [37]). En este trabajo se considera que los tiempos de fallo de las unidades en reserva activa se distribuyen de forma geométrica sin haber fallos accidentales.

Capítulo 5

En el último capítulo de la memoria consideramos el sistema del capítulo anterior, pero al igual que se hizo con el sistema con unidades en reserva pasiva, los fallos no reparables producen la eliminación de la unidad. Esta generalización del capítulo anterior da lugar a un nuevo sistema complejo que es analizado en detalle, no siendo una consecuencia inmediata de capítulos anteriores. Este capítulo está siendo sometido en la revista IIE Transactions y ha sido presentado en el congreso

- SEIO 2009 (Ruiz-Castro y otros (2009) [31]).

Agradecimientos

Una vez realizada esta Memoria, llega el turno de los agradecimientos y no puedo dejar pasar la oportunidad de mostrar mi más sincera gratitud a las personas que me han acompañado.

A mi director de tesis Prof. Dr. Juan Eloy Ruiz Castro, quien me ha guiado, orientado y apoyado en mi labor investigadora, me ha aportado las herramientas necesarias y ha tratado esta Memoria como si de la suya propia se tratase. En definitiva, ha sido la luz que me ha guiado en este largo camino que ha supuesto para mí el trabajo que ocupa estas páginas. En ocasiones, el sustento que he necesitado no ha sido de carácter científico o investigador y ahí ha estado Juan Eloy para proporcionarme ese aliento y apoyo infinito que me hacía falta para continuar. Sin él no me habría sido posible firmar esta Memoria. Por ello le estoy eternamente agradecida. No he encontrado en él sólo un director de tesis, sino un compañero, colega y amigo.

Al Prof. Dr. Rafael Pérez-Ocón porque gracias a sus clases en mi último año de carrera comencé a trabajar en lo que acabaría siendo esta Memoria, por el apoyo prestado y por sus consejos que también me han acompañado durante este trabajo y los recordaré para que lo hagan en lo venidero. Gracias Rafael.

Al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada por las facilidades dadas para la realización de esta tesis.

A Adrián Galdrán por resolver mis dudas \LaTeX a cualquier día y hora.

Gemma Fernández-Calvillo Villodre

Índice general

1. Conceptos básicos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Distribución tipo fase discreta	1
1.3. Medidas	3
1.4. Proceso de renovación tipo fase	4
1.5. Proceso discreto de cuasi nacimiento y muerte (QBD)	5
1.6. Costos	6
1.6.1. Coste total esperado en un tiempo finito	6
1.6.2. Coste esperado por unidad de tiempo a largo plazo	7
1.7. Factorización RG	7
2. Sistema con múltiples componentes en reserva pasiva	13
2.1. Introducción	13
2.2. El Sistema básico (Sistema I)	14
2.2.1. Hipótesis del modelo	14
2.2.2. Sistema con infinitas unidades	15
2.2.3. Sistema con un número finito de unidades	17
2.2.4. Sistema con notación simplificada	18
2.3. Sistemas derivados	20
2.3.1. Distribución transitoria del sistema	23
2.4. Distribución estacionaria	24
2.4.1. Distribución estacionaria para un sistema con un número finito de unidades	24
2.4.2. Distribución estacionaria para un sistema con un número infinito de unidades	26
2.5. Distribución del periodo de funcionamiento para el caso finito	27
2.6. Medidas de fiabilidad	29
2.6.1. Disponibilidad	30
2.6.2. Probabilidad Condicionada de fallo	30
2.7. Costos para un sistema con un número finito de unidades y fallos internos y externos	34
2.7.1. Costo neto medio para un ciclo de funcionamiento	35
2.7.2. Algunos costos netos medios	36

2.8. Aplicación numérica	36
3. Sistema con múltiples componentes en reserva pasiva y pérdida de unidades	47
3.1. Introducción	47
3.2. El sistema	48
3.2.1. Hipótesis del modelo	48
3.2.2. Espacio de estados	50
3.2.3. Matriz de probabilidades de transición	50
3.3. Probabilidades de transición, disponibilidad y número esperado de visitas	55
3.4. El periodo de funcionamiento	57
3.5. Probabilidad condicionada de fallo y número esperado de fallos	58
3.5.1. Probabilidad Condicionada de fallo de la unidad principal	58
3.5.2. Probabilidad condicionada de fallo del sistema	60
3.5.3. Número esperado de fallos	61
3.6. Costos	62
3.6.1. Vector de costos	63
3.6.2. Algunos beneficios medios	64
3.6.3. Beneficio medio neto acumulado, incluyendo coste por pérdida de unidades	65
3.7. Aplicación	66
3.8. Algoritmización de medidas	69
3.8.1. Cálculo de $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$	72
3.8.2. Probabilidades de transición y medidas transitorias	77
3.8.3. Algoritmización de los costos	84
4. Sistema con múltiples componentes en reserva activa	87
4.1. Introducción	87
4.2. El sistema	88
4.2.1. Estados del sistema	88
4.3. El modelo	89
4.4. Distribución estacionaria	93
4.5. Periodo de funcionamiento	96
4.6. Medidas de fiabilidad	97
4.6.1. Disponibilidad	97
4.6.2. Probabilidad condicionada de fallo	98
4.7. Costos	101
4.7.1. Beneficio medio neto para el periodo de funcionamiento	102
4.7.2. Beneficio medio neto por unidad de tiempo a largo plazo	103
4.8. Aplicación	103
5. Un sistema discreto complejo con reserva activa y pérdida de unidades	109
5.1. Introducción	109
5.2. Descripción del modelo	110

5.2.1. Estados del sistema	111
5.2.2. Construcción de la matriz de probabilidades de transición	112
5.3. Distribución estacionaria	121
5.4. Periodo de funcionamiento	125
5.5. Probabilidades de transición, disponibilidad y probabilidades condi- cionadas de fallo	126
5.5.1. Probabilidades de transición	127
5.5.2. Disponibilidad	127
5.5.3. Probabilidad condicionada de fallo	127
5.5.4. Probabilidad condicionada de fallo del sistema	128
5.6. Aplicación numérica	129
5.7. Apéndices	136
5.7.1. Apéndice A	136
5.7.2. Apéndice B	137

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Introducción

En este primer capítulo se introducen los conceptos básicos sobre sistemas de fiabilidad que se emplean en los sucesivos capítulos de esta Memoria. Comenzaremos hablando de las distribuciones que constituyen el eje principal del presente trabajo, las distribuciones tipo fase discretas. Daremos su definición y medidas asociadas. Asimismo, se dará la definición de proceso de renovación tipo fase. Este tipo de proceso interviene en los sistemas que se analizan en los capítulos. Se introducen costos y se estudia el proceso discreto de cuasi nacimiento y muerte que se empleará para modelizar algunos sistemas que se presentan en la Memoria. Finalmente, se presenta el método de factorización RG que emplearemos para algoritmizar los resultados.

1.2. Distribución tipo fase discreta

Las distribuciones tipo fase fueron introducidas por Neuts(1975,1981) [22] [23]. Esta clase de distribuciones destacan por su estructura algebraica matricial que permite obtener sus principales medidas de forma algorítmica. Estas buenas propiedades son heredadas cuando son aplicadas en distintos campos como teoría de colas, supervivencia y fiabilidad.

Consideramos un Proceso de Markov con espacio de estados $\{1, 2, \dots, m, m+1\}$, donde los m primeros estados son transitorios y el estado $m+1$ es absorbente. La matriz de probabilidades de transición asociada al proceso viene dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{T} es una matriz subestocástica tal que $\mathbf{I} - \mathbf{T}$ es no singular y contiene las probabilidades de transición entre estados transitorios. El vector columna

\mathbf{T}^0 contiene las probabilidades de transición desde los estados transitorios al absorbente. Dado que \mathbf{P} es estocástica se tiene que $\mathbf{T}\mathbf{e} + \mathbf{T}^0 = \mathbf{e}$, siendo \mathbf{e} un vector columna de unos de dimensión apropiada ¹. La distribución inicial asociada al proceso viene dada por (α, α_{m+1}) , siendo α la distribución inicial para los estados transitorios y α_{m+1} la probabilidad de que inicialmente se encuentre el proceso en el estado absorbente.

Definición 1.2.1 Una distribución de probabilidad discreta con soporte finito se dice que es una distribución tipo fase discreta con representación (α, \mathbf{T}) si y sólo si es la distribución del tiempo hasta la absorción en un proceso de Markov finito del tipo definido en (1.1).

Lema 1.2.1 La densidad de probabilidad $\{p_k\}$ del tiempo hasta la absorción en el estado $m + 1$, correspondiente al vector de probabilidad inicial (α, α_{m+1}) viene dada por

$$\begin{aligned} p_0 &= \alpha_{m+1}, \\ p_k &= \alpha \mathbf{T}^{k-1} \mathbf{T}^0; \quad \text{para } k \geq 1, \end{aligned}$$

donde (α, α_{m+1}) es el vector de probabilidad inicial correspondiente a la Cadena de Markov Discreta objeto de estudio.

La función generatriz de probabilidades viene dada por

$$P(z) = \alpha_{m+1} + z\alpha (\mathbf{I} - z\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^0.$$

Por lo tanto, la esperanza de una distribución tipo fase viene dada por

$$\mu = \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{e}.$$

Las distribuciones tipo fase discreta muestran su idoneidad a la hora de modelizar sistemas por diferentes motivos. Un resultado muy importante de las distribuciones tipo fase es la siguiente caracterización gracias a Shi y otros(1996) [44].

Teorema 1.2.1. Cualquier distribución de probabilidad discreta con soporte finito es una distribución tipo fase.

Este teorema proporciona una potente herramienta ya que permite considerar distribuciones generales en la modelización de sistemas algoritmizando los resultados mediante las distribuciones tipo fase.

¹A lo largo de toda la memoria, aunque será indicado en cada situación, denotamos por \mathbf{e} a un vector columna de unos de dimensión apropiada. También, en otras ocasiones, denotaremos por \mathbf{e}_a a un vector columna de unos de orden a .

1.3. Medidas

Algunas de las medidas asociadas a un sistema de fiabilidad en tiempo discreto serán empleadas a lo largo del presente trabajo con el fin de analizar las características de distintos sistemas. Veremos a continuación las definiciones de estas medidas que serán de gran aplicabilidad.

Suponemos que Z_n representa el estado de un sistema en el tiempo n tomando los valores 0 (no operativo) y 1 (operativo). Suponemos también que inicialmente el sistema está operativo, es decir, $Z_0 = 1$.

Disponibilidad

Dado un sistema reparable de fiabilidad, se define la disponibilidad en un tiempo determinado como la probabilidad de que el sistema esté operativo en dicho tiempo

$$A(\nu) = Pr\{\text{sistema operativo en el tiempo } \nu\} = P\{Z_\nu = 1 | Z_0 = 1\}.$$

Fiabilidad

Dada una variable aleatoria no negativa que describe el tiempo de vida de un sistema, se define la función de fiabilidad de dicha variable en un tiempo determinado, como la probabilidad de estar operativo el sistema en dicho tiempo. Si $F(\nu)$ es la función de distribución de dicha variable, entonces la función de fiabilidad viene dada por $R(\nu) = \bar{F}(\nu) = 1 - F(\nu)$. Decimos que la fiabilidad de un sistema en el tiempo ν es la probabilidad de que dicho sistema esté operativo durante el período $0 \leq 1 \leq \dots \leq \nu$. Es decir

$$R(\nu) = P\{Z_u = 1, 0 \leq u \leq \nu | Z_0 = 1\}.$$

Probabilidad condicionada de fallo

La probabilidad condicionada de fallo de un sistema juega un papel muy importante en el estudio del análisis del mismo. Al igual que en el caso continuo la razón de fallo caracteriza a la distribución, en el caso discreto lo hace la probabilidad condicionada de fallo.

Definición 1.3.1 Dada una variable aleatoria discreta de tiempo de vida, T , no negativa, la probabilidad condicionada de fallo en un tiempo ν es igual a

$$r(\nu) = Pr\{T = \nu | T > \nu - 1\}.$$

En un sistema de fiabilidad diremos que es la probabilidad de fallar el sistema en un determinado tiempo cuando ha sobrevivido hasta dicho tiempo.

Probabilidad condicionada de fallo en una cadena de Markov

En esta memoria se modelizan sistemas de fiabilidad mediante cadenas de Markov. Sea $\{X_n; n \geq 0\}$ una cadena de Markov discreta con espacio de estados finito $E = U \cup D$, siendo U y D el conjunto de estados operativos y no operativos del sistema respectivamente. Sea $P = (p_{ij})$ la matriz de probabilidades de transición y $p_i(\kappa)$ la probabilidad de estar en el estado i en el tiempo κ . Esta probabilidad se obtiene como el elemento i -ésimo del vector $\alpha \mathbf{P}^\kappa$, siendo α el vector con la distribución inicial de la cadena.

Entonces, la probabilidad de ocurrir un fallo en el tiempo ν , cuando en el tiempo $\nu - 1$ el sistema estaba operativo, viene dada por

$$r(\nu) = \sum_{i \in U, j \in D} p_i(\nu - 1)p_{ij}.$$

A lo largo de la memoria se distinguirán distintos tipos de fallo.

Medidas asociadas a la probabilidad condicionada de fallo

Asociada a la medida anterior se pueden calcular otras de gran interés como el número medio de fallos hasta un tiempo determinado ν cuando para su ocurrencia el sistema debe estar operativo. No es complejo comprobar que dicha medida viene dada por

$$NF(\nu) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sum_{i \in U, j \in D} p_i(\kappa - 1)p_{ij}.$$

Si la cadena de Markov tiene una clase de estados absorbente, entonces el número medio de fallos antes de la absorción viene dado por

$$NF = \sum_{\kappa \geq 1} \sum_{i \in U, j \in D} p_i(\kappa - 1)p_{ij}.$$

1.4. Proceso de renovación tipo fase

Los procesos de renovación son bien conocidos y su literatura es abundante.

Definición 1.4.1 (Proceso de Renovación). Un proceso de recuento $\{N_\nu; \nu \geq 0\}$ se dice un proceso de renovación si los tiempos entre ocurrencias $\{X_n; n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas.

Cuando se tiene que los tiempos entre ocurrencias se distribuyen tipo fase entonces hablamos de un proceso de renovación tipo fase.

Formalmente, de forma constructiva, queda como sigue. Suponemos una cadena de Markov discreta con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, siendo

los m primeros transitorios y el último absorbente. Asociado a este proceso se tiene la distribución tipo fase (α, \mathbf{T}) .

Suponemos que cuando se alcanza el estado absorbente, de forma instantánea se reinicia el proceso con vector de probabilidades iniciales (α, α_{m+1}) y así sucesivamente. No es complejo ver que si se continúa este proceso indefinidamente se construye un nuevo proceso de Markov en el cual el estado $m + 1$ es un estado instantáneo. Suponemos en esta memoria que $\alpha_{m+1} = 0$. De esta forma se ha obtenido un nuevo proceso de Markov discreto con matriz de probabilidades de transición $\mathbf{P} = \mathbf{T} + \mathbf{T}^0 \alpha$.

Las sucesivas visitas al estado instantáneo forman un proceso de renovación con distribución subyacente tipo fase (α, \mathbf{T}) . El proceso así obtenido es un proceso de renovación tipo fase.

1.5. Proceso discreto de quasi nacimiento y muerte (QBD)

En esta sección consideramos el caso particular de una cadena de Markov donde la matriz de probabilidades de transición es tridiagonal por bloques.

Un proceso de quasi-nacimiento-y-muerte (QBD) es un proceso de Markov con matriz de probabilidades de transición de la forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0 & & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & \\ & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \dots \\ & & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \dots \\ & & & & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{B}_0 \mathbf{e} + \mathbf{A}_0 \mathbf{e} = \mathbf{B}_1 \mathbf{e} + \mathbf{A}_1 \mathbf{e} + \mathbf{A}_0 \mathbf{e} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{e} = \mathbf{e}$, siendo \mathbf{e} un vector columna de unos de dimensión apropiada. Suponemos que la cadena es irreducible y notamos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ es una matriz de probabilidades de transición.

El estudio de la estacionariedad de un proceso de quasi nacimiento y muerte viene dado en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1 El proceso irreducible \mathbf{P} es recurrente positivo si y sólo si la solución minimal no negativa de la ecuación

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 = \mathbf{R}$$

tiene todos sus valores propios en el disco unidad y el sistema finito de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 (\mathbf{B}_0 + \mathbf{R} \mathbf{B}_1 - \mathbf{I}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e} &= 1 \end{aligned}$$

tiene una solución única positiva.

La distribución estacionaria de \mathbf{P} viene dada por $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots]$ de la forma

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 \mathbf{R}^i,$$

para $i \geq 0$.

Análogamente se pueden obtener resultados para el caso de un proceso QBD acotado. En cada capítulo se hallará la distribución estacionaria asociada a cada modelo.

1.6. Costos

Suele resultar de utilidad realizar el análisis económico asociado al sistema objeto de estudio. Este estudio suele realizarse a través de los costos asociados al sistema. Definimos a continuación los vectores de costos y métodos para calcular dichos costos considerando una estructura markoviana.

Sean X_n los estados de un sistema en un determinado instante n . Consideramos que $\{X_n, n \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en tiempo discreto con espacio de estados $\{1, 2, \dots, N\}$ y con matriz de probabilidades de transición \mathbf{P} . Notamos por p_j^r a la probabilidad de estar en el estado j la cadena en el tiempo r . Suponemos que el sistema incurre en un coste aleatorio de $C(i)$ unidades monetarias (u.m.) con cada visita al estado i . Sea $c(i) = E(C(i))$ el coste esperado en que se incurre con cada visita al estado i . No obstante, aunque se asume $c(i)$ como un coste por visita, no necesariamente tiene que ser así, puede ser cualquier otra cantidad, como el beneficio por visita, la pérdida por visita, etc. Consideraremos distintas medidas de cálculo del coste. Son las que estudiamos en las dos subsecciones siguientes. Un desarrollo pormenorizado puede verse en Kulkarni (1999)[15].

1.6.1. Coste total esperado en un tiempo finito

Desarrollaremos ahora métodos para calcular el coste total esperado (CTE) hasta un instante finito n , llamado horizonte. El coste actual en que se incurre en el instante r cuando se visita el estado X_r es $C(X_r)$. De esta forma, el coste total actual hasta el instante n viene dado por

$$\sum_{r=0}^n C(X_r),$$

y el CTE viene dado por

$$E\left(\sum_{r=0}^n C(X_r)\right).$$

Para $1 \leq i \leq N$, definimos

$$\begin{aligned}
g(i, n) &= E \left(\sum_{r=0}^n C(X_r) | X_0 = i \right) = \sum_{r=0}^n E(C(X_r) | X_0 = i) \\
&= \sum_{r=0}^n \sum_{j=1}^N p_j^r \cdot c(j)
\end{aligned}$$

como el CTE hasta el instante n , comenzando desde el instante i .

1.6.2. Coste esperado por unidad de tiempo a largo plazo

En muchas situaciones ocurre que el valor n tiende a infinito, principalmente por el contexto del sistema objeto de estudio. En estos casos, el CTE $g(i, n)$ calculado en la sección anterior tiende a infinito también. Es en estos casos cuando tiene más sentido calcular la razón de coste esperada por unidad de tiempo a largo plazo. Esta se define como,

$$g(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(i, n)}{n+1}.$$

El siguiente teorema (cuya demostración no exponemos en esta introducción) muestra cómo la medida definida es independiente de i en el caso de una Cadena de Markov Discreta irreducible, además proporciona un método sencillo para obtenerla.

Teorema 1.6.1 Supongamos una Cadena de Markov Discreta irreducible $\{X_n, n \geq 0\}$ con distribución de ocupación $\hat{\pi}$. Entonces,

$$g = g(i) = \sum_{j=1}^N \hat{\pi}_j c(j).$$

Nota: La distribución de ocupación se define como sigue. Sea $N_j(n)$ el número de veces que una Cadena de Markov en tiempo Discreto visita el estado j a lo largo de los instantes $\{1, 2, \dots, n\}$. La ocupación del estado j se define como, $\hat{\pi}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(N_j(n))}{n+1}$. Así pues, la ocupación del estado j es la misma que la fracción de tiempo a largo plazo de permanencia en el estado j en una Cadena de Markov Discreta. Es sabido que la distribución de ocupación $\hat{\pi} = [\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots, \hat{\pi}_N]$, si existe, satisface las mismas ecuaciones que la distribución estacionaria.

1.7. Factorización RG

Como ya hemos mencionado con anterioridad, la utilización de las distribuciones tipo fase proporciona resultados en forma algebraica, lo cual facilita su

ejecución. No obstante, en ocasiones aparecen medidas donde se ven involucradas matrices de alto rango con las que es necesario operar (cálculo de inversas, productos, etc.). Es en estos casos cuando resulta de gran utilidad emplear el método de Factorización RG dado en Li y Cao [16]. Este método consiste básicamente en descomponer la matriz de modo que sea más sencillo operar con ella. En esta sección veremos en qué consiste este método en líneas generales.

Consideramos un Proceso de casi nacimiento y muerte (QBD) discreto y finito con un número finito de niveles, cuya matriz de probabilidades de transición viene dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(0)} & \mathbf{A}_0^{(0)} & & & & \\ \mathbf{A}_2^{(1)} & \mathbf{A}_1^{(1)} & \mathbf{A}_0^{(1)} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{A}_2^{(N)} & \mathbf{A}_1^{(N)} & \mathbf{A}_0^{(N)} \\ & & & & \mathbf{A}_2^{(N+1)} & \mathbf{A}_1^{(N+1)} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

y un Proceso irreducible con infinitos niveles cuya matriz de probabilidades de transición viene dada por,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(0)} & \mathbf{A}_0^{(0)} & & & \\ \mathbf{A}_2^{(1)} & \mathbf{A}_1^{(1)} & \mathbf{A}_0^{(1)} & & \\ & \mathbf{A}_2^{(2)} & \mathbf{A}_1^{(2)} & \mathbf{A}_0^{(2)} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Consideraremos que cada elemento (bloque) de las matrices anteriores es finito.

Factorización RG tipo LU

Obtendremos ahora el tipo LU de Factorización RG para el proceso QBD irreducible con matriz de probabilidades de transición finita e infinita.

Para el proceso QBD irreducible con $N + 2$ niveles dado en (1.2), consideramos

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{A}_1^{(0)}$$

y

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{A}_1^{(k)} + \mathbf{A}_2^{(k)} (-\mathbf{U}_{k-1}^{-1}) \mathbf{A}_0^{(k-1)}, \quad 1 \leq k \leq N + 1. \quad (1.4)$$

Por tratarse de un proceso QBD irreducible, la matriz \mathbf{U}_k es invertible para $0 \leq k \leq N$. Sin embargo, \mathbf{U}_{N+1} es diferente a las matrices \mathbf{U}_k , para $0 \leq k \leq N$.

Por lo tanto, \mathbf{U}_{N+1} será invertible si el proceso QBD es transitorio, en otro caso es singular.

Definimos el tipo LU, y las medidas R y G como,

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A}_2^{(k)} (-\mathbf{U}_{k-1}^{-1}), \quad 1 \leq k \leq N+1, \quad (1.5)$$

y

$$\mathbf{G}_k = (-\mathbf{U}_k^{-1}) \mathbf{A}_0^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (1.6)$$

A partir de las ecuaciones (1.5) y (1.4), es fácil comprobar que la secuencia matricial $\{\mathbf{R}_k, 1 \leq k \leq N\}$ es la única solución no negativa para el sistema de ecuaciones matriciales,

$$\mathbf{R}_{k+1} \mathbf{R}_k \mathbf{A}_0^{(k-1)} + \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{A}_1^{(k)} + \mathbf{A}_2^{(k+1)} = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1.7)$$

con la condición frontera,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}_2^{(1)} (-\mathbf{U}_0^{-1}).$$

A partir de (1.7) se tiene,

$$\mathbf{R}_{k+1} = -\mathbf{A}_2^{(k+1)} \left[\mathbf{R}_k \mathbf{A}_0^{(k-1)} + \mathbf{A}_1^{(k)} \right]^{-1}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

De forma análoga, empleando (1.6) y (1.4) se tiene que la secuencia matricial $\{\mathbf{G}_k, 1 \leq k \leq N\}$ es la única solución no negativa para el sistema de ecuaciones matriciales

$$\mathbf{A}_0^{(k)} + \mathbf{A}_1^{(k)} \mathbf{G}_k + \mathbf{A}_2^{(k)} \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{G}_k = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1.8)$$

con la condición frontera,

$$\mathbf{G}_0 = (-\mathbf{U}_0^{-1}) \mathbf{A}_0^{(0)}.$$

A partir de (1.8) se tiene que,

$$\mathbf{G}_k = - \left[\mathbf{A}_1^{(k)} + \mathbf{A}_2^{(k)} \mathbf{G}_{k-1} \right]^{-1} \mathbf{A}_0^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

El siguiente teorema nos proporciona la Factorización RG tipo LU para el proceso QBD irreducible con un número finito de niveles.

Teorema 1.7.1 Para el proceso QBD finito dado en (1.2), la Factorización RG tipo LU viene dada por

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_L) \mathbf{U}_D (\mathbf{I} - \mathbf{G}_U),$$

donde

$$U_D = \text{diag} (\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N, \mathbf{U}_{N+1}),$$

$$R_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{R}_N & \mathbf{0} & \\ & & & & \mathbf{R}_{N+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_U = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_0 & & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_N \\ & & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Para el caso irreducible del QBD con matriz de probabilidades de transición infinita dada en (1.3) la factorización puede extenderse de forma sencilla. Basta tomar $N \rightarrow \infty$. Dicha factorización viene dada por

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_L) \mathbf{U}_D (\mathbf{I} - \mathbf{G}_U),$$

donde

$$\mathbf{U}_D = \text{diag}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \dots),$$

$$R_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & & & & \\ & \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} & & & \\ & & \mathbf{R}_3 & \mathbf{0} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_U = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_0 & & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & & & \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Factorización RG tipo UL

Veamos ahora cómo se obtiene el segundo tipo de factorización RG, el tipo UL. Para ello, partimos del mismo supuesto que en el caso anterior. Sea un proceso QBD discreto irreducible con matriz de probabilidades de transición dada por (1.2) o bien (1.3). Para el caso finito, con $N + 2$ niveles, escribiremos,

$$\mathbf{U}_{N+1} = \mathbf{A}_1^{(N+1)}$$

y

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{A}_1^{(k)} + \mathbf{A}_0^{(k)} \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{A}_2^{(k+1)}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Se tiene que la matriz \mathbf{U}_k tiene inversa para $1 \leq k \leq N + 1$, mientras que la matriz \mathbf{U}_0 tiene inversa si el proceso QBD es transitorio, en otro caso, es singular.

Definimos el tipo UL y las R y G medidas como,

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A}_0^{(k)} (-\mathbf{U}_{k+1}^{-1}), \quad 0 \leq k \leq N,$$

y

$$\mathbf{G}_k = (-\mathbf{U}_k^{-1}) \mathbf{A}_2^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N+1.$$

Es claro que la secuencia matricial $\{\mathbf{R}_k, 0 \leq k \leq N-1\}$ es la única solución no negativa para el sistema de ecuaciones matriciales

$$\mathbf{A}_0^{(k)} + \mathbf{R}_k \mathbf{A}_1^{(k+1)} + \mathbf{R}_k \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{A}_2^{(k+2)} = 0, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (1.9)$$

con la condición frontera

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{A}_0^{(N)} (-\mathbf{U}_{N+1}^{-1}).$$

A partir de (1.9) se tiene,

$$\mathbf{R}_k = -\mathbf{A}_0^{(k)} \left[\mathbf{A}_1^{(k+1)} + \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{A}_2^{(k+2)} \right]^{-1}, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

De forma similar, la secuencia matricial $\{\mathbf{G}_k, 1 \leq k \leq N\}$ es la única solución no negativa para el sistema de ecuaciones matriciales

$$\mathbf{A}_0^{(k)} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{G}_k + \mathbf{A}_1^{(k)} \mathbf{G}_k + \mathbf{A}_2^{(k)} = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1.10)$$

con la condición frontera

$$\mathbf{G}_{N+1} = (-\mathbf{U}_{N+1}^{-1}) \mathbf{A}_2^{(N+1)}.$$

Empleando (1.10) tenemos,

$$\mathbf{G}_k = -\left[\mathbf{A}_0^{(k)} \mathbf{G}_{k+1} + \mathbf{A}_1^{(k)} \right]^{-1} \mathbf{A}_2^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Teorema 1.7.2 Para el proceso QBD finito dado en (1.2), el tipo UL de la Factorización RG viene dado por

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_U) \mathbf{U}_D (\mathbf{I} - \mathbf{G}_L),$$

donde

$$\mathbf{U}_D = \text{diag}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N, \mathbf{U}_{N+1}),$$

$$\mathbf{R}_U = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_0 & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{R}_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \\ & & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{G}_N & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{G}_{N+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

En este caso, el caso infinito no se obtiene de forma trivial tomando $N \rightarrow \infty$. El procedimiento es algo más complejo. Puede verse en Li y Cao [16].

Capítulo 2

Sistema con múltiples componentes en reserva pasiva

2.1. Introducción

En este capítulo se estudiará en profundidad un sistema con múltiples componentes y reserva pasiva. Se comienza describiendo un sistema inicial que consta de una unidad principal (unidad en activo) y el resto de unidades en reserva pasiva. A lo largo de este estudio distinguiremos entre el caso finito, en el que consideramos un número limitado de unidades o componentes del sistema y el caso infinito en el que dicho número es ilimitado. El sistema está expuesto a distintos tipos de fallo. Puede sufrir por un lado fallos internos, que siempre son no reparables y por otro, fallos externos, que pueden ser reparables o no reparables. Existe un único reparador y cuando la unidad principal del sistema sufre un fallo reparable, ésta va al canal de reparación e instantáneamente, una unidad de la reserva pasa a ocupar el lugar de la unidad principal.

Descrito este primer sistema básico se realizan cinco modificaciones. Se prueba que cada uno de los sistemas resultantes son equivalentes a uno con fallos internos. Estos sistemas son modelizados considerando un proceso de cuasi-nacimiento-y-muerte. Se estudia el comportamiento en régimen transitorio y estacionario y se calculan medidas de interés asociadas a los sistemas. Entre estas medidas se tiene la función de fiabilidad, la razón de fallo BMP definida por Barlow y otros (1963, 1975) [6], [7] y la razón de fallo RG propuesta por Roy y Gupta (1992) [30]. Propiedades asintóticas para los estimadores de estas medidas son descritas en Sadek y Linnios (2002) [43]. Otro estudio sobre inferencia en cadenas de Markov es el que se presenta en Menéndez y otros (1997) [20].

Los tiempos implicados en el modelo, esto es, el tiempo de vida de la unidad

principal, y los tiempos de reparación siguen distribuciones generales. En Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla(2004)[26] se analiza un sistema como el que nos ocupa en este capítulo, analizado en tiempo continuo. En este trabajo se realiza una generalización del anterior al considerar distintos tipos de fallos y obtener consecuencias que no se derivan de forma inmediata del caso continuo.

Los resultados de este trabajo han sido publicados en las revistas *Reliability Engineering and System Safety* (Ruiz-Castro, Pérez-Ocón y Fernández-Villodre (2008) [39]) e *IEEE Transactions on Reliability* (Ruiz-Castro, Fernández-Villodre y Pérez-Ocón (2009) [34]).

El capítulo está organizado del siguiente modo. En primer lugar, en la sección 2.2 se realiza una descripción del sistema básico considerando fallos externos e internos. Distinguiremos para esta descripción entre el caso finito y el infinito, analizando cada caso por separado. En la sección 2.3 se describen distintos tipos de sistemas derivados de los del caso finito e infinito básico. Posteriormente obtendremos la distribución estacionaria en la sección 2.4. En la sección 2.5 se introduce la distribución del periodo de funcionamiento y la del periodo de no funcionamiento. En la sección 2.6 se obtienen distintas medidas de fiabilidad, tanto en forma matricial como algorítmica. En la sección 2.7 se introducen costos en el modelo. Finalmente, se realizará una aplicación numérica que explicará el significado de los cálculos obtenidos a lo largo del capítulo en la sección 2.8. Los resultados obtenidos en la aplicación numérica han sido posibles gracias a la implementación computacional con Matlab.

2.2. El Sistema básico (Sistema I)

En esta sección presentamos las hipótesis del sistema básico. Denotaremos a éste por Sistema I y consideraremos dos casos: el caso finito y el caso infinito.

2.2.1. Hipótesis del modelo

Consideramos un sistema con múltiples unidades, en número finito o infinito. Una es la principal, la que está operativa, y el resto están en reserva pasiva. Dicho sistema está sujeto a distintos tipos de fallo. La unidad principal puede sufrir un fallo de desgaste (fallo interno) o un fallo externo. Un fallo externo puede ser reparable o no reparable. Cuando ocurre un fallo reparable, la unidad pasa al canal de reparación. Se considera un único reparador. Cuando ocurre un fallo no reparable, la unidad se elimina del sistema. Los fallos externos ocurren siguiendo un proceso de renovación discreto con distribución general y cuando un fallo accidental ocurre, éste es reparable con probabilidad p y no reparable con probabilidad $q = 1 - p$. Los tiempos operativos y de reparación siguen distribuciones generales discretas. El sistema está sometido a las siguientes hipótesis.

Hipótesis 1. El tiempo hasta el fallo de la unidad principal debido a un fallo

de desgaste (fallo interno) se distribuye tipo fase con representación $PH(\alpha, \mathbf{T})$, de orden m .

Hipótesis 2. Los fallos externos ocurren siguiendo un proceso de renovación discreto tipo fase, con distribución $PH(\gamma, \mathbf{L})$, de orden s .

Hipótesis 3. El tiempo de reparación se distribuye tipo fase con representación $PH(\beta, \mathbf{S})$, de orden r .

Hipótesis 4. Los fallos externos son reparables con probabilidad p y no reparables con probabilidad $q = 1 - p$.

Hipótesis 5. Los tiempos definidos anteriormente son independientes.

Es importante señalar que en el caso discreto, a diferencia del caso continuo, la ocurrencia de diferentes eventos simultáneamente es posible. Por ejemplo, si la unidad de tiempo es un día, la ocurrencia de un fallo externo y la completitud de una reparación en el mismo día es posible. Por tanto, tendremos en cuenta para este estudio que pueden ocurrir al mismo tiempo en el sistema, que se complete una reparación, fallos externos y fallos de desgaste.

2.2.2. Sistema con infinitas unidades

Para el estudio de este sistema, añadimos dos hipótesis más a las ya descritas anteriormente.

Hipótesis 6. Cuando ocurre un fallo, la unidad principal es reemplazada por una nueva.

Hipótesis 7. Existen infinitas unidades en reserva pasiva.

Esta última hipótesis puede ser considerada cuando una unidad que se rompe siempre es reemplazada o también como una aproximación de un sistema con un gran número de unidades.

El sistema opera sin interrupción puesto que siempre existen unidades en reserva. Este modelo supone una aproximación a los sistemas en los que se cuenta con un gran número de reservas.

El sistema ya descrito puede ser modelizado mediante un proceso de Markov discreto con un vector infinito de espacio de estados. Denotaremos por X_κ el número de unidades no operativas en el instante κ . Considerando cualquier valor de esta cantidad aleatoria, las diferentes distribuciones tipo fase involucradas en el sistema ocupan distintas fases. La etapa física que ocupa el sistema queda determinada por las diferentes fases ocupadas por las variables aleatorias definidas en las hipótesis. Definiremos los valores de X_r como macro-estados, y cada uno de éstos estados está compuesto por diferentes fases, tal y como se muestra a continuación.

El espacio de macro-estados viene dado por $E = E_1 \cup E_2$, donde

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(0, j, l); 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq s\}, \\ E_2 &= \{(i, j, l, k); i \geq 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq l \leq s, 1 \leq k \leq r\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

El macro-estado E_1 representa al sistema cuando no hay unidades en reparación. Está compuesto por vectores de la forma $(0, j, l)$, donde j denota la fase operativa de la unidad principal y l la fase del fallo externo. Este estado se denomina macro-estado 0.

Cuando en el sistema hay i unidades no operativas, diremos que el sistema ocupa el macro-estado i . Estos macro-estados se encuentran en E_2 y están formados por las fases del sistema de la forma (i, j, l, k) , donde j denota, como antes la fase de la unidad principal, l la fase del fallo externo, y k la fase de reparación.

Una vez obtenido el espacio de estados, construimos a partir de éste la matriz de probabilidades de transición asociada al sistema teniendo en cuenta las transiciones entre los macro-estados. A lo largo de todo el trabajo, \mathbf{e} denota un vector columna con todas las componentes igual a 1. Su orden quedará determinado por el contexto. Para clarificar ciertas expresiones, denotaremos por \mathbf{e}_a a un vector columna de unos de orden a . La expresión de la matriz es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \dots & & \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \dots & \\ & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{00} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma p) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma q, \\ \mathbf{B}_{01} &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma p \otimes \beta, \\ \mathbf{B}_{10} &= \mathbf{B}_{00} \otimes \mathbf{S}^0, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{B}_{00} \otimes \mathbf{S} + [\mathbf{e} \alpha - \mathbf{T}^0 \alpha] \otimes \mathbf{L}^0 \gamma p \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{A}_0 &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma p \otimes \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{B}_{00} \otimes \mathbf{S}^0 \beta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para un mejor entendimiento de la matriz \mathbf{P} , veamos cómo se obtienen algunos de sus bloques. Las entradas del bloque \mathbf{B}_{00} son las probabilidades de transición entre los vectores del macro-estado 0. Esto puede ocurrir de diferentes formas. Caso 1: existen transiciones entre fases operativas de la unidad principal y entre fases del proceso del fallo externo (gobernado por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{L}$). Caso 2: un fallo de desgaste ocurre y un fallo externo no reparable no llega al sistema

(gobernado por $\mathbf{T}^0\alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0p)$), en este caso, una unidad de la reserva ocupa el lugar de la unidad principal con distribución inicial α . Finalmente, el caso 3: un fallo externo no reparable llega al sistema (gobernado por $\mathbf{e}\alpha \otimes \mathbf{L}^0q$). En este caso una unidad de la reserva ocupa el lugar de la unidad principal con distribución inicial α y el proceso de renovación externo se inicial con distribución inicial γ .

Las entradas del bloque \mathbf{B}_{01} son las probabilidades de transición cuando un fallo externo reparable llega al sistema y el reparador está libre. Como consecuencia, la unidad principal sufre un fallo externo reparable (gobernado por $\mathbf{L}^0p\gamma$). Cuando el fallo externo ocurre, la unidad principal está operativa (el tiempo de fallo interno es mayor que el del fallo externo) y una unidad de la reserva sustituye a la unidad principal (gobernado por $(\mathbf{e} - \mathbf{T}^0\alpha)$); y comienza la reparación (gobernado por β). Por tanto,

$$\mathbf{B}_{01} = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}^0\gamma p \otimes \beta.$$

Las probabilidades de transición cuando una única unidad en el canal de reparación se repara; y un fallo no reparable llega al sistema, vienen dadas por el bloque \mathbf{B}_{10} , dado por,

$$\mathbf{B}_{10} = [\mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0\alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0\gamma p) + \mathbf{e}\alpha \otimes \mathbf{L}^0\gamma q] \otimes \mathbf{S}^0 = \mathbf{B}_{00} \otimes \mathbf{S}^0.$$

En este caso, ocurre una reparación y el comportamiento de la unidad principal con respecto a los fallos internos y externos está gobernado por \mathbf{B}_{00} . El resto de bloques se obtienen de forma análoga a los ya expuestos.

2.2.3. Sistema con un número finito de unidades

Consideramos ahora el caso finito. Esto es, el número de unidades en reserva del sistema es limitado, finito. En este caso, el proceso que gobierna el sistema también es un proceso de Markov, pero el espacio de estados es finito. El sistema funciona como en el caso anterior, pero ahora, cuando hay una unidad operativa y el resto están en reparación o esperando para ser reparadas, un fallo reparable causa el fallo del sistema si no ocurre reparación alguna. Las hipótesis expuestas previamente son válidas también para este sistema, a excepción de las hipótesis 6 y 7, que son reemplazadas por las siguientes.

Hipótesis 6 bis. Cuando ocurre un fallo no reparable, la unidad principal es siempre reemplazada por una idéntica nueva. Cuando el fallo es reparable, se reemplaza por una unidad de la reserva si queda alguna.

Hipótesis 7 bis. Existe un número finito, n , de unidades en el sistema en todo momento.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso infinito, el espacio de macroestados se define como el conjunto

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

con

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(0, j, l); 1 \leq j \leq m; 1 \leq l \leq s\}, \\
E_2 &= \{(i, j, l, k); 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq l \leq s; 1 \leq k \leq r\}, \\
E_3 &= \{(n, k); 1 \leq k \leq r\}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Los vectores del macro-estado E_3 son las fases de reparación cuando no existe unidad operativa.

La matriz de probabilidades de transición es en este caso

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \dots & & & & \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \dots & & & \\ \vdots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \dots & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ & & \vdots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{n-1,n} & \\ & & & & \mathbf{B}_{n,n-1} & \mathbf{B}_{n,n} & \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

donde los bloques son los mismos que en el caso de la matriz \mathbf{P} , excepto los siguientes

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{n-1,n} &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}^0 p \otimes \mathbf{S}, \\
\mathbf{B}_{n,n-1} &= \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\
\mathbf{B}_{n,n} &= \mathbf{S}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En este caso finito, cuando sólo una unidad está operativa y ocurre un fallo reparable, es decir, la transición desde el macro-estado $n-1$ al macro-estado n , todas las unidades están bajo reparación y el sistema falla. La unidad principal está operativa cuando ocurre el fallo y no se realiza reparación (gobernado por $(\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}^0 p \otimes \mathbf{s}$). Desde este estado, en el que todas las unidades se encuentran bajo reparación, puede ocurrir un cambio de fase en la reparación (gobernado por \mathbf{S}) y la transición se produce al mismo macro-estado. Por otro lado, cuando todas las unidades están no operativas, puede ocurrir una reparación; una unidad nueva comienza la reparación (gobernado por $\mathbf{S}^0 \beta$), la unidad comienza a funcionar con distribución inicial α y el proceso de renovación correspondiente para los fallos externos comienza con distribución inicial γ (gobernado por $\alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta$).

2.2.4. Sistema con notación simplificada

Dedicamos esta sección a simplificar las expresiones de los bloques definidos en los modelos anteriores. La forma de hacerlo será interpretando el bloque

\mathbf{B}_{00} en (2.3). En el modelo definido, ya sea el caso finito o infinito, se puede interpretar que el tiempo transcurrido hasta la llegada de un fallo reparable sigue una distribución tipo fase con representación $PH(\varepsilon, \mathbf{M})$, con $\varepsilon = \alpha \otimes \gamma$ y $\mathbf{M} = \mathbf{B}_{00}$. El vector de absorción \mathbf{M}^0 correspondiente a esta distribución es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^0 &= \mathbf{e}_{ms} - \mathbf{M}\mathbf{e}_{ms} \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [\mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma p) + \mathbf{e}_m \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma q] \mathbf{e}_{ms} \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{T} \otimes \mathbf{L}) \mathbf{e}_{ms} + (\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma p)) \mathbf{e}_{ms} \\ &\quad + (\mathbf{e}_m \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma q) \mathbf{e}_{ms}]. \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{e}_{ms} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s$, la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^0 &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{T} \otimes \mathbf{L}) (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s) + (\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma p)) (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s) \\ &\quad + (\mathbf{e}_m \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma q) (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s)] \\ &= \mathbf{e}_{ms} \\ &\quad - [(\mathbf{T}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}\mathbf{e}_s) + (\mathbf{T}^0 \alpha \mathbf{e}_m \otimes (\mathbf{L}\mathbf{e}_s + \mathbf{L}^0 \gamma \mathbf{e}_s p)) + (\mathbf{e}_m \alpha \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 \gamma \mathbf{e}_s q)] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{T}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}\mathbf{e}_s) + (\mathbf{T}^0 \otimes (\mathbf{L}\mathbf{e}_s + \mathbf{L}^0 p)) + (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 q)] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{T}\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}\mathbf{e}_s) + (\mathbf{T}^0 \otimes (\mathbf{L}\mathbf{e}_s + \mathbf{L}^0 - \mathbf{L}^0 q)) + (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 q)] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + (\mathbf{T}^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0 q)) + (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 q)] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_s - \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 - \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_s + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0) \\ &\quad + \mathbf{T}^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0 q) + \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 q] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{e}_{ms} - \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 - \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 q) + \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{L}^0 q] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [(\mathbf{e}_{ms} - (\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes (\mathbf{L}^0 - \mathbf{L}^0 q))] \\ &= \mathbf{e}_{ms} - [\mathbf{e}_{ms} - (\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}^0 p] \\ &= (\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}^0 p. \end{aligned}$$

De esta forma, los bloques dados en (2.3) y (2.6) definidos en las secciones 2.2.2 y 2.2.3 respectivamente, pueden ser expresados como

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{00} &= \mathbf{M}, \\
\mathbf{B}_{01} &= \mathbf{M}^0 \varepsilon \otimes \beta, \\
\mathbf{B}_{10} &= \mathbf{M} \otimes \mathbf{S}^0, \\
\mathbf{A}_0 &= \mathbf{M}^0 \varepsilon \otimes \mathbf{S}, \\
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{M} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{M}^0 \varepsilon \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\
\mathbf{A}_2 &= \mathbf{M} \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\
\mathbf{B}_{nn-1} &= \varepsilon \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\
\mathbf{B}_{n-1n} &= \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}, \\
\mathbf{B}_{nn} &= \mathbf{S}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Con la introducción de esta notación, el sistema puede ser interpretado como el anterior bajo las mismas hipótesis, y con fallos reparables que llegan al sistema siguiendo una distribución tipo fase $PH(\varepsilon, \mathbf{M})$.

Denotaremos Sistema I al sistema anterior, en los casos finito e infinito. En la nueva interpretación, la estructura del espacio de estados, finito e infinito, no varía ya que en la definición dada, sólo estaban involucradas las fases del proceso de llegada de fallos, no el tipo de éstos (reparable o no reparable).

2.3. Sistemas derivados

A partir del Sistema I ya analizado, pueden derivarse otros sistemas. Algunos como casos particulares y otros más generales. Podemos asumir que los fallos internos y externos pueden ser reparables o no reparables y que estos fallos pueden depender o no del tiempo hasta el fallo.

En este apartado realizamos un estudio de estos sistemas.

SISTEMA II: Un sistema con fallos internos únicamente

Si los fallos que sufre el sistema son sólo internos, esto es, no se dan fallos externos, obtenemos un sistema que resulta ser un caso particular del Sistema I con

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}$$

y

$$\varepsilon = \alpha.$$

Este modelo es estudiado en Ruiz Castro et al.(2006,2008) [35],[39], para el caso infinito y finito respectivamente.

SISTEMA III: Un sistema con fallos externos únicamente

Si en el sistema no son posibles los fallos internos y sólo pueden darse fallos externos, reparables o no reparables, el espacio de estados sufre variaciones. Para el caso infinito, sería $E = E_1 \cup E_2$, con

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(0, l); 1 \leq l \leq s\}, \\ E_2 &= \{(i, l, k); i \geq 1; 1 \leq l \leq s; 1 \leq k \leq r\}, \end{aligned}$$

y para el caso finito, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, siendo

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(0, l); 1 \leq l \leq s\}, \\ E_2 &= \{(i, l, k); 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq l \leq s; 1 \leq k \leq r\}, \\ E_3 &= \{(n, k); 1 \leq k \leq r\}. \end{aligned}$$

El proceso de renovación tipo fase tiene, para este sistema, una distribución con representación $PH(\varepsilon, \mathbf{M})$, con

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma q, \\ \mathbf{M}^0 &= \mathbf{L}^0 p, \\ \varepsilon &= \gamma. \end{aligned}$$

SISTEMA IV: Un sistema con fallos internos y externos, reparables o no reparables en ambos casos

En este caso estamos asumiendo un sistema como el Sistema I, donde los fallos internos también pueden ser reparables con probabilidad ρ , o no reparables con probabilidad $1 - \rho$. La matriz \mathbf{M} correspondiente sería

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0 \alpha (1 - \rho) \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma p) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma (1 - p).$$

y

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{e} - \mathbf{M} \mathbf{e}.$$

Las expresiones dadas en (2.7) son válidas para este caso considerando el producto $\mathbf{M}^0 \varepsilon$ como la matriz $\mathbf{M}^0 \mathbf{E}^0$ donde

$$\mathbf{M}^0 \mathbf{E}^0 = \mathbf{T}^0 \alpha \rho \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0 \alpha \rho \otimes \mathbf{L}^0 \gamma p + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma p.$$

Introducimos esta última matriz porque cuando la unidad principal sufre un fallo debido únicamente a un fallo reparable interno, asumimos que el proceso de renovación asociado al fallo externo no empieza de nuevo. La expresión de la matriz $\mathbf{M}^0 \mathbf{e}$ es similar a $\mathbf{M}^0 \mathbf{E}^0$ excepto el primer sumando, donde para la matriz $\mathbf{M}^0 \varepsilon$ es igual a $\mathbf{T}^0 \alpha \rho \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{L}^0) \gamma$, asumiendo que el proceso de renovación que

sigue el fallo externo se reinicia. Obviamente, para un sistema con fallos internos únicamente reparables se tiene $\rho = 1$.

SISTEMA V: Sistema fallos externos reparables o no reparables dependiendo del tiempo hasta el fallo

El Sistema I puede ser modificado considerando que los fallos externos, reparables o no reparables, pueden ser introducidos en la estructura interna del modelo del siguiente modo. En el Sistema I, la matriz \mathbf{L} incluye las probabilidades de transición entre las fases de las llegadas de fallos externos. Ahora, en este sistema asumiremos que cuando llega un fallo reparable, ocurre una transición a un subconjunto de fases ocurriendo igual para el caso no reparable. Por tanto, consideramos un proceso de renovación donde los tiempos entre las llegadas de los fallos dependen del tipo de fallo. La matriz de probabilidades de transición para los fallos de este nuevo sistema puede expresarse por bloques como

$$(\mathbf{L} | \mathbf{L}_r^0 | \mathbf{L}_{nr}^0),$$

donde el bloque \mathbf{L} incluye las probabilidades de transición entre los estados transitorios, y \mathbf{L}_r^0 y \mathbf{L}_{nr}^0 son vectores columna que incluyen las probabilidades de absorción desde los estados transitorios para un fallo reparable o no reparable respectivamente. En este caso $\mathbf{L}^0 = \mathbf{L}_r^0 + \mathbf{L}_{nr}^0$. El espacio de estados del sistema es el mismo que para el Sistema I y ya ha sido descrito en (2.1) y (2.4) para el caso infinito y finito respectivamente. Para este sistema, la matriz \mathbf{M} y los vectores \mathbf{M} y ε son

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma, \\ \mathbf{M}^0 &= \mathbf{e} - \mathbf{M} \mathbf{e}, \\ \varepsilon &= \alpha \otimes \gamma. \end{aligned}$$

SISTEMA VI: Un sistema con fallos internos y externos reparables y no reparables dependiendo del tiempo hasta el fallo

Para el estudio de este sistema podemos aplicar la misma metodología que para los fallos internos del sistema anterior. Por tanto, la matriz de probabilidades de transición del tiempo de fallo interno puede expresarse como

$$(\mathbf{T} | \mathbf{T}_r^0 | \mathbf{T}_{nr}^0),$$

donde el bloque \mathbf{T} incluye las probabilidades de transición entre los estados transitorios, y \mathbf{T}_r^0 y \mathbf{T}_{nr}^0 son los vectores columna que incluyen las probabilidades de absorción desde los estados transitorios para un fallo reparable o no reparable respectivamente. En este caso, $\mathbf{T}^0 = \mathbf{T}_r^0 + \mathbf{T}_{nr}^0$. Podemos tener en

cuenta consideraciones similares para la matriz $\mathbf{M}^0\varepsilon$ a las dadas en el Sistema IV.

Las matrices \mathbf{M} , \mathbf{M}^0 y $\mathbf{M}^0\mathbf{E}^0$ y el vector ε son en este caso

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}_{nr}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma, \\ \mathbf{M}^0 &= \mathbf{e} - \mathbf{M} \mathbf{e}, \\ \mathbf{M}^0 \mathbf{E}^0 &= \mathbf{T}_r^0 \alpha \otimes \mathbf{L} + \mathbf{T}_r^0 \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma, \\ \varepsilon &= \alpha \otimes \gamma.\end{aligned}$$

2.3.1. Distribución transitoria del sistema

Calculamos en esta sección la distribución transitoria cuando se tiene un sistema con un número finito e infinito de unidades.

Caso finito

El cálculo de la distribución transitoria para el caso de un sistema con un número finito de unidades pueden ser calculadas como sigue. Dado el vector inicial η , se tiene que $\eta \mathbf{P}^\kappa$ es el vector cuyos elementos son las probabilidades de estar el sistema en las correspondientes fases tras κ unidades de tiempo. Al vector formado por los elementos correspondientes al macro-estado i lo notamos por \mathbf{p}_i^κ . Este vector es pues la probabilidad de estar en cada una de las fases del macro-estado i en el tiempo κ . El cálculo de estas probabilidades de transición se pueden hallar en forma algorítmica. Pero es en el caso de tener un sistema con infinitas unidades donde es más interesante su desarrollo, ya que no se puede hallar como anteriormente en el caso finito.

Caso infinito

En esta sección vamos a construir un algoritmo para calcular la distribución transitoria en el caso de haber un número infinito de unidades.

Denotamos por \mathbf{P}_{ij}^κ a la matriz cuyas entradas son las probabilidades de transición, para las diferentes fases, desde el macro-estado i al macro-estado j en un tiempo κ . A partir de esta matriz, la distribución transitoria para el macro-estado i puede ser calculada dado un vector inicial, desglosado por macro-estados como $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$, quedando que la probabilidad de estar en el macro-estado j en el tiempo κ es dada por

$$\mathbf{p}_j^\kappa = \sum_{i=0}^n \eta_i \mathbf{P}_{ij}^\kappa.$$

Calculamos en forma algorítmica recursiva esta matriz. Consideramos $\kappa \geq 2$. Para $0 \leq i < \kappa$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i0}^\kappa &= \mathbf{P}_{i0}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{00} + \mathbf{P}_{i1}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{10} & ; & & \mathbf{P}_{\kappa 0}^\kappa &= \mathbf{P}_{\kappa 1}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{10} \\ \mathbf{P}_{i1}^\kappa &= \mathbf{P}_{i0}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{01} + \mathbf{P}_{i1}^{\kappa-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_{i2}^{\kappa-1} \mathbf{A}_2 & ; & & \mathbf{P}_{\kappa 1}^\kappa &= \mathbf{P}_{\kappa 1}^{\kappa-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_{\kappa 2}^{\kappa-1} \mathbf{A}_2. \end{aligned}$$

Para $0 \leq i \leq \kappa$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i0}^\kappa &= \mathbf{P}_{i0}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{00} + \mathbf{P}_{i1}^{\kappa-1} \mathbf{B}_{10} & ; & & \mathbf{P}_{\kappa+1,1}^\kappa &= \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{P}_{i,\kappa+i}^\kappa &= \begin{cases} \mathbf{A}_0^\kappa & ; & i \neq 0 \\ \mathbf{B}_{01} \mathbf{A}_0^{\kappa-1} & ; & i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $\max\{4 - \kappa, 0\} \leq i \leq \kappa$

$$\mathbf{P}_{ij}^\kappa = \mathbf{P}_{ij-1}^{\kappa-1} \mathbf{A}_0 + \mathbf{P}_{ij}^{\kappa-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_{ij+1}^{\kappa-1} \mathbf{A}_2 \quad ; \quad j = 2, \dots, \kappa - 2 + i$$

Para $\max\{3 - \kappa, 0\} \leq i \leq \kappa$

$$\mathbf{P}_{i,\kappa-1+i}^\kappa = \mathbf{P}_{i,\kappa-2+i}^{\kappa-1} \mathbf{A}_0 + \mathbf{P}_{i,\kappa-1+i}^{\kappa-1} \mathbf{A}_1$$

Para $i \geq \kappa + 1$ y $i - \kappa \leq j \leq \kappa + i$ excepto para el caso $(i, j) = (\kappa + 1, 1)$

$$\mathbf{P}_{ij}^\kappa = \mathbf{P}_{i-1,j-1}^\kappa$$

Para el caso inicial, $\kappa = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{00}^1 &= \mathbf{B}_{00}; & \mathbf{P}_{01}^1 &= \mathbf{B}_{01}; & \mathbf{P}_{10}^1 &= \mathbf{B}_{10} \\ \mathbf{P}_{ii}^1 &= \mathbf{A}_1; & \mathbf{P}_{i,i+1}^1 &= \mathbf{A}_0; & & \text{para } i = 1, 2, \dots \\ \mathbf{P}_{i,i-1}^1 &= \mathbf{A}_2 & & & & \text{para } i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

2.4. Distribución estacionaria

En esta sección calcularemos la distribución estacionaria del sistema descrito en secciones anteriores en el caso finito e infinito.

2.4.1. Distribución estacionaria para un sistema con un número finito de unidades

Sea $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ la distribución estacionaria correspondiente a la matriz dada en (2.5). Este vector está dividido por bloques donde el i -ésimo corresponde al macro estado i . El sub-vector π_0 es de orden ms y el vector π_j , $1 \leq j \leq n - 1$ es de orden msr .

El vector π satisface la ecuación $\pi = \pi \mathbf{P}$ bajo la condición inicial $\pi \mathbf{e} = 1$. Desarrollando esta igualdad considerando los bloques dados en (2.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 \mathbf{B}_{00} + \pi_1 \mathbf{B}_{10} \\
\pi_1 &= \pi_0 \mathbf{B}_{01} + \pi_1 \mathbf{A}_1 + \pi_2 \mathbf{A}_2 \\
\pi_2 &= \pi_1 \mathbf{A}_0 + \pi_2 \mathbf{A}_1 + \pi_3 \mathbf{A}_2 \\
\pi_3 &= \pi_2 \mathbf{A}_0 + \pi_3 \mathbf{A}_1 + \pi_4 \mathbf{A}_2 \\
&\dots \\
\pi_{n-1} &= \pi_{n-2} \mathbf{A}_0 + \pi_{n-1} \mathbf{A}_1 + \pi_n \mathbf{B}_{n,n-1} \\
\pi_n &= \pi_{n-1} \mathbf{B}_{n-1,n} + \pi_n \mathbf{B}_{n,n} \\
1 &= \pi_0 \mathbf{e} + \pi_1 \mathbf{e} + \pi_2 \mathbf{e} + \dots + \pi_n \mathbf{e}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Definimos las matrices cuadradas $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{n-2}$ de orden msr como aquéllas que verifican la condición

$$\mathbf{R}_{j-1} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{R}_{j-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_{j-1} \mathbf{R}_j \mathbf{A}_2 \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2,$$

siendo las matrices $\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_j \mathbf{A}_2 \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2$ no singulares. Desde (2.8) se tiene que los vectores π_1, \dots, π_{n-1} verifican

$$\pi_j = \pi_{j-1} \mathbf{A}_0 + \pi_j \mathbf{A}_1 + \pi_{j+1} \mathbf{A}_2 \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2,$$

lo que equivale a

$$\pi_j = \pi_{j-1} \mathbf{R}_{j-1} \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2.$$

De forma recursiva desde la expresión anterior se tiene que

$$\pi_j = \pi_1 \prod_{k=1}^{j-1} \mathbf{R}_k \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2.$$

Razonando de igual forma podemos expresar los vectores π_{n-1} y π_n en forma geométrico-matricial como

$$\begin{aligned}
\pi_{n-1} &= \pi_{n-2} \mathbf{R}_{n-2} \\
\pi_n &= \pi_{n-1} \mathbf{R}_{n-1},
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{B}_{n-1,n} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{n,n})^{-1} \\
\mathbf{R}_{n-2} &= \mathbf{A}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{B}_{n,n-1})^{-1},
\end{aligned}$$

suponiendo que la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{B}_{n,n-1}$ es no singular.

El resto de matrices, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{n-3}$, pueden ser calculadas de forma recursiva desde

$$R_{j-1} = \mathbf{A}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_j \mathbf{A}_2)^{-1} \quad ; \quad j = 2, \dots, n-2.$$

Las dos primeras ecuaciones dadas en (2.8) junto a la condición de normalización se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 \mathbf{B}_{00} + \pi_1 \mathbf{B}_{10} \\ \pi_1 &= \pi_0 \mathbf{B}_{01} + \pi_1 [\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2] \\ 1 &= \pi_0 \mathbf{e} + \pi_1 \left[\sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{R}_j \mathbf{e} + \mathbf{e} \right]. \end{aligned}$$

La distribución estacionaria queda determinada calculando π_0 y π_1 . Pudiendo ser calculados estos vectores en forma matricial como

$$(\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00}^* & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{e} \\ \mathbf{B}_{10}^* & \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2 & \mathbf{W} \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_1, 1).$$

Este sistema tiene solución

$$(\pi_0, \pi_1) = (0, 1) \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{00})^* & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{e} \\ -\mathbf{B}_{10}^* & \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2 & \mathbf{W} \end{pmatrix}^{-1},$$

siendo $\mathbf{W} = \sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{R}_j \mathbf{e} + \mathbf{e}$, y \mathbf{B}_{00}^* y \mathbf{B}_{10}^* las matrices \mathbf{B}_{00} y \mathbf{B}_{10} respectivamente sin la primera columna.

2.4.2. Distribución estacionaria para un sistema con un número infinito de unidades

Utilizaremos $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ para denotar el vector de probabilidad estacionaria correspondiente a la matriz (2.2) para el caso infinito. Dicho vector se encuentra dividido según los bloques correspondientes a los macro-estados. Por tanto, el subvector π_0 es de orden $1 \times ms$ y π_j , para $j \geq 1$ es de orden $1 \times msr$.

El vector π satisface la ecuación matricial $\pi \mathbf{P} = \pi$ y está sujeto a la restricción $\pi \mathbf{e} = 1$. Desarrollando estas ecuaciones en términos de los bloques dados en (2.3), obtenemos las ecuaciones del sistema.

La solución viene dada por,

$$\pi_j = \pi_1 \mathbf{R}^{j-1}; \quad j = 2, 3, \dots$$

donde la matriz \mathbf{R} verifica la ecuación

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2.$$

Los vectores π_0 y π_1 se calculan desde

$$(\pi_0, \pi_1) = (1, \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{e} & (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{00})^* & \mathbf{B}_{01} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e} & -\mathbf{B}_{10}^* & \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2 - \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1},$$

donde la condición de normalización está incluida en la primera columna y \mathbf{Z}^* denota la matriz \mathbf{Z} sin la primera columna.

La matriz \mathbf{R} puede ser calculada empleando el método iterativo multidimensional de Newton-Raphson. Este algoritmo se construye considerando la estructura de la función $f(\mathbf{R}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{R}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}) + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_2$.

Debemos encontrar la solución de la ecuación $f(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{0}$ una matriz de ceros. La derivada de esta función matricial respecto de la entrada (i, j) de la matriz \mathbf{R} , r_{ij} , es igual a

$$\mathbf{D}_{ij}(\mathbf{R}) = \frac{df}{dr_{ij}}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}_{ij}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}) + (\mathbf{1}_{ij}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{1}_{ij})\mathbf{A}_2,$$

donde $\mathbf{1}_{ij}$ es una matriz cuyos elementos son cero excepto el elemento (i, j) que es igual a 1. Definimos la función matricial $\mathbf{J}(\mathbf{R})$ como una matriz cuya entrada $(msr(l-1) + k, msr(i-1) + j)$ es la entrada (l, k) de la matriz $\mathbf{D}_{ij}(\mathbf{R})$ para $i, j, l, k = 1, \dots, msr$.

Sea \mathbf{R}_n el vector columna de orden $(msr)^2$ cuyas entradas son las entradas aproximadas de la matriz \mathbf{R} después de la n -ésima iteración dispuesta como sigue: las primeras msr entradas son la primera fila de la matriz, las segundas msr son la segunda fila de la matriz, y así sucesivamente. Si $f_i(\mathbf{R})$ denota la i -ésima fila de la matriz $f(\mathbf{R})$ y $\mathbf{W}(\mathbf{R}) = [f_1(\mathbf{R}), f_2(\mathbf{R}), \dots, f_{msr}(\mathbf{R})]'$, donde $'$ denota el traspuesto del vector, entonces el método iterativo viene dado por la siguiente expresión, $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n - \mathbf{J}(\mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{W}(\mathbf{R}_n)$. Tomando un apropiado \mathbf{R}_0 , el método converge a la matriz \mathbf{R} .

2.5. Distribución del periodo de funcionamiento para el caso finito

Suele ser de gran utilidad para analizar el sistema conocer la distribución de los instantes durante los cuales el sistema está operativo o no operativo. Estas distribuciones son de especial importancia en sistemas que requieren una alta fiabilidad. Veremos en esta sección cómo estos tiempos aleatorios siguen una distribución tipo fase cuya representación también obtendremos. Como consecuencia, se tiene que las distribuciones tipo fase reproducen el mismo tipo de distribuciones para los tiempos aleatorios que aparecen implícitos en el sistema. Los razonamientos que seguiremos serán similares a los que se emplean en el caso continuo en Pérez Ocón y Montoro Cazorla [26].

El periodo de tiempo de funcionamiento es el periodo que indica el número de unidades de tiempo desde el punto en el que todas las unidades están no operativas y una reparación se completa, hasta el instante en el que todas las

unidades vuelven a estar no operativas por primera vez. Por tanto, este periodo finaliza cuando el reparador queda libre por primera vez después de un periodo ocupado. Para calcular la función de distribución de este periodo aleatorio, consideramos un proceso de Markov con algunas modificaciones respecto al proceso de Markov de partida. Los macro-estados operativos son los mismos, pero identificamos ahora los macro-estados no operativos con un nuevo macro-estado absorbente que denotaremos por n^* .

En este nuevo proceso, los macro-estados $0, 1, \dots, n-1$ son los mismos que en el proceso inicial, pero el macro-estado E_3 ahora está reducido a un único estado absorbente denotado, como ya hemos indicado, por n^* . Este macro-estado absorbente representa el fallo del sistema.

La nueva matriz de probabilidades de transición se obtiene a partir de \mathbf{P}' en (2.5) y viene dada por

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n^* \\ 0 & \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & & & & 0 \\ 1 & \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & & 0 \\ 2 & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ n-1 & & & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}e_k \\ n^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La función de distribución del periodo de funcionamiento es la distribución del tiempo hasta el primer paso por el estado absorbente n^* en el proceso de Markov absorbente dado por \mathbf{P}^* . Se deduce de aquí una distribución tipo fase con representación $PH(\gamma_u, \mathbf{L}_u)$, donde la matriz \mathbf{L}_u se obtiene eliminando la última fila y columna en \mathbf{P}^* .

Como vector inicial consideramos $\gamma_u = [0, 0, \dots, \varepsilon \otimes \beta]$.

A partir de esta distribución podemos obtener el tiempo medio durante el que el sistema se encuentra operativo. Esta viene dada por,

$$MTTF = \gamma_u (\mathbf{I} - \mathbf{L}_u)^{-1} \mathbf{e}.$$

Una vez analizado el periodo de funcionamiento, podemos estudiar el periodo de no funcionamiento.

El periodo de no funcionamiento se define como el tiempo que transcurre desde el momento en el que no hay unidades en reserva (todas están en reparación o esperando para ser reparadas) y la unidad operativa pasa a reparación (el sistema falla), hasta el momento en el que la primera reparación, desde entonces, es completada.

Razonando de forma análoga a como lo hicimos en el cálculo de la distribución del periodo de funcionamiento, se obtiene que la distribución del periodo de no funcionamiento sigue una distribución tipo fase con representación $PH(\gamma_d, \mathbf{S})$, donde las condiciones iniciales se determinan del siguiente modo. Sea $\gamma_d(k)$, $1 \leq k \leq r$, la probabilidad estacionaria de que la unidad bajo reparación ocupe la fase k . En este caso, el sistema inicia su periodo de no funcionamiento con probabilidad $\pi_{n-1}(\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{e})$. De aquí se obtiene

$$\gamma_d(k) = \frac{\sum_j \sum_l \pi_{n-1}(j, l, k) \mathbf{M}_{(j-1)n+1}^0}{\pi_{n-1}(\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{e})} \quad 1 \leq k \leq r,$$

siendo $\pi_{n-1}(j, l, k)$ la probabilidad de que en cualquier etapa, $n-1$ componentes del sistema estén no operativas, la unidad operativa esté en la fase j , el proceso asociado a la ocurrencia de fallos externos en la fase l y la unidad bajo reparación en la fase k .

Como vector inicial se tiene entonces,

$$\gamma_d = (\gamma_d(k))_{1 \leq k \leq r}.$$

Finalmente, el tiempo medio que el sistema permanece no operativo viene dado por,

$$MTTD = \gamma_d (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \mathbf{e}.$$

2.6. Medidas de fiabilidad

En esta sección calcularemos distintas medidas de fiabilidad asociadas a los sistemas. En primer lugar, obtendremos la disponibilidad, que nos indicará la probabilidad de que el sistema esté operativo en un determinado instante. En segundo lugar, calcularemos las probabilidades condicionadas de fallo, condicionada por un lado al fallo de la unidad principal del sistema y por otro, al fallo del sistema, considerado éste como un *todo*.

Para calcular las probabilidades de transición emplearemos la metodología que se ha descrito en la sección (2.3.1).

En lo que sigue, denotaremos por \mathbf{p}_i^k al vector de probabilidad cuyas entradas son las probabilidades de ocupar las fases del macro-estado i en el instante κ , dado que inicialmente el sistema está en el macro-estado 0, para $i \geq 0$.

2.6.1. Disponibilidad

Como ya hemos indicado, calcularemos la probabilidad de que el sistema esté operativo en un determinado tiempo κ . Esto es, la disponibilidad transitoria. Esta medida será válida para todos los sistemas finitos descritos a lo largo del capítulo, puesto que si el sistema es infinito, es claro que la disponibilidad valdrá 1.

De esta forma, es obvio que

$$A(\kappa) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i^\kappa e = 1 - p_n^\kappa e. \quad (2.9)$$

Tomando límites cuando $\kappa \rightarrow \infty$ en la expresión anterior obtenemos la disponibilidad estacionaria,

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i e = \pi_0 e + \pi_1 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{R}_k \right) e = 1 - \pi_n e, \quad (2.10)$$

donde las matrices \mathbf{R}_k son calculadas en la sección 2.4.1.

El resultado obtenido es intuitivo pues el sistema estará operativo mientras exista una unidad operativa. Asimismo, puede deducirse la no-disponibilidad del sistema, que indicará la probabilidad de que todas las unidades estén en reparación o esperando para ser reparadas. Esta vendrá dada por $\bar{A} = 1 - A = \pi_n e$.

2.6.2. Probabilidad Condicionada de fallo

Calculamos en esta sección las probabilidades condicionadas de los distintos tipos de fallo de la unidad principal del sistema. Pueden ocurrir tanto fallos reparables como no reparables. La probabilidad condicionada de fallo para los Sistemas II y III puede obtenerse considerando únicamente fallos internos y externos, respectivamente. Las probabilidades que se obtienen a continuación son válidas para sistemas con un número finito o infinito de unidades.

Probabilidad Condicionada de fallo externo reparable para los sistemas I, III y V

Esta probabilidad es la probabilidad de fallo en un cierto instante ocasionado por un fallo externo reparable. Se parte de que el sistema está operativo en el instante $\kappa - 1$, y un fallo externo reparable ocurre en el siguiente instante mientras que el sistema permanece operativo. Esta medida viene dada por la expresión

$$\nu_r^\kappa = p_0^{\kappa-1} \mathbf{M}^0 + \sum_{i=1}^{\xi} p_i^{\kappa-1} (\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{e}_k), \quad (2.11)$$

donde $\xi = n - 1$ para el caso finito y $\xi = \infty$ para el infinito.

En el caso estacionario, esta probabilidad es

$$\nu_r = \pi_0 \mathbf{M}^0 + \sum_{i=1}^{\xi} \pi_i (\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{e}_k),$$

y cuando existe un número infinito de unidades, es igual a

$$\nu_r = \pi_0 \mathbf{M}^0 + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{e}_k). \quad (2.12)$$

Probabilidad Condicionada de fallo externo reparable para los sistemas IV y VI

Consideraremos para calcular esta probabilidad, la notación que ya empleamos al describir el Sistema VI. Las medidas para el sistema IV pueden obtenerse considerando $\mathbf{L}_r^0 = \mathbf{L}^0 p$.

En el caso transitorio,

$$\nu_r^\kappa = p_0^{\kappa-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0] + \sum_{i=1}^{\xi} p_i^{\kappa-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_k],$$

y en el caso estacionario,

$$\nu_r = \pi_0 [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0] + \sum_{i=1}^{\xi} \pi_i [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_k]. \quad (2.13)$$

En caso de existir un número infinito de unidades se tiene,

$$\nu_r = \pi_0 [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0] + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_k].$$

Probabilidad condicionada de fallo externo no reparable de todos los sistemas (excepto el Sistema II)

Un fallo externo no reparable ocurre al instante siguiente de estar el sistema operativo en el instante $\kappa - 1$. En este momento, también es posible un fallo interno reparable. Las medidas para los Sistemas I, IV y V se obtienen considerando $\mathbf{T}_{nr}^0 = \mathbf{T}^0(1 - \rho)$ y $\mathbf{L}_{nr}^0 = \mathbf{L}^0 q$ con $\rho = 0$ para los Sistemas I y V. Si se considera el sistema III entonces $\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0$ debe ser eliminado y $\mathbf{L}_{nr}^0 = \mathbf{L}^0 q$.

Para el caso transitorio, la probabilidad correspondiente es igual a

$$\nu_{nr}^\kappa = p_0^{\kappa-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] + \sum_{i=1}^{\xi} p_i^{\kappa-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_k], \quad (2.14)$$

y en el caso estacionario se tiene

$$\nu_{nr} = \pi_0 [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] + \sum_{i=1}^{\xi} \pi_i [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_k].$$

En caso de tener un sistema con un número infinito de unidades

$$\nu_{nr} = \pi_0 [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} [(\mathbf{e}_m - \mathbf{T}_{nr}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_k]. \quad (2.15)$$

La probabilidad condicionada de fallo externo puede obtenerse a partir de $\nu_r^\kappa + \nu_{nr}^\kappa$ y $\nu_r + \nu_{nr}$ para el caso transitorio y estacionario respectivamente.

Probabilidad condicionada de fallo interno no reparable de todos los sistemas (excepto el Sistema III)

Consideramos la notación ya empleada para el Sistema III y obtendremos esta medida para los Sistemas I, II, IV y V. Tendremos en cuenta que $\mathbf{T}_{nr}^0 = \mathbf{T}^0(1 - \rho)$ con $\rho = 0$ para los Sistemas I, II y V. Para el sistema II se tiene que $s = 1$.

En este caso, el sistema está operativo cuando ocurre un fallo de desgaste. Esta probabilidad es,

$$\nu_w^\kappa = p_0^{\kappa-1} (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_s) + \sum_{i=1}^{\xi} p_i^{\kappa-1} (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_{sk}), \quad (2.16)$$

y en régimen estacionario

$$\nu_w = \pi_0 (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_s) + \sum_{i=1}^{\xi} \pi_i (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_{sk}).$$

Para el caso infinito,

$$\nu_w = \pi_0 (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_s) + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{T}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_{sk}). \quad (2.17)$$

Probabilidad condicionada de fallo interno reparable para los sistemas IV y VI

Calculamos la probabilidad de fallo en un cierto instante, debido a un fallo reparable interno. Esta medida se obtiene para el Sistema IV considerando, $\mathbf{T}_r^0 = \mathbf{T}^0 \rho$ y $\mathbf{L}_r^0 = \mathbf{L}^0 p$.

En el caso transitorio esta probabilidad es igual a

$$\begin{aligned} \nu_{rw}^\kappa &= p_0^{\kappa-1} [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] + \\ &+ \sum_{i=1}^{\xi} p_i^{\kappa-1} [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] \otimes \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

y en régimen estacionario

$$\begin{aligned} \nu_{rw} &= \pi_0 [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] + \\ &+ \sum_{i=1}^{\xi} \pi_i [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] \otimes \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

y cuando consideramos un número infinito de unidades

$$\begin{aligned} \nu_{rw} &= \pi_0 [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] + \\ &+ \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} [\mathbf{T}_r^0 \otimes (\mathbf{e}_s - \mathbf{L}^0) + \mathbf{T}_r^0 \otimes \mathbf{L}_r^0] \otimes \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La probabilidad condicionada de fallo interno, cuando este tiene lugar, puede obtenerse sumando $\nu_{rw}^\kappa + \nu_w^\kappa$ y $\nu_{rw} + \nu_w$ en el caso transitorio y estacionario, respectivamente.

Finalmente, la probabilidad condicionada general de fallo se obtiene a partir de las expresiones anteriores en régimen transitorio y estacionario, respectivamente, como sigue,

$$\nu_r^\kappa + \nu_{nr}^\kappa + \nu_w^\kappa + \nu_{rw}^\kappa$$

y

$$\nu_r + \nu_{nr} + \nu_w + \nu_{rw}.$$

En caso de que el sistema no pueda sufrir un determinado tipo de fallo, la probabilidad condicionada correspondiente será eliminada de las expresiones anteriores.

Probabilidad condicionada de fallo del sistema para todos los sistemas

Otra medida de fiabilidad que puede resultar útil en el estudio del sistema, es la probabilidad de ocurrencia de fallos del mismo. Obviamente, esta probabilidad sólo tiene sentido en el caso finito, pues en el caso infinito, sería cero. El fallo del sistema será siempre consecuencia de un fallo reparable, pues si ocurre un fallo no reparable, la unidad afectada es reemplazada instantáneamente por otra. Para obtener esta medida, consideramos que el fallo del sistema ocurre cuando la única unidad operativa falla y ninguna reparación se completa en este instante. Esta medida viene dada en régimen transitorio por

$$\nu_s^\kappa = p_{n-1}^{\kappa-1} (\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}e_k),$$

y en régimen estacionario por

$$\nu_s = \pi_{n-1} (\mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}e_k). \quad (2.19)$$

2.7. Costos para un sistema con un número finito de unidades y fallos internos y externos

En esta sección se introducen costos en un modelo con un número de unidades finito y con posibles fallos internos y externos de la unidad principal. Suponemos que cuando la unidad principal está operativa se produce un beneficio por unidad de tiempo. Por otra parte cada unidad en reserva produce un costo. La reparación se puede diseñar de forma que cada fase de reparación produce un costo diferente por unidad de tiempo. Consideramos estos supuestos ya que cuando la unidad está operativa no siempre es posible conocer la fase de funcionamiento, actuando como una caja negra, y por otro lado las fases de reparación tienen sentido físico.

Consideramos que cada vez que la unidad principal visita una fase operativa se produce un beneficio de B unidades monetarias y cada unidad en reserva causa un coste de C_a unidades monetarias (u.m.). La unidad en reparación produce un coste según la fase de reparación por unidad de tiempo. Si la reparación ocupa la fase k , por unidad de tiempo se produce un coste de C_k^R u.m. Si consideramos los macro-estados definidos en el modelo, el beneficio neto por visita al correspondiente macro-estado es

$$\begin{aligned} C(0) &= B - (n-1)C_a, \\ C(l, k) &= B - (n-l-1)C_a - C_k^R, \\ C(n, k) &= -C_k^R, \end{aligned}$$

para $1 \leq l \leq n-1$ y $k = 1, \dots, r$.

El beneficio medio por visita a estas fases viene dado por

$$\begin{aligned} E[C(0)] &= c(0) = b - (n-1)c_a, \\ E[C(l, k)] &= c(l, k) = b - (n-l-1)c_a - c_k^R, \quad 1 \leq l \leq n-1, \\ E[C(n, k)] &= c(n, r) = -c_k^R, \end{aligned}$$

donde los respectivos valores esperados vienen dados por

$$\begin{aligned} E[B] &= b, \\ E[C_a] &= c_a, \\ E[C_k^R] &= c_k^R. \end{aligned}$$

Para analizar los costos netos se consideran los siguientes vectores

$$\mathbf{c}_0 = c(0)\mathbf{e}_{ms} = (b - (n-1)c_a) \cdot \mathbf{e}_{ms},$$

$$\mathbf{c}_l = \mathbf{e}_{ms} \otimes \begin{pmatrix} c(l, 1) \\ \cdots \\ c(l, r) \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{ms} \otimes \begin{pmatrix} b - (n-l-1)c_a - c_1^R \\ \cdots \\ b - (n-l-1)c_a - c_r^R \end{pmatrix};$$

para $l = 1, \dots, n-1$,

$$\mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} c(n, 1) \\ \cdots \\ c(n, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1^R \\ \cdots \\ -c_r^R \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{c}_0^k contiene el beneficio medio neto por visita a las fases con 0 unidades en reparación y \mathbf{c}_l el beneficio neto por visita a las fases cuando hay l unidades en reparación, para $l = 1, \dots, n$.

El vector de beneficio neto viene dado por

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)'$$

2.7.1. Costo neto medio para un ciclo de funcionamiento

El estudio del periodo de funcionamiento, de un ciclo, ha sido estudiado en la sección 2.5. El ciclo de funcionamiento comienza cuando todas las unidades están no operativas y se completa una reparación. Calculamos el costo/beneficio neto hasta un nuevo fallo del sistema. Definido en la sección anterior el vector de costos, definimos un vector columna con los beneficios netos medios para los macro-estados operativos. Este vector es el dado $\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1})'$.

Es conocido que el costo/beneficio neto a largo plazo es dado por el número medio de visitas a un estado por el costo/beneficio neto medio hasta un nuevo fallo del sistema (Kulkarni,1999[15]). Se tiene pues

$$\phi_1(b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R) = \gamma_u (\mathbf{I} - \mathbf{L}_u)^{-1} \mathbf{c}^*.$$

2.7.2. Algunos costos netos medios

Calculamos en esta sección algunos costos netos medios. En primer lugar, como se ha visto en la sección 1.6.1, calculamos el costo neto medio en un determinado tiempo κ y el acumulado hasta un tiempo ρ desde (1.2). Estas dos medidas son respectivamente

$$\begin{aligned} \phi_2(\kappa, b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R) &= \sum_{j=0}^{\kappa} \mathbf{p}_j^\kappa \mathbf{c}_j, \\ \phi_3(\rho, b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R) &= \sum_{\kappa=0}^{\rho} \sum_{j=0}^{\kappa} \mathbf{p}_j^\kappa \mathbf{c}_j. \end{aligned}$$

Por otro lado, desde esta última medida se puede obtener el costo/beneficio neto medio por unidad de tiempo. En el caso transitorio resulta igual a

$$\phi_4(\rho, b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R) = \frac{\phi_3(\rho, b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R)}{\rho + 1},$$

y en el caso estacionario se obtiene aplicando el teorema 1.6.1 de la sección 1.6.2. En este caso resulta

$$\phi_5(b, c_a, c_1^R, \dots, c_r^R) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \mathbf{c}_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\pi_0 + \pi_1 \prod_{d=1}^{j-1} \mathbf{R}_d \right) \mathbf{c}_j.$$

2.8. Aplicación numérica

En esta sección analizaremos algunos ejemplos numéricos, aplicando los modelos descritos a lo largo del capítulo. Realizaremos el análisis en régimen transitorio y estacionario, para un número finito e infinito de unidades. Los modelos propuestos son similares, pero con una estructura diferente para el fallo reparable. Compararemos y analizaremos los resultados.

Consideramos tres modelos donde, en todos los casos, el tiempo operativo de la unidad principal hasta la ocurrencia de un fallo interno se distribuye según una binomial negativa. Esto puede interpretarse como sigue: la unidad principal sufre distintas fases de desgaste. Inicialmente, está en la fase uno, y con una probabilidad de 0.05 salta a la fase siguiente en el instante siguiente. Cuando la unidad está en la última fase de desgaste, puede fallar en la etapa siguiente con

una probabilidad de 0.05 y en este caso se transforma en no operativa, es decir, entra en el canal de reparación.

Este tiempo operativo de la unidad principal se distribuye tipo fase con representación (α, \mathbf{T}) , donde

$$\alpha = (1, 0, 0); \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}.$$

Estos sistemas pueden sufrir fallos externos, reparables o no reparables. En ambos casos, el periodo entre dos fallos consecutivos es $PH(\gamma, \mathbf{L})$, con

$$\gamma = (1, 0); \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.75 \\ 0 & 0.95 \end{pmatrix}.$$

Cuando un fallo reparable tiene lugar, la unidad comienza la reparación o se coloca en la cola de reparación. La reparación está estructurada en dos fases bien diferenciadas: reparación y control. Una unidad rota comienza en la fase de reparación y en el instante siguiente, pasa a la fase de control con una probabilidad de 0.025. Si cuando la unidad está siendo controlada no encuentra las especificaciones establecidas, vuelve a la reparación (con una probabilidad de 0.1); otra posibilidad es que la reparación se complete (con probabilidad 0.6). El tiempo de reparación se distribuye tipo fase $PH(\beta, \mathbf{S})$, siendo

$$\beta = (1, 0); \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.025 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

El tiempo medio de operatividad hasta la llegada de un fallo interno de desgaste es de 60 unidades de tiempo. El tiempo medio entre dos fallos externos consecutivos es de 16.8421 unidades de tiempo y el tiempo medio de reparación es de 48.3333 unidades de tiempo.

Los modelos

Analizamos ahora tres modelos similares con estructuras diferentes para el tiempo de fallo reparable. Todos los sistemas sufren fallos internos. El primer sistema modelizado tiene la estructura descrita para el Sistema I, fallos internos no reparables y fallos externos reparables o no reparables. El segundo modelo considera una situación similar en la que los fallos reparables dependen del tiempo transcurrido hasta el fallo externo. Este será modelizado siguiendo el desarrollo descrito para el Sistema V. Finalmente, incluiremos fallos internos reparables en los sistemas anteriores (obteniendo el Sistema VI).

El análisis lo realizaremos considerando varias unidades, la principal y el resto dispuestas en reserva pasiva. Veremos una aproximación para los modelos propuestos, en los que se presentan un gran número de unidades, a través de los resultados obtenidos para los modelos con un número ilimitado de unidades.

Modelo 1. Un sistema con fallos internos no reparables y fallos externos reparables o no reparables

En primer lugar, consideramos el Sistema I descrito en secciones anteriores. Cuando ocurre un fallo externo, puede ser reparable o no reparable, independientemente del tiempo hasta el fallo. Consideramos que la probabilidad de fallo reparable es igual a $p = 0.2105$, independientemente del tiempo hasta el fallo.

Modelo 2. Un sistema con fallos internos no reparables y fallos externos reparables o no reparables, dependiendo del tiempo hasta el fallo

Consideramos el Sistema V estudiado en secciones anteriores. En este caso, el fallo reparable depende de la estructura interna del tiempo hasta el fallo. Consideramos que un fallo externo es reparable sólo si ocurre a continuación de la fase 1 del proceso de renovación (con probabilidad 0.2), y no reparable sólo desde la fase 2, con probabilidad 0.05.

Tomaremos,

$$\mathbf{L}_r^0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{L}_{nr}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \end{pmatrix}.$$

En este caso, la probabilidad de que un fallo sea reparable es, como en el caso anterior,

$$\gamma (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}_r^0 = 0.2105.$$

Modelo 3. Un sistema con fallos internos y externos reparables o no reparables dependientes del tiempo hasta el fallo

Consideramos ahora los sistemas anteriores, pero con una hipótesis añadida que indica que los fallos internos de desgaste pueden ser reparables o no reparables y ello depende de la estructura interna del tiempo hasta la ocurrencia de dicho fallo (Sistema VI). De esta forma, cuando ocurre un fallo interno, suponemos que éste es reparable con probabilidad 0.045 y no reparable con probabilidad 0.955. Cuando la unidad principal está trabajando en la fase 3, ésta sufre un fallo interno reparable en la siguiente etapa con probabilidad 0.00225 y un fallo interno no reparable con probabilidad 0.0478 (desde esta fase 3 fallará en la siguiente etapa con probabilidad 0.045). Por tanto,

$$\mathbf{T}_r^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00225 \end{pmatrix}; \mathbf{T}_{nr}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.04775 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, si analizamos la unidad principal hasta el fallo, debido a causas internas o externas, este es reparable con una probabilidad mayor que la calculada para los sistemas anteriores, dado que hemos añadido la posibilidad de un fallo interno reparable. La probabilidad de un fallo de la unidad principal, debido a causas internas o externas sea reparable, es igual a 0.2461.

Los tres modelos son similares, con idéntico tiempo hasta la ocurrencia de fallo externo o interno de la unidad principal. Los dos primeros sistemas tienen una distribución idéntica para el tiempo hasta el fallo interno o externo, y una idéntica probabilidad de que el fallo sea reparable. No obstante, en el segundo caso, la reparabilidad o no reparabilidad del fallo depende de la estructura interna del mismo.

El comportamiento de los sistemas anteriores lo hemos analizado considerando varias unidades. Además, hemos añadido el caso de infinitas unidades, como una aproximación de un sistema con un gran número de unidades.

En la Tabla 2.1 que se muestra a continuación, se presenta la distribución estacionaria para los tres modelos, considerando distinto número de unidades. También se muestra el caso infinito, para lo que se han aplicado los resultados obtenidos en la sección 2.4. Para cada modelo, puede observarse como la probabilidad de ocupar el macro-estado i (i unidades en reparación) decrece con el número de unidades en el sistema. El comportamiento de la probabilidad estacionaria para i unidades en reparación ha sido comparada.

En todos los casos, esta probabilidad tiende a crecer, desde el Modelo 1 hasta el Modelo 3 para los macro-estados mayor o igual que 3. Por ejemplo, la probabilidad de que un sistema con cuatro unidades, en el que todas las unidades se encuentran en reparación, es igual a 0.0574, 0.0810 y 0.0844 para los Modelos 1, 2 y 3, respectivamente. Por otro lado, esto no ocurre para el caso de dos o menos unidades bajo reparación. En este caso, la probabilidad más alta se alcanza con el Modelo 1, excepto para los casos de 3 y 4 unidades en el sistema. En el primer caso, la probabilidad de que todas las unidades se encuentren operativas es igual a 0.4598 y 0.4735 para los Modelos 1 y 2, respectivamente. Finalmente, si consideramos un sistema con 4 unidades, la probabilidad de que este ocupe el macro-estado 0 es muy similar para los Modelos 1 y 3. Puede observarse que los Modelos 1 y 2 tienen un comportamiento similar; los tiempos medios hasta el fallo y la probabilidad de un fallo reparable son iguales. No obstante, la estructura interna del fallo reparable produce diferencias entre los valores de las probabilidades. Puede observarse como estas probabilidades dependen fuertemente del número de unidades para cada sistema. Además, existen variaciones entre los tres sistemas.

Damos una aproximación para el caso en el que el sistema tiene un gran número de unidades, y se puede comprobar que un sistema con 7 unidades tiene una distribución similar a la de dicha aproximación.

Las medidas descritas en la sección 2.6 han sido calculadas para los diferentes modelos considerando sistemas con distinto número de unidades. La Tabla 2.2

Unidades en reparación								
Un.	Mod.	0	1	2	3	4	5	6
3	1	0.4598	0.2739	0.1656	0.1007			
	2	0.4735	0.2378	0.1602	0.1286			
	3	0.4633	0.2406	0.1635	0.1326			
4	1	0.4337	0.2584	0.1562	0.0944	0.0574		
	2	0.4448	0.2234	0.1499	0.1009	0.0810		
	3	0.4337	0.2252	0.1526	0.1041	0.0844		
5	1	0.4194	0.2499	0.1510	0.0912	0.0551	0.0335	
	2	0.4274	0.2146	0.1441	0.0967	0.0651	0.0522	
	3	0.4156	0.2158	0.1463	0.0995	0.0678	0.0550	
6	1	0.4112	0.2450	0.1480	0.0894	0.0540	0.0326	0.0198
	2	0.4165	0.2091	0.1404	0.0942	0.0632	0.0425	0.0341
	3	0.4041	0.2099	0.1422	0.0967	0.0658	0.0449	0.0364
	3	0.3967	0.2060	0.1396	0.0950	0.0646	0.0439	0.0299
∞	1	0.3993	0.2379	0.1437	0.0868	0.0524	0.0316	0.0191
	2	0.3958	0.1988	0.1334	0.0895	0.0601	0.0403	0.0270
	3	0.3818	0.1983	0.1344	0.0914	0.0621	0.0423	0.0287

Tabla 2.1: Probabilidad estacionaria en los macro-estados para los Modelos 1, 2 y 3 con distinto número de unidades

muestra los valores de la disponibilidad y la probabilidad condicionada de fallo para distinto número de unidades en régimen estacionario.

Estos valores los calculamos a partir de (2.10), (2.12), (2.13), (2.15), (2.17), (2.18) y (2.19). El valor más alto para la disponibilidad lo obtenemos para el Modelo 1 para cualquier número de unidades. La disponibilidad obtenida para el Modelo 2 es más próxima a la del Modelo 3 que a la del Modelo 1. El Modelo 2 tiene sólo fallos reparables a partir de los accidentales y el Modelo 3 tiene estos fallos más fallos internos reparables. La probabilidad condicionada de fallo reparable para cualquier número de unidades es muy similar en cualquiera de los sistemas. Para clasificar los modelos según el valor de la probabilidad condicionada de fallo, de mayor a menor, el orden obtenido es Modelo 1, 3 y 2, hasta cuatro unidades en el sistema, y Modelo 3, 1 y 2 cuando hay más de cuatro unidades. Nótese que cuando hay un número ilimitado de unidades, el orden es Modelo 3, 2 y 1. Un razonamiento similar puede ser realizado para la probabilidad condicionada de fallo no reparable, y en este caso, el orden de los modelos es Modelo 1, 2 y 3 para cualquier número de unidades. Finalmente, la probabilidad condicionada de fallo del sistema es muy similar para los Modelos 2 y 3. Cuando consideramos la aproximación para un sistema con un gran número de unidades, estas probabilidades son muy parecidas, siendo esta medida decreciente, obviamente, con el número de unidades.

Nos centramos ahora en un sistema con cuatro unidades y realizaremos el análisis en régimen transitorio. Las probabilidades de ocupar los diferentes

Número de unidades	Modelo	A	$\nu_r + \nu_{rw}$	$\nu_{nr} + \nu_w$	ν_s
2	Modelo 1	0.8149	0.0101	0.0435	0.0039
	Modelo 2	0.7879	0.0098	0.0420	0.0045
	Modelo 3	0.7833	0.0100	0.0416	0.0046
3	Modelo 1	0.8993	0.0112	0.0480	0.0021
	Modelo 2	0.8714	0.0109	0.0465	0.0027
	Modelo 3	0.8674	0.0111	0.0460	0.0028
4	Modelo 1	0.9426	0.0117	0.0504	0.0012
	Modelo 2	0.9190	0.0115	0.0490	0.0017
	Modelo 3	0.9156	0.0117	0.0486	0.0018
5	Modelo 1	0.9665	0.0120	0.0516	0.0007
	Modelo 3	0.9478	0.0118	0.0506	0.0011
	Modelo 3	0.9450	0.0121	0.0501	0.0012
6	Modelo 1	0.9802	0.0122	0.0524	0.0004
	Modelo 2	0.9659	0.0121	0.0515	0.0007
	Modelo 3	0.9636	0.0123	0.0514	0.0008
∞	Modelo 1	1	0.0124	0.0534	0
	Modelo 2	1	0.125	0.0533	0
	Modelo 3	1	0.128	0.0531	0

Tabla 2.2: Disponibilidad y probabilidad condicionada de fallo en régimen estacionario para los Modelos 1,2 y 3

macro-estados a lo largo del tiempo vienen dados en la Tabla 2.3.

La tendencia de estas probabilidades es similar en cualquier modelo. De este modo, para cualquier modelo, la probabilidad de que todas las unidades estén operativas decrece a lo largo del tiempo. En los otros casos, las probabilidades crecen con el tiempo. La distribución estacionaria viene dada para los modelos.

La disponibilidad a lo largo del tiempo se compara para los tres modelos (Figura 2.1). Estas funciones han sido calculadas a partir de (2.9).

El periodo de funcionamiento para todos los modelos ha sido analizado aplicando los resultados de la sección 2.5. La función de supervivencia para este tiempo viene dada en la Figura 2.2.

La función de supervivencia para el periodo de funcionamiento para los Modelos 2 y 3 es muy similar en cada caso, como puede observarse en la Figura 2.2.

La evolución de los primeros instantes de la probabilidad condicionada de fallo la representamos para los diferentes tipos de fallo y para los tres modelos.

La Figura 2.3 muestra estas curvas para el Modelo 1, y la Figura 2.4 para el Modelo 2 y 3. Los valores de las Figuras 2.3 y 2.4 han sido calculados a partir de (2.11), (2.13), (2.16) y (2.18).

Las Figuras 2.3 y 2.4 muestran que los Modelos 1 y 2 tienen una probabilidad condicionada de fallo reparable y no reparable similar, excepto para las dos primeras unidades de tiempo. Esto se debe a que en las primeras unidades

		Macro-estados				
Tiempo κ	Modelo	0	1	2	3	4
10	Modelo 1	0.8648	0.1225	0.0118	0.0009	$5.5045 \cdot 10^{-5}$
	Modelo 2	0.7541	0.1852	0.0467	0.0110	0.0030
	Modelo 3	0.7538	0.1855	0.0467	0.0110	0.0030
50	Modelo 1	0.6635	0.2494	0.0689	0.0150	0.0031
	Modelo 2	0.6394	0.2216	0.0898	0.0335	0.0157
	Modelo 3	0.6341	0.2252	0.0909	0.0339	0.0159
100	Modelo 1	0.5654	0.2737	0.1102	0.0377	0.0129
	Modelo 2	0.5654	0.2314	0.1157	0.0547	0.0328
	Modelo 3	0.5574	0.2354	0.1178	0.0559	0.0335
500	Modelo 1	0.4399	0.2598	0.1544	0.0913	0.0546
	Modelo 2	0.4503	0.2241	0.1485	0.0986	0.0784
	Modelo 3	0.4394	0.2261	0.1512	0.1017	0.0816
1000	Modelo 1	0.4339	0.2584	0.1561	0.0943	0.0573
	Modelo 2	0.4449	0.2234	0.1499	0.1009	0.0809
	Modelo 3	0.4338	0.2252	0.1526	0.1040	0.0843
∞	Modelo 1	0.4337	0.2584	0.1562	0.0944	0.0574
	Modelo 2	0.4448	0.2234	0.1499	0.1009	0.0810
	Modelo 3	0.4337	0.2252	0.1526	0.1041	0.0844

Tabla 2.3: Probabilidad de ocupar los macro-estados 0, 1, 2, 3, 4 en diferentes instantes

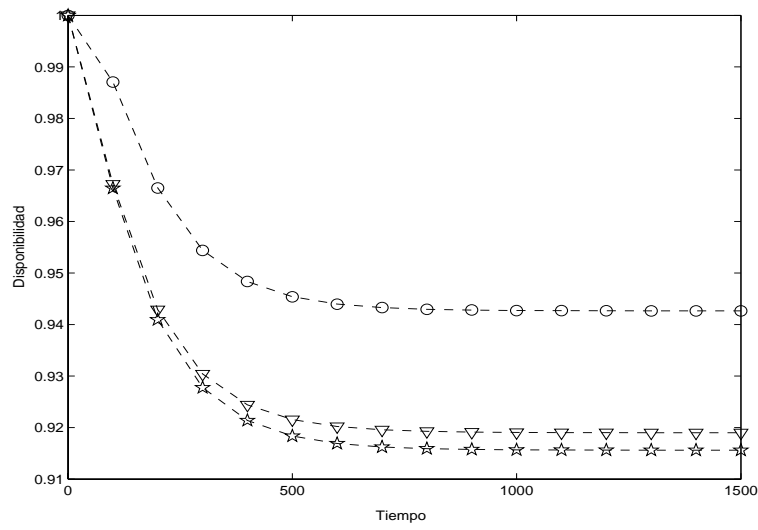


Figura 2.1: Disponibilidad del sistema con cuatro unidades para el Modelo 1 (círculos), para el Modelo 2 (triángulos) y el Modelo 3 (estrellas)

de tiempo, los Modelos 2 y 3 no pueden sufrir fallos no reparables, dada su estructura. Por otro lado, la Figura 2.4 muestra que la probabilidad condicionada para los fallos reparables y no reparables es muy similar para los Modelos 2 y 3.

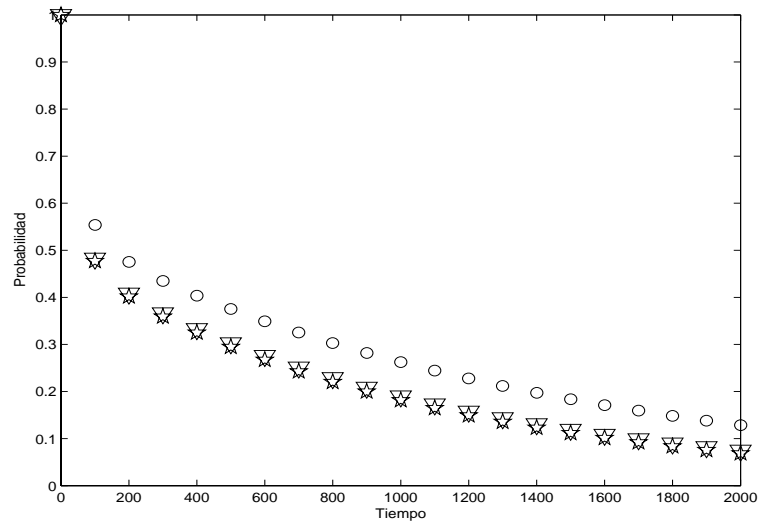


Figura 2.2: Funciones de supervivencia para el periodo de funcionamiento: Modelo 1 (círculos), Modelo 2 (triángulos) y Modelo 3 (estrellas)

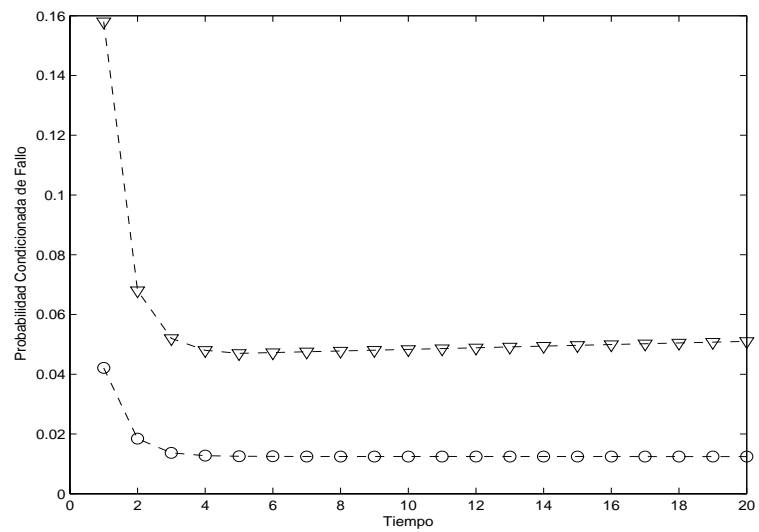


Figura 2.3: Probabilidad condicionada de los diferentes tipos de fallo de la unidad principal para el Modelo 1: fallos reparables (círculos), no reparables (triángulos)

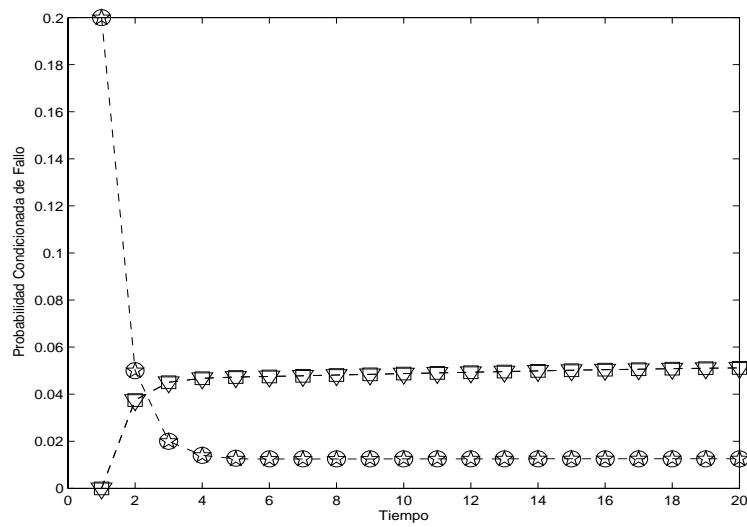


Figura 2.4: Probabilidad condicionadas de los diferentes tipos de fallo de la unidad principal para los Modelos 2 y 3: fallos reparables Modelo 2 (círculos), no reparables Modelo 2 (triángulos); fallos reparables Modelo 3 (estrellas); y fallos no reparables, Modelo 3 (cuadrados)

Capítulo 3

Sistema con múltiples componentes en reserva pasiva y pérdida de unidades

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla un sistema con múltiples componentes en reserva pasiva en tiempo discreto. Hasta aquí, el estudio se reduce al realizado en el capítulo anterior. No obstante, añadimos una variación en cuanto al funcionamiento del sistema. En este modelo se produce pérdida de unidades. Veamos en qué consiste.

Consideramos un sistema con K unidades, una ocupa la posición principal, es la unidad que está en funcionamiento, y el resto se encuentran en reserva pasiva, en reparación o esperando para ser reparadas. Existe un único reparador. Las unidades en reserva no sufren fallos, pero la unidad principal puede sufrir diferentes tipos de fallos, pudiendo ser internos (siempre no reparables) y fallos externos accidentales (que pueden ser reparables o no reparables). Cuando ocurre un fallo no reparable, la unidad es eliminada del sistema. Cuando la unidad principal sufre un fallo reparable, ésta va a reparación. En ambos casos, una unidad de la reserva, si la hubiese, pasa a ocupar el lugar de la unidad principal instantáneamente. Cuando una unidad se repara, ésta se reincorpora de nuevo en el sistema y funciona como una nueva.

El estudio de este sistema se realiza en tiempo discreto y, como ya hemos mencionado en capítulos anteriores, las distribuciones que intervienen en dicho sistema son generales, considerando la representación tipo fase.

La utilización de las distribuciones tipo fase nos permitirán obtener medidas

de fiabilidad del sistema en forma algebraica. Utilizaremos además el método de la factorización RG dado en Li y Cao (2004)[16] con el fin de operar con las matrices que aparecen a lo largo del estudio. Este método nos proporciona un análisis computacional complejo para la interpretación de las medidas que se obtienen.

El análisis que se realiza en este capítulo incorpora una serie de novedades con respecto al capítulo anterior. Construimos un modelo de fiabilidad discreto con distintos tipos de fallo y pérdida de unidades, a través de un proceso de Markov. La reparación de los fallos accidentales puede ser dependiente o independiente del tiempo transcurrido hasta el fallo.

Este capítulo se ha publicado en la revista *Discrete Events Dynamic Systems* (Ruiz-Castro, Fernández-Villodre y Pérez-Ocón (2009) [33]).

El capítulo está organizado del siguiente modo. En la sección 3.2 realizaremos la descripción del modelo, presentaremos las hipótesis del mismo, el espacio de estados de la cadena de Markov asociada y obtendremos la matriz de probabilidades de transición. En la sección 3.3 calcularemos las probabilidades de transición, la disponibilidad y el número de visitas a una determinada fase. El periodo de funcionamiento del sistema será analizado en la sección 3.4 y en la sección 3.5 calculamos la probabilidad condicionada a los distintos tipos de fallo que pueden llegar al sistema, así como el número medio de fallos. El estudio de los costos lo realizamos en la sección 3.6. Las medidas y resultados obtenidos a lo largo del capítulo son algoritmizadas. Los resultados en esta forma los daremos en la sección 3.8. Finalmente, realizamos una aplicación numérica para ilustrar los resultados obtenidos. La aplicación numérica ocupará la sección 3.7.

3.2. El sistema

En esta sección se describe el sistema que vamos a modelizar, presentaremos las hipótesis del mismo, el conjunto de estados y finalmente, construiremos el modelo.

3.2.1. Hipótesis del modelo

Como ya mencionamos en la introducción, consideramos un sistema sujeto a distintos tipos de fallo. Analizaremos el comportamiento de un sistema con K unidades, una principal y el resto en reserva pasiva. La unidad principal puede fallar por diferentes motivos. Puede sufrir fallos de desgaste o fallos accidentales. Si ocurre un fallo accidental, éste puede ser reparable o no reparable. En el primer caso, la unidad pasa al canal de reparación y en el segundo caso, la unidad se elimina del sistema (el sistema pierde una unidad). Se considera un único reparador.

Los fallos accidentales ocurren según un proceso de renovación general discreto. La reparabilidad o no reparabilidad de los fallos externos no tiene porqué ser

independiente del tiempo hasta el fallo. Por tanto, la reparabilidad o no reparabilidad puede depender de la estructura interna del tiempo hasta la ocurrencia del fallo accidental.

Los tiempos operativos y de reparación siguen una distribución general discreta, y consideraremos su correspondiente representación PH.

Veamos a continuación las hipótesis del modelo.

Hipótesis 1. El tiempo de vida de la unidad principal debido a un fallo de desgaste se distribuye tipo fase con representación $\text{PH}(\alpha, \mathbf{T})$, de orden m .

Hipótesis 2. Los fallos accidentales ocurren según un proceso de renovación discreto tipo fase. Por tanto, el tiempo entre dos fallos accidentales consecutivos se distribuye tipo fase con representación $\text{PH}(\gamma, \mathbf{L})$, de orden t .

Hipótesis 3. La absorción del tiempo entre dos fallos accidentales consecutivos (distribución tipo fase) puede ocurrir en distintos estados absorbentes, r y nr . Un fallo reparable o no reparable ocurre si la absorción se produce en el estado r o nr respectivamente. En este caso, el vector columna \mathbf{L}^0 está dividido en dos vectores columna, \mathbf{L}_r^0 y \mathbf{L}_{nr}^0 . Estos vectores columna contienen las probabilidades de absorción desde los estados transitorios en los que se produce un fallo reparable o no reparable, respectivamente.

Hipótesis 4. El tiempo de reparación se distribuye tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) , de orden n .

Hipótesis 5. Los tiempos definidos en las hipótesis anteriores son independientes.

Hipótesis 6. Las reparaciones, los fallos accidentales y los de desgaste, pueden ocurrir simultáneamente.

Hipótesis 7. Cuando ocurre un fallo accidental reparable al mismo tiempo que uno de desgaste, la unidad sufre un fallo total (la unidad se elimina del sistema).

Hipótesis 8. Cuando una unidad es reparada, se considera como nueva.

Hipótesis 9. La reparación es perfecta y el cambio de unidades instantáneo.

El sistema se modeliza a través de un proceso de Markov discreto para el que el espacio de estados y las probabilidades de transición se describen en las secciones siguientes.

3.2.2. Espacio de estados

Para construir el espacio de estados, consideraremos el número de unidades presentes en el sistema y el número de unidades de éstas que se encuentran no operativas. Por tanto, el espacio de estados se puede expresar como sigue.

Para el primer caso, considerando el número de unidades presentes en el sistema, el conjunto de estados S puede expresarse como

$$S = \{\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{K-1}, \dots, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_0\},$$

donde \mathbf{U}_k es el vector de estados para el caso en el que hay k unidades en el sistema, $k = 1, \dots, K$. Dependiendo del número de unidades no operativas para cada caso, estos bloques pueden ser expresados como $\mathbf{U}_k = \{\mathbf{E}_0^k, \mathbf{E}_1^k, \dots, \mathbf{E}_k^k\}$; $k = 1, \dots, K$.

El vector \mathbf{E}_s^k contiene los estados cuando hay k unidades en el sistema y s de éstas están en estado no operativo. Estos bloques pueden expresarse mediante sus respectivas fases del siguiente modo.

Si k denota el número de unidades en el sistema, $1 \leq k \leq K$, agruparemos los estados en tres conjuntos: el macro-estado 0, el macro-estado k (ambos forman los estados frontera), y los macro-estados repetitivos o intermedios. Las fases para estos casos son las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^k &= \{(k, 0; i, j); 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t\}, \\ \mathbf{E}_s^k &= \{(k, s; i, j, j'); 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t, 1 \leq j' \leq n\}; \quad 1 \leq s \leq k-1, \\ \mathbf{E}_k^k &= \{(k; j'); 1 \leq j' \leq n\}. \end{aligned}$$

En el primer caso, i denota la fase operativa de la unidad principal y j la fase del fallo accidental. En el segundo caso, i denota la fase operativa de la unidad principal, j la fase del fallo accidental y j' denota la fase de reparación. En el último caso, el significado de j' se mantiene.

3.2.3. Matriz de probabilidades de transición

El sistema descrito en la sección anterior puede ser modelizado mediante un proceso de Markov vectorial con el espacio de estados descrito en en la sección 3.2.2.

Obtendremos ahora la matriz de probabilidades de transición cuya estructura pasamos a definir.

El nivel k de esta matriz contiene las transiciones entre los macro-estados cuando una transición comienza con k unidades en el sistema, para $k = 1, \dots, K$. Este aspecto se denota con el superíndice de las matrices en cada bloque. La última fila corresponde al macro-estado \mathbf{U}_0 , que indica que no hay unidades en el sistema. Este macro-estado es absorbente y por ello, la última fila de la matriz de probabilidades de transición está formada por ceros, con probabilidad de permanecer en este macro-estado igual a 1.

La matriz de probabilidades de transición \mathbf{P} tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_p^K & \mathbf{R}_s^K & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p^{K-1} & \mathbf{R}_s^{K-1} & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{R}_p^2 & \mathbf{R}_s^2 & & \\ & & & & & \mathbf{R}_p^1 & \mathbf{R}_s^1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

El bloque \mathbf{R}_p^k contiene las transiciones entre el macro-estado k , esto es, antes de la transición hay k unidades en el sistema y después de la transición continúa habiendo k unidades en el mismo. El bloque \mathbf{R}_s^k contiene las transiciones entre el macro-estado k y el $k-1$, esto es, antes de la transición hay k unidades en el sistema y después de la transición hay $k-1$ unidades, para $k = 1, \dots, K$.

Cada uno de los bloques definidos puede ser dividido dependiendo del número de unidades no operativas en el sistema. De esta forma, para las transiciones en las que no se produce cambio en el número de unidades se tiene

$$\mathbf{R}_p^k = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & & & & & & \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & & \\ & & & & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}'' & \\ & & & & & \mathbf{B}' & \mathbf{B} & \end{pmatrix}_{k+1 \times k+1}; \quad k = 3, \dots, K,$$

$$\mathbf{R}_p^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}'' \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}' & \mathbf{B} \end{pmatrix}_{3 \times 3}; \quad \mathbf{R}_p^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01}^1 \\ \mathbf{B}_{10}^1 & \mathbf{B} \end{pmatrix}_{2 \times 2},$$

y para las transiciones en las que ocurre un fallo no reparable

$$\mathbf{R}_s^k = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00} & & & & & & & \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{C}_1 & & & & & & \\ & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 & & \\ & & & & & \mathbf{D}' & \mathbf{D} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & \end{pmatrix}_{k+1 \times k}; \quad k = 3, \dots, K,$$

$$\mathbf{R}_s^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{10}^2 & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{3 \times 2} ; \mathbf{R}_s^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{2 \times 1}.$$

A continuación analizaremos la estructura de cada uno de los bloques de las expresiones anteriores.

Matriz \mathbf{R}_p^k

Bloque \mathbf{B}_{00}

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema y ninguna en reparación

$$\mathbf{B}_{00} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L}.$$

Bloques \mathbf{B}_{01} y \mathbf{B}_{01}^1

Estas matrices contienen las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, ninguna en reparación, y ocurre un fallo accidental reparable. Analizando la matriz \mathbf{B}_{01} , podemos observar que un fallo accidental reparable ocurre con probabilidad \mathbf{L}_r^0 y en este instante la unidad principal, que estaba funcionando, pasa a reparación. Una nueva unidad ocupa la posición de la unidad principal con distribución inicial α . El proceso del fallo accidental para la nueva unidad operativa empieza con probabilidad γ . La unidad afectada por el fallo comienza su reparación en alguna fase, dependiendo del vector de probabilidad β . Obviamente, dado que el fallo se debe a un fallo accidental, un fallo de desgaste no ocurre en este instante. Esto ocurre con probabilidad $\mathbf{e} - \mathbf{T}^0$. El resto de los bloques pueden interpretarse de forma análoga.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{01} &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \beta, \\ \mathbf{B}_{01}^1 &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \beta. \end{aligned}$$

Bloques \mathbf{B}_{10} y \mathbf{B}_{10}^1

Estas matrices contienen las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, con una de ellas en reparación, y esta unidad completa su reparación

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{10} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}^0, \\ \mathbf{B}_{10}^1 &= \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0. \end{aligned}$$

Bloque A₁

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, y en la siguiente transición no cambia el número de unidades no operativas

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta.$$

Bloque A₂

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, y en la siguiente transición se completa una reparación

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}^0 \beta.$$

Bloque A₀

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, y en la siguiente transición ocurre un fallo accidental reparable

$$\mathbf{A}_0 = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{S}.$$

Bloque B

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; todas se encuentran no operativas y en el instante siguiente, el número de unidades no operativas no varía. En este caso sólo son posibles las transiciones en la reparación

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}.$$

Bloque B'

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; todas están no operativas y se completa una reparación

$$\mathbf{B}' = \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta.$$

Bloque B''

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; únicamente hay una operativa y ocurre un fallo accidental reparable

$$\mathbf{B}'' = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{S}.$$

*Matriz R_s^k**Bloques D₀₀ y D₀₀¹*

Estas matrices contienen las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; ninguna de estas unidades está en reparación y en el siguiente instante, hay $k-1$ unidades en el sistema y el reparador está libre

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{00} &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}, \\ \mathbf{D}_{00}^1 &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} - \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}_{nr}^0. \end{aligned}$$

Bloque D₁₀

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, una en reparación y, en el instante siguiente, hay $k-1$ unidades en el sistema y el reparador está libre

$$\mathbf{D}_{10} = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}^0.$$

Bloque C₁

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; en el siguiente instante ocurre un fallo no reparable y no se produce cambio en el número de unidades no operativas

$$\mathbf{C}_1 = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}.$$

Bloques C₂, D' y D₁₀²

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema; en el siguiente instante ocurre un fallo no reparable y una reparación se completa

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}' &= \mathbf{C}_2 = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta \\
 &+ \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\
 \mathbf{D}_{10}^2 &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}^0.
 \end{aligned}$$

Bloque D

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases en las que hay k unidades en el sistema, $k - 1$ en reparación, y en el instante siguiente ocurre un fallo no reparable

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{S} - \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{S}.$$

La matriz \mathbf{P} , dada en (3.1), y formada por los bloques que hemos construido, es una matriz estocástica, esto es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_p^k \mathbf{e} + \mathbf{R}_s^k \mathbf{e} &= \mathbf{e}; \quad 2 \leq k \leq K, \\
 \mathbf{R}_p^1 \mathbf{e} + \mathbf{R}_s^1 \mathbf{e} &= \mathbf{e}.
 \end{aligned}$$

Nota: La reparabilidad o no reparabilidad de los fallos accidentales puede considerarse independiente del tiempo que transcurre hasta el fallo. Ahora, cuando ocurre un fallo accidental, la unidad es reparable con probabilidad p y no reparable con probabilidad $q = 1 - p$. En este caso particular, los vectores columna \mathbf{L}_r^0 y \mathbf{L}_{nr}^0 son equivalentes a $\mathbf{L}^0 p$ y $\mathbf{L}^0 q$, respectivamente.

Por otro lado, podemos considerar un sistema similar al descrito, donde la unidad principal puede sufrir fallos internos reparables o no reparables. En este caso, el vector columna \mathbf{T}^0 puede ser dividido en los vectores columna \mathbf{T}_r^0 y \mathbf{T}_{nr}^0 . Teniendo en cuenta este aspecto, puede realizarse una interpretación similar a la ya realizada, considerando los cambios oportunos en los bloques. Algunas combinaciones de estos tipos de fallo puede ser calculada de forma inmediata.

3.3. Probabilidades de transición, disponibilidad y número esperado de visitas

Dada la distribución inicial $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$ y la matriz de probabilidades de transición dada en (3.1) se pueden calcular las probabilidades de transición. Teniendo en cuenta la estructura del espacio de estados, podemos calcular la probabilidad de que en el instante ν el sistema esté compuesto por k unidades, de las cuales s están en reparación, para $s = 0, \dots, k$. Denotamos esta probabilidad mediante

el vector $p_{\mathbf{E}_s^k}(\nu)$ y es igual al vector $(\alpha \otimes \gamma, 0) \mathbf{P}^\nu$ limitado a los elementos de las fases \mathbf{E}_s^k , para $k = 1, \dots, K$ y $s = 0, \dots, k$.

Por otro lado, dada la estructura del espacio de estados, la probabilidad de que en el instante ν el sistema no tenga ninguna unidad es igual al último elemento del vector $(\alpha \otimes \gamma, 0) \mathbf{P}^\nu$, y lo denotaremos por $p_{\mathbf{U}_0}(\nu)$. En general, emplearemos $p_{\mathbf{Z}}(\nu)$ para denotar la probabilidad de que en el instante ν el sistema esté en alguno de las fases de un determinado macro-estado \mathbf{Z} .

Calculamos ahora el número medio de visitas a cierta fase hasta el instante H antes de la absorción. Para ello definimos \mathbf{P}^* como

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_p^K & \mathbf{R}_p^K & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p^{K-1} & \mathbf{R}_s^{K-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{R}_p^2 & \mathbf{R}_s^2 \\ & & & & & & \mathbf{R}_p^1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Es sabido (Kulkarni, 1999[15]) que sumando $(\mathbf{P}^*)^\nu$, desde $\nu = 0$ hasta H , obtenemos una matriz cuyo elemento (i, j) es el número medio de visitas a la fase j cuando el sistema está en la fase i inicialmente, hasta el tiempo H . Denotamos esta matriz como

$$\mathbf{N}(H) = \sum_{\nu=0}^H (\mathbf{P}^*)^\nu = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{P}^*)^{H+1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}. \quad (3.3)$$

Si consideramos la distribución inicial tenemos

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N}(H) = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \sum_{\nu=0}^H (\mathbf{P}^*)^\nu = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \left(\mathbf{I} - (\mathbf{P}^*)^{H+1} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}. \quad (3.4)$$

El elemento i de este vector es el número medio de visitas a la fase i cuando se ha observado el fenómeno hasta el tiempo H .

Tomando límites cuando H tiende a infinito, calculamos la matriz \mathbf{N} . La entrada (i, j) de esta matriz es el número medio de visitas a la fase j cuando inicialmente el sistema estaba en la fase i . Si consideramos la distribución inicial tenemos

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N} = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathbf{P}^*)^\nu = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}. \quad (3.5)$$

Las probabilidades de transición y las matrices \mathbf{N} y $\mathbf{N}(H)$ han sido calculadas por bloques en forma algorítmica. Vienen dadas en la sección 3.8 del presente capítulo. Hemos obtenido expresiones para estas matrices asociadas a los diferentes macro-estados.

Conocidas las probabilidades de transición, podemos calcular la disponibilidad. Esta medida es la probabilidad de que en el instante ν , el sistema continúe funcionando. Es igual a

$$A(\nu) = p_{[\cup_{k=1}^K \cup_{s=0}^{k-1} \mathbf{E}_s^k]}(\nu) \cdot \mathbf{e} = \sum_{k=1}^K \sum_{s=0}^{k-1} p_{\mathbf{E}_s^k}(\nu) \cdot \mathbf{e}.$$

3.4. El periodo de funcionamiento

Consideramos un sistema con K unidades. El vector inicial es $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$. En esta sección analizaremos la distribución del tiempo desde el instante en el que el sistema está operativo sin unidades en reparación, hasta el instante en el que el sistema se encuentra no operativo. Esta situación puede ocurrir porque cada una de las K unidades falle, porque todas sufran un fallo global, o porque algunas de las unidades fallen de forma no reparable y las otras se encuentren en reparación en un tiempo determinado.

