"quantum potest, seu secundum ultimum potentiæ suæ, asignat D. Subt. In 1º Sent. dist. 8. q. 5. ubi ait: Sicut n. ē. in potestate sua agere, et n. agere, ita nec intense, nec remise agere."

57. Causa univoca apellatur, quæ cum suo efectu ē. ejusdem speciei; ut homo ē. causa univoca hominis quem generat. Equivoca verò dicitur, cujus efectus ē. diversæ speciei, ac naturæ ab ipsa causa; sic Deus ē. causa æquivoca eorum quæ producit ad extra, nam sunt alterius naturæ, seu esentiæ. Etiam Sol, qui per suum calorem ē. causa partialis Vegetabilium, animalium, aliarumque multarum rerum, quæ in natura, seu esentia ab eo diferunt. Causa æquivoca apellari quoque solet universalis, quia n. ē determinata ad unum speciei efectum producendum, sed ad plures diversæ speciei extenditur. Univoca verò dicitur particularis, quia n. nisi efectus illius speciei, ac naturæ, cujus ipsa ē. producere valet.

58. Si causa æquivoca fuerit adequata sui efectu semper ē. perfectior, et nobilior suo efectu, ut inquit Doct. in 2º Sent. dist. 25. quest. unica; quia nequit ēē causa totalis, et adequata, nisi formalit. aut eminent. efectus perfectionem contineat; et in ea perfectio efectus formalit. n. sit. Notanter dicit Doct. totalis, et adequata; Nam æquivoca inadequata, et partialis, potest à perfectione efectus deficere, cum n. tota efectus perfectio ab illa profluat; ut constat de Sole, qui licet sit causa æquivoca animalium, cum sit tantum causa partialis, ipsis animalibus ē longè imperfectior. Quibus supositis, sit

Conclusio Unica.

Unus, et idem numerò effectus à duabus simul causis adæquatis ejusdem generis, et ordinis produci nequit.

59. Prob. Unum, et idem numerò ens nequit simul, et semel bis totum produci, sed ita esset, si idem num. efectus à duabus simul causis adæquatis ejusdem generis, et ordinis produceretur; ergo Maj. patet: nam tunc simul, et semel haberet duplicem existentiam, et jam n. esset unum, sed duplex numerò. Min. prob. tunc totus ab una, et totus ab altera simul causa in eodem ordine, et genere causalitatis produceretur; ergo Prob. ant. Si totus ab una, et totus ab altera in eodem tempore n. produceretur, jam illæ singulæ n. essent causæ totales et adequatæ, ergo si in Conclusione suponitur ēē totales, et adequatas, totus ab una, et totus ab altera in eodem tempore produceretur.

Confirmatur: Causa adequata ē. quæ in suo genere, ac ordine totam in se continet rationem, cur efectus sit; sed duæ simul causæ nequeunt singulæ totam in eodem genere, et ordine continere rationem, cur unus, idemque num. efectus existat; ergo Prob. min. Si causarum una continet totam rationem illius existentiæ, altera nullam continet rationem; si continet; ergo altera n. ē. totalis, et adequata; ergo

60. Obj. 1º Deus concurrit immediatè ad omnes, et singulas actiones creaturarum; sed si ita concurrit, tota actio ē. simul à Deo, et tota simul à creatura; ergo conseq.a patet: Nam hæ sunt causæ adæquatæ, quæ singulæ totum efectum producunt. Resp. dist. conseq. Ergò unus et idem efectus producitur simul à duabus causis, aut diversi generis, aut diversi ordinis; conc. ejusdem generis, et ordinis; neg. Deus, et creatura sunt causæ diversi ordinis. Quæstio autem ut diximus ē. de duabus causis ejusdem generis, et ordinis loquitur.

61. Obj. 2º Duo ignes eamdem stupam simul comburunt, sed tunc singuli ignes sunt simul causæ adæquatæ ejusdem efectus, nempè combustionis ejusdem stupæ, ergo Resp. neg. min. Nam idem n. ē. efectus cum plures ignes simul comburunt eamdem stupam, ac foret, si unus tantum ignis combureret. Dum enim plures ignes eamdem stupam comburunt, intensiùs, ac vividius ē. combustio, et citius fit, quam si unus tantum in eamdem stupam ageret. Igitur cum multiplicatis ignibus efectus combustionis augeatur, neque singuli ignes n. causæ adequatæ ejusdem num. efectus.

b

62. Ignes simul agentes in hypotesi n. causæ necesariæ, q. debent singuli agere quantum possunt; s. si agere debent quantum possunt, sunt causæ totales, et adequatæ, q. Resp. neg. subs. Vt enim causa dicatur totalis, et adequata, n. suficit ipsam agere secundum omnem potentiæ suæ virtutem, s. continere debent totam rationem efectus, qui producitur. Singuli autem illi ignes, licet agant quantum possunt, atamen singuli totum efectum n. producunt, ut dictum e. in præcedenti responsione; q. n. s. causæ adequatæ.

63. Obj. 3o. ex Joanne Baptista Du-Hamel Methp. trad. 2o. Disp. 1a q. 3a. ubi opositam sententiam tuetur. Si plures Sacerdotes supra idem vinum, aut eumdem panem proferant Consecrationis verba, eorum quilibet adequatè perficeret Consecrationem, q. quilibet eorum esset causa adequata ejusdem efectus, nempè Consecrationis; q. Resp. neg. ant. Nempè quod singuli Sacerdotes perficerent Consecrationem adequatè: nam nec ipsi propiè, et immediatè perficiunt. Dum Sacerdos profert verba consecrationis transsubstantiationem n. eficit, s. tantum ponit signum, quo posito consequitur ex pacto Divino, seu Deus ipse transsubstantiationem eficit, ut ait Doct. in 4o. Sent. dist. 1a. q. 9a. „Verba consecrationis prolata n. atingunt transsubstantiationem, quæ e. terus principalis hujus Consecrationis, cum illa transsubstantiatio n. fiat nisi virtute Dei infinita; quod æquè patet, l. magis, quam de creatione.„ Quare solus Deus e. causa Phisica transsubstantiationis, et Sacerdotes tantum causæ morales Deum infalibilit. moventes ad eam perficiendam; Deus enim transsubstantiandi, sicut nec creandi virtus creaturæ communicari nequit.

64 Inst. Ergò Sacerdotes illi erunt singuli causæ adequatæ Divinæ motionis. Prob. conseq. Si ab uno tantum proferantur verba consecrationis, eodem modo movetur Deus, ac si ab omnibus simul proferrentur, q. Prob. ant. Deus æquè perfectè, et adequatè in utroque casu transsubstantiationem perficere; q. Resp. neg. conseqm. ad 1. et dist. ant. prob. Deus æquè perfectè in utroque casu transsubstantiationem perficere, s. n. pari complacentia; concedo. Pari omninò complacencia, neg. Sicut Deus magis sibi complacet in oratione plurium simul hominum, quam unius tantum, et similit. in cultu ejus: ita majori complacentia movetur ad agendam transsubstantiationem, si à pluribus simul Sacerdotibus verba consecrationis proferantur. Ideò Sacerdotes n. sunt singuli causæ adequatæ ejusdem motionis, quia diversimodè fiat ab uno, quam à pluribus.

65. Obj. 4o. Juxta communiorem Philosoforum, et Theologorum sententiam, duo corpora possunt divinitus e. in eodem simul loco; s. hoc ipso idem num.o efectus pendere potest à duabus causis ejusdem generis, et ordinis, q. Min prob. Repletio ejusdem numero loci e. à duabus causis adequatis, nempè corporibus; q. Resp. neg. min. Quamