Álgebras no Asociativas Normadas Completas. Teoría Espectral

Juan Carlos Marcos Sánchez

Directora: Mª Victoria Velasco Collado

TESIS DOCTORAL

Universidad de Granada
Granada 2011

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Juan Carlos Marcos Sánchez
D.L.: GR 1572-2012
ISBN: 978-84-9028-033-1

Contenido

Lista de Figuras

Agradecimientos

A la memoria de mi padre, Antonio, de quien aprendí, y comprendí, la importancia de los valores de la honradez, el compromiso y la responsabilidad.

«*A hombros de gigantes*» es una expresión muy repetida a lo largo de la historia reciente, procedente de una cita muy famosa, pronunciada por Isaac Newton a Robert Hooke, si bien su paternidad se debe en realidad al filósofo Bernardo de Chartres[1]. En una discusión por carta sobre la ley de la gravitación universal, Newton escribió:

> «*Si he logrado ver más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes*»

[1] En su obra *Metalogicon* de 1159, Bernardo de Chartres escribió:

> «*Somos como enanos a los hombros de gigantes. Podemos ver más, y más lejos que ellos, no por alguna distinción física nuestra, sino porque somos levantados por su gran altura*».

Los gigantes a los que se refería Newton eran Galileo, Copérnico y otros famosos e importantes astrónomos anteriores a él.

Suscribo plenamente la cita de Newton. No pretendo con ello encumbrarme en el «olimpo» de la investigación matemática, pues en modo alguno me asemejo a un «gigante» como Newton (estoy a años luz de su reconocido intelecto). Simplemente, quiero expresar lo que he sentido muchas veces mientras trabajaba con mi Directora, Dña. Mª Victoria Velasco, o con los profesores D. Ángel Rodríguez-Palacios, D. Miguel Cabrera y D. Amin Kaidi. En ellos me he «aupado» durante la travesía que condujo a la elaboración de esta Memoria, y tengo sobradas razones para sentir una profunda admiración por todas estas personas. Agradezco a todas ellas su ayuda, sugerencias, aportaciones, y las productivas charlas sobre cuestiones y problemas matemáticos, en muchos casos en compañía del sabor y la fragancia de una buena taza de café.

Por Mª Victoria Velasco, en particular, también siento un especial y profundo agradecimiento, por haberme apoyado siempre, y por haber sabido reiteradamente pensar en mis necesidades, teniendo en cuenta mis problemas personales, y en definitiva por su cercanía y su gran valía profesional e investigadora. Mi más reciente formación y actualización matemática se debe fundamentalmente a ella, pues siempre estuvo pendiente de asesorarme y orientarme. Incluso en los malos momentos, siempre tuvo fe en mi, y no han sido pocos los sacrificios en los que estuvo inmersa, por los que le estaré agradecido por siempre. Su principal virtud: haber sido capaz de llevar toda esa carga con ilusión y coraje. Me descubro ante ella.

De D. Ángel Rodríguez debo añadir que he tenido mucha suerte de haber podido impregnarme de su espíritu matemático y de su asombrosa capacidad de pensamiento y trabajo. Y por supuesto, de sus conocimientos y orientaciones metodológicas. Por otra parte, quiero mostrar también una especial admiración

y agradecimiento por D. Miguel Cabrera, por sus continuas sugerencias y colaboraciones, no exentas de sacrificios, imprescindibles para que esta Memoria pudiera seguir adelante. Y todo ello, siempre acompañado de una grata sonrisa y cercanía.

Agradezco a los miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada la buena acogida que me han dispensado a lo largo del año académico 2010-11, que he tenido la suerte de compartir con ellos. Esto ha sido posible gracias a la Licencia por Estudios que la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía ha tenido a bien dispensarme, y que fue crucial para poder finalizar este ambicioso proyecto.

Quisiera reconocer también a D. Amin Kaidi, de la Universidad de Almería, a Dña. Consuelo Martínez López, de la Universidad de Oviedo, y a Dña. Mercedes Siles Molina, de la Universidad de Málaga, su valiosa participación en el tribunal que valorará la tesis doctoral que configura este documento (sin duda un tribunal de enorme prestigio). Sin sus revisiones, sugerencias o simples comentarios, este proyecto no hubiera sido el mismo.

No quisiera olvidarme de dar las gracias también al Doctor D. Francisco Javier Pérez, de la Universidad de Cádiz, quien fue la primera persona en introducirme en la senda de hacer una tesis doctoral. También quiero mostrar un agradecimiento póstumo al malogrado Catedrático de la Universidad de Cádiz, D. Antonio Aizpuru, por sus buenos consejos, por su ánimo y recomendaciones en introducirme en la investigación matemática. Ha sido una persona insustituible, y su pérdida indudablemente es irreparable.

En cuanto a las personas que interactúan en mi vida personal, también tengo mucho que agradecerles. Para empezar, a Adela, mi madre, quien durante las vicisitudes personales por

las que he pasado, siempre ayudó a mantenerme alerta y animado. Por supuesto también a mis hermanos, especialmente mi hermana Adela, que se sintieron preocupados por mi situación en todo momento, y ayudaron en lo que pudieron.

Pero principalmente, tengo un profundo agradecimiento a mi pareja, Ana, quien, con su cariño y atenciones, ha sido el mejor apoyo con el que sostenerme y poder seguir adelante. Me atrevo a decir que es también el mejor apoyo en el que cualquier persona podría sostenerse. Sólo ella ha sabido comprenderme, animarme y levantarme cuando caía. Gracias desde el corazón.

Para finalizar, quiero acordarme especialmente de mis hijas Alba y Lucía. Qué duro es el camino recorrido, y cuántas cosas me he perdido de ellas al realizarlo. Pero el profundo amor que siento por ellas, y los maravillosos momentos que hemos podido compartir, constituyeron las mejores armas con las que poder defenderme de los numerosos instantes de incertidumbre y dudas a los que me he tenido que enfrentar. Mi agradecimiento por mis «ojitos derechos» es, simplemente, indescriptible.

Muchas gracias a todas las personas que, de alguna forma, contribuyeron a que este proyecto finalmente haya visto la luz.

Prólogo

La idea de operar de forma no asociativa subyace en las raíces del pensamiento matemático, puesto que la sustracción es una operación no asociativa (si bien no es un producto).

Desde el siglo XIX, las estructuras algebraicas no asociativas han sido consideradas asiduamente. De hecho, si definimos una tabla de multiplicación con los vectores de una base de un espacio vectorial, se obtendrá un álgebra que posiblemente sea no asociativa (y en el hipotético caso de que lo sea, podría ser muy tedioso demostrarlo). Es por ello que, por más que la asociatividad sea una propiedad muy deseable en un producto, y muchos productos conocidos disfruten de ella (pensemos por ejemplo en el producto de polinomios, el de matrices, o el producto puntual de funciones de determinados espacios de funciones), *no estamos ante una propiedad que podamos demandar de modo natural*.

El objetivo fundamental que motiva este trabajo, radica en extender diversos hechos que se estructuran en el ambiente clásico de las álgebras de Banach (asociativas), hacia el terreno (debiéramos decir universo) de las álgebras (no asociativas) normadas completas más generales posibles. Para justificar este grado de generalidad, hagamos notar que, por **álgebra** entendemos *un espacio vectorial dotado de una aplicación bilineal*, que llamaremos **producto**, que no está obligada a verificar ninguna identidad adicional (**Definición 1.1**). Por tanto, en el contexto de esta Memoria, el producto de un álgebra no está forzado a verificar la propiedad asociativa, ni ninguna identidad sucedánea de ella, a diferencia de lo que sucede con algunos tipos particulares de álgebras clásicas (como las álgebras de Jordan, las álgebras de Lie, las álgebras alternativas o las flexibles, por citar sólo algunas). No obstante, las clases de álgebras que acabamos de mencionar, junto con las asociativas, serán ejemplos relevantes de álgebras en nuestro marco de trabajo.

Incluimos a continuación de este prólogo una sección en la que se bosqueja una breve visión histórica sobre el interés de las álgebras no asociativas en las ciencias aplicadas. En ella revisaremos, aunque sólo sea someramente, algunas de las aplicaciones que estas estructuras tienen en la Física y en la Biología, con especial interés en aquellas álgebras no asociativas que, siendo apreciadas en determinados contextos, no responden a un tipo clásico de álgebra no asociativa como los relacionados anteriormente. Más allá de la Física y la Biología, se atisbarán otras ramas de conocimiento donde las álgebras no asociativas también fructifican. De esta forma, dejaremos constancia de que nuestra afinidad por este tema no es arbitraria, y está motivada principalmente por las potenciales posibilidades que tiene. Pero para no crear falsas expectativas aclaramos, desde el primer momento, que los progresos hechos en esta Memoria son de corte exclusivamente teórico. La razón se intentará justificar en lo que sigue, cuando se muestre el trabajo realizado hasta la fecha, que hemos entendido como previo.

Aunque hayan sido muchas álgebras no asociativas las usadas para modelar una gran variedad de fenómenos en diferentes contextos científicos, principalmente en Biología y Física (véase por ejemplo [10, 29, 50, 51, 60, 63]), resulta que todavía no se ha gestado una teoría espectral propia de las álgebras no necesariamente asociativas. Tan sólo se han desarrollado algunas teorías particulares específicas (como la teoría espectral de álgebras de Jordan, por ejemplo). De hecho, históricamente no ha habido consenso ni siquiera en lo que se debía de entender por inverso de un elemento, en un álgebra no asociativa. Es por ello que una teoría espectral no asociativa, a falta de una noción de espectro bien asentada que la sustente, siembre se ha encontrado en un estado muy germinal.

Las **álgebras de división** no asociativas fueron consideradas desde comienzos del siglo XX por muchos autores [3, 72], y fueron definidas como *aquellas álgebras $\mathcal{A}$ tales que los operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha, L_a y R_a, asociados a cualquier elemento no nulo $a \in \mathcal{A}$ son biyectivos*. En la **Definición 1.18** hemos dado el nombre de **m-invertibles** a los elementos de un álgebra compleja con unidad cuyos operadores de multiplicación asociados son biyectivos, extendiendo posteriormente la definición al caso sin unidad y al caso real, justo como se hace en la teoría clásica asociativa. Se establece así una noción, la de *elemento m-invertible*, que si bien no es nueva, sí que es original y *extiende la conocida definición de elemento invertible en un álgebra asociativa*, tal y como se muestra en la **Proposición 1.17.**

Asociada al concepto de elemento m-invertible tenemos la noción de **m-espectro** de un elemento, que se formaliza en la **Definición 1.21**. Asimismo, en la **Definición 1.26** se definirá el **radio m-espectral**, que no es más que el radio espectral relativo al nuevo espectro, y que en el caso normado será también caracterizado en términos de la norma del álgebra considerada (**Proposición 1.27**). En torno a estas nociones gira el **Capítulo 1**, en el que también se hace un estudio sobre los **ideales** (incluidos los **modulares**) de un álgebra no asociativa. Por tanto, dicho capítulo servirá para asentar los conceptos y resultados básicos necesarios para nuestras consideraciones, en el ánimo de extender adecuadamente el formalismo de la teoría espectral clásica al caso no asociativo.

En el **Capítulo 2** profundizaremos en el estudio de las **álgebras normadas de división** y, en particular, de las que son completas.

El interés de las álgebras de división en las ciencias aplicadas queda explícitamente palpable en las siguientes palabras de J. C. Baez (extraidas de [8]):

> «*La construcción de las álgebras de división de trialidades tiene enlaces tentadores con la Física. En el modelo estándar de Física de Partículas, todas las partículas que no sean el bosón de Higgs se transforman en vectores o en espinores.* [...]
> *Es fascinante que la misma clase de matemáticas pueda ser utilizada tanto en la construcción de las álgebras normadas de división como para describir la interacción entre la materia y las fuerzas.*»

Como ya hemos anunciado, nosotros vamos a hacer un estudio meramente teórico, en el que analizaremos estas estructuras con varias finalidades. En primer lugar, seremos fieles a la filosofía de desproveer la teoría clásica del requerimiento de la asociatividad del producto, siempre que sea posible. Cuando no lo sea, veremos la forma de extender los resultados clásicos al ambiente no asociativo, aunque se haga con algunos ajustes. Asimismo, pondremos de manifiesto aquellos aspectos en los que la teoría asociativa y la no asociativa dejan de ir en paralelo. Por ejemplo, en el Capítulo 2 veremos cómo *los conceptos de ser un álgebra de división unilateral, o ser un álgebra de división, que son equivalentes en el caso asociativo* (**Proposición 2.3**), *dejan de serlo en el ambiente más general que nos ocupa* (**Ejemplo 2.17**).

En dicho capítulo revisaremos resultados clásicos como el **Teorema de Gelfand-Mazur complejo** que, como es bien conocido, establece que *cualquier álgebra normada compleja asociativa de división es isomorfa a* $\mathbb{C}$.

Hemos de reconocer que no hemos sido los primeros en intentar liberar al Teorema de Gelfand-Mazur de la asociatividad, problema que sigue abierto hoy día, pues ya en 1970 argumentaba Kaplansky en [47] que el siguiente hecho era bien conocido:

Teorema 2.5 *Las álgebras (no necesariamente asociativas) normadas completas complejas, de división por la izquierda, son isomorfas a* $\mathbb{C}$.

Se pone así de manifiesto que Kaplansky ya se había cuestionado hasta qué punto la asociatividad es una propiedad superflua en estos resultados. Bastantes años antes, en 1949, Kaplansky había probado que:

Teorema 2.8 *Toda álgebra asociativa normada compleja, no nula, sin divisores topológicos de cero biláteros no nulos, es isomorfa a* $\mathbb{C}$.

Como mostramos en la **Proposición 2.9**, resulta que *toda álgebra asociativa normada de división carece de divisores topológicos de cero por un lado no nulos*, lo que prueba que este último resultado de Kaplansky es una generalización del Teorema de Gelfand-Mazur. Es por ello que el teorema anterior también se conoce como **Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky**.

En el **Ejemplo 2.10** veremos que *el Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky deja de ser cierto si lo desproveemos de la hipótesis de la asociatividad,* aun fortaleciendo alguna de sus otras hipótesis (concretamente aun suponiendo que el álgebra no posea divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos). Sin embargo, bajo tal fortalecimiento de la hipótesis, el teorema sí que es válido cuando adicionalmente se requiera la existencia de algún elemento a del álgebra tal que L_a tenga rango denso, como establecemos en el **Teorema 2.12** (resultado igualmente formulable en términos del lado derecho). Como consecuencias relevantes del Teorema 2.12 se tendrán las dos caracterizaciones siguientes de los números complejos:

1. $\mathbb{C}$ *es la única álgebra normada compleja con unidad sin divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos* (**Corolario 2.13**).

2. $\mathbb{C}$ *es la única álgebra normada compleja (no nula) de división por la izquierda, sin divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos* (**Corolario 2.14**).

Este último resultado (el Corolario 2.14), contiene al Teorema de Kaplansky antes enunciado (Teorema 2.5) en virtud de lo establecido en la Proposición 2.9.

Adicionalmente, en el Capítulo 2 se mostrará el papel que juega la **cuasi-división** (concepto que será recordado en la **Sección 2.3**) en un álgebra arbitraria (real o compleja), en relación con las propiedades de ser un álgebra de división (lateral o unilateral) y con la propiedad de no poseer cualquiera de los distintos tipos de divisores topológicos de cero (que se enuncian en la **Definición 2.7**). En concreto, el eje central de la Sección 2.3 será analizar siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c} A \text{ es un álgebra} \\ \text{de división} \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} A \text{ es un álgebra} \\ \text{de división por} \\ \text{la} \left\{ \begin{array}{c} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{array} \right\} \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} A \text{ es un} \\ \text{álgebra de} \\ \text{cuasi-división} \end{array}} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\begin{array}{c} A \text{ no posee} \\ \text{d.t.c. por un lado} \\ \text{no nulos} \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} A \text{ no posee} \\ \text{d.t.c. por la} \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{izquierda} \\ \text{derecha} \end{array} \right\} \neq 0 \end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} A \text{ no posee} \\ \text{d.t.c. biláteros} \\ \text{no nulos} \end{array}}
\end{array}
$$

Fig. 1: Diagrama del Capítulo 2.

Consideraremos también las condiciones ambientales que facilitan que las implicaciones que aparecen en dicho diagrama, sean ulteriormente equivalencias en sí mismas. Asimismo se darán ejemplos que aclararán porqué una implicación del citado diagrama no puede llegar a ser una equivalencia (tanto en los casos real como complejo), y de esta manera podremos entrever porqué diversos conceptos equivalentes en ambiente asociativo, dejan de serlo en el contexto no necesariamente asociativo.

Nathan Jacobson, en su clásica monografía *Basic Algebra* de 1974, escribió lo siguiente:

> «*Una manera de tratar de crear nuevas matemáticas a partir de una teoría matemática existente, sobre todo si se presenta de forma axiomática, es generalizar la teoría mediante la eliminación o el debilitamiento de algunas de sus hipótesis. Si jugamos a este juego axiomático con el concepto de álgebra asociativa, se llegaría probablemente al concepto de álgebra no asociativa, que se obtiene simplemente eliminando la ley asociativa de la multiplicación. Si se alcanza esta etapa de forma aislada desde otras realidades matemáticas, es muy cierto que pronto se abandonaría el proyecto, ya que hay muy poco de interés que se pueda decir sobre álgebras no asociativas en general.*»

No vamos a ocultar nuestro desacuerdo con esta afirmación, cuando los resultados ya comentados pueden dar indicio de ello. Pero esto quedará aún más patente cuando de forma específica analicemos un concepto básico de la teoría espectral asociativa que es el de **radical de Jacobson**, al que dedicamos el **Capítulo 3**, donde también estudiaremos el llamado **radical de Brown-McCoy** o **radical fuerte**.

Comenzaremos dicho capítulo dando una visión histórica del concepto de radical de Jacobson, desarrollada en la **Sección 3.1**, que nos permitirá llegar a la esencia de la herramienta, para posteriormente desproveerla de la asociatividad, definiendo el **radical de Jacobson** de un álgebra no asociativa como *la intersección de sus ideales primitivos* (**Definición 3.5**). Por **ideal primitivo** (**Definición 3.4**) entenderemos *el mayor ideal contenido en un ideal modular unilateral maximal*[2]. Diremos que un álgebra es **semisimple** *si su radical de Jacobson es cero.*

[2] Consideramos ideales modulares maximales izquierdos y derechos para eliminar una asimetría histórica, que si bien en ambiente asociativo es inocua, en el caso no asociativo no lo es, pues da lugar a un radical mayor (álgebra revertida de la del **Ejemplo 3.8**) para el que se pierde la deseable

Veremos que *el radical de Jacobson* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *de un álgebra* $\mathcal{A}$ *es el mayor ideal contenido en la intersección de todos sus ideales modulares por un lado maximales* (**Proposición 3.9**) y que *el álgebra cociente* $\mathcal{A}/\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *es semisimple* (**Proposición 3.10**).

La intersección de todos los ideales primitivos de un álgebra $\mathcal{A}$ no tiene por qué ser un ideal cuasi-invertible (incluso bajo conmutatividad), a diferencia de lo que ocurre en el caso asociativo. Sin embargo, en la **Proposición 3.13** probaremos que *si* Q *es un ideal de* $\mathcal{A}$ *cuyos elementos son cuasi-invertibles entonces* $Q \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.

El *carácter hereditario* del radical de Jacobson será estudiado en la **Sección 3.4**, donde la caracterización del radical obtenida en el **Teorema 3.15** nos permitirá caracterizar a los ideales I de un álgebra $\mathcal{A}$ tales que $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ (**Corolario 3.17**). Nótese que la condición de que $\mathrm{Rad}(I)$ sea un ideal de $\mathcal{A}$ es necesaria para que se de la igualdad anterior. Aunque en presencia de asociatividad esta propiedad siempre se verifica (**Corolario 3.18),** en general, $\mathrm{Rad}(I)$ puede no ser un ideal de $\mathcal{A}$. Un caso donde esto ocurre se presenta en el **Ejemplo 3.19**, donde se muestra que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ no tiene por qué estar contenido en $\mathrm{Rad}(I)$. De forma análoga, en el **Ejemplo 3.20** mostramos un ideal I de un álgebra que $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Rad}(I)$ no está contenido en $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$.

Sin embargo, aunque algunos ideales no reúnan los requerimientos necesarios para hacer viable la propiedad hereditaria del radical, otros muchos ideales sí son aptos para ello. Es por esto que, como una aplicación conjunta sencilla del **Teorema 3.15** y del **Corolario 3.17**, probamos que si $\mathcal{A}$ es un álgebra y $\mathcal{A}_1$ es su unitización, entonces $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1)$, por lo que $\mathcal{A}_1$ es semisimple si, y sólo si, $\mathcal{A}$ lo es (**Corolario 3.21**).

Cuando elevamos al ambiente no asociativo otras caracte-

---

propiedad de que *el radical de un álgebra coincida con el de su revertida.*

En cualquier caso, nuestros argumentos sobre el radical de Jacobson también son válidos en relación con la definición «asimétrica».

rizaciones del radical de Jacobson de un álgebra asociativa, vemos que la asociatividad sirve de vínculo para forzar la equivalencia entre condiciones que en un ambiente más general dejan de ser equivalentes. Más concretamente, cuando desproveemos de la asociatividad la conocida caracterización del radical de Jacobson, que lo describe como *el mayor ideal del conjunto de los elementos de radio espectral igual a cero*, obtenemos el concepto que hemos denominado **m-semisimplicidad** (establecido en la **Definición 3.23)**. De hecho, diremos que un álgebra es **m-semisimple** cuando *cero es el único ideal formado por elementos cuyo radio m-espectral es cero*. Como se desprende de la **Proposición 3.24** y del **Ejemplo 3.25**, *la clase de las álgebras m-semisimples es estrictamente más amplia que la de las álgebras semisimples.*

Probaremos también que tanto *las álgebras semisimples como las m-semisimples tienen unicidad de la topología de la norma completa* (**Corolarios 4.12** y **4.16**). Para ello demostraremos que la asociatividad es una hipótesis superflua en un conocido teorema de B. E. Johnson, estableciendo en el **Teorema 4.11** *la continuidad automática de los homomorfismos sobreyectivos de un álgebra normada completa en un álgebra normada completa semisimple.* Este resultado se mejorará con el **Teorema 4.14** donde se demuestra lo análogo suponiendo que *el álgebra de llegada es m-semisimple*. Si bien el Teorema 4.11 es un corolario del Teorema 4.14, en esta Memoria damos una prueba directa de ambos resultados porque consideraciones sencillas sobre los ideales de un álgebra y sobre el m-espectro, debidamente articuladas, nos permitirán demostrar ambas cosas prácticamente a la par. Es por ello que, eligiendo un sendero adecuado, es posible esquivar la asociatividad en la propia teoría asociativa, sin necesidad de recurrir a grandes artificios ni conceptuales ni procedimentales, lo cual no significa que se haga de forma obvia. Mostrar lo que se acaba de afirmar es la razón de ser del **Capítulo 4**, que finaliza con el **Ejemplo 4.15**, en el que se pone de manifiesto lo fácil que resulta comprobar que un álgebra es m-semisimple (lo que asegura la unicidad de la topología de su norma completa) sin más que analizar cómo es el conjunto de los elementos cuyo radio m-espectral es igual a cero.

Una vez estudiada la continuidad automática de los homomorfismos sobreyectivos entre dos álgebras normadas completas, cuando el álgebra de llegada disfruta de perfecciones algebraicas como la m-semisimplicidad o la semisimplicidad (pues de no ser así se conocen contraejemplos de homomorfismos discontinuos incluso en ambiente asociativo), pasamos a estudiar el caso general de los homomorfismos que no son necesariamente sobreyectivos, a lo que dedicamos el capítulo siguiente de la Memoria.

Como quiera que un homomorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos álgebras normadas completas puede verse como un homomorfismo de rango denso considerando, por abuso de lenguaje, que $\mathcal{B} = \overline{\theta(\mathcal{A})}$, vamos a dedicar el **Capítulo 5** de esta Memoria al estudio de los homomorfismos de rango denso.

Como se sabe, el mejor resultado que se conoce sobre la continuidad automática de los homomorfismos de rango denso es un teorema de C. E. Rickart de 1960 [64] que afirma que *todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es continuo cuando el álgebra $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple*. El objetivo del Capítulo 5 es estudiar hasta qué punto la asociatividad es una propiedad superflua en este resultado, tal y como se establece a continuación.

Problema 5.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple, ¿es θ automáticamente continuo?*

En 1968, Balachandran y Rema [9], mostraron una primera generalización no asociativa del Teorema de Rickart probando que dicho teorema sigue siendo válido cuando las álgebras involucradas son de Jordan Banach, es decir, *dieron respuesta afirmativa al problema anterior bajo la hipótesis adicional de que las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean de Jordan-Banach.*

En 2003, el resultado original de Balachandran y Rema fue mejorado por Rodríguez y Velasco en [71] *liberando al álgebra de partida del requerimiento de ser de Jordan* (basta con que sea normada completa[3]). Otras extensiones no asociativas del Teorema de Rickart pueden verse en [68] y [71], siempre suponiendo alguna hipótesis adicional que en el caso asociativo se verifica trivialmente.

En el ánimo de analizar hasta qué punto el teorema de Rickart se puede desproveer de la asociatividad, en el Capítulo 5 se probará, en primer lugar, que *no es restrictivo suponer que las álgebras implicadas tienen unidad, y que el álgebra rango es simple* (**Proposición 5.2**). De esta forma, el Problema 5.1 puede reformularse equivalentemente de la siguiente manera:

Problema 5.3 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) tales que $\mathcal{B}$ es simple, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. ¿Es θ automaticamente continuo?*

En la **Sección 5.1.1** aclararemos que, para estudiar el problema anterior, tampoco es restrictivo considerar que las álgebras involucradas son complejas, puesto que *si un álgebra real es fuertemente semisimple, entonces su complexificación también lo es* (**Corolario 5.4**).

Nuestro problema queda pues centrado: *se trata de estudiar el Problema* 5.3 *suponiendo que el cuerpo base es* $\mathbb{C}$.

En el **Teorema 5.13** probaremos que *la respuesta a nuestro problema es afirmativa si el rango del homomorfismo es* **espectralmente admisible** (en el sentido de la **Definición 5.9**). Vere-

[3] Asimismo, el rango puede suponerse normado completo y Jordan admisible, que es una condición más débil que la de ser de Jordan-Banach.

mos que *cualquier subálgebra densa de un álgebra de Banach con unidad es espectralmente admisible* (**Proposición 5.12**), por lo que el teorema de Rickart clásico se obtiene como un corolario del Teorema 5.13.

Un concepto original de esta Memoria que será importante para nuestros resultados de continuidad automática es el de **elemento espectralmente raro** de un álgebra[4] (**Definición 5.15**), que se asienta en el de **operador espectralmente raro**[5] establecido en la **Definición 1.30**. Es por ello que dedicamos la **Sección 1.8** al estudio de los operadores espectralmente raros.

Sean $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, siendo $\mathcal{B}$ simple. Como se establece en el **Corolario 5.17,** *la ausencia de elementos espectralmente raros en* $\theta(\mathcal{A})$ *asegura la continuidad automática de cualquier homomorfismo de rango denso* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Por otra parte, *en el caso de que* $\theta(\mathcal{A})$ *posea elementos espectralmente raros, pero no en abundancia (esto es, que no sean densos en* $\mathcal{B}$*) obtendremos la cerrabilidad del núcleo del homomorfismo* θ (**Teorema 5.19**).

Puesto que *las álgebras normadas asociativas simples con unidad carecen de elementos espectralmente raros* (**Proposición 5.18**), de nuevo obtenemos el clásico teorema de Rickart, en esta ocasión como consecuencia inmediata del **Corolario 5.17**.

Finalizamos la Sección 5.2 mostrando una manera de construir homormorfismos discontinuos de rango denso, que es la que enunciamos en el próximo resultado, donde por **m-espectro**

[4]Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es un **elemento espectralmente raro** si los operadores de multiplicación L_a y R_a son espectralmente raros.

[5]Sea X es un espacio normado, cuya completación denotamos por $\widehat{X}$. Dado $T \in L(X)$ sea $\widehat{T}$ la única extensión continua de T a $\widehat{X}$. Se dice que $T \in L(X)$ es un **operador espectralmente raro** si $\sigma_{su}^{X}(T) \cap \sigma^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \varnothing$.

sobreyectivo de un elemento b en un álgebra $\mathcal{B}$ se entiende el conjunto

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) := \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cup \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b).$$

Corolario 5.21 *Sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso, entre dos álgebras normadas completas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si $\theta(\mathcal{A})$ posee algún elemento $b \in \theta(\mathcal{A})$ tal que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(b) = \varnothing$ (es decir, con m-espectro sobreyectivo vacío), entonces θ es discontinuo.*

En el **Ejemplo 5.22** se construye un álgebra $\mathcal{B}$ normada completa simple con unidad, que contiene una subálgebra densa $\mathcal{B}_0$ que posee elementos con m-espectro sobreyectivo vacío. En consecuencia, *si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada completa arbitraria entonces cualquier homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, cuyo rango sea $\theta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_0$, es discontinuo.*

Las ideas que llevaron a Balachandran y Rema a demostrar en [9] que el Problema 5.1 (o equivalentemente el Problema 5.3) tiene respuesta afirmativa cuando las álgebras consideradas son de Jordan-Banach, fueron usadas en [68] (véase también [71, Theorem 1.5]) para probar este otro resultado más general:

Teorema 5.23 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas de potencias asociativas. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple, entonces todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

De otra parte, como ya se ha comentado, el mencionado resultado de Balachandran y Rema también fue generalizado en [71, Theorem 1.5] como sigue:

Teorema 5.24 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada completa y $\mathcal{B}$ es un álgebra de Jordan-Banach fuertemente semisimple, entonces todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

En vista del Corolario 5.21 y del Ejemplo 5.22, y a la luz de los dos resultados anteriores, resulta razonable abordar el siguiente problema a cuyo estudio dedicamos la Sección 5.3:

Problema 5.25 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple y de potencias asociativas, ¿es θ automáticamente continuo?*

Siguiendo las pautas de la sección previa, estableceremos en la **Proposición 5.27** que el problema anterior se reformula como sigue:

Problema 5.28 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, y supongamos que $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas. Si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo de rango denso, ¿es θ automáticamente continuo?*

Al igual que hiciésemos antes, nos centraremos en el caso complejo, puesto que esto no es restrictivo según se pone de manifiesto en la Sección 5.1.1.

En el **Teorema 5.31**, probaremos que *el Problema* 5.28 *tiene respuesta afirmativa cuando el homomorfismo θ es* **irreducible**, es decir, cuando θ no puede restringirse a un ideal propio del álgebra dominio, manteniendo la densidad de su rango (**Definición 5.29**). En particular, en el **Corolario 5.32,** obtendremos que *cualquier homomorfismo de rango denso entre álgebras normadas completas simples con unidad es continuo, siempre que el álgebra rango sea de potencias asociativas.*

Cuando los homomorfismos no son irreducibles, probaremos en el **Teorema 5.34** que *el Problema* 5.28 *tiene respuesta afirmativa cuando el conjunto de elementos espectralmente raros en $\theta(\mathcal{A})$ no es denso en $\mathcal{B}$.*

Dado que las álgebras normadas asociativas con unidad no poseen elementos espectralmente raros (**Proposición 5.18**), resulta que el Teorema 5.34 supone una nueva generalización no asociativa del clásico Teorema de Rickart, en la que no es necesario suponer la asociatividad del álgebra de partida.

Concluiremos el Capítulo 5 mostrando condiciones que aseguran que un álgebra $\mathcal{B}$ carezca de subálgebras densas cuyo conjunto de elementos espectralmente raros sea denso en $\mathcal{B}$. Ello se hará en los **Corolarios 5.35** y **5.38**.

Para finalizar esta Memoria, en el **Capítulo 6** daremos una breve pincelada sobre las potenciales aplicaciones de esta teoría, haciendo uso de alguno de nuestros resultados sobre continuidad automática de homomorfismos. Siendo sensibles a las posibilidades que la teoría emergente pueda tener para estudiar diversas estructuras algebraicas que modelan situaciones de la Biología, terminaremos este último capítulo indicando las nuevas líneas de investigación que hemos iniciado, en este terreno más aplicado, así como los objetivos que nos hemos propuesto a medio y largo plazo, junto con otras cuestiones que podrán ser motivo de investigación en el futuro.

Breve reseña histórica sobre el interés de las álgebras no asociativas en las ciencias aplicadas.

El interés científico por las álgebras normadas no asociativas se ubica en el mismo origen de la matemática moderna y está arraigado en distintas áreas científicas, como pronto veremos.

La utilidad de los números complejos en la Física (por ejemplo, para representar las fuerzas mediante la Ley del Paralelogramo, o las rotaciones en el plano mediante el producto de números complejos) suscitó el interés por los «sistemas numéricos» de mayor dimensión. Fue por ello que William R. Hamilton, en el siglo XIX, buscó durante una década un equivalente de los números complejos en dimensión 3 que permitiese describir matemáticamente diversos entes físicos propios del espacio. La persistente búsqueda finalizó en 1843 cuando, paradójicamente, en lugar de un sistema numérico de dimensión 3, Hamilton encontró uno de dimensión 4, a cuyos elementos llamó *cuaterniones* (o *cuaternios*)[6]. Estos números aliviaron en buena

[6] Hamilton buscaba un álgebra real conmutativa, asociativa y de división de dimensión 3. Tales álgebras no existen, como años despupés demostraron K. Weierstrass (con su famoso *teorema final de la aritmética*) y F. G. Fröbenius. De ahí la larga búsqueda de Hamilton.

medida las necesidades de los físicos dada su utilidad para representar rotaciones en el espacio, por lo que de inmediato encontraron aplicación en el Electromagnetismo, así como en la Dinámica de Fluidos y, algo más tarde, en la Mecánica Cuántica. Comienza a gestarse así también el moderno *cálculo vectorial*[7], fundado por Hermann G. Grassmann en 1844 en su *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*[8], que constiye un primer tratado de lo que hoy llamamos *álgebra lineal*.

Fueron estos precedentes los que hicieron que la relación entre el plano complejo y la Geometría Euclídea sirviese de motivación para buscar generalizaciones del cuerpo de los números complejos, e indagar en las posibles geometrías asociadas. Surgieron así los llamados *números hipercomplejos* y con ellos el interés formal por las *álgebras normadas de división*. Esto dio pie al nacimiento de la primera álgebra normada de división no asociativa, los *octoniones* (o *números de Cayley*), y aquí radica el origen de las álgebras no asociativas[9], a cuyo estudio dedicamos esta Memoria.

Los octoniones son una extensión no asociativa, de dimensión ocho, de los cuaternios. Fueron descubiertos por John T. Graves en 1843, e independientemente por Arthur Cayley, quien fue el autor de la primera publicación sobre los mismos, datada en 1845. Posteriormente, la estructura de los octoniones fue clarificada por J. von Neumann en 1932. Actualmente se sigue trabajando con ellos, por ejemplo, para explicar algunas peculiaridades de la moderna Teoría de Cuerdas[10].

---

[7]Esta disciplina finalmente fue desarrollada y afianzada por los físicos Josiah W. Gibbs y Oliver Heaviside.

[8]*La teoría de las extensiones lineales, una nueva rama de las Matemáticas.*

[9]Podríamos añadir los adjetivos de *normadas completas*, pues los octoniones, con la norma euclídea, se erigen también en la primera álgebra no asociativa normada completa de la historia.

[10]Otras aplicaciones de los octoniones pueden verse en un documento de J. C. Baez [8].

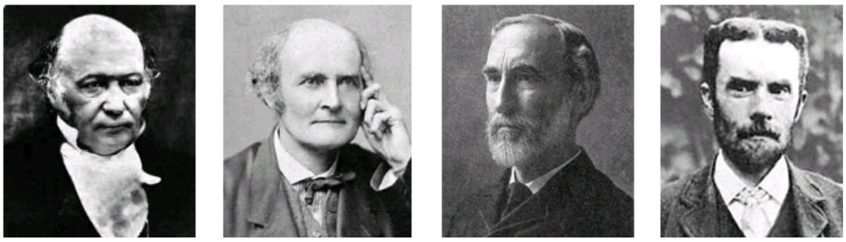

Fig. 2: De izquierda a derecha: William R. Hamilton, Arthur Cayley, Josiah Gibbs y Oliver Heaviside. Gibbs y Heaviside fueron los encargados de desarrollar y afianzar el moderno cálculo vectorial, tal y como hoy día lo conocemos.

El descubrimiento de las geometrías riemanianas, que son geometrías no homogéneas que permiten que las propiedades del espacio puedan diferir de un punto a otro, fue lo que permitió a Albert Einstein formular su *Teoría de la Relatividad*. Con ella se marca el inicio de la Mecánica Cuántica, una disciplina que surge para justificar determinados fenómenos del mundo atómico y subatómico inexplicables con las leyes de la Física Clásica, como la *radiación del cuerpo negro*, el *efecto fotoeléctrico*, o el *efecto Compton*, entre otros. La constatación de la dualidad onda-corpúsculo de la luz, junto con el hecho descubierto por Max Planck en 1900 según el cual las partículas absorbían y emitían energía en forma de cuantos proporcionales a la frecuencia de la luz o radiación, fue lo que sirvió de detonante para que Albert Einstein formulase en 1905, en base a la nueva geometría, las leyes de la *Teoría Especial de la Relatividad*, demostrando que el electromagnetismo era una teoría esencialmente no mecánica. Culminaba así lo que se ha dado en llamar Física Clásica, o no-cuántica, y nacía la Física Moderna o Física Cuántica.

Los Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica se establecieron en el *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de John von Neumann, en 1932. Esta obra, de capital importancia para la Física, es a su vez el primer compendio de *teoría espectral asociativa*.

En el mencionado texto se desarrolla la llamada *Formulación Matemática de la Mecánica Cuántica*, mediante una docena de postulados (según la formulación estándar), que ponen en plena equivalencia el modelo físico con el matemático. Así, los posibles estados físicos de un sistema cuántico se describen mediante un espacio de Hilbert, H, y los observables se representan por operadores lineales hermíticos de $L(H)$, cuyos valores propios asociados corresponden al valor del observable en dicho estado propio. En definitiva, es la teoría espectral de operadores la que describe los estados de los observables del sistema cuántico y proporciona la formulación matemática de la Mecánica Cuántica. Se pone así de manifiesto que la noción de espectro proveniente de la Física convive íntimamente con la que nace de la Matemática, de modo que las conclusiones matemáticas se pueden corroborar de forma experimental y, a su vez, la fenomenología permite intuir o guiar determinados desarrollos matemáticos.

Si bien la Mecánica Cuántica resolvió muchas cuestiones inexplicables con la Mecánica Clásica, desde los mismos orígenes de la nueva teoría fueron surgiendo otros retos y problemas. En 1933 aparecen así las *álgebras de Jordan* [41], en el ánimo de formalizar mejor la noción de observable en la Mecánica Cuántica[11]. El propio John von Neumann se sintió atraido por estas álgebras no asociativas (como ya le ocurriese con los octoniones), reconociendo los nuevos avances y participando en ellos, por lo que a los pocos meses apareció un primer trabajo conjunto de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner [42].

El hallazgo de los octoniones también proporcionó nuevas ideas, como la de reemplazar los números complejos por los de

[11]Hoy día las álgebras de Jordan se usan en diversos contextos, por ejemplo en la ciencia de la computación mediante ADN, y son estructuras que aparecen de manera natural en la recombinación molecular, tal y como el lector puede revisar en [14].

Fig. 3: De izquierda a derecha: Pascual Jordan, John von Neumann y Eugene Wigner.

Cayley, con el fin de explicar ciertas propiedades de espacio-carga de las partículas elementales. Se gesta así la llamada *Mecánica Cuántica no asociativa*, donde se contemplan tanto magnitudes observables como inobservables (relacionadas con los quarks). Pronto se supo que, para dar cabida a estas últimas magnitudes en la formulación matemática de la Mecánica Cuántica, hay que agrandar el álgebra de operadores $L(H)$ hasta verla dentro de una conveniente álgebra que ha de ser no asociativa, y que habrá que determinar según la tesitura. De esta forma, los modelos no asociativos constituyen una herramienta esencial de la Mecánica Cuántica no asociativa.

De los múltiples textos que versan sobre el interés de los modelos no asociativos en la Física, citamos como botón de muestra [60]. Allí, se detallan diversas aplicaciones Físicas concretas de múltiples álgebras no asociativas relevantes, y también se dice lo siguiente:

> «*El dicho de que Dios es un matemático, de modo que incluso con poca evidencia experimental, una teoría matemática bonita tiene una gran probabilidad de ser correcta, se ha atribuido a Dirac. El álgebra de los octoniones es ciertamente una entidad matemática preciosa y* ***es posible que otras álgebras no asociativas*** *(además, por supuesto, de las álgebras de Lie) puedan jugar un papel esencial en la Teoría Última, todavía por*

descubrir.»[12]

Igualmente interesantes son las conclusiones del artículo [23], donde el autor se expresa en los siguientes términos:

> «*Nos gustaría dar una lista de algunos problemas sin resolver: ... ¿Cómo se definen los estados propios y las funciones propias y qué son los observables de operadores no asociativos?. La formulación de reglas para el reordenamiento de corchetes sobre algunos productos de operadores no asociativos dará lugar a la aparición de la segunda constante de Planck.*»

Curiosamente fue un físico británico, I. M. H. Etherington, el precursor del uso de las álgebras no asociativas para el tratamiento de problemas genéticos[13]. Paradójicamente, Etherington abandonó sus investigaciones sobre la mecánica relativista, para investigar el tratamiento algebraico de diversos problemas genéticos, formulando las Leyes de Mendel en el lenguaje de las álgebras no asociativas como pronto veremos.

El estudio matemático de la herencia genética comenzó en 1856, con los conocidos trabajos de Gregor Mendel, y fue el propio Mendel quien empezó a usar una notación algebraica para expresar las leyes de la genética. Investigadores posteriores a Mendel, como Jennings (1917), Serebrovskij (1934) y Glivenko (1936) aportaron una visión aún más matemática de las leyes de Mendel, que culminó con la formulación algebraica de las mismas en 1939, por parte del mencionado físico I. M. H. Etherington, en los trabajos [25] y [26]. Se pone así de manifiesto que las álgebras no asociativas son el marco matemático adecuado para estudiar la genética mendeliana.

[12] Las negritas son nuestras.

[13] En honor a la verdad, Etherington no fue el primero en descubrir que estas estructuras servían para modelar la reproducción sexual, pero sí fue el primero en axiomatizar las estructuras algebraicas necesarias para describir este tipo de reproducción.

Surgen de este modo las *Álgebras Genéticas*, denominación que engloba a un numeroso colectivo de clases de álgebras no asociativas con grandes aplicaciones en Genética como son, entre otras, las *álgebras mendelianas*, las *gaméticas*, las *cigóticas*, las *báricas*, las *train-álgebras*, las *train-álgebras especiales*, las *álgebras con realización genética* o las *álgebras de Bernstein*.

Desde el siglo XIX, multitud de genetistas y matemáticos han prestado especial atención al tratamiento matemático de los problemas asociados a la herencia genética, principalmente a los relacionados con la estabilidad hereditaria. Por ejemplo, el problema de conocer qué tipos genéticos son más estables durante un proceso reiterativo de reproducción poblacional, ha sido acometido mediante técnicas analíticas y espectrales, por matemáticos como H. Geiringer, S. Bernstein, y por genetistas muy sensibilizados con el uso generalizado de las matemáticas en estas cuestiones, como J. B. S. Haldane, H. S. Jennings o R. A. Fisher. Pero, por la carencia de una teoría espectral no asociativa, estos problemas fueron tratados con métodos analíticos sofisticados. Asimismo estas limitaciones han hecho que, con frecuencia, se reconozca la importancia de estas álgebras no asociativas en dimensión infinita, pero se trabajen sólo en dimensión finita. No obstante, han sido varios los autores que no han eludido la dimensión infinita, como A. Ringwood [65, 66] y principalmente P. Holgate (véanse [33, 34, 35]), quien es indiscutiblemente el principal valedor del tratamiento de las álgebras no asociativas normadas completas para el modelado y solución de problemas de la herencia genética.[14]

Como se establece en la introducción de [76]:

> «*El estudio de las algebras genéticas (es decir, aquellas algebras que tienen interés en la genética Mendeliana)*

[14] De hecho, Philip Holgate publicó multitud de artículos sobre las álgebras genéticas. Una relación exhaustiva de sus contribuciones con el tratamiento de las álgebras no asociativas puede encontrarse en [12].

debería constituir un campo de interés matemático propio, puesto que estas álgebras son en general no asociativas y no pertenecen a ninguna de las conocidas clases existentes de álgebras no asociativas, tales como la de las álgebras de Lie, las álgebras alternativas o las álgebras de Jordan. Poseen algunas propiedades que las distinguen y dan lugar a muchos resultados matemáticos interesantes... son nuevos conceptos para los matemáticos.»

Pero, en relación con la cita anterior, reconozcamos que también han sido muchos los matemáticos que han aportado numerosas contribuciones al desarrollo de estas estructuras y sus aplicaciones en Genética, como I. M. H. Etherington, P. Holgate, I. Heuch, H. Gonshor, O. Reiersöl, y autores más modernos (dentro de los clásicos) como A. Wörz-Busekros o Y. Lyubich, entre otros. Una exposición muy didáctica de estas álgebras puede verse en [63], un artículo de 1997 donde se afirma lo siguiente:

«*Deducimos que este área de actividad investigadora está llena de posibilidades para el futuro, no sólo para los matemáticos, sino también para los genetistas que buscan una manera más sistemática y potente de modelar situaciones reales de la Genética. El álgebra no asociativa, en general, es en la actualidad un campo muy activo de investigación matemática. Sin embargo, en comparación con el conjunto de la literatura sobre otras clases de álgebras no asociativas (p.e. álgebras de Lie o álgebras de Jordan), el estudio de las álgebras relacionadas con los problemas de la herencia genética está todavía en su infancia... Por alguna razón, esas 'álgebras genéticas' no están ampliamente discutidas o estudiadas actualmente por los matemáticos americanos. Esperamos que este artículo abra una vía para nuevos debates e investigaciones sobre esta clase fascinante de álgebras no asociativas y su relación con la ciencia de la herencia genética*».

Las álgebras genéticas son el producto de la interacción entre la Biología y las Matemáticas. En palabras de J. P. Tian [76]:

> «*Su estudio revela la estructura algebraica de la genética mendeliana, lo cual simplifica y abrevia la manera de entender la genética y el fenómeno evolutivo. De hecho, es la conexión entre las estructuras puramente matemáticas y las correspondientes propiedades genéticas lo que hace esta área tan fascinante*».

El tipo de herencia descrita por las álgebras no asociativas a las que hemos hecho referencia hasta ahora, es precisamente la clásica *herencia mendeliana*, en donde la reproducción es generalmente de tipo sexual. Tras los trabajos de E. Baur y C. Correns, quedó de manifiesto que son muchos los mecanismos hereditarios que no se ajustan a las leyes descritas por Mendel pues en la naturaleza, como se sabe, existe otro tipo de reproducción llamada *asexual*[15], que se da principalmente entre los organismos unicelulares procariotas. Esta es la base de la *genética no mendeliana* en la que se sustenta la actual *genética molecular*. Las estructuras matemáticas básicas que subyacen en la genética no mendeliana son, junto con las álgebras genéticas, las llamadas *Álgebras de Evolución*. De nuevo, las álgebras de evolución resultan ser álgebras normadas completas no asociativas inclasificables en clases conocidas como las de Jordan o las de Lie. La primera monografía dedicada a estas álgebras es [76], un texto del año 2007 en el que se muestra que la utilidad de estos modelos es muy variada y se extiende hacia ámbitos muy diversos, tales como la teoría de grafos, la topología, las cadenas de Markov, o la Física, entre otros. De hecho, allí se afirma lo siguiente:

> «*Un álgebra de evolución definida por una cadena de Markov es un álgebra de evolución de Markov. En otras palabras, pueden revelarse propiedades de las cadenas*

[15]En esta reproducción, los organismos no se obtienen a partir de células de tipo sexual, sino mediante autorreplicación, en la que de un organismo se pueden obtener copias fieles de sí mismo, o bien otros organismos diferentes debido a agentes externos, como las mutaciones o la intervención de virus que modifican el código genético de los nuevos organismos.

> *de Markov estudiando sus correspondientes álgebras de evolución. Además, las cadenas de Markov, consideradas como tipos de sistemas dinámicos, poseen un aspecto algebraico oculto».*

Por tanto, en este ámbito se abre todo un campo de trabajo, idóneo para nosotros, en el que si bien ya se han establecido ciertos preliminares, hay mucho por hacer.

Esta Memoria quiere ser sensible a estas y otras necesidades, de ahí que nos hayamos propuesto formalizar, en la medida de lo posible, una teoría espectral no asociativa. Qué duda cabe que sentimos la necesidad de hacer avanzar la teoría de las álgebras no asociativas, con la esperanza de que esas estructuras sirvan de marco teórico donde modelar y resolver problemas científicos surgidos en otras áreas. Es por ello que, tras establecer una noción razonable de espectro de un elemento en un álgebra no asociativa, sobre la que sustentar nuestra teoría espectral, hemos hecho una lectura (todo lo general que hemos podido) de la clásica teoría de álgebras de Banach, comprobando qué resultados pueden mantenerse válidos en el nuevo ambiente que ha surgido al prescindir de la asociatividad. Nuestra intención ulterior ha sido contrastar la fortaleza de esta teoría, viéndola actuar en el ámbito teórico aplicado más inmediato de la teoría espectral, que es el de la *continuidad automática de homomorfismos*. A todo ello dedicaremos los restantes capítulos de esta Memoria.

Deseamos finalizar esta sección con una frase del conocido filósofo y matemático Gian Carlo Rota (1932–1999):

> «*La falta de relación entre la Matemática y la Biología es o una tragedia o un escándalo o un reto, es difícil decidir cuál de las tres*».

Parte I

Conceptos básicos de una teoría espectral no asociativa. Álgebras de división

CAPÍTULO 1

Introducción a la teoría espectral no asociativa

En lo que resta de este documento, serán necesarias bastantes nociones generales sobre las que asentar diversos resultados, relacionados con las llamadas **álgebras normadas completas** (que son álgebras no necesariamente asociativas). Sirva este capítulo para establecer explícitamente las nociones algebraicas y analíticas que serán usadas en capítulos subsiguientes, sin menoscabo del reconocido conocimiento por parte del lector del contenido mostrado. Aunque establezcamos ahora nuestro ambiente de trabajo, determinados conceptos y resultados vinculados con cuestiones más específicas, que aparecerán más adelante, serán abordados en su momento para evitar sobrecargar conceptualmente al lector en esta etapa inicial.

1.1 ¿Qué entendemos por álgebra?

En todo lo que sigue, nuestro cuerpo base de referencia será denotado por $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ representa indistintamente tanto al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales como al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. En algunas ocasiones, por comodidad, nos centraremos en el caso complejo, y lo advertiremos previamente, sin perjuicio de que los resultados expuestos, pudieran ser mayoritariamente válidos considerando un cuerpo arbitrario.

Definición 1.1 *Definimos un* **álgebra** *como un espacio vectorial $\mathcal{A}$, sobre $\mathbb{K}$, dotado de una aplicación bilineal $(a, b) \to ab$, de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, que llamaremos* **producto**. *El álgebra $\mathcal{A}$ será pues real o compleja, en función de que el cuerpo base $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{R}$ o sea $\mathbb{C}$, respectivamente.*

En el caso particular de que el producto de un álgebra $\mathcal{A}$ verifique la propiedad asociativa, esto es, que $(ab)c = a(bc)$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$, diremos que el álgebra $\mathcal{A}$ es **asociativa**.

De forma análoga, si se verifica que $ab = ba$, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, diremos entonces que el álgebra $\mathcal{A}$ es **conmutativa**.

Enfatizamos el hecho de que, a lo largo de esta Memoria, cuando se haga referencia a un álgebra, $\mathcal{A}$, no se sobreentenderá que dicha álgebra sea asociativa salvo, claro está, cuando se especifique que lo es[1]. *Lo mismo ocurrirá con la propiedad conmutativa.*[2]

Se dice que el álgebra $\mathcal{A}$ **tiene unidad**, *si existe algún elemento e verificando que*

$$ea = ae = a, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

en cuyo caso se dice que e es la **unidad** *de $\mathcal{A}$. Nótese que dicho*

[1] Existen muchos textos y documentos en la literatura donde se supone que, por defecto, las álgebras son asociativas. Las razones de esta particular preferencia tienen que ver con la riqueza de propiedades de las que se impregna la teoría vinculada a esta clase restringida de álgebras. Pero nosotros consideraremos que, tal y como se anticipó en el Prólogo, no existen razones naturales objetivas para exigir que las álgebras, en general, sean obligatoriamente asociativas.

[2] Curiosamente, en relación con lo comentado en el pie de página anterior, en los textos antes aludidos no se da por hecho que por defecto un álgebra sea conmutativa.

elemento e, si existe, ha de ser único (pues si $e' \in \mathcal{A}$ verifica la propiedad anterior, entonces $e = ee' = e'$).

Todas las **álgebras asociativas** clásicas son álgebras en el sentido establecido en la definición anterior. Sirvan de ejemplo las álgebras de funciones, las de operadores o las de convolución. Antes de dar ejemplos más generales de álgebras, debemos fijar alguna notación.

Notación 1.2 Un álgebra asociativa que será relevante para esta memoria es el álgebra $\mathcal{L}(X)$ de todos los operadores lineales $T : X \to X$ sobre un espacio vectorial X. La composición de operadores define un producto en $\mathcal{L}(X)$ de manera que, si $\dim(X) > 1$, se obtiene un álgebra que es asociativa, no conmutativa y con unidad (el operador identidad, I).

Ejemplos de álgebras en el sentido de la Definición 1.1 son todas aquellas que pueden enmarcarse en algunas de las clases de álgebras que fueron mencionadas en el Prólogo, las cuales son especialmente interesantes debido a sus aplicaciones. Las álgebras genéticas, las álgebras de evolución o las álgebras de Bernstein, determinan clases de álgebras no asociativas relevantes, como también ocurre con las álgebras de Jordan, las de Lie, las de potencias asociativas, las alternativas, o las flexibles, cuyo interés matemático, como se sabe, es de primer orden. Para evitar proporcionar aquí una lista de ejemplos tan larga como poco exhaustiva, de álgebras que ejemplifiquen algunas de las muchas clases de álgebras no asociativas notables mencionadas, nos limitaremos a presentar algunas construcciones y determinados casos particulares de ellas, que serán de utilidad en esta Memoria, que como ya se ha dicho se encuadra en el marco teórico —más abstracto— de la teoría. El lector que desee conocer ejemplos clásicos de álgebras no asociativas puede encontrarlos en abundancia consultando los siguientes textos: [25, 32, 34, 51, 60, 63, 76, 80].

Ejemplo 1.3 *Algunos ejemplos de álgebras, son los que se muestran seguidamente.*

1. Se dice que un álgebra es de **potencias asociativas** si la subálgebra generada por un elemento arbitrario de la misma es asociativa. La clase de las álgebras de potencias asociativas es muy amplia. De hecho contiene, entre otras, a la clase de las álgebras de Jordan y a la de las álgebras de Lie (véase el diagrama que aparece en [50, p. 10]). Para obtener ejemplos de álgebras de potencias asociativas, hagamos notar que la **simetrizada** de un álgebra asociativa da lugar a un álgebra de potencias asociativas, que por lo general no es asociativa. Recordemos que la simetrizada de un álgebra $\mathcal{A}$ se define como el álgebra que resulta de reemplazar el producto original de $\mathcal{A}$ (que denotamos por yuxtaposición) por este otro:

   $$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba), \text{ para cualesquiera } a, b \in \mathcal{A}.$$

   El proceso de simetrización se convertirá en la herramienta idónea para poder disfrutar de la propiedad conmutativa cuando, a priori, no se disponga de ella.

   Presentamos ahora el método más natural para construir un álgebra y, por ello, el que probablemente sea el procedimiento más antiguo. Consiste en lo siguiente:

2. Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial y fijemos una base, $\{e_i\}_{i\in I}$. En relación con la base prefijada, podemos definir una **tabla de multiplicación**, determinando las expresiones

   $$e_i e_j = \sum_{k\in I} \lambda_{ij}^k e_k,$$

tras establecer el valor de los $\lambda_{ij}^{k} \in \mathbb{K}$, para cualesquiera $i, j, k \in I$, de manera que, fijados i y j, sólo un número finito de escalares λ_{ij}^{k} sean no nulos. A las constantes $\lambda_{ij}^{k} \in \mathbb{K}$ se las llama **constantes de estructura** del álgebra $\mathcal{A}$ respecto de la base $\{e_i\}_{i\in I}$.
Definida una tabla de multiplicación, por bilinealidad, se obtiene un producto en $\mathcal{A}$, y por tanto $\mathcal{A}$ se convierte en un álgebra en el sentido de la Definición 1.1. Lo excepcional será que dicho producto resulte ser asociativo.[3]

A continuación materializamos esta construcción con un ejemplo de gran importancia, desde el punto de vista matemático e histórico. Se trata de un álgebra que determina una extensión no asociativa de los cuaternios, y constituye un ejemplo relevante de sistema de números hipercomplejos.

3. El **álgebra de Cayley** *o* **álgebra de los octoniones** $\mathbb{O}$, fue descubierta por John T. Graves en 1843 (según documentación epistolar de John T. Graves a William R. Hamilton datada en los años 1843 y 1844), e independientemente por Arthur Cayley (publicación de 1845). Dicha álgebra consiste en el espacio vectorial real con base $\{\mathbf{1}, e_1, e_2, ..., e_7\}$, donde $\mathbf{1}$ designará la unidad del álgebra, y cuyo producto se deriva de la siguiente tabla

[3]De ahí que suponer que la asociatividad de un álgebra está garantizada, no sea una cuestión tan «natural».

de multiplicación:

	$\mathbf{1}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-\mathbf{1}$	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	$-\mathbf{1}$	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	$-\mathbf{1}$	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	$-\mathbf{1}$	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-\mathbf{1}$	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	$-\mathbf{1}$	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-\mathbf{1}$

El álgebra de los octoniones es no asociativa pues $(e_1e_2)\,e_3 = e_4e_3 = -e_6$, siendo $e_1\,(e_2e_3) = e_1e_5 = e_6$. Según [8], esta observación fue hecha por Hamilton en una carta a Graves, fechada en julio de 1844, acuñándose allí el término «asociativo», por lo que los octoniones desempeñaron un papel primordial en clarificar la importancia del mismo. Posteriormente, la estructura de esta controvertida álgebra[4] fue clarificada por Pascual Jordan en 1932. $\boxdot$

[4]Como se muestra en [8], en diciembre de 1843, Graves comunica a Hamilton el hallazgo de los octoniones, cuya teoría desarrollaría después en tres cartas de enero de 1844, si bien no publicaría estos resultados hasta 1848. En 1945 Arthur Cayley redescubre los octoniones publicando este hecho en una nota marginal de su artículo 'On Jacobi's Elliptic Functions' (trabajo que contenía tal cantidad de errores que fue omitido de la colección de sus obras completas [18], excepto en la parte relativa a los octoniones). Este artículo apareció en la revista *Philosohical Magazine* en el volúmen de marzo (de 1945), y en el número siguiente apareció una reseña de Graves reivindicando su autoría sobre los octoniones. También Hamilton, esta vez en la revista *Royal Irish Academy*, confirma, en una nota de junio de 1847, la autoría de Graves sobre los ya denominados «números de Cayley» (que paradójicamente se basan en ideas de C. F. Degen de 1818).

Las aplicaciones naturales entre dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son aquellas que además de ser lineales (para preservar la estructura de espacio vectorial) son también multiplicativas, lo que garantiza la compatibilidad con el producto. Se motiva así la siguiente definición relativa a los operadores que respetan las estructuras algebraicas ambientales que nos ocupan.

Definición 1.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras sobre el mismo cuerpo base $\mathbb{K}$. Una aplicación $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice que es un* **homomorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras**, **homomorfismo de álgebras** *o simplemente* **homomorfismo**, *si θ es una aplicación lineal tal que $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$.*

Si un homomorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es inyectivo, se dirá que es un **monomorfismo**, *y si es sobreyectivo, se dice que es un* **epimorfismo** *de álgebras. Finalmente, si el homomorfismo θ es biyectivo, se dirá entonces que θ es un* **isomorfismo**. *Se dice que las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son* **isomorfas** *si existe algún isomorfismo entre ellas.*

Nótese que, de la definición anterior se deduce de manera inmediata, que la composición de homomorfismos es otro homomorfismo.

1.2 Álgebras normadas completas

De todas las normas que podamos defininir en un álgebra, nos interesarán sólo aquellas que convivan en armonía con el producto dado en ella, en el sentido que se define a continuación.

Definición 1.5 *Un* **álgebra normada** *es un álgebra $\mathcal{A}$ dotada de una* **norma de álgebra**, *esto es, una norma $\|\cdot\|$ tal que:*

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \ \forall a, b \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

La desigualdad anterior se conoce como **propiedad submultiplicativa de la norma**. Esta propiedad no es más que la continuidad del producto (salvo renormación equivalente si se requiriese[5]).

Un **álgebra normada completa** es un álgebra provista de una norma de álgebra que es completa.

Nótese que un **álgebra de Banach** en el sentido clásico de [13, 21, 61] no es más que un álgebra asociativa normada completa, y por tanto un tipo particular de álgebra normada completa.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada no completa, cuya norma denotamos por $\|\cdot\|$, y si $(\widehat{\mathcal{A}}, \|\cdot\|')$ es la completación del espacio normado $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ entonces, de forma natural, podemos dotar a $\widehat{\mathcal{A}}$ de un producto que extienda al de $\mathcal{A}$ y haga que $\|\cdot\|'$ se convierta en una norma de álgebra en $\widehat{\mathcal{A}}$. Este procedimiento se denomina **completación** del álgebra $\mathcal{A}$. Para definir el producto de dos elementos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathcal{A}}$, tomamos dos sucesiones a_n y b_n de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $a_n \to \widehat{a}$ y $b_n \to \widehat{b}$ respecto de $\|\cdot\|'$. Se demuestra sin dificultad que la sucesión $a_n b_n$ es de Cauchy en $(\widehat{\mathcal{A}}, \|\cdot\|')$ por lo que converge a algún elemento $\widehat{c} \in \widehat{\mathcal{A}}$. Finalmente se comprueba que $\widehat{c}$ no depende de las sucesiones a_n y b_n consideradas, lo que nos permite finalmente definir $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{c}$. Se tiene así el siguiente resultado, que no es más que [13, Proposition I.1.12], haciendo la observación de que allí no se requiere la asociatividad.

Teorema 1.6 *Toda álgebra normada $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ puede ser completada. Esto es, existe un álgebra normada completa $(\widehat{\mathcal{A}}, \|\cdot\|')$, que contiene a $\mathcal{A}$ como subálgebra densa y cuya norma extiende a la original, lo que significa que la aplicación identidad*

[5]Para conseguir que en una expresión del tipo $\|ab\| \leq M \|a\| \|b\|$, podamos considerar que $M = 1$.

$i : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \to (\widehat{\mathcal{A}}, \|\cdot\|')$, *es una isometría, siendo el álgebra* $i(\mathcal{A})$ *densa en* $\widehat{\mathcal{A}}$.

Si, de manera canónica, dotamos de una norma de álgebra completa a las álgebras del Ejemplo 1.3 obtenemos el próximo ejemplo. Previamente, establecemos la siguiente notación:

Notación 1.7 Dado un espacio normado X (que suponemos no trivial) denotamos por $L(X)$ al **álgebra de todos los operadores lineales y continuos** $T : X \to X$. Dicha álgebra *es un álgebra normada* con la norma de operadores, dado que si $T, S \in L(X)$, entonces $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$, como se comprueba fácilmente. Además el álgebra $L(X)$ *es completa si y sólo si el espacio normado* X *lo es.*

Ejemplo 1.8 Algunos ejemplos de álgebras normadas completas son los siguientes:

1. *La simetrizada de un álgebra de Banach es un álgebra normada completa de potencias asociativas.*

2. *Un álgebra normada finito dimensional es un álgebra normada completa.* En particular, el álgebra de los octoniones lo es, provista de la norma de álgebra dada por:

$$\|x_0\mathbf{1} + x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_7e_7\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_7^2},$$

   para cada $x_0\mathbf{1} + x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_7e_7 \in \mathbb{O}$. La norma definida satisface particularmente que $\|ab\| = \|a\| \|b\|$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{O}$, por lo que se dice que el álgebra de los octoniones es **absolutamente valuada**. $\boxdot$

1.3 Subálgebras e ideales

Si M es un subespacio vectorial de un álgebra $\mathcal{A}$, diremos que M es una **subálgebra** de $\mathcal{A}$ si $MM \subseteq M$, donde como es habitual, si B y C son subconjuntos arbitrarios de $\mathcal{A}$, denotamos por BC al subconjunto de $\mathcal{A}$ dado por:

$$BC := \{bc : b \in B, \quad c \in C\}.$$

Por tanto, toda subálgebra de un álgebra $\mathcal{A}$ es de manera natural un álgebra cuyo producto se «extiende» al producto de $\mathcal{A}$.

Si, dada un álgebra $\mathcal{A}$ y un subespacio M del espacio vectorial subyacente a $\mathcal{A}$, nos preguntamos ahora qué propiedades ha de verificar M para que la identidad

$$(a + M)(b + M) = ab + M, \qquad (a, b \in \mathcal{A}),$$

defina un producto en el espacio vectorial cociente $\mathcal{A}/M$, es fácil comprobar que la respuesta es la siguiente: *$\mathcal{A}/M$ es un álgebra con el producto mencionado si, y sólo si, el subespacio vectorial M es tal que $\mathcal{A}M \subseteq M$ y $M\mathcal{A} \subseteq M$.* Un subespacio M con dicha propiedad es a lo que llamamos **ideal** de $\mathcal{A}$.

Nótese que el producto anterior es el único producto en $\mathcal{A}/M$ que hace que la proyección canónica $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/M$ sea un homomorfismo de $\mathbb{K}-$álgebras.

Es evidente que, por paso a cociente, podemos construir nuevas álgebras a partir de los ideales de un álgebra.

A continuación presentamos algunos ejemplos de ideales que serán relevantes para nuestros desarrollos.

Ejemplo 1.9 *Ideales con significado teórico son los siguientes:*

1. Si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo entre las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces su **núcleo**, esto es, el subespacio

$$\ker \theta := \{a \in \mathcal{A} : \theta(a) = 0\},$$

es un ideal del álgebra $\mathcal{A}$. En consecuencia, $\mathcal{A}/\ker\theta$ es un álgebra. Además, el homormorfismo θ induce un monomorfismo $\widetilde{\theta} : \mathcal{A}/\ker\theta \to \mathcal{B}$ que es el definido como $\widetilde{\theta}(a + \ker\theta) = \theta(a)$, para cada $a \in \mathcal{A}$, de manera que θ factoriza como $\theta = \widetilde{\theta}\pi$, donde $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\ker\theta$ es la proyección canónica.
Por otra parte, cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas y θ es un homomorfismo continuo, entonces el ideal $\ker\theta$ es cerrado, y de ahí que la cerrabilidad del núcleo sea una condición necesaria para la continuidad de un homomorfismo.

2. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas, y si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo, entonces el **subespacio separador** de θ es un ideal cerrado de $\mathcal{B}$. Como se sabe, el subespacio separador es el conjunto:

$$\mathfrak{s}(\theta) := \{b \in \mathcal{B} : \exists a_n \in \mathcal{A},\ a_n \to 0,\ \text{tal que } \theta(a_n) \to b\}\,.$$

$\boxdot$

Quizás proceda recordar en este momento, en relación con el ejemplo anterior, que el interés del subespacio separador se pone de manifiesto con el **Teorema de la Gráfica Cerrada**, que establece que un operador lineal $\Psi : X \to Y$ entre dos espacios de Banach X e Y es continuo si y sólo si $\mathfrak{s}(\Psi) = \{0\}$.

Como veremos, a veces es conveniente considerar subespacios que se comportan como ideales unilateralemente, aunque no lleguen a ser un ideal. Por esta razón, se define el concepto de ideal por un lado de la siguiente manera.

Se dice que un subespacio M de un álgebra $\mathcal{A}$ es un **ideal por la izquierda** (o un **ideal izquierdo**) de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}M \subseteq M$. De idéntica manera, se dice que M es un **ideal por la derecha** (o un

ideal derecho) de $\mathcal{A}$ si $M\mathcal{A} \subseteq M$. Por tanto, un **ideal** de $\mathcal{A}$ no es más que un subespacio de $\mathcal{A}$ que es a la vez un ideal izquierdo y derecho. Habitualmente, en virtud de estas definiciones, los ideales también son denominados **ideales biláteros**.

Dado que la intersección de una familia de subálgebras o de ideales (por la izquierda, por la derecha, biláteros) sigue siendo una subálgebra o un ideal (con la misma propiedad), respectivamente, queda motivada la siguiente definición.

Definición 1.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, y sea X un subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$. El* **ideal izquierdo** *(resp.* **derecho**, *o* **bilátero***)* **generado por** *X es la intersección de todos los ideales izquierdos (resp. derechos, o biláteros) de $\mathcal{A}$ que contienen a X. Dicho ideal, que es el más pequeño ideal izquierdo (resp. derecho o bilátero) de $\mathcal{A}$ que contiene a X se denota por $\langle X\rangle_{izq}$ (resp. $\langle X\rangle_{der}$, o $\langle X\rangle$). De forma análoga se define la* **subálgebra generada por** *X.*

Diremos que un ideal M (resp. ideal por la izquierda o por la derecha) de un álgebra $\mathcal{A}$ es **propio** si está contenido en $\mathcal{A}$ estrictamente.

También diremos que M es un ideal (resp. por la izquierda, por la derecha) **maximal**, si es propio y no está contenido en ningún otro ideal (resp. por la izquierda, por la derecha) propio.

Un álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es **simple**, si su producto no es cero y no contiene ideales propios no nulos.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada, y sea M un ideal (por la izquierda, por la derecha o bilátero) de $\mathcal{A}$. Si denotamos por $\overline{M}$ a la clausura de M, es inmediato comprobar que $\overline{M}$ es un ideal (por la izquierda, por la derecha, bilátero) de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra con unidad, cabría pensar que la clausura de un ideal propio debe ser también un ideal propio. Pero veremos que para tener garantizada una propiedad que a priori es tan natural, se requiere estar en ambientes de cierto privilegio. La complitud sirve para garantizar dicha disposición, como se muestra a continuación siguiendo [78, Corollary 6]. Previamente debemos fijar alguna notación.

Notación 1.11 Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, y sea $a \in \mathcal{A}$. Definimos las **potencias por la izquierda** del elemento a como sigue:

$$a_{izq}^1 := a, \quad a_{izq}^2 := aa, ..., \ a_{izq}^{n+1} := aa_{izq}^n \qquad (n > 1)\,.$$

De manera análoga, se definen las **potencias por la derecha** del elemento $a \in \mathcal{A}$ por las relaciones:

$$a_{der}^1 := a, \quad a_{der}^2 := aa, ..., \ a_{der}^{n+1} := a_{der}^n a \qquad (n > 1)\,.$$

Si $\mathcal{A}$ posee una unidad e, notaremos $a^0 := e$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, para un elemento arbitrario a de un álgebra normada $\mathcal{A}$, el conjunto:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{A}}\,(a, r) = \{b \in \mathcal{A} : \|b - a\| < r\}$$

denotará la **bola abierta centrada en** a **de radio** $r > 0$.

Proposición 1.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada con unidad, e. Consideremos la siguientes afirmaciones:*

(a) *Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_{izq}^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_{der}^n$ son convergentes, para cada $a \in \mathcal{A}$, con $\|a\| < 1$.*

(b) *Para cada $a \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}\,(e, 1)$, el ideal por la izquierda y el ideal por la derecha generados por a coinciden con $\mathcal{A}$.*

(c) *Si M es un ideal por la izquierda o bien por la derecha de $\mathcal{A}$, entonces M es propio si y solo si $d(e, M) \geq 1$.*

(d) *Si M es un ideal por la izquierda o bien por la derecha de $\mathcal{A}$, entonces M es propio si y solo si $\overline{M}$ es propio.*

(e) *Cualquier ideal maximal por la izquierda o bien por la derecha de $\mathcal{A}$ es cerrado.*

Entonces $(a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$. *Si $\mathcal{A}$ es asociativa, entonces también* $(b) \Rightarrow (a)$.

Además, si $\mathcal{A}$ es completa, entonces todas las afirmaciones anteriores se verifican.

Demostración. Para probar $(a) \Rightarrow (b)$, sea $a \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}(e, 1)$. Como $\|e - a\| < 1$ tenemos que, por hipótesis, $u := \sum_{n=0}^{\infty} (e-a)_{izq}^{n}$ y $v := \sum_{n=0}^{\infty} (e-a)_{der}^{n}$ son elementos de $\mathcal{A}$ puesto que las series que los definen son convergentes en $\mathcal{A}$. Dado que

$$u(e-a) = \sum_{n=0}^{\infty} (e-a)_{izq}^{n} (e-a) = u - e,$$

se tiene que $ua = e$. Análogamente $av = e$. En consecuencia, $\langle a \rangle_{izq} = \mathcal{A} = \langle a \rangle_{der}$.

Para probar $(b) \Rightarrow (c)$, sea M un ideal izquierdo o derecho del álgebra $\mathcal{A}$. Si $d(e, M) \geq 1$ entonces $e \notin M$ y por tanto M es propio; por otro lado, si fuese $d(e, M) < 1$, existirá algún $m \in M$ tal que $\|e - m\| < 1$ en cuyo caso, por hipótesis, $\langle m \rangle_{izq} = \langle m \rangle_{der} = \mathcal{A}$, luego M no sería propio. Esto prueba que si M es propio entonces $d(e, M) \geq 1$.

La implicación $(c) \Rightarrow (d)$ se deduce trivialmente de la igualdad $d(e, M) = d(e, \overline{M})$, mientras que la implicación $(d) \Rightarrow (e)$ es obvia.

Para probar $(e) \Rightarrow (b)$, sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|e - a\| < 1$. Si $\langle a \rangle_{izq}$ es propio entonces, por el lema de Zorn, existe un ideal izquierdo maximal, M, que contiene a $\langle a \rangle_{izq}$. Puesto que

$$(e-a) - (e-a)_{der}^{n} = \sum_{k=1}^{n-1} (e-a)_{der}^{k}\, a \in \langle a \rangle_{izq},$$

tenemos que $(e-a) - (e-a)_{der}^{n} \in M$. Pero, por hipotesis, M es cerrado y $\|e - a\| < 1$, de donde concluimos que $e \in M$, una contradicción que muestra que $\langle a \rangle_{izq} = \mathcal{A}$. Un razonamiento análogo probaría que $\langle a \rangle_{der} = \mathcal{A}$.

Si el álgebra $\mathcal{A}$ es asociativa entonces las afirmaciones (a) y (b) son equivalentes, como se deduce de [61, Proposition 2.2.7, Corollary 2.4.8].

Finalmente, si $\mathcal{A}$ es completa, entonces la afirmación (a) se verifica trivialmente, y con ella todas las demás. □

Comenzábamos la sección argumentando que un ideal de un álgebra $\mathcal{A}$ es un subespacio M que es tal que la igualdad

$$(a+M)(b+M) = ab + M, \qquad (a, b \in \mathcal{A}),$$

define un producto en el espacio vectorial cociente $\mathcal{A}/M$.

Si M es un ideal y deseamos que el álgebra cociente $\mathcal{A}/M$ tenga unidad, $u + M$, lo que hemos de exigirle a M es que sea un *ideal modular*, en el sentido que se establece a continuación.

Definición 1.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y sea M un subespacio de $\mathcal{A}$.*

(a) *Se dice que M es un* **ideal modular por la izquierda** *de $\mathcal{A}$ si M es un ideal por la izquierda, y para él existe una* **unidad modular por la derecha**, *esto es, un elemento $u \in \mathcal{A}$ tal que $a - au \in M$ para todo $a \in \mathcal{A}$. De manera análoga, un* **ideal modular por la derecha** *de $\mathcal{A}$ es un ideal por la derecha de $\mathcal{A}$ para el que existe una* **unidad modular por la izquierda**, *es decir, un elemento $u \in \mathcal{A}$ tal que $a - ua \in M$, para todo $a \in \mathcal{A}$.*

(b) *Se dice que M es un* **ideal modular por un lado** *si M es un ideal modular por la izquierda (con unidad modular por la derecha u) o bien un ideal modular por la derecha (con unidad modular por la izquierda u), en cuyo caso se dice que u es una* **unidad modular por un lado** *de M.*

(c) *Si M es un ideal bilátero de $\mathcal{A}$, y existe un elemento $u \in \mathcal{A}$ tal que, tanto $a - au$ como $a - ua$ pertenecen a M, para todo $a \in \mathcal{A}$, diremos que M es un* **ideal modular bilátero** *de $\mathcal{A}$, y que u es una* **unidad modular** *para M.*

En particular, si un álgebra $\mathcal{A}$ posee una unidad e, entonces cualquier ideal de $\mathcal{A}$ puede recibir el calificativo de modular sin más que tomar en la definición anterior $u = e$.

La Proposición 1.12 se establece en términos de ideales modulares de la siguiente forma (siguiendo las ideas de [78, Proposition 7]).

Proposición 1.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(a) *Las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_{izq}^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{der}^n$ son convergentes, para cada $a \in \mathcal{A}$, con $\|a\| < 1$.*

(b) *Si un ideal modular por la izquierda (resp. derecha) M tiene una unidad modular por la derecha (resp. izquierda) u tal que $\|u\| < 1$, entonces $M = \mathcal{A}$.*

(c) *Si M es un ideal modular por la izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{A}$, y u es una unidad modular por la derecha (resp. izquierda) para M, entonces M es propio si y solo si $d(u, M) \geq 1$.*

(d) *Si M es un ideal modular por la izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{A}$, entonces M es propio si y solo si $\overline{M}$ es propio.*

(e) *Cualquier ideal modular por la izquierda (o por la derecha) maximal de $\mathcal{A}$ es cerrado.*

Entonces $(a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$. Si $\mathcal{A}$ es asociativa, entonces también $(b) \Rightarrow (a)$.

Además, si $\mathcal{A}$ es completa, entonces todas las afirmaciones anteriores se verifican.

Demostración. Para probar $(a) \Rightarrow (b)$, supongamos que M es un ideal modular por la izquierda con unidad modular por la derecha $u \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}(0,1)$. Nótese que $\mathcal{A}(1-u) \subseteq M$. Además, por ser $\|u\| < 1$, se tiene por hipótesis que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{der}^n \in \mathcal{A}$ de donde $u = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{der}^n\right)(1-u) \in M$. En consecuencia M no es propio, pues para cada $a \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$a = (a - au) + au \in M + M = M.$$

Razonamos de forma análoga si M es un ideal modular por la derecha.

Para probar $(b) \Rightarrow (c)$, supongamos que M es un ideal modular por un lado, y sea u una unidad modular por un lado, de M. Si fuese $d(u, M) < 1$, deberá existir algún $m \in M$ con $\|u - m\| < 1$. Como $u - m$ es también una unidad modular para M, por hipótesis $M = \mathcal{A}$, de donde se deduce que M es propio si, y sólo si $d(u, M) \geq 1$.

La implicación $(c) \Rightarrow (d)$ se obtiene del hecho de que si M es un ideal modular por un lado, con unidad modular por un lado u, entonces $\overline{M}$ es un ideal del mismo tipo con la misma unidad modular, siendo además $d(u, M) = d(u, \overline{M})$.

La implicación $(d) \Rightarrow (e)$ es trivial.

Veamos ahora que $(e) \Rightarrow (b)$. Para ello, sea M un ideal modular por la izquierda, con unidad modular derecha u, siendo $\|u\| < 1$. Si M es propio entonces, por el Lema de Zorn, M estaría contenido en un ideal modular izquierdo maximal M_0, que por hipótesis, sería cerrado. Pero, al ser $\|u\| < 1$, se tiene que

$$u = \lim_{n\to\infty} (u - u_{der}^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} u_{der}^k (1-u) \in M,$$

por lo que concluimos que $u \in M_0$, lo que contradice la maximalidad de M_0, probando que $M = \mathcal{A}$.

Para finalizar, mostramos que si el álgebra $\mathcal{A}$ es asociativa entonces las afirmaciones (a) y (b) son equivalentes, hecho que se obtiene concatenando dos resultados de [61], la Proposición 2.2.7 (en su equivalencia $(a) \Longleftrightarrow (d)$) y el Corolario 2.4.8.

El resto es obvio. $\square$

Como quiera que cuando un álgebra posee unidad, el adjetivo modular es innecesario, la Proposición 1.12 podría haberse deducido de la Proposición 1.14, si bien hemos introducido aquí una prueba directa por su interés metodológico.

Nótese también que las dos proposiciones anteriores advierten, una vez más, de la posibilidad de extender de forma natural a un contexto más general (el no asociativo), diversos resultados clásicos de la teoría espectral asociativa. De hecho, a la vista está que muchos de estos resultados no están ligados a las propiedades del producto definido en el álgebra donde se aplican.

A partir de las proposiciones anteriores, deducimos de manera obvia lo que se va a afirmar en el siguiente resultado en relación con los ideales biláteros; información que complementamos con lo ya probado para los ideales por un lado.

Corolario 1.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada completa. Entonces los ideales modulares maximales (por la izquierda, por la derecha o biláteros) de $\mathcal{A}$ son cerrados. En consecuencia, si $\mathcal{A}$ tiene unidad entonces los ideales maximales (por la izquierda, por la derecha o biláteros) también son cerrados.*

1.4 Unitización de un álgebra

El concepto de unidad es inherente a la definición de inverso, y este último al de espectro. El problema de que un álgebra $\mathcal{A}$

carezca de unidad se solventa en buena medida gracias al proceso de unitización del álgebra dada, que consiste en construir la más pequeña álgebra con unidad, $\mathcal{A}_1$, que contiene al álgebra $\mathcal{A}$ como ideal.

Para ello, consideremos el espacio vectorial $\mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$, en donde se define el producto

$$(a+\lambda\mathbf{1})\,(b+\mu\mathbf{1}) := ab + \mu a + \lambda b + \lambda\mu\mathbf{1},$$

para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Se obtiene así el álgebra que denotamos como $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$, cuya unidad es $\mathbf{1}$, que recibe el nombre de **unitización** de $\mathcal{A}$, **álgebra unitizada** de $\mathcal{A}$, o **envolvente unital** del álgebra $\mathcal{A}$. La aplicación $a \mapsto a \equiv a + 0\mathbf{1}$ es trivialmente un monomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_1$, que nos permite identificar $\mathcal{A}$ con su imagen, y comprobar que $\mathcal{A}$ es un ideal maximal del álgebra unitizada $\mathcal{A}_1$.

Nótese que $\mathcal{A}_1$ es asociativa si, y sólo si, $\mathcal{A}$ lo es.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada, con norma de álgebra $\|\cdot\|$, entonces la unitización $\mathcal{A}_1$ puede dotarse de manera natural de la siguiente norma de álgebra (que abusando del lenguaje, será representada también por $\|\cdot\|$):

$$\|a+\lambda\mathbf{1}\| := \|a\| + |\lambda|\,.$$

Se convierte así $\mathcal{A}_1$ en un álgebra normada **unital** (es decir, posee unidad y su norma es 1), que será completa si y sólo si $\mathcal{A}$ lo es.

1.5 Complexificación de un álgebra real

Dada un álgebra real $\mathcal{A}$, el álgebra compleja más pequeña que, vista como real, contiene a $\mathcal{A}$ como subálgebra, se llama **complexificación** de $\mathcal{A}$ y se construye como sigue: definimos el espacio vectorial complejo $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ dado por

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \mathcal{A} \oplus i\mathcal{A} = \{a + ib : a, b \in \mathcal{A}\}\,,$$

donde i denota la unidad imaginaria del cuerpo de los números complejos, y la suma y el producto por escalares se definen como:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d),\ (a,b,c,d\in\mathcal{A})$$
$$(r+is)\,(a+ib)=ra-sb+i(rb+sa),\ (r,s\in\mathbb{R};\ a,b\in\mathcal{A}).$$

Ahora, definimos el producto de dos elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

$$(a+ib)\,(c+id)=ac-bd+i(ad+bc),\ \ \forall a,b,c,d\in\mathcal{A}.$$

Se dota así a $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ de estructura de $\mathbb{C}-$álgebra, y se dice que $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es la **complexificación de $\mathcal{A}$**.

Algunos hechos de interés relativos a la complexificación de un álgebra real $\mathcal{A}$ son los siguientes:

1. $\mathcal{A}$ tiene unidad si, y sólo si, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ la tiene, en cuyo caso la unidad es la misma para ambas álgebras.

2. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es asociativa, si y sólo si $\mathcal{A}$ lo es.

3. La unitización de la complexificación de un álgebra real $\mathcal{A}$ es isomorfa a la complexificación de la unitización de dicha álgebra, es decir:

   $$(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})_1\cong(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}}\,.$$

   Éste es un hecho que se comprueba sin dificultad.

4. Si el álgebra real $\mathcal{A}$ es un álgebra normada respecto de la norma $\|\cdot\|$, entonces el álgebra complexificada $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ también puede dotarse de una norma de álgebra $\|\cdot\|'$ tal que $\|a\|'=\|a\|$, $\forall a\in\mathcal{A}$. Además la norma de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ será completa si y sólo si la norma de $\mathcal{A}$ lo es (véase [13, Proposition I.13.5], donde la asociatividad es irrelevante).

5. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras reales y $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo entonces θ induce un homomorfismo $\theta_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ que es el definido como:

$$\theta_{\mathbb{C}}(a + ib) := \theta(a) + i\theta(b), \quad (a, b \in \mathcal{A}).$$

   En el caso de que las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean normadas, se tiene que θ es continuo si, y sólo si, $\theta_{\mathbb{C}}$ lo es.

1.6 ¿Qué entendemos por elemento invertible?

Recordemos que si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa con unidad, un elemento $b \in \mathcal{B}$ se dice que es **invertible** si existe otro elemento $c \in \mathcal{B}$ tal que:

$$bc = cb = e. \tag{1.2}$$

En caso de que exista, tal elemento c es único. En efecto, si existiesen elementos c_1 y c_2 en $\mathcal{B}$ tales que $bc_1 = e = c_2 b$, entonces, en virtud de la asociatividad del producto, se tendría que:

$$c_1 = ec_1 = (c_2 b)c_1 = c_2(bc_1) = c_2 e = c_2.$$

El único elemento c satisfaciendo (1.2) se representa por b^{-1} y se llama el **inverso** de b. El conjunto de todos los elementos de $\mathcal{B}$ que son invertibles se denota por $\mathrm{Inv}(B)$.

Si ahora consideramos un álgebra arbitraria $\mathcal{A}$ (posiblemente no asociativa), provista de unidad, e, y tomamos un elemento $b \in \mathcal{A}$, resulta que, en caso de que exista un elemento $c \in \mathcal{A}$ tal que $bc = cb = e$, dicho elemento no tiene por qué ser único (de hecho, es fácil construir tablas de multiplicación en las que se presente esta patología). De esta manera, para poder ampliar la teoría espectral clásica al ambiente no asociativo, habremos de poner especial atención en definir el concepto de elemento invertible.

Por lo anteriormente expuesto, conviene reformular (de forma equivalente) la noción de elemento invertible en un álgebra asociativa con unidad, de modo que la reformulación considerada se pueda desproveer de la asociatividad sin ninguna dificultad.

Históricamente este problema se ha abordado mediante la observación que vamos a recoger en la siguiente proposición. Previamente fijamos la notación requerida.

Notación 1.16 Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, y fijamos un elemento $a \in \mathcal{A}$, se definen los **operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha** por el elemento a, respectivamente, como los operadores $L_a, R_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dados por $L_a(b) = ab$ y $R_a(b) = ba$, para cada $b \in \mathcal{A}$. Puesto que son operadores lineales tenemos que $L_a, R_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, para cada $a \in \mathcal{A}$. En caso de que $\mathcal{A}$ sea un álgebra normada, es elemental comprobar que dichos operadores también son continuos, por lo que $L_a, R_a \in L(\mathcal{A})$.

Proposición 1.17 *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa con unidad, entonces un elemento $b \in \mathcal{B}$ es invertible si, y sólo si, los operadores de multiplicación L_b y R_b son biyectivos.*

Demostración. Nótese que si $b \in \mathcal{B}$ es invertible entonces los operadores de multiplicación L_b y R_b son biyectivos de manera obvia, pues $L_b^{-1} = L_{b^{-1}}$ y $R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$. Recíprocamente, si L_b y R_b son biyectivos, entonces por la asociatividad de $\mathcal{B}$ se obtiene sin dificultad que $L_b^{-1}(e) = R_b^{-1}(e) = b^{-1}$. $\square$

Lo que acabamos de demostrar es que *si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa con unidad, entonces $b \in \mathcal{B}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{B}$ si y sólo si, los operadores L_b y R_b son invertibles en $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.*

Lo establecido en la proposición anterior invita a desproveer de la asociatividad la noción de elemento invertible conforme a lo que allí se dice. Queda pues motivada la siguiente definición ya considerada, de alguna manera, por A. A. Albert, R. D. Schafer y F. B. Wright en la primera mitad del siglo pasado [5, 72, 81]. No obstante, hay que reconocer que en la literatura siempre se pasó de soslayo sobre este tema, lo que hace que la definición que presentamos a continuación sea en cierto modo «original», como también lo es la noción de espectro asociada a ella, que vamos a establecer en la próxima sección con el nombre de **m−espectro**.

Definición 1.18 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad. Diremos que $a \in \mathcal{A}$ es* **multiplicativamente invertible** *(abreviadamente* **m-invertible***) cuando los operadores L_a y R_a sean biyectivos. Al conjunto de los elementos m-invertibles del álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos por* $\mathrm{m} - \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Acabamos de establecer que *si $\mathcal{A}$ es un álgebra con unidad, entonces $a \in \mathcal{A}$ es invertible en el álgebra $\mathcal{A}$ si y sólo si, los operadores L_a y R_a son invertibles en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$* (que es un álgebra asociativa con independencia de que $\mathcal{A}$ lo sea o no). Así pues, disfrutaremos de las prebendas de haber diferido el problema de la invertibilidad del caso no-asociativo al asociativo.

En virtud de la Proposición 1.17, *si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa con unidad, entonces un elemento es invertible si y sólo si es m-invertible*, por lo que $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}) = \mathrm{m} - \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra arbitraria con unidad. Una disfunción de la definición anterior, en relación a lo que acontece en el caso asociativo, es que el producto de dos elementos m-invertibles, de $\mathcal{A}$, puede no ser m-invertible como mostramos a continuación.

Ejemplo 1.19 Consideremos el espacio vectorial complejo $\mathcal{A}$

con base $\{e, a, b, c\}$, provisto con el producto determinado por la siguiente tabla de multiplicación:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	0

Se dota así a $\mathcal{A}$ de estructura de álgebra no asociativa, pues $c(cb) = ca = e$, mientras que $(cc)b = 0b = 0$. Nótese que los elementos a y b son m-invertibles y $c = ab$ no lo es, pues el elemento b no se encuentra en el rango de L_c ni en el de R_c. $\boxdot$

Sin embargo, y ahora en concordancia con el caso asociativo, en presencia de complitud, sí que se obtiene la siguiente importante, y por tanto deseable, propiedad del conjunto $\mathrm{m-Inv}(\mathcal{A})$.

Proposición 1.20 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada completa con unidad, entonces el conjunto $\mathrm{m} - \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ es abierto.*

Demostración. Si $a \in \mathcal{A}$ es m-invertible, entonces L_a y R_a son elementos invertibles en el álgebra de Banach $L(\mathcal{A})$, luego, por [13, Theorem I.2.11], las bolas abiertas $\mathbf{B}_{L(\mathcal{A})}(L_a,\ \|L_a^{-1}\|^{-1})$ y $\mathbf{B}_{L(\mathcal{A})}(R_a,\ \|R_a^{-1}\|^{-1})$ están contenidas en el conjunto $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{A}))$ de los elementos invertibles de $L(\mathcal{A})$. Consecuentemente, si

$$0 < r \leq \min\{\left\|L_a^{-1}\right\|^{-1},\ \left\|R_a^{-1}\right\|^{-1}\},$$

y si $b \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}(a,\ r)$, entonces los operadores L_b y R_b pertenecen a $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{A}))$, y en consecuencia b es m-invertible en $\mathcal{A}$. Esto prueba que el conjunto $\mathrm{m} - \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ es un abierto, como deseábamos probar. $\square$

Hagamos notar que la proposición anterior nos muestra en particular que:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{A}}(e,1) \subseteq \mathrm{m} - \mathrm{Inv}(\mathcal{A}),$$

donde e denota a la unidad del álgebra $\mathcal{A}$.

1.7 El m-espectro de un elemento

Siempre que dispongamos de una noción de elemento invertible tendremos la correspondiente definición de espectro de un elemento. La presente sección se dedica a establecer la noción de espectro asociada a la Definición 1.18, que vamos a denominar **m-espectro**.

Recordemos que si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa compleja con unidad, entonces el **espectro** de un elemento $b \in \mathcal{B}$ se define como:

$$\sigma^{\mathcal{B}}(b) := \{\lambda \in \mathbb{C} : b - \lambda e \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{B})\}.$$

La definición de espectro de un elemento en un álgebra asociativa compleja sin unidad se remite a la unitización del álgebra dada, mientras que el espectro de un elemento en un álgebra asociativa real se define como el espectro de dicho elemento en la complexificación del álgebra considerada.[6]

En concordancia con el caso asociativo (que pretendemos cubrir con nuestro desarrollo), establecemos la siguiente definición.

Definición 1.21 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja con unidad e. Definimos el* **espectro multiplicativo** *(abreviadamente* **m-espectro***) de $a \in \mathcal{A}$ como el conjunto $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$ de los $\lambda \in \mathbb{C}$*

[6] La razón de remitirse al caso complejo consiste en poder garantizar que el espectro de un elemento sea no vacío, en presencia de una norma de álgebra.

tales que $a - \lambda e$ no es m-invertible. Por tanto:

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : L_a - \lambda I \text{ o bien } R_a - \lambda I \text{ no es biyectivo}\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja sin unidad, entonces definimos el **m-espectro** *de $a \in \mathcal{A}$ como el conjunto $\sigma_m^{\mathcal{A}_1}(a)$, donde $\mathcal{A}_1$ denota a la unitización de $\mathcal{A}$. Finalmente, si $\mathcal{A}$ es un álgebra real, entonces definimos el* **m-espectro** *de $a \in \mathcal{A}$ como $\sigma_m^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(a)$, donde $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ representa la complexificación de $\mathcal{A}$.*

La definición anterior motiva varias reflexiones. La primera es que la Proposición 1.17 se reescribe como sigue: si $\mathcal{B}$ es un álgebra asociativa, entonces

$$\sigma^{\mathcal{B}}(b) = \sigma_m^{\mathcal{B}}(b) \qquad (b \in \mathcal{B}),$$

lo que pone de manifiesto que el *m-espectro que hemos definido es una generalización, hasta el marco no asociativo, de la noción de espectro de un elemento de un álgebra asociativa.*

Otra cuestión de interés que motiva el nuevo espectro, tiene que ver con el vínculo que mantiene, de manera natural, con el espectro de un operador en el álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Como quiera que el álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ es asociativa, y su unidad es el operador identidad $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, resulta que el espectro de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ se define como:

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{L}(\mathcal{A}))\},$$

lo que puede expresarse en los siguientes términos:

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es biyectivo}\}.$$

Por tanto, de la definición de m-espectro se desprende que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja con unidad, entonces para cada $a \in \mathcal{A}$,

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) := \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a). \tag{1.3}$$

Un resultado trivial que vamos a codificar por sus aplicaciones es el siguiente:

Proposición 1.22 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra con unidad, e, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces*

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(\alpha a+\beta e)=\{\alpha\lambda+\beta:\lambda\in\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)\},\qquad (a\in\mathcal{A},\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}).$$

Demostración. El caso complejo es obvio, puesto que

$$\begin{aligned}\sigma_m^{\mathcal{A}}(\alpha a+\beta e) &= \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_{\alpha a+\beta e})\cup\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_{\alpha a+\beta e})\\ &= \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(\alpha L_a+\beta I)\cup\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(\alpha R_a+\beta I)\\ &= \{\alpha\lambda+\beta:\lambda\in\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a)\cup\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a)\}\\ &= \{\alpha\lambda+\beta:\lambda\in\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)\}.\end{aligned}$$

El caso real se deduce del complejo, dado que $\sigma_m^{\mathcal{A}}(\alpha a+\beta e)=\sigma_m^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\alpha a+\beta e)$ para cualesquiera $a\in\mathcal{A}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. □

De otra parte, si $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja que carece de unidad, entonces

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a):=\sigma_m^{\mathcal{A}_1}(a)=\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(L_a)\cup\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(R_a),$$

hecho que sigue siendo válido en el caso real, por ser las álgebras $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})_1$ y $(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}}$ isomorfas. El siguiente resultado nos muestra cómo expresar el conjunto anterior sin necesidad de hacer mención explícita del álgebra unitizada.

Proposición 1.23 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sin unidad, y sea $\mathcal{A}_1$ su unitización. Entonces*

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a)\backslash\{0\}=\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(L_a)\backslash\{0\},$$

para cualquier $a\in\mathcal{A}$. Similarmente:

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a)\backslash\{0\}=\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(R_a)\backslash\{0\}.$$

En consecuencia,

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)=\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a)\cup\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a)\cup\{0\}.$$

<u>Demostración</u>. Supongamos que $\mathcal{A}$ es compleja. Sea $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Es fácil comprobar que el operador $L_a - \lambda I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es inyectivo si y solo si $L_a - \lambda I : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ lo es también. Análogamente sucede con la sobreyectividad. De hecho, si $L_a - \lambda I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es sobreyectivo, entonces existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $(L_a - \lambda I)(b) = \frac{1}{\lambda}a$. Por tanto

$$(L_a - \lambda I)(b - \frac{1}{\lambda}\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

de donde, de nuevo por la sobreyectividad de $L_a - \lambda I$, deducimos que el operador $L_a - \lambda I : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ también es sobreyectivo. Recíprocamente, de la sobreyectividad del operador $L_a - \lambda I : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ se obtiene directamente la de $L_a - \lambda I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. En consecuencia,

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(L_a)\backslash\{0\} = \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a)\backslash\{0\}.$$

Similarmente

$$\sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(R_a)\backslash\{0\} = \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a)\backslash\{0\}.$$

Por otra parte, dado que la unidad de $\mathcal{A}_1$ nunca está contenida en el rango de L_a ni en el de R_a, tenemos que

$$0 \in \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(L_a) \cap \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(R_a).$$

Puesto que, por definición,

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) := \sigma_m^{\mathcal{A}_1}(a) = \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(L_a) \cup \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}(R_a),$$

concluimos así que

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a) \cup \{0\},$$

como se deseaba. El caso real se obtiene del complejo teniendo en cuenta la identificación entre las álgebras $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})_1$ y $(\mathcal{A}_1)_{\mathbb{C}}$. $\square$

Como ya se ha comentado, cuando el álgebra $\mathcal{A}$ es normada, tenemos adicionalmente que los operadores L_a y R_a pertenecen al álgebra asociativa normada de los operadores lineales y continuos $L(\mathcal{A})$. Si además $\mathcal{A}$ es completa, entonces el **Teorema de los isomorfismos de Banach** nos asegura que $T \in L(\mathcal{A})$ es invertible en $L(\mathcal{A})$ si, y sólo si, lo es en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. En términos de espectros, esto se expresa diciendo que para cualquier elemento a de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$, se tienen las dos igualdades siguientes:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(L_a) & = & \sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \\ \sigma^{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(R_a) & = & \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a). \end{array}$$

La igualdad (1.3) nos dice entonces que:

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a).$$

Todas estas consideraciones quedan recogidas en el siguiente corolario.

Corolario 1.24 *Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra normada completa, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces:*

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)\backslash\{0\} = [\sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a)]\backslash\{0\}.$$

De hecho, si $\mathcal{A}$ tiene unidad, entonces

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a),$$

mientras que si no la tiene,

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \cup \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a) \cup \{0\}.$$

A partir de [13, Theorem 1.5.8] y del Corolario 1.24 se obtiene el siguiente resultado que pone de manifiesto el carácter **espectral** de las álgebras normadas completas en el espíritu de [61] (véase allí la Sección 2.2).

Proposición 1.25 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada completa, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$. De hecho, $|\lambda| \leq \|a\|$, para cualquier $\lambda \in \sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$.*

Establecemos ahora la longitud del menor radio que ha de tener un disco centrado en el origen para que contenga al m-espectro de un elemento.

Definición 1.26 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada. Definimos el* **radio m-espectral** *de $a \in \mathcal{A}$ como el valor $0 \leq \rho(a) \leq \infty$ dado por:*

$$\rho(a) := \sup \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_m^{\mathcal{A}}(a) \right\}.$$

Convendremos en definir $\rho(a) = 0$ si $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \varnothing$.

Si el álgebra considerada es normada completa, entonces el radio m-espectral definido anteriormente satisface una fórmula análoga a la de *Gelfand-Beurling*, o *fórmula del radio espectral*, que mostramos a continuación.

Proposición 1.27 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada completa, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$\rho(a) = \max \left\{ \lim_{n \to \infty} \|L_a^n\|^{\frac{1}{n}}, \lim_{n \to \infty} \|R_a^n\|^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Demostración. De la *fórmula de Gelfand-Beurling* (véase [13, Theorem 1.5.8]) se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \max \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma^{L(\mathcal{A})}(L_a) \right\} &= \lim_{n \to \infty} \|L_a^n\|^{\frac{1}{n}}, \\ \max \left\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma^{L(\mathcal{A})}(R_a) \right\} &= \lim_{n \to \infty} \|R_a^n\|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

La prueba se concluye considerando el Corolario 1.24. $\square$

Puesto que el concepto de m-espectro se expresa en términos del espectro de los operadores de multiplicación, como se ha mostrado en el Corolario 1.24, dedicaremos la siguiente sección a recordar algunos resultados clásicos relacionados con el espectro de un operador, que nos serán de utilidad. También abordaremos el concepto de *operador espectralmente raro*, para tener un primer contacto con una noción que nuestra teoría espectral hará aflorar en su momento.

1.8 Cuestiones colaterales: Operadores espectralmente raros

En todo lo que sigue, X denotará un espacio vectorial complejo. Nuestro primer objetivo en este apartado es establecer la notación necesaria para hacer referencia a las partes más relevantes del espectro de un operador lineal definido sobre el espacio X, recordando algunas propiedades importantes de las mismas. Posteriormente, presentaremos unos operadores muy especiales que llamaremos espectralmente raros y que no han sido estudiados previamente en la literatura.

Si $T : X \to X$ es un operador lineal, partes destacadas del espectro de T en $\mathcal{L}(X)$, esto es, del conjunto $\sigma^{\mathcal{L}(X)}(T)$, son el **espectro puntual** de T, que está dado por

$$\sigma_p^X(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inyectivo}\},$$

así como el **espectro sobreyectivo** de T, que se define como

$$\sigma_{su}^X(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Cuando no haya confusión con el espacio vectorial de referencia, denotaremos los conjuntos anteriores simplemente como $\sigma_p(T)$ y $\sigma_{su}(T)$. Como se sabe,

$$\sigma^{\mathcal{L}(X)}(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T).$$

En el caso en que X sea un espacio normado, y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo, definimos el **espectro puntual aproximado** del operador T como:

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no está acotado inferiormente}\}.$$

Recordemos que T está **acotado inferiormente** si existe una constante $k > 0$ tal que $\|Tx\| \geq k\|x\|$, para cada $x \in X$. En consecuencia si T no está acotado inferiormente entonces ha de existir una sucesión x_n en X tal que $\|x_n\| = 1$ y $Tx_n \to 0$.

Análogamente, se define el **espectro de compresión** del operador $T \in L(X)$ como:

$$\sigma_{com}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)(X) \text{ no es denso en } X\}.$$

En el caso particular de que X sea un espacio de Banach recordamos que *un operador lineal y continuo $T : X \to X$ es invertible en el álgebra de Banach $L(X)$ si, y sólo si, T está acotado inferiormente y tiene rango denso*, lo que en términos del espectro se expresa como sigue:

$$\sigma^{L(X)}(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T).$$

De las definiciones anteriores se obtienen sin dificultad las siguientes relaciones de inclusión:

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &\subseteq \sigma_{ap}(T) \\ \sigma_{com}(T) &\subseteq \sigma_{su}(T). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Hagamos notar que si X es un espacio de Banach y $T \in L(X)$ entonces $\sigma_{com}(T)$ puede ser vacío, a diferencia de lo que ocurre con $\sigma_{su}(T)$ y con $\sigma_{ap}(T)$. De hecho, si $\partial\sigma(T)$ denota la frontera de $\sigma^{L(X)}(T)$ se obtiene lo siguiente (véanse las Proposiciones 1.2.3 y 1.3.2 de [49]).

Proposición 1.28 *Si X es un espacio de Banach, entonces para cada $T \in L(X)$ se tiene que*

$$\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \cap \sigma_{su}(T).$$

En consecuencia, el conjunto $\sigma_{su}(T)$ no es vacío. Asimismo, el conjunto $\sigma_{ap}(T)$ tampoco lo es.

La teoría de dualidad provee nuevas relaciones entre las partes del espectro aludidas, y las correspondientes partes del espectro del operador adjunto, T^*. Recordemos que si X es un espacio normado complejo, su **dual topológico** es el espacio X^* de los funcionales lineales y continuos $f : X \to \mathbb{C}$.

El **operador adjunto** del operador $T \in L(X)$, se define como el operador $T^* \in L(X^*)$ dado por

$$T^*(f) := fT, \quad (f \in X^*) .$$

El siguiente resultado bien conocido, puede encontrarse en [49, Proposition 1.3.1].

Proposición 1.29 *Sea X un espacio de Banach. Cualquier operador $T \in L(X)$ verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{com}(T^*)$; *y* $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T^*)$.

(ii) $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$; *y* $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T^*)$.

(iii) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

Como hemos anunciado, finalizamos esta sección mostrando un tipo de operadores especiales que tendrán protagonismo en esta Memoria. Para definirlos, necesitamos previamente contextualizarlos.

Si X es un espacio normado complejo que no es completo, denotaremos por $\widehat{X}$ a su completación. Además, para cada operador $T \in L(X)$, denotaremos por $\widehat{T}$ a la única extensión lineal y continua $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ del operador $T : X \to X$. Si X es completo, entonces obviamente consideraremos que $X = \widehat{X}$ y $T = \widehat{T}$.

Definición 1.30 *Sea X un espacio normado complejo. Diremos que $T \in L(X)$ es* **espectralmente raro** *si*

$$\sigma_{su}^{X}(T) \cap \sigma^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \varnothing.$$

Obsérvese que *no existen operadores espectralmente raros en $L(X)$ cuando X es un espacio de Banach*. De hecho, por la Proposición 1.28, tenemos que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{su}(T)$, siendo el conjunto $\partial\sigma(T)$ no vacío, por lo que

$$\partial\sigma^{X}(T) \subseteq \sigma_{su}^{X}(T) \cap \sigma^{X}(T) = \sigma_{su}^{X}(T) \cap \sigma^{\widehat{X}}(\widehat{T}).$$

Consecuentemente, *si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces no existen operadores espectralmente raros en $L(X)$.*

Si $T \in L(X)$ es espectralmente raro, y si $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que la no biyectividad del operador $\widehat{T} - \lambda\widehat{I} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ asegura la sobreyectividad de $T - \lambda I : X \to X$. Igualmente, si el operador $T - \lambda I : X \to X$ no es sobreyectivo, entonces $\widehat{T} - \lambda\widehat{I} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ debe ser biyectivo. Realmente, esta es una patología en cierto modo «extraña».

En el siguiente ejemplo mostramos la existencia de operadores espectralmente raros.

Ejemplo 1.31 Sea X el espacio normado de las sucesiones complejas casi-nulas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dotado de la norma dada por $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Sea $e_j \in X$ la sucesión casi nula dada por $e_j = \{\delta_{jn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\delta_{jn} = 0$, si $n \neq j$ y $\delta_{jj} = 1$. Definimos en

X la tabla de multiplicación siguiente:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_4	$\cdots$	e_k	e_{k+1}	$\cdots$
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5		e_k	e_{k+1}	
e_2	e_2	0	e_1	e_2	e_3		e_{k-2}	e_{k-1}	
e_3	e_3	0	0	e_1	e_2		e_{k-3}	e_{k-2}	
$\vdots$							$\vdots$	$\vdots$	
e_k	e_k	0	0	0	0		0	e_1	
$\vdots$									

De este modo X se convierte en un álgebra normada. Nótese que, si $k > 1$, entonces el operador $L_{e_k} \in L(X)$ es espectralmente raro. De hecho L_{e_k} es sobreyectivo, y si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $L_{e_k} - \lambda I$ también lo es. Esta última afirmación se deduce de las siguientes igualdades válidas para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, habiéndose prefijado un $k > 1$:

$$\begin{aligned}
(L_{e_k} - \lambda I)(-\frac{e_k}{\lambda^2} - \frac{e_1}{\lambda}) &= e_1, \\
(L_{e_k} - \lambda I)(-\frac{e_m}{\lambda}) &= e_m, \text{ para cada } 2 \leq m \leq k, \\
(L_{e_k} - \lambda I)(-\frac{e_{k+s}}{\lambda}) &= e_{k+s} - \frac{e_s}{\lambda}, \text{ para cada } s \geq 1,
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\sigma_{su}^X(L_{e_k}) = \emptyset$, por lo que L_{e_k} es espectralmente raro. $\boxdot$

En la siguiente Proposición probaremos que si un operador $T \in L(X)$ es espectralmente raro, entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, los operadores $T - \lambda I : X \to X$ y $\widehat{T} - \lambda\widehat{I} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ tienen rango denso, donde como es habitual $\widehat{X}$ denota la completación de X y $\widehat{T}$ la única extensión lineal y continua de T a $\widehat{X}$. Previamente, hacemos la siguiente observación:

Lema 1.32 *Para todo $T \in L(X)$ se tiene que*

$$\sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \sigma_{com}^{X}(T).$$

<u>Demostración</u>. Si el rango de $T - \lambda I$ es denso en X para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces, de la densidad de X en $\widehat{X}$, y de la densidad de $(T - \lambda I)(X)$ en X, se obtiene que el rango de $\widehat{T} - \lambda \widehat{I}$ es denso en $\widehat{X}$, por lo que $\sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) \subseteq \sigma_{com}^{X}(T)$. Por el contrario, si $(\widehat{T} - \lambda \widehat{I})(\widehat{X})$ es denso en $\widehat{X}$ entonces, de la continuidad de $\widehat{T} - \lambda \widehat{I}$ y de la densidad de X en $\widehat{X}$, obtenemos la densidad de $(T - \lambda I)(X)$ en X. □

Proposición 1.33 *Si $T \in L(X)$ es espectralmente raro, entonces*

$$\sigma_{com}^{X}(T) = \sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \varnothing.$$

<u>Demostración</u>. Dado $T \in L(X)$, por el lema anterior, se tiene que $\sigma_{com}^{X}(T) = \sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T})$. Por otra parte $\sigma_{com}^{X}(T) \subseteq \sigma_{su}^{X}(T)$, obviamente, y en consecuencia

$$\sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \sigma_{com}^{X}(T) \subseteq \sigma_{su}^{X}(T) \cap \sigma^{\widehat{X}}(\widehat{T}).$$

Por tanto, si T es espectralmente raro, entonces

$$\sigma_{com}^{X}(T) = \sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \varnothing.$$

□

CAPÍTULO 2

Álgebras de división. Divisores Topológicos de cero

Nuestro objetivo en este capítulo consistirá en comprobar si determinados resultados relativos a álgebras de Banach, que involucran a las álgebras de división, siguen siendo ciertos en ausencia de asociatividad. Para ello tendremos previamente que establecer qué se entiende por un álgebra de división.

2.1 Hechos básicos sobre álgebras de división

La definición tradicional de *álgebra de división* en el contexto asociativo es la siguiente:

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa. Se dice que $\mathcal{A}$ es un* **álgebra de división** *si $\mathcal{A}$ posee unidad y además:*

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\backslash\{0\}.$$

En ambiente no asociativo, hay una noción clásica de álgebra de división, que se formula de nuevo en términos de los operadores de multiplicación, que ha sido usada a lo largo del siglo pasado por muchos autores como [46, 47, 72, 81], y más recientemente por otros como por ejemplo [43]. De hecho esta definición, que será presentada a continuación, ha sido la que a la luz de la anterior nos ha servido de motivación para establecer el concepto de m-espectro introducido en la Definición 1.21.

Definición 2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra.*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ es un* **álgebra de división por la izquierda** *(resp.* **derecha***) si no es cero, y para cada $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, el operador L_a (resp. R_a) es biyectivo.*
2. *Se dice que $\mathcal{A}$ es un* **álgebra de división** *si $\mathcal{A}$ es tanto un álgebra de división por la izquierda, como por la derecha.*

La definición anterior no es más que una generalización al caso no asociativo de la Definición 2.1, pues en dicho ambiente, se dan los siguientes hechos que son bien conocidos [69, p. 936].

Proposición 2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa. Equivalen:*

1. *$\mathcal{A}$ es de división por la izquierda.*
2. *$\mathcal{A}$ es de división por la derecha.*
3. *$\mathcal{A}$ es de división.*
4. *$\mathcal{A}$ es de división en el sentido clásico (Definición 2.1).*

Demostración. Para probar la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (4) vemos en primer lugar que (1) $\Rightarrow$ (4). Así, por hipótesis, para todo elemento $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, el operador L_a es biyectivo, y se trata de demostrar que $\mathcal{A}$ tiene unidad y que todo elemento no nulo posee un inverso. En efecto, dado $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, sea e el único elemento en $\mathcal{A}\backslash\{0\}$ tal que $ae = a$. Observemos que, por asociatividad:

$$ae^2 = (ae)e = ae = a,$$

y por la inyectividad de L_a, deducimos que $e^2 = e$. Sea ahora $b \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ y sea $c \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ el único elemento tal que $be = c$. En tal caso, vemos que $be = be^2 = (be)e = ce$, luego la igualdad $be - ce = (b-c)e = 0$ implica $b = c$ pues L_{b-c} es inyectivo cuando $b - c$ no es cero. Un razonamiento semejante demuestra que $eb = b$, luego e es una unidad en $\mathcal{A}$.

Sea ahora $\widetilde{a} \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ el único elemento en $\mathcal{A}\backslash\{0\}$ tal que $a\widetilde{a} = e$. Obsérvese que

$$a(\widetilde{a}a - e) = (a\widetilde{a})a - ae = ea - ae = 0,$$

y por tanto tenemos también que $\widetilde{a}a = e$ por la inyectividad de L_a. En consecuencia $\widetilde{a} = a^{-1}$ es un inverso para a, único por la asociatividad del álgebra $\mathcal{A}$.

El recíproco es obvio por la asociatividad de $\mathcal{A}$. De hecho, para todo $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ se tiene trivialmente que $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$.

La equivalencia (2) $\Leftrightarrow$ (4) se prueba de manera enteramente análoga a la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (4).

La equivalencia (3) $\Leftrightarrow$ (4) es obvia, en virtud de las equivalencias (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

Un resultado importante sobre el que focalizaremos nuestros objetivos, es el célebre teorema de Gelfand-Mazur (complejo), que afirma lo siguiente (véase por ejemplo [13, Theorem I.14.2], o [61, Theorem 2.2.3]):

Teorema 2.4 (Gelfand-Mazur) *Cualquier álgebra normada compleja asociativa y de división es isomorfa a* $\mathbb{C}$.

El siguiente teorema, un resultado con tintes semejantes al teorema de Gelfand-Mazur, pero libre de asociatividad, se debe a Irving Kaplansky [47]. Aunque originalmente se formuló sin el requerimiento de complitud, esta propiedad estaba implícitamente asumida (para poder asegurar en la prueba que el inverso de un operador de multiplicación por la izquierda biyectivo sea continuo). Reproducimos a continuación la prueba dada por Kaplansky[1].

Teorema 2.5 *Las álgebras normadas completas complejas de división por la izquierda son isomorfas a $\mathbb{C}$.*

Demostración (Kaplansky). Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada compleja completa y de división por la izquierda. Supongamos que $\mathcal{A}$ no es de dimensión uno, y razonemos por reducción al absurdo: sean a y b elementos linealmente independientes de $\mathcal{A}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. El operador $L_{a-\lambda b} = L_a - \lambda L_b$ es lineal y continuo en $\mathcal{A}$ por lo que, por hipótesis, es biyectivo. Lo mismo sucede con L_b, luego el operador

$$L_{a-\lambda b}L_b^{-1} = (L_a - \lambda L_b)L_b^{-1} = L_a L_b^{-1} - \lambda I$$

es biyectivo para todo λ, por tanto invertible en $L(\mathcal{A})$. Pero $L_a L_b^{-1}$ debe tener espectro no vacío, una contradicción que prueba que la dimensión de $\mathcal{A}$ es uno, y el resto es obvio. $\square$

Problema 2.6 La cuestión de si la complitud puede ser eliminada en el Teorema 2.5 sigue siendo un problema abierto, incluso si la condición de «división por la izquierda» se fortalece con la condición de «división».

[1]En realidad, el enunciado se estableció originalmente para álgebras de división por la derecha, y por tanto su prueba se estableció en términos de operadores de multiplicación por la derecha.

2.2 Involucrando a los divisores topológicos de cero

En esta sección procederemos a poner de manifiesto que la divisibilidad en un álgebra (Definición 2.2) y el carecer de divisores topológicos de cero (Definición 2.7) no son propiedades equivalentes en un contexto no asociativo general. Esta circunstancia evidencia que la asociatividad genera ciertos vínculos entre propiedades aparentemente diferentes, haciéndolas indistinguibles en ese privilegiado ambiente. Por ello, la utilidad de esta sección será fundamentalmente aclarar cómo son esos vínculos, y porqué se rompen en ausencia de asociatividad, además de dar las oportunas generalizaciones en el marco no asociativo de algunos hechos conocidos, pero históricamente establecidos para álgebras asociativas.

Definición 2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada compleja. Un elemento a de $\mathcal{A}$ se dice que es un* **divisor topológico de cero por la izquierda** *(resp.* **por la derecha***) en $\mathcal{A}$ si existe una sucesión a_n de elementos de $\mathcal{A}$ de norma uno satisfaciendo que $\lim aa_n = 0$ (resp. $\lim a_n a = 0$). Elementos de $\mathcal{A}$ que son divisores topológicos de cero por la izquierda o por la derecha (resp. por la izquierda y por la derecha) se llaman* **divisores topológicos de cero por un lado** *(resp.* **divisores topológicos de cero biláteros***) en $\mathcal{A}$. Diremos que un elemento $a \in \mathcal{A}$ es un* **divisor topológico de cero junto** *en $\mathcal{A}$ si existe una sucesión de elementos de norma uno en $\mathcal{A}$ satisfaciendo que $aa_n \to 0$ y $a_n a \to 0$. En el caso de que $\mathcal{A}$ sea conmutativa, todos los conceptos introducidos anteriormente coinciden, y de esta manera hablaremos simplemente de* **divisores topológicos de cero**.

Hagamos notar que un elemento $a \in \mathcal{A}$ *es un divisor topológico de cero por la izquierda (resp. derecha), precisa-*

mente cuando L_a (resp. R_a) no está acotado inferiormente. Este hecho será útil en la prueba de algunos resultados subsiguientes.

Tras un resultado precursor debido a E. Šilov [75] establecido para álgebras de Banach con unidad[2], Kaplansky [45] probó el Teorema 2.8 que mostramos a continuación. La formulación que damos aquí admite un ligero refinamiento[3] que ya fue apuntado en [16].

Teorema 2.8 (Kaplansky) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa normada compleja no cero, sin divisores topológicos de cero biláteros no nulos. Entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Tengamos ahora en cuenta que, como consecuencia de la Proposición 2.3 (respectivamente, del teorema de los isomorfismos de Banach), se verifica el siguiente hecho.

Proposición 2.9 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada de división. Si $\mathcal{A}$ es asociativa (respectivamente completa), entonces $\mathcal{A}$ no posee divisores topológicos de cero por un lado no nulos.*

De todo lo anterior, se desprende que el Teorema 2.8 contiene al Teorema de Gelfand-Mazur (Teorema 2.4). Esta es la razón por la que, a veces, el Teorema 2.8 es conocido en la literatura como el *Teorema de Gelfand-Mazur-Kaplansky* (complejo).

El siguiente ejemplo, debido en esencia a K. Urbanik y F. B. Wright [77] (véase también [69]), muestra que el Teorema

[2] El resultado de Šilov caracteriza a $\mathbb{C}$ como la única álgebra de Banach compleja no cero, sin divisores topológicos de cero biláteros no nulos.

[3] En [16] se prueba que en el Teorema de Kaplansky, la ausencia de divisores topológicos de cero biláteros puede sustituirse por la condición más débil de no tener divisores topológicos de cero juntos.

Fig. 2.1: De izquierda a derecha: Stanislav Mazur, Israil M. Gelfand, Georgii Evgen'evich Šilov e Irving Kaplansky.

2.8 no sigue siendo válido en ausencia de asociatividad, incluso si el requerimiento de no tener divisores topológicos de cero biláteros no nulos se fortalece con el de la ausencia de divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos. Tampoco es cierto el resultado si este último requerimiento se fortalece con el original de Kaplansky, es decir, con la ausencia de divisores topológicos de cero por un lado no nulos.

Ejemplo 2.10 Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $\mathcal{A}$ el álgebra compleja determinada por el espacio de Banach complejo ℓ_p, provisto del siguiente producto: sea $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva y defínase el producto de los vectores de la base $e_i, e_j \in \ell_p$ mediante la relación $e_i e_j := e_{\phi(i,j)}$ que se extiende a todo el espacio por bilinealidad y continuidad. Entonces ℓ_p se convierte en un álgebra absolutamente valuada (es decir, $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$, para cualesquiera $a, b \in \ell_p$). Por tanto, este álgebra no tiene divisores topológicos de cero por un lado distintos de cero. $\boxdot$

Ahora que sabemos que la asociatividad no puede eliminarse en el Teorema 2.8, incluso si el requerimiento de que $\mathcal{A}$ no tenga divisores topológicos de cero biláteros no nulos se fortalece con el de que $\mathcal{A}$ no posea divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos, vamos a probar que bajo tal fortalecimiento de la hipótesis, el Teorema 2.8 sigue siendo válido en el contexto no asociativo, siempre que adicionalmente se requiera la existencia de algún elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que L_a tenga rango denso. Para ello, necesitamos establecer previamente otro resultado clave para nuestro objetivo.

Lema 2.11 *Sea X un espacio normado complejo. Sean los operadores $F, G \in L(X)$, y supongamos que G está acotado inferiormente y tiene rango denso. Entonces existe algún $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $F - \lambda G$ no está acotado inferiormente.*

Demostración. Denotemos por $\widehat{X}$ a la completación de X. Para cualquier $T \in L(X)$, representemos por $\widehat{T}$ al único operador lineal y continuo sobre $\widehat{X}$ que extiende a T, y notemos que si T está acotado inferiormente, entonces $\widehat{T}$ también lo está. Por las hipótesis sobre G, se tiene que $\widehat{G} \in \operatorname{Inv}\left(L\left(\widehat{X}\right)\right)$. Por tanto, por [13, Theorem I.2.8] podemos encontrar algún λ en la frontera del conjunto no vacío $\sigma^{L(\widehat{X})}\left(\widehat{G}^{-1}\widehat{F}\right)$ relativo a $\mathbb{C}$. Entonces, por [64, pp. 278-279], se tiene que $\widehat{G}^{-1}\widehat{F} - \lambda I_{\widehat{X}}$ no está acotado inferiormente, y por tanto

$$\widehat{F - \lambda G} = \widehat{F} - \lambda \widehat{G} = \widehat{G}\left(\widehat{G}^{-1}\widehat{F} - \lambda I_{\widehat{X}}\right)$$

no está acotado inferiormente tampoco. Se sigue que $F - \lambda G$ no está acotado inferiormente. □

A continuación probamos la caracterización de los números complejos ya anunciada.

Teorema 2.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada compleja no cero, sin divisores topológicos de cero por la izquierda (resp. por la derecha) no nulos, y supongamos que existe algún $a \in \mathcal{A}$ tal* *que L_a (resp. R_a) tiene rango denso. Entonces el álgebra $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathbb{C}$.*

<u>Demostración</u>. Sea $b \in \mathcal{A}$. Teniendo en cuenta que L_a está acotado inferiormente (por no ser a un divisor topológico de cero por la izquierda) y que L_a tiene rango denso, podemos aplicar el lema anterior para encontrar un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que el operador $L_{b-\lambda a} = L_b - \lambda L_a$ no está acotado inferiormente. Como $\mathcal{A}$ no posee divisores topológicos de cero por la izquierda, deducimos que $b = \lambda a$. Por tanto $\mathcal{A}$ tiene dimensión uno y de esta forma es isomorfa a $\mathbb{C}$. La prueba para $\mathcal{A}$ sin divisores topológicos de cero por la derecha y R_a con rango denso es similar. $\square$

Como consecuencia directa del teorema anterior, se derivan los dos corolarios siguientes.

Corolario 2.13 *Las álgebras normadas complejas con unidad, sin divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos, son isomorfas a $\mathbb{C}$.*

El próximo resultado constituye una respuesta parcial afirmativa al problema de si cualquier álgebra normada compleja de división es isomorfa a $\mathbb{C}$.

Corolario 2.14 *Las álgebras normadas complejas no cero, de división por la izquierda (resp. derecha), y sin divisores topológicos de cero por la izquierda (resp. derecha) no nulos, son isomorfas a $\mathbb{C}$.*

Aunque el Corolario anterior es una consecuencia directa del Teorema 2.12, creemos que es apropiado dar una prueba autónoma del mismo, que tenga en cuenta los argumentos considerados por Kaplansky en [47].

Demostración del Corolario 2.14. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de división por la izquierda sin divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos. La idea clave de esta prueba es que L_c pertenece a $\mathrm{Inv}\,(L\,(\mathcal{A}))$, para cualquier $c \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$. De hecho, esto se debe a que, para tales c, el operador L_c es sobreyectivo y acotado inferiormente, y por tanto $L_c^{-1} \in L(\mathcal{A})$. A continuación, consideremos un elemento fijo $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$, y sea $b \in \mathcal{A}$. Observemos que existe algún $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L_a^{-1}L_b - \lambda I_{\mathcal{A}} \notin \mathrm{Inv}\,(L(\mathcal{A}))$. Por tanto se tiene que:

$$L_{b-\lambda a} = L_b - \lambda L_a = L_a \left(L_a^{-1}L_b - \lambda I_{\mathcal{A}}\right) \notin \mathrm{Inv}\,(L(\mathcal{A}))\,.$$

Esto implica que $b - \lambda a = 0$. Así, $\dim \mathcal{A} = 1$, de donde se deduce que $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathbb{C}$. $\square$

Hagamos notar que, por la Proposición 2.9, se tiene que el Corolario 2.14 contiene al Teorema de Kaplansky 2.5.

Nuestro próximo objetivo será ver que, incluso en el caso completo, el Corolario 2.13 no sigue siendo cierto si el requerimiento de la ausencia de divisores topológicos de cero por la izquierda no nulos, se debilita con el de la ausencia de divisores topológicos de cero biláteros no nulos.

Teorema 2.15 *Existe un álgebra $\mathcal{A}$ normada completa compleja con unidad y de dimensión infinita tal que $\mathcal{A}$ carece de divisores topológicos de cero biláteros no nulos.*

Demostración. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica del espacio de Hilbert complejo ℓ_2 de las sucesiones de números complejos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$. Este espacio puede convertirse en un álgebra absolutamente valuada considerando el producto determinado por $e_i e_j = e_{2^i 3^j}$, y extendiéndolo a todo el espacio por linealidad y continuidad. Sea $T \in L\,(\ell_2)$ el operador lineal continuo dado por $T(e_n) = \frac{1}{n} e_n$. Entonces T es inyectivo y compacto, con $\|T\| = 1$.

Consideremos ahora el álgebra normada compleja completa $\mathcal{B}$ dada por el espacio de Banach ℓ_2 dotado con el producto $x \odot y := xT(y)$. Afirmamos que:

$$\sigma^{L(\mathcal{B})}(L_x^{\odot}) = \{0\}\,, \text{ para todo } x \in \mathcal{B}, \tag{2.1}$$

donde, como siempre, $L(\mathcal{B})$ denota el álgebra de los operadores lineales y continuos sobre $\mathcal{B}$. Para probar nuestra afirmación, notemos en primer lugar que, como $L_x^{\odot} = L_x T$ y T es compacto, entonces $L_x^{\odot}$ es asimismo compacto, por lo que será suficiente probar que $L_x^{\odot}$ no tiene valores propios no nulos. Para cada $x = \sum_i \lambda_i e_i \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$, sea $p(x) := \min\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \neq 0\}$. Supongamos que la afirmación no fuese cierta. Entonces deben existir elementos $x = \sum_i \lambda_i e_i$ y $y = \sum_i \mu_i e_i$ en $\mathcal{B}\backslash\{0\}$ tales que $L_x^{\odot}(y) = \alpha y$ para algún número complejo no nulo α. Por tanto, como $L_x^{\odot}(y) = \sum_{i,j} \frac{\lambda_i \mu_j}{j} e_{2^i 3^j}$, deducimos que:

$$p(y) = p\,(\alpha y) = p\left(L_x^{\odot}(y)\right) = 2^{p(x)} 3^{p(y)} > p(y),$$

una contradicción.

Finalmente, sea $\mathcal{A}$ la unitización de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{A}$ es el álgebra buscada. Para comprobarlo, demostraremos que $\mathcal{A}$ no tiene divisores topológicos de cero biláteros no nulos. Supongamos que $a = x + \lambda\mathbf{1}$ fuese un divisor topológico de cero bilátero en $\mathcal{A}$. Como en particular a es un divisor topológico de cero por la izquierda, deben existir sucesiones λ_n y x_n en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, tales que $\|x_n\| + |\lambda_n| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfaciendo adicionalmente que $\lambda\lambda_n \to 0$, y que $\lambda x_n + \lambda_n x + x \odot x_n \to 0$. Supongamos que fuese $\lambda \neq 0$. Entonces $\lambda_n \to 0$ y consecuentemente $\lambda x_n + x \odot x_n \to 0$ y $\|x_n\| \to 1$. Estas convergencias implican que $-\lambda \in \sigma(L_x^{\odot})$, lo que contradice (2.1). Entonces deberá ser $\lambda = 0$ y por tanto $a = x \in \mathcal{B}$. Asimismo, como x es un divisor topológico de cero por la derecha en $\mathcal{A}$, deben existir sucesiones μ_n e y_n en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, tales que $\|y_n\| + |\mu_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\mu_n x + y_n \odot x \to 0$. Considerando sucesiones parciales si fuese necesario, podemos suponer que μ_n converge hacia algún $\mu \in \mathbb{C}$, y por tanto que $y_n \odot x \to -\mu x$. Supongamos que fuese $x \neq 0$. Entonces, como para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\|y_n \odot x - y_m \odot x\| = \|(y_n - y_m) \odot x\| = \|y_n - y_m\| \, \|T(x)\| \, ,$$

y como T es inyectivo, se deduce que y_n es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}$. Sea $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Nótese que $y \odot x = -\mu x$ (lo que implica que $-\mu \in \sigma(L_x^{\odot})$) y que $\|y\| + |\mu| = 1$. De nuevo por (2.1), el hecho de que $-\mu \in \sigma(L_x^{\odot})$ conduce a que $\mu = 0$, y consecuentemente, como

$$\|y\| \, \|T(x)\| = \|y \odot x\| = |\mu| \, \|x\| = 0,$$

también será $y = 0$, lo que contradice que $\|y\| + |\mu| = 1$. Por tanto, concluimos que $a = x = 0$, como se pretendía. $\square$

2.3 Un ingrediente más: la cuasi-división

De acuerdo con la Proposición 2.3, las álgebras asociativas de división son álgebras con unidad, y las álgebras asociativas de división por la izquierda, son álgebras de división. Estos hechos no siguen siendo ciertos en un ambiente general no asociativo, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.16 Sea $\mathcal{A} = \mathbb{K}(x)$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) el álgebra de todas las funciones racionales en la indeterminada x. Definimos un producto en $\mathcal{A}$ por:

$$r(x) * s(x) := r(x)s(x)x,$$

para cualesquiera $r(x), s(x) \in \mathcal{A}$. Entonces $(\mathcal{A}, *)$ es un álgebra de división sin unidad. $\boxdot$

Mostramos ahora un álgebra de división por un lado que no es un álgebra de división.

Ejemplo 2.17 Sea $\mathcal{A} = \mathbb{K}(x)$ como en el ejemplo anterior. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación lineal inyectiva no sobreyectiva (por ser $\mathcal{A}$ de dimensión infinita, tales aplicaciones existen). Definimos en $\mathcal{A}$ un nuevo producto $\odot$ dado por:

$$r(x) \odot s(x) := T(r(x))s(x).$$

El álgebra $(\mathcal{A}, \odot)$ es un álgebra de división por la izquierda pues el operador $L^{\odot}_{r(x)} = L_{T(r(x))}$ es biyectivo para todo $r(x) \neq 0$ (donde $L^{\odot}_{r(x)}$ es el operador de multiplicación por $r(x)$ por la izquierda con el producto $\odot$). Sin embargo $R^{\odot}_{r(x)} = R_{r(x)}T$ no es biyectivo, pues T tampoco lo es. En consecuencia, $(\mathcal{A}, \odot)$ no es un álgebra de división. $\boxdot$

En relación con los ejemplos anteriores[4], hagamos notar que, por el Teorema 2.5, *las álgebras normadas complejas completas sin unidad y de división, y las álgebras normadas completas complejas de división por la izquierda pero no de división, no pueden existir.* Sin la condición de complitud, la existencia de tales álgebras se desconoce (Problema 2.6).

En el caso de las álgebras reales, pueden darse interesantes versiones de los Ejemplos 2.16 y 2.17. De hecho, el álgebra de Banach $\mathbb{C}$ considerada como álgebra real, y dotada del producto $(z, w) \to \overline{zw}$, tiene estructura de álgebra real normada completa de división sin unidad. Además, la existencia de álgebras normadas completas reales de división por la izquierda que no son de división se obtiene por el siguiente resultado, cuya primera afirmación se debe a F. B. Wright [81] y la segunda a J. A. Cuenca y A. Rodríguez-Palacios [19, 69]:

[4]El ejemplo 2.17 se debe a A. Kaidi.

Teorema 2.18 *Las álgebras reales de división absolutamente valuadas son finito-dimensionales. Asimismo existen álgebras reales absolutamente valuadas, de división por la izquierda e infinito-dimensionales.*

Un **álgebra de cuasi-división** $\mathcal{A}$ se define como *un álgebra no cero tal que, para cada $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, al menos uno de los operadores L_a o R_a es biyectivo*. En relación con este concepto que acabamos de introducir, se tiene el siguiente hecho.

Teorema 2.19 [70] *Las álgebras normadas completas complejas de cuasi-división tienen dimensión ≤ 2, y además la dimensión 2 está permitida.*

Como las álgebras con unidad de dimensión menor o igual a 2 son (asociativas y) conmutativas, y las álgebras de cuasi-división conmutativas son álgebras de división, el siguiente corolario se deduce de los Teoremas 2.19 y 2.5.

Corolario 2.20 *Las álgebras normadas complejas completas con unidad y de cuasi-división son isomorfas a $\mathbb{C}$.*

A continuación, procederemos a resumir y clarificar diversos resultados mostrados en este Capítulo, discutiendo el Diagrama 2.2 que aparece más abajo.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra normada completa no cero sobre $\mathbb{K}$. Teniendo en cuenta el teorema de los isomorfismos de Banach, las implicaciones que aparecen en el diagrama de la figura siguiente se satisfacen. En él, la abreviación «d.t.c.» significa «divisor topológico de cero».

Nótese que las condiciones e implicaciones de la primera línea del diagrama aludido son de naturaleza puramente alge-

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c}A \text{ es un álgebra}\\ \text{de división}\end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c}A \text{ es un álgebra}\\ \text{de división por}\\ \text{la} \left\{\begin{array}{c}\text{izquierda}\\ \text{derecha}\end{array}\right\}\end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c}A \text{ es un}\\ \text{álgebra de}\\ \text{cuasi-división}\end{array}} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\begin{array}{c}A \text{ no posee}\\ \text{d.t.c. por un lado}\\ \text{no nulos}\end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c}A \text{ no posee}\\ \text{d.t.c. por la}\\ \left\{\begin{array}{c}\text{izquierda}\\ \text{derecha}\end{array}\right\} \neq 0\end{array}} & \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c}A \text{ no posee}\\ \text{d.t.c. biláteros}\\ \text{no nulos}\end{array}}
\end{array}$$

Fig. 2.2: Diagrama de implicaciones entre los conceptos tratados en este capítulo.

braica, y por tanto no requieren que el álgebra $\mathcal{A}$ sea normada. Por otra parte, las condiciones e implicaciones de la segunda línea sólo requieren que el álgebra $\mathcal{A}$ sea normada, pero no completa.

Si el álgebra $\mathcal{A}$ anterior es asociativa, entonces por el Teorema 2.8 y su versión para álgebras reales (que establece que *las álgebras reales asociativas no cero, normadas y sin divisores topológicos de cero biláteros no nulos, son isomorfas a* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *o al álgebra de los cuaternios de Hamilton* $\mathbb{H}$ [16, 45]), resulta que la condición más débil en el Diagrama 2.2 implica la condición más fuerte que aparece allí, y de esta manera todas las condiciones en el diagrama son equivalentes.

La discusión del Diagrama 2.2 en el caso general (posiblemente no asociativo) es más complicada. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces, como se muestra en [70], ninguna de las implicaciones del diagrama son reversibles y las herramientas principales para encontrar contraejemplos que lo pongan de manifiesto son el Ejemplo 2.10 y el Teorema 2.18. También se muestra en [70] que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces ninguna de las implicaciones en el Diagrama 2.2 es reversible, excepto la horizontal de la izquierda en la primera línea, la cual es de hecho reversible. Esto se obtiene a partir del Ejemplo 2.10 y los Teoremas 2.5 y 2.19.

Concluimos la discusión del Diagrama 2.2 considerando el caso en que el álgebra normada completa $\mathcal{A}$ tenga unidad. En este caso, por [44, Lemma 2.2], las implicaciones verticales de la izquierda y del medio son reversibles. Además, si adicionalmente $\mathcal{A}$ es compleja, entonces por el Corolario 2.20, todas las condiciones en la primera línea del diagrama son equivalentes al hecho de que $\mathcal{A}$ sea isomorfa a $\mathbb{C}$. Por tanto, en el caso complejo normado completo y con unidad, todas las condiciones en el diagrama son equivalentes a que $\mathcal{A}$ sea isomorfa a $\mathbb{C}$, salvo la condición más débil (que $\mathcal{A}$ no tenga divisores topológicos de cero biláteros no nulos), la cual, en virtud del Teorema 2.15, es de hecho excepcional.

Parte II

Sobre la noción de radical de un álgebra no asociativa

CAPÍTULO 3

El radical de Jacobson y el radical de Brown-McCoy de un álgebra no asociativa

En este capítulo procederemos a materializar extensiones de dos conceptos clásicos relativos a las álgebras asociativas: el *radical de Jacobson*, y el *radical fuerte* o *radical de Brown-McCoy*. Como se sabe, el radical fuerte de un álgebra se define como la intersección de los ideales maximales modulares, y funciona muy bien en ambiente asociativo-conmutativo como muestra la Teoría de Gelfand. Si se pierde la conmutatividad pero se conserva la asociatividad, este concepto de radical se refina con el llamado radical de Jacobson (la intersección de los ideales primitivos), un radical más pequeño que sin embargo goza de las mismas propiedades que el radical fuerte, y que por tanto es, a priori, mejor. De hecho, existen ejemplos de álgebras asociativas cuyo radical es cero (es decir, semisimples) y cuyo radical fuerte (o de Brown-McCoy) es distinto de cero [13, 61]. Obviamente estas álgebras no son conmutativas, puesto que el radical de Jacobson de un álgebra asociativo-conmutativa no es otra cosa que el radical fuerte de dicha álgebra.

El radical fuerte, cuya definición no involucra la propiedad asociativa, se define sin mayor problema en ambiente no asociativo, hecho que ya fue tratado hace más de veinte años en [67, Definition 2.1.(ii)]. Sin embargo, la definición de radical de Jacobson en el contexto no asociativo es una cuestión difícil y delicada. Tal es así que en [67, p. 2] se dice que, para álgebras no asociativas[1],

> «[...] *no hay un concepto de radical con la misma relevancia algebraica que el de Jacobson en el caso asociativo.*»

Incluso en el caso de la dimensión finita, esta cuestión se antoja problemática. De hecho, tal y como A. A. Albert nos dice en [4, p. 891]:

> «[...] *el radical de un álgebra asociativa es un ideal nilpotente maximal. No existen tales ideales en un álgebra no asociativa arbitraria, por lo que el radical de tales álgebras no ha sido nunca definido.*»

Una definición de radical de Jacobson en el ambiente no asociativo conlleva diversas dificultades algebraicas y analíticas. El objetivo fundamental que vertebra este capítulo consiste en extender la noción de radical de Jacobson a la clase de las álgebras no necesariamente asociativas, y hacerlo de la forma más natural posible, de manera que, en nuestras consideraciones, se reconozca toda la teoría asociativa clásica.

Tendremos ocasión de comprobar la utilidad y buen comportamiento del nuevo radical, tanto en sus propiedades intrínsecas (que desarrollaremos a lo largo de las Secciones 3.1, 3.2 y 3.4) como en relación con la continuidad automática de homomorfismos (Capítulo 4). Este estudio revelará buena parte de las claves que configuran las bondades de la teoría asociativa.

[1]El propio Jacobson va más allá con declaraciones como las que citábamos en la página xix del Prólogo.

El camino que hemos seguido para formular en ambiente no asociativo el radical de Jacobson, ha tenido mucho que ver con la continua evolución conceptual que esta noción de radical ha tenido desde sus orígenes, en relación con las distintas reformulaciones que admite al amparo de la asociatividad. Para poder entender mejor la metodología que se ha utilizado para nuestros planteamientos, en la Sección 3.1 relataremos una breve historia del radical de Jacobson que será de utilidad, para clarificar y fundamentar las decisiones tomadas al definirlo en ambiente no asociativo.

Acabamos de comentar que, cuando en ambiente asociativo perdemos la conmutatividad, el concepto abstracto de radical se «desdobla» en dos nociones que dejan de ser equivalentes, la del radical (o radical de Jacobson) y la del radical fuerte (o de Brown-McCoy). Entran así en escena las llamadas *álgebras semisimples* (aquellas cuyo radical es cero) y las *álgebras fuertemente semisimples* (que son las que tienen radical fuerte igual a cero), siendo las segundas un caso particular de las primeras.

Sabemos que el radical de Jacobson de un álgebra de Banach, y en particular la semisimplicidad, se formula indistintamente tanto en función de los ideales, como en términos de los elementos topológicamente nilpotentes (aquellos de radio espectral cero). Veremos aquí que, si perdemos la asociatividad, la noción de semisimplicidad clásica (o asociativa) también se «desdobla» en otros dos conceptos, el de semisimplicidad y el de m-semisimplicidad, que de nuevo dejan de ser equivalentes, siendo el segundo una debilitación del primero. Sin embargo, excluyendo la cuestión del tamaño, la mayoría de las perfecciones algebraicas propias del radical (asociativo) recaerán sobre la semisimplicidad y no sobre la m-semisimplicidad. Un estudio de estas cuestiones se abordará en la Sección 3.5.

Concluimos así que en ambiente no asociativo conceptos como los anteriores se «desestructuran» por lo que las propiedades que los caracterizan dejan de ser equivalentes, pasando a ser «comparables», en el mejor de los casos. De hecho suele ocurrir que, cuando un determinado concepto se desestructura en varias nociones por pérdida de la asociatividad, cada una de las nociones resultantes identifica como fortalezas propias sólo a algunas de las bondades clásicas asociadas al concepto original, convirtiéndose las demás en puntos débiles[2] de esa noción concreta; pero ello de forma que, a través de una noción u otra de las procedentes de la desestructuración, se recapturan cualesquiera de las propiedades asociadas al concepto de partida. En contraposición, bajo la acción de la asociatividad, las nociones anteriores se solapan, haciéndose indistinguibles, por lo que sus propiedades configuran una fortaleza única, reformulable de múltiples formas, en la que se refleja toda la perfección, la potencia y la belleza del concepto. Pero la Ciencia, para su avance, nos invita a explorar los confines de sus teorías, lo que supone alejarse de aquellos ambientes de máximo privilegio, para codificar cuáles son las herramientas disponibles más allá de ellos, e incluso para entender mejor la casuística de las prebendas propias de los ambientes de mayor riqueza. A lo largo de este capítulo haremos una modesta contribución, con el ánimo de justificar estos argumentos.

3.1 Una visión histórica del radical de Jacobson

El *radical de Jacobson* es un concepto algebraico clásico, ligado a varias estructuras algebraicas, como los anillos, los módulos, y en particular a las álgebras asociativas. En este último ámbito, este concepto tiene que ver con la conocida como *teoría de representación*, y su definición clásica para un álgebra asociativa $\mathcal{A}$ se corresponde con la intersección de los núcleos de las representaciones irreducibles de dicha álgebra [13, Definition

[2]En comparación con lo que acontece en el caso asociativo.

III.24.13], si bien para el radical de Jacobson se pueden dar otras definiciones igualmente importantes, relacionadas con los ideales del álgebra, tal y como se hace por ejemplo en [21, Definition 1.5.1]. Éstas son las que se establecen, ya sean como definición del radical o como caracterización suya, en la mayoría de textos clásicos sobre álgebras de Banach (por ejemplo [13, Proposition III.24.14, Proposition III.24.15, Proposition III.25.1], [21] o [61, Theorem 2.3.3, Theorem 4.3.6]), donde en particular, haciendo uso de ellas, se muestran las bondades analíticas y algebraicas que este concepto lleva consigo y que sirven de sustento de la teoría espectral. Algunas de estas caracterizaciones y propiedades serán recordadas aquí más adelante.

El origen fundamental que motivó históricamente la aparición del radical de Jacobson, tuvo que ver con la teoría de estructura de las álgebras. Cuando se trata de establecer una teoría de estructura para una clase amplia de objetos matemáticos abstractos, y en particular para determinados tipos de álgebras, resulta conveniente poder detectar de una forma reglada algunos casos patológicos con el fin de descartarlos y que no interfieran en el desarrollo de lo que convenimos en llamar una teoría espectral. Esto es lo que se consigue con el concepto de radical, entendiendo por álgebra «patológica» aquella que es un álgebra de «radical». En la antítesis de lo patológico se ubicarían las álgebras «semisimples».

En palabras de I. M. Isaacs [36, p. 179], el objetivo del radical es, de alguna manera, localizar determinados elementos «malos» de un álgebra, observando que el conjunto de estos elementos constituye un ideal, que es tal que el álgebra cociente por este ideal carece de tales elementos «malos». En el caso asociativo, los elementos aludidos son aquellos cuyo radio espectral[3] es cero (que en ambiente normado, son los elementos llamados *topológicamente nilpotentes*).

[3] El radio espectral es un concepto definible algebraicamente (véase la Definición 1.26).

Un concepto de gran importancia, ligado al radical de Jacobson de un álgebra asociativa $\mathcal{A}$ (que denotamos por $\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$), es el de la **semisimplicidad**. Como sabemos, un álgebra asociativa $\mathcal{A}$ se dice que es **semisimple** si $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$. En particular, el álgebra cociente $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ es siempre semisimple, como antes apuntábamos. En el caso finito-dimensional, esto significa que el álgebra $\mathcal{A}$ puede descomponerse como suma directa de subálgebras simples, cuestión que da detalle explícito de su estructura.

Estas ideas ya eran consideradas a finales del siglo XIX, y curiosamente en ambientes no asociativos. Élie Cartan, en su Tesis Doctoral [17], estudió una noción de radical adecuada en el ambiente de las álgebras de Lie, desarrollando en torno a ella la teoría espectral correspondiente. La mayor contribución de Cartan fue el llamado «criterio de Cartan», por el que un álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples. El término *semisimple* fue introducido por W. Killing para definir aquellas álgebras de Lie que eran suma directa de álgebras de Lie simples. Cartan proporcionó una clasificación de las álgebras de Lie complejas y simples, y probó que un álgebra de Lie compleja cuyo radical fuese cero era suma directa de un número finito de álgebras de Lie simples. Consiguió así asentar la teoría de las álgebras de Lie.

En vista del éxito cosechado en este terreno, Cartan intentó aplicar la idea de radical en el marco de las álgebras asociativas finito-dimensionales reales y complejas. De esta manera, consiguió demostrar (también en 1898) que toda álgebra de este tipo se descompone como suma directa de un *nil-ideal* y un álgebra *semisimple* (entendiendo por álgebra semisimple una suma directa de álgebras unitales simples. De hecho, mostró que tales sumandos eran álgebras de matrices sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$). En consecuencia, el mencionado nil-ideal fue concebido como el radical de un álgebra asociativa real o compleja finito-dimensional, y se gestó así la teoría espectral relativa a estas álgebras.

 

Fig. 3.1: Élie Cartan y Joseph Wedderburn.

Estos logros fueron generalizados por Wedderburn en 1907 [79], quien mostró la validez de los mismos en álgebras finito-dimensionales sobre cuerpos arbitrarios, y dio una visión más moderna de las técnicas de demostración. Wedderburn mostró que, para un álgebra de dimensión finita, existe un mayor ideal nilpotente, el *radical*, de manera que el cociente del álgebra por el radical carece de elementos nilpotentes no nulos. Y fue este autor quien introdujo en la literatura el término de *álgebra semisimple*. Sin embargo, parece ser que fue L. E. Dickson [22] quien acuñaría años más tarde explícitamente el término, en su libro de 1927, para álgebras arbitrarias.

Estos resultados impresionaron tanto a la comunidad matemática que los intentos de estudiar su validez más allá del caso finito-dimensional no se hicieron esperar. Pero pronto se comprobó que cuando las álgebras eran de dimensión infinita, los nil-ideales presentaban ciertos problemas para conseguir una teoría espectral semejante a la de la dimensión finita. En 1942, Sam Perlis en [62] mostró que el nil-radical de un álgebra finito dimensional era el mayor ideal cuasi-invertible del álgebra y fue así como R. Baer introdujo en 1943 el término de *ideal cuasi-invertible* [7]. Nathan Jacobson apreció que el concepto del más grande ideal cuasi-invertible podía desempeñar un rol fundamental para el desarrollo de una teoría espectral relevante, plasmando sus ideas en un artículo publicado en 1945, esencial para la citada teoría espectral [37]. De hecho, excepto en lo concerniente al papel desempeñado por los ideales modulares en relación con el radical de Jacobson, los trabajos [37, 38] establecen la teoría completa del radical de Jacobson tal y como se conoce hoy en día. En ellos, Jacobson observó que su radical coincidía con el nil-radical en aquellas álgebras que verificaban la condición de cadena descendente para sus ideales por la izquierda. También comprobó que en el caso de las álgebras de Banach conmutativas, el llamado radical de Jacobson no era otra cosa que el *radical de Gelfand* (esto es, la intersección de los núcleos de los caracteres del álgebra).

Muchos avances sobre el radical de Jacobson fueron obtenidos independientemente y de forma simultánea por Max Zorn y E. Hille, siendo este último autor quien vislumbró por primera vez la importante conexión entre los ideales modulares y el radical de Jacobson [30]. Finalmente toda la teoría relativa a estos conceptos fue recogida por el propio Jacobson [39] en su monografía de 1956.

Fig. 3.2: De izquierda a derecha: Sam Perlis, Reinhold Baer, Max Zorn y Einar Carl Hille.

Históricamente, las ideas anteriores fueron desarrolladas principalmente en ambiente asociativo, donde proliferaron multitud de resultados y caracterizaciones muy ventajosas, en virtud de las numerosas bondades algebraicas y analíticas que la asociatividad otorga. Estas caracterizaciones, sin embargo, no son triviales o necesariamente ampliables a un contexto no asociativo más general.

El primer intento serio de definir el radical en ambiente no asociativo, se debe a A. A. Albert en [4]. Sin embargo, su definición no es lo más general posible, como igualmente ocurre con otras definiciones clásicas que sólo fueron consideradas para determinadas clases de álgebras (como las de Jordan [59] o las de Lie). La primera definición más general de radical de Jacobson de un álgebra no asociativa arbitraria, se debe a A. Rodríguez-Palacios [67]. El radical definido por Rodríguez-Palacios, denominado *radical débil*, es ciertamente original, y se ha mostrado muy eficaz en la generalización, al ambiente no asociativo, del clásico teorema de Johnson sobre continuidad automática de homomorfismos. Pese a todo, creemos que es un radical sofisticado y difícil de materializar, si bien presenta la ventaja de ser muy «pequeño».

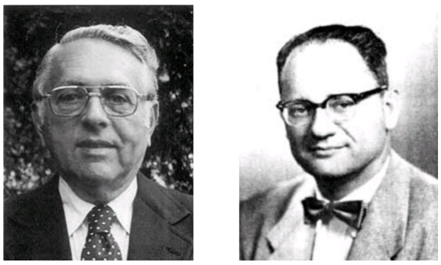

Fig. 3.3: Nathan Jacobson y A. Adrian Albert.

El lector podrá comprobar que la definición de radical que se da aquí (creemos que más asequible y manejable que las ya aportadas históricamente) es la adaptación natural del radical de Jacobson al ambiente no asociativo y permite reconstruir buena parte de la teoría clásica de las álgebras de Banach. En particular, también facilita una extensión no asociativa del teorema de Johnson, basada en propiedades elementales de los ideales y el m-espectro. Nuestra definición de radical descubre una noción de semisimplicidad bastante útil, y a nuestro entender, muy cómoda y tangible. El papel destacado que los ideales modulares y los primitivos tuvieron en la formulación del radical de Jacobson en ambiente asociativo, será tenido en cuenta explícitamente en nuestras consideraciones.

3.2 El radical de Jacobson y los ideales primitivos

Son muy conocidas las siguientes caracterizaciones del radical $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ de un álgebra asociativa $\mathcal{A}$, que podemos encontrar en [13, Proposition III.24.14].

Proposición 3.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa. Entonces:*

1. $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *es la intersección de los ideales primitivos de $\mathcal{A}$.*
2. $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *es la intersección de los ideales modulares maximales por la izquierda.*

Las equivalencias anteriores serán el punto de partida sobre el que asentar la anunciada definición de radical de Jacobson, en el ambiente general de las álgebras no asociativas.

Empezamos ya a establecer algunas consideraciones y resultados necesarios para poder dar sentido no asociativo a la proposición anterior y formalizar el nuevo concepto de radical.

Definición 3.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, y sea S un subconjunto suyo. Decimos que un subespacio P de $\mathcal{A}$ es el* **mayor ideal contenido en** *S si P es un ideal de $\mathcal{A}$ tal que $P \subseteq S$ y P contiene a cualquier ideal Q de $\mathcal{A}$ tal que $Q \subseteq S$.*

Obviamente, un subconjunto arbitrario S de un álgebra $\mathcal{A}$ puede no contener un mayor ideal (de hecho, puede no contener ni siquiera un ideal). Sin embargo sí es posible encontrar tales ideales cuando S es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$, como se muestra seguidamente.

Proposición 3.3 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra y M es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$, entonces siempre existe el mayor ideal contenido en M.*

Demostración. Como $\{0\}$ es un ideal de $\mathcal{A}$ contenido en M, resulta que la familia de los ideales de $\mathcal{A}$ contenidos en M es un conjunto no vacío, que denotamos por $\mathcal{I}_M$. En consecuencia, el ideal dado por $\bigoplus_{J\in\mathcal{I}_M} J$ es el mayor ideal de $\mathcal{A}$ contenido en M. De hecho, si I y J son dos ideales de $\mathcal{A}$ contenidos en M entonces $I+J$ es otro ideal de $\mathcal{A}$ contenido en M y, obviamente, $I+J$ contiene tanto a I como a J. $\square$

Definición 3.4 *Un* **ideal primitivo** *de un álgebra $\mathcal{A}$ se define como el mayor ideal (bilátero) contenido en un ideal modular izquierdo maximal de $\mathcal{A}$, o bien en un ideal modular derecho maximal de $\mathcal{A}$. Al conjunto de todos los ideales primitivos del álgebra $\mathcal{A}$ lo representaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.*

Nótese que en presencia de unidad, el adjetivo modular puede eliminarse de la definición anterior, pues la unidad hace que cualquier ideal sea modular.

El término **ideal primitivo** fue introducido en 1945 por N. Jacobson [38], y fue definido como *el mayor ideal contenido en un ideal modular maximal por la izquierda*. Los primeros resultados sobre ideales primitivos aparecieron en [39]. Desde el principio, este concepto fue establecido exclusivamente para álgebras asociativas.

De la definición 3.4 se desprende que *un ideal modular (bilátero) maximal es particularmente primitivo*. De esta forma, *cualquier ideal modular propio está incluido en algún ideal primitivo. En un álgebra conmutativa, cualquier ideal primitivo es modular maximal*. Estas consideraciones se corresponden con lo establecido en [61, Theorem 4.1.9], pero eliminando el requerimiento de la asociatividad.

Definición 3.5 *El* **radical de Jacobson** *de un álgebra $\mathcal{A}$ se define como la intersección de todos sus ideales primitivos. Será representado por* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. *Con la notación introducida hasta ahora, se tiene que*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) := \bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}} P,$$

y como es usual, por convenio será $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$ *si* $\mathcal{A}$ *no contiene ideales modulares por un lado (y por tanto tampoco ideales primitivos), en cuyo caso se dice que* $\mathcal{A}$ *es un* **álgebra radical**. *Asimismo, diremos que el álgebra* $\mathcal{A}$ *es* **semisimple** *cuando* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

La definición anterior no es más que una generalización literal de [21, Definition 1.5.1] hasta el contexto en el que estamos trabajando. No obstante, queremos clarificar algunas cuestiones. Para tal fin, es necesario asentar previamente algunos conceptos. Por conveniencia, usaremos la siguiente notación:

Notación 3.6 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra. Notaremos por* $\mathcal{M}_{izq}$ *(resp.* $\mathcal{M}_{der}$*), al conjunto de los ideales modulares por la izquierda (resp. por la derecha) maximales. Por tanto, el conjunto de todos los ideales modulares por un lado maximales de* $\mathcal{A}$ *está dado por* $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{izq} \cup \mathcal{M}_{der}$.

Llamamos **ideal primitivo por la izquierda** de un álgebra $\mathcal{A}$, *a cualquier ideal* P *que sea el mayor ideal contenido en un ideal modular por la izquierda maximal* $M \in \mathcal{M}_{izq}$. Nótese que *los ideales primitivos por la izquierda son, por definición, ideales biláteros*. Denominamos **radical de Jacobson por la izquierda** a la *intersección de todos los ideales primitivos por la izquierda del álgebra*, y lo denotamos por $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$. Análogamente definimos los **ideales primitivos por la derecha** y el **radical de Jacobson por la derecha,** que representaremos por $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der}$.

En base a estos conceptos, un ideal primitivo en el sentido de la Definición 3.4 no es más que un ideal que es primitivo por la izquierda o por la derecha (o bien ambas cosas), mientras que el radical de Jacobson en el sentido de la Definición 3.5 es la intersección del radical de Jacobson por la izquierda con el radical de Jacobson por la derecha, es decir:

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} \cap \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der}.$$

Comentario 3.7 Como se mencionó anteriormente, en el caso asociativo se consideran ideales primitivos sólo aquellos ideales maximales contenidos en los ideales maximales modulares por la izquierda (es decir, los aquí denominados ideales primitivos por la izquierda) del álgebra. Este sesgo ha suscitado críticas como la que H. G. Dales hace en [21, p. 68], y reproducimos a continuación (véase también [11] y [13, p. 125]):

> «*Nuestros 'ideales primitivos' se denominan con más precisión ideales primitivos por la izquierda; no es verdad que cada ideal primitivo derecho sea un ideal primitivo izquierdo (Bergman 1964). La terminología y primeros resultados sobre ideales primitivos en un álgebra* $\mathcal{A}$ *se deben a Jacobson (1956).*»

Como quiera que, el radical de Jacobson izquierdo de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ (es decir, el radical de Jacobson en el sentido de [21, Definition 1.5.1]), coincide con el radical de su álgebra revertida, o lo que es lo mismo, con el radical de Jacobson por la derecha, cuestión que se comenta y prueba en [13, Proposition III.24.16(iii), Corollary III.24.17], resulta que en ambiente asociativo:

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der},$$

donde $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ denota indistintamente el radical de Jacobson clásico considerado en [13, 21, 61, 64], o el establecido en la Definición 3.5, que es una generalización del anterior.

Creemos que esta coincidencia puede ser la razón de que se haya mantenido hasta ahora esta peculiar asimetría en la definición de radical de Jacobson clásica, hecho que no ha suscitado mayor inconveniente, habida cuenta de que la teoría estándar de álgebras de Banach no ha sido considerada más allá del entorno asociativo.

Como veremos a continuación, en un ambiente más general que el asociativo, no hay razón alguna para identificar $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$ con $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der}$, y de ahí que en la Definición 3.4, la aludida asimetría termina por corregirse finalmente (optándose por la intersección del radical de Jacobson por la izquierda y con el de la derecha). De esta forma, un ideal primitivo por la derecha (es decir, el mayor ideal contenido en algún $M \in \mathcal{M}_{der}$) de un álgebra asociativa es un ideal primitivo en el sentido de la Definición 3.4 (cuestión que contrasta con lo establecido en [61, Theorem 4.1.8(a)], donde sólo se considera el lado izquierdo).

Sin menoscabo de lo anterior queremos hacer notar que, en lo que sigue, el lector interesado en reemplazar el radical por el radical izquierdo para excluir a los ideales primitivos por la derecha, puede hacerlo con total libertad[4], pero a sabiendas de que obviamente obtendrá un radical mayor. Si lo hace, también perderá la deseable propiedad de que *el radical de un álgebra*

[4]El «radical» definido en [48, 58, 67] para desarrollar la teoría de estructura de determinadas clases de álgebras no asociativas es precisamente el que se ha llamado aquí *radical de Jacobson por la izquierda*.

$\mathcal{A}$ *coincide con el radical del álgebra revertida* rev$(\mathcal{A})$. Esta propiedad es conveniente, en tanto que garantiza que el lado izquierdo no es necesariamente más relevante o preferible que el derecho.

A continuación, vamos a probar que el radical de Jacobson izquierdo de un álgebra no tiene por qué coincidir con el radical de Jacobson derecho.

Ejemplo 3.8 Sea $\mathcal{A}$ el álgebra sobre $\mathbb{K}$ generada por $\{e, a, b, c\}$, cuya tabla de multiplicación es la siguiente:

	e	a	b	c
e	e	a	b	0
a	a	a	a	b
b	b	a	c	c
c	c	a	0	e

Nótese que si $u \in \mathcal{A}$, entonces $ua \in \mathbb{K}a$, por lo que $\mathbb{K}a$ es un ideal izquierdo propio y modular (pues $u - ue = 0$, para cada $u \in \mathcal{A}$). Se comprueba sin dificultad que $\mathbb{K}a$ es un ideal izquierdo maximal. Esto se deduce del hecho de que si M es un ideal izquierdo tal que $a \in M$ y $u = (\alpha e + \beta b + \gamma c) \in M$, entonces se tiene que $b \in M$, siendo el ideal izquierdo de $\mathcal{A}$ generado por b igual a $\mathcal{A}$. Para ver que $b \in M$ nótese que $au = (a + \beta)a + \gamma b$, de donde si $\gamma \neq 0$ entonces $b \in M$. Pero si $\gamma = 0$ entonces $bu = b(\alpha e + \beta b) = \alpha b + \beta a$, de donde se deduce igualmente que $b \in M$.
Sin embargo, $\mathcal{A}$ carece de ideales derechos no triviales. Para probar esta afirmación, sea $u = \alpha e + \beta a + \gamma b + \delta c$ un elemento de $\mathcal{A}\backslash\{0\}$. Nótese que

$$\begin{aligned}
ua &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)a \\
(ub)a &= (\alpha b + \beta a + \gamma c)a = (\alpha + \beta + \gamma)a \\
(uc)a &= (\beta b + \gamma c + \delta e)a = (\beta + \gamma + \delta)a.
\end{aligned}$$

Es por ello que $a \in \langle u\rangle_{der}$, salvo que sea

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= 0 \\ \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+\gamma+\delta &= 0. \end{aligned}$$

Pero el sistema anterior tiene solución no trivial si y sólo si $\beta+\gamma=0$, en cuyo caso $u \in \mathbb{K}(a-b)$. Como

$$((a-b)b)b = a,$$

concluimos que $a \in \langle u\rangle_{der}$, siempre que $u \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$. En consecuencia, $\langle u\rangle_{der} = \mathcal{A}$, y así $\mathcal{A}$ carece de ideales derechos no triviales. De este modo, el único ideal derecho propio es el $\{0\}$. Pero el ideal $\{0\}$ no es modular pues si $u \in \mathcal{A}$ es tal que

$$(1-u)\mathcal{A} = \{0\},$$

entonces de la igualdad $(1-u)e = 0$, deduciríamos que

$$e = ue = u,$$

lo que es una contradicción pues no puede ser $(1-e)\mathcal{A} = \{0\}$ siendo $c - ec = c$. Dado que $\mathcal{A}$ carere de ideales modulares derechos propios, concluimos que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der} = \mathcal{A}$, mientras que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} = \{0\}$, pues $\{0\}$ es el único ideal bilátero contenido en $\mathbb{K}a$. $\boxdot$

Para dar un último testimonio de las ventajas de considerar los ideales primitivos por la derecha en la definición de radical, considérese el álgebra revertida del álgebra $\mathcal{A}$ definida en el ejemplo anterior. Dicha álgebra es semisimple según la Definición 3.5, pero no lo es en el sentido «asimétrico» (si bien las álgebras semisimples en el sentido asimétrico sí que serán semisimples con relación a nuestro enfoque). Nótese también que los ideales primitivos por la izquierda pueden no serlo por la derecha y viceversa.

El siguiente resultado es [64, Theorem 2.3.2], sin el requerimiento de la asociatividad.

Proposición 3.9 *El radical de un álgebra $\mathcal{A}$ es el mayor ideal contenido en la intersección de todos sus ideales modulares por un lado maximales.*

Demostración. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{izq} \cup \mathcal{M}_{der}$ el conjunto de todos los ideales modulares por un lado maximales de $\mathcal{A}$. Sea I el mayor ideal de $\mathcal{A}$ contenido en $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ (cuya existencia está garantizada por la Proposición 3.3). Obviamente $\bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}} P \subseteq I$ pues $\bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}} P$ es un ideal de $\mathcal{A}$ contenido en $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$. Por contra, para cada $a \in I$, el ideal (bilátero) de $\mathcal{A}$ generado por a está contenido en cualquier $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, y por tanto también lo estará en $\bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}} P$, por lo que $a \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$. Así $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = I$, como se deseaba. □

La siguiente proposición generaliza a [13, Proposition III.24.21].

Proposición 3.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Entonces $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ es semisimple.*

Demostración. Como los ideales modulares por un lado maximales de $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ son precisamente aquellos del tipo $M/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ para $M \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_{izq} \cup \mathcal{M}_{der}$, tenemos que los ideales primitivos de $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ son $P/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$, donde $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, y de esta manera:

$$\operatorname{Rad}\left(\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})\right) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}} P/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}.$$

□

3.3 El radical de Jacobson y la cuasi-invertibilidad

Otras caracterizaciones del radical en ambiente asociativo, permitirán establecer un nuevo concepto de semisimplicidad que está ligado al m-espectro de un elemento. Para poder hacerlo, creemos conveniente recordar antes algunas nociones clásicas, necesarias para nuestras consideraciones, así como diversas caracterizaciones del radical en ambiente asociativo. De ello nos ocuparemos inmediatamente.

En primer lugar, vamos a establecer el concepto de cuasi-invertibilidad en un ambiente general (no asociativo).

Definición 3.11 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra arbitraria.*

1. *Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se dice que tiene un* **cuasi-inverso por la izquierda** *si existe un elemento $b \in \mathcal{A}$ tal que $a + b - ba = 0$, lo que significa que $(\mathbf{u} - b)(\mathbf{u} - a) = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ representa a la unidad de $\mathcal{A}$ siempre que $\mathcal{A}$ tenga unidad, o en caso contrario a la unidad de su unitización $\mathcal{A}_1$. En tal caso, se dice que a es* **cuasi-invertible por la izquierda**.

2. *Similarmente, se dice que $a \in \mathcal{A}$ tiene un* **cuasi-inverso por la derecha** *si existe $c \in \mathcal{A}$ tal que $a + c - ac = 0$. Caso de existir, se dirá que a es* **cuasi-invertible por la derecha**.

3. *Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se dice que es* **cuasi-invertible** *si a es cuasi-invertible por la izquierda y por la derecha. El conjunto de los elementos cuasi-invertibles del álgebra $\mathcal{A}$ se representará por $\mathrm{q-Inv}(\mathcal{A})$.*

Los conceptos de *cuasi-inverso* y de *elemento cuasi-invertible*, en el contexto de las álgebras asociativas, permiten caracterizar el espectro de un elemento perteneciente a un álgebra sin unidad, sin tener que hacer alusión explícita a la unitización del álgebra. En el caso con unidad, los elementos cuasi-invertibles también sirven para expresar el espectro en función de ellos (véase [13, Definition 5.5]).

La utilidad de los elementos cuasi-invertibles también se manifiesta con el radical de Jacobson clásico, que, como es bien sabido, *es el mayor ideal contenido en el conjunto de los elementos cuasi-invertibles del álgebra* (véase [13, Proposition III.24.16]).

La cuasi-invertibilidad es un concepto igualmente interesante en ambiente no asociativo, y prueba de ello son los siguientes hechos que generalizan a los ya comentados. El siguiente resultado es precisamente [13, Proposition III.24.16(iii)] libre de asociatividad.

Lema 3.12 *Sea Q un ideal de un álgebra $\mathcal{A}$ tal que cualquier elemento en Q tiene un cuasi-inverso por la izquierda. Entonces se tiene que $Q \subseteq \bigcap_{M\in\mathcal{M}_{izq}} M$. Además «izquierda» puede ser sustituido por «derecha» en la afirmación anterior.*

Demostración. Si $M \in \mathcal{M}_{izq}$, entonces $\mathcal{A}M \subseteq M$ y existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}(1-u) \subseteq M$. Supongamos que Q no está contenido en M. Entonces $Q+M$ es un ideal modular por la izquierda de $\mathcal{A}$ conteniendo propiamente a M y así $\mathcal{A} = M + Q$. Por tanto $u = m+q$, para convenientes elementos $m \in M$ y $q \in Q$, y así,

$$\mathcal{A}(1-q) = \mathcal{A}(1-u+m) \subseteq \mathcal{A}(1-u) + \mathcal{A}M \subseteq M + M = M,$$

lo que prueba que q es una unidad modular por la derecha para M. Si $a \in \mathcal{A}$ es un cuasi-inverso por la izquierda de q, entonces tenemos que $q + a - aq = 0$, luego $q \in \mathcal{A}(1-q) \subseteq M$, y por tanto $u \in M$, hecho que contradice la maximalidad de M. $\square$

En el ambiente no asociativo, y dentro del marco tan general por el que nos movemos, *la intersección de todos los ideales primitivos no tiene por qué ser un ideal cuasi-invertible (incluso bajo conmutatividad)*. Sin embargo, sí disponemos de la siguiente propiedad.

Proposición 3.13 *Si Q es un ideal de un álgebra $\mathcal{A}$ tal que $Q \subseteq \mathrm{q} - \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, entonces $Q \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Como, por el lema anterior, Q es un ideal tal que $Q \subseteq M$, para todo $M \in \mathcal{M}_{izq} \cup \mathcal{M}_{der}$, se sigue que $Q \subseteq P_M$, para cualquier M, donde P_M representa el mayor ideal de $\mathcal{A}$ contenido en M, y concluimos que $Q \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. □

3.4 El carácter hereditario del radical de Jacobson

La caracterización del radical de Jacobson que probamos en el siguente teorema, nos será de gran utilidad para estudiar algunas de las propiedades de dicho radical.

Recordemos que, dada un álgebra $\mathcal{A}$ y un subconjunto suyo, S, los ideales por la izquierda y por la derecha de $\mathcal{A}$ generados por S los representamos por $\langle S \rangle_{izq}$ y $\langle S \rangle_{der}$ respectivamente.

Lema 3.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y consideremos el conjunto*

$$\mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq} = \{a \in \mathcal{A} : \mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(1-a) \rangle_{izq}\}.$$

Entonces $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$ es el mayor ideal contenido en $\mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq}$.

Demostración. Si I es un ideal contenido en $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$, entonces para cada $v \in I$ se tiene que $v \in \mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq}$. Para probar esta afirmación, supongamos que $v \notin \mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq}$. Se deduce entonces sin dificultad que v ha de ser una unidad modular derecha de un ideal modular izquierdo maximal M_0 (que es propio), por lo que $v \notin M_0$. Esto es absurdo pues $v \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$ y, por lo tanto, v pertenece a todo ideal modular izquierdo maximal de $\mathcal{A}$.

Recíprocamente, si $I \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq}$ entonces $I \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq}$, puesto que, de no ser así, existiría un ideal izquierdo modular maximal M_0 tal que I no está contenido en M_0, teniéndose en tal caso que $\mathcal{A} = I + M_0$. En consecuencia, si u es una unidad modular derecha para M_0, entonces se tiene que $u = v + m$, para convenientes $v \in I$ y $m \in M_0$. Es por ello que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1-v) &= \mathcal{A}(1-u+m) \subseteq \mathcal{A}(1-u) + M_0 \\ &\subseteq M_0 + M_0 = M_0, \end{aligned}$$

y de ahí que $\langle \mathcal{A}(1-v) \rangle_{izq} \subseteq M_0$, lo que prueba que I no está contenido en $\mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq}$, una contradicción. $\square$

Nótese que el lema anterior, y la notación incluida en él, pueden establecerse igualmente sustituyendo «izquierda» por «derecha».

Teorema 3.15 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *es el mayor ideal de $\mathcal{A}$ contenido en el conjunto*

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) := \left\{ a \in \mathcal{A} : \langle \mathcal{A}(1-a) \rangle_{izq} = \mathcal{A} = \langle (1-a)\mathcal{A} \rangle_{der} \right\}.$$

Demostración. Siguiendo la notación del lema anterior,

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq} \cap \mathcal{C}(\mathcal{A})_{der},$$

de donde por dicho lema se tiene que

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} \cap \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})_{izq} \cap \mathcal{C}(\mathcal{A})_{der} = \mathcal{C}(\mathcal{A}),$$

y así, $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ de manera obvia. Además, si Q es un ideal de $\mathcal{A}$ tal que $Q \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ entonces, del el Lema 3.14 se deduce que

$$Q \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} \cap \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}),$$

lo que prueba que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ es el mayor ideal contenido en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, como deseábamos probar. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, es posible detallar *el carácter hereditario del radical de Jacobson*. Antes de nada introducimos la siguiente notación.

Notación 3.16 Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, sea I un ideal y sea S es un subconjunto de I, denotaremos por $\langle S\rangle^I_{izq}$ (respectivamente $\langle S\rangle^I_{der}$) al ideal izquierdo (respectivamente derecho), relativo al ideal I, generado por S. Por tanto, $\langle S\rangle_{izq}$ (respectivamente $\langle S\rangle_{izq}$) seguirá representando, como hasta ahora, al ideal izquierdo (respectivamente derecho) generado por S en $\mathcal{A}$.
Por otra parte, definimos

$$\mathcal{C}(I) := \left\{ b \in I : \langle I(1-b)\rangle^I_{izq} = I = \langle (1-b)I\rangle^I_{der} \right\}.$$

Corolario 3.17 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, y sea I un ideal de $\mathcal{A}$. Si* $\mathrm{Rad}(I)$ *es un ideal de $\mathcal{A}$, entonces* $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$. *Si además* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I \subseteq \mathcal{C}(I)$, *entonces* $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$.

Demostración. En primer lugar, afirmamos que

$$\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A}).$$

Para probar esta inclusión, obsérvese que para todo $b \in I$, claramente $\langle I(1-b)\rangle^I_{izq} \subset \langle \mathcal{A}(1-b)\rangle_{izq}$. Supongamos adicionalmente que $I = \langle I(1-b)\rangle^I_{izq}$. Entonces $I \subset \langle \mathcal{A}(1-b)\rangle_{izq}$. Por tanto, para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$a = (a - ab) + ab \in \langle \mathcal{A}(1-b)\rangle_{izq} + I \subset \langle \mathcal{A}(1-b)\rangle_{izq},$$

luego $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(1-b) \rangle_{izq}$. Similarmente, si $I = \langle (1-b)I \rangle^I_{der}$, entonces tendremos que $\mathcal{A} = \langle (1-b)\mathcal{A} \rangle_{der}$. Esto prueba que $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, como habíamos anunciado.
Supongamos ahora que $\mathrm{Rad}(I)$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Entonces por la inclusión anterior resulta que $\mathrm{Rad}(I)$ es un ideal de $\mathcal{A}$ contenido en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, luego ha de estar contenido en el ideal más grande de $\mathcal{A}$ que disfruta de esta propiedad, que es $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, según el Teorema 3.15. Por tanto, $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$.
Si adicionalmente $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I \subseteq \mathcal{C}(I)$ entonces, de nuevo por el teorema anterior es obvio que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I \subseteq \mathrm{Rad}(I)$ (puesto que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ es, de manera trivial, un ideal de I). □

Conviene hacer notar que, dado un ideal I de un álgebra $\mathcal{A}$, la condición $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I \subseteq \mathcal{C}(I)$ significa, como se comprueba sin dificultad, que para cada $b \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$, las siguientes igualdades se verifican:

$$\begin{aligned} \langle I(1-b) \rangle_{izq} &= I \cap \langle \mathcal{A}(1-b) \rangle_{izq} \\ \langle (1-b)I \rangle_{der} &= I \cap \langle (1-b)\mathcal{A} \rangle_{der} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Del resultado anterior, deducimos que $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ *si, y sólo si,* $\mathrm{Rad}(I)$ *es un ideal de* $\mathcal{A}$ *y las igualdades* (3.1) *se cumplen.*

A partir del Corolario 3.17 podemos obtener [21, Theorem 1.5.4] de la siguiente forma:

Corolario 3.18 *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra asociativa, entonces* $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ *para cualquier ideal* I *de* $\mathcal{A}$.

Demostración. $\mathrm{Rad}(I)$ es un ideal de $\mathcal{A}$, como se demuestra sin dificultad[5], por lo que este resultado es una consecuencia inmediata del corolario anterior, dado que las igualdades 3.1, en

[5] Véase la prueba de [13, Corollary III.24.20].

virtud de la asociatividad, se reducen a estas otras igualdades

$$\begin{aligned} I(1-b) &= I \cap \mathcal{A}(1-b) \\ (1-b)I &= I \cap (1-b)\mathcal{A}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

obviamente ciertas para cada $b \in \mathcal{A}$. $\square$

Aunque las hipótesis del Corolario 3.17 se verifiquen automáticamente cuando se disfruta de la propiedad asociativa, dichos requerimientos no son superfluos como vamos a mostrar en los siguientes ejemplos.

A continuación probamos que el $\mathrm{Rad}(I)$ puede no ser un ideal del álgebra $\mathcal{A}$. Posteriormente veremos un ejemplo en el que las igualdades (3.1) no se verifican. Es por ello que si el ideal I no cumple los requerimientos necesarios, entonces los conjuntos $\mathrm{Rad}(I)$ y $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$ pueden no estar relacionados.

Ejemplo 3.19 Consideremos el álgebra compleja $\mathcal{A}$ generada por el conjunto $\{a, b, c\}$ con la tabla de multiplicar siguiente:

	a	b	c
a	a	0	0
b	b	0	0
c	b	a	a

Sea $I = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b$. Vemos que I es un ideal de $\mathcal{A}$. Consideremos ahora el subespacio $\mathbb{C}b$ que es trivialmente un ideal de I. Todo elemento $\lambda b \in \mathbb{C}b$ es un elemento cuasi-invertible en I, con cuasi-inverso el elemento $-\lambda b$, por lo que $\mathbb{C}b \subseteq \mathrm{q}-\mathrm{Inv}(I)$. Por la Proposición 3.13, se tiene que $\mathbb{C}b \subseteq \mathrm{Rad}(I)$. Además, puesto que $a \notin \mathrm{Rad}(I)$ (dado que $I(1-a) = \{0\}$ de donde $a \notin \mathcal{C}(I)$), deducimos que $\mathrm{Rad}(I) = \mathbb{C}b$. Sin embargo, $\mathbb{C}b$ no es un ideal de $\mathcal{A}$, pues $cb = a \notin \mathbb{C}b$. No obstante, vamos a ver que $\mathrm{Rad}(I)$ está estrictamente contenido en $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$, dado que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Para ello, nótese que si $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{K}$, siendo $\gamma \neq 0$, entonces se tienen las igualdades

$$\begin{aligned}\langle \lambda a + \mu b + \gamma c \rangle_{izq} &= \mathcal{A} \\ \langle \lambda a + \mu b + \gamma c \rangle_{der} &= \mathcal{A}.\end{aligned}$$

De este modo, ningún ideal propio de $\mathcal{A}$ contiene a un elemento de la forma $\lambda a+\mu b+\gamma c$ con $\gamma \neq 0$. Pero entonces $\mathcal{A}$ no contiene ningún ideal modular por un lado propio, M, puesto que si la unidad modular de M es $u = \alpha a + \beta b + \delta c$, para convenientes $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$, entonces M contendría a alguno de los siguientes elementos

$$\begin{aligned}c(1-u) &= c(1 - \alpha a - \beta b - \delta c) = c - \alpha b - (\beta + \delta)\, a \\ (1-u)c &= (1 - \alpha a - \beta b - \delta c)c = c - \delta a.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathcal{A} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{izq} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A})_{der} = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}).$$

Nótese también que $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$, y sin embargo $a \notin \mathcal{C}(I)$ pues $I(1-a) = 0$ (de hecho, $I(1-(a+\beta b)) = \{0\}$ para todo $\beta \in \mathbb{C}$). En definitiva, concluimos que

$$\mathrm{Rad}(I) = \mathbb{C}b \subseteq I = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I,$$

aunque

$$I = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I \not\subset \mathrm{Rad}(I) = \mathbb{C}b.$$

$\boxdot$

A continuación vemos un ejemplo que muestra que $\mathrm{Rad}(I)$, esto es, el radical de un ideal I de un álgebra $\mathcal{A}$, tampoco tiene por qué estar contenido en $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$.

Ejemplo 3.20 Sea $\mathcal{A}$ el álgebra compleja generada por $\{a, b, c, d, u\}$ con la siguiente tabla de multiplicación:

	a	b	c	d	u
a	a	0	0	0	a
b	b	0	0	0	b
c	b	a	0	0	0
d	0	u	0	d	0
u	0	0	0	0	u

Obsérvese que $I = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}u$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Denotemos por $\langle b \rangle_I$ el ideal generado por b, relativo al ideal I (respectivamente por $\langle b \rangle$ el ideal relativo al álgebra $\mathcal{A}$). Es inmediato comprobar que $\langle b \rangle_I = \mathbb{C}b$ es un ideal cuasi-invertible en I, es decir $\mathbb{C}b \subseteq \mathrm{q} - \mathrm{Inv}(I)$, y en consecuencia $\mathbb{C}b \subseteq \mathrm{Rad}(I)$. Por otra parte, vemos que $u \in \langle b \rangle$, de modo que $\mathbb{C}b$ no es un ideal de $\mathcal{A}$. De las relaciones:

$$\begin{aligned} a(1-u) &= 0 \\ b(1-u) &= 0 \\ c(1-u) &= c \\ d(1-u) &= d \\ u(1-u) &= 0 \end{aligned}$$

se comprueba sin dificultad que:

$$\langle \mathcal{A}(1-u) \rangle_{izq} = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \neq \mathcal{A}.$$

En virtud del Teorema 3.15, esto significa que $u \notin \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, por lo que $\langle b \rangle$ no está contenido en $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, y así b no pertenece a $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Se concluye que $\mathrm{Rad}(I) \not\subset \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \cap I$. $\boxdot$

Una sencilla aplicación conjunta del Teorema 3.15 y del Corolario 3.17 es la siguiente:

Corolario 3.21 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra y $\mathcal{A}_1$ es su unitización, entonces*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1).$$

En consecuencia $\mathcal{A}_1$ es semisimple si, y sólo si, $\mathcal{A}$ lo es.

Demostración. $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{A}_1$ (de hecho cualquier ideal de $\mathcal{A}$ lo es), por lo que en virtud del Corolario 3.17,

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Rad}\,(\mathcal{A}_1)\,.$$

Supongamos que $a \in \mathcal{A}$ es tal que $a + \mathbf{1} \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1)$. Entonces, por el Teorema 3.15 tendríamos que $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{A}_1 a \rangle_{izq}$, lo que es una contradicción. De aquí se deduce que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}$, y, en consecuencia, $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, de donde $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Por consiguiente $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}_1)$. $\square$

Establecidas las propiedades fundamentales de naturaleza algebraica que tiene el radical, concluimos la Sección con otra propiedad esencial, de carácter topológico, que se obtiene como consecuencia inmediata de la Proposición 1.14.

Proposición 3.22 *El radical de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$ es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$.*

3.5 La semisimplicidad y la m-semisimplicidad

Siguiendo la pauta marcada por la teoría espectral asociativa, hemos establecido en la Definición 3.5 que un álgebra (no necesariamente asociativa) es semisimple cuando su radical de Jacobson es igual a cero. Pero la teoría espectral clásica también provee caracterizaciones analíticas del radical de Jacobson, y en concreto, nos permite expresar el radical en términos del espectro. Como T. Palmer afirma en [61, p. 189] (véase también [61, Theorem 4.3.6] y [13, Proposition III.25.1]),

> [...] *el radical de Jacobson* [de un álgebra de Banach] *puede ser descrito como el mayor ideal en el que el radio espectral de cada elemento es idénticamente cero.*

Recordemos que en ambiente normado, los elementos cuyo radio espectral es cero se denominan **cuasi-nilpotentes** o **topológicamente nilpotentes**. Por tanto, *el radical de Jacobson de un álgebra de Banach es el mayor ideal cuasi-nilpotente del álgebra*. En el caso particular de que el álgebra de Banach considerada sea conmutativa, la Teoría de Gelfand nos permite dar un paso más y afirmar directamente que el radical del álgebra coincide con el conjunto de los elementos cuasi-nilpotentes (véase, por ejemplo, [13, Corollary II.17.7]).

En cualquier caso, lo que es claro es que *un álgebra de Banach es semisimple cuando* $\{0\}$ *es su único ideal cuasi-nilpotente.*

Hasta ahora disponemos de una definición de espectro (Definición 1.21) que generaliza a la del caso asociativo, que hemos denominado *m-espectro*. Dado que esta definición viene acompañada de la correspondiente noción de radio espectral, llamado aquí *radio m-espectral*, la reflexión anterior motiva los planteamientos que vamos a hacer a continuación.

Recordemos que si $\mathcal{A}$ es un álgebra (no necesariamente asociativa), el **radio m-espectral** de $a \in \mathcal{A}$ se ha definido como

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_m^{\mathcal{A}}(a)\},$$

donde $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$ denota el m-espectro de a (cuando $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a) = \varnothing$, se define $\rho(a) := 0$). Conviene hacer también la observación de que si $\mathcal{A}$ es normada entonces el conjunto $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$ no es vacío para ningún $a \in \mathcal{A}$. Si además $\mathcal{A}$ es completa, entonces el supremo anterior es de hecho un máximo, cuyo valor es

$$\rho(a) = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \|L_a^n\|^{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} \|R_a^n\|^{\frac{1}{n}}\right\},$$

como se probó en la Proposición 1.27.

Hechas las consideraciones anteriores, nos disponemos a establecer un nuevo concepto de «semisimplicidad», la *m-semisimplicidad*, que está en total consonancia con lo que sucede en el caso asociativo, y que definimos a continuación.

Definición 3.23 *Diremos que un álgebra $\mathcal{A}$ es* **m-semisimple** *si $\{0\}$ es el único ideal contenido en $\{a \in \mathcal{A} : \rho(a) = 0\}$, esto es, el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{A}$ que tienen radio m-espectral igual a cero.*

De esta manera tenemos establecidos, para las álgebras no asociativas, los conceptos de *semisimplicidad* (Definición 3.5) y de *m-semisimplicidad* (definición anterior). En el caso particular de que tengamos un álgebra asociativa, ambos conceptos son idénticos, y configuran el de semisimplicidad clásico.

En la siguiente proposición comparamos los conceptos aludidos anteriormente. Después constataremos que, más allá de la asociatividad, la m-semisimplicidad es, en general, una condición estrictamente más débil que la de simplicidad.

Proposición 3.24 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra semisimple, entonces $\mathcal{A}$ también es m-semisimple.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ no fuese m-semisimple. En tal caso debe existir un ideal no cero de $\mathcal{A}$, llamémosle Q, contenido en el conjunto $\{a \in \mathcal{A} : \rho(a) = 0\}$. Consecuentemente,

$1 \notin \sigma_m^{\mathcal{A}}(a)$, para cualquier $a \in Q$, de donde los operadores $L_a - I$ y $R_a - I$ son biyectivos, es decir, invertibles en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, luego existen T y S en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ tales que $(L_a - I)T = I$ y $(R_a - I)S = I$. Esto significa que $T(a)$ es un cuasi-inverso por la derecha de a, mientras que $S(a)$ es un cuasi-inverso por la izquierda de a, lo que muestra que Q es un ideal cuasi-invertible. Por la Proposición 3.13, concluimos que $Q \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, llegándose a una contradicción. □

La inclusión que detalla la Proposición anterior puede ser de hecho estricta, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.25 Consideremos el álgebra compleja $\mathcal{A}$ generada por $\{a, b, c\}$ cuya tabla de multiplicar es la siguiente:

	a	b	c
a	a	0	0
b	b	0	0
c	0	a	a

Se tiene en particular que $\langle a \rangle_{izq} = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b$, como se deduce de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(\alpha a + \beta b + \gamma c)a &= \alpha a + \beta b,\\ (\alpha a + \beta b + \gamma c)b &= \gamma a.\end{aligned}$$

Similarmente $\langle a \rangle_{der} = \mathbb{C}a$ puesto que $a(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \alpha a$. En consecuencia, el ideal generado por $\{a\}$ es $\langle a \rangle = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b$. En el Teorema 3.15 probamos que $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ es el mayor ideal contenido en el conjunto:

$$\{w \in \mathcal{A} : \langle \mathcal{A}(1-w) \rangle_{izq} = \mathcal{A} = \langle (1-w)\mathcal{A} \rangle_{der}\}. \tag{3.3}$$

Como $c - c(\alpha a + \beta b) = c - \beta a$, $c(c - \beta a) = a$, y $ba = b$, se obtiene que

$$\langle \mathcal{A}(1 - (\alpha a + \beta b)) \rangle_{izq} = \mathcal{A}.$$

Similarmente $b-(\alpha a+\beta b)b=b$, $c-(\alpha a+\beta b)c=c$, y $c^2=a$, luego

$$\langle(1-(\alpha a+\beta b)\mathcal{A}\rangle_{der}=\mathcal{A}.$$

Esto prueba que el ideal generado por $\{a\}$ está contenido en el conjunto (3.3), luego $a\in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ y por tanto $\mathcal{A}$ no es semisimple.

Por otra parte, afirmamos que

$$\mathbb{C}b\cup\mathbb{C}c=\{u\in\mathcal{A}:\rho(u)=0\}, \tag{3.4}$$

lo que probaría que $\mathcal{A}$ es m-semisimple, dado que a pertenece tanto al ideal generado por $\{b\}$ como al generado por $\{c\}$ (puesto que $cb=a$), lo que muestra que estos ideales no están contenidos en $\mathbb{C}b\cup\mathbb{C}c$, y en consecuencia $\{0\}$ es el único ideal contenido en el conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ que tienen radio m-espectral igual a cero.

Para probar la afirmación realizada, nótese que si β y γ son números complejos no nulos, entonces las raíces de la ecuación $\lambda^2-\lambda+\beta\gamma=0$ son precisamente los valores propios del operador $L_{a+\beta b+\gamma c}$, y por tanto

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(a+\beta b+\gamma c)\neq\{0\}.$$

Similarmente, $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a+\beta b)\neq\{0\}$ cuando $\beta\neq 0$, mientras que $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a+\gamma b)\neq\{0\}$ si $\gamma\neq 0$, puesto que 1 se encuentra en ambos espectros. Asimismo, 1 es un valor propio de L_a, de donde $\sigma_m^{\mathcal{A}}(a)\neq\{0\}$. De otra parte, si $\alpha\neq 0$, entonces

$$(L_{b+\alpha c}+\sqrt{\alpha}I)(\sqrt{\alpha}a-b)=0,$$

por lo que $\sigma_m^{\mathcal{A}}(b+\alpha c)\neq\{0\}$. Finalmente, es fácil comprobar que

$$\sigma_m^{\mathcal{A}}(b)=\sigma_m^{\mathcal{A}}(c)=\{0\},$$

pues los operadores $L_b-\lambda I$, $R_b-\lambda I$, $L_c-\lambda I$ y $R_c-\lambda I$ son biyectivos para cualquier $\lambda\neq 0$, mientras que L_b y R_c no lo son. La afirmación (3.4) queda así probada. $\boxdot$

3.6 El radical de Brown-McCoy, o radical fuerte

En ambiente asociativo-conmutativo, la Teoría de Gelfand muestra la relevancia del ideal dado por la intersección de los ideales modulares maximales, ideal que se denomina radical fuerte o de Brown-McCoy, por más que en dicho marco, éste no sea otra cosa que el radical de Jacobson. Pero resulta que, si se pierde la conmutatividad, entonces el radical fuerte contiene al radical de Jacobson, pudiéndolo hacer estrictamente (véanse los ejemplos dados en [13, Section 4.8]).

Como el radical fuerte se puede definir literalmente sin la restricción de la asociatividad, a continuación lo establecemos formalmente para álgebras en general.

Definición 3.26 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Definimos el* **radical fuerte** *o* **radical de Brown-McCoy** *de $\mathcal{A}$, como la intersección de todos los ideales modulares maximales biláteros de $\mathcal{A}$. Este conjunto será denotado por* $\mathrm{s} - \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.

Diremos que el álgebra $\mathcal{A}$ es **fuertemente semisimple**, *si*

$$\mathrm{s} - \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}.$$

En el caso de que $\mathcal{A}$ carezca de ideales modulares maximales definiremos el radical fuerte como $\mathrm{s} - \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ *y diremos que $\mathcal{A}$ es* **Brown-McCoy radical**.

El radical fuerte fue definido (para álgebras asociativas) en 1947 por B. Brown y N. H. McCoy, en [15], en términos de lo que hoy se denominan *ideales débilmente cuasi-invertibles* o *débilmente cuasi-regulares*[6]. Sin embargo, la noción de álgebra fuertemente semisimple fue establecida de forma independiente

[6] La manera de definir estos conceptos puede verse en [61, Definition 4.5.5].

en [73] por I. E. Segal, en el año 1941, si bien el término «fuertemente semisimple» no sería acuñado[7] hasta 1947 por el propio Segal en [74] (para más detalles véase [61, §4.5]). En este último artículo, Segal demuestra que el radical de Brown-McCoy de un álgebra de Banach resulta ser cerrado, y posee múltiples bondades.

Más allá del marco conmutativo, el radical fuerte manifiesta una naturaleza distinta a la del radical de Jacobson pues, como dice T. Palmer en [61, p. 490]:

> «*El radical de Jacobson de álgebras de Banach familiares es usualmente una porción patológica. Esto no es cierto para el radical fuerte*».

Tan reveladora es la afirmación de Palmer que, por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert separable, entonces *el radical fuerte de $L(H)$ es el ideal de los operadores compactos*. Es obvio que el sentido original del radical de Jacobson para álgebras asociativas, se pierde totalmente en el caso del radical fuerte.

El radical fuerte de un álgebra no necesariamente asociativa $\mathcal{A}$, es un ingrediente fundamental para el estudio de la continuidad automática de los homomorfismos entre dos álgebras normadas completas, en alusión directa al célebre teorema de Rickart sobre la continuidad automática de homomorfismos de rango denso. Es por ello que la definición anterior será tenida en cuenta durante el Capítulo 5, así como las consideraciones sobre el caso real que se abordan allí también.

[7] De hecho, en [73] se establece que un álgebra unital es «semisimple» si sus ideales maximales tienen intersección igual $\{0\}$.

Parte III

Continuidad automática de homomorfismos

CAPÍTULO 4

El radical, el m-espectro y la continuidad de los homomorfismos sobreyectivos

Nuestro próximo objetivo será mostrar que la asociatividad es una propiedad superflua en el clásico teorema de Johnson [40] que asegura la continuidad automática de cualquier homorfismo sobreyectivo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, cuando el álgebra $\mathcal{B}$ es semisimple (véase también [21, Theorem 5.1.5] y [61, Theorem 6.1.3]).

En ambiente no asociativo, hemos definido el radical de Jacobson como la intersección de los ideales primitivos del álgebra (al igual que en el caso asociativo). Sin embargo, hemos visto que la propiedad de la semisimplicidad de un álgebra $\mathcal{B}$ (es decir, que su radical de Jacobson sea cero) puede debilitarse hasta la propiedad de la m-semisimplicidad (esto es, que el conjunto $\{b \in \mathcal{B} : \rho(b) = 0\}$ no contenga ideales no nulos de $\mathcal{B}$). Nos proponemos aquí obtener la correspondiente generalización no asociativa del teorema de Johnson en ambos casos. Como con-

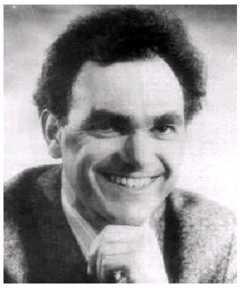

Fig. 4.1: Barry Johnson.

secuencia tendremos garantizada *la unicidad de la topología de la norma de las álgebras semisimples y m-semisimples.* Ello muestra que, con los mismos ingredientes del caso asociativo (es decir, con las extensiones naturales de los conceptos involucrados en la teoría clásica), y siguiendo un camino adecuado, es posible llegar igualmente a buen puerto sin la constricción de la asociatividad.

En cuanto al «camino a seguir», conviene resaltar el interés metodológico del mismo, por cuanto que las pruebas que aquí aportamos descansan exclusivamente sobre algunas consideraciones algebraicas básicas relativas a los ideales, y sobre las propiedades elementales del m-espectro. Por tanto, vamos a trabajar con los ingredientes más simples y naturales de la teoría espectral, para obtener resultados relevantes como los referidos, que ponen de manifiesto que no hay necesidad de asumir la asociatividad en ellos, sin alejarse conceptualmente de la teoría clásica.

4.1 Consideraciones algebraicas

Para poder acometer nuestro objetivo, necesitamos establecer previamente algunos resultados de interés relacionados con los ideales de un álgebra. El primero de ellos es el siguiente.

Lema 4.1 *Dada un álgebra $\mathcal{A}$, sea I un ideal de $\mathcal{A}$ y sea M un ideal modular por un lado maximal de $\mathcal{A}$. Si P es el mayor ideal contenido en M, entonces o bien $I \subseteq P$ o $I/M = \mathcal{A}/M$.*

Demostración. Como, o bien $I \subseteq P$, o de lo contrario se tiene que $I/P \neq \{0\}$, para probar el resultado vamos a suponer que $I/P \neq \{0\}$ con el fin de demostrar que, entonces, necesariamente es $I/M = \mathcal{A}/M$. Observemos que $I/M \neq \{0\}$ (de no ser así, $I+P$ sería un ideal de $\mathcal{A}$ contenido en M, luego $P = I+P$ y por lo tanto $I/P = \{0\}$, lo cual es una contradicción). Como I no está contenido en M, por la maximalidad de M tenemos que $\mathcal{A} = I + M$. En consecuencia, si $M \in \mathcal{M}_{izq}$ y si $\mathcal{A}(1-u) \subseteq M$, entonces al ser $u = u_0+m$, para algún $u_0 \in I$ y $m \in M$, se tiene que $u + M = u_0 + M \in I/M$ y por tanto, para cada $a \in \mathcal{A}$, se tiene que $a - au$ y $a(u - u_0)$ pertenecen a M, luego

$$a + M = au + M = au_0 + M \in \mathcal{A}I/M \subseteq I/M.$$

Similarmente, si $M \in \mathcal{M}_{der}$ y $(1 - u)\mathcal{A} \subseteq M$, entonces resulta que $a + M = u_0a + M$ pertenece a $I\mathcal{A}/M \subseteq I/M$. De esta manera $\mathcal{A}/M = I/M$, como deseábamos probar. □

Nos proponemos ahora estudiar la relación que existe entre los ideales maximales modulares unilaterales de un álgebra real $\mathcal{A}$ y los de su complexificación, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, así como la relación existente entre los ideales primitivos de ambas álgebras. En lo que sigue, conviene tener presente que todo elemento $u \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ se expresa de manera única de la forma $u = a+ib$ donde $a, b \in \mathcal{A}$.

Comenzamos haciendo la siguiente observación:

Lema 4.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra real y sea $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ su complexificación.*

1. *Si M es un ideal modular por la izquierda, por la derecha o bilátero de $\mathcal{A}$, respectivamente, entonces $M + iM$ es un ideal de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ del mismo tipo.*

2. *Si N es un ideal modular por la izquierda, derecha o bilátero, respectivamente, de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ entonces* $\mathrm{Re}(N)$ *es un ideal de $\mathcal{A}$ del mismo tipo, donde*

$$\mathrm{Re}(N) := \{a \in \mathcal{A} : \text{existe } b \in \mathcal{A} \text{ tal que } a + ib \in N\}.$$

Además $N \subseteq \mathrm{Re}(N) + i\,\mathrm{Re}(N)$.

Demostración. Para probar la primera afirmación, nótese que si M es un ideal por la izquierda, derecha o bilátero, respectivamente, de $\mathcal{A}$ entonces $M + iM$ es un ideal de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ del mismo tipo, y que si u es una unidad modular por la derecha de M, entonces también lo es de $M + iM$ dado que

$$(a+ib)-u(a+ib) = a-ua+i(b-ub) \in M+iM, \qquad (a, b \in \mathcal{A}).$$

Se razona de igual manera para las unidades modulares por la izquierda.

La segunda afirmación se deduce del hecho de que si N es un ideal por la izquierda, derecha o bilátero, respectivamente, de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ entonces $\mathrm{Re}(N)$ es un ideal de $\mathcal{A}$ del mismo tipo. Asimismo, si $u+iv$ es una unidad modular por la derecha (resp. izquierda) para N, entonces u es una unidad modular por la derecha (resp. izquierda) para $\mathrm{Re}(N)$. Finalmente, si $a + ib \in N$, entonces se tiene que $b - ia = -i(a + ib) \in N$, y en consecuencia

$$a + ib \in \mathrm{Re}(N) + i\,\mathrm{Re}(N),$$

lo que prueba que $N \subseteq \mathrm{Re}(N) + i\,\mathrm{Re}(N)$. $\square$

La siguiente Proposición nos muestra la manera de obtener ideales primitivos en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ a partir de ideales primitivos de $\mathcal{A}$.

Proposición 4.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra real y sea $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ su complexificación.*

1. *Si M es un ideal modular izquierdo (resp. derecho o bilátero) maximal de $\mathcal{A}$, entonces $M + iM$ es un ideal del mismo tipo de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.*

2. *Si P es un ideal primitivo de $\mathcal{A}$ entonces $P + iP$ es un ideal primitivo de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Para probar el resultado razonaremos sobre los ideales por la izquierda. Para el caso de los ideales por la derecha y el de los ideales biláteros argumentamos de igual manera. Para demostrar la primera afirmación, por el lema anterior, sólo hemos de ver que si M es un ideal modular maximal por la izquierda, entonces $M + iM$ (que es un ideal modular por la izquierda de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$) también es maximal. Si no lo fuese, $M + iM$ estaría contenido en un ideal modular maximal por la izquierda de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, que denotamos por N. Por el lema anterior $\mathrm{Re}(N)$ es un ideal modular por la izquierda de $\mathcal{A}$ que contiene a M. Por la maximalidad de M tenemos que $\mathrm{Re}(N) = M$ (puesto que $\mathrm{Re}(N)$ ha de estar contenido propiamente en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$). Pero entonces, también por el lema anterior,

$$N \subseteq \mathrm{Re}(N) + i\,\mathrm{Re}(N) = M + iM,$$

lo que probaría por maximalidad que $N = M + iM$.

La segunda afirmación se deduce del hecho de que si P es el mayor ideal contenido en un ideal modular maximal por la izquierda, M, del álgebra $\mathcal{A}$, entonces $P + iP$ es un ideal contenido en el ideal modular maximal por la izquierda $M+iM$. Asimismo, si existiese un ideal Q del álgebra $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ tal que

$$P + iP \subseteq Q \subseteq M + iM,$$

tendríamos que $\mathrm{Re}(Q)$ es un ideal de $\mathcal{A}$ que contiene a P y que está contenido en M, por lo que $\mathrm{Re}(Q) = P$ y en consecuencia $Q = P+iP$, luego $P+iP$ es el más grande ideal de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ contenido en $M + iM$. □

A partir del resultado anterior, se deduce sin dificultad este otro, que relaciona el radical de un álgebra real con el de su complexificada.

Corolario 4.4 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra real, entonces*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) + i\,\mathrm{Rad}(\mathcal{A}).$$

En consecuencia, si $\mathcal{A}$ es semisimple entonces su complexificación $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ también es semisimple.

4.2 Consideraciones analíticas

Deseamos probar que *si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas completas siendo el álgebra $\mathcal{B}$ semisimple, entonces todo epimorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es automáticamente continuo.*

A partir de las consideraciones algebraicas vistas en la sección anterior, procedemos al tratamiento analítico del problema, que vamos a basar en las propiedades del m-espectro.

Puesto que el espectro de un operador, y por tanto el m-espectro de un elemento en un álgebra, son nociones enraizadas en el caso complejo[1], vamos a comenzar reduciendo el problema que nos ocupa al caso complejo, para hacer un uso cómodo y natural del m-espectro.

Para ello recordamos que, como se estableció en la Sección 1.5, la complexificación $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ de un álgebra normada real $\mathcal{A}$ puede dotarse de una norma de álgebra, que extiende a la de $\mathcal{A}$, de manera que $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es completa si y solo si lo es el álgebra $\mathcal{A}$. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras reales y si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un epimorfismo, entonces la aplicación $\theta_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ dada por

[1] La definición de espectro de un operador, y de m-espectro de un elemento en un álgebra, en el caso real se remite a la complexificación.

$\theta_{\mathbb{C}}(a+ib) = \theta(a)+i\theta(b)$, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, es también un epimorfismo, que será continuo si y sólo si θ lo es. Además, por el Corolario 4.4, si el álgebra $\mathcal{B}$ es semisimple tendremos que el álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ también lo es. Concluimos pues que, resuelto el problema en el caso complejo, lo tendremos igualmente resuelto en el caso real.

Puesto que no es restrictivo restringise al caso complejo, en lo que sigue, supondremos que el cuerpo base de las álgebras consideradas es $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, hecho que consideraremos sin previo aviso.

Recordemos que si X es un espacio normado complejo entonces $L(X)$ denota al álgebra de todos los operadores lineales y continuos $T : X \to X$, y que $\sigma_{su}(T)$ representa al *espectro sobreyectivo de* T.

A continuación codificamos un resultado muy sencillo que, sin embargo, será de gran utilidad para nuestras consideraciones.

Proposición 4.5 *Sean X e Y espacios vectoriales complejos, y sean $T : X \to X$, $\phi : X \to Y$, y $R : Y \to Y$ aplicaciones lineales, tales que $\phi T = R\phi$. Si ϕ es sobreyectiva, entonces $\sigma_{su}(R) \subseteq \sigma_{su}(T)$.*

Demostración. Como $\phi T = R\phi$ tenemos que

$$\phi(T - \lambda I) = (R - \lambda I)\phi,$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Por la sobreyectividad de ϕ tenemos que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que la aplicación $(T - \lambda I)$ es sobreyectiva, entonces también lo es $\phi(T - \lambda I)$, y de ahí que $(R - \lambda I)\phi$, y en consecuencia $(R-\lambda I)$, sean aplicaciones sobreyectivas. Esto muestra que $\sigma_{su}(R) \subseteq \sigma_{su}(T)$, como queriamos. $\square$

El siguiente resultado establecido en [67, Lemma 1.1], que es una adaptación de [6, Theorem 1]. Recordamos que si a es un elemento de un álgebra asociativa, entonces $\rho(a)$ denota indistintamente tanto al radio espectral como al radio m-espectral de a, puesto que ambos coinciden (al igual que ocurre con el espectro y el m-espectro de a). Como es habitual, si Ψ es una aplicación lineal entre dos espacios normados, el *subespacio separador* de Ψ será denotado por $\mathfrak{s}(\Psi)$.

Lema 4.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras asociativas normadas complejas y $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal sobreyectiva tal que $\rho(\Psi(a)) \leq \rho(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$. Entonces $\rho(b) = 0$, para cada $b \in \mathfrak{s}(\Psi)$.*

En términos del espectro sobreyectivo establecemos el siguiente resultado.

Lema 4.7 *Sean X e Y espacios de Banach complejos. Sean $M(X)$ y $M(Y)$ subálgebras de $L(X)$ y $L(Y)$, respectivamente. Sea Φ una aplicación lineal de $M(X)$ sobre $M(Y)$ tal que $\sigma_{su}(\Phi(T)) \subseteq \sigma_{su}(T)$, para cualquier $T \in M(X)$. Entonces $\sigma(R) = \{0\}$ para cada $R \in \mathfrak{s}(\Phi)$.*

Demostración. Si $\Phi : M(X) \to M(Y)$ es tal que $\sigma_{su}(\Phi(T)) \subseteq \sigma_{su}(T)$ entonces, por la Proposición 1.28, se tiene que $\rho(\Phi(T)) \leq \rho(T)$, para cada $T \in M(X)$. Por el lema anterior $\sigma(R) = \{0\}$, para cada $R \in \mathfrak{s}(\Phi)$ □

La notación introducida en el lema anterior no es fortuita, y está orientada a contextualizar dicho lema para aplicarlo en el ambiente que muestra la siguiente definición.

Definición 4.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. El* **álgebra de multiplicación** *$M(\mathcal{A})$ del álgebra $\mathcal{A}$ se define como la subálgebra de*

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ generada por $\{I\} \cup \{L_a : a \in \mathcal{A}\} \cup \{R_a : a \in \mathcal{A}\}$, donde L_a y R_a denotan a los operadores de multiplicación por la izquierda y por la derecha, respectivamente, por el elemento $a \in \mathcal{A}$, e I representa, como es habitual, la identidad en $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Lema 4.9 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un epimorfismo. Entonces, para cada $b \in \mathfrak{s}(\theta)$, se verifica que $\sigma_{su}(L_b) = \sigma_{su}(R_b) = \{0\}$.*

Demostración. Sea $\widehat{\theta} : M(\mathcal{A}) \to M(\mathcal{B})$ la única aplicación lineal entre las álgebras de multiplicación asociadas a $\mathcal{A}$ y a $\mathcal{B}$, tal que $\widehat{\theta}(I) = I$, $\widehat{\theta}(L_a) = L_{\theta(a)}$ y $\widehat{\theta}(R_a) = R_{\theta(a)}$. Por la sobreyectividad de θ, la aplicación $\widehat{\theta}$ está bien definida y es también sobreyectiva. Además, $\theta L_a = L_{\theta(a)}\,\theta = \widehat{\theta}(L_a)\,\theta$ y también $\theta R_a = R_{\theta(a)}\,\theta = \widehat{\theta}(R_a)\,\theta$, y obviamente $I\theta = \theta I$. En consecuencia, $\widehat{\theta}(T)\,\theta = \theta T$ para cada $T \in M(\mathcal{A})$, luego por la Proposición 4.5, tenemos que $\sigma_{su}\left(\widehat{\theta}(T)\right) \subseteq \sigma_{su}(T)$ para cada $T \in M(\mathcal{A})$. Por el Lema 4.7 se obtiene que $\sigma_{su}(R) = \{0\}$, para todo $R \in \mathfrak{s}(\widehat{\theta})$ (recordamos que estamos en ambiente complejo). Como para todo $b \in \mathfrak{s}(\theta)$ se tiene que L_b y R_b pertenecen a $\mathfrak{s}(\widehat{\theta})$, se concluye que $\sigma_{su}(L_b) = \sigma_{su}(R_b) = \{0\}$, como se deseaba. □

Lema 4.10 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada, sea M un ideal por un lado cerrado y sea $b_0 \in \mathcal{B}$. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

(a) *Si M es un ideal por la izquierda y si $L_{b_0}^{\mathcal{B}/M} \in L(\mathcal{B}/M)$ es el operador dado por $L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}(b + M) = b_0 b + M$, para todo $b \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma_{su}\left(L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}\right) \subseteq \sigma_{su}\left(L_{b_0}\right)$.*

(b) *Si M es un ideal por la derecha y si $R_{b_0}^{\mathcal{B}/M} \in L(\mathcal{B}/M)$ es el operador dado por $R_{b_0}^{\mathcal{B}/M}(b+M) = bb_0 + M$, para todo $b \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma_{su}\left(R_{b_0}^{\mathcal{B}/M}\right) \subseteq \sigma_{su}\left(R_{b_0}\right)$.*

<u>Demostración</u>. Sea $\pi : B \to B/M$ la proyección canónica. Si M es un ideal por la izquierda, como $\pi L_{b_0}^{\mathcal{B}} = L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}\pi$, de la Proposición 4.5 se deduce que $\sigma_{su}\left(L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}\right) \subseteq \sigma_{su}\left(L_{b_0}\right)$, hecho que prueba (a).

Similarmente, si M es un ideal por la derecha, entonces $\sigma_{su}\left(R_{b_0}^{\mathcal{B}/M}\right) \subseteq \sigma_{su}\left(R_{b_0}\right)$, como se dice en (b). □

Los resultados anteriores nos servirán para mostrar la anunciada generalización no asociativa del Teorema de Johnson, en términos del radical introducido en la Definición 3.5, y más concretamente de la noción de semisimplicidad a él asociada.

Teorema 4.11 *Cualquier homomorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sobreyectivo, de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$ sobre un álgebra normada completa semisimple $\mathcal{B}$ es continuo.*

<u>Demostración</u>. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene unidad. Entonces $\mathcal{B}$ también tiene unidad, que notaremos por e. Sea $b_0 \in \mathfrak{s}(\theta)$. Tenemos que $\sigma_{su}(L_{b_0}) = \{0\}$ por el Lema 4.9, y por el Lema 4.10 que $\sigma_{su}(L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}) = \{0\}$, para cada $M \in \mathcal{M}_{izq}$. Por tanto $L_{b_0}^{\mathcal{B}/M}$ no es sobreyectivo, por lo que $e \notin b_0 + M$. Similarmente, si $M \in \mathcal{M}_{der}$, entonces $\sigma_{su}(R_{b_0}^{\mathcal{B}/M}) = \{0\}$ de donde se deduce igualmente que $e \notin b_0 + M$. En consecuencia, si $M \in \mathcal{M}_{izq} \cup \mathcal{M}_{der}$, se tiene que $e \notin \mathfrak{s}(\theta) + M$, lo que muestra que $\mathfrak{s}(\theta)/M \neq \mathcal{B}/M$. Por tanto, del Lema 4.1 obtenemos que $\mathfrak{s}(\theta) \subseteq P$ para cualquier ideal primitivo P, por lo que $\mathfrak{s}(\theta) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$. Por el teorema de la gráfica cerrada, se concluye que θ es continuo.

Si $\mathcal{A}$ no tuviese unidad, entonces podemos considerar el epimorfismo $\theta_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ dado por $\theta_1(a+\lambda\mathbf{1}) = \theta(a)+\lambda\mathbf{1}$. Como antes, tenemos que $\mathfrak{s}(\theta_1) \subseteq P_1$, para cualquier $P_1 \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}$, de donde $\mathfrak{s}(\theta_1) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{B}_1)$. Por el Corolario 3.21, concluimos que $\mathfrak{s}(\theta) \subseteq \mathfrak{s}(\theta_1) = \{0\}$. Por el teorema de la gráfica cerrada, deducimos también en este caso que θ es continuo. □

El siguiente resultado es precisamente [40, Theorem 2] pero sin el requerimiento de la asociatividad.

Corolario 4.12 *Las álgebras normadas completas semisimples tienen unicidad de la topología de la norma completa.*

Una aplicación sencilla del resultado anterior se muestra a continuación.

Ejemplo 4.13 Consideremos la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ donde $\mathcal{B}$ es cualquier $\mathbb{K}$-álgebra infinito-dimensional simple con unidad, y $\mathcal{A}$ es la $\mathbb{K}$-álgebra generada por $\{e, a, b, c\}$ cuya tabla de multiplicación está dada por

	e	a	b	c
e	e	a	b	0
a	a	a	a	b
b	b	a	c	c
c	c	a	0	e

(nótese que la tabla anterior corresponde al álgebra del Ejemplo 3.8, y por tanto el álgebra $\mathcal{A}$ es semisimple). Consideremos en $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ el producto dado por $(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_1)\,(\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_2) := \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, para cualesquiera $\mathfrak{b}_1+\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2+\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{B}\oplus\mathcal{A}$. Este álgebra se puede dotar de la norma de álgebra dada por $\|\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\| := \|\mathfrak{b}\| + \|\mathfrak{a}\|$, para cada $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ posee una única topología de la norma completa, pues $\mathcal{B}\oplus\mathcal{A}$ es semisimple. De hecho, un ideal modular maximal por la izquierda es $\mathcal{B} \oplus \mathbb{K}a$, por lo que $\mathcal{B} \oplus \{0\}$ es un ideal primitivo de $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$. Asimismo $\{0\} \oplus \mathcal{A}$ es un ideal bilátero (obviamente modular) maximal de $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ cuya intersección con $\mathcal{B} \oplus \{0\}$ es cero, lo que prueba la semisimplicidad de $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ (téngase presente de nuevo la conveniencia de considerar los ideales modulares maximales por la derecha en el sentido del Comentario 3.7). Nótese que la semisimplicidad de $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ se deduce también de forma inmediata del Corolario 3.18, teniendo en cuenta que cualquier ideal de $\mathcal{A}$ o de $\mathcal{B}$ (y en particular el radical de alguna de esas álgebras) es un ideal de $\mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$. $\boxdot$

El radical de Jacobson de un ágebra de Banach se formula equivalentemente tanto en términos de los ideales primitivos como en términos de los elementos cuasi-nilpotentes, siendo las álgebras semisimples aquellas que tienen radical de Jacobson igual a cero, en cualquiera de las formulaciones que la asociatividad nos permite hacer de este hecho. Como argumentábamos en la Sección 3.5, esta doble consideración de la naturaleza del radical, en el caso no asociativo, daba lugar a los conceptos de semisimplicidad ($\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$) y de m-semisimplicidad (ausencia de ideales cuasi-nilpotentes no nulos), siendo el último de ellos una debilitación del primero (véase la Proposición 3.24 y el Ejemplo 3.25).

Las herramientas analíticas que hemos establecido nos permiten probar con comodidad la siguiente generalización del Teorema de Johnson, que mejora a la obtenida en el Teorema 4.11, puesto que la m-semisimplicidad es una hipótesis menos restrictiva que la semisimplicidad.

Teorema 4.14 *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas completas, reales o complejas, siendo $\mathcal{B}$ m-semisimple, entonces todo epimorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

Demostración. En el caso complejo, sea $\mathfrak{s}(\theta)$ el subespacio separador de θ. Por el Lema 4.9, teniendo en cuenta el Corolario 1.24 y la Proposición 1.28, tenemos que:

$$\mathfrak{s}(\theta) \subseteq \{b \in \mathcal{B} : \rho(b) = 0\}. \tag{4.1}$$

Finalmente, por la m-semisimplicidad de $\mathcal{B}$ y por el teorema de la gráfica cerrada se obtiene la continuidad de θ.

En el caso real, aplicando el Lema 4.9 al epimorfismo $\theta_{\mathbb{C}}$ obtenemos que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}(L_b) = \sigma_{su}^{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}}(R_b) = \{0\}$, para cada $b \in \mathfrak{s}(\theta)$, de donde se deduce que igualmente que $\sigma(L_b) = \sigma(R_b) = \{0\}$, por definirse el espectro en caso real en términos de la complexificación del álgebra. Es por ello que $\sigma_m^{\mathcal{B}}(b) = \{0\}$, para cada $b \in \mathfrak{s}(\theta)$, obteniéndose de nuevo la inclusión (4.1), a partir de la cual concluimos la prueba razonando como antes. □

Observemos que el Teorema 4.11 puede obtenerse también como corolario del Teorema 4.14 y la Proposición 3.24.

La ventaja del Teorema 4.14, más allá de que es válido para un rango de álgebras más amplio que las del Teorema 4.11, reside en el hecho de que resulta muy cómodo y fácil de aplicar, pues determinar los elementos cuyo radio espectral es cero no suele ser una tarea complicada, dentro del grado de dificultad en el que trabajamos. El siguiente ejemplo sirve para justificar nuestra afirmación.

Ejemplo 4.15 Sea $\mathcal{B} = \ell_1(\mathbb{N})$, el álgebra compleja de las series $\sum_{n\geq 1} \beta_n e_n$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$, provista del único producto que se deriva de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} e_n e_m &= 0, \quad \text{si } n \neq m, \\ e_n^2 &= \frac{e_n + e_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Se comprueba sin dificultad que $\mathcal{B}$ es un álgebra normada completa, provista de la ℓ_1-norma. Para cada $b = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ en $\mathcal{B}$, no nulo, sea

$$k_0 := \min\{n \in \mathbb{N} : \beta_k \neq 0\}.$$

Entonces $\frac{\beta_{k_0}}{2} \in \sigma_m^{\mathcal{B}}(b)$ puesto que e_{k_0} no se encuentra en el rango del operador $L_b - \frac{\beta_{k_0}}{2} I$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es m-semisimple. Por tanto, cualquier homomorfismo sobreyectivo de un álgebra normada completa en $\mathcal{B}$ es automáticamente continuo. En particular, $\mathcal{B}$ tiene una única topología de la norma completa.

$\boxdot$

Como ya se ha indicado en el ejemplo anterior, aplicando el Teorema 4.14 cuando el homomorfismo considerado sea la identidad de un álgebra m-semisimple, se obtiene de manera obvia la siguiente importante consecuencia:

Corolario 4.16 *Todas las álgebras normadas completas m-semisimples (reales o complejas) tienen una única topología de la norma completa.*

El Corolario anterior mejora significativamente el Corolario 4.12, y vuelve a evidenciar que la hipótesis de asociatividad es superflua en el teorema de Johnson sobre la unicidad de la topología de la norma completa. Asimismo, este resultado tiene la gran ventaja de que sus hipótesis son muy fáciles de verificar, siquiera en comparación con otras, dentro de la complejidad propia de estos ambientes tan abstractos.

CAPÍTULO 5

El radical fuerte, el m-espectro y la continuidad de los homomorfismos de rango denso

Nos proponemos ahora estudiar la *continuidad automática de un homormorfismo arbitrario (no necesariamente sobreyectivo)* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *entre dos álgebras normadas completas* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$. Como quiera que el homomorfismo θ puede verse como un homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \overline{\theta(\mathcal{A})}$, entre las álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_0 := \overline{\theta(\mathcal{A})}$, resulta que el problema que nos ocupa puede enunciarse en los siguientes términos:

Si $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son dos álgebras normadas completas y* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *es un homomorfismos de rango denso ¿es* θ *automáticamente continuo?*

Como se dice en [21], el problema básico de la continuidad automática consiste en dar condiciones algebraicas sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que aseguren la propiedad topológica de que cualquier homomorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sea necesariamente continuo. El resultado clásico más importante en relación con la continuidad de los homomorfismos de rango denso es el célebre teorema de C. E. Rickart, de 1960, que afirma que *cualquier homomorfismo de rango denso* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *de un álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ *en un álgebra de Banach fuertemente semisimple* $\mathcal{B}$ *es continuo* (véase [21, 61, 64]).

Recordemos que el **radical fuerte** de un álgebra asociativa $\mathcal{B}$, representado por $\mathrm{s}-\mathrm{Rad}(\mathcal{B})$, se define como *la intersección de todos sus ideales modulares maximales biláteros*, y que un álgebra (asociativa) $\mathcal{B}$ es **fuertemente semisimple** si $\mathrm{s}-\mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$. Obsérvese que el concepto de semisimplicidad fuerte no requiere de la asociatividad del producto definido en el álgebra, de ahí que haya podido extenderse literalmente hasta el contexto de las álgebras no asociativas (Definición 3.26). En consecuencia, es natural preguntarse por el papel que desempeña la asociatividad en el Teorema de Rickart.

Una extensión pionera del teorema de Rickart fue aportada en 1968 por Balachandran y Rema [9], quienes establecieron que *todo homomorfismo de rango denso de un álgebra de Jordan Banach y en un álgebra de Jordan Banach fuertemente semisimple es continuo*. Posteriormente, este resultado fue mejorado en 2003, en [71], donde se muestra *la continuidad automática de los homomorfismos de rango denso* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *de un álgebra normada completa* $\mathcal{A}$ *en un álgebra de Jordan Banach fuertemente semisimple* $\mathcal{B}$. De esta manera se probó que el requerimiento de que el álgebra de origen fuese de Jordan Banach es superfluo en el mencionado resultado de Balachandran y Rema. Asimismo, en [71, Section 3] se recopilan todas las generalizaciones no asociativas del Teorema de Rickart aparecidas en la literatura hasta ese momento. Como allí puede verse, son diversas las hipótesis adicionales que podemos suponer en las álgebras involucradas (esto es, en $\mathcal{A}$, y especialmente en $\mathcal{B}$) que verificándose trivialmente en presencia de asociatividad, garantizan la continuidad del homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, supuesto que el álgebra $\mathcal{B}$ sea fuertemente semisimple. Algunos avances recientes sobre esta cuestión pueden verse en [78].

Dedicamos este capítulo a establecer nuevas generalizaciones no asociativas del Teorema de Rickart. Codificaremos también una «patología» de naturaleza espectral, que cuando se presenta en la imagen del homomorfismo de rango denso, fuerza su discontinuidad. Ejemplos de álgebras en esta situación serán mostrados igualmente.

5.1 Generalizaciones no asociativas del teorema de Rickart. Formalización del problema

Vamos a comenzar estableciendo formalmente el problema central de esta sección, con el ánimo de indagar qué papel juega el m-espectro en lo relativo a la continuidad automática de homomorfismos de rango denso entre dos álgebras normadas completas.

El problema que nos ocupa puede enunciarse en los siguientes términos:

Problema 5.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple, ¿es θ automáticamente continuo?*

Para empezar a centrarnos en esta cuestión, mostramos a continuación que el problema anterior puede ser reducido al caso en que las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ involucradas posean unidad, siendo el álgebra $\mathcal{B}$ simple (resultado que supone un refinamiento de [71, Lema 1.2], en lo que respecta a la unidad de $\mathcal{A}$).

Proposición 5.2 *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Cualquier homomorfismo de rango denso, de un álgebra normada completa en un álgebra normada completa fuertemente semisimple es continuo.*

(ii) *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas completas con unidad, y si $\mathcal{B}$ es simple, entonces cualquier homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

Demostración. La implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) se obtiene del hecho de que las álgebras simples son en particular fuertemente semisimples. Recíprocamente, supongamos que el enunciado (ii) se verifica por hipótesis, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso, de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$ en un álgebra normada completa fuertemente semisimple $\mathcal{B}$. Sea M un ideal modular maximal de $\mathcal{B}$. Por la Proposición 1.14 se obtiene que M es cerrado y por tanto $\widetilde{\mathcal{B}} := \mathcal{B}/M$ es un álgebra normada completa simple con unidad. Sea $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/M$ la proyección canónica. Nótese que $\widetilde{\theta} := \pi\theta : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ es un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{A}$ no tiene unidad, entonces podemos extender $\widetilde{\theta}$ a $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$, la unitización de $\mathcal{A}$, definiendo $\widetilde{\theta}_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$ como $\widetilde{\theta}_1(a + \lambda\mathbf{1}) = \widetilde{\theta}(a) + \lambda e$, para todo $a \in \mathcal{A}$, donde e representa a la unidad de $\widetilde{\mathcal{B}}$. Se deduce fácilmente que $\widetilde{\theta}$ es continuo precisamente cuando lo sea $\widetilde{\theta}_1$. Por lo tanto, sustituyendo $\widetilde{\theta} : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ por $\widetilde{\theta}_1 : \mathcal{A}_1 \to \widetilde{\mathcal{B}}$ si fuese necesario porque $\mathcal{A}$ no tenga unidad, se obtiene en cualquier caso que el homomorfismo $\widetilde{\theta} := \pi\theta : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ es continuo en virtud del enunciado (ii). En consecuencia, si a_n es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $a_n \to 0$, entonces $\widetilde{\theta}(a_n) = \pi\theta(a_n) \to \widetilde{\theta}(0) = M$, lo que prueba que el subespacio separador $\mathfrak{s}(\theta)$ está contenido en M. Se concluye así que $\mathfrak{s}(\theta) \subseteq \mathrm{s} - \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$. Por el teorema de la gráfica cerrada, θ es continuo, como queríamos. $\square$

El resultado anterior nos permite reformular, de manera equivalente, el problema 5.1 de la siguiente manera:

Problema 5.3 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) tales que $\mathcal{B}$ es simple, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. ¿Es θ automaticamente continuo?

5.1.1 La reducción del caso real al caso complejo

El objetivo central de este apartado será probar que en el Problema 5.1, o equivalentemente en el Problema 5.3, no es restrictivo suponer que el cuerpo base sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En las reflexiones siguientes, como de costumbre, la complexificación de un álgebra real $\mathcal{A}$ será denotada por $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas reales y si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo de rango denso, consideramos de nuevo el homomorfismo $\theta_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ dado por $\theta_{\mathbb{C}}(a+ib) = \theta(a)+i\theta(b)$, cuyo rango también es denso en $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, y tenemos que θ es continuo si y solo si $\theta_{\mathbb{C}}$ lo es. Además, si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ también lo es. De hecho, del primer apartado de la Proposición 4.3, deducimos lo siguiente.

Corolario 5.4 *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra real entonces:*

$$s - \mathrm{Rad}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \subseteq s - \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) + i\ (s - \mathrm{Rad}(\mathcal{B}))\,.$$

En consecuencia, si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple entonces su complexificación $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ también es fuertemente semisimple.

A partir del corolario anterior, concluimos de nuevo que dar una respuesta afirmativa al Problema 5.1 para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, implica también una respuesta afirmativa cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

En la reformulación del Problema 5.1 que proporciona el Problema 5.3, las hipótesis sobre el álgebra de llegada son la existencia de unidad y la simplicidad. Curiosamente, *la complexificación de un álgebra real simple con unidad no es necesariamente un álgebra compleja simple*. Este es el caso por ejemplo de $\mathbb{C}_\mathbb{R}$, el álgebra de los números complejos considerada como álgebra real. De hecho, el subespacio

$$M := \{u + \mathbf{i}v \in \mathbb{C}_\mathbb{R} \oplus \mathbf{i}\mathbb{C}_\mathbb{R} : v = iu\}$$

es un ideal propio de $\mathbb{C}_\mathbb{R} \oplus \mathbf{i}\mathbb{C}_\mathbb{R}$ (la complexificación de $\mathbb{C}_\mathbb{R}$).

Pese a todo, tenemos el siguiente resultado de interés que se deduce de forma inmediata del corolario anterior:

Corolario 5.5 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra real simple con unidad entonces $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ es fuertemente semisimple.*

La proposición anterior, acompañada de la equivalencia que promueve la aludida Proposición 5.2, entre los Problemas 5.1 y 5.3, nos proporciona un nuevo argumento para restringirnos al caso complejo sin pérdida de generalidad. De hecho, en las Secciones 5.1 y 5.3, nos vamos a centrar en el Problema 5.3 cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Por completar este círculo de ideas, en sentido inverso, hacemos también la observación de que, en virtud de la Proposición 5.5, dar una respuesta afirmativa al Problema 5.1, o equivalentemente al Problema 5.3, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, implica también una respuesta afirmativa cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ debido a que las álgebras complejas (y los homomorfismos entre ellas) pueden verse como reales, y un álgebra compleja simple también es simple cuando es considerada como real.

Teniendo en cuenta todas las reflexiones anteriores, y dado que no es restrictivo considerar que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de ahora en adelante nos centraremos en el caso complejo para nuestras consideraciones, pues ese es el ambiente natural del espectro.

5.2 Homomorfismos cuyo rango es denso y espectralmente admisible

Nos proponemos dar una respuesta afirmativa a los Problemas 5.1 y 5.3 cuando el rango del homomorfismo en cuestión es espectralmente admisible en el sentido que pronto detallaremos. Previamente definimos este otro concepto.

Definición 5.6 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra. Se define el* **m-espectro sobreyectivo** *de $b \in \mathcal{B}$ como el conjunto*

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) := \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cup \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b).$$

La siguiente propiedad nos dice que en presencia de una norma de álgebra completa, la frontera del m-espectro está contenida en el m-espectro sobreyectivo, en consonancia con lo establecido en la Proposición 1.28.

Proposición 5.7 *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra normada completa, entonces $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b)$ es no vacío, para cada $b \in \mathcal{B}$. De hecho, $\sigma_m^{\mathcal{B}}(b)$ es no vacío y su frontera, $\partial\sigma_m^{\mathcal{B}}(b)$ está contenida en $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b)$.*

Demostración. Puesto que, por definición,

$$\sigma_m^{\mathcal{B}}(b) := \sigma(L_b) \cup \sigma(R_b),$$

siendo L_b y R_b operadores del álgebra $L(\mathcal{B})$, resulta que $\sigma(L_b)$ y $\sigma(R_b)$ son compactos no vacíos del plano complejo tales que $\partial\sigma(L_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b)$, al igual que $\partial\sigma(R_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b)$, como se deduce de la Proposición 1.28. En consecuencia $\sigma_m^{\mathcal{B}}(b) \neq \varnothing$ y $\partial\sigma_m^{\mathcal{B}}(b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b)$. $\square$

Notación 5.8 *En lo que sigue, denotemos por* $\mathbf{D}_r$ *al disco complejo cerrado de centro cero y radio* $r > 0$, *es decir*

$$\mathbf{D}_r := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}.$$

Definición 5.9 *Sea* $\mathcal{B}$ *un álgebra normada. Se dice que* $\mathcal{B}$ *es* **espectralmente admisible** *si existe algún* $M > 0$ *tal que para cualquier* $b \in \mathcal{B}$,

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) \cap M\mathbf{D}_{\|b\|} \neq \varnothing,$$

donde $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b)$ *denota el m-espectro sobreyectivo de* $b \in \mathcal{B}$.

Las álgebras normadas completas son ejemplos de álgebras espectralmente admisibles, para $M = 1$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.10 Si $\mathcal{B}$ es un álgebra normada completa, entonces $\mathcal{B}$ es espectralmente admisible, pues $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) \neq \varnothing$ como se deduce de la Proposición 5.7, y además $\sigma_{m}^{\mathcal{B}}(b) \subseteq \mathbf{D}_{\|b\|}$ tal y como se estableció en la Proposición 1.25 en la que se plasmó el carácter espectral de las normas de álgebra completas. Es por ello que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) \cap \mathbf{D}_{\|b\|} \neq \varnothing$, para cada $b \in \mathcal{B}$. $\boxdot$

Cuando perdemos la deseable propiedad topológica de la complitud, nada nos asegura que un álgebra normada sea espectralmente admisible. Sin embargo, como vamos a ver seguidamente, cuando se está en un ambiente de gran privilegio algebraico, como ocurre en el caso asociativo con unidad, entonces se recupera la mencionada propiedad. Por lo tanto, vamos a mostrar que las álgebras normadas asociativas con unidad son casos particulares de álgebras espectralmente admisibles. Sin embargo, en el Ejemplo 5.22, veremos que hay álgebras normadas con unidad (obviamente no asociativas) que no son espectralmente admisibles. Comenzamos haciendo la siguiente observación.

Lema 5.11 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada asociativa con unidad, y sea $\widehat{\mathcal{B}}$ su completación. Entonces, $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b)$, y $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b)$, para cada $b \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Puesto que $\widehat{\mathcal{B}}$ es un álgebra de Banach con unidad, el conjunto de sus elementos invertibles es un abierto [13, Theorem I.2.11]. En consecuencia, si $b \in \mathcal{B}$, y $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $L_b - \lambda I : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ no es sobreyectivo, entonces de la asociatividad se deduce que $(L_b - \lambda I)(\widehat{\mathcal{B}})$ no contiene ningún elemento invertible de $\widehat{\mathcal{B}}$, por lo que el rango de $L_b - \lambda I$ no es denso en $\widehat{\mathcal{B}}$, y por lo tanto $L_b - \lambda I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ no es sobreyectivo. Esto prueba que $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b)$, y análogamente se tiene que $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b)$. □

Proposición 5.12 *Las álgebras normadas asociativas con unidad son espectralmente admisibles.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada asociativa con unidad. Si $\mathcal{B}$ es completa, entonces $\mathcal{B}$ es espectralmente admisible como se ha mostrado en el Ejemplo 5.10. Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ no es completa, y sea $\widehat{\mathcal{B}}$ su completación. Fijemos $b \in \mathcal{B}$. Puesto que $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \subseteq \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b)$, y $L(\widehat{\mathcal{B}})$ es un *álgebra espectral* en el sentido de [61, Definition 2.2.4], en virtud de [61, Theorem 2.2.5, y Corollary 2.2.8] se deduce que $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \subseteq \mathbf{D}_{\|b\|}$, siendo $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b)$ no vacío (Proposición 5.7). En consecuencia, de la inclusión $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b)$ probada en el lema anterior, se concluye que el conjunto $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cap \mathbf{D}_{\|b\|}$ es no vacío, por lo que $\mathcal{B}$ es espectralmente admisible. □

El hecho de que un homomorfismo de rango denso, en el ambiente del Problema 5.3, tenga rango espectralmente admisible, es una condición suficiente para garantizar de forma automática su continuidad, tal y como se establece formalmente en el siguiente Teorema.

Teorema 5.13 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es simple, y si el rango de θ es espectralmente admisible, entonces θ es continuo*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$. Como $\theta L_a^{\mathcal{A}} = L_{\theta(a)}^{\theta(\mathcal{A})}\theta$, siendo la aplicación $\theta : \mathcal{A} \to \theta(\mathcal{A})$ sobreyectiva, por la Proposición 4.5 tenemos que

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(L_a). \tag{5.1}$$

Similarmente $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(R_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(R_a)$. Denotemos por $e_{\mathcal{A}}$ y $e_{\mathcal{B}}$ a las unidades de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Como $\theta(e_{\mathcal{A}})$ es una unidad para $\theta(\mathcal{A})$, y $\theta(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{B}$, se deduce trivialmente, por la unicidad de la unidad, que $\theta(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, es decir, el homomorfismo θ es unital. Por tanto $I - L_{\theta(a)} = L_{\theta(e_{\mathcal{A}}-a)} = L_{e_{\mathcal{B}}-\theta(a)}$. Por hipótesis, existe algún $M > 0$ tal que

$$\left[\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - L_{\theta(a)}) \cup \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - R_{\theta(a)})\right] \cap M\mathbf{D}_{\|e_{\mathcal{B}}-\theta(a)\|} \neq \varnothing,$$

para cada $a \in \mathcal{A}$. Fijemos un elemento $a \in \mathcal{A}$. Entonces, existe algún $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que:

$$\lambda \in \left[\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - L_{\theta(a)}) \cup \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - R_{\theta(a)})\right] \cap M\mathbf{D}_{\|e_{\mathcal{B}}-\theta(a)\|},$$

luego $|\lambda| \leq M\,\|e_{\mathcal{B}} - \theta(a)\|$ y $\lambda \in \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - T_{\theta(a)})$, donde $T_{\theta(a)}$ representa a $L_{\theta(a)}$ o bien a $R_{\theta(a)}$, según proceda. Obviamente $1 - \lambda \in \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(T_{\theta(a)})$. Pero por la inclusión (5.1) se tiene que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(T_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(T_a)$, luego $1 - \lambda \in \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(T_a)$. Por tanto, de la complitud de $\mathcal{A}$ se deduce que $|1-\lambda| < \|a\|$. Consecuentemente,

$$1 \leq |\lambda| + |1-\lambda| \leq M \|e_{\mathcal{B}} - \theta(a)\| + \|a\|,$$

lo que prueba que $e_{\mathcal{B}}$ no pertenece al subespacio separador $\mathfrak{s}(\theta)$ de θ. Nótese que $\mathfrak{s}(\theta)$ es un ideal de $\mathcal{B}$, pues el rango de θ es denso. Como $\mathcal{B}$ es simple y $e_{\mathcal{B}} \notin \mathfrak{s}(\theta)$, se obtiene en consecuencia que $\mathfrak{s}(\theta) = \{0\}$ y por tanto que θ es continuo, en virtud del Teorema de la Gráfica Cerrada. □

Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada que no es espectralmente admisible. Entonces existe $b \in \mathcal{B}$ tal que

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) \cap \mathbf{D}_{\|b\|} = \varnothing.$$

En particular ha de ser

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) \cap \sigma_{m}^{\widehat{\mathcal{B}}}(b) = \varnothing,$$

donde $\widehat{\mathcal{B}}$ denota la completación de $\mathcal{B}$. De las igualdades

$$\begin{aligned} \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(b) &= \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cup \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) \\ \sigma_{m}^{\widehat{\mathcal{B}}}(b) &= \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) \cup \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b), \end{aligned}$$

se deduce, en particular, estas otras

$$\begin{aligned} \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) &= \varnothing, \\ \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b) &= \varnothing. \end{aligned}$$

Esto motivó el concepto de operador espectralmente raro, que establecimos formalmente en la Definición 1.30. De hecho, lo que acabamos de indicar se expresa en términos de los operadores espectralmente raros como sigue:

Proposición 5.14 *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra normada que no es espectralmente admisible entonces ha de existir algún elemento*

$b \in \mathcal{B}$ tal que L_b y R_b son operadores espectralmente raros, simultáneamente. Es decir:

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) = \varnothing = \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b).$$

El resultado anterior da pie a la siguiente definición.

Definición 5.15 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada compleja. Se dice que un elemento $b \in \mathcal{B}$ es* **espectralmente raro** *si L_b y R_b son operadores espectralmente raros, lo que significa que*

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(L_b) = \varnothing = \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{B}}}(R_b), \tag{5.2}$$

donde $\widehat{\mathcal{B}}$ denota la completación de $\mathcal{B}$.

La siguiente propiedad elemental de los elementos espectralmente raros, nos será de utilidad.

Proposición 5.16 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada compleja con unidad, e. Supongamos que $b \in \mathcal{B}$ es espectralmente raro. Entonces $\alpha b - \beta e$ también es espectralmente raro, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha \neq 0$.*

Demostración. Si $\alpha b - \beta e$ no fuese espectralmente raro para ciertos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha \neq 0$, entonces debería de existir algún $\lambda \in \sigma_{su}(T_{\alpha b-\beta e}) \cap \sigma(\widehat{T}_{\alpha b-\beta e})$, donde $T_{\alpha b-\beta e}$ denota o bien $L_{\alpha b-\beta e}$ ó $R_{\alpha b-\beta e}$. Por tanto, $T_{\alpha b-\beta e} - \lambda I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ no es sobreyectivo mientras que $\widehat{T}_{\alpha b-\beta e} - \lambda \widehat{I} : \widehat{\mathcal{B}} \to \widehat{\mathcal{B}}$ no es biyectivo. Como $T_{\alpha b-\beta e} - \lambda I = T_{\alpha b} - (\beta+\lambda) I$, y $\widehat{T}_{\alpha b-\beta e} - \lambda \widehat{I} = \widehat{T}_{\alpha b} - (\beta+\lambda)\widehat{I}$, obtenemos que $\beta + \lambda \in \sigma_{su}(T_{\alpha b}) \cap \sigma(\widehat{T}_{\alpha b})$, y de esta manera $\frac{\beta+\lambda}{\alpha} \in \sigma_{su}(T_b) \cap \sigma(\widehat{T}_b)$, lo que prueba que b no es espectralmente raro, una contradicción. $\square$

Puesto que cualquier álgebra normada completa carece de elementos espectralmente raros, del Teorema 5.13 se obtiene de manera directa el siguiente resultado, que muestra en particular que *las álgebras normadas completas simples con unidad tienen unicidad de la topología de la norma* (si bien, como sabemos, otras clases más generales de álgebras también disfrutan de esta última propiedad).

Corolario 5.17 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es simple y $\theta(\mathcal{A})$ carece de elementos espectralmente raros, entonces θ es continuo.*

Demostración. Si ningún elemento de $\theta(\mathcal{A})$ es espectralmente raro, entonces $\theta(\mathcal{A})$ es espectralmente admisible dado que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(\theta(a)) \cap \mathbf{D}_{\|\theta(a)\|} \neq \varnothing$, para cada $a \in \mathcal{A}$, lo que muestra la continuidad de θ gracias al Teorema 5.13. $\square$

El corolario anterior supone una generalización no asociativa del teorema de Rickart, como se deduce del siguiente resultado que es consecuencia inmediata del Lema 5.11 teniendo presente la Proposición 1.28.

Proposición 5.18 *Las álgebras normadas asociativas con unidad no poseen elementos espectralmente raros.*

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, siendo $\mathcal{B}$ simple, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Sea $\mathcal{F}_\theta$ el conjunto dado por:

$$\mathcal{F}_{\theta(\mathcal{A})} := \{b \in \theta(\mathcal{A}) : b \text{ es espectralmente raro}\}.$$

Acabamos de mostrar en el Corolario 5.17 que si $\mathcal{F}_{\theta(\mathcal{A})}$ es vacío entonces θ es continuo. A continuación veremos que el tamaño del conjunto $\mathcal{F}_{\theta(\mathcal{A})}$ condiciona, en cierto modo, el buen comportamiento topológico del homomorfismo θ. De hecho probaremos que, salvo que $\mathcal{F}_{\theta(\mathcal{A})}$ sea denso en $\mathcal{B}$, la cerrabilidad de $\ker\theta$ está garantizada.

Llegados a este punto, desafortunadamente, no se sabe cuándo la cerrabilidad del núcleo fuerza la continuidad del homomorfismo (es decir, equivale a ella). El mejor resultado que conocemos acerca de esta cuestión se establecerá más adelante, en el Corolario 5.26.

Teorema 5.19 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, tal que $\mathcal{B}$ es simple, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si el conjunto de los elementos espectralmente raros en $\theta(\mathcal{A})$ no es denso en $\mathcal{B}$, entonces* $\ker\theta$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\theta(a)$ no es espectralmente raro. Afirmamos que:

$$1 \leq \|e - \theta(a)\| + \|a + m\|\,, \qquad (m \in \ker\theta), \tag{5.3}$$

donde e denota a la unidad de $\mathcal{B}$. Para probar nuestra afirmación, supongamos que existiese algún

$$\lambda \in \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \cap \sigma^{\mathcal{B}}(L_{\theta(a)})$$

(razonaríamos igual si fuese $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(R_{\theta(a)}) \cap \sigma^{\mathcal{B}}(R_{\theta(a)}) \neq \varnothing$). Entonces:

$$1 - \lambda \in \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(I - L_{\theta(a)}) \cap \sigma^{\mathcal{B}}(I - L_{\theta(a)}) \subseteq \sigma^{\mathcal{B}}(L_{e-\theta(a)}),$$

luego, $|1-\lambda| \leq \|e - \theta(a)\|$ por la fórmula de Gelfand-Beurling. Como $\theta : \mathcal{A} \to \theta(\mathcal{A})$ es sobreyectiva y $\theta L_a = L_{\theta(a)}\theta$, de la Proposición 4.5 se obtiene que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(L_a)$. En tal caso $|\lambda| \leq \|a\|$, de nuevo por la fórmula de Gelfand-Beurling, y por tanto

$$1 \leq |1-\lambda| + |\lambda| \leq \|e - \theta(a)\| + \|a\|\,.$$

Pero si $m \in \ker\theta$ entonces, por la igualdad $\theta(a+m) = \theta(a)$, la afirmación (5.3) queda probada a partir de la desigualdad anterior.

De (5.3) tenemos que, si $a \in \overline{\ker\theta}$ y $\theta(a)$ no es espectralmente raro, entonces $1 \leq \|e - \theta(a)\|$. Consecuentemente, cualquier elemento del conjunto

$$B_{00} := \theta(\overline{\ker\theta}) \cap \mathbf{B}(e,1)$$

es espectralmente raro, donde $\mathbf{B}(e,1) := \{b \in \mathcal{B} : \|b - e\| < 1\}$.

Afirmamos ahora que si $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \mathcal{B}$, entonces el conjunto $B_0 := \mathbb{C}^*(e - B_{00})$ es denso en $\mathcal{B}$, siendo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Para probar esta última afirmación, sean $c \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos un $k > 0$ tal que $e - \frac{1}{k}c \in \mathbf{B}(e,1)$. Como $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \mathcal{B}$, tenemos que B_{00} es denso en $\mathbf{B}(e,1)$, luego debe existir algún $b \in B_{00}$ tal que $\left\|b - (e - \frac{1}{k}c)\right\| < \frac{\varepsilon}{k}$. Entonces,

$$\|c - k(e-b)\| = k\left\|b - (e - \frac{1}{k}c)\right\| < \varepsilon.$$

Puesto que $k(e-b) \in B_0$, se sigue la validez de nuestra última afirmación. Además, del hecho de que $\mathcal{A}$ tiene unidad se deduce que $B_0 \subseteq \theta(\mathcal{A})$. En consecuencia se obtiene que si $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \mathcal{B}$, entonces B_0 es un subconjunto de $\theta(\mathcal{A})$ que es denso en $\mathcal{B}$ y está formado por elementos espectralmente raros, una contradicción. Como $\mathcal{B}$ es simple y $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})}$ es un ideal de $\mathcal{B}$, concluimos que $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \{0\}$. Esto prueba que $\ker\theta$ es cerrado, como se deseaba. $\square$

Ejemplos obvios de elementos espectralmente raros en un álgebra normada no completa $\mathcal{B}_0$ son aquellos $b \in \mathcal{B}_0$ cuyo m-espectro sobreyectivo $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(b)$ es vacío, pues al ser

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(b) := \sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(L_b) \cup \sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(R_b),$$

en dicho caso se tiene que

$$\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(L_b) = \varnothing = \sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(R_b),$$

por lo que la propiedad 5.2 se verifica trivialmente. Por tanto, el conjunto

$$\{b \in \mathcal{B}_0 : \sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(b) = \emptyset\}$$

es un subconjunto destacado del conjunto

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}_0} = \{b \in \mathcal{B}_0 : b \text{ es espectralmente raro}\}.$$

Volvamos al ambiente del problema que nos ocupa, considerando dos álgebras normadas completas con unidad $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{B}$ simple, y un homormorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{B}_0 = \theta(\mathcal{A})$ el rango de dicho homomorfismo. Si encontrásemos algún elemento $b \in \mathcal{B}_0$ con m-espectro sobreyectivo vacío, entonces dicho elemento b sería espectralmente raro, por lo que $\mathcal{B}_0$ no sería espectralmente admisible, en el sentido de la Definición 5.9. En consecuencia, ni el Teorema 5.13 ni el Corolario 5.17 serían aplicables. De hecho, la presencia de un elemento con estas características (esto es, la existencia de un elemento $b \in \mathcal{B}_0 = \theta(\mathcal{A})$ con $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(b) = \emptyset$), va a garantizar justamente lo contrario de la propiedad buscada, esto es, la discontinuidad del homomorfismo. A continuación probamos esta afirmación prescindiendo incluso de la hipótesis de la existencia de unidad y de la simplicidad de $\mathcal{B}$.

El siguiente resultado nos dice que *si un homomorfismo entre álgebras normadas completas tiene núcleo cerrado, entonces ningún elemento de su rango tiene m-espectro sobreyectivo vacío* (recordemos que cualquier homomorfismo entre álgebras normadas completas puede verse como un homomorfimo de rango denso). *En particular éste es el caso de los homomorfismos continuos.*

Proposición 5.20 *Sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso, entre álgebras normadas completas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si $\ker\theta$ es cerrado, entonces $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(\theta(a))$ es no vacío, para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Si $\ker\theta$ es cerrado, puesto que la aplicación $\widehat{\theta} : \mathcal{A}/\ker\theta \to \theta(\mathcal{A})$ dada por $\widehat{\theta}(a+\ker\theta) = \theta(a)$ es un homomorfismo biyectivo, tal que

$$L_{\theta(a)}^{\theta(\mathcal{A})}\widehat{\theta} = \widehat{\theta}\, L_{a+\ker\theta}^{\mathcal{A}/\ker\theta},$$

se tiene que $L_{\theta(a)}^{\theta(\mathcal{A})} = \widehat{\theta}\, L_{a+\ker\theta}^{\mathcal{A}/\ker\theta}\widehat{\theta}^{-1}$. En consecuencia se obtiene que

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) = \sigma_{su}^{\mathcal{A}/\ker\theta}(L_{a+\ker\theta}).$$

Además, $\sigma_{su}^{\mathcal{A}/\ker\theta}(L_{a+\ker\theta}) \neq \varnothing$, por la Proposición 1.28. Por tanto,

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) = \sigma_{su}^{\mathcal{A}/\ker\theta}(L_{a+\ker\theta}) \neq \varnothing,$$

y similarmente

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(R_{\theta(a)}) = \sigma_{su}^{\mathcal{A}/\ker\theta}(R_{a+\ker\theta}) \neq \varnothing,$$

lo que prueba que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(\theta(a)) \neq \varnothing$, para todo $a \in \mathcal{A}$. □

Como ya se ha indicado, de la proposición anterior se deduce trivialmente el siguiente criterio que es útil para probar la discontinuidad de un homomorfismo entre álgebras normadas completas.

Corolario 5.21 *Sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso, entre dos álgebras normadas completas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si $\theta(\mathcal{A})$ posee algún elemento $b \in \theta(\mathcal{A})$ tal que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(b) = \varnothing$ (es decir, con espectro m-sobreyectivo vacío), entonces θ es discontinuo.*

Sabemos que probar que la asociatividad puede ser una hipótesis superflua para el clásico Teorema de Rickart, sobre el homomorfismo de rango denso, equivale a responder afirmativamente al Problema 5.3, que pregunta por la continuidad automática de un homomorfismo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos álgebras normadas completas con unidad $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, supuesto que el álgebra $\mathcal{B}$ es simple.

El ejemplo siguiente muestra que existen álgebras normadas completas $\mathcal{B}$, simples con unidad, con subálgebras densas $\mathcal{B}_0$ que contienen elementos con m-espectro sobreyectivo vacío. Por tanto, cualquier homomorfismo de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}_0$ es necesariamente discontinuo. Es decir, todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $\theta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_0$ es discontinuo.

Hacemos también la observación de que el álgebra $\mathcal{B}_0$ que vamos a construir prueba la existencia de álgebras normadas con unidad que no son espectralmente admisibles. Ello muestra adicionalmente que la Proposición 5.12 deja de ser cierta si se suprime la hipótesis de la asociatividad.

Ejemplo 5.22 Sea $\mathcal{B}_0$ el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente está generado por el conjunto $\{e, e_1, e_2, ...\}$ y cuyo producto se define por la tabla siguiente:

	e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$\dots$	e_k	$\dots$
e	e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5		e_k	
e_1	e_1	0	e	e_1	e_2	e_3		e_{k-2}	
e_2	e_2	0	0	e	e_1	e_2		e_{k-3}	
e_3	e_3	0	e_1	0	e	e_1		e_{k-4}	
e_4	e_4	0	e_3	0	0	e		e_{k-5}	
e_5	e_5	0	e_4	0	0	0		e_{k-6}	
e_6	e_6	0	e_5	0	0	0		e_{k-7}	
e_7	e_7	0	e_6	0	0	0		e_{k-8}	
e_8	e_8	0	e_7	0	0	0		e_{k-9}	
$\vdots$								$\vdots$	
e_{k-1}	e_{k-1}	0	e_{k-2}	0	0	0		e	
e_k	e_k	0	e_{k-1}	0	0	0		0	
e_{k+1}	e_{k+1}	0	e_k	0	0	0		0	
$\vdots$									

Afirmamos que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(e_2) = \varnothing$. Para probarlo, nótese que L_{e_2} es sobreyectivo pues $L_{e_2}(e_3) = e$ y $L_{e_2}(e_{2+k}) = e_{k-1}$, para todo $k \geq 2$. Por otra parte, si $\lambda \neq 0$ entonces $L_{e_2} - \lambda I$ también es sobreyectivo. De hecho, de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
(e_2 - \lambda e)(e_2 + \lambda e) &= -\lambda^2 e, \\
(e_2 - \lambda e)e_1 &= -\lambda e_{1,} \\
(e_2 - \lambda e)e_2 &= -\lambda e_2, \\
(e_2 - \lambda e)e_3 &= e - \lambda e_3, \\
(e_2 - \lambda e)e_{k+2} &= e_{k-1} - \lambda e_{k+2}, \text{ para } k > 1,
\end{aligned}$$

se deduce que el rango de $L_{e_2} - \lambda I$ contiene al conjunto $\{e, e_1, e_2, \ldots\}$ y por tanto a todo $\mathcal{B}_0$, por lo que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(L_{e_2}) = \varnothing$. Se comprueba de manera similar que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(R_{e_2}) = \varnothing$, quedando probada de esta manera nuestra afirmación.

Sea ahora $\mathcal{B}$ el espacio vectorial de los elementos de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$ tales que $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$, donde $e_0 := e$. Definiendo

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \right\| := \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|,$$

obtenemos una norma completa sobre $\mathcal{B}$. Además, como

$$\left\| e_j \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i e_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i|$$

se obtiene que:

$$\left\| \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i e_i \right) \right\| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i| \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| \right),$$

por lo que $\mathcal{B}$ es precisamente la completación de $\mathcal{B}_0$. Obviamente, e es una unidad en $\mathcal{B}$. Nótese que $\mathcal{B}$ es simple pues si $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$ es tal que $\alpha_m \neq 0$, para algún $m \geq 3$, entonces:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i\right) e_{m+1} = \alpha_0 e_{m+1} + \alpha_1 e_{m-1} + \alpha_2 e_{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} e_1 + \alpha_m e_0,$$

de donde

$$e_{m+1}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i\right) e_{m+1}\right] = \alpha_{m-2} e_m + \alpha_m e_{m+1}.$$

En consecuencia,

$$e_m\left(e_{m+1}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i\right) e_{m+1}\right]\right) = e_m(\alpha_{m-2} e_m + \alpha_m e_{m+1}) = \alpha_m e.$$

Esto prueba que el ideal generado por $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$ contiene a la unidad de $\mathcal{B}$. Por otra parte, si $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i$ es tal que $\alpha_m = 0$, para todo $m \geq 3$, entonces estamos ante un elemento de la forma

$$\alpha_0 e + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

En este caso, si $\alpha_0 \neq 0$, entonces

$$((\alpha_0 e + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)e_1)e_2 = \alpha_0 e_1 e_2 = \alpha_0 e,$$

mientras que si $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$[((\alpha_0 e + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)e_2)e_1]\, e_2 = \alpha_1 e,$$

y, por último, si $\alpha_2 \neq 0$, entonces

$$[((\alpha_0 e + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)e_3)\, e_1]\, e_2 = \alpha_2 e.$$

Esto prueba que el álgebra $\mathcal{B}$ es simple. Como $\sigma_{su}^{\mathcal{B}_0}(e_2) = \varnothing$, por el Corolario 5.21, se obtiene que cualquier homomorfismo sobreyectivo $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_0$ es discontinuo, o lo que es lo mismo, cualquier homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cuyo rango sea el álgebra $\mathcal{B}_0$ es discontinuo. $\boxdot$

5.3 Homomorfismos cuyo rango es denso y de potencias asociativas

5.3.1 Objetivos y determinación del problema de base

Como se sabe, Balachandran y Rema demostraron en [9] que *los homomorfismos de rango denso, $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos álgebras de Jordan Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son continuos cuando el álgebra $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple.* Las propias ideas de Balachandran y Rema fueron usadas en [68] (véase también [71, Theorem 1.5]) para generalizar dicho resultado probando lo siguiente:

Teorema 5.23 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas de potencias asociativas. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple, entonces todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

Como sabemos, las álgebras de Jordan son un caso particular de *álgebras de potencias asociativas*, es decir, de aquellas álgebras en las que cualquier subálgebra generada por un solo elemento es asociativa. La clase de las álgebras de potencias asociativas es muy extensa y contiene a una gran cantidad de álgebras no asociativas clásicas, como las álgebras de Jordan, las de Lie, o las alternativas, entre otras (véase, para más detalle, el diagrama en la página 10 de [50], un artículo que trata de las álgebras no asociativas y sus aplicaciones en la Física).

De otra parte, el mencionado resultado de Balachandran y Rema, también fue generalizado en [71, Theorem 1.5] como sigue:

Teorema 5.24 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada completa y $\mathcal{B}$ es un álgebra de Jordan-Banach fuertemente semisimple, entonces todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

En vista del Corolario 5.21 y del Ejemplo 5.22, y a la luz de los dos resultados anteriores, resulta razonable abordar el siguiente problema:

Problema 5.25 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple y de potencias asociativas, ¿es θ automáticamente continuo?*

Lo que nos estamos preguntando es si el Teorema 5.23 puede generalizarse al caso de que el álgebra de partida, $\mathcal{A}$, sea un álgebra normada completa arbitraria (liberándola del requerimiento de ser de potencias asociativas), o lo que es lo mismo, deseamos saber si el Teorema 5.24 puede generalizarse al caso de que el álgebra de llegada, $\mathcal{B}$, sea de potencias asociativas.

Como se desprende del Teorema 5.23 y establecemos a continuación, en relación con el problema anterior, ahora tenemos la ventaja de que es suficiente probar la cerrabilidad del núcleo del homomorfismo.

Corolario 5.26 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas, de manera que $\mathcal{B}$ es fuertemente semisimple y de potencias asociativas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\ker \theta$ es cerrado, entonces θ es continuo.*

Demostración. Si $\ker \theta$ es cerrado, entonces $\mathcal{A}/\ker \theta$ es un álgebra normada completa de potencias asociativas. Por tanto, aplicando el Teorema 5.23 al homomorfismo inducido por θ, que es el homomorfismo $\phi : \mathcal{A}/\ker \theta \to \mathcal{B}$ dado por $\phi(a+\ker \theta) = \theta(a)$, obtenemos que ϕ es continuo. Esto prueba que θ es continuo pues $\theta = \phi\pi$, donde $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\ker \theta$ denota, como siempre, la proyección canónica. □

Determinar si el resultado anterior sigue siendo cierto sin suponer que el álgebra $\mathcal{B}$ sea de potencias asociativas, es un problema que todavía hoy permanece abierto, como ya se ha dicho.

Es muy fácil ver que los argumentos dados en la prueba de la Proposición 5.2, permiten establecer también la siguiente equivalencia de enunciados:

Proposición 5.27 *Las siguientes declaraciones son equivalentes:*

(i) *Cualquier homomorfismo de rango denso, de un álgebra normada completa en un álgebra normada completa de potencias asociativas fuertemente semisimple, es continuo.*

(ii) *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas completas con unidad, y si $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas, entonces todo homomorfismo de rango denso $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es continuo.*

En virtud del resultado anterior, el problema que ahora nos ocupa, puede reformularse de manera equivalente en los siguientes términos:

Problema 5.28 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas, ¿es θ automáticamente continuo?*

A partir de ahora, también seguiremos suponiendo que el cuerpo base de las álgebras involucradas es $\mathbb{C}$, amparados en las consideraciones efectuadas en el apartado 5.1.1.

Llegado el momento de estudiar el problema anterior, se distinguirán dos situaciones: que el homomorfismo de rango denso considerado sea *irreducible*, o que no lo sea. En función de ello consideraremos dos nuevos apartados dentro de esta sección.

En el Teorema 5.31, probaremos que *el Problema* 5.28 *tiene respuesta afirmativa si* θ *es irreducible* (es decir, si θ no puede restringirse a un ideal propio de $\mathcal{A}$, manteniendo la densidad de su rango). En particular, en el Corolario 5.32, obtendremos que *cualquier homomorfismo de rango denso entre álgebras normadas completas simples con unidad es continuo, siempre que el álgebra rango sea de potencias asociativas* (véase también la reformulación de este resultado dada en el Corolario 5.33).

El principal resultado de §5.3.3, a saber, el Teorema 5.34, establece que, *en el ambiente del Problema* 5.28*, un homomorfismo de rango denso* $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *es continuo si el conjunto de los elementos espectralmente raros en* $\theta(\mathcal{A})$ *no es denso en* $\mathcal{B}$ (el significado de elemento «*espectralmente raro*» se dio en la Definición 5.15). Como *las álgebras asociativas normadas con unidad no poseen elementos espectralmente raros* (Corolario 5.18), el clásico teorema del rango denso de Rickart se obtiene como corolario del Teorema 5.34. Finalmente, también mostraremos condiciones suficientes que aseguren que un álgebra $\mathcal{B}$ no tenga una subálgebra densa cuyo conjunto de elementos espectralmente raros sea denso en $\mathcal{B}$; concretamente lo haremos en los Corolarios 5.35 y 5.38.

5.3.2 El caso de los homomorfismos irreducibles

Como ya hemos anunciado, nuestro siguiente objetivo será dar una respuesta afirmativa al Problema 5.28 cuando el homomorfismo de rango denso considerado sea irreducible en el sentido establecido en la siguiente definición.

Definición 5.29 *Sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso entre las álgebras normadas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Se dice que θ es* **irreducible** *si no existe ningún ideal propio cerrado M de $\mathcal{A}$ tal que $\theta(M)$ sea denso en $\mathcal{B}$.*

Obviamente, un primer ejemplo de homomorfismo irreducible de rango denso, se obtiene cuando se supone que el álgebra de partida es simple.

En el siguiente resultado desvelamos una de las claves para la prueba del objetivo propuesto.

Lema 5.30 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Entonces, para cada $a \in \overline{\ker\theta}$, se tiene que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \subseteq \{0\}$ y, similarmente, $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(R_{\theta(a)}) \subseteq \{0\}$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$, y supongamos que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \neq \varnothing$. Como $\theta : \mathcal{A} \to \theta(\mathcal{A})$ es sobreyectivo y $L_{\theta(a)}\theta = \theta L_a$, por la Proposición 4.5, se obtiene que

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(L_a).$$

Así, $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{A}}(L_{a+c})$, para todo $c \in \ker\theta$, de donde $|\lambda| \leq \|a+c\|$, para cada $\lambda \in \sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)})$, por la fórmula de Gelfand-Beurling. Si adicionalmente fuese $a \in \overline{\ker\theta}$, esto mostraría que $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) = \{0\}$. Concluimos así que, para cada $a \in \overline{\ker\theta}$, o bien $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)})$ es vacío o, de lo contrario, $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(a)}) = \{0\}$. Análogamente sucede con el conjunto $\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(R_{\theta(a)})$, lo que prueba el resultado. $\square$

Teorema 5.31 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, y supongamos que $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas. Entonces, todo homomorfismo irreducible $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de rango denso es continuo.*

Demostración. Obsérvese que $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})}$ es un ideal del álgebra simple $\mathcal{B}$ por lo que, o bien $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \{0\}$ o $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \mathcal{B}$. Supongamos que fuese $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \mathcal{B}$. Entonces, como θ es irreducible, $\mathcal{A} = \overline{\ker\theta}$, y de esta manera $e \in \overline{\ker\theta}$. Esta circunstancia contradice el Lema 5.30 pues

$$\sigma_{su}^{\theta(\mathcal{A})}(L_{\theta(e)}) = \sigma_{su}(I) = \{1\}.$$

Por tanto, deberá ser $\overline{\theta(\overline{\ker\theta})} = \{0\}$, en cuyo caso $\ker\theta$ es cerrado, y finalmente el resultado se obtiene aplicando el Corolario 5.26. $\square$

Del teorema que acabamos de probar, y del hecho de que los homomorfismos de rango denso son irreducibles cuando su álgebra dominio es simple, obtenemos la siguiente consecuencia:

Corolario 5.32 *Cualquier homomorfismo de rango denso, entre álgebras normadas completas simples con unidad, es continuo siempre que el álgebra rango sea de potencias asociativas.*

De la equivalencia existente entre los Problemas 5.25 y 5.28, también se obtiene este otro resultado de interés:

Corolario 5.33 *Todo homomorfismo de rango denso, entre un álgebra normada completa simple con unidad, y un álgebra normada completa fuertemente semisimple de potencias asociativas, es continuo.*

Concluimos este apartado dedicado al caso de los homomorfismos irreducibles observando que los argumentos mostrados en el Teorema 5.31 nos permiten concluir que:

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras normadas completas con unidad, siendo $\mathcal{B}$ simple, y si $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo irreducible de rango denso, entonces su núcleo es cerrado.

Determinar si, en este contexto, la cerrabilidad del núcleo del homomorfismo fuerza la continuidad del mismo, es un problema abierto. La mejor respuesta que se conoce hasta el momento en relación a esta cuestión es la que aquí hemos usado para obtener el Teorema 5.31, que es la de suponer que el álgebra $\mathcal{B}$ es de potencias asociativas (Corolario 5.26).

En la medida en la que se vayan obteniendo condiciones más generales que pongan en equivalencia la cerrabilidad del núcleo con la continuidad del homomorfismo, se generalizará también el Teorema 5.31.

5.3.3 El caso de los homomorfismos no irreducibles

Abordamos ahora el caso de los homomorfismos no (necesariamente) irreducibles. A continuación, establecemos el teorema central de esta sección que muestra que si $\mathcal{B}$ es de potencias asociativas entonces, en el Corolario 5.17, el requerimiento de la ausencia de elementos espectralmente raros en el rango del homomorfismo, $\theta(\mathcal{A})$, puede rebajarse hasta la hipótesis de que dicho conjunto no sea denso en $\mathcal{B}$.

Teorema 5.34 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, tal que $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si el conjunto de los elementos espectralmente raros en $\theta(\mathcal{A})$ no es denso en $\mathcal{B}$, entonces θ es continuo.*

Demostración. Por el Teorema 5.19, tenemos que $\ker\theta$ es cerrado. Ahora sólo basta aplicar el Corolario 5.26. □

El resultado anterior supone una generalización no asociativa del teorema de Rickart, incluso sin el requerimiento de la asociatividad para el álgebra dominio, como se deduce de la Proposición 5.18, según la cual, *las álgebras asociativas normadas con unidad carecen de elementos espectralmente raros.*

En lo que sigue, vamos a presentar situaciones donde se ejemplifiquen las hipótesis del Teorema 5.34.

Recordamos que si X es un espacio normado complejo, y $T \in L(X)$, el *espectro de compresión de* T se define como

$$\sigma_{com}^{X}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)(X) \text{ no es denso en } X\}.$$

Asimismo, si $\widehat{X}$ es la completación de X, y $\widehat{T} \in L(\widehat{X})$ es la (única) extensión lineal continua a $\widehat{X}$ del operador $T \in L(X)$, entonces

$$\sigma_{com}^{X}(T) = \sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}),$$

como se estableció en el Lema 1.32. Puesto que, como se probó en la Proposición 1.33, los operadores espectralmente raros son tales que

$$\sigma_{com}^{X}(T) = \sigma_{com}^{\widehat{X}}(\widehat{T}) = \varnothing,$$

a partir del Teorema 5.34, deducimos lo siguiente.

Corolario 5.35 *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra normada completa de potencias asociativas simple con unidad. Si el conjunto*

$$\{b \in \mathcal{B} : \sigma_{com}(L_b) = \sigma_{com}(R_b) = \varnothing\}$$

no es denso en $\mathcal{B}$, entonces cualquier homomorfismo de rango denso de un álgebra normada completa con unidad en $\mathcal{B}$ es continuo.

El resultado anterior supone otra generalización no asociativa del teorema de Rickart, puesto que las álgebras asociativas satisfacen trivialmente las hipótesis de dicho corolario como mostramos a continuación.

Lema 5.36 *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach con unidad, entonces se tiene que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) = \sigma_{com}^{\mathcal{B}}(L_b)$, y $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) = \sigma_{com}^{\mathcal{B}}(R_b)$, para cada $b \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $b \in \mathcal{B}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $L_{b-\lambda e}$ no es sobreyectivo, entonces de la asociatividad de $\mathcal{B}$ se obtiene que $e \notin L_{b-\lambda e}(\mathcal{B})$, y más generalmente que $L_{b-\lambda e}(\mathcal{B})$ no interseca al conjunto de los elementos invertibles en $\mathcal{B}$. Como dicho conjunto es abierto [13, Theorem I.2.11], esto prueba que $L_{b-\lambda e}(\mathcal{B})$ no es denso en $\mathcal{B}$, y por tanto $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) \subseteq \sigma_{com}^{\mathcal{B}}(L_b)$. Como obviamente $\sigma_{com}^{\mathcal{B}}(L_b) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b)$, concluimos que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(L_b) = \sigma_{com}^{\mathcal{B}}(L_b)$. Similarmente, se tiene que $\sigma_{su}^{\mathcal{B}}(R_b) = \sigma_{com}^{\mathcal{B}}(R_b)$. □

Proposición 5.37 *Si $\mathcal{C}$ es un álgebra normada asociativa con unidad, entonces tanto $\sigma_{com}^{\mathcal{C}}(L_c)$ como $\sigma_{com}^{\mathcal{C}}(R_c)$ son conjuntos no vacíos, para todo $c \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $\widehat{\mathcal{C}}$ la completación del álgebra $\mathcal{C}$. Por el Lema 1.32 junto con el Lema 5.36 tenemos que

$$\sigma_{com}^{\mathcal{C}}(L_c) = \sigma_{com}^{\widehat{\mathcal{C}}}(L_c) = \sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{C}}}(L_c), \tag{5.4}$$

siendo dicho conjunto no vacío por la Proposición 1.28. Análogamente $\sigma_{com}^{\mathcal{C}}(R_c)$ tampoco es vacío. □

En el contexto del resultado anterior, es decir, si $\mathcal{C}$ es un álgebra normada asociativa con unidad cuya completación es $\widehat{\mathcal{C}}$, nótese que de la igualdad (5.4) y del hecho elemental de que $\sigma_{com}^{\mathcal{C}}(L_c) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{C}}(L_c)$ se deduce que $\sigma_{su}^{\widehat{\mathcal{C}}}(L_c) \subseteq \sigma_{su}^{\mathcal{C}}(L_c)$, lo que prueba el Lema 5.11. Es por ello que el Lema 5.11 también es consecuencia del Lema 5.36, junto con el Lema 1.32, resultados de los que se obtiene la igualdad (5.4).

Asimismo, a partir de la Proposición 5.37 se obtiene directamente la Proposición 5.18 puesto que, de manera trivial,

$$\sigma^{\mathcal{C}}_{com}(L_c) \subseteq \sigma^{\mathcal{C}}_{su}(L_c) \cap \sigma^{\widehat{\mathcal{C}}}(L_c).$$

Una condición sobre el álgebra rango de un homomorfismo de rango denso, que también asegura que las hipótesis del Teorema 5.34 se satisfacen, se obtiene a partir de un resultado de L. Downey y P. Enflo, y se muestra a continuación.

Corolario 5.38 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras normadas completas con unidad, tal que $\mathcal{B}$ es simple y de potencias asociativas, y sea $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de rango denso. Si existe algún $b \in \theta(\mathcal{A})$ tal que $\sigma^{\mathcal{B}}_{com}(L_b)$ (respectivamente $\sigma^{\mathcal{B}}_{com}(R_b)$) tiene un punto aislado, λ, tal que el rango de $L_b - \lambda I$ (respectivamente de $R_b - \lambda I$) tiene codimensión finita, entonces θ es continuo.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}^*$ el dual topológico de $\mathcal{B}$. Por [24, Theorem 1.5], el conjunto W de todos los operadores en $L(\mathcal{B}^*)$ que tienen un valor propio aislado cuyo espacio propio asociado es de dimensión finita, es abierto y denso en $L(\mathcal{B}^*)$. Sea $\tau : L(\mathcal{B}) \to L(\mathcal{B}^*)$ la aplicación dada por $\tau(T) = T^*$. Si $L : \mathcal{B} \to L(\mathcal{B})$ es la aplicación dada por $L(b) = L_b$, se tiene que $L\tau : \mathcal{B} \to L(\mathcal{B}^*)$ es una aplicación lineal y continua, luego $V_L = (L\tau)^{-1}(W)$ es un subconjunto abierto en $\mathcal{B}$. Además, si $b \in V_L$, entonces $\sigma_p(L_b^*) \neq \varnothing$, lo cual quiere decir, por la Proposición 1.29, que $\sigma_{com}(L_b) \neq \varnothing$, luego, por la Proposición 1.33, se concluye que b no es espectralmente raro. De manera similar, reemplazando multiplicación por la izquierda por multiplicación por la derecha, obtenemos un conjunto abierto en $\mathcal{B}$, que llamamos V_R, formado por elementos que no son espectralmente raros. En consecuencia, definiendo $V = V_L \cup V_R$, obtenemos que, siempre que sea $V \cap \theta(\mathcal{A}) \neq \varnothing$, se tiene que el conjunto de los elementos espectralmente raros en $\theta(\mathcal{A})$ no es denso en $\mathcal{B}$, y, por tanto, θ es continuo por el Corolario 5.35. Finalmente, nótese que $b \in V_L$ precisamente cuando $\sigma_{com}(L_b)$ tiene un punto aislado λ tal que el rango de $L_b - \lambda I$ tenga codimensión finita y, similarmente, $b \in V_R$ cuando $\sigma_{com}(R_b)$ tenga la misma propiedad. $\square$

Concluimos aquí nuestro estudio sobre la continuidad automática de los homomorfismos de rango denso entre álgebras normadas completas, o lo que a la postre es lo mismo, de los homomorfismos cuyo rango no es necesariamente sobreyectivo.

Las herramientas mostradas a lo largo de estos cinco capítulos constituyen un marco teórico mínimo sobre el que asentar una teoría espectral no asociativa. De hecho se han clarificado muchas cuestiones relativas al espectro, los ideales, el radical y la continuidad de los homomorfismos que también hemos plasmado en una serie de artículos ([52, 53, 54, 55]).

Finalizamos esta Memoria presentando un último capítulo en el que se apuntan algunas de nuestras líneas de actuación más inmediatas. Como veremos, nos sentimos especialmente atraídos por aquellos aspectos algo más aplicados en relación a los distintos ambientes en los que las álgebras normadas completas no asociativas son de gran interés, como los descritos en el Prólogo. De hecho estamos impacientes por ver qué tiene que decir en ellos la teoría espectral aquí desarrollada. Esto no significa que se vayan a descuidar otros desarrollos teóricos en la línea de los realizados en esta Memoria.

Parte IV

Futuras líneas de actuación

CAPÍTULO 6

Expectativas teóricas y futuras líneas de investigación

Desde la década de 1930, las álgebras no asociativas se han utilizado en Genética para describir procesos hereditarios, con la finalidad de poder determinar aquellos caracteres genéticos que son más estables frente a ciertos procesos reproductivos. Tal y como se muestra en [1, 2, 25, 26, 27, 28, 31, 63, 80], los problemas de estabilidad genética están muy ligados a la teoría espectral. Debido a esto, se han desarrollado diversas técnicas para obtener resultados en este ambiente, que han sorteado en cierta medida las carencias que otorga la ausencia de una teoría espectral no asociativa, intentando evitar igualmente el uso generalizado de álgebras infinito dimensionales. En consonancia con este argumento, podemos considerar las palabras de M. L. Reed [63] que ya tuvimos ocasión de exponer en la página xxxvi, y que recordamos de nuevo:

> «*Deducimos que este área de actividad investigadora está llena de posibilidades para el futuro, no sólo para los matemáticos, sino también para los genetistas que buscan una manera más sistemática y potente de modelar situaciones reales de la Genética. El álgebra no*

> *asociativa, en general, es en la actualidad un campo muy activo de investigación matemática. Sin embargo, en comparación con el conjunto de la literatura sobre otras clases de álgebras no asociativas (p.e. álgebras de Lie o álgebras de Jordan), el estudio de las álgebras relacionadas con los problemas de la herencia genética está todavía en su infancia... Por alguna razón, esas 'álgebras genéticas' no están ampliamente discutidas o estudiadas actualmente por los matemáticos americanos. Esperamos que este artículo abra una vía para nuevos debates e investigaciones sobre esta clase fascinante de álgebras no asociativas y su relación con la ciencia de la herencia genética».*

Estamos asistiendo en las últimas décadas a una sorprendente evolución conceptual de la teoría de álgebras no asociativas, que hace de esta disciplina un tema con grandes expectativas de futuro. Creemos que al establecer un concepto de espectro en ese ambiente, como el que se ha provisto en este documento, se dispone de un importante punto de partida para desarrollar una teoría espectral que, eventualmente, pueda servir de ayuda para abordar los problemas de las diversas áreas científicas que tratan con las estructuras no asociativas más generales.

Hemos incidido, creemos que en buena medida, en la gestación de una teoría espectral no asociativa que pudiera dar su fruto en diversos ambientes, si bien esta Memoria hay que ubicarla en el inicio de una larga andadura. Es cierto que, hasta ahora, las incursiones realizadas en esta materia han sido particularmente teóricas. Por ello, no deseamos finalizar el presente trabajo sin antes haber ofrecido al lector, al menos, una breve pincelada de las aplicaciones que dicha teoría promueve en el marco de las álgebras no asociativas. En este sentido, mostramos a continuación una exploración en el contexto de la continuidad automática de homomorfismos sobreyectivos, sobre un tipo muy particular de álgebras.

Aplicación 6.1 En el sentido de las álgebras que se muestran en los documentos [33, 66, 76], sea $\mathcal{B}$ el *álgebra de evolución* compleja determinada por los elementos de la forma $b = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j e_j$, donde $\beta_j \in \mathbb{C}$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, y tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| < \infty$, provista del producto dado por las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} e_i e_j = 0, & \text{si } i \neq j, \\ e_i^2 = \displaystyle\sum_{j\geq i} \gamma_{ij} e_j \end{cases}$$

y tal que $\sum_{j\geq i}^{\infty} |\gamma_{ij}| = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$ (donde γ_{ij} son las constantes o coeficientes de estructura del álgebra $\mathcal{B}$ relativos a $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$). Nótese que $\mathcal{B}$ es un álgebra[1] normada completa, respecto de la ℓ_1-norma.

Considerando la formulación algebraica de la Genética no mendeliana, el elemento e_i puede representar a un organismo autorreplicante, o a un tipo genético (alelo, gen) de un organismo (por ejemplo, un orgánulo celular), y los coeficientes γ_{ij} pueden interpretarse como la probabilidad de obtener el organismo (o el gen) e_j a partir del organismo e_i. Es por ello que, a la vista de la tabla de multiplicación (o reproducción) anterior, no se considera probable que de la autorreplicación de e_i se obtenga e_j cuando es $j < i$.

Supongamos adicionalmente que $\gamma_{ii} \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, esto es que la probabilidad de que e_i se obtenga por autorreplicación suya no es nula. Se tiene entonces que $\mathcal{B}$ es m-semisimple, pues:

$$\{b \in \mathcal{B} : \rho(b) = 0\} = \{0\}.$$

De hecho se obtiene que si $b \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$ es el elemento dado por $b = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k e_k$, y si

$$k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} : \beta_k \neq 0\},$$

[1] Que por lo general no será ni de potencias asociativas.

entonces $\lambda = \beta_{k_0}\gamma_{k_0 k_0}$ pertenece a $\sigma_m^{\mathcal{B}}(b)$, dado que e_{k_0} no está en el rango de $L_b - \lambda I$, para dicho valor de λ.
Como consecuencia, y en el mismo ambiente del ejemplo que estamos considerando, se obtiene el siguiente resultado vinculado con estas álgebras que modelan la herencia no mendeliana. Previamente, recordamos que las álgebras de evolución son aquellas que se definen sobre ℓ_1, y cuya tabla de multiplicación es tal que $e_i e_j = 0$, si $i \neq j$, siendo $e_i^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_{ij} e_j$ con $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\gamma_{ij}\right| = 1$.

Teorema *Cualquier epimorfismo de un álgebra normada completa $\mathcal{A}$ sobre un álgebra de evolución $\mathcal{B}$ es continuo, cuando los coeficientes de estructura γ_{ij} del álgebra $\mathcal{B}$ son tales que $\gamma_{ij} = 0$ si $i < j$, y $\gamma_{ii} \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

En particular tales álgebras de evolución $\mathcal{B}$ tienen unicidad de la topología de la norma completa.

Biológicamente, como ya se ha dicho, el coeficiente γ_{ij} que aparece en el teorema anterior, representa la probabilidad de obtener el organismo (o el gen) e_j mediante autorreplicación del e_i. $\boxdot$

Para las consideraciones anteriores, no hemos elegido el álgebra de la Aplicación 6.1 (una generalización del ejemplo 4.15) precisamente por azar. Es un modelo original de álgebra que siendo un tipo de álgebra de evolución en el sentido establecido por J. P. Tian en [76], sin embargo se escapa del tratamiento efectuado en dicha monografía. Allí se comenta el interés del caso infinito-dimensional pero la mayoría de los desarrollos matemáticos se efectúan en ambiente finito-dimensional «por comodidad». Sin embargo, los problemas de estabilidad hereditaria tratados por P. Holgate [33, 34, 35] y por G. A. Ringwood [65, 66], sí se abordan mediante el tratamiento de álgebras normadas completas no asociativas infinito-dimensionales. En consecuencia, la construcción de una teoría espectral para ellas, podría dotarlas de herramientas muy recomendables para resolver problemas que se modelen con esas estructuras, así como una mayor comprensión de las propiedades inherentes a las mismas. Este es uno de los objetivos que nos hemos planteado para un futuro inmediato. En estos momentos, se encuentra en preparación un documento [57] que pretende consolidar nuestras intenciones.

La cita de M. L. Reed con la que comienza este capítulo, contiene buenos argumentos para considerar una teoría espectral de las álgebras genéticas. Este es el motivo fundamental por el que nos hemos decidido a confeccionar una monografía [56] que se centra en revisar conceptualmente las álgebras genéticas generales, estructuras no asociativas sobre las que hay muchas referencias publicadas, pero para las que no existe explícitamente una teoría espectral no asociativa que alivie la resolución de los clásicos problemas de estabilidad genética. Obviamente, las álgebras de evolución tratadas en esta Memoria podrían considerarse, por derecho propio, miembros de esta clase tan extensa de álgebras. La referida monografía, que se encuentra todavía en preparación[2], vendrá a resolver algunas lagunas que, por razones temporales, tiene el aludido artículo de M. L. Reed [63], y pretende también aclarar algunas inexactitudes que han aparecido en ciertos documentos sobre la relación existente entre las distintas subclases de álgebras contenidas en la clase más general de las álgebras genéticas. Nuestra aproximación al conocimiento de estas estructuras de la herencia genética, es el primer paso para alcanzar los objetivos propuestos.

En los preliminares de esta Memoria, se destacaron otras aplicaciones de las álgebras no asociativas. Por ejemplo, su interés para los sistemas dinámicos o los autómatas celulares se están empezando a vislumbrar con cierta claridad, de manera

[2] La citada monografía está prácticamente concluida, o al menos muy avanzada.

que, potencialmente, nuestra teoría puede tener algo que decir en estos ámbitos, que también modelan múltiples fenómenos naturales. Como señala Y. Gulak [29], ciertos sistemas diferenciales cuadráticos homogeneos pueden vincularse con las álgebras no asociativas, de modo que el estudio y clasificación de las propiedades de estos sistemas (como los estados de equilibrio, las soluciones periódicas, la estabilidad, los atractores, etc.) pueden relacionarse con la estructura de las álgebras no asociativas que los definen. Por tanto, otra meta ulterior será estudiar qué tiene que decir la teoría espectral no asociativa en estos ambientes, con especial hincapié en las interpretaciones que se obtengan de su aplicación.

Hasta ahora, como ya se ha señalado, nuestra aportación ha sido fundamentalmente teórica. Los pasos que se han dado para extender al ambiente no asociativo, diversos resultados de continuidad automática, son suficientemente reveladores sobre las posibilidades de la teoría espectral no asociativa que hemos empezado a desarrollar en esta Memoria. Tenemos plena confianza en que dicha teoría pueda dilucidar, en un sentido u otro, qué extensiones de los resultados clásicos sobre álgebras de Banach, aún no resueltas, pueden definitivamente aclararse y resolverse. Nuestra Memoria ha sido, pues, un primer paso hacia estos objetivos.

Parte V

Bibliografía

Bibliografía

[1] V. M. Abraham, Linearizing Quadratic Transformations in Genetic Algebras. *Proc. London Math. Soc.*, **40** (1980), 346-363.

[2] V. M. Abraham, The induced Linear Transformation in a Genetic Algebra. *Proc. London Math. Soc.,* **40** (1980), 364-384.

[3] A. A. Albert, Non-Associative Algebras: I. Fundamental Concepts and Isotopy. *The Ann. of Math.,* Second Series, **43** (1942), 685-707.

[4] A. A. Albert, The radical of a non-associative algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 891-897.

[5] A. A. Albert, Absolute Valued Real Algebras. *The Ann. of Math., Second Series*, **48** (1947), 495-501.

[6] B. Aupetit, The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras. *J. Funct. Anal.,* **47** (1982), 7–25.

[7] R. Baer, Radical ideals. *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 537-568.

[8] J. C. Baez, The Octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **39** (2002), 145-205.

[9] V. K. Balachandran & P. S. Rema, Uniqueness of the norm topology in certain Banach Jordan algebras. *Publ. Ramanujan Inst.*, **1** (1968/69), 283–289.

[10] R. E. Beck, B Kolman (Eds), *Computers in Nonassociative Rings and Algebras.* New York, Acad. Press (1977).

[11] G. Bergman, A ring primitive on the right but not on the left. *Proc. Amer.Math. Soc.*, **15** (1964), 473–475; correction, *Proc.Amer.Math.Soc.,* **15** (1964), 1000.

[12] N. H. Bingham, Obituary. Philip Holgate (1934-1993). *Bull. London Math. Soc.*, **32** (2000), 484-492.

[13] F. F. Bonsall & J. Duncan, *Complete normed algebras.* Springer (1973).

[14] M. R. Bremner, Jordan algebras arising from intermolecular recombination. *Comm. in Comp. Alg. (SIGSAM Bull.),* **39** (2005), 106-117.

[15] B. Brown & Neal H. McCoy, Radicals and subdirect sums. *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 46-58.

[16] M. Cabrera & A. Rodríguez, A new simple proof of the Gelfand-Mazur-Kaplansky theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **123** (1995), 2663-2666.

[17] É. Cartan, Les groupes bilineaires et les systemes de nombres complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse,* **12** (1898), 1-99.

[18] A. Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions (appendix only), in *The Coll. Math. Papers. Johnson Reprint Co.* (1963), p. 127.

[19] J. A. Cuenca, On One-Sided Division Infinite-Dimensional Normed Real Algebras. *Publ. Mat.*, **36** (1992), 485-488.

[20] H. G. Dales, Automatic continuity: a survey. *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978), 129-183.

[21] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity.* London Math. Soc. Mon., **24** Clarendon Press (2000).

[22] L. E. Dickson, *Algebren und ihne Zahlentheorie.* Orell Füssiverlag (1927).

[23] V. D. Dzhunushaliev, A Non-Associative Quantum Mechanics. *Found. of Phys. Letters*, **19** (2006), 157-167.

[24] L. Downey & P. Enflo. Operators with Eigenvalues and Extreme Cases of Stability. *Proc. of the A. M. S.*, **132** (2004), 719-724.

[25] I. M. H. Etherington, Genetic Algebras. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **59** (1939), 242-258.

[26] I. M. H. Etherington, Special Train Algebras. *Quart. J. of Math., Oxford,* **12** (1941), 1-8.

[27] H. Gonshor, Special train algebras arising in genetics. *Proc. Edin. Math. Soc.,* **12** (1960), 41-53.

[28] H. Gonshor, Contributions to Genetic Algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* **17** (1971), 289-298.

[29] Y. Gulak, Algebraic properties of some quadratic dynamical systems. *Adv. in App. Math.,* **35** (2005), 407-432.

[30] E. Hille, On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebras. *Math. Ann.*, **136** (1958), 46-57.

[31] P. Holgate, Sequences of powers in genetic algebras. *J. London Math. Soc.,* **42** (1967), 489-496.

[32] P. Holgate, Genetic Algebras Satisfying Bernstein's Stationarity Principle. *J. London Math. Soc.,* **9** (1975), 613-623.

[33] P. Holgate, Population Algebras. *J. R. statist. Soc.*, **43** (1981), 1–19.

[34] P. Holgate, Some Infinite-Dimensional Genetic Algebras. *Cahiers Math.*, **38** (1989), 35-45.

[35] P. Holgate, Biometric and Chromosome Algebras. *J. Appl. Prob.*, **29** (1992), 247-254.

[36] I. M. Isaacs, *Algebra, a graduate course (1st edition ed.).* Brooks/Cole Publ. Company (1993).

[37] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 300-320.

[38] N. Jacobson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.,* **31** (1945), 333–338.

[39] N. Jacobson, Structure of rings. *Coll. Publ.,* **37.** *A. M. S.* (1956).

[40] B. E. Johnson, The uniqueness of the (complete) norm topology. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **73** (1967), 537-539.

[41] P. Jordan, Ueber Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys,* **41** (1933), 209–217.

[42] P. Jordan, J. von Neumann & E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. Math.*, **35** (1934), 29-64.

[43] A. M. Kaidi, *Bases para una teoría de las Álgebras no Asociativas Normadas.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada (1977).

[44] A. Kaidi, M. I. Ramírez & A. Rodríguez, Nearly absolute-valued algebras. *Commun. Alg.,* **30** (2002), 3267-3284.

[45] I. Kaplansky, Normed algebras. *Duke Math. J.*, **16** (1949), 399-418.

[46] I. Kaplansky, Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **4** (1953), 956-960.

[47] I. Kaplansky, *Algebraic and analytic aspect of operators algebras.* CBMS (Regional Conference series in mathematics), A. M. S. (1970).

[48] E. Kleinfeld, Primitive alternative rings and semi-simplicity. *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 725–730.

[49] K. B. Laursen & M. M. Neumann, *An introduction to local spectral theory.* Clarendon Press (2000).

[50] J. Lohmus, E. Paal & L. Sorgsepp, About nonassociativity in mathematics and physics. *Acta Applic. Math.,* **50** (1998), 3-31.

[51] Y. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetics.* Springer (1992).

[52] J. C. Marcos, A. Rodríguez-Palacios & M. V. Velasco, A note on topological divisors of zero and division algebras. *Submitted.*

[53] J. C. Marcos & M. V. Velasco, The Jacobson radical of an non-associative algebra and the uniqueness of the complete norm topology. *Bull. London Math. Soc.*, **42** (2010), 1010–1020.

[54] J. C. Marcos & M. V. Velasco, Continuity of homomorphisms into power-associative complete normed algebras. *To appear in Forum Math.*

[55] J. C. Marcos & M. V. Velasco, The m-spectrum and the uniqueness of the complete norm topology. *Submitted.*

[56] J. C. Marcos & M. V. Velasco, Non-associative algebras in Genetics. *Monograph in progress.*

[57] J. C. Marcos & M. V. Velasco, Infinite dimensional complete normed evolution algebras. *Paper in progress.*

[58] J. Martinez-Moreno, *Sobre algebras de Jordan normadas completas.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Secr. de Publ. (1997).

[59] K. McCrimmon, The radical of a Jordan algebra. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **59** (1969), 671-678.

[60] S. Okubo, *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics.* Cambridge University Press (1995).

[61] T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of *-algebras, Vol. I: Algebras and Banach algebras.* Enc. of Math. and its App., **49**, Cambridge University Press (1994).

[62] S. Perlis, A characterization of the radical of an algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 128-132.

[63] M. L. Reed, Algebraic structure of genetic inheritance. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34** (1997), 107–130.

[64] C. E. Rickart, *The general theory of Banach algebras.* Van Nostrand (1960).

[65] G. A. Ringwood, Hypergeometric algebras and Mendelian Genetics. *Nieuw Arch. Wisk.,* **3** (1985), 375-389.

[66] G. A. Ringwood, The Structure of Poisson Algebras. *IMA J. Maths. Appld. in Medicine and Biology,* **2** (1985), 69-73.

[67] A. Rodríguez-Palacios, The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras. *J. Funct. Anal.,* **60** (1985), 1–15.

[68] A. Rodríguez-Palacios, An aproach to Jordan-Banach algebras from the theory of complete normed agebras. *Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal, Clermont II, Sér. Math.,* **27** (1991), 1-57.

[69] A. Rodríguez-Palacios, One-Sided Division Absolute Valued Algebras. *Publ. Mat.,* **36** (1992), 925-954.

[70] A. Rodríguez-Palacios, Continuity of homomorphisms into normed algebras without topological divisors of zero. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. (Esp.),* **94** (2000), 505-514.

[71] A. Rodríguez-Palacios & M. Victoria Velasco, A Non-Associative Rickart's Dense-Range-Homomorphism Theorem. *Quarterly J. Math.,* **54** (2003), 367-376.

[72] R. D. Schafer, *An Introduction to Non-Associative Algebras.* Dover Publications (1995).

[73] I. E. Segal, The group ring of a locally compact group. I. *Proc. Nat. Acad. Sci.,* **27** (1941), 348-352.

[74] I. E. Segal, Irreducible representations of operator algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **53** (1947), 73-88.

[75] G. E. Šilov, On the extension of maximal ideals. *Dokl. Akad. Nauk,* **29** (1940), 83-84 (en ruso).

[76] J. P. Tian, *Evolution Algebras and their Applications.* Springer (2007).

[77] K. Urbanik & F. B. Wright, Absolute Valued Algebras. *Proc. Amer. Mat. Soc.*, **11** (1960), 861-866.

[78] M. V. Velasco, Spectral theory for non-associative complete normed algebras and automatic continuity. *J. Math. Anal. Appl.,* **351** (2009), 97–106.

[79] J. H. M. Wedderburn, On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1907), 77-118.

[80] A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics*. Lec. Notes in Biomath., **36**, Springer-Verlag (1980).

[81] F. B. Wright, Absolute Valued Algebras. *Proc. Nat. Acad. Sei.*, **39** (1953), 330-332.