Para el primer caso, la función de distribución del periodo de funcionamiento es tipo fase con representación $((\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}), \mathbf{P}^*)$, siendo la matriz \mathbf{P}^* la dada en (3.2).

Para el segundo caso (todas las unidades se encuentran no operativas, independientemente del número de unidades en el sistema), reordenando los macro-estados, la distribución de este tiempo también es tipo fase con representación $((\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}), \mathbf{P}')$, siendo

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_p'^K & \mathbf{R}_s'^K & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p'^{K-1} & \mathbf{R}_s'^{K-1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{R}_p'^2 & \mathbf{R}_s'^2 & \\ & & & & \mathbf{R}_p'^1 & \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde las matrices $\mathbf{R}_p'^k$ y $\mathbf{R}_s'^k$ son los bloques \mathbf{R}_p^k y \mathbf{R}_s^k respectivamente, pero con las n últimas filas y columnas eliminadas, para $k = 1, \dots, k$.

Por tanto, el tiempo medio hasta el fallo del sistema, por cualquier motivo, viene dado por

$$(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}')^{-1} \mathbf{e}. \quad (3.7)$$

El tiempo medio que transcurre hasta que no quedan unidades en el sistema es

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N} \mathbf{e} = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{e}. \quad (3.8)$$

Dado que las dimensiones de las matrices \mathbf{P}' y \mathbf{P}^* son muy grandes, emplearemos el método de Factorización RG (Li y Cao, 2004,[16]) que nos permitirá manejarlas con mayor facilidad. Este método se encuentra desarrollado en la sección 3.8.

3.5. Probabilidad condicionada de fallo y número esperado de fallos

En esta sección calcularemos algunas probabilidades esenciales en el estudio de la fiabilidad del sistema que nos ocupa. Obtendremos probabilidades condicionadas a distintos tipos de fallo. En primer lugar, consideraremos el fallo que afecta únicamente a la unidad principal, sin causar fallo del sistema y en segundo lugar, el fallo considerado si ocasionara fallo del sistema. El número esperado de fallos hasta un cierto instante de tiempo podrá ser calculado a partir de la probabilidad condicionada de fallo. Análogamente se hará para el número esperado de fallos hasta que todas las unidades fallen. Calcularemos estas medidas en forma algorítmica matricial en la sección 3.8.

3.5.1. Probabilidad Condicionada de fallo de la unidad principal

Analizaremos ahora la probabilidad condicionada de fallo de la unidad principal del sistema, considerando k unidades presentes en el mismo. La probabilidad de que en el instante ν ocurra un fallo (dependiendo del tipo de fallo) viene dada por las expresiones que obtenemos a continuación.

Fallo accidental reparable

El sistema se encuentra operativo en el instante $\nu - 1$, y al instante siguiente ocurre un fallo reparable, \mathbf{L}_r^0 , sin que ocurra un fallo de desgaste interno, $\mathbf{T} \mathbf{e}$. Esta probabilidad es igual a

$$r_p^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu - 1) (\mathbf{T} \mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_r^0) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_0^k \cup \bigcup_{s=1}^{k-1} \mathbf{E}_s^k}(\nu - 1) \begin{pmatrix} \mathbf{T} \mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_r^0 \\ \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{T} \mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_n \end{pmatrix} & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.9)$$

Fallo accidental no reparable

El sistema está operativo en el instante $\nu - 1$, y en el instante siguiente ocurre un fallo accidental no reparable, \mathbf{L}_{nr}^0 , sin que ocurra mientras tanto un fallo interno de desgaste, \mathbf{Te} . Esta probabilidad es igual a

$$r_q^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu - 1) (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_0^k \cup \bigcup_{s=1}^{k-1} \mathbf{E}_s^k}(\nu - 1) \left(\begin{array}{c} \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \\ \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_n \end{array} \right) & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.10)$$

Fallo de desgaste

El sistema está operativo en el instante $\nu - 1$, y en el instante siguiente ocurre un fallo interno de desgaste, \mathbf{T}^0 . Esta probabilidad es igual a

$$r_d^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu - 1) (\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_0^k \cup \bigcup_{s=1}^{k-1} \mathbf{E}_s^k}(\nu - 1) \left(\begin{array}{c} \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_{nt} \end{array} \right) & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.11)$$

Sumando en k las probabilidades condicionadas de todos los fallos, definidos por las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11), obtenemos $r_p(\nu)$, $r_q(\nu)$ y $r_d(\nu)$ definidos en la ecuación (3.12).

$$r_p(\nu) = \sum_{k=1}^K r_p^k(\nu), \quad r_q(\nu) = \sum_{k=1}^K r_q^k(\nu), \quad r_d(\nu) = \sum_{k=1}^K r_d^k(\nu). \quad (3.12)$$

Estas medidas indican la probabilidad de que el fallo ocurra debido a uno de los distintos tipos de fallo en el instante ν .

Además, podemos calcular, a partir de las medidas anteriores, la probabilidad condicionada de fallo global cuando hay k unidades en el sistema. Esta medida es

$$r^k(\nu) = r_p^k(\nu) + r_q^k(\nu) + r_d^k(\nu).$$

Esta medida expresa la probabilidad de que el fallo global ocurra en el instante ν , debido a cualquier tipo de fallo cuando hay k unidades presentes en el sistema.

En general, para cualquier número de unidades, la probabilidad condicionada de fallo global también se obtiene a partir de las expresiones anteriores del siguiente modo

$$r(\nu) = \sum_{k=1}^K r^k(\nu) = r_p(\nu) + r_q(\nu) + r_d(\nu). \quad (3.13)$$

3.5.2. Probabilidad condicionada de fallo del sistema

En esta sección analizaremos la probabilidad condicionada de fallo del sistema considerando que en el sistema hay k unidades, pero únicamente hay una operativa. En este caso la probabilidad de que en el instante ν ocurra un fallo (dependiendo del tipo de fallo) viene dada por las expresiones que aparecen a continuación.

Fallo accidental reparable

El sistema está operativo en el instante $\nu-1$ con una única unidad operativa, y en el instante siguiente ocurre un fallo reparable, \mathbf{L}_r^0 , sin que ocurra en ese instante un fallo interno de desgaste, \mathbf{Te} . Si existe más de una unidad en el sistema, en el instante ν la reparación no se produce, \mathbf{Se} . Esta probabilidad es igual a

$$rs_p^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu-1) (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_{k-1}^k}(\nu-1) (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{Se}) & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.14)$$

Fallo accidental no reparable

El sistema está operativo en el instante $\nu-1$ con una única unidad operativa, y en el instante siguiente ocurre un fallo no reparable, \mathbf{L}_{nr}^0 , no ocurriendo en ese instante, un fallo interno de desgaste, \mathbf{Te} . Si hay más de una unidad en el sistema, en el instante ν la reparación no se completa, \mathbf{Se} . Esta probabilidad es igual a

$$rs_q^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu-1) (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_{k-1}^k}(\nu-1) (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{Se}) & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.15)$$

Fallo de desgaste

El sistema está operativo en el instante $\nu-1$ con una única unidad operativa, y en el instante siguiente ocurre un fallo interno de desgaste, \mathbf{T}^0 . Si hay más de una unidad en el sistema, en el instante ν no se produce reparación alguna, \mathbf{Se} . Esta probabilidad es igual a

$$rs_d^k(\nu) = \begin{cases} p_{\mathbf{E}_0^1}(\nu-1) (\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t) & ; \quad k = 1 \\ p_{\mathbf{E}_{k-1}^k}(\nu-1) (\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{Se}) & ; \quad k = 2, \dots, K. \end{cases} \quad (3.16)$$

Sumando en k las probabilidades condicionadas de todos los fallos, definidos por las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16), obtenemos $rs_p(\nu), rs_q(\nu)$ y $rs_d(\nu)$ definidos en la ecuación (3.17)

$$rs_p(\nu) = \sum_{k=1}^K rs_p^k(\nu), \quad rs_q(\nu) = \sum_{k=1}^K rs_q^k(\nu), \quad rs_d(\nu) = \sum_{k=1}^K rs_d^k(\nu). \quad (3.17)$$

Estas medidas indican la probabilidad de que el sistema sufra un fallo, debido a uno de los distintos tipos de fallo en el instante ν .

Además, podemos calcular, a partir de las medidas anteriores, la probabilidad condicionada de fallo global del sistema cuando hay k unidades en el mismo. Esta medida es

$$rs^k(\nu) = rs_p^k(\nu) + rs_q^k(\nu) + rs_d^k(\nu).$$

Esta medida expresa la probabilidad de que el fallo global del sistema ocurra en el instante ν , debido a cualquier tipo de fallo cuando hay k unidades presentes en el sistema.

En general, para cualquier número de unidades, la probabilidad condicionada de fallo global del sistema se obtiene a partir de las expresiones anteriores del siguiente modo

$$rs(\nu) = \sum_{k=1}^K rs^k(\nu) = rs_p(\nu) + rs_q(\nu) + rs_d(\nu). \quad (3.18)$$

3.5.3. Número esperado de fallos

En las secciones 3.5.1 y 3.5.2 se han analizado las probabilidades condicionadas de los diferentes tipos de fallo. Sumando en ν hasta H en cada una de las probabilidades condicionadas de fallo, obtendremos el número medio de fallos (tanto de la unidad principal como del sistema) hasta el tiempo H .

Por ejemplo, para el caso del fallo reparable, este valor es igual a

$$ANFp(H) = \sum_{\nu=1}^H r_p(\nu), \quad (3.19)$$

donde $r_p(\nu)$ viene dado por (3.12).

Tomando límites en H , cuando H tiende a infinito, esta medida es calculada hasta que no existen unidades en el sistema. Esto es

$$ANFp = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_p(\nu). \quad (3.20)$$

Para estudiar el comportamiento del número medio de fallos del sistema, podemos realizar un análisis análogo. En este último caso, tendremos que considerar la probabilidad condicionada de fallo del sistema. Por tanto, el número medio de fallos del sistema debido a un fallo reparable, hasta el instante H viene dada por

$$ANFS_p(H) = \sum_{\nu=1}^H rs_p(\nu), \quad (3.21)$$

y hasta que no haya unidades en el sistema,

$$ANFS_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} rs_p(\nu), \quad (3.22)$$

donde $rs_p(\nu)$ viene dada por (3.17).

Siguiendo en esta línea, resulta interesante calcular el número medio de fallos del sistema debido a cualquier causa hasta cierto instante H y hasta que no queden unidades en el sistema. Estos valores vienen dados, respectivamente por

$$ANFS(H) = \sum_{\nu=1}^H rs(\nu), \quad (3.23)$$

$$ANFS = \sum_{\nu=1}^{\infty} rs(\nu), \quad (3.24)$$

donde $rs(\nu)$ viene dada por (3.18).

Finalmente, consideraremos las unidades del sistema que se pierden debido a un fallo no reparable a lo largo del tiempo. Resulta una medida de interés el número medio de estas unidades que se pierden hasta cierto instante H . Para calcularlo, se suma en ν la expresión $r_q(\nu)$ y $r_d(\nu)$ dadas en (3.12). Esta medida viene dada por

$$ANUL(H) = \sum_{\nu=1}^H (r_q(\nu) + r_d(\nu)). \quad (3.25)$$

Estas medidas pueden ser calculadas en forma algorítmica. Pueden verse estos cálculos en la sección 3.8.

3.6. Costos

En esta sección introduciremos los costos en el modelo. Construiremos el vector de costos en la sección 3.6.1 y, conocido este vector, obtendremos algunos beneficios medios netos en la sección 3.6.2. Finalmente, en la sección 3.6.3 introduciremos los costos por pérdida de unidades del sistema. Todas las medidas que aparecen en esta sección se encuentran calculadas en forma algorítmica en la sección 3.8.

3.6.1. Vector de costos

Para obtener este vector procederemos del siguiente modo. Consideramos que en cada visita a una fase operativa de la unidad principal se obtiene un beneficio de B unidades monetarias (u.m), mientras que cada unidad en reserva conlleva un coste de C_a u.m. Una unidad en reparación conlleva también un coste que dependerá de la fase de reparación. Si se encuentra en la fase r , el coste por visita a esta fase es igual a C_r^R u.m. Estos valores pueden ser determinísticos o aleatorios.

Considerando los macro-estados definidos en el modelo, el beneficio neto por visita a una fase correspondiente cuando hay k unidades en el sistema viene dado por

$$\begin{aligned} C(k, 0) &= B - (k - 1)C_a, \\ C(k, s, r) &= B - (k - s - 1)C_a - C_r^R; \quad 1 \leq s \leq k - 1, \\ C(k, k, r) &= -C_r^R, \end{aligned}$$

donde $C(k, 0)$ es el beneficio neto por visita cuando no hay unidades en reparación, mientras que $C(k, s, r)$ es el beneficio neto por visita cuando hay s unidades en el canal de reparación y la unidad que está siendo reparada está en la fase r , para $s = 1, \dots, K$ and $k = 1, \dots, K$.

El beneficio medio por visita a estas fases es

$$\begin{aligned} c(k, 0) &= b - (k - 1)c_a, \\ c(k, s, r) &= b - (k - s - 1)c_a - c_r^R; \quad 1 \leq s \leq k - 1, \\ c(k, k, r) &= -c_r^R, \end{aligned}$$

donde los respectivos valores esperados vienen dados por

$$\begin{aligned} E[B] &= b, \\ E[C_a] &= c_a, \\ E[C_r^R] &= c_r^R. \end{aligned}$$

Para realizar un análisis de los costes, definimos los siguientes vectores

$$\mathbf{c}_0^k = c(k, 0)\mathbf{e}_{mt} = (b - (k - 1)c_a) \cdot \mathbf{e}_{mt},$$

$$\mathbf{c}_s^k = \mathbf{e}_{mt} \otimes \begin{pmatrix} c(k, s, 1) \\ \dots \\ c(k, s, n) \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{mt} \otimes \begin{pmatrix} b - (k - s - 1)c_a - c_1^R \\ \dots \\ b - (k - s - 1)c_a - c_r^R \end{pmatrix};$$

para $s = 1, \dots, k - 1$,

$$\mathbf{c}_k^k = \begin{pmatrix} c(k, k, 1) \\ \cdots \\ c(k, k, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1^R \\ \cdots \\ -c_n^R \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{c}_0^k contiene el beneficio medio neto por visita a las fases con 0 unidades en reparación y \mathbf{c}_s^k el beneficio neto por visita a las fases cuando hay k unidades en el sistema y s de éstas están en reparación, para $s = 1, \dots, k$ y $k = 1, \dots, K$.

El vector de beneficio neto es,

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0^K, \mathbf{c}_1^K, \dots, \mathbf{c}_K^K, \mathbf{c}_0^{K-1}, \mathbf{c}_1^{K-1}, \dots, \mathbf{c}_{K-1}^{K-1}, \dots, \mathbf{c}_0^1, \mathbf{c}_1^1)'. \quad (3.26)$$

3.6.2. Algunos beneficios medios

A partir del vector \mathbf{c} definido anteriormente, podemos calcular algunos beneficios medios. Consideraremos para ello que la distribución inicial del sistema viene dada por $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$.

La primera medida que obtendremos será el beneficio neto esperado en un instante fijo h . Este puede obtenerse a partir de la expresión

$$RW(h) = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{P}^*)^h \mathbf{c}. \quad (3.27)$$

Esta cantidad puede ser sumada, obteniendo así el beneficio medio neto hasta un instante fijo H . Esto es

$$CRW(H) = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \sum_{h=0}^H (\mathbf{P}^*)^h \mathbf{c} = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - (\mathbf{P}^*)^{H+1}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{c}. \quad (3.28)$$

Por otro lado, otra medida que podemos obtener a partir del vector de beneficios netos es el beneficio medio neto por unidad de tiempo cuando han transcurrido H unidades de tiempo. Esta medida viene dada por

$$\frac{CRW(H)}{H+1}. \quad (3.29)$$

En este punto podemos obtener también el beneficio medio neto hasta el instante en el que no queden unidades en el sistema, considerando el límite cuando H tiende a infinito. Así obtenemos

$$CRW = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \sum_{h=0}^{\infty} (\mathbf{P}^*)^h \mathbf{c} = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - (\mathbf{P}^*)^{-1}) \mathbf{c}. \quad (3.30)$$

Esta medida puede interpretarse como sigue. Es sabido (Kulkarni, 1999,[15]) que el número medio de pasos hasta la absorción por el estado en el que no hay

unidades en el sistema viene dado por el vector dado en (3.5), por tanto, el coste-beneficio medio neto hasta la absorción puede obtenerse a partir de ${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{Nc}$.

Coste-Beneficio medio neto hasta que no quedan unidades para el caso de k unidades en el sistema

Si en el sistema hay k unidades, el costo-beneficio medio neto se puede calcular hasta que todas sufren fallos no reparables. Para obtener esta medida procederemos como sigue. Sea \mathbf{n}_s^k el número medio de visitas a las diferentes fases cuando hay k unidades en el sistema y s de ellas están en reparación. Este vector lo obtendremos a partir de ${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{Nc}$, donde ${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N}$ viene dado por (3.5). Así, el coste-beneficio medio neto hasta que no quedan unidades en el sistema viene dado por

$$\sum_{s=0}^k \mathbf{n}_s^k c_s^k.$$

Por último señalar que el beneficio medio neto total puede ser desglosado según el número de unidades presentes en el sistema.

3.6.3. Beneficio medio neto acumulado, incluyendo coste por pérdida de unidades

En la sección anterior hemos obtenido el beneficio medio neto hasta un cierto instante. Ahora, en la sección que nos ocupa, consideraremos que cuando ocurre un fallo no reparable (ya sea accidental o de desgaste), este produce un coste fijo A . Si estamos interesados en el beneficio medio neto hasta cierto instante H cuando se presenta un coste fijo por fallo no reparable, tendremos que considerar el número medio de fallos no reparables ocurridos hasta este instante. Este número viene dado por la ecuación (3.25). Por tanto, el beneficio medio neto en este caso es

$$TCRW(H) = CRW(H) - ANUL(H) \cdot A. \quad (3.31)$$

Obviamente, dado que inicialmente hay K unidades en el sistema, cuando H tiende a infinito, el número de unidades que se han perdido en el sistema es K . En este caso, el beneficio medio total es

$$TCRW = CRW - K \cdot A. \quad (3.32)$$

Esta medida se obtiene de forma algorítmica en la sección 3.8.3.

3.7. Aplicación

En esta sección ilustraremos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo mediante una aplicación numérica. Para ello, consideraremos un sistema con cuatro unidades. El tiempo de vida de la unidad principal se distribuye tipo fase con representación (α, \mathbf{T}) y el tiempo entre dos fallos accidentales consecutivos también se distribuye tipo fase con representación (γ, \mathbf{L}) .

Consideraremos que la reparabilidad de los fallos accidentales es independiente del tiempo hasta el fallo. En este caso, cuando ocurre un fallo accidental, éste es reparable con probabilidad $p = 0.8$. Por tanto, se verifica $\mathbf{L}_r^0 = \mathbf{L}^0 p = 0.8 \cdot \mathbf{L}^0$ y $\mathbf{L}_{nr}^0 = \mathbf{L}^0(1 - p) = 0.2 \cdot \mathbf{L}^0$. El tiempo de reparación se distribuye tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) . Los vectores y matrices de las distribuciones tipo fase citadas tienen las siguientes expresiones

$$\alpha = (1, 0, 0), \quad \gamma = (1, 0), \quad \beta = (1, 0),$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.025 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Calcularemos a continuación algunas medidas que resultan de interés para el análisis del comportamiento del sistema.

La evolución del número de unidades presentes en el sistema puede realizarse a partir de los resultados obtenidos en la sección 3.3. En la Tabla 3.1 y la Figura 3.1 puede observarse dicha evolución.

Podemos observar como la distribución de 4 unidades presentes en el sistema es decreciente a lo largo del tiempo, y creciente en el caso de cero unidades. Cuando el número de unidades presentes en el sistema decrece, la forma de la distribución es más simétrica.

Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran la fiabilidad del tiempo hasta que no quedan unidades en el sistema y hasta que se produce fallo del sistema. Los cálculos han sido realizados a partir de los resultados de la sección 3.4. Obviamente, la fiabilidad del tiempo hasta que el sistema falla es mucho mayor que la de que el sistema se quede sin unidades. La probabilidad de que en cierto instante el sistema no esté operativo es mucho mayor que la probabilidad de que en el mismo instante no queden unidades en el sistema.

Puede resultar útil analizar la frecuencia de fallo tanto de la unidad principal como del sistema. Hemos tenido en cuenta este aspecto considerando la probabilidad condicionada de fallo descrita en las secciones 3.5.1 y 3.5.2. La Figura 3.4 muestra la probabilidad condicionada de fallo de la unidad principal según los distintos tipos de fallo. Esta medida puede obtenerse a partir de las expresiones (3.12) y (3.13). Estas probabilidades crecen hasta el instante 30 aproximadamente y a partir de aquí comienzan a decrecer. Por otro lado, si consideramos

Tiempo	4 unid.	3 unid.	2 unid.	1 unid.	0 unid.
0	1	0	0	0	0
10	0.9355	0.0637	0.0007	***	***
20	0.8094	0.1803	0.0101	0.0002	***
30	0.6840	0.2800	0.0342	0.0017	***
40	0.5753	0.3483	0.0699	0.0063	0.0002
50	0.4845	0.3890	0.1109	0.0147	0.0009
100	0.2346	0.3971	0.2657	0.0885	0.0141
150	0.1500	0.3368	0.3135	0.1566	0.0431
200	0.1077	0.2814	0.3185	0.2077	0.0847
300	0.0589	0.1912	0.2850	0.2700	0.1949
500	0.0179	0.0803	0.1757	0.2734	0.4527
1000	0.0009	0.0070	0.0276	0.0939	0.8707
1500	***	0.0005	0.0029	0.0177	0.9788
2000	***	***	0.0003	0.0026	0.9971

Tabla 3.1: Probabilidad del número de unidades en el sistema en distintos instantes (** ** * valores menores que 0.00005.)

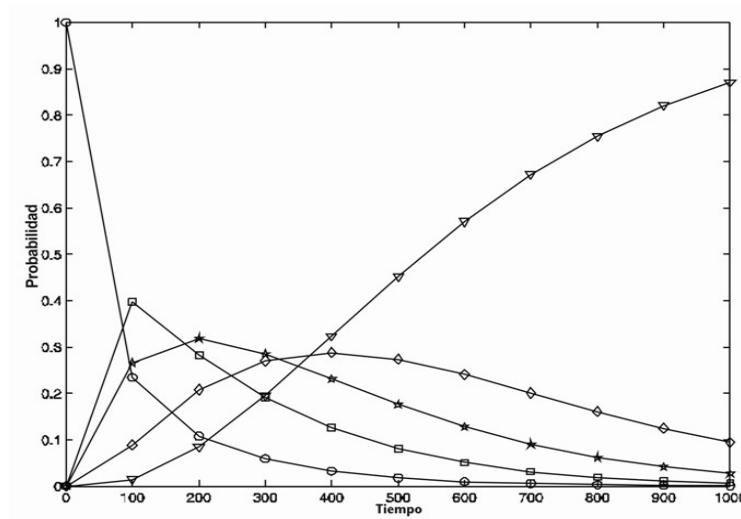


Figura 3.1: Probabilidad de que haya k unidades presentes en el sistema ($k = 4$, círculos; $k = 3$, cuadrados; $k = 2$, estrellas; $k = 1$, rombos; $k = 0$, triángulos)

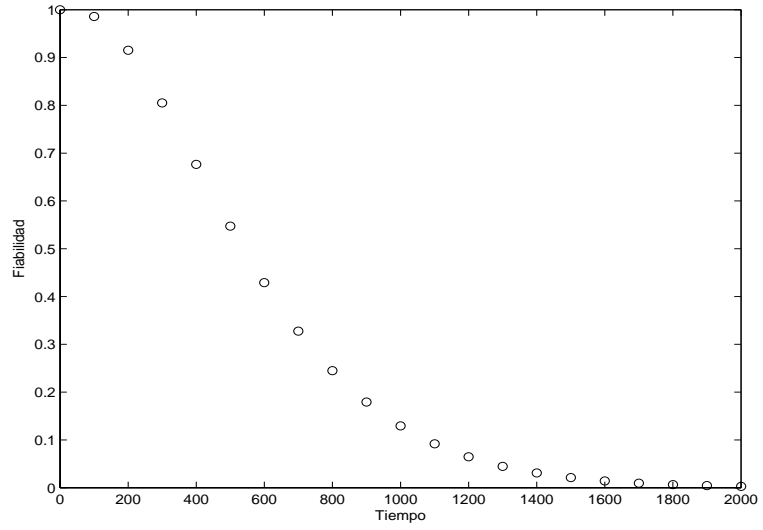


Figura 3.2: Fiabilidad del tiempo hasta que no quedan unidades en el sistema

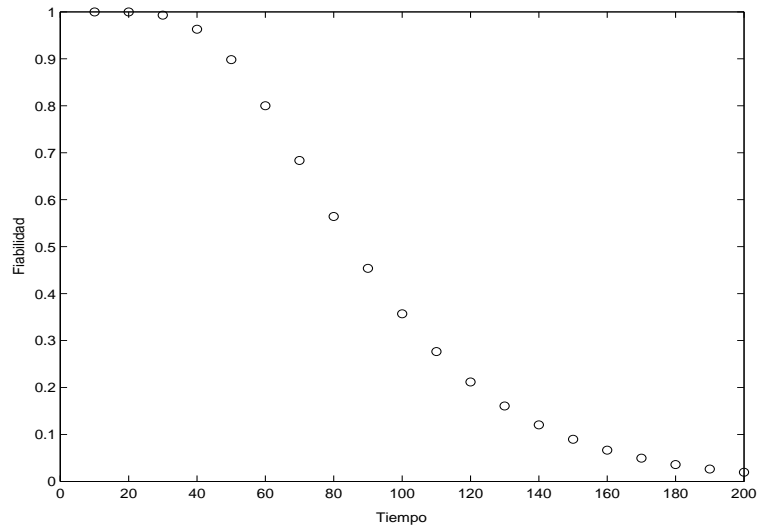


Figura 3.3: Fiabilidad del tiempo hasta que se produce un fallo del sistema

Tiempo	10	30	50	100	200	500	∞
$ANF_p(H)$	0.2211	0.9947	1.7702	3.2470	4.8215	7.7956	10.1408
$ANFSp(H)$	***	0.0056	0.0789	0.5794	1.5861	3.9122	5.9588
$ANFS(H)$	***	0.0072	0.1043	0.7867	2.1748	5.3962	8.2466
$ANUL(H)$	0.1117	0.4634	0.7388	0.8887	1.0279	1.4153	4

Tabla 3.2: Número medio de distintos fallos y número medio de pérdida de unidades en el sistema en distintos instantes (*** valores menores que $4 \cdot 10^{-7}$)

el sistema como un *todo*, la tendencia de la probabilidad condicionada de fallo es decreciente. Este aspecto puede observarse en la Figura 3.5 y se ha obtenido a partir de (3.17) y (3.18).

Otro análisis interesante es el del tiempo esperado hasta las diferentes situaciones que puede tomar el sistema. Así, el tiempo medio hasta el primer fallo del sistema lo hemos obtenido aplicando la expresión (3.7). Su valor es igual a 93.6954 unidades de tiempo.

El tiempo esperado hasta que no quedan unidades es igual a 604.2092 unidades de tiempo. Lo hemos obtenido aplicando la expresión (3.8). La Tabla 3.2 muestra el número medio de fallos reparables, fallos del sistema debidos a un fallo reparable, fallo del sistema y número medio de unidades perdidas en el sistema. Estas medidas se obtienen hasta cierto instante y hasta que no queden unidades en el sistema. Para obtenerlas hemos empleado las ecuaciones (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) y (3.25) respectivamente.

Beneficio medio neto

Supongamos ahora que la unidad principal produce un beneficio medio de 10 u.m por instante, cada unidad en reserva produce un coste de mantenimiento medio de 4.75 u.m por instante, y la reparación lleva asociado un coste medio de 1 y 2 para las fases de reparación 1 y 2, respectivamente. Podemos analizar el comportamiento de varios sistemas con distinto número de unidades. El beneficio medio neto hasta que no quedan unidades en el sistema lo hemos obtenido a partir de (3.30) (la Tabla 3.3 muestra los resultados). Podemos observar a partir de estos resultados que el sistema más efectivo desde este punto de vista, es el compuesto por cuatro unidades. Un sistema con nueve o más unidades genera pérdidas.

La evolución del beneficio medio neto por unidad de tiempo para sistemas con dos, tres, cuatro y cinco unidades lo hemos representado en la Figura 3.6 y la hemos obtenido a partir de (3.29).

3.8. Algoritmización de medidas

Incluimos en esta sección los cálculos en forma algorítmica que hemos ido mencionando a lo largo del presente capítulo. La sección 3.8.1, en la que se calcu-

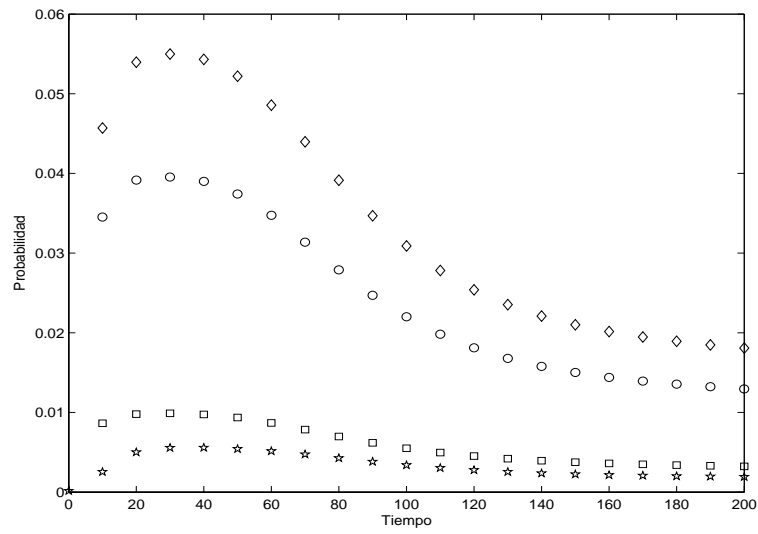


Figura 3.4: Probabilidad condicionada de fallo de la unidad principal para los diferentes tipos de fallo (fallo reparable, círculos; no reparables, cuadrados; fallos de desgaste, estrellas y probabilidad condicionada total de fallo, rombos)

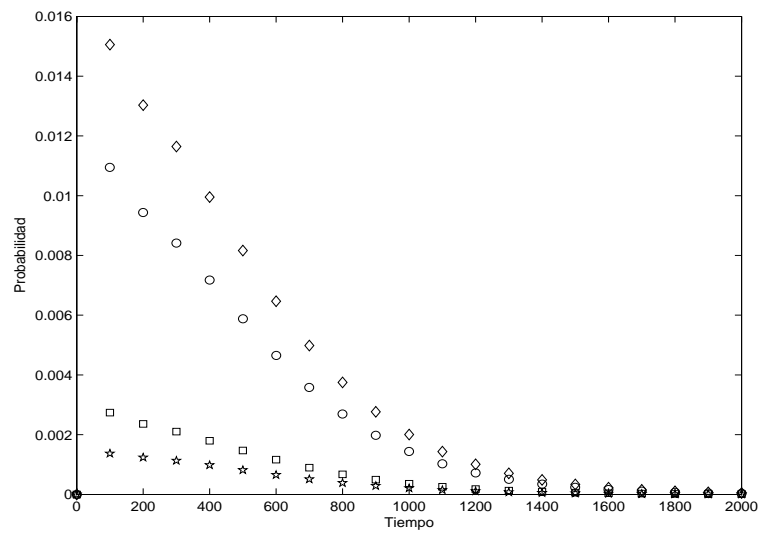


Figura 3.5: Probabilidad condicionada de fallo del sistema para los diferentes tipos de fallo (fallo reparable, círculos; no reparables, cuadrados; fallos de desgaste, estrellas y probabilidad condicionada total de fallo, rombos)

Número de unidades	CRW
2	922.3878
3	1177.7572
4	1296.2867
5	1277.6080
6	1121.5457
7	828.0044
8	396.9253
9	-171.7304

Tabla 3.3: Beneficio medio neto hasta que no quedan unidades en el sistema considerando distinto número de unidades en el mismo

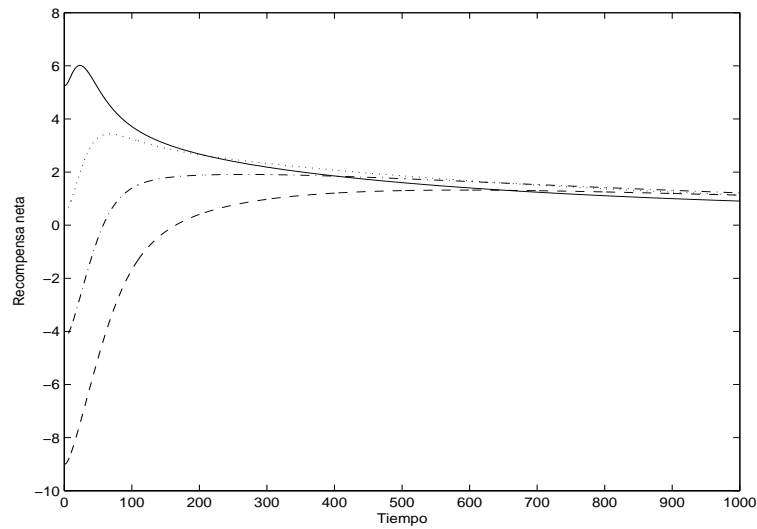


Figura 3.6: Beneficio medio neto por unidad de tiempo hasta el instante t con distinto número de unidades (línea continua, dos unidades; línea discontinua punteada, tres unidades; línea discontinua punto-rayada, cuatro unidades y línea discontinua raya, cinco unidades)

la inversa de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}^*$, la sección 3.8.2, donde se calculan las probabilidades de transición y el número medio de visitas, la probabilidad condicionada de fallo de la unidad en funcionamiento y del sistema y el número medio de fallo. Finalmente, en la sección 3.8.3 obtenemos el beneficio medio neto en un instante fijo h , el beneficio medio neto acumulado hasta un instante H , con y sin coste por la pérdida de unidades.

3.8.1. Cálculo de $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$

Calculamos en este apartado de forma algorítmica, la inversa de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}^*$, descrita en la sección 3.3, donde \mathbf{P}^* viene dada por (3.2). Emplearemos para ello la Factorización RG de tipo LU, dada en Li y Cao (2004), [16]. Conocida la estructura de esta matriz, el método se reduce a la factorización G de tipo LU.

Para este caso,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} = (\mathbf{r}_{m,n})_{m,n=0,\dots,K-1} = \begin{cases} \mathbf{U}_m^{-1} & ; 0 \leq m \leq K-2; n = m \\ \prod_{i=m}^{n-1} \mathbf{G}_i \mathbf{U}_n^{-1} & ; 0 \leq m \leq K-2; \\ & m+1 \leq n \leq K-1 \\ \mathbf{U}_{K-1}^{-1} & ; m = n = K-1 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.33)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{K-k}; \quad 0 \leq k \leq K-1 \\ \mathbf{G}_k &= \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{R}_s^{K-k} = [\mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{K-k}]^{-1} \mathbf{R}_s^{K-k}; \quad 0 \leq k \leq K-2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

El cálculo de la matriz inversa se reduce a operaciones algebraicas y matriciales. El cálculo de la inversa de las matrices \mathbf{U} lleva implícito algunas dificultades, por ello, aplicaremos la factorización RG de tipo LU para cada una de las matrices \mathbf{U}_k .

Matriz \mathbf{U}_k^{-1}

Consideramos la matriz $\mathbf{U}_k = \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{K-k}$; $0 \leq k \leq K-1$. La estructura de esta matriz viene dada en la siguiente expresión. Para $k = 0, \dots, K-3$

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{K-k} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{B}_{00} & -\mathbf{B}_{01} & & & & & & \\ & -\mathbf{B}_{10} & \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_0 & & & & \\ & & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_0 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_0 & \\ & & & & & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}^* \\ & & & & & & -\mathbf{B}' & \mathbf{I} - \mathbf{B} \end{pmatrix} ;$$

de dimensión $K - k + 1 \times K - k + 1$.

Para $k = K - 2$,

$$\mathbf{U}_{K-2} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{B}_{00} & -\mathbf{B}_{01} & 0 \\ -\mathbf{B}_{10} & \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}'' \\ 0 & -\mathbf{B}' & \mathbf{I} - \mathbf{B} \end{pmatrix}_{3 \times 3},$$

y para $k = K - 1$

$$\mathbf{U}_{K-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{B}_{00} & -\mathbf{B}_{01}^1 \\ -\mathbf{B}_{10}^1 & \mathbf{I} - \mathbf{B} \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

Esta matriz es también de tipo QBD, y puede ser descompuesta siguiendo el Teorema 1 dado en Li y Cao (2004)[16] del siguiente modo

$$\mathbf{U}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_L) \mathbf{V}_D (\mathbf{I} - \mathbf{J}_U),$$

donde

$$\mathbf{V}_D = \text{diag} (\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{K-k-1}, \mathbf{V}_{K-k}),$$

$$\mathbf{R}_L = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \mathbf{R}_1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{R}_{K-k-1} & 0 & \\ & & & & \mathbf{R}_{K-k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_U = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J}_0 & & & & \\ & 0 & \mathbf{J}_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & \mathbf{J}_{K-k-1} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

74 Sistema con múltiples componentes en reserva pasiva y pérdida de unidades

Las matrices \mathbf{V} , \mathbf{R} y \mathbf{J} se obtienen como sigue,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_0 &= \mathbf{I} - \mathbf{B}_{00}, \\
 \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_{10} \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{B}_{01} \quad \text{para } k < K - 1, \\
 \mathbf{V}_i &= \mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{V}_{i-1}^{-1} \mathbf{A}_0; \quad 2 \leq k \leq K - k - 1 \quad y \quad k \leq K - 3, \\
 \\
 \mathbf{V}_{K-k} &= \begin{cases} \mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{B}' \mathbf{V}_{K-k-1}^{-1} \mathbf{B}''; & k < K - 1 \\ \mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{B}_{10}^1 \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{B}_{01}^1; & k = K - 1 \end{cases} \\
 \\
 \mathbf{R}_1 &= \begin{cases} \mathbf{B}_{10} \mathbf{V}_0^{-1}; & k < K - 2 \\ \mathbf{B}_{10}^1 \mathbf{V}_0^{-1}; & k = K - 1 \end{cases} \\
 \\
 \mathbf{R}_2 &= \begin{cases} \mathbf{A}_2 [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{B}_{01}]^{-1}; & k < K - 2 \\ \mathbf{B}' [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_1 \mathbf{B}_{01}]^{-1}; & k = K - 2 \end{cases} \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_i &= \mathbf{A}_2 [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{A}_0]^{-1}; \quad 3 \leq i \leq K - k - 1 \quad y \quad k \leq K - 4 \\
 \mathbf{R}_{K-k} &= \mathbf{B}' [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{R}_{K-k-1} \mathbf{A}_0]^{-1}, \quad k < K - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_0 &= \begin{cases} \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{B}_{01} & ; \quad k < K - 1 \\ \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{B}_{01}^1 & ; \quad k = K - 1 \end{cases} \\
 \\
 \mathbf{J}_1 &= \begin{cases} [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_{10} \mathbf{J}_0]^{-1} \mathbf{A}_0; & k < K - 2 \\ [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_{10} \mathbf{J}_0]^{-1} \mathbf{B}''; & k = K - 2 \end{cases} \\
 \\
 \mathbf{J}_i &= [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{J}_{i-1}]^{-1} \mathbf{A}_0; \quad 2 \leq k \leq K - k - 2 \quad y \quad k \leq K - 4 \\
 \\
 \mathbf{J}_{K-k-1} &= [\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{J}_{K-k-2}]^{-1} \mathbf{B}''; \quad k < K - 2.
 \end{aligned}$$

A partir de esta descomposición, podemos calcular la inversa,

$$\mathbf{U}_k^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_U)^{-1} \mathbf{V}_D^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{R}_L)^{-1},$$

donde

$$\mathbf{V}_D^{-1} = \text{diag}(\mathbf{V}_0^{-1}, \mathbf{V}_1^{-1}, \dots, \mathbf{V}_{K-k-1}^{-1}, \mathbf{V}_{K-k}^{-1}),$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}_L)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ \mathbf{X}_1^{(1)} & \mathbf{I} & & & & \\ \mathbf{X}_2^{(2)} & \mathbf{X}_1^{(2)} & \mathbf{I} & & & \\ \mathbf{X}_3^{(3)} & \mathbf{X}_2^{(3)} & \mathbf{X}_1^{(3)} & \mathbf{I} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{X}_{K-k}^{(K-k)} & \mathbf{X}_{K-k-1}^{(K-k)} & \mathbf{X}_{K-k-2}^{(K-k)} & \dots & \mathbf{X}_1^{(K-k)} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{J}_L)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y}_1^{(0)} & \mathbf{Y}_2^{(0)} & \mathbf{Y}_3^{(0)} & \dots & \mathbf{Y}_{K-k-1}^{(0)} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{Y}_1^{(1)} & \mathbf{Y}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{Y}_{K-k-2}^{(1)} \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{Y}_1^{(2)} & \dots & \mathbf{Y}_{K-k-3}^{(2)} \\ & & & \mathbf{I} & \dots & \vdots \\ & & & & \ddots & \mathbf{Y}_1^{(K-k-1)} \\ & & & & & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

siendo

$$\mathbf{X}_h^{(l)} = \prod_{i=l-h+1}^l \mathbf{R}_{2l-i-h+1} \quad y \quad \mathbf{Y}_h^{(l)} = \prod_{i=l}^{l+h-1} \mathbf{J}_i. \quad (3.36)$$

Teniendo en cuenta esta descomposición y el Teorema 2 dado en Li y Cao (2004)[16] ya mencionado, obtenemos

$$\mathbf{U}_k^{-1} = (r_{m,n}^k)_{m,n=0,\dots,K-k} =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{V}_m^{-1} X_{m-n}^{(m)} + \sum_{i=1}^{K-k-m} \mathbf{Y}_i^{(m)} \mathbf{V}_{i+m}^{-1} \mathbf{X}_{i+m-n}^{(i+m)}; & 0 \leq m \leq K-k-1; \\ & 0 \leq n \leq m-1 \\ \mathbf{V}_m^{-1} + \sum_{i=1}^{K-k-m} \mathbf{Y}_i^{(m)} \mathbf{V}_{i+m}^{-1} \mathbf{X}_i^{(i+m)}; & 0 \leq m \leq K-k-1; n = m \\ \mathbf{Y}_{n-m}^{(m)} \mathbf{V}_n^{-1} + \sum_{i=n-m+1}^{K-k-m} \mathbf{Y}_i^{(m)} \mathbf{V}_{i+m}^{-1} X_{i-(n-m)}^{(i+m)}; & 0 \leq K-k-1; \\ & m+1 \leq n \leq K-k \\ \mathbf{V}_{K-k}^{-1} \mathbf{X}_{K-k-n}^{(K-k)}; & m = K-k; 0 \leq n \leq K-k-1 \\ \mathbf{V}_{K-k}^{-1}; & m = n = K-k. \end{cases} \quad (3.37)$$

Una vez calculada \mathbf{U}_k^{-1} , las matrices \mathbf{G}_k dadas en (3.34) las obtenemos del siguiente modo,

Para $0 \leq k \leq K-3$

$$\left((\mathbf{G}_k)_{m,n} \right)_{\substack{m=0,1,\dots,K-k \\ n=0,1,\dots,K-k-1}} =$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{m0}^k \mathbf{D}_{00} + \mathbf{r}_{m1}^k \mathbf{D}_{10} & ; & 0 \leq m \leq K-k; \\ & & n = 0 \\ \mathbf{r}_{mn}^k \mathbf{C}_1 + \mathbf{r}_{m,n+1}^k \mathbf{C}_2 & ; & 0 \leq m \leq K-k; \\ & & n = K-k-3 \\ \mathbf{r}_{m,K-k-2}^k \mathbf{C}_1 + \mathbf{r}_{m,k-k-1}^k \mathbf{D}' & ; & 0 \leq m \leq K-k; \\ & & n = K-k-2 \\ \mathbf{r}_{m,K-k-1}^k \mathbf{D} & ; & 0 \leq m \leq K-k; \\ & & n = K-k-1 \end{cases}$$

y para $k = K-2$,

$$\left((\mathbf{G}_{K-2})_{m,n} \right)_{\substack{m=0,1,2 \\ n=0,1}} = \begin{cases} \mathbf{r}_{m0}^{K-2} \mathbf{D}_{00} + \mathbf{r}_{m1}^{K-2} \mathbf{D}_{10} & ; & 0 \leq m \leq 2, n = 0 \\ \mathbf{r}_{m1}^{K-2} \mathbf{D} & ; & 0 \leq m \leq 2, n = 1. \end{cases}$$

3.8.2. Probabilidades de transición y medidas transitorias

Probabilidades de transición

En este apartado calcularemos las probabilidades de transición considerando los distintos macro-estados del sistema.

Dada la matriz \mathbf{P} en la expresión (3.1), la matriz \mathbf{P}^ν , para $\nu \geq 2$, la calcularemos de forma recursiva del siguiente modo. Denotaremos los bloques de esta matriz por $(\mathbf{P}_{jh}^\nu)_{j,h=0,\dots,K}$, donde \mathbf{P}_{jh}^ν contiene la probabilidad de que en el instante ν el sistema tenga $K-h$ unidades, dado que inicialmente el sistema tenía $K-j$ unidades, considerando las diferentes fases.

Teniendo en cuenta la estructura de la matriz \mathbf{P} tenemos que

$$\mathbf{P}_{jh}^\nu = \mathbf{R}_p^{K-j} \mathbf{P}_{jh}^{\nu-1} + \mathbf{R}_s^{K-j} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-1}, \quad (3.38)$$

para $j = 0, \dots, K$; $j \leq h \leq K$; y siendo \mathbf{P}_{jh}^1 el bloque (j, h) de la matriz \mathbf{P} . Obviamente, la matriz $\mathbf{P}_{jh}^\nu = \mathbf{0}$ cuando $j > h$ y $\mathbf{P}_{K,K}^\nu = 1$ para $\nu \geq 0$.

A partir de esta expresión y en forma recursiva, estas matrices podemos obtenerlas a partir de las matrices \mathbf{R} .

Teniendo en cuenta (3.38) en forma recursiva obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{jh}^\nu &= \mathbf{R}_p^{K-j} \mathbf{P}_{jh}^{\nu-1} + \mathbf{R}_s^{K-j} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-1} = \mathbf{R}_p^{K-j} \left[\mathbf{R}_p^{K-j} \mathbf{P}_{jh}^{\nu-2} + \mathbf{R}_s^{K-j} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} \right] \\ &\quad + \mathbf{R}_s^{K-j} \left[\mathbf{R}_p^{K-j-1} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} + \mathbf{R}_s^{K-j-1} \mathbf{P}_{j+2,h}^{\nu-2} \right], \end{aligned}$$

y si empleamos la siguiente notación,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^2 &= \mathbf{R}_p^{K-j} \mathbf{R}_p^{K-j}, \\ \mathbf{A}_1^2 &= \mathbf{R}_p^{K-j} \mathbf{R}_s^{K-j} + \mathbf{R}_s^{K-j} \mathbf{R}_p^{K-j-1}, \\ \mathbf{A}_2^2 &= \mathbf{R}_s^{K-j} \mathbf{R}_s^{K-j-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{P}_{jh}^\nu = \mathbf{A}_0^2 \mathbf{P}_{jh}^{\nu-2} + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{P}_{j+2,h}^{\nu-2},$$

para $j = 0, \dots, K$; $j \leq h \leq K$.

Siguiendo este razonamiento se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{jh}^\nu &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \mathbf{A}_k^{\nu-1} \mathbf{P}_{j+k,h} = \mathbf{A}_{h-j}^{\nu-1} \mathbf{P}_{h,h} + \mathbf{A}_{h-j-1}^{\nu-1} \mathbf{P}_{h-1,h} \\ &= \mathbf{A}_{h-j}^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{K-h} + \mathbf{A}_{h-j-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{K-h+1}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^s &= \mathbf{A}_{k-1}^{s-1} \mathbf{R}_s^{K-j-k+1} + \mathbf{A}_k^{s-1} \mathbf{R}_p^{K-j-k}, \quad k = 1, \dots, s-1, \\ \mathbf{A}_0^s &= \begin{cases} \mathbf{A}_0^{s-1} \mathbf{R}_p^{K-j} & ; s \geq 2 \\ \mathbf{R}_p^{K-j} & ; s = 1 \end{cases} \\ \mathbf{A}_s^s &= \begin{cases} \mathbf{A}_{s-1}^{s-1} \mathbf{R}_s^{K-j-s+1} & ; s \geq 2 \\ \mathbf{R}_s^{K-j} & ; s = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Las medidas asociadas al sistema definidas en las secciones 3.3 y 3.5 involucran al vector de probabilidad $p_{\mathbf{z}}(\nu)$ definido en la sección 3.3. Este vector podemos calcularlo en forma algorítmica a partir del análisis realizado anteriormente. Consideraremos para ello que el sistema está nuevo inicialmente con vector de probabilidad inicial $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$.

Dado un instante ν , la matriz $\mathbf{P}_{0, K-k}^\nu = \mathbf{A}_{K-k}^{\nu-1} \mathbf{R}_p^k + \mathbf{A}_{K-k-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{k+1}$ contiene, por bloques, la probabilidad de que el sistema tenga K unidades y ν unidades de tiempo después, el sistema tenga k unidades, dependiendo de las diferentes fases del sistema. Esta matriz está compuesta por $(K+1) \times (k+1)$ bloques, dependiendo del número de unidades presentes en el canal de reparación.

Denotaremos por $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,k}$ al bloque (r, w) de esta matriz, para $r = 0, \dots, K$ y $w = 0, \dots, k$. Esta matriz $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,k}$ contiene las probabilidades, dependiendo de las fases, de que inicialmente el sistema tenga K unidades con r de éstas en reparación, y ν unidades de tiempo más tarde, el sistema tenga k unidades, con w de ellas en el canal de reparación. Si consideramos las fases de esta matriz entonces su dimensión es $mtn \times mtn$, si $r \geq 1$ y $w \geq 1$, $mtn \times mt$, si $r \geq 1$ y $w = 0$, $mt \times mtn$, si $r = 0$ y $w \geq 1$ y $mt \times mt$, si $r = 0$ y $w = 0$, donde m , t y n han sido definidos en la sección 3.2.1. Teniendo en cuenta esto, si consideramos las fases, el bloque matricial $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,k}$ contiene las filas $mt + mtn(r-1) + 1 : mt + mtnr$ y las columnas $mt + mtn(w-1) + 1 : mt + mtnw$ de la matriz $\mathbf{P}_{0, K-k}^\nu$ si r y w son mayores o iguales que uno. Si r o w son iguales a cero, entonces la correspondiente fila o columna se compone de los elementos $1 : mt$, respectivamente.

Además, el vector $p_{E_s^k}(\nu)$, para $k = 1, \dots, K$ y $s \leq k$ puede calcularse del siguiente modo

1. Se calcula la matriz $\mathbf{P}_{0,K-k}^\nu = \mathbf{A}_{K-k}^{\nu-1} \mathbf{R}_p^k + \mathbf{A}_{K-k-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{k+1}$ por bloques.
2. Se calcula la matriz $\mathbf{Q}_{0,s}^{\nu,k}$ considerando el bloque $(0, s)$ de la matriz $\mathbf{P}_{0,K-k}^\nu$ o los elementos de las filas $1 : mt$ y las columnas $mt + mtn(s-1) + 1 : mt + mtns$.
3. $p_{E_s^k}(\nu) = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Q}_{0,s}^{\nu,k}$.

Número medio de visitas

El número medio de visitas a cierta fase hasta un determinado instante H lo denotamos por $\mathbf{N}(H)$, y viene dado por la expresión (3.3). Estamos interesados en los bloques asociados al macro-estado k unidades en el sistema, para $k = 1, \dots, K$. A partir de esta matriz $\mathbf{N}(H)$ el bloque asociado a la transición de j unidades en el sistema a h unidades puede obtenerse del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{jh}(H) &= \mathbf{r}_{K-j,K-h} - \sum_{k=h}^j (\mathbf{P}^*)_{K-j,K-h}^{H+1} \mathbf{r}_{K-k,K-h} \\ &= \mathbf{r}_{K-j,K-h} - \sum_{k=h}^j \mathbf{P}_{K-j,K-h}^{H+1} \mathbf{r}_{K-k,K-h}, \end{aligned}$$

donde r es el bloque matricial dado en (3.33).

Tomando límites cuando H tiende a infinito,

$$\mathbf{N}_{jh} = \mathbf{r}_{K-j,K-h}.$$

Si asumimos que la distribución inicial del sistema es $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$, estas medidas pueden calcularse como se indica a continuación. En este caso, a partir de la expresión (3.4) tenemos que

$$\mathbf{N}_{(\alpha \otimes \gamma)}(H) = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} - (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{P}^*)^{H+1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}.$$

Dada la distribución inicial, sólo consideraremos las primeras mt filas de $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$. Por otro lado, la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$ ha sido calculada por bloques en la expresión (3.33).

Definiremos además la matriz \mathbf{Z}_k^* como la submatriz de $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$ que se obtiene al considerar sólo las primeras mt filas y las columnas asociadas al macro-estado k unidades en el sistema. Esta submatriz es igual a

$$\mathbf{Z}_k^* = (\mathbf{r}_{0,K-k})_{1:mt} \quad \text{para } k = 1, \dots, K.$$

El segundo elemento de la diferencia que aparece en la expresión del número medio de visitas lo analizamos a continuación. Consideramos $\mathbf{Q}_0^{h,k}$ como la matriz compuesta por las probabilidades de transición cuando el sistema está en una fase del macro-estado E_0^K inicialmente y h unidades de tiempo después ocupa una fase del macro-estado \mathbf{U}_k . Esta matriz puede expresarse como

$$\mathbf{Q}_0^{h,k} = (\mathbf{Q}_{00}^{h,k}, \mathbf{Q}_{01}^{h,k}, \mathbf{Q}_{02}^{h,k}, \dots, \mathbf{Q}_{0k}^{h,k}); \quad k = 1, \dots, K.$$

Siguiendo un razonamiento similar, definimos

$$\mathbf{Z}_k^h = \sum_{i=k}^K \mathbf{Q}_0^{h,i} \cdot \mathbf{r}_{K-i, K-k}, \quad h \geq 1, \quad k = 1, \dots, K.$$

La nueva expresión del número medio de visitas a las fases del macro-estado \mathbf{U}_k hasta el instante H , dado que la distribución inicial es $(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0})$, es igual a

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N}_k(H) = (\alpha \otimes \gamma) \left(\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^{(H+1)} \right). \quad (3.39)$$

Si consideramos todos los macro-estados, el número medio de visitas a las diferentes fases viene dado por los correspondientes elementos de la matriz

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N}(H) = (\alpha \otimes \gamma) \left(\mathbf{Z}^* - \mathbf{Z}^{(H+1)} \right), \quad (3.40)$$

siendo $\mathbf{Z}^* = (\mathbf{Z}_K^*, \mathbf{Z}_{K-1}^*, \dots, \mathbf{Z}_1^*)$ y $\mathbf{Z}^h = (\mathbf{Z}_K^h, \mathbf{Z}_{K-1}^h, \dots, \mathbf{Z}_1^h)$ para $h \geq 0$.

Si H tiende a infinito obtenemos el número medio de visitas hasta que no quedan unidades en el sistema. Este valor es igual a

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N} = (\alpha \otimes \gamma, 0) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}^*. \quad (3.41)$$

Por último, el número medio de visitas a las fases del macro-estado k unidades en el sistema viene dado por

$${}_{(\alpha \otimes \gamma)} \mathbf{N} = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}_k^*. \quad (3.42)$$

Probabilidad condicionada de fallo de la unidad principal y del sistema

En la sección 3.5.1 del presente capítulo hemos definido y calculado las probabilidades condicionadas de fallo. En este apartado las calcularemos considerando la forma algorítmica de las probabilidades de transición descritas en la sección anterior. Realizaremos los cálculos para el caso del fallo reparable, los otros casos podrán obtenerse de forma análoga.

Probabilidad condicionada del fallo de la unidad principal

Para realizar los cálculos emplearemos las expresiones (3.9) obtenidas en la sección 3.5.1.

Considerando las expresiones para las probabilidades de transición tenemos

$$r_p^k(\nu) = \begin{cases} (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Q}_{0,0}^{\nu-1,1} (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0) & ; k = 1 \\ (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Q}_{0,0}^{\nu-1,k} (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0) + \\ + (\alpha \otimes \gamma) \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{Q}_{0,s}^{\nu-1,k} (\mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_n) & ; k = 2, \dots, K. \end{cases}$$

Probabilidad condicionada de fallo del sistema

Emplearemos un razonamiento similar para la probabilidad condicionada de fallo del sistema dada en la expresión (3.14).

Para el caso de fallo reparable, esta probabilidad viene dada por

$$rs_p^k(\nu) = \begin{cases} (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Q}_{0,0}^{\nu-1,1} (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0) & ; k = 1 \\ (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Q}_{0,k-1}^{\nu-1,k} (\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{Se}) & ; k = 2, \dots, K. \end{cases}$$

Para los otros tipos de fallo los cálculos son análogos.

Número medio de fallos

El número medio de fallos ha sido analizado en la sección 3.5.3. Calcularemos en este apartado esta medida en forma algorítmica para la unidad principal y para el sistema. En ambos casos, esta medida se obtiene considerando el tiempo hasta cierto instante y hasta que no quedan unidades en el sistema.

Número medio de fallos de la unidad principal

Analizaremos el caso del fallo accidental reparable, los otros casos se obtienen de forma análoga.

Considerando (3.40), el número medio de fallos reparables hasta cierto instante H en el sistema es igual a

$$ANF_p(H) = \sum_{\nu=1}^H \sum_{k=1}^K r_p^k(\nu) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K (\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^H) \mathbf{V}_k^p = \left[\begin{array}{c} \mathbf{N}(H-1) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{array} \right] \mathbf{V}^p,$$

siendo el vector columna $\mathbf{V}^p = (\mathbf{V}_K^p, \mathbf{V}_{K-1}^p, \dots, \mathbf{V}_2^p, \mathbf{V}_1^p)'$, donde

$$\mathbf{V}_k^p = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \\ \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{e}_n \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 2, \dots, K \\ \begin{pmatrix} \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 1, \end{cases}$$

siendo $\mathbf{0}_n$ un vector columna de ceros con n filas (número de fases para el caso de que todas las unidades estén en reparación).

Para los fallos reparables y tomando límites, si consideramos (3.41), el número medio de fallos hasta que no quedan unidades en el sistema es

$$ANF_p = \sum_{\nu=1}^H \sum_{k=1}^K r_p^k(\nu) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \mathbf{Z}_k^* \mathbf{V}_k^* = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^p.$$

Realizando los cambios adecuados sobre \mathbf{V}_k^p , se obtiene el número medio de fallos para los distintos casos.

Número medio de fallos del sistema

Seguiremos un razonamiento similar para analizar el número medio de fallos del sistema; hasta cierto instante y hasta que no queden unidades en el sistema. Trabajaremos el caso del fallo reparable; los otros casos pueden obtenerse de forma análoga.

Esta medida puede expresarse como

$$ANFS_p(H) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K (\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^H) \mathbf{V}_k^{S_p} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(H-1) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^{S_p},$$

donde $\mathbf{V}^{S_p} = (\mathbf{V}_K^{S_p}, \mathbf{V}_{K-1}^{S_p}, \dots, \mathbf{V}_2^{S_p}, \mathbf{V}_1^{S_p})'$, con

$$\mathbf{V}_k^{S_p} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{mt+(k-2)mtn} \\ \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{Se} \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 2, \dots, K \\ \begin{pmatrix} \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 1. \end{cases}$$

Para fallos reparables, el número medio de fallos del sistema hasta que no quedan unidades es

$$ANFS_p = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \mathbf{Z}_k^* \mathbf{V}_k^{Sp} = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^{Sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^{Sp}.$$

Realizando los cambios adecuados sobre el vector \mathbf{V}_k^{Sp} , obtenemos el número medio de fallos del sistema debido a los diferentes tipos de fallo.

El número medio de fallos del sistema lo obtuvimos en (3.23) y (3.24). En forma algorítmica, esta medida viene dada por

$$ANFS(H) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K (\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^H) \mathbf{V}_k^S = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(H-1) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^S,$$

donde $\mathbf{V}^S = (\mathbf{V}_K^S, \mathbf{V}_{K-1}^S, \dots, \mathbf{V}_2^S, \mathbf{V}_1^S)'$, con

$$\mathbf{V}_k^S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{mt+(k-2)mtn} \\ \mathbf{T}e \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{S}e + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{S}e \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 2, \dots, K \\ \begin{pmatrix} \mathbf{T}e \otimes \mathbf{L}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; k = 1. \end{cases}$$

El número medio de fallos del sistema hasta que no quedan unidades en el mismo viene dado por

$$ANFS_p = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \mathbf{Z}_k^* \mathbf{V}_k^S = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}^* \mathbf{V}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^S.$$

Número medio unidades perdidas

El número medio de pérdida de unidades hasta cierto instante H lo obtenemos a partir de (3.25). Considerando los resultados anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} ANUL(H) &= \sum_{\nu=1}^H \sum_{k=1}^K (r_q^k(\nu) + r_d^k(\nu)) \\ &= (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K (\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^H) \mathbf{V}_k^L \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}(H-1) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{bmatrix} \mathbf{V}^L, \end{aligned} \quad (3.43)$$

siendo el vector columna $\mathbf{V}^L = (\mathbf{V}_K^L, \mathbf{V}_{K-1}^L, \dots, \mathbf{V}_2^L, \mathbf{V}_1^L)'$, donde

$$\mathbf{V}_k^L = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{T}\mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{T}\mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \otimes \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{k-1} \otimes \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_{nt} \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; \quad k = 2, \dots, K \\ \begin{pmatrix} \mathbf{T}\mathbf{e} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} & ; \quad k = 1. \end{cases}$$

3.8.3. Algoritmización de los costos

En esta sección obtendremos en forma algorítmica los distintos beneficios medios netos descritos en la sección 3.6. Para ello tendremos en cuenta los apéndices anteriores. Para lo que resta de sección consideraremos $h \geq 1$.

Beneficio medio neto hasta cierto instante fijo h

Para obtener esta medida emplearemos la expresión (3.27). El caso $h = 0$ es inmediato, esto es

$$RW(0) = (\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) \mathbf{c} = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{c}_0^K.$$

Analizamos a continuación el caso $h \geq 1$. La distribución inicial afecta a las primeras mt fases únicamente. Además, teniendo en cuenta la sección 3.8.2, entonces

$$(\alpha \otimes \gamma, \mathbf{0}) (\mathbf{P}^*)^h = p \bigcup_{k=1}^K \bigcup_{s=0}^k E_s^k (h) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \sum_{s=0}^k \mathbf{Q}_{0s}^{h,k}.$$

De aquí se obtiene

$$RW(h) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \sum_{s=0}^k \mathbf{Q}_{0s}^{h,k} \mathbf{c}^k.$$

Esta función puede expresarse del siguiente modo

$$RW(h) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K \mathbf{Q}_0^{h,k} \mathbf{c}^k,$$

siendo \mathbf{c}^k el vector columna con el beneficio medio neto cuando el sistema visita las fases del macro-estado k unidades presentes en el sistema, \mathbf{U}_k . Este vector es

$$\mathbf{c}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0^k \\ \mathbf{c}_1^k \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k^k \end{pmatrix}; \quad k = 1, \dots, K.$$

Beneficio medio neto acumulado hasta el instante H

El beneficio medio neto acumulado hasta cierto instante H lo obtuvimos en (3.28). El caso $H = 0$ es inmediato

$$CRW(0) = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{c}_0^K.$$

Desarrollaremos a continuación una metodología para calcular esta medida para el caso $H \geq 1$. Este método reduce el orden de las matrices implicadas debido a la distribución inicial.

Esta medida puede interpretarse como el número medio de visitas por un cierto estado por el correspondiente beneficio medio. El coste-beneficio medio neto hasta cierto instante H para el caso k unidades en el sistema se obtiene como

$$CRW_k(H) = (\alpha \otimes \gamma) [\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^{H+1}] \mathbf{c}^k = \left[\begin{matrix} \mathbf{N}_k(H) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix} \right] \mathbf{c}^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

donde $\begin{matrix} \mathbf{N}_k(H) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix}$ viene dada en (3.39).

Sumando estos valores en k , obtenemos el coste-beneficio medio neto hasta cierto instante H

$$CRW(H) = \sum_{k=1}^K CRW_k(H) = (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K [\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^{H+1}] \mathbf{c}^k = \left[\begin{matrix} \mathbf{N}(H) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix} \right] \mathbf{c},$$

donde $\begin{matrix} \mathbf{N}(H) \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix}$ y \mathbf{c} vienen dados por (3.40) y (3.26), respectivamente.

Cuando H tiende a infinito, obtenemos el beneficio neto hasta que no quedan unidades en el sistema. Para el caso k unidades en el sistema, esta medida viene dada por

$$CRW_k = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}_k^* \mathbf{c}^k = \left[\begin{matrix} \mathbf{N}_k \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix} \right] \mathbf{c}^k,$$

donde $\begin{matrix} \mathbf{N}_k \\ (\alpha \otimes \gamma) \end{matrix}$ viene dada en (3.42).

Y para cualquier número de unidades

$$CRW = (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{Z}^* \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{c},$$

donde $(\alpha \otimes \gamma) \mathbf{N}$ viene dada en (3.41).

Beneficio medio neto acumulado hasta cierto instante H , incluyendo el coste por pérdida de unidades

El número medio de unidades que se pierden en el sistema hasta el instante H viene dado por la expresión (3.25) y en forma algorítmica, por la (3.43). Teniendo en cuenta esto, el beneficio medio neto total dado en (3.31) puede obtenerse como

$$\begin{aligned} TCRW(H) &= (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K [\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^{H+1}] \mathbf{c}^k - (\alpha \otimes \gamma) \sum_{k=1}^K (\mathbf{Z}_k^* - \mathbf{Z}_k^H) \mathbf{V}_k A \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}(H) \\ (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{N}(H) \end{bmatrix} \mathbf{c} - (\alpha \otimes \gamma) \mathbf{N}(H-1) \mathbf{V} \cdot A, \end{aligned}$$

siendo el vector columna $\mathbf{V}^L = (\mathbf{V}_K^L, \mathbf{V}_{K-1}^L, \dots, \mathbf{V}_2^L, \mathbf{V}_1^L)'$ el dado en (3.43).

Capítulo 4

Sistema con múltiples componentes en reserva activa

4.1. Introducción

En este capítulo estudiamos un sistema discreto reparable con un número finito de unidades; una unidad principal y el resto en reserva activa. Los tiempos operativos y de reparación siguen distribuciones generales y consideraremos su representación tipo fase. En el sistema existe un canal de reparación. El sistema está operativo mientras existe una unidad en funcionamiento, en otro caso, se encuentra no operativo. Si la unidad principal falla pasa a reparación e instantáneamente, una unidad de la reserva pasa a ocupar el lugar de la unidad principal. Cualquier unidad en reserva puede ocupar este lugar con una determinada probabilidad. Cuando se completa una reparación, la unidad reparada pasa a la reserva si hay una unidad en funcionamiento, o pasa a ser la unidad principal en caso contrario, es decir, si el sistema se encuentra no operativo.

Este capítulo generaliza al capítulo 2 al considerar dispuestas la unidades en reserva activa en vez de pasiva. Por otro lado también generaliza el trabajo de Pérez-Ocón y Montoro-Cazorla (2006) [28] al considerar distribuciones generales de las unidades en reserva activa y una mayor casuística en el fallo. El contenido de este capítulo ha sido publicado en Ruiz-Castro, Fernández-Villodre y Pérez-Ocón (2009) [32]

El presente capítulo está organizado del siguiente modo. En la sección 4.2 analizamos el sistema y presentamos los estados del mismo. En la sección 4.3 se modeliza el sistema, obteniéndose los elementos que forman la matriz de probabilidades de transición asociada al mismo. A continuación, en las secciones 4.4 y 4.5 calcularemos la distribución estacionaria asociada al sistema y el periodo de funcionamiento del mismo, respectivamente. En la sección 4.6 se obtienen medi-

das de fiabilidad asociadas al sistema tales como la disponibilidad y la probabilidad condicionada de fallo. En la sección 4.7 introducimos aspectos económicos en el análisis del sistema introduciendo costes. Por último, en la sección 4.8 realizamos una aplicación numérica que ilustra los resultados obtenidos a lo largo de todo el capítulo.

4.2. El sistema

Describiremos a continuación el sistema que analizaremos en este capítulo y a partir de esta descripción, obtendremos el conjunto de estados asociado.

Consideramos un sistema con n unidades sujeto a fallos. Existe una unidad en funcionamiento y $n - 1$ unidades en reserva activa. Cada unidad operativa del sistema puede sufrir un fallo y cuando esto ocurre, va al canal de reparación. Únicamente existe un reparador. Cuando el sistema está operativo, puede fallar más de una unidad, pudiendo ocurrir este hecho una vez por unidad de tiempo.

Por otro lado, sólo una unidad puede ser reparada por unidad de tiempo y una misma unidad no puede fallar y ser reparada en el mismo instante. De forma recíproca, si una unidad es reparada, no puede fallar en la misma unidad de tiempo.

Como ya hemos mencionado anteriormente, los tiempos involucrados en el sistema son generales y consideraremos su representación tipo fase. El tiempo de vida de la unidad principal se distribuye tipo fase con representación (α, \mathbf{T}) y para cualquier unidad en reserva la representación de la distribución tipo fase es (γ, \mathbf{L}) . Los estados transitorios son los estados operativos de las unidades. El número de fases operativas es m para la unidad principal y l para las unidades en reserva. Por tanto, las dimensiones de las matrices \mathbf{T} y \mathbf{L} son m y l , respectivamente. Estas matrices contienen las probabilidades de transición entre las fases operativas de la unidad en funcionamiento y las reservas.

El tiempo de reparación se distribuye tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) y el orden de la matriz \mathbf{S} es q . Como consecuencia, consideraremos q fases de reparación.

4.2.1. Estados del sistema

Definiremos los estados del sistema a partir del número de unidades no operativas en cierto instante. Estos macro-estados están compuestos de estados (fases) del siguiente modo,

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(\mathbf{0}, i, j_1, \dots, j_{n-1}); 1 \leq i \leq m; 1 \leq j_s \leq l; s = 1, 2, \dots, n-1\}, \\ S_k &= \{(\mathbf{k}, i, j_1, \dots, j_{n-k-1}, r); 1 \leq i \leq m, 1 \leq j_s \leq l, \\ &\quad s = 1, 2, \dots, n-k-1, 1 \leq r \leq q\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n-2, \\ S_{n-1} &= \{(\mathbf{n}-1, i, r); 1 \leq i \leq m; 1 \leq r \leq q\}, \\ S_n &= \{(\mathbf{n}, r); 1 \leq r \leq q\}, \end{aligned}$$

donde S_k contiene las fases cuando hay k unidades rotas, para $k = 0, \dots, n$. Con la notación empleada, i denota la fase de la unidad principal, j_s la fase de la s -ésima unidad en reserva, y r la fase de la reparación.

El espacio de estados puede ser dividido como $E = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$, donde $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{n-1}$ contiene las fases operativas de los estados del sistema, y S_n las fases de la reparación cuando todas las unidades se encuentran en el canal de reparación.

4.3. El modelo

A partir del sistema descrito, nuestro interés reside en su análisis. Este análisis lo realizaremos a través del proceso de Markov vectorial mediante el que puede modelizarse dicho sistema.

El sistema que nos ocupa puede ser descrito mediante un proceso vectorial de Markov discreto con estructura $M/G/1$ con niveles. El macro-estado para este proceso viene dado por el número de unidades no operativas en un determinado instante.

La matriz de probabilidades de transición asociada al modelo puede expresarse mediante bloques a partir de los macro-estados dados anteriormente. Así obtenemos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{B}_{02} & \mathbf{B}_{03} & \dots & \mathbf{B}_{0n-2} & \mathbf{B}_{0n-1} & \mathbf{B}_{0n} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^1 & \mathbf{A}_{n-1}^1 & \mathbf{B}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^2 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^2 & \mathbf{A}_{n-1}^2 & \mathbf{B}_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_3^3 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^3 & \mathbf{A}_{n-1}^3 & \mathbf{B}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^{n-1} & \mathbf{A}_{n-1}^{n-1} & \mathbf{B}_{n-1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{nn-1} & \mathbf{B}_{nn} \end{pmatrix},$$

donde las componentes de las matrices \mathbf{B}_{ij} y \mathbf{A}_i^j las definiremos más tarde.

A continuación, con el fin de presentar la construcción de los bloques que componen la matriz \mathbf{P} definiremos varias funciones que nos serán de gran utilidad. En primer lugar, la función $\mathbf{C}(\cdot)$ nos proporciona las probabilidades de transición entre los estados de las unidades en reserva cuando hay i unidades no operativas en el sistema y cuando ocurren $j - i$ fallos en las unidades en reserva (j unidades rotas al final de la etapa). Las posiciones de las unidades que fallan vienen dadas por los ordinales k_1, \dots, k_{j-i} . Esta función se define como

$$\mathbf{C}(i, j; k_1, \dots, k_{j-i}) = \mathbf{L}_1 \otimes \mathbf{L}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{L}_{n-i-1},$$

siendo $\mathbf{L}_h = \mathbf{L}^0$ si $h = k_1, \dots, k_{j-i}$ y $\mathbf{L}_h = \mathbf{L}$ en otro caso, para $i = 0, \dots, n-2$ y $j = i+1, \dots, n-1$. Además, la probabilidad de fallo de una unidad en reserva desde un estado transitorio viene dada por los elementos del vector columna \mathbf{L}^0 . Cuando no ocurre un fallo, tiene lugar una transición con probabilidad dada por los elementos de \mathbf{L} . Si ninguna de las unidades en reserva sufre un fallo cuando hay $n-i$ unidades en estado operativo, entonces las transiciones entre las fases de las unidades en reserva vienen dadas por

$$\mathbf{C}(i, i) = \mathbf{L} \otimes \overset{n-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{L},$$

para $i = 0, \dots, n-2$

A partir de estas funciones, podemos calcular las probabilidades de transición entre las fases de las unidades en reserva cuando hay i unidades rotas en el sistema, y en el siguiente paso ocurren $j-i$ fallos de las unidades en reserva (la unidad principal continúa trabajando). De esta forma

$$\mathbf{H}(i, j) = \sum_{k_1=1}^{n-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+1} \dots \sum_{k_{j-i}=k_{j-i-1}+1}^{n-i-1} \mathbf{C}(i, j; k_1, \dots, k_{j-i}),$$

para $j-i \geq 1$.

La función matricial $\mathbf{H}(i, j)$ contiene la probabilidad matricial partiendo de i unidades no operativas hasta j unidades no operativas, sin que la unidad principal falle y considerando todas las fases de las unidades en reserva. En su cálculo se consideran todas las combinaciones posibles de fallo entre las unidades en reserva.

De forma análoga, definimos otras funciones que emplearemos en el cálculo de las transiciones entre las fases de las unidades en reserva cuando hay i unidades en reparación y la unidad principal cuando fallan $j-i-1$ unidades de la reserva (j unidades rotas al final de la etapa). En primer lugar definimos la función

$$\mathbf{C}'(i, j; s, k_1, \dots, k_{j-i-1}) = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{n-i-1},$$

siendo $\mathbf{D}_h = \mathbf{L}^0$ si $h = k_1, \dots, k_{j-i-1}$, $\mathbf{D}_h = (\mathbf{e} - \mathbf{L}^0) \nu(s; k_1, \dots, k_{j-i-1})$ si $h = s$ y $\mathbf{D}_h = \mathbf{L}$ en cualquier otro caso, para $i = 0, \dots, n-1$; $j = i+2, \dots, n-1$. La función $\nu(s; k_1, \dots, k_{j-i-1})$ indica el peso para la s -ésima unidad en reserva que ocupa la posición de la unidad principal. Cuando $j = i+1$, ninguna de las unidades en reserva sufre fallo y esta función puede expresarse como

$$\mathbf{C}'(i, j; s, k_0) = \mathbf{C}'(i, j; s) = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{n-i-1},$$

siendo en este caso $\mathbf{D}_h = (\mathbf{e} - \mathbf{L}^0) \nu(s)$ si $h = s$ y $\mathbf{D}_h = \mathbf{L}$ en otro caso.

La función $\mathbf{C}'(\cdot)$ indica las transiciones entre los estados de las unidades en reserva cuando hay i unidades en reparación y, en el siguiente paso, la unidad

principal y $j-i-1$ fallos de las unidades de la reserva tienen lugar. En este caso, el número total de productos kronecker es igual al número inicial de unidades operativas menos uno, esto es, $n-i-1$.

El parámetro s indica la posición de la unidad en reserva que ocupa el lugar de la unidad principal. La unidad posterior está trabajando cuando ocurre el fallo, por este motivo introducimos la probabilidad de supervivencia $e - \mathbf{L}^0$. Por tanto, $(e - \mathbf{L}^0)\nu(s; k_1, \dots, k_{j-i-1})$ es la probabilidad de que la s -ésima unidad en reserva sobreviva a este instante y ocupe la posición de la unidad principal, dado que ésta ha fallado. Este peso depende de las unidades rotas. Si $j = i+1$, el peso es $\nu(s)$. Dada una secuencia k_1, \dots, k_{j-i-1} se tiene

$$\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k_h \\ h=1, \dots, j-i-1}}^{n-i-1} \nu(s; k_1, \dots, k_{j-i-1}) = 1,$$

y para $j = i+1$,

$$\sum_{s=1}^{n-i-1} \nu(s) = 1.$$

A partir de las funciones descritas anteriormente, podemos calcular las probabilidades de transición entre los estados de las unidades en reserva cuando hay i unidades en reparación y, en el siguiente paso, la unidad principal y $j-i-1$ unidades de la reserva fallan, para $j-i \geq 1$. Esta probabilidad se expresa a través de la función $F(\cdot, \cdot)$ como sigue,

$$\mathbf{F}(i, j) = \sum_{k_1=1}^{n-j+1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n-j+2} \cdots \sum_{k_{j-i-1}=k_{j-i-2}+1}^{n-i-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k_h \\ h=1, \dots, j-i-1}}^{n-i-1} \mathbf{C}'(i, j; s, k_1, \dots, k_{j-i-1}).$$

Esta función matricial $\mathbf{F}(i, j)$ se obtiene de forma similar a como obtuvimos la función \mathbf{H} . En este caso, hemos considerado todas las posibles combinaciones de los fallos entre las unidades en reserva y todas las posibles combinaciones para ocupar la posición de la unidad principal.

Todas estas funciones definidas tienen como objetivo simplificar la construcción de los bloques que forman la matriz \mathbf{P} .

Los bloques

Una vez definidas las funciones necesarias, introducimos los bloques de la matriz de probabilidades de transición.

Analizaremos la construcción de los bloques considerando varios casos. Por ejemplo, el bloque \mathbf{B}_{00} contiene las probabilidades de transición entre el macroestado S_0 en un paso. En este caso, una transición entre las fases de las unidades en reserva ocurre con probabilidad $\mathbf{C}(0, 0)$ y entre las fases de la unidad en

funcionamiento, con probabilidad \mathbf{T} . No se produce ni fallo ni reparación. Por tanto,

$$\mathbf{B}_{00} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{C}(0, 0).$$

Las transiciones entre los macro-estados S_0 y S_1 vienen dadas por el bloque \mathbf{B}_{01} . Todas las unidades están trabajando y ocurre un fallo. Este fallo puede afectar tanto a la unidad principal como a una unidad en reserva. En el primer caso, la unidad principal falla y otra ocupa su lugar con vector inicial α . La probabilidad de fallo desde los estados transitorios viene dada por el vector columna \mathbf{T}^0 . La reparación comienza con vector β y las otras unidades en reserva no cambian, esto es, $\mathbf{F}(0, 1)$. En el segundo caso, una unidad de la reserva sufre un fallo, comienza la reparación con probabilidad β y la unidad principal continúa operando, posiblemente cambiando de fase. Por tanto, este bloque viene dado por

$$\mathbf{B}_{01} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, 1) \otimes \beta + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{F}(0, 1) \otimes \beta.$$

De forma análoga podemos construir el bloque \mathbf{B}_{0k} del siguiente modo,

$$\mathbf{B}_{0k} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, k) \otimes \beta + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{F}(0, k) \otimes \beta, \quad k = 2, \dots, n-1; \quad n > 2.$$

El bloque \mathbf{B}_{0n} contiene las probabilidades de que todas las unidades fallen, considerando las diferentes fases, y la reparación de la unidad principal comience según el vector de probabilidad inicial β . La probabilidad de fallo desde los estados transitorios para la unidad principal viene dada por el vector columna \mathbf{T}^0 , mientras que $\mathbf{H}(0, n-1)$ contiene las probabilidades de fallo desde los estados transitorios para las unidades en reserva.

$$\mathbf{B}_{0n} = \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n-1) \otimes \beta.$$

Para la transición de S_1 a S_0 construimos el bloque \mathbf{B}_{10} . En este caso, sólo una unidad está rota y se realiza la reparación. La probabilidad de reparación desde los estados transitorios viene dada por el vector \mathbf{S}^0 . La unidad reparada entra en el sistema como una unidad de la reserva con vector de probabilidad inicial γ . Puede ocurrir una transición en la unidad principal y en las unidades en reserva. Este bloque viene dado por,

$$\mathbf{B}_{10} = \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{C}(1, 1) \otimes \mathbf{S}^0, \quad n > 2; \quad \mathbf{B}_{10} = \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0, \quad n = 2.$$

La matriz de transición entre las fases desde el macro-estado S_i al mismo estado, viene dada por \mathbf{A}_i^i . Esto indica que hay i unidades antes y después de la transición, para $i = 1, \dots, n-2$, y $n > 2$.

Este caso puede ocurrir porque no haya unidades rotas; una unidad en reserva se rompe y ocurre una reparación, o la unidad principal falla y una unidad es reparada. De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^i = & \mathbf{T} \otimes \mathbf{C}(i, i) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{H}(i, i+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta + \\ & + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{F}(i, i+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta. \end{aligned}$$

\mathbf{A}_k^i indica que i unidades están en reparación y en el paso siguiente hay k unidades no operativas, para $i = 1, \dots, n-2$; $k \leq n-2$, $k \geq i+1$ y $n > 2$. Esto ocurre cuando $k-i$ unidades en reserva fallan y no se produce reparación, cuando $k-i+1$ unidades en reserva se rompen y ocurre una reparación, cuando la unidad principal y $k-i-1$ unidades de la reserva fallan o cuando la unidad principal y $k-i$ unidades de la reserva fallan y se completa una reparación. Esta matriz es

$$\mathbf{A}_k^i = \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, k) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{H}(i, k+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta + \\ + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{F}(i, k) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{F}(i, k+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta.$$

De forma análoga se obtienen el resto de matrices. Estas son

$$\mathbf{A}_{n-1}^i = \mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, n-1) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{F}(i, n-1) \otimes \mathbf{S} + \\ + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{L}^{0 \otimes n-i-1} \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{S}^0 \beta,$$

para $i = 1, \dots, n-2$; $n > 2$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{in} &= \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{L}^{0 \otimes n-i-1} \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{S} \quad \text{para } i = 1, \dots, n-2; \quad n > 2, \\ \mathbf{B}_{n-1n} &= \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_{n-1}^{n-1} &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{B}_{nn} &= \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_{i-1}^i &= \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{C}(i, i) \otimes \mathbf{S}^0 \beta \quad \text{para } i = 1, \dots, n-2; \quad n > 2, \\ \mathbf{A}_{n-2}^{n-1} &= \mathbf{T} \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{B}_{nn-1} &= \alpha \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{B}_{nn} &= \mathbf{S}. \end{aligned}$$

En todos los casos descritos, los vectores \mathbf{T}^0 y \mathbf{S}^0 contienen las probabilidades de fallo de la unidad principal y las probabilidades de completar una reparación desde los estados transitorios, respectivamente.

4.4. Distribución estacionaria

Esta sección la dedicaremos a calcular la distribución estacionaria. Para ello, consideramos el modelo descrito en la sección anterior con matriz de probabilidades de transición \mathbf{P} . Es sabido que la distribución estacionaria del modelo π verifica el sistema $\pi = \pi \mathbf{P}$ con la condición inicial $\pi \mathbf{e} = 1$, siendo \mathbf{e} el vector columna de unos de orden adecuado. La solución de este sistema existe como consecuencia de las características del proceso. El vector distribución π está dividido según los macro-estados del modelo. Por tanto, este vector se expresa

como $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$. A continuación calcularemos la solución del sistema de ecuaciones anterior, en forma matricial y algorítmica considerando los bloques de la matriz \mathbf{P}

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{B}_{02} & \mathbf{B}_{03} & \dots & \mathbf{B}_{0n-2} & \mathbf{B}_{0n-1} & \mathbf{B}_{0n} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^1 & \mathbf{A}_{n-1}^1 & \mathbf{B}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^2 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^2 & \mathbf{A}_{n-1}^2 & \mathbf{B}_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_3^3 & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^3 & \mathbf{A}_{n-1}^3 & \mathbf{B}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{n-2}^{n-1} & \mathbf{A}_{n-1}^{n-1} & \mathbf{B}_{n-1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{nn-1} & \mathbf{B}_{nn} \end{pmatrix} \\
 = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n).$$

El sistema a resolver con esta notación es

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \pi_0 \mathbf{B}_{00} + \pi_1 \mathbf{B}_{10} \\
 \pi_k &= \pi_0 \mathbf{B}_{0k} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j \mathbf{A}_k^j, \quad k = 1, \dots, n-2 \\
 \pi_{n-1} &= \pi_0 \mathbf{B}_{0n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \pi_j \mathbf{A}_{n-1}^j + \pi_n \mathbf{B}_{nn-1} \\
 \pi_n &= \pi_0 \mathbf{B}_{0n} + \sum_{j=1}^n \pi_j \mathbf{B}_{jn}
 \end{aligned}$$

con la condición inicial $\pi \mathbf{e} = 1$.

A partir de las expresiones anteriores hemos calculado la distribución en forma recursiva

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \pi_1 \mathbf{B}_{10} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{00})^{-1} \\
 \pi_1 &= \pi_2 \mathbf{A}_1^2 \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{10} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{00})^{-1} \mathbf{B}_{01} - \mathbf{A}_1^1 \right)^{-1} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\pi_j = \pi_{j+1} \mathbf{R}_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

que es equivalente a

$$\pi_j = \pi_n \prod_{k=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-k}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

donde \mathbf{R} viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{B}_{10} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{00})^{-1}, \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{A}_1^2 (\mathbf{I} - \mathbf{R}_1 \mathbf{B}_{01} - \mathbf{A}_1^1)^{-1}, \\ \mathbf{R}_k &= \mathbf{A}_{k-1}^k \left(\mathbf{I} - \prod_{a=1}^{k-1} \mathbf{R}_{k-a} \mathbf{B}_{0k-1} - \sum_{r=2}^{k-1} \prod_{a=r}^{k-1} \mathbf{R}_{k-1+r-a} \mathbf{A}_{k-1}^{r-1} - \mathbf{A}_{k-1}^{k-1} \right)^{-1}; \\ &\text{para } k = 3, \dots, n-1, \\ \mathbf{R}_n &= \mathbf{B}_{nn-1} \left(\mathbf{I} - \prod_{a=1}^{n-1} \mathbf{R}_{n-a} \mathbf{B}_{0n-1} - \sum_{r=2}^{n-1} \prod_{a=r}^{n-1} \mathbf{R}_{n-1+r-a} \mathbf{A}_{n-1}^{r-1} - \mathbf{A}_{n-1}^{n-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Considerando la última ecuación y la condición inicial, podemos obtener π_n . Además, a partir de la última ecuación se tiene

$$\pi_0 \mathbf{B}_{0n} + \sum_{j=1}^n \pi_j \mathbf{B}_{jn} = \pi_n,$$

y sustituyendo π_0 y π_j para $j = 0, \dots, n-1$ en las expresiones anteriores, obtenemos

$$\pi_n \prod_{a=1}^n \mathbf{R}_{n+1-a} \mathbf{B}_{0n} + \sum_{j=1}^{n-1} \pi_n \prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{B}_{jn} + \pi_n \mathbf{B}_{nn} = \pi_n,$$

y operando tenemos

$$\begin{aligned} \pi_n \left(\prod_{a=1}^n \mathbf{R}_{n+1-a} \mathbf{B}_{0n} + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{B}_{jn} + \mathbf{B}_{nn} - \mathbf{I} \right) &= 0, \\ \pi_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{B}_{jn} + \mathbf{B}_{nn} - \mathbf{I} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial

$$\begin{aligned}
\pi \mathbf{e} &= 1, \\
\sum_{j=0}^n \pi_j \mathbf{e} &= 1, \\
\pi_n \mathbf{e} + \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \mathbf{e} &= 1, \\
\pi_n \left(\mathbf{e} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{e} \right) \right) &= 1.
\end{aligned}$$

Finalmente, π_n viene dado por

$$\begin{aligned}
\pi_n &= [1, 0] \left[\mathbf{e} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{e} \right) \middle| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{a=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-a} \mathbf{B}_{jn} \right) \right]^* \\
&+ (\mathbf{B}_{nn})^* - \mathbf{I}^*]^{-1},
\end{aligned}$$

donde * indica que la última columna de la correspondiente matriz ha sido eliminada.

Algoritmo para calcular la distribución estacionaria

Paso 1. π_n se obtiene desde la ecuación anterior

Paso 2. $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ se calculan de forma recursiva

Paso 3. La distribución π se calcula finalmente desde los puntos anteriores

4.5. Periodo de funcionamiento

El concepto de periodo de funcionamiento del sistema puede ser definido de varias formas. Esto es, podemos considerar que el sistema está inicialmente nuevo y todas las unidades están operativas, y queremos analizar el comportamiento del tiempo que transcurre hasta el fallo del sistema, donde todas las unidades están rotas. Otro punto de vista consiste en considerar que todas las unidades se encuentran no operativas y una de ellas es reparada. En este instante el sistema comienza a trabajar. Definimos el periodo desde este momento hasta que el sistema vuelve a fallar de nuevo (todas las unidades rotas). En este último caso, la distribución de este periodo de tiempo es tipo fase con representación (w, \mathbf{B}) , siendo

$$w = (\mathbf{0}, \alpha \otimes \beta), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{B}_{02} & \mathbf{B}_{03} & \cdots & \mathbf{B}_{0n-2} & \mathbf{B}_{0n-1} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1^1 & \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_3^1 & \cdots & \mathbf{A}_{n-2}^1 & \mathbf{A}_{n-1}^1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^2 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_3^2 & \cdots & \mathbf{A}_{n-2}^2 & \mathbf{A}_{n-1}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_3^3 & \cdots & \mathbf{A}_{n-2}^3 & \mathbf{A}_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{n-2}^{n-1} & \mathbf{A}_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

donde la distribución inicial, w , tiene dimensión $1 \times \dim(\mathbf{P}) - q$. El sistema está operando ocupando los estados transitorios hasta que todas las unidades están en reparación. Además, el estado absorbente es el macro-estado n . La fiabilidad de la función de supervivencia es la probabilidad de que el sistema se encuentre trabajando en el instante ν . Esto es, es la probabilidad de que el sistema falle después de ν . Esta probabilidad es igual a

$$\mathbf{R}(\nu) = w \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \mathbf{B}^{k+1} \mathbf{B}^0 = w \mathbf{B}^\nu (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

con \mathbf{B}^0 siendo el vector columna $\mathbf{e} - \mathbf{B}\mathbf{e}$. El vector \mathbf{B}^0 contiene las probabilidades de fallo total del sistema desde los estados transitorios.

4.6. Medidas de fiabilidad

En esta sección obtendremos algunas medidas de interés en el estudio de la fiabilidad de sistemas, aplicadas al modelo que nos ocupa. Calcularemos la disponibilidad y varias probabilidades condicionadas de fallo en forma algorítmica y algebraica. Este análisis se realizará tanto para el caso transitorio como para el estacionario.

4.6.1. Disponibilidad

La disponibilidad es la probabilidad de que en el instante κ el sistema se encuentre operativo. Denotamos por $\tilde{p}_{ij}^{(\kappa)}$ a la matriz $\mathbf{P}^{(\kappa)}$ restringida a las fases del macro-estado S_i (filas) y al macro-estado S_j (columnas). Inicialmente el sistema es nuevo, se encuentra en el macro-estado S_0 , y todas las unidades están operativas.

En el caso transitorio obtenemos

$$\mathbf{A}(\kappa) = w' \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}_{ij}^{(\kappa)} \mathbf{e} = 1 - w' \tilde{p}_{0n}^{(\kappa)} \mathbf{e},$$

con $w' = (\alpha \otimes \gamma \otimes \overset{n-1}{\dots} \otimes \gamma)$.

La disponibilidad en régimen estacionario se calcula como

$$\mathbf{A} = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \mathbf{e} = \pi_n \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^n \mathbf{R}_{n+j+1-k} \right) \mathbf{e}.$$

4.6.2. Probabilidad condicionada de fallo

En esta sección calcularemos varias probabilidades condicionadas de fallo. En primer lugar, consideramos que el sistema se encuentra en el macro-estado S_i (i unidades no operativas) en el instante $\kappa - 1$ y en el siguiente paso hay h unidades rotas. Inicialmente el sistema ocupa el macro-estado S_0 . La probabilidad de que esto ocurra viene dada por $\nu_{ih}^{(\kappa)}$. Dado que inicialmente el sistema está en el macro-estado S_0 , la probabilidad de que en el instante $\kappa - 1$ el sistema se encuentre en el macro-estado i es igual a $w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)}$, considerando los estados transitorios, y que en el instante siguiente hay h unidades rotas. Estos h fallos pueden ocurrir porque fallen la unidad principal y $h - 1$ unidades de la reserva, o porque fallen h unidades de la reserva. Esto ocurre con probabilidad $\mathbf{T}^0 \otimes H(i, h+i-1)$ y con probabilidad $\mathbf{T} \otimes H(i, h+i)$, respectivamente. La reparación no ejerce influencia en estos casos. Para los casos $h = 1$ y $h = n$ podemos hacer una interpretación similar.

Además, dicha probabilidad la calculamos para los diferentes casos del siguiente modo

$$\nu_{01}^{(\kappa)} = w' \tilde{p}_{00}^{(\kappa-1)} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(0, 0)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, 1)] \mathbf{e} \right],$$

para $h = 2, \dots, n - 1$ resulta

$$\nu_{0h}^{(\kappa)} = w' \tilde{p}_{00}^{(\kappa-1)} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, h-1)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, h)] \mathbf{e} \right],$$

y

$$\nu_{0n}^{(\kappa)} = w' \tilde{p}_{00}^{(\kappa-1)} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \overset{n-1}{\dots} \otimes \mathbf{L}^0 \right].$$

Para $i = 1, \dots, n - 2$ y $h = 2, \dots, n - i - 1$

$$\begin{aligned} \nu_{i1}^{(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(i, i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, h+i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right], \\ \nu_{n-11}^{(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0n-1}^{(\kappa-1)} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right], \\ \nu_{ih}^{(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, h+i-1) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, h+i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right], \\ \nu_{in-i}^{(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \overset{n-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right]. \end{aligned}$$

En el caso estacionario estas probabilidades pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\nu_{01} &= \pi_0 \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(0, 0)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, 1)] \mathbf{e} \right] \\ &= \pi_n \prod_{k=1}^n \mathbf{R}_{n+1-k} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(0, 0)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, 1)] \mathbf{e} \right],\end{aligned}$$

y para $h = 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned}\nu_{0h} &= \pi_0 \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, h-1)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, h)] \mathbf{e} \right] \\ &= \pi_n \prod_{k=1}^n \mathbf{R}_{n+1-k} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, h-1)] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(0, h)] \mathbf{e} \right], \\ \nu_{0n} &= \pi_0 \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{L}^0 \right].\end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, n-2$, $h = 2, \dots, n-i-1$,

$$\begin{aligned}\nu_{i1} &= \pi_i \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(i, i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, i+1) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right] \\ &= \pi_n \prod_{k=i+2}^n \mathbf{R}_{n+i+2-k} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{C}(i, i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, i+1) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right], \\ \nu_{n-1,1} &= \pi_{n-1} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right] = \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right], \\ \nu_{ih} &= \pi_i \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, h+i-1) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, h+i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right] \\ &= \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} \left[[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, h+i-1) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{T} \otimes \mathbf{H}(i, h+i) \otimes \mathbf{e}_q] \mathbf{e} \right], \\ \nu_{i,n-i} &= \pi_i \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right] \\ &= \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} \left[\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{L}^0 \otimes \mathbf{e}_q \right].\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, calculamos la probabilidad condicionada de fallo del sistema. Consideramos que el sistema, inicialmente está en el macro-estado S_0 , en el instante $\kappa-1$ está en el macro-estado S_i (con probabilidad $w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)}$) y en el paso siguiente el resto de unidades operativas fallan (con probabilidad $\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n-1)$) y no se produce ninguna reparación

(con probabilidad \mathbf{S}). Puede realizarse una interpretación similar para los casos $i = n - 1$ e $i = 0$. Denotamos esta probabilidad mediante $\nu_i^{s(\kappa)}$. Por tanto, para $i = 1, \dots, n - 2$

$$\begin{aligned}\nu_i^{s(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n - 1) \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \\ \nu_{n-1}^{s(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{0, n-1}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \\ \nu_0^{s(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{00}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n - 1)] \mathbf{e}.\end{aligned}$$

La probabilidad condicionada de fallo del sistema en el instante κ puede expresarse en su forma general sumando en i . De este modo se obtiene

$$\begin{aligned}\nu^{s(\kappa)} &= w' \tilde{p}_{00}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n - 1)] \mathbf{e} + \\ &+ w' \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{p}_{0i}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n - 1) \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e} + w' \tilde{p}_{0, n-1}^{(\kappa-1)} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}.\end{aligned}$$

De forma análoga a las otras medidas, en régimen estacionario tenemos

$$\begin{aligned}\nu_i^s &= \pi_i [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n - 1) \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n - 2, \\ \nu_i^s &= \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n - 1) \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, n - 2, \\ \nu_{n-1}^s &= \pi_{n-1} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \\ \nu_{n-1}^s &= \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}, \\ \nu_0^s &= \pi_0 [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n - 1)] \mathbf{e}, \\ \nu_0^s &= \pi_n \prod_{k=1}^n \mathbf{R}_{n+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n - 1)] \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Y sumando en i , la probabilidad condicionada de fallo del sistema en régimen estacionario es

$$\begin{aligned}\nu^s &= \pi_n \left[\prod_{k=1}^n \mathbf{R}_{n+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(0, n - 1)] \mathbf{e} \right] + \\ &+ \pi_n \left[\sum_{i=1}^{n-2} \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{H}(i, n - 1) \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e} \right] + \\ &+ \pi_n \prod_{k=i+1}^n \mathbf{R}_{n+i+1-k} [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{S}] \mathbf{e}.\end{aligned}$$

4.7. Costos

En esta sección introduciremos los beneficios y costos en el modelo descrito a lo largo del capítulo. Una vez analizado el comportamiento del modelo, estamos interesados en analizar el aspecto económico. Consideramos para ello que cuando la unidad principal está trabajando, se obtiene un beneficio, pero cuando una unidad de la reserva está operativa resulta un coste por cada fase operativa. La situación es análoga para la reparación, pero en este caso las fases de reparación son conocidas y en cada una de ellas el coste puede ser diferente. Los costes y beneficios introducidos en el modelo pueden ser aleatorios o determinísticos. Nosotros desarrollaremos el problema de forma general considerando un comportamiento aleatorio. Finalmente, resulta útil determinar cuándo el sistema produce beneficios netos según el número de unidades, el coste de las unidades en reserva por visita a un estado operativo y los costes de la reparación. Todos estos aspectos serán estudiados en esta sección para el modelo propuesto.

Consideraremos que en cada visita a una fase operativa la unidad principal produce un beneficio de B unidades monetarias (u.m.) y, por cada unidad de la reserva se produce un coste de C^s u.m.. Una unidad en reparación incurrirá en un coste que dependerá de la fase de reparación. Si está en la fase r , el coste por visitar esta fase será de C_r^R u.m.. Considerando los macro-estados definidos para el modelo, el beneficio neto por visita al correspondiente macro-estado es

$$\begin{aligned} C(\mathbf{0}) &= B - (n-1)C^s, \\ C(\mathbf{k}, r) &= B - (n-k-1)C^s - C_r^R, \\ C(\mathbf{n}, r) &= -C_r^R, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n-1$ y $1 \leq r \leq q$.

El beneficio medio por visita a una fase de un macro-estado viene dado por

$$\begin{aligned} E[C(\mathbf{0})] &= c(\mathbf{0}) = b - (n-1)c^s, \\ E[C(\mathbf{k}, r)] &= c(\mathbf{k}, r) = b - (n-k-1)c^s - c_r^R, \\ E[c(\mathbf{n}, r)] &= c(\mathbf{n}, r) = -c_r^R, \end{aligned}$$

donde $E[B] = b$, $E[C^s] = c^s$ y $E[C_r^R] = c_r^R$ son los valores esperados.

Denotaremos, en el análisis que se realiza a continuación, los siguientes vectores

$$\mathbf{c}_0 = c(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_{m^{n-1}} = (b - (n-1)c^s) \cdot \mathbf{e}_{m^{n-1}},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_k &= \mathbf{e}_{m^{n-k-1}} \otimes \begin{pmatrix} c(\mathbf{k}, 1) \\ \vdots \\ c(\mathbf{k}, q) \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{e}_{m^{n-k-1}} \otimes \begin{pmatrix} b - (n-k-1)c^s - c_1^R \\ \vdots \\ b - (n-k-1)c^s - c_q^R \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\
\mathbf{c}_n &= \begin{pmatrix} c(\mathbf{n}, 1) \\ \vdots \\ c(\mathbf{n}, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^R \\ \vdots \\ c_q^R \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

El vector beneficio neto viene dado al trasponer el vector $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Este estudio puede considerar además diferentes costes y beneficios en cada fase de las unidades operativas y esto completa el estudio de los costes y beneficios anterior, pero resulta menos realista ya que las fases operativas, en general, suelen ser desconocidas.

4.7.1. Beneficio medio neto para el periodo de funcionamiento

Consideremos ahora el periodo de funcionamiento definido en la Sección 4.5. El sistema comienza trabajando después de una reparación con una única unidad operativa en el mismo. Estamos interesados en el beneficio medio neto hasta que ocurre un nuevo fallo del sistema. Es sabido que el beneficio medio neto a lo largo del tiempo viene dado por el número medio de visitas a un estado por el correspondiente beneficio medio neto hasta un nuevo fallo total del sistema (Kulkarni, 1999[15]). La distribución discreta del periodo de funcionamiento ha sido ya calculada en la Sección 4.5 y definimos ahora un vector columna con el beneficio medio neto para los macro-estados operativos. Este vector viene dado por la trasposición del vector $\mathbf{c}' = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1})$. De esta forma, el beneficio medio neto para el periodo de funcionamiento es igual a

$$\phi_1(b, c^s, c_1^R, \dots, c_q^R) = w \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k \mathbf{c}' = w (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{c}'.$$

Esta función depende del beneficio de la unidad principal, del coste de las unidades en reserva y del coste de la reparación. Merece la pena analizar la relación entre estos parámetros con el fin de que esta función sea no negativa, obteniendo así un beneficio medio neto positivo.

4.7.2. Beneficio medio neto por unidad de tiempo a largo plazo

En este caso, estamos interesados en el beneficio medio neto por unidad de tiempo a largo plazo. Este viene dado por el producto de la proporción de instantes que el sistema visita un estado y el costo producido por esta visita (Kulkarni, 1999[15]). Su expresión es,

$$\phi_2(b, c^s, c_1^R, \dots, c_q^R) = \sum_{k=0}^n \pi_k \mathbf{c}_k = \pi_n \sum_{k=0}^n \prod_{a=k+1}^n \mathbf{R}_{n+k+1-a} \mathbf{c}_k.$$

Por otro lado, puede resultar útil analizar el número óptimo de unidades cuando el coste y los beneficios son fijos. En este caso la función

$$\phi_3(n) = \pi_n \sum_{k=0}^n \prod_{a=k+1}^n \mathbf{R}_{n+k+1-a} \mathbf{c}_k,$$

debe ser optimizada.

Nota: El orden del vector w es diferente para cada n y las matrices \mathbf{B} y \mathbf{c}' tienen estructuras diferentes para cada caso.

4.8. Aplicación

En esta sección mostraremos el comportamiento y las medidas del modelo descrito a lo largo del capítulo a través de una aplicación numérica. Estudiaremos el comportamiento del sistema definido en la Sección 4.2 para diferente número de unidades. Realizaremos una comparación entre un sistema con 5 unidades y otro con 10, 4 y 9 unidades en reserva respectivamente. Además, estudiaremos los costes para optimizar el número de unidades en el sistema.

En la Tabla 4.1 se muestra la distribución de la unidad principal, de cada unidad en reserva y de la reparación. Cuando la unidad principal falla, cualquier unidad operativa de la reserva ocupa su lugar con la misma probabilidad.

La reparación tiene dos fases. Cuando una unidad falla, la reparación comienza en la primera fase, donde la unidad permanece como mínimo una unidad de tiempo; desde esta fase pasa a la fase de control y de aquí la unidad puede volver a la primera fase de reparación si hay problemas con esta unidad, o puede completar la reparación. En la Figura 4.1 se muestra un diagrama que explica este proceso de reparación.

En este caso, el tiempo medio de vida de la unidad principal es 36.9872 unidades de tiempo (pasos). Para cada unidad en reserva, el tiempo medio de vida es igual a 45.0213 y finalmente, el tiempo medio de reparación es 2.1277.

El modelo teórico ha sido implementado computacionalmente con *Matlab* y ha sido aplicado a estos casos. La matriz de probabilidades de transición tiene dimensión 140×140 para el caso $n = 5$ y dimensión 4604×4604 para el caso

Unidad Principal	Unidades en reserva	Reparación
(α, \mathbf{T})	(γ, \mathbf{L})	(β, \mathbf{S})
$\alpha = (0.2, 0.5, 0.3)$	$\gamma = (0.2, 0.8)$	$\beta = (1, 0)$
$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.29 \\ 0.35 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.28 \end{pmatrix}$	$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.8 \\ 0.23 & 0.75 \end{pmatrix}$	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.99 \\ 0.05 & 0.01 \end{pmatrix}$

Tabla 4.1: Representación tipo fase de los tiempos involucrados en el modelo

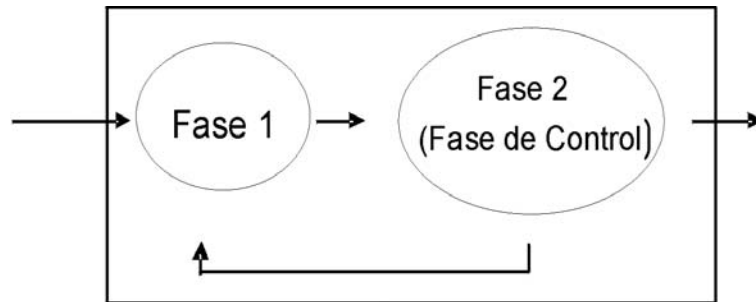


Figura 4.1: Diagrama de la reparación

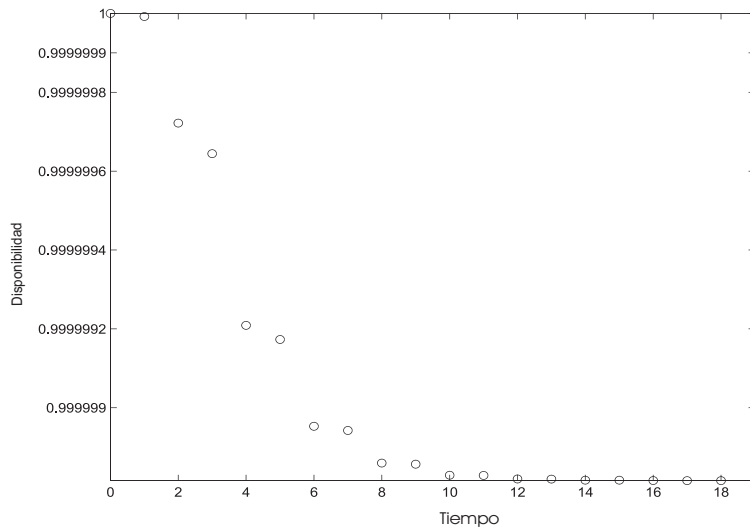


Figura 4.2: Disponibilidad del sistema para el caso $n = 5$

$n = 10$. La distribución estacionaria ha sido calculada para ambos modelos. En lo que resta de sección, los valores menores que 10^{-5} los denotaremos mediante asteriscos. Por ejemplo, si consideramos los macro-estados, la probabilidad estacionaria para cada uno es

$$\pi^5 = (0.7658, 0.2079, 0.0245, 0.0016, 6.2879 \cdot 10^{-5}, * * *),$$

cuando consideramos un sistema con 5 unidades, y

$$\pi^{10} = (0.5461, 0.3270, 0.1009, 0.0218, 0.0037, 5.0367 \cdot 10^{-5}, * * *, * * *, * * *, * * *),$$

para el caso de diez unidades.

En ambos casos, los valores de π_n son muy cercanos a 0 y, como consecuencia, la probabilidad de que el sistema falle es aproximadamente 0. La probabilidad de que el sistema esté trabajando con todas las unidades operativas es 0.7658 y 0.5461 para ambos casos respectivamente. Estas probabilidades decrecen con el número de unidades.

Hemos representado algunas funciones asociadas al sistema, como la disponibilidad definida en la Sección 4.6.1. En la Figura 4.2 se muestra para el caso $n = 5$. La disponibilidad en régimen estacionario es igual a 0.999998 y 0.999999 cuando hay cinco y diez unidades en el sistema respectivamente. En ambos casos estos valores son muy próximos a uno.

Para este sistema la probabilidad condicionada de fallo en régimen estacionario y transitorio ha sido calculada aplicando los resultados dados en la

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
	0.0807	0.0183	0.0017	0.00008	****	—
$h = 1$	0.1007	0.0557	0.0157	0.0031	0.0005	0.0001
	0.0038	0.0007	0.00004	****	—	—
$h = 2$	0.0105	0.0052	0.0013	0.0002	0.00003	****
	0.00009	0.00001	****	—	—	—
$h = 3$	0.0006	0.0003	0.0001	****	****	****
	****	****	—	—	—	—
$h = 4$	0.00003	****	****	****	****	****

Tabla 4.2: Probabilidad Condicionada de fallo para diferentes valores de i y h (la fila superior para cada valor de h para cinco unidades y la segunda para el caso de 10 unidades)

Sección 4.6.2. En la Tabla 4.2 hemos calculado esta probabilidad en el caso estacionario cuando fallan h unidades, siendo i el número de unidades no operativas (la fila superior para cada h corresponde al caso de cinco unidades y la segunda fila al de diez unidades).

Estas probabilidades son menores que 10^{-5} para $h \geq 5$ e $i \geq 6$. Por tanto, cuando el sistema está trabajando con todas las unidades operativas, la probabilidad de que ocurran dos fallos en el mismo instante es igual a 0.0038 y 0.0105 para los casos con cinco y diez unidades respectivamente. Estas probabilidades incrementan su valor cuando el número de unidades en el sistema lo hace.

Costos

Resulta interesante optimizar el modelo considerando beneficios y costes. Hemos analizado el comportamiento de dos sistemas con distinto número de unidades y disponibilidad similar. Ahora, aplicaremos los resultados de la sección 4.7 para analizar el rendimiento económico. Consideramos que para cada paso en el que la unidad principal está operativa, se produce un beneficio de 5 unidades monetarias (u.m). Por otro lado, asumimos que cada paso de una unidad de la reserva lleva asociado un coste de 0.1 u.m. y cada fase de reparación otro coste de c u.m. por unidad de tiempo. Cabe preguntarse en este punto, cuánto debería valer c para que el sistema sea rentable. Esta cuestión puede ser resuelta estudiando el comportamiento del beneficio medio por unidad de tiempo a largo plazo, pero ¿cuántas unidades en reserva deberíamos considerar?. Para responder a estas preguntas, representaremos el beneficio medio a largo plazo versus c , para distintos valores de n (Figura 4.3). Puede observarse cómo el beneficio medio neto para algunos valores de c decrece cuando incrementamos n , para $n \geq 2$.

Para el caso $c = 1$, hemos calculado el beneficio medio para un periodo de funcionamiento cuando el sistema comienza a trabajar, cuando comienza a trabajar después de una reparación, y el beneficio medio por visita, para distintos valores de n (Tabla 4.3).

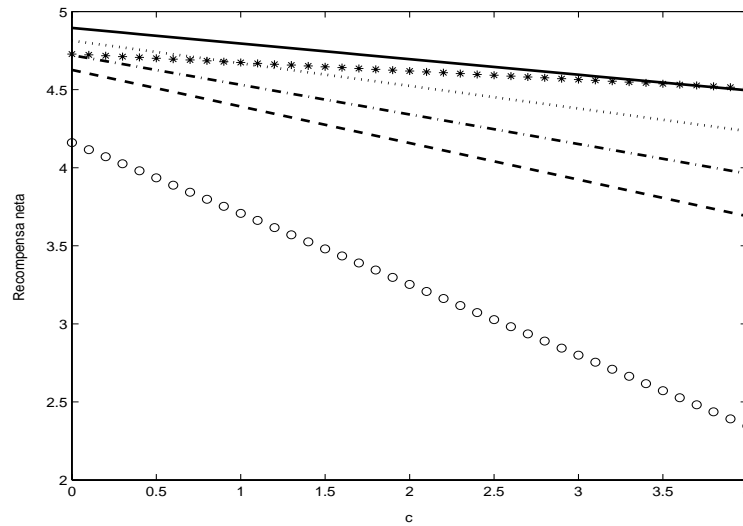


Figura 4.3: Beneficio medio neto a largo plazo versus c para distintos valores de n ($n = 1$ estrellas, $n = 2$ línea continua, $n = 3$ línea de puntos, $n = 4$ línea punto-rama, $n = 5$ línea discontinua y $n = 10$ línea de círculos)

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 10
184.94	2360.37	35138.58	465992.28	4908907.57	26603161915
184.94	2281.67	33802.22	448023.49	4719340.35	25575610489
4.6736	4.7952	4.6688	4.5309	4.3920	3.7073

Tabla 4.3: Beneficio medio neto para distinto número de unidades. Para un periodo de funcionamiento comenzando el sistema inicialmente, primera fila; para un periodo de funcionamiento comenzando el sistema tras una reparación, segunda fila; beneficio neto a largo plazo por visita, tercera fila.

Puede observarse a partir de la Tabla 4.3 que cuando el número de unidades crece, el beneficio medio también lo hace. Esto no ocurre para el beneficio medio a largo plazo por visita, debido al coste de reparación y el beneficio por unidad cuando la unidad principal está operativa. En este caso, $c = 1$ y un sistema con dos unidades tiene un beneficio medio a largo plazo por visita mayor.

Capítulo 5

Un sistema discreto complejo con reserva activa y pérdida de unidades

5.1. Introducción

En este capítulo abordamos el estudio de un sistema en tiempo discreto con múltiples componentes en reserva activa y pérdida de unidades. Este último capítulo generaliza el modelo descrito en el capítulo 3 al tratarse de un sistema con pérdida de unidades pero en reserva activa. Consideramos un sistema con un número finito de unidades, una ocupa la posición principal y el resto se encuentran en reserva activa, en reparación o esperando para ser reparadas. Existe un único reparador. Las unidades en reserva (reserva activa) pueden fallar pero únicamente sufren fallos reparables. La distribución del tiempo de vida de estas unidades es general y consideraremos su representación tipo fase discreta. La unidad principal puede sufrir diferentes tipos de fallos. Por un lado, fallos internos (siempre no reparables) y por otro, fallos externos accidentales (que pueden ser reparables o no reparables). Cuando la unidad principal sufre un fallo no reparable, la unidad es eliminada del sistema. Cuando una unidad sufre un fallo reparable, ésta va a reparación. Si es la unidad principal la que va al canal de reparación, una unidad de la reserva pasa a ocupar su lugar instantáneamente. Cuando una unidad se repara, ésta se reincorpora de nuevo en el sistema y funciona como una nueva. Consideramos que si sólo hay una unidad en el sistema y ésta falla de forma no reparable, entonces el sistema se reinicia con el total de unidades. La reparabilidad de un fallo accidental puede ser independiente o no del tiempo transcurrido hasta el momento del fallo.

El estudio de este sistema se realiza en tiempo discreto y, como ya hemos mencionado en capítulos anteriores, las distribuciones que intervienen en dicho sistema pueden considerarse generales. En este capítulo, al igual que en el capítu-

lo 3, también consideramos la factorización RG dada en Li y Cao (2004)[16] con el fin de operar con las matrices que aparecen a lo largo del estudio. Este método nos proporciona un análisis computacional complejo para la interpretación de las medidas que se obtienen.

El análisis que se realiza en este capítulo incorpora como novedades respecto de los capítulos anteriores la construcción de un modelo de fiabilidad discreto con distintos tipos de fallo, reserva activa y pérdida de unidades, a través de un proceso de Markov.

La organización del capítulo es la siguiente. En la sección 5.2 se describe el modelo. Para ello, se dan las hipótesis que lo rigen, el espacio de estados de la cadena de Markov asociada y obtendremos la matriz de probabilidades de transición, detallando la construcción de los bloques que la componen. En la sección 5.3 obtenemos la distribución estacionaria del modelo. La sección 5.4 la dedicamos a analizar el periodo de funcionamiento y la sección 5.5 a obtener las probabilidades de transición, la disponibilidad del sistema y las probabilidades condicionadas de fallo, considerando los distintos tipos de fallo. En la sección 5.6 realizamos una aplicación numérica que ilustra los cálculos obtenidos a lo largo de todo el capítulo. Finalmente, el apartado 5.7 ocupa los apéndices donde se obtienen las medidas descritas en las secciones anteriores de forma algorítmica.

5.2. Descripción del modelo

Consideraremos un sistema discreto con N unidades. Existe una unidad principal y $N - 1$ unidades dispuestas como reserva activa. La unidad principal está sujeta a diferentes tipos de fallo: fallos accidentales, que pueden ocurrir cuando un choque llega al sistema y pueden ser reparables o no reparables; y fallos de desgaste. Estos últimos son siempre no reparables.

Las unidades en reserva activa pueden sufrir únicamente fallos reparables y cuando esto ocurre, la unidad que ha sufrido el fallo pasa a reparación. Cuando el sistema está operativo, más de una unidad puede fallar pero ninguna puede hacerlo más de una vez en una unidad de tiempo. Asimismo, en una misma unidad de tiempo sólo una unidad puede ser reparada; no puede producirse el fallo y la reparación de la misma unidad y recíprocamente, si una unidad es reparada, no puede fallar en la misma unidad de tiempo.

Cuando ocurre un fallo no reparable, la unidad sale fuera del sistema, se pierde. De esta forma, el sistema queda con una unidad menos. Si el sistema está trabajando con una única unidad y ésta falla, el sistema se reinicia instantáneamente como un sistema con N unidades nuevas. Esto implica que el sistema estará siempre operativo mientras exista como mínimo una unidad operativa.

Cuando la unidad principal sufre un fallo reparable entonces pasa a reparación, existiendo un único reparador.

Hipótesis del modelo

Hipótesis 1. El tiempo de vida de la unidad principal debido a un fallo de desgaste se distribuye tipo fase con representación (α, \mathbf{T}) de orden m .

Hipótesis 2. El tiempo de vida de cada unidad en reserva activa se distribuye tipo fase con representación (η, \mathbf{M}) de orden l .

Hipótesis 3. Los fallos accidentales ocurren según un proceso de renovación discreto con distribución tipo fase. El tiempo entre dos fallos accidentales consecutivos se distribuye tipo fase con representación (γ, \mathbf{L}) de orden t .

Hipótesis 4. Un fallo accidental reparable o no reparable de la unidad principal ocurre si la absorción se produce en dos estados diferentes, r y nr , respectivamente. El vector columna \mathbf{L}^0 de la distribución tipo fase se divide en dos vectores columna, \mathbf{L}_r^0 y \mathbf{L}_{nr}^0 , tales que las probabilidades de absorción desde los estados transitorios producen un fallo reparable o no reparable, respectivamente.

Hipótesis 5. Si la unidad principal sufre un fallo de desgaste, entonces la distribución tipo fase del fallo accidental no se reinicia.

Hipótesis 6. El tiempo de reparación sigue una distribución tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) de orden q .

Hipótesis 7. Los tiempos definidos en las hipótesis anteriores son independientes.

Hipótesis 8. Los diferentes tipos de fallo pueden ocurrir simultáneamente.

Hipótesis 9. Cuando la unidad principal sufre un fallo de desgaste al mismo tiempo que un fallo accidental, la unidad se elimina del sistema, se pierde (por el fallo de desgaste).

Hipótesis 10. La reparación es perfecta.

5.2.1. Estados del sistema

A la hora de definir el conjunto de estados del sistema, realizaremos una elección adecuada de los estados para introducir una estructura Markoviana en el modelo.

El espacio de estados viene dado por

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{U}_N, \mathbf{U}_{N-1}, \dots, \mathbf{U}_1\},$$

donde \mathbf{U}_k es el vector de estados cuando hay k unidades en el sistema, $k = 1, \dots, N$. Cada uno de estos bloques puede expresarse del siguiente modo

$$\mathbf{U}_k = \{E_0^k, E_1^k, \dots, E_k^k\}; \quad k = 1, \dots, N.$$

Cada bloque E_s^k contiene los estados cuando hay k unidades en el sistema y s se encuentran no operativas. Estos bloques vienen dados por las fases.

\mathbf{R}_s^k contiene las transiciones entre los macro-estados cuando hay k unidades en el sistema y después de la transición el sistema queda con $k - 1$ unidades, con $k = 1, \dots, N$

\mathbf{R}_s^1 contiene las transiciones entre los macro-estados cuando hay 1 unidad en el sistema y después de la transición ocurre un fallo no reparable y el sistema se reinicia.

Los bloques \mathbf{R}_p^k y \mathbf{R}_s^k están compuestos por bloques. La descomposición de estos bloques viene dada por

$$\mathbf{R}_p^k = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00}^k & \mathbf{B}_{01}^k & \mathbf{B}_{02}^k & \mathbf{B}_{03}^k & \mathbf{B}_{04}^k & \cdots & \mathbf{B}_{0k-2}^k & \mathbf{B}_{0k-1}^k & \mathbf{B}_{0k}^k \\ \mathbf{B}_{10}^k & \mathbf{A}_{11}^k & \mathbf{A}_{12}^k & \mathbf{A}_{13}^k & \mathbf{A}_{14}^k & \cdots & \mathbf{A}_{1k-2}^k & \mathbf{A}_{1k-1}^k & \mathbf{B}_{1k}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{21}^k & \mathbf{A}_{22}^k & \mathbf{A}_{23}^k & \mathbf{A}_{24}^k & \cdots & \mathbf{A}_{2k-2}^k & \mathbf{A}_{2k-1}^k & \mathbf{B}_{2k}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32}^k & \mathbf{A}_{33}^k & \mathbf{A}_{34}^k & \cdots & \mathbf{A}_{3k-2}^k & \mathbf{A}_{3k-1}^k & \mathbf{B}_{3k}^k \\ & & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1k-2}^k & \mathbf{A}_{k-1k-1}^k & \mathbf{B}_{k-1k}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{kk-1}^k & \mathbf{B}_{kk}^k \end{pmatrix},$$

que tiene dimensión $k + 1 \times k + 1$, para $k = 3, \dots, N$.

Para $k = 2$ y $k = 1$,

$$\mathbf{R}_p^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00}^2 & \mathbf{B}_{01}^2 & \mathbf{B}_{02}^2 \\ \mathbf{B}_{10}^2 & \mathbf{A}_{11}^2 & \mathbf{B}_{12}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{21}^2 & \mathbf{B}_{22}^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_p^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00}^1 & \mathbf{B}_{01}^1 \\ \mathbf{B}_{10}^1 & \mathbf{B}_{11}^1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado se tiene

$$\mathbf{R}_s^k = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^k & \mathbf{D}_{01}^k & \mathbf{D}_{02}^k & \mathbf{D}_{03}^k & \cdots & \mathbf{D}_{0k-3}^k & \mathbf{D}_{0k-2}^k & \mathbf{D}_{0k-1}^k \\ \mathbf{D}_{10}^k & \mathbf{C}_{11}^k & \mathbf{C}_{12}^k & \mathbf{C}_{13}^k & \cdots & \mathbf{C}_{1k-3}^k & \mathbf{C}_{1k-2}^k & \mathbf{D}_{1k-1}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{21}^k & \mathbf{C}_{22}^k & \mathbf{C}_{23}^k & \cdots & \mathbf{C}_{2k-3}^k & \mathbf{C}_{2k-2}^k & \mathbf{D}_{2k-1}^k \\ & & & & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{k-2k-3}^k & \mathbf{C}_{k-2k-2}^k & \mathbf{D}_{k-2k-1}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{k-1k-2}^k & \mathbf{D}_{k-1k-1}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

de dimensión $k + 1 \times k$, para $k = 3, \dots, N$.

Para $k = 2$ y $k = 1$ se tiene,

$$\mathbf{R}_s^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^2 & \mathbf{D}_{01}^2 \\ \mathbf{D}_{10}^2 & \mathbf{D}_{11}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_s^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{A}_{ij}^k y \mathbf{B}_{ij}^k contienen las probabilidades de que hayan k unidades en el sistema, de las cuales i están en reparación, y en el instante siguiente, hay el mismo número de unidades en el sistema y j de ellas están en reparación. Por otro lado, \mathbf{C}_{ij}^k y \mathbf{D}_{ij}^k contienen las probabilidades de que haya k unidades en el sistema de las cuales, i están en reparación y en el instante siguiente, ocurre un fallo no reparable y hay j unidades en reparación.

Con el fin de obtener los bloques de las transiciones de la matriz de probabilidades de transición de forma ordenada y clara, definiremos las siguientes funciones.

La función $\mathbf{C}(\cdot)$ calcula las probabilidades de transición entre los estados de las unidades en reserva cuando hay i unidades no operativas en el sistema y ocurren $j - i$ fallos de las unidades en reserva (j unidades rotas al final de una etapa). Las posiciones de las unidades que fallan vienen dadas por los ordinales k_1, \dots, k_{j-i} . Esta función tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{C}(k; i, j; k_1, \dots, k_{j-i}) = \mathbf{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{M}_{k-i-1},$$

donde $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}^0$ si $h = k_1, \dots, k_{j-i}$ y $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}$ en otro caso, para $i = 0, \dots, k - 2$ y $j = i + 1, \dots, k - 1$.

Las transiciones entre las fases de las unidades en reserva cuando ninguna de ellas sufre fallo (si existen $k - i$ unidades operativas), se define como,

$$\mathbf{C}(k; i, i) = \mathbf{M} \otimes \overset{k-i-1}{\cdots} \otimes \mathbf{M} \quad \text{para } i = 0, \dots, k - 2.$$

A partir de las funciones ya definidas, podemos calcular la transición entre las fases de las unidades en reserva cuando hay i unidades rotas en el sistema y en el siguiente paso ocurren $j - i$ fallos de las unidades en reserva (la unidad principal continúa trabajando). Esto es,

$$\mathbf{H}(k; i, j) = \sum_{k_1=1}^{k-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{k-j+1} \cdots \sum_{k_{j-i}=k_{j-i}+1}^{k-i-1} \mathbf{C}(k; i, j; k_1, \dots, k_{j-i}), \quad \text{para } j - i \geq 1.$$

De forma análoga, definiremos funciones con el fin de calcular las transiciones entre las fases de las unidades en reserva cuando hay i unidades en reparación y la unidad principal y $j - i - 1$ unidades de la reserva fallan (j unidades rotas al final de la etapa). En primer lugar, definimos la función $\mathbf{C}'(\cdot)$ como

$$\mathbf{C}'(k; i, j; s, k_1, \dots, k_{j-i-1}) = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{k-i-1},$$

donde $\mathbf{D}_h = \mathbf{M}^0$ si $h = k_1, \dots, k_{j-i-1}$; $\mathbf{D}_h = (\mathbf{e} - \mathbf{M}^0) \nu(k; s; k_1, \dots, k_{j-i-1})$ si $h = s$ y $\mathbf{D}_h = \mathbf{M}$ en otro caso, para $i = 0, \dots, k - 1$ y $j = i + 2, \dots, k - 1$.

Cuando $j = i + 1$, ninguna de las unidades de la reserva sufre fallo y la función anterior viene dada por

$$\mathbf{C}'(k; i, j; s, k_0) = \mathbf{C}'(k; i, j; s) = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{k-i-1},$$

siendo en este caso $\mathbf{D}_h = (\mathbf{e} - \mathbf{M}^0) \nu(k; s)$ si $h = s$ y $\mathbf{D}_h = \mathbf{M}$ en otro caso.

La función $\mathbf{C}'(\cdot)$ muestra las transiciones entre los estados de las unidades en reserva cuando están en reparación i unidades, y en el siguiente paso, fallan la unidad principal y $j - i - 1$ de las unidades en reserva. En este caso, el número total de productos kronecker es igual al número de unidades operativas inicial menos uno, esto es, $k - i - 1$.

El parámetro s indica la posición de la unidad en reserva que reemplaza a la unidad principal fallida. Esta unidad de la reserva se encuentra trabajando cuando ocurre el fallo, $\mathbf{e} - \mathbf{M}^0$, y $\nu(k; s; k_1, \dots, k_{j-i-1})$ es el peso para esta unidad que sustituye a la unidad principal. Este peso depende de las unidades rotas. Si $j = i + 1$, el peso es $\nu(k; s)$. Dado que $\nu(\cdot)$ es un peso, se tiene

$$\sum_{s=1}^{k-i-1} \nu(k; s; k_1, \dots, k_{j-i-1}) = 1,$$

y para $j = i + 1$,

$$\sum_{s=1}^{k-i-1} \nu(s) = 1.$$

A continuación calcularemos, a partir de las funciones descritas, las transiciones entre los estados de las unidades en reserva cuando hay i unidades en reparación y, en el siguiente paso, la unidad principal y $j - i - 1$ unidades de la reserva fallan. Lo calcularemos para $j - i \geq 1$. Estas transiciones vienen dadas por la función $\mathbf{F}(\cdot, \cdot)$ como sigue

$$\mathbf{F}(k; i, j) = \sum_{k_1=1}^{k-j} \sum_{k_2=k_1+1}^{k-j+1} \dots \sum_{k_{j-1}=k_{j-1}+1}^{k-i-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k_h \\ h=1, \dots, j-i}}^{k-i-1} \mathbf{C}'(k; i, j; s, k_1, \dots, k_{j-i-1}).$$

Una vez definidas las funciones necesarias, pasaremos a analizar la estructura de cada uno de los bloques que componen la matriz \mathbf{P} .

Matriz \mathbf{R}_p^k

Bloque \mathbf{B}_{00}^k

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre las fases cuando hay k unidades en el sistema y ninguna de ellas está en reparación.

$$\mathbf{B}_{00}^k = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}(k; 0, 0), \quad k \geq 3,$$

$$\mathbf{B}_{00}^2 = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{M},$$

$$\mathbf{B}_{00}^1 = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L}.$$

Bloque \mathbf{B}_{0j}^k

En este caso, hay k unidades en el sistema, todas ellas operativas, y ocurren j fallos reparables. Esto puede ocurrir porque, o bien la unidad principal sufre un fallo reparable y $j - 1$ reservas fallan, o bien porque fallen j unidades de la reserva. En el primero de los casos, si hay unidades en reserva, una de ellas ocupa el lugar de la unidad principal con distribución inicial α y el fallo accidental se inicial con probabilidad γ .

$$\mathbf{B}_{01}^k = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{C}(k; 0, 0) \otimes \beta + \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{H}(k; 0, 1) \otimes \beta, \quad k \geq 3,$$

$$\mathbf{B}_{01}^1 = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \beta,$$

$$\mathbf{B}_{01}^2 = [(\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{M}^0) + \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{M}^0] \otimes \beta,$$

$$\mathbf{B}_{0j}^k = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{F}(k; 0, j) \otimes \beta + \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{H}(k; 0, j) \otimes \beta,$$

$$\text{para } j = 1, \dots, k - 1, \quad k \geq 3,$$

$$\mathbf{B}_{0k}^k = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{H}(k; 0, k - 1) \otimes \beta, \quad k \geq 3,$$

$$\mathbf{B}_{02}^2 = (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \beta.$$

Bloque \mathbf{B}_{10}^k

Para este caso tendremos en cuenta que hay k unidades en el sistema con una de ellas en reparación, y en el siguiente paso esta unidad es reparada. Las transiciones de la unidad principal están gobernadas por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{L}$, la unidad reparada (\mathbf{S}^0) entra a formar parte de la reserva con distribución inicial η , y el resto de unidades de la reserva pueden sufrir transiciones sin fallo, gobernadas por $\mathbf{C}(k; 1, 1)$. De esta forma obtenemos,

$$\mathbf{B}_{10}^k = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{C}(k; 1, 1) \otimes \mathbf{S}^0, \quad k \geq 3,$$

$$\mathbf{B}_{10}^2 = \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{S}^0,$$

$$\mathbf{B}_{10}^1 = \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0.$$

Bloques \mathbf{A}_{ii}^k y \mathbf{B}_{kk}^k .

La matriz de transición entre las fases que parten del macro-estado E_i^k y terminan en el mismo macro-estado viene dada por las matrices \mathbf{A}_{ii}^k y \mathbf{B}_{kk}^k respectivamente. Estos casos ocurren cuando ninguna unidad se rompe y, o bien una unidad de la reserva falla y una reparación se completa, o bien la unidad principal falla y una reparación se completa. Por tanto se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ii}^i &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{C}(k; i, i) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{H}(k; i, i+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta \\ &\quad + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \eta \otimes \mathbf{F}(k; i, i+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ &\text{para } i = 1, \dots, k-2; \quad k \geq 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k-1k-1}^k &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{A}_{11}^2 &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{B}_{kk}^k &= \mathbf{S}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Bloques \mathbf{A}_{ij}^k ($j > i$) y \mathbf{B}_{ik}^k

La matriz de transición entre las fases que van desde el macro-estado E_i^k hasta el macro-estado E_j^k viene dada por los bloques \mathbf{A}_{ij}^k ($j > i$) y \mathbf{B}_{ik}^k , respectivamente. A continuación analizaremos el caso de la matriz \mathbf{A}_{ij}^k y la matriz \mathbf{B}_{ik}^k la obtendremos de forma análoga.

El suceso gobernado por la matriz \mathbf{A}_{ij}^k puede darse a partir de diferentes situaciones; (1) la unidad principal no falla, fallan $j - i$ unidades de la reserva y no se produce reparación; (2) la unidad principal sufre un fallo accidental reparable, fallan $j - i - 1$ unidades de la reserva y no se produce reparación; (3) la unidad principal no falla, fallan $j - i + 1$ unidades de la reserva y se produce una reparación. Finalmente, el caso (4) contemplaría un fallo accidental reparable de la unidad principal, $j - i$ fallos de las unidades en reserva y ninguna reparación es completada. A partir de este análisis obtenemos,

para $i = 1, \dots, k-2; \quad j = i+1, \dots, k-2; \quad k \geq 4$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^k &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{H}(k; i, j) \otimes \mathbf{S} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{F}(k; i, j) \otimes \mathbf{S} \\ &\quad + \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{H}(k; i, j+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta \\ &\quad + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \eta \otimes \mathbf{F}(k; i, j+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, k-2; \quad k \geq 3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ik-1}^k &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{H}(k; i, k-1) \otimes \mathbf{S} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{F}(k; i, k-1) \otimes \mathbf{S} \\ &\quad + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_r^0 \gamma \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \overset{k-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, k-2$, $k \geq 3$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ik}^k &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \overset{k-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}, \\ \mathbf{B}_{k-1k}^k &= (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Bloques \mathbf{A}_{ii-1}^k y \mathbf{B}_{kk-1}^k

La matriz de transición entre las fases que van desde el macro-estado E_i^k hasta el macro-estado E_{i-1}^k viene dada por las matrices \mathbf{A}_{ii-1}^k y \mathbf{B}_{kk-1}^k , respectivamente. Analizaremos a continuación el caso de la matriz \mathbf{A}_{ii-1}^k y la expresión de \mathbf{B}_{kk-1}^k la obtendremos de forma análoga.

Los sucesos que rige la matriz \mathbf{A}_{ii-1}^k ocurren cuando no ocurre ningún fallo y se completa una reparación. De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ii-1}^k &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{C}(k; i, i) \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \quad i = 2, \dots, k-2, \quad k \geq 4, \\ \mathbf{A}_{k-1k-2}^k &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{A}_{21}^k &= \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \\ \mathbf{B}_{kk-1}^k &= \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0 \beta, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{B}_{10}^2 &= \mathbf{T} \otimes \mathbf{L} \otimes \eta \otimes \mathbf{S}^0, \\ \mathbf{B}_{10}^1 &= \alpha \otimes \gamma \otimes \mathbf{S}^0. \end{aligned}$$

Matriz \mathbf{R}_s^k

Bloque \mathbf{D}_{00}^k

Esta matriz contiene las probabilidades de transición entre los macro-estados E_0^k y E_0^{k-1} . El sistema se encuentra trabajando con k unidades, ninguna de ellas en reparación, y la unidad principal sufre un fallo no reparable. Así se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{00}^k &= [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma) + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \mathbf{F}(k; 0, 1), \quad k \geq 3, \\ \mathbf{D}_{00}^2 &= [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes (\mathbf{e} - \mathbf{M}^0). \end{aligned}$$

El caso \mathbf{D}_{00}^1 presenta diferencias con el resto de bloques. En este caso el sistema está compuesto por una unidad que no se encuentra en reparación. En el instante siguiente la unidad sufre un fallo no reparable y el sistema se reinicia. Se tiene pues,

$$\mathbf{D}_{00}^1 = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes \mathbf{e} \gamma + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \eta \otimes \overset{N-1}{\dots} \otimes \eta.$$

Bloque \mathbf{D}_{0j}^k

En este caso hay k unidades en el sistema, todas ellas operativas, y en el instante siguiente la unidad principal sufre un fallo no reparable y fallan i unidades de la reserva. El fallo no reparable puede ser debido al desgaste o a un fallo accidental no reparable. Las expresiones de estos bloques vienen dadas por,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{0j}^k &= [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma) + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \mathbf{F}(k; 0, j + 1) \otimes \beta, \\ &\text{para } j = 1, \dots, k - 2, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{D}_{0k-1}^k &= [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \otimes \mathbf{H}(k; 0, k) \otimes \beta, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{D}_{01}^2 &= [(\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 + \mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}] \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \beta. \end{aligned}$$

Bloque \mathbf{D}_{10}^k

Tenemos k unidades en el sistema, una en reparación, se produce la reparación de esta unidad y la unidad principal falla en el instante siguiente. Las transiciones de la unidad principal vienen dadas por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{L}$, la unidad reparada, \mathbf{S}^0 , entra a formar parte de la reserva con distribución inicial η , y el resto de unidades en reserva pueden sufrir transición sin fallo, esto es, $\mathbf{F}(k; 1, 2)$. Los bloques vienen dados por,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{10}^k &= [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma) + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \eta \otimes \mathbf{F}(k; 1, 2) \otimes \mathbf{S}^0; \quad k \geq 3, \\ \mathbf{D}_{10}^2 &= [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \mathbf{S}^0. \end{aligned}$$

Bloques \mathbf{C}_{ii}^k y $\mathbf{D}_{k-1, k-1}^k$

La matriz de transición entre las fases desde el macro-estado E_i^k al macro-estado E_i^{k-1} viene dada por la matriz \mathbf{C}_{ii}^k para $i = 1, \dots, k - 2$ y $\mathbf{D}_{k-1, k-1}^k$. Este suceso ocurre cuando la unidad principal sufre fallo no reparable y, o bien ninguna unidad de la reserva falla y no se completa reparación alguna, o bien falla una unidad de la reserva y se completa una reparación. La expresión de los bloques es,

$$\mathbf{C}_{ii}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \\ \otimes [\mathbf{F}(k; i, i+1) \otimes \mathbf{S} + \eta \otimes \mathbf{F}(k; i, i+2) \otimes \mathbf{S}^0 \beta],$$

para $i = 1, \dots, k-3$ y $k \geq 4$,

$$\mathbf{C}_{k-2k-2}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \\ \otimes [\mathbf{F}(k; k-2, k-1) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}^0 \beta],$$

para $k \geq 3$

$$\mathbf{D}_{k-1, k-1}^k = [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \otimes \mathbf{S}, \quad k \geq 3, \\ \mathbf{D}_{11}^2 = [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \otimes \mathbf{S}.$$

Bloques \mathbf{C}_{ij}^k ($j > i$) y $\mathbf{D}_{i, k-1}^k$

La matriz de transición entre las fases desde el macro-estado E_i^k al macro-estado E_j^{k-1} viene dada por las matrices \mathbf{C}_{ij}^k y $\mathbf{D}_{i, k-1}^k$. Analizaremos a continuación el caso de la matriz \mathbf{C}_{ij}^k y, de forma análoga deduciremos la expresión de $\mathbf{D}_{i, k-1}^k$. El bloque \mathbf{C}_{ij}^k rige las siguientes situaciones: (1): la unidad principal sufre un fallo no reparable, fallan $j-i$ unidades de la reserva y no se produce reparación; (2): la unidad principal sufre un fallo no reparable, fallan $j-i+1$ unidades de la reserva y se completa una reparación. De aquí se tiene,

$$\mathbf{C}_{ij}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \\ \otimes [\mathbf{F}(k; i, j+1) \otimes \mathbf{S} + \eta \otimes \mathbf{F}(k; i, j+2) \otimes \mathbf{S}^0 \beta],$$

para $i = 1, \dots, k-4$; $j = i+1, \dots, k-3$; $k \geq 5$,

$$\mathbf{C}_{i, k-2}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \\ \otimes [\mathbf{F}(k; i, k-1) \otimes \mathbf{S} + \mathbf{M}^0 \otimes \overset{k-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S}^0 \beta],$$

para $i = 1, \dots, k-3$; $k \geq 4$,

$$\mathbf{D}_{i, k-1}^k = [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e} - \mathbf{T}^0) \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \overset{k-i-1}{\dots} \otimes \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{S},$$

para $i = 1, \dots, k-2$; $k \geq 3$.

Bloques \mathbf{C}_{ii-1}^k y $\mathbf{D}_{k-1,k-2}^k$

La matriz de transición entre las fases desde el macro-estado E_i^k al macro-estado E_{i-1}^{k-1} viene dada por las matrices \mathbf{C}_{ii-1}^k y $\mathbf{D}_{k-1,k-2}^k$. Al igual que en los casos anteriores, realizaremos la descripción de la construcción de \mathbf{C}_{ii-1}^k y la de $\mathbf{D}_{k-1,k-2}^k$ la obtendremos por analogía. El bloque \mathbf{C}_{ii-1}^k rige el suceso en el que la unidad principal sufre un fallo no reparable, las reservas no sufren fallo y se completa la reparación de una unidad. De este modo,

$$\mathbf{C}_{i,i-1}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \eta \otimes \mathbf{F}(k; i, i+1) \otimes \mathbf{S}^0 \beta,$$

para $i = 2, \dots, k-2$; $k \geq 4$

$$\mathbf{D}_{k-1,k-2}^k = [\mathbf{T}^0 \alpha \otimes (\mathbf{L} + \mathbf{L}_r^0 \gamma) + \mathbf{e} \alpha \otimes \mathbf{L}_{nr}^0 \gamma] \otimes \mathbf{S}^0 \beta; \quad k \geq 3$$

5.3. Distribución estacionaria

Esta sección la dedicaremos a calcular la distribución estacionaria. Para ello, consideramos el modelo descrito en la sección anterior con matriz de probabilidades de transición \mathbf{P} . Consideraremos el vector de distribución estacionaria $\pi = (\pi^N, \pi^{N-1}, \pi^{N-2}, \dots, \pi^1)$, donde π^k es a su vez un vector cuyo elemento j , π_j^k , es la probabilidad de que haya k unidades operando en el sistema con j de ellas en reparación, para $j = 0, \dots, k$ y $k = 1, \dots, N$.

La distribución estacionaria verifica la ecuación $\pi \mathbf{P} = \pi$ con la condición de normalización $\pi \mathbf{e} = 1$, siendo \mathbf{e} el vector columna de unos de orden adecuado. A partir de la expresión del vector π y de la matriz \mathbf{P} , el sistema de ecuaciones anterior puede expresarse como sigue

$$\pi^N \mathbf{R}_p^N + \pi^1 \mathbf{R}_s^1 = \pi^N, \quad (5.2)$$

$$\pi^{k-1} \mathbf{R}_p^{k-1} + \pi^k \mathbf{R}_s^k = \pi^{k-1}; \quad k = 2, \dots, N. \quad (5.3)$$

En lo que sigue, consideraremos $\mathbf{A}_{0j}^k = \mathbf{B}_{0j}^k$, $\mathbf{A}_{10}^k = \mathbf{B}_{10}^k$, $\mathbf{A}_{jk}^k = \mathbf{B}_{jk}^k$, $\mathbf{A}_{kk-1}^k = \mathbf{B}_{k,k-1}^k$ para $j = 0, \dots, k$ y $k = 1, \dots, N$ y, por otro lado, $\mathbf{C}_{10}^k = \mathbf{D}_{10}^k$, $\mathbf{C}_{0j}^k = \mathbf{D}_{0j}^k$, $\mathbf{C}_{j,k-1}^k = \mathbf{D}_{j,k-1}^k$, $\mathbf{C}_{k-1,k-2}^k = \mathbf{D}_{k-1,k-2}^k$, para $j = 0, \dots, k-1$ y $k = 1, \dots, N$.

Considerando (5.2) y los bloques definidos en el párrafo anterior obtenemos,

$$\sum_{r=0}^{\min\{j+1, N\}} \pi_r^N \mathbf{A}_{rj}^N + \pi_0^1 \mathbf{C}_{00}^1 \delta_{1j} = \pi_j^N; \quad j = 0, \dots, N, \quad (5.4)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker.

De forma análoga obtenemos, considerando (5.3),

$$\sum_{r=0}^{\min\{j+1, k-1\}} \pi_r^{k-1} \mathbf{A}_{rj}^{k-1} + \sum_{r=0}^{\min\{j+1, k-1\}} \pi_r^k \mathbf{C}_{rj}^k = \pi_j^{k-1}; \quad j = 0, \dots, k-1. \quad (5.5)$$

Las ecuaciones dadas en (5.4) pueden expresarse como,

$$\begin{aligned} \pi_0^N &= \pi_0^N \mathbf{A}_{00}^N + \pi_1^N \mathbf{A}_{10}^N + \pi_0^1 \mathbf{C}_{00}^1 \\ \pi_1^N &= \pi_0^N \mathbf{A}_{01}^N + \pi_1^N \mathbf{A}_{11}^N + \pi_2^N \mathbf{A}_{21}^N \\ \pi_2^N &= \pi_0^N \mathbf{A}_{02}^N + \pi_1^N \mathbf{A}_{12}^N + \pi_2^N \mathbf{A}_{22}^N + \pi_3^N \mathbf{A}_{32}^N \\ &\dots \\ \pi_{N-1}^N &= \pi_0^N \mathbf{A}_{0, N-1}^N + \pi_1^N \mathbf{A}_{1, N-1}^N + \pi_2^N \mathbf{A}_{2, N-1}^N + \dots + \\ &\quad + \pi_{N-1}^N \mathbf{A}_{N-1, N-1}^N + \pi_N^N \mathbf{A}_{N, N-1}^N \\ \pi_N^N &= \pi_0^N \mathbf{A}_{0, N}^N + \pi_1^N \mathbf{A}_{1, N}^N + \pi_2^N \mathbf{A}_{2, N}^N + \dots + \pi_{N-1}^N \mathbf{A}_{N-1, N}^N + \pi_N^N \mathbf{A}_{N, N}^N. \end{aligned}$$

En forma recursiva obtenemos que

$$\pi_j^N = \pi_0^1 \mathbf{W}_j^N; \quad j = 0, \dots, N,$$

con

$$\mathbf{W}_j^N = \mathbf{R}_{0j}^N + \sum_{k=j+1}^N \left[\mathbf{R}_{0k}^N \prod_{i=j+1}^k \mathbf{R}_{k+j-i+1, k+j-i} \right],$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j^N &= \left[\mathbf{I} - \sum_{i=0}^{j-1} \left[\prod_{k=0}^i \mathbf{R}_{j-k, j-k-1} \right] \mathbf{A}_{j-i-1, j}^N - \mathbf{A}_{jj}^N \right]^{-1}; \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ \mathbf{R}_{j, j-1}^N &= \mathbf{A}_{j, j-1}^N \mathbf{R}_{j-1}^N; \quad j = 1, \dots, N, \\ \mathbf{R}_{0j}^N &= \left[\sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{R}_{0i}^N \left(\mathbf{A}_{ij}^N + \sum_{r=0}^{i-1} \left[\prod_{k=0}^r \mathbf{R}_{i-k, i-k-1} \right] \mathbf{A}_{i-r-1, j}^N \right) \right] \mathbf{R}_j^N; \\ &\quad \text{para } j = 1, \dots, N, \\ \mathbf{R}_{00}^N &= \mathbf{C}_{00}^1 \mathbf{R}_0^N. \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (5.5), obtenemos las siguientes ecuaciones, para $k = 2, \dots, N$

$$\begin{aligned}
\pi_0^{k-1} &= \pi_0^{k-1} \mathbf{A}_{00}^{k-1} + \pi_1^{k-1} \mathbf{A}_{10}^{k-1} + \pi_0^k \mathbf{C}_{00}^k + \pi_1^k \mathbf{C}_{10}^k \\
\pi_1^{k-1} &= \pi_0^{k-1} \mathbf{A}_{01}^{k-1} + \pi_1^{k-1} \mathbf{A}_{11}^{k-1} + \pi_2^{k-1} \mathbf{A}_{21}^{k-1} + \pi_0^k \mathbf{C}_{01}^k + \pi_1^k \mathbf{C}_{11}^k + \pi_2^k \mathbf{C}_{21}^k \\
&\dots \\
\pi_{k-2}^{k-1} &= \pi_0^{k-1} \mathbf{A}_{0,k-2}^{k-1} + \pi_1^{k-1} \mathbf{A}_{1,k-2}^{k-1} + \pi_2^{k-1} \mathbf{A}_{2,k-2}^{k-1} + \dots + \\
&\quad + \pi_{k-1}^{k-1} \mathbf{A}_{k-1,k-2}^{k-1} + \pi_0^k \mathbf{C}_{0,k-2}^k + \pi_1^k \mathbf{C}_{1,k-2}^k + \pi_2^k \mathbf{C}_{2,k-2}^k + \dots \\
&\quad + \pi_{k-1}^k \mathbf{C}_{k-1,k-2}^k \\
\pi_{k-1}^{k-1} &= \pi_0^{k-1} \mathbf{A}_{0,k-1}^{k-1} + \pi_1^{k-1} \mathbf{A}_{1,k-1}^{k-1} + \pi_2^{k-1} \mathbf{A}_{2,k-1}^{k-1} + \dots + \\
&\quad + \pi_{k-1}^{k-1} \mathbf{A}_{k-1,k-1}^{k-1} + \pi_0^k \mathbf{C}_{0,k-1}^k + \pi_1^k \mathbf{C}_{1,k-1}^k + \pi_2^k \mathbf{C}_{2,k-1}^k \\
&\quad + \dots + \pi_{k-1}^k \mathbf{C}_{k-1,k-1}^k.
\end{aligned}$$

En forma recursiva, dado que π^N ya es conocido, podemos calcular las siguientes expresiones, para $r = 1, \dots, N - 1$

$$\pi_j^r = \pi_0^1 \mathbf{W}_j^r; \quad j = 0, \dots, r,$$

con

$$\mathbf{W}_j^r = \mathbf{H}_j^r + \sum_{k=j+1}^r \mathbf{H}_k^r \prod_{i=j+1}^k \mathbf{R}_{k+j-i+1, k+j-i},$$

donde

$$\mathbf{R}_j^r = \begin{cases} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=0}^{j-1} \prod_{s=0}^i \mathbf{R}_{j-s, j-s-1}^r \mathbf{A}_{j-i-1, j}^r - \mathbf{A}_{jj}^r \right]^{-1} & ; \quad j = 0, 1, \dots, r \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11}^1)^{-1} & ; \quad r = 1; j = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_{j,j-1}^r = \mathbf{A}_{j,j-1}^r \mathbf{R}_{j-1}^r; \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\mathbf{H}_j^r = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{\min\{r, j+1\}} \mathbf{W}_i^{r+1} \mathbf{C}_{ij}^{r+1} + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{H}_i^r \mathbf{A}_{ij}^r \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{H}_i^r \right] & ; \quad j = 0, 1, \dots, r \\ \left. \sum_{t=0}^{i-1} \left[\prod_{s=0}^t \mathbf{R}_{i-s, i-s-1}^j \right] \mathbf{A}_{i-t-1, j}^r \right] \mathbf{R}_j^r & ; \quad (j, r) \neq (1, 1) \\ (\mathbf{W}_0^2 \mathbf{C}_{01}^2 + \mathbf{W}_1^2 \mathbf{C}_{11}^2 + \mathbf{A}_{01}^1) \mathbf{R}_1^1 & ; \quad j = 1; r = 1. \end{cases}$$

Finalmente, π_0^1 lo calculamos a partir de la condición de normalización. Este puede expresarse como

$$\sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^r \pi_j^r \mathbf{e} = \pi_0^1 \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^r \mathbf{W}_j^r \mathbf{e} = 1.$$

La primera ecuación de (5.5) para $k = 2$ puede expresarse del siguiente modo

$$\pi_0^1 [\mathbf{W}_0^2 \mathbf{C}_{00}^2 + \mathbf{W}_1^2 \mathbf{C}_{10}^2 + \mathbf{A}_{00}^1 + \mathbf{W}_1^1 \mathbf{A}_{10}^1 - \mathbf{I}] = 0.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \pi_0^1 [\mathbf{W}_0^2 \mathbf{C}_{00}^2 + \mathbf{W}_1^2 \mathbf{C}_{10}^2 + \mathbf{A}_{00}^1 + \mathbf{W}_1^1 \mathbf{A}_{10}^1 - \mathbf{I}] &= 0, \\ \pi_0^1 \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^r \mathbf{W}_j^r \mathbf{e} &= 1. \end{aligned}$$

Y así, finalmente obtenemos la expresión de π_0^1 como sigue,

$$\pi_0^1 = (0, 1) \left([\mathbf{W}_0^2 \mathbf{C}_{00}^2 + \mathbf{W}_1^2 \mathbf{C}_{10}^2 + \mathbf{A}_{00}^1 + \mathbf{W}_1^1 \mathbf{A}_{10}^1 - \mathbf{I}]^* \left| \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^r \mathbf{W}_j^r \mathbf{e} \right. \right)^{-1},$$

donde \mathbf{B}^* denota la matriz \mathbf{B} sin la primera columna, existiendo su inversa.

Algoritmo. Cálculo de la distribución estacionaria

ENTRADAS: Matrices \mathbf{A}_{ij}^r y \mathbf{C}_{ij}^r descritas en la sección 5.2.2.

SALIDA: La distribución estacionaria π .

CÁLCULO

1. Calcular la matriz \mathbf{R}_0^N .
2. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{R}_{j,j-1}^N, j = 1, \dots, N\}$ y $\{\mathbf{R}_j^N, j = 1, \dots, N\}$.

3. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{R}_{0,j}^N, j = 1, \dots, N\}$.
4. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{W}_j^N, j = 1, \dots, N\}$.
5. Para $r = N - 1$ hasta 1
 - a. Calcular la matriz \mathbf{R}_0^r .
 - b. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{R}_{j,j-1}^r, j = 1, \dots, r\}$ y $\{\mathbf{R}_j^r, j = 1, \dots, r\}$.
 - c. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{H}_j^r, j = 0, \dots, r\}$.
6. Calcular la sucesión de matrices $\{\mathbf{W}_j^r, j = 1, \dots, r\}$.
7. Calcular la distribución de $\pi = (\pi^N, \pi^{N-1}, \pi^{N-2}, \dots, \pi^1)$.

5.4. Periodo de funcionamiento

El periodo de funcionamiento de un sistema de fiabilidad admite varias definiciones, todas ellas equivalentes. En capítulos anteriores hemos considerado el periodo de funcionamiento como el periodo que indica el número de etapas desde el punto en el que todas las unidades están no operativas y una reparación se completa, hasta el instante en el que todas las unidades vuelven a estar no operativas por primera vez. Por tanto, este periodo finaliza cuando el reparador queda libre por primera vez después de un periodo ocupado. Dadas las características del sistema que nos ocupa en este capítulo, definiremos el periodo de funcionamiento en este caso, como el periodo de tiempo desde el punto en el que el sistema está operativo sin unidades en reparación, hasta el punto en el que el sistema se encuentra no operativo por primera vez. Esto puede ocurrir por dos motivos; o bien porque las N unidades del sistema fallan, todas ellas sufren un fallo total no reparable; o bien porque algunas de ellas estén rotas y otras se encuentren en el canal de reparación durante cierto tiempo.

Para calcular la función de distribución de este periodo aleatorio, consideramos un sistema con N unidades y vector inicial igual a

$$\omega = \left(\alpha \otimes \gamma \otimes \eta \otimes \overset{N-1}{\dots} \otimes \eta, \mathbf{0} \right).$$

La función de distribución del periodo de funcionamiento para el primer caso descrito se distribuye tipo fase con representación (ω, \mathbf{P}^*) , donde la matriz \mathbf{P}^* es igual a

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_p^N & \mathbf{R}_s^N & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p^{N-1} & \mathbf{R}_s^{N-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_p^2 & \mathbf{R}_s^2 \\ & & & & \mathbf{R}_p^1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Para el segundo caso descrito (todas las unidades se encuentran no operativas, indistintamente del número de unidades presentes en el sistema), teniendo en cuenta los macro-estados, la distribución de este tiempo es también tipo fase con representación (ω, \mathbf{P}') , donde la matriz \mathbf{P}' es igual a

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_p^K & \mathbf{R}'_s^K & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_p^{K-1} & \mathbf{R}'_s^{K-1} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{R}'_p^2 & \mathbf{R}'_s^2 \\ & & & & & & \mathbf{R}'_p^1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

donde las matrices \mathbf{R}'_p^k y \mathbf{R}'_s^k son los bloques \mathbf{R}_p^k y \mathbf{R}_s^k , respectivamente, con las últimas q filas y columnas eliminadas.

Se tiene por tanto que el tiempo medio hasta que ocurre el fallo del sistema, por cualquier motivo, viene dado por,

$$\omega (\mathbf{I} - \mathbf{P}')^{-1} \mathbf{e}. \quad (5.8)$$

Por otro lado, el tiempo medio hasta que no quedan unidades en el sistema es,

$$\omega \mathbf{N} \mathbf{e} = \omega (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{e}. \quad (5.9)$$

Dado que las dimensiones de las matrices \mathbf{P}' y \mathbf{P}^* son muy grandes, dificultan en gran medida los cálculos en los que se ven involucradas dichas matrices. Para solventar este inconveniente, emplearemos un método algorítmico utilizando la Factorización RG dada en Li y Cao (2004)[16] que permite la descomposición, y por tanto, la simplificación de los cálculos con dichas matrices. Este método lo desarrollamos en el Apéndice A del presente capítulo.

5.5. Probabilidades de transición, disponibilidad y probabilidades condicionadas de fallo

En esta sección obtendremos algunas medidas de especial interés en el estudio de la fiabilidad de sistemas. La disponibilidad y la probabilidad condicionada de fallo reparable y no reparable, son algunas de estas medidas que calcularemos para el sistema que hemos analizado a lo largo del capítulo. Las calcularemos de forma algebraica y algorítmica. Realizaremos además su análisis en régimen

transitorio y estacionario. Cuando consideremos el régimen transitorio, las probabilidades de transición jugarán un papel esencial. Veremos cómo pueden ser calculadas éstas de forma algorítmica considerando los bloques de las matrices que hemos obtenido en secciones anteriores. Del mismo modo, podemos calcular las probabilidades de transición a través de las matrices de menor orden. Este cálculo lo desarrollaremos en el apéndice B.

5.5.1. Probabilidades de transición

Podemos calcular las probabilidades de transición a partir de la matriz dada en (5.1). Si la distribución inicial del sistema es $(\alpha \otimes \gamma \otimes \eta \otimes \overset{N-1}{\dots} \otimes \eta, \mathbf{0})$ y dada la estructura del espacio de estados, entonces la probabilidad de que en el instante ν el sistema esté compuesto por r unidades de las cuales s se encuentren en reparación, es igual al vector $(\alpha \otimes \gamma \otimes \eta \otimes \overset{N-1}{\dots} \otimes \eta, \mathbf{0}) \mathbf{P}^\nu$ limitado a los elementos de las fases E_j^r , para $r = 1, \dots, N$ y $j = 0, 1, \dots, r$. Denotaremos este vector mediante $p_{E_j^r}(\nu)$ y lo calcularemos de forma algorítmica en el apéndice B.

5.5.2. Disponibilidad

La disponibilidad, en régimen transitorio, se define como la probabilidad de que en cierto instante el sistema esté funcionando. En el instante ν , es igual a

$$A(\nu) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=0}^{r-1} p_{E_s^r}(\nu) \cdot \mathbf{e} = 1 - \sum_{r=1}^N p_{E_r^r}(\nu) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.10)$$

En régimen estacionario, la disponibilidad viene dado por,

$$A = \pi_0^1 \sum_{r=1}^N \sum_{s=0}^{r-1} \mathbf{W}_s^r \cdot \mathbf{e} = 1 - \pi_0^1 \sum_{r=1}^N \mathbf{W}_r^r \cdot \mathbf{e}. \quad (5.11)$$

5.5.3. Probabilidad condicionada de fallo

Calcularemos ahora algunas probabilidades condicionadas de fallo según el tipo y el número de fallos. Consideraremos que el sistema está trabajando en el instante $\kappa - 1$ y puede sufrir entonces fallos reparables o no reparables. Dado que en el instante $\kappa - 1$ el sistema está en el macro-estado E_j^r , la probabilidad de que al instante siguiente ocurran ω fallos no reparables y ν reparables la denotaremos por $f_{\omega, \nu}^{r, j}(\kappa)$. Esta probabilidad condicionada es igual a

$$f_{\omega,\nu}^{r,j}(\kappa) = \begin{cases} p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t] & ; \quad \begin{array}{l} r = 1; j = 0; \omega = 1 \\ \nu = 0 \end{array} \\ p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0] & ; \quad \begin{array}{l} r = 1; j = 0; \omega = 0 \\ \nu = 1 \end{array} \\ p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \mathbf{H}(r; j, j + \nu - 1)\mathbf{e} \\ + \mathbf{Te} \otimes \mathbf{Le} \otimes \delta_{r,j+\nu}^2] \otimes \delta_{j0} & ; \quad \begin{array}{l} r \geq j + 2; j \geq 0 \\ \omega = 0 \\ \nu = 2, \dots, r - j \end{array} \\ p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \delta_{r,j+1}^1 \\ + \mathbf{Te} \otimes \mathbf{Le} \otimes \delta_{r,j+1}^2] \otimes \delta_{j0} & ; \quad \begin{array}{l} 1 \neq r \geq j + 1 \\ j \geq 0; \omega = 0, \nu = 1 \end{array} \\ p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t + \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \\ \otimes \mathbf{H}(r; j, j + \nu)\mathbf{e} \otimes \delta_{j0} & ; \quad \begin{array}{l} r \geq j + 2; j \geq 0 \\ \omega = 1 \\ \nu = 1, \dots, r - j - 1 \end{array} \\ p_{E_j^r}(\kappa-1) \cdot [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t + \mathbf{Te} \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \\ \otimes \delta_{r,j+1}^1 \otimes \delta_{j0} & ; \quad \begin{array}{l} 1 \neq r \geq j + 1 \\ \omega = 1 \\ \nu = 0 \end{array} \end{cases} \quad (5.12)$$

siendo,

$$\delta_{j0} = \begin{cases} 1; & j = 0 \\ \mathbf{e}_q; & j > 0 \end{cases}, \quad \delta_{r,j+1}^1 = \begin{cases} 1; & r = j + 1 \\ \mathbf{C}(r; j, j)\mathbf{e}; & r > j + 1 \end{cases},$$

$$\delta_{r,j+a}^2 = \begin{cases} 0; & r = j + a \\ \mathbf{H}(r; j, j + a); & r > j + a \end{cases} \quad \text{con } a = 1, \nu.$$

El caso estacionario se obtiene cambiando $p_{E_j^r}(\kappa-1)$ por $\pi_j^r = \pi_0^1 \mathbf{W}_j^r$.

5.5.4. Probabilidad condicionada de fallo del sistema

Otra medida de interés es la probabilidad condicionada de fallo del sistema. En este caso, el sistema se encuentra trabajando en el instante $\kappa - 1$ y en el instante siguiente el sistema falla. Esto puede ocurrir cuando hay r unidades en el sistema, de las cuales j están en reparación, y en el instante siguiente ocurren ω fallos no reparables y ν fallos reparables y no ocurre reparación alguna, para $r = 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, r - 1$ con $\omega + \nu = r - j$. El caso $r = 1, j = 0, \omega = 1$ y $\nu = 0$ no lo consideraremos ya que en este caso el sistema se reinicia y no se produce fallo del sistema.

$$f s_{\omega, \nu}^{r, j}(\kappa) = \begin{cases} p_{E_j^r}(\kappa - 1) \cdot [\mathbf{T}e \otimes \mathbf{L}_r^0] & ; \quad r = 1; j = 0 \\ & ; \quad \omega = 0; \nu = 1 \\ p_{E_j^r}(\kappa - 1) \cdot \\ [\mathbf{T}e \otimes \mathbf{L}_r^0 \otimes \delta_{r, j+1}] \otimes \delta_{j0} & ; \quad 1 \neq r \geq j + 1; j \geq 0 \\ & ; \quad \omega = 0; \nu = r - j \\ p_{E_j^r}(\kappa - 1) \cdot [\mathbf{T}^0 \otimes \mathbf{e}_t + \mathbf{T}e \otimes \mathbf{L}_{nr}^0] \\ \otimes \delta_{r, j+1} \otimes \delta_{j0} & ; \quad 1 \neq r \geq j + 1; j \geq 0 \\ & ; \quad \omega = 1; \nu = r - j - 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\text{siendo } \delta_{r, j+1} = \begin{cases} 1 & ; \quad r = j + 1 \\ \mathbf{H}(r; j, r - 1) = \mathbf{M}^0 \otimes \overset{r-j-1}{\dots} \otimes \mathbf{M}^0 & ; \quad r > j + 1. \end{cases}$$

La probabilidad de que el sistema falle cuando hay r unidades en el sistema puede expresarse considerando (5.13). Así se obtiene,

$$f s^r(\kappa) = \begin{cases} f s_{0,1}^{r,0}(\kappa) & ; \quad r = 1 \\ \sum_{j=0}^{r-1} \left(f s_{0,r-j}^{r,j}(\kappa) + f s_{1,r-j-1}^{r,j}(\kappa) \right) & ; \quad r > 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

El caso $f_{1,0}^{1,0}(\kappa)$ no lo consideramos ya que si ocurre, el sistema se reinicia y no falla.

Finalmente, la probabilidad de que el sistema falle en el instante κ puede expresarse considerando (5.14) del siguiente modo,

$$f s(\kappa) = \sum_{r=1}^N f s^r(\kappa) = f s_{0,1}^{1,0}(\kappa) + \sum_{r=2}^N \sum_{j=0}^{r-1} \left(f s_{0,r-j}^{r,j}(\kappa) + f s_{1,r-j-1}^{r,j}(\kappa) \right). \quad (5.15)$$

El caso estacionario se obtiene cambiando $p_{E_j^r}(\kappa - 1)$ por $\pi_j^r = \pi_0^1 \mathbf{W}_j^r$.

5.6. Aplicación numérica

En esta sección realizaremos un análisis del sistema que ilustrará los resultados obtenidos a lo largo del capítulo. Consideraremos un sistema con cinco unidades, la unidad principal y cuatro dispuestas en reserva activa. El tiempo de vida de la unidad principal se distribuye tipo fase con representación (α, \mathbf{T})

(α, \mathbf{T})	(γ, \mathbf{L})
$\alpha = (0.2, 0.5, 0.3)$	$\gamma = (0.1, 0.4, 0.5)$
$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.29 \\ 0.35 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.28 \end{pmatrix}$	$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$
(η, \mathbf{M})	(β, \mathbf{S})
$\eta = (0.2, 0.8)$	$\beta = (1, 0)$
$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.8 \\ 0.23 & 0.75 \end{pmatrix}$	$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.99 \\ 0.05 & 0.01 \end{pmatrix}$

Tabla 5.1: Distribuciones tipo fase asociadas al modelo

con tres fases operativas; el tiempo entre dos fallos consecutivos del proceso de renovación que gobierna los fallos accidentales de todas las unidades en reserva se distribuye tipo fase con representación (γ, \mathbf{L}) , con tres fases. El tiempo de vida de todas las unidades en reserva se distribuye tipo fase con representación (η, \mathbf{M}) , con dos fases operativas. Finalmente, el tiempo de reparación se distribuye tipo fase con representación (β, \mathbf{S}) , con una fase de reparación y una fase de control. Estas distribuciones pueden verse en la tabla 5.1.

El tiempo hasta la ocurrencia de un fallo accidental se distribuye tipo fase con representación (γ, \mathbf{L}) . Este fallo accidental puede ser reparable o no reparable. Asumiremos que la reparabilidad depende del tiempo hasta el fallo. De este modo, el fallo accidental reparable o no reparable, desde cualquier fase operativa, ocurre de acuerdo con los vectores \mathbf{L}_r^0 y \mathbf{L}_{nr}^0 , respectivamente, donde

$$\mathbf{L}_r^0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{nr}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta esto, un fallo accidental no reparable puede ocurrir únicamente desde la fase 3, y ocurre con probabilidad 0.1.

La matriz de probabilidades de transición la hemos calculado considerando bloques que dependen del número de unidades y del número de unidades en reparación. En total, esta matriz tiene dimensión 757×757 . Si consideramos los bloques mencionados, hay 416 estados para cinco unidades en el sistema, 200 estados para 4 unidades en el sistema, 92 estados para 3 unidades, 38 estados para 2 unidades y 11 estados para una unidad en el sistema.

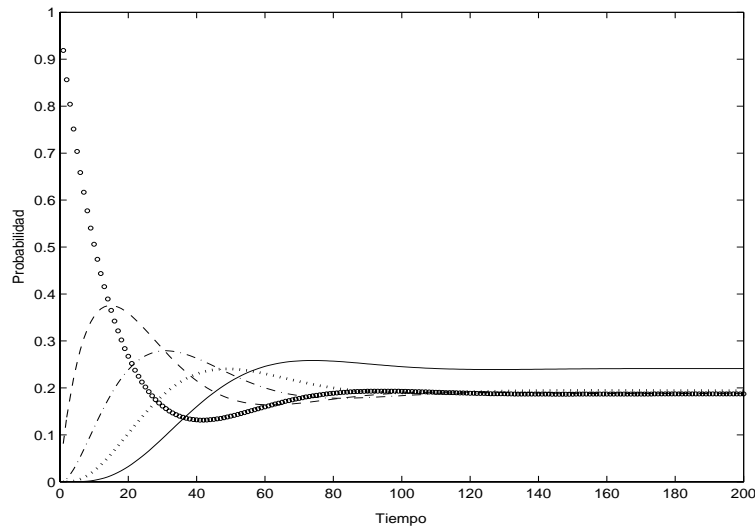


Figura 5.1: Probabilidad de tener 5 (línea de círculos), 4 (línea discontinua), 3 (línea de punto-rayas), 2 (línea de puntos) y 1 (línea continua) unidades en el sistema

El sistema no funciona cuando todas las unidades se encuentran en reparación: dos estados para el caso de cinco unidades en el sistema y otros dos estados para el caso de cuatro, tres, dos y una unidad en el sistema. En total hay 10 estados cuando el sistema no funciona.

Consideraremos que inicialmente el sistema está compuesto por unidades nuevas con distribución inicial dada en la tabla 1. La probabilidad de que un determinado número de unidades estén en el sistema y de ellas otro número determinado se encuentre en reparación en un instante dado, viene dada por las tablas 5.2 y 5.3.

En estas tablas podemos observar que las probabilidades tienden a estabilizarse de forma oscilatoria. La evolución de la probabilidad de que el sistema ocupe el macro-estado i unidades presentes en el sistema puede representarse para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Esta representación puede observarse en la figura 5.1.

Estas probabilidades tienden a su valor estacionario de forma oscilante. Este hecho puede observarse con una escala adecuada en la figura 2. En esta figura los casos 5, 4, 3 y 2 unidades en el sistema están representados desde 100 hasta 200 unidades de tiempo. Para el caso de que en el sistema haya una unidad, la situación es análoga. Los valores para este último caso son mayores que la escala de la representación. Una consecuencia de este hecho es que las medidas transitorias del sistema tienden al valor estacionario de forma oscilante.

E_s^5						
Tiempo	E_0^5	E_1^5	E_2^5	E_3^5	E_4^5	E_5^5
10	0.2633	0.1784	0.0534	0.0096	0.0011	0.0001
20	0.1391	0.0936	0.0284	0.0053	0.0007	0.0000
50	0.0819	0.0436	0.0120	0.0020	0.0002	0.0000
75	0.1073	0.0579	0.0160	0.0027	0.0003	0.0000
100	0.1112	0.0613	0.0171	0.0029	0.0003	0.0000
125	0.1084	0.0598	0.0167	0.0028	0.0003	0.0000
150	0.1077	0.0593	0.0165	0.0028	0.0003	0.0000
175	0.1080	0.0594	0.0164	0.0028	0.0003	0.0000
200	0.1081	0.0595	0.0166	0.0028	0.0003	0.0000
∞	0.1081	0.0595	0.0166	0.0028	0.0003	0.0000
E_s^4						
Tiempo	E_0^4	E_1^4	E_2^4	E_3^4	E_4^4	
10	0.2034	0.1168	0.0280	0.0038	0.0003	
20	0.2054	0.1198	0.0293	0.0041	0.0003	
50	0.1017	0.0585	0.0141	0.0019	0.0001	
75	0.0994	0.0567	0.0136	0.0018	0.0001	
100	0.1093	0.0625	0.0150	0.0020	0.0001	
125	0.1101	0.0630	0.0151	0.0021	0.0001	
150	0.1089	0.0624	0.0150	0.0020	0.0001	
175	0.1088	0.0623	0.0149	0.0020	0.0001	
200	0.1089	0.0623	0.0150	0.0020	0.0001	
∞	0.1089	0.0624	0.0150	0.0020	0.0001	

Tabla 5.2: Probabilidad de ocupar el macro-estado E_s^5 y E_s^4

Tiempo	E_s^3				E_s^2		
	E_0^3	E_1^3	E_2^3	E_3^3	E_0^2	E_1^2	E_2^2
10	0.0738	0.0347	0.0063	0.0005	0.0165	0.0061	0.0006
20	0.1505	0.0733	0.0137	0.0010	0.0714	0.0284	0.0030
50	0.1441	0.0709	0.0133	0.0010	0.1653	0.0677	0.0074
75	0.1131	0.0554	0.0104	0.0008	0.1417	0.0582	0.0063
100	0.1155	0.0566	0.0106	0.0008	0.1303	0.0534	0.0058
125	0.1196	0.0586	0.0110	0.0008	0.1324	0.0542	0.0059
150	0.1195	0.0585	0.0110	0.0008	0.1339	0.0548	0.0060
175	0.1190	0.0583	0.0109	0.0008	0.1337	0.0548	0.0060
200	0.1190	0.0583	0.0109	0.0008	0.1335	0.0547	0.0059
∞	0.1190	0.0583	0.0109	0.0008	0.1336	0.0547	0.0059

E_s^1		
Tiempo	E_0^1	E_1^1
10	0.0026	0.0006
20	0.0257	0.0068
50	0.1674	0.0468
75	0.2016	0.0568
100	0.1913	0.0539
125	0.1866	0.0526
150	0.1876	0.0528
175	0.1882	0.0530
200	0.1881	0.0530
∞	0.1881	0.0530

Tabla 5.3: Probabilidad de ocupar el macro-estado E_s^r , para $r = 3, 2, 1$

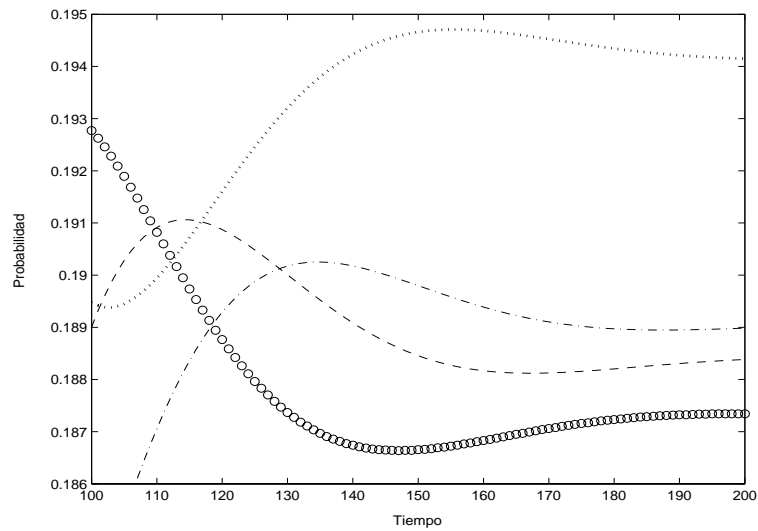


Figura 5.2: Probabilidad de tener 5 (línea de círculos), 4 (línea discontinua), 3 (línea de punto- raya) y 2 (línea de puntos) unidades en el sistema

A continuación hemos analizado el comportamiento del tiempo hasta que ocurre un fallo del sistema. Consideramos que si inicialmente el sistema es nuevo con cinco unidades, el tiempo medio hasta que no quedan unidades en el sistema es 81.8607. Por otro lado, hemos calculado el tiempo medio hasta el primer fallo (debido a que todas las unidades del sistema se encuentran en reparación). Esta medida es igual a 59.0991. Para calcularla hemos tenido en cuenta las ecuaciones (5.9) y (5.8), respectivamente.

Hemos representado la función de supervivencia de cada distribución. Estas distribuciones indican el tiempo que transcurre hasta que no quedan unidades en el sistema y el tiempo hasta que todas las unidades se encuentran en reparación, para cualquier número de unidades. Estas funciones se muestran en la figura 5.3.

Además de las ya expuestas, se han calculado otras medidas de interés asociadas al sistema. La función de disponibilidad, que se muestra en la figura 5.4 y la probabilidad condicionada de fallo en la figura 5.5.

El valor estacionario se alcanza a través de valores oscilantes. Lo hemos calculado considerando la expresión (5.10). La disponibilidad estacionaria es igual a 0.9401 y la hemos obtenido a partir de (5.11).

La probabilidad condicionada de fallo la hemos calculado a partir de la expresión (5.15). Esta probabilidad incrementa hasta las 65 unidades de tiempo, a partir de aquí, decrece hasta las 118 unidades y finalmente tiende al valor estacionario de forma oscilatoria. En régimen estacionario, la probabilidad condicionada de fallo es igual a 0.0376.

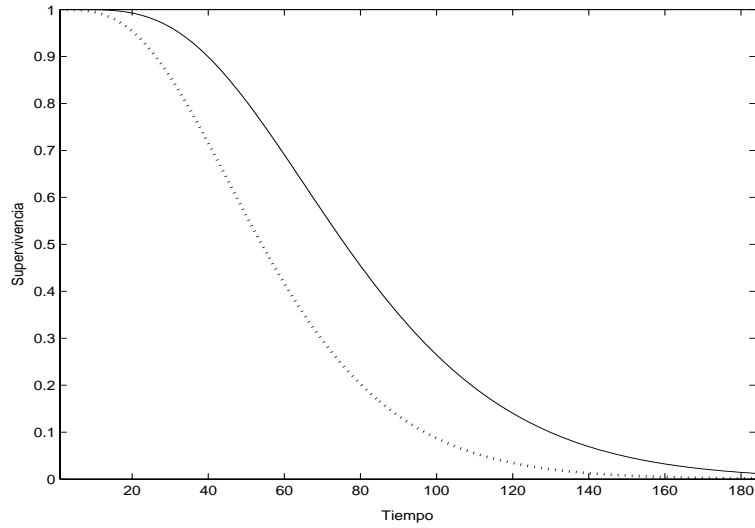


Figura 5.3: Función de supervivencia de la distribución del tiempo hasta el fallo del sistema debido a que no quedan unidades en el sistema (línea continua), o a que todas las unidades se encuentran en reparación (línea de puntos)

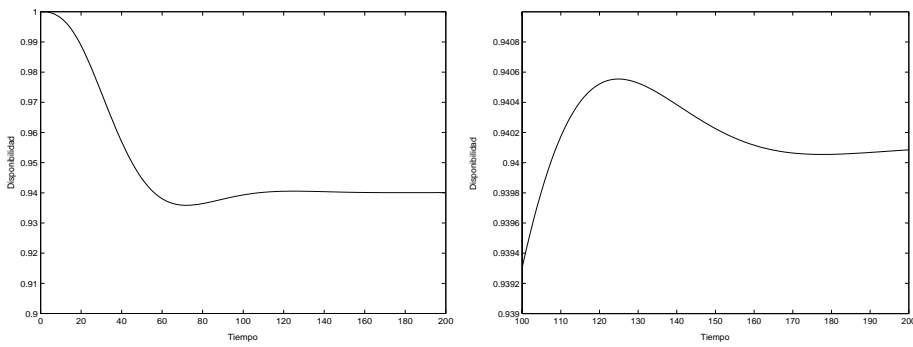


Figura 5.4: Disponibilidad del sistema

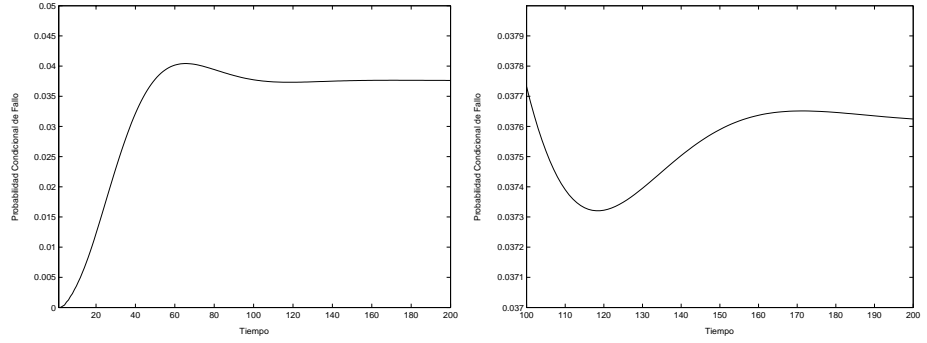


Figura 5.5: Probabilidad condicionada de fallo del sistema

5.7. Apéndices

5.7.1. Apéndice A

La inversa de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}^*$ descrita en la sección 5.4, donde \mathbf{P}^* viene dada en la expresión (5.6), la obtendremos en este apéndice de forma algorítmica. Utilizaremos para ello la Factorización RG del tipo LU dada en Li y Cao (2004)[16]. Dada la estructura de esta matriz, el método se reduce a la factorización G del tipo LU. Para este caso tenemos,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} &= (r_{m,n})_{m,n=0,\dots,N-1} & (5.16) \\
 &= \begin{cases} \mathbf{U}_m^{-1} & ; \quad 0 \leq m \leq N-2; \quad n = m \\ \prod_{i=m}^{n-1} \mathbf{G}_i \mathbf{U}_n^{-1} & ; \quad 0 \leq m \leq N-2; \quad m+1 \leq n \leq N-1 \\ \mathbf{U}_{N-1}^{-1} & ; \quad m = n = N-1 \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{para cualquier otro caso} \end{cases}
 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_k &= \mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{N-k}; \quad 0 \leq k \leq N-1, \\
 \mathbf{G}_k &= \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{R}_s^{N-k} = [\mathbf{I} - \mathbf{R}_p^{N-k}]^{-1} \mathbf{R}_s^{N-k}; \quad 0 \leq k \leq N-2.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Un análisis similar puede ser realizado para la matriz \mathbf{P}' dada en (5.7).

Cálculo de la matriz inversa de $\mathbf{I} - \mathbf{P}^*$

ENTRADAS: Matrices $\mathbf{D}_{00}, \mathbf{D}_{10}, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}'\mathbf{y}\mathbf{D}$ dadas en la sección 5.2.2.

SALIDA: La matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$ por bloques.

CÁLCULO

1. Calcular \mathbf{U}_k para $k = 0, \dots, N - 1$ desde (5.17).
2. Calcular \mathbf{G}_k para $k = 0, \dots, N - 2$ desde (5.17).
3. Calcular $(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$ desde (5.16).

5.7.2. Apéndice B

Probabilidades de transición

En este apéndice calcularemos las probabilidades transitorias considerando los distintos macro-estados del sistema. Dada la matriz \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_p^N & \mathbf{R}_s^N & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_p^{N-1} & \mathbf{R}_s^{N-1} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{R}_p^2 & \mathbf{R}_s^2 \\ \mathbf{R}_s^1 & & & & & \mathbf{R}_p^1 \end{pmatrix},$$

calcularemos la matriz \mathbf{P}^ν , para $\nu \geq 2$ de forma recursiva del siguiente modo. Los bloques de esta matriz los denotaremos por $(\mathbf{P}_{jh}^\nu)_{j,h=0,\dots,N-1}$, donde \mathbf{P}_{jh}^ν contiene la probabilidad de que en el instante ν el sistema tenga $N - h$ unidades, dado que inicialmente el sistema tenía $N - j$ unidades, considerando las diferentes fases.

Dada la estructura de la matriz \mathbf{P} , se tiene

$$\mathbf{P}_{jh}^\nu = \mathbf{R}_p^{N-j}\mathbf{P}_{jh}^{\nu-1} + \mathbf{R}_s^{N-j}\mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-1}(1 - \delta_{j,N-1}) + \mathbf{R}_s^1\mathbf{P}_{0,h}^{\nu-1}\delta_{j,N-1}, \quad (5.18)$$

para $j, h = 0, \dots, N - 1$ y siendo \mathbf{P}_{jh}^1 el bloque (j, h) de la matriz \mathbf{P} y $\delta_{j,N-1}$ la delta de Kronecker.

A partir de esta expresión y en forma recursiva estas matrices son obtenidas a partir de las matrices \mathbf{R} .

Teniendo en cuenta (5.18) en forma recursiva, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{jh}^\nu &= \mathbf{R}_p^{N-j} \left[\mathbf{R}_p^{N-j} \mathbf{P}_{jh}^{\nu-2} + \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} (1 - \delta_{j,N-1}) + \mathbf{R}_s^1 \mathbf{P}_{0,h}^{\nu-2} \delta_{j,N-1} \right] \\
&+ \mathbf{R}_s^{N-j} \left[\mathbf{R}_p^{N-j-1} \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} + \mathbf{R}_s^{N-j-1} \mathbf{P}_{j+2,h}^{\nu-2} (1 - \delta_{j+1,N-1}) \right. \\
&+ \left. \mathbf{R}_s^1 \mathbf{P}_{0,h}^{\nu-2} \delta_{j+1,N-1} \right] (1 - \delta_{j,N-1}) \\
&+ \mathbf{R}_s^1 \left[\mathbf{R}_p^N \mathbf{P}_{0h}^{\nu-2} + \mathbf{R}_s^N \mathbf{P}_{1,h}^{\nu-2} (1 - \delta_{0,N-1}) + \mathbf{R}_s^1 \mathbf{P}_{0,h}^{\nu-2} \delta_{0,N-1} \right] \delta_{j,N-1},
\end{aligned}$$

y si empleamos la siguiente notación,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0^2 &= \mathbf{R}_p^{N-j} \mathbf{R}_p^{N-j}, \\
\mathbf{A}_1^2 &= \mathbf{R}_p^{N-j} \mathbf{R}_s^{N-j} (1 - \delta_{j,N-1}) + \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{R}_p^{N-j-1} (1 - \delta_{j,N-1}), \\
\mathbf{A}_2^2 &= \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{R}_s^{N-j-1} (1 - \delta_{j+1,N-1}) (1 - \delta_{j,N-1}), \\
\mathbf{B}_0^2 &= \mathbf{R}_p^{N-j} \mathbf{R}_s^1 \delta_{j,N-1} + \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{R}_s^1 \delta_{j+1,N-1} (1 - \delta_{j,N-1}) + \mathbf{R}_s^1 \mathbf{R}_p^N \delta_{j,N-1}, \\
\mathbf{B}_1^2 &= \mathbf{R}_s^1 \mathbf{R}_p^N \delta_{j,N-1},
\end{aligned}$$

entonces,

$$\mathbf{P}_{jh}^\nu = \mathbf{A}_0^2 \mathbf{P}_{jh}^{\nu-2} + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{P}_{j+1,h}^{\nu-2} + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{P}_{j+2,h}^{\nu-2} + \mathbf{B}_0^2 \mathbf{P}_{0,h}^{\nu-2} + \mathbf{B}_1^2 \mathbf{P}_{1,h}^{\nu-2}.$$

Siguiendo este razonamiento, se tiene, para $j, h = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{jh}^\nu &= \sum_{k=0}^{\min\{\nu-1, N-j-1\}} \mathbf{A}_k^{\nu-1} \mathbf{P}_{j+k, h} + \sum_{k=0}^{\min\{\nu-2, N-1\}} \mathbf{B}_k^{\nu-1} \mathbf{P}_{k, h} \\
&= \begin{cases} \mathbf{A}_0^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} + \mathbf{A}_{N-j-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^1 1_{\{\nu \geq N\}} + \mathbf{B}_0^{\nu-1} \mathbf{R}_p^N + \mathbf{B}_{N-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^1 1_{\{\nu > N\}}; \\ \text{para } h = j = 0 \\ \\ \mathbf{A}_0^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} + \mathbf{B}_{h-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{N-h+1} 1_{\{\nu \geq h+1\}} + \mathbf{B}_h^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} 1_{\{\nu > h+1\}}; \\ \text{para } h = j \neq 0 \\ \\ \mathbf{A}_0^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h+1} + \mathbf{A}_1^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} + \mathbf{B}_{h-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{N-h+1} 1_{\{\nu \geq h+1\}} + \\ + \mathbf{B}_h^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} 1_{\{\nu > h+1\}}; \\ \text{para } j = h - 1 \\ \\ \mathbf{A}_{h-j-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{N-h+1} 1_{\{\nu \geq h-j\}} + \mathbf{A}_{h-j}^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} 1_{\{\nu > h-j\}} + \\ + \mathbf{B}_{h-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{N-h+1} 1_{\{\nu \geq h+1\}} + \mathbf{B}_h^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} 1_{\{\nu > h+1\}}; \\ \text{para } j < h - 1 \\ \\ \mathbf{A}_{N-j-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^1 1_{\{\nu \geq N-j\}} + \mathbf{B}_0^{\nu-1} \mathbf{R}_p^N + \mathbf{B}_{N-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^1 1_{\{\nu \geq N+1\}}; \\ \text{para } h = 0, j > h \\ \\ \mathbf{B}_{h-1}^{\nu-1} \mathbf{R}_s^{N-h+1} 1_{\{\nu \geq h+1\}} + \mathbf{B}_h^{\nu-1} \mathbf{R}_p^{N-h} 1_{\{\nu > h+1\}}; \text{ para } h \neq 0, j > h \end{cases}
\end{aligned}$$

siendo $1_{\{C\}}$ igual a 1 si se cumple C , y cero en caso contrario, y siendo

$$\mathbf{A}_k^s = \begin{cases} \mathbf{R}_p^{N-j} & ; k = 0; s = 1 \\ \mathbf{A}_0^{s-1} \mathbf{R}_p^{N-j} & ; k = 0; s \geq 2 \\ \mathbf{A}_{k-1}^{s-1} \mathbf{R}_s^{N-j-k+1} (1 - \delta_{j+k-1, N-1}) \\ + \mathbf{A}_k^{s-1} \mathbf{R}_p^{N-j-k} & ; k = 1, \dots, s-1 \\ \mathbf{R}_s^{N-j} (1 - \delta_{j, N-1}) & ; k = s = 1 \\ \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{R}_s^{N-j-1} (1 - \delta_{j+1, N-1}) (1 - \delta_{j, N-1}) & ; k = s = 2 \\ \mathbf{A}_{s-1}^{s-1} \mathbf{R}_s^{N-j-s+1} (1 - \delta_{j+s-1, N-1}) & ; k = s \geq 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_k^s = \begin{cases} \mathbf{R}_s^1 \delta_{j,N-1} & ; \quad k = 0; s = 1 \\ \mathbf{R}_p^{N-j} \mathbf{R}_s^1 \delta_{j,N-1} + \mathbf{R}_s^{N-j} \mathbf{R}_p^1 \delta_{j+1,N-1} \\ (1 - \delta_{j,N-1}) + \mathbf{R}_s^1 \mathbf{R}_p^N \delta_{j,N-1} & ; \quad k = 0; s = 2 \\ \sum_{k=0}^{s-1} \mathbf{A}_k^{s-1} \mathbf{R}_s^1 \delta_{j+k,N-1} + \mathbf{B}_0^{s-1} \mathbf{R}_p^N \\ + \sum_{k=0}^{s-2} \mathbf{B}_k^{s-1} \mathbf{R}_s^1 \delta_{k,N-1} & ; \quad k = 0; s \geq 3 \\ \mathbf{R}_s^1 \mathbf{R}_s^N \delta_{j,N-1} & ; \quad k = 1; s = 2 \\ \mathbf{B}_{s-2}^{s-1} \mathbf{R}_s^{N-s+2} (1 - \delta_{s-2,N-1}) & ; \quad \begin{matrix} k = s - 1 \\ 3 \leq s \leq N + 1 \end{matrix} \\ \mathbf{B}_{k-1}^{s-1} \mathbf{R}_s^{N-k+1} (1 - \delta_{k-1,N-1}) + \mathbf{B}_k^{s-1} \mathbf{R}_p^{N-k} & ; \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, s - 2 \\ s \geq 3 \end{matrix} \\ \mathbf{0} & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las medidas asociadas al sistema contienen el vector de probabilidad $p_Z(\nu)$ definido en la sección 5.5.1. Este vector lo calculamos de forma algorítmica a partir del análisis anterior. Consideramos que el sistema está inicialmente nuevo con vector de probabilidad inicial $(\alpha \otimes \gamma \otimes \eta \otimes \dots \otimes \eta, \mathbf{0})$.

Dado que en el instante ν , la matriz $\mathbf{P}_{0,N-n}^\nu$ contiene, por bloques, la probabilidad de que el sistema tenga N unidades y ν unidades de tiempo después, el sistema tenga n unidades, dependiendo de las diferentes fases del sistema. Esta matriz está compuesta por $(N+1) \times (n+1)$ bloques, dependiendo del número de unidades que haya en el canal de reparación. Denotaremos por $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,n}$ al bloque (r, w) de esta matriz, para $r = 0, \dots, N$ y $w = 0, \dots, n$. Esta matriz $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,n}$ contiene las probabilidades, dependiendo de las fases, de que inicialmente el sistema tenga N unidades, r de ellas se encuentren en el canal de reparación, y ν unidades de tiempo después, el sistema tenga n unidades con w de ellas en el canal de reparación. Si consideramos las fases de esta matriz, entonces su orden es $mtl^{N-r-1}q \times mtl^{n-w-1}q$, si $r \geq 1$ y $w \geq 1$, $mtl^{N-r-1}q \times mtl^{n-1}$, si $r \geq 1$ y $w = 0$, $mtl^{N-1} \times mtl^{n-w-1}q$, si $r = 0$ y $w \geq 1$ y finalmente, $mtl^{N-1} \times mtl^{n-1}$, si $r = 0$ y $w = 0$, donde m, t, l y q han sido dadas en la sección 5.2.

Dadas estas dimensiones, si consideramos las fases, el bloque matricial $\mathbf{Q}_{r,w}^{\nu,n}$ contiene las filas $mtl^{N-1} + \sum_{u=1}^{r-1} mtl^{N-u-1}q + 1 : mtl^{N-1} + \sum_{u=1}^r mtl^{N-u-1}q$ y las columnas $mtl^{n-1} + \sum_{u=1}^{w-1} mtl^{n-u-1}q + 1 : mtl^{n-1} + \sum_{u=1}^w mtl^{n-u-1}q$ de la matriz $\mathbf{P}_{0,K-k}^\nu$ si r y w son mayores o iguales que 1. Si r o w son iguales a cero, entonces la correspondiente fila o columna está compuesta por los elementos que van de 1 a mtl^{N-1} y de 1 a mtl^{n-1} , respectivamente.

Además, el vector $p_{E_w^n}(\nu)$ para $k = 1, \dots, N$ y $s \leq k$ puede calcularse del modo siguiente

1. Se calcula la matriz $\mathbf{P}_{0, N-n}^\nu$ por bloques.
2. Se calcula la matriz $\mathbf{Q}_{0, w}^{\nu, n}$ considerando el bloque $(0, w)$ de la matriz $\mathbf{P}_{0, N-n}^\nu$ o los elementos de las filas $1 : mtl^{N-1}$ y las columnas $mtl^{n-1} + \sum_{u=1}^{w-1} mtl^{n-u-1}q + 1 : mtl^{n-1} + \sum_{u=1}^w mtl^{n-u-1}q$.
3. $p_{E_w^n}(\nu) = (\alpha \otimes \gamma \otimes \eta \otimes \dots \otimes \eta) \mathbf{Q}_{0, w}^{\nu, n}$.

Referencias

- [1] Alfa, A.S. (2004) Markov Chain representations of discrete distributions applied to queueing models. *Computers and Operations Research*, **31**, 2365-2385.
- [2] Alfa, A.S. and Castro, I.T. (2002) Discrete Time Analysis of a Repairable Machine. *Journal of Applied Probability*, **39**, 3, 503-516.
- [3] Alfa, A.S. and Neuts, M.F. (1995) Modelling vehicular traffic using the discrete time Markovian arrival process. *Transportation Science*, **29**, 2, 109-117.
- [4] Ascher, H. and Feingold, H. (1984) *Repairable systems reliability: modeling, inference, misconceptions and their causes*. Marcel Dekker Inc. New York
- [5] Barata, J., Guedes Soares, C., Marseguerra, M. and Zio, E. (2002) Simulation modelling of repairable multi-component deteriorating systems for 'on condition' maintenance optimization. *Reliability Engineering and System Safety*, 255-264.
- [6] Barlow, R.E., Marshall, A.W. and Proschan F. (1963) Properties of probability distributions with monotone hazard rate. *Ann Math Stat*, **34**, 375-389.
- [7] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability Models*. Holt Rinehart and Winston.
- [8] Bruning, K.L. (1996). Determining the Discrete-Time Reliability of a Repairable 2-out-of-(N+1): F System. *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 150-155.
- [9] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T. and Heavey, C. (2007) Approximate analysis of serial flow lines with multiple parallel-machine stations. *IIE Transactions*, **39**, 361-375.
- [10] Faddy, M.J. (1995) Phase-Type Distributions for Failures Times. *Mathl. Comput. Modelling*, **22**, 10-12, 63-70.
- [11] Guo, H.R., Liao, H., Zhao, W. and Mettas, A. (2007) A New Stochastic Model for Systems under General Repairs. *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 1, 40-49.

- [12] Gururajan, M. and Srinivasan, B. (1995) A complex two-unit system with random breakdown of repair facility. *Microelectron. Reliab.*, **35**, 2, 299-302.
- [13] Hoyland, A. and Rausand, M. (1994) *System Reliability Theory: Models and Statistical Methods*. Wiley, New York.
- [14] Kijima, M. (1989) Some results for repairable systems with general repair. *Appl Prob.*, **26**, 89-102.
- [15] Kulkarni, V.G. (1999) *Modeling, analysis, design and control of stochastic systems*. Springer-Verlag, New York.
- [16] Li, A-L. and Cao, J. (2004) Two types of RG-Factorizations of Quasi-Birth-and-death Process and Their Applications to Stochastic Integral Functionals. *Stochastic Models*, **20**, 3, 299-340.
- [17] Lindqvist, H. (2006) On the Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems. *Statistical Science*. **21**, 4, 532-551.
- [18] Liu, Y.W. and Kapur, K.C. (2006) Reliability measures for dynamic multi-state non repairable systems and their applications to system performance evaluation. *IIE Transactions*, **38**, 511-520.
- [19] Maillart, L.M. (2006) Maintenance policies for systems with condition monitoring and obvious failures. *IIE Transactions*, **38**, 463-475.
- [20] Menéndez, M.L., Morales, D., Pardo, L. and Zografos, K. (1997) Statistical inference for finite Markov chains based on divergences. *Statistics and Probability Letters*, **41**, 9-17.
- [21] Naoumov V. (1997) Matrix-multiplicative approach to quasi-birth-and-death processes analysis. In: *Chakravarty SR, Alfa AS, editors. Matrix-analytic methods in stochastic models*. New York: Marcel Dekker, 87106.
- [22] Neuts, M.F. (1975) Probability distributions of phase type. *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*. Dept. Math. Univ. Louvain, Belgium, 173-206.
- [23] Neuts, M.F. (1981) *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*. John Hopkins Univ. Press.
- [24] Neuts, M.F. and Meier, K.S. (1981) On the use of phase type distributions in reliability modelling of systems with two component. *OR Spektrum*, **2**, 227-234.
- [25] Neuts, M.F., Pérez-Ocón, R. and Torres-Castro, I. (2000) Repairable models with operating and repair times governed by phase type distributions. *Advances in Applied Probability*, **34**, 468-479.
- [26] Pérez-Ocón, R. and Montoro-Cazorla, D. (2004) A multiple system governed by a quasi-birth-and-death-process. *Reliability Engineering and System Safety*, **84**, 187-196.

- [27] Pérez-Ocón, R., Montoro-Cazorla, D. and Ruiz-Castro, J.E. (2006) Transient Analysis of a Multi-component system modelled by a General Markov Process. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **23**, 3, 311-327.
- [28] Pérez-Ocón, R. and Montoro-Cazorla, D. (2006) A multiple warm standby system with operational and repair times following phasetype distributions. *European Journal of Operational Research*, **169**, 178188.
- [29] Pérez-Ocón, R. and Ruiz-Castro, J.E. (2004) Two models for a repairable two-system with phase-type sojourn time distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, **84**, 253-260.
- [30] Roy D. and Gupta, R.P. (1992) Classifications of discrete lives. *Microelectron. Reliab.*, **32**, 10, 1459-1473.
- [31] Ruiz-Castro, J.E., Fernández-Villodre, G. (2009) Un sistema con múltiples componentes dispuestas en reserva activa con pérdida de unidades. *XXXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, 1-4.
- [32] Ruiz-Castro, J.E., Fernández-Villodre, G. and Pérez-Ocón, R. (2009) A level-dependent general discrete system involving phase-type distributions. *IEE Transactions*, **41**, 45-56.
- [33] Ruiz-Castro, J.E., Fernández-Villodre, G. and Pérez-Ocón, R. (2009) A multi-component general discrete system subject to different types of failures with loss of units. *Discrete Events Dynamic System*, **19**, 31-65.
- [34] Ruiz-Castro, J.E., Fernández-Villodre, G. and Pérez-Ocón, R. (2009) Discrete repairable systems with external and internal failures under phase-type distributions. *IEEE Transactions on Reliability*. En prensa.
- [35] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2006) A discrete redundant system involving Phase type distributions. In *Safety and Reliability for Managing Risk*, Guedes Soares and Zio (eds), 1695-1701.
- [36] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2007) A discrete redundant system subjects to different types of failures. *Proceedings in ASMDA 2007*, 1-8.
- [37] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2007) A discrete repairable redundant system involving Phase Type distributions. In *Mathematical Methods in Reliability, MMR 2007*, 1-10.
- [38] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2008) Algorithmic and computational analysis of a multi-component complex system. In *Proceedings ESREL 2008*, 1-8.
- [39] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2008) Modelling a reliability system governed by discrete phase-type distributions. *Reliability Engineering and System Safety*. **93**, 11, 1650-1657.

- [40] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2007) Un sistema de fiabilidad con distintos tipos de fallo y pérdida de unidades. *Actas del XXX Congreso Nacional de Estadística e I. O.*, 1-12.
- [41] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. and Fernández-Villodre, G. (2006) Un sistema multicomponentes reparable en tiempo discreto. *Contribuciones a la estadística y a la Investigación Operativa. Actas del XXIX Congreso Nacional de Estadística e I. O.*, 1339-1349.
- [42] Ruiz-Castro, J.E., Pérez-Ocón, R. Montoro-Cazorla, D. and Fernández-Villodre, G. (2004) A two-system governed by PH-distributions with memory of the failure phase. *Proceedings in Computational Statistics COMP-STAT 2004*, 1717-1724.
- [43] Sadek, A. and Limnios, N. (2002) Asymptotic properties for maximum likelihood estimators for reliability and failure rates of Markov chains. *Communications in statistics Theory and Methods*, **31**, 10, 1837-1861.
- [44] Shi, D.H., Guo, J. and Liu, L. (1996) SPH-distributions and the rectangle iterative algorithm. In: Chakravarty, S., Alfa, A.S. editors. *Matrix-analytic methods in stochastic models*. New York: Marcel Dekker, 207-224.
- [45] Shi, D. and Liu, D. (1998) Markovian models for non-negative random variables. In: Alfa, A.S., Chakravarty, S. editors. *Advances in Matrix-analytic methods for stochastic models*. New Jersey: Notable Publishers, 403-427.
- [46] Srinivasan, S.K. and Subramanian, R. (2006) Reliability analysis of a three unit warm standby redundant system with repair. *Annals of Operations Research*, **143**, 227-235.
- [47] Wang, K.H., Ke, J.B. and Lee, W.C. (2007) Reliability and sensitivity analysis of a repairable system with warm standbys and R unreliable service stations, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **31**, 1223-1232.
- [48] Zhao, M. (1994) Availability for Repairable Components and Series Systems. *IEEE Transactions on Reliability*, *43*, 2, 329-334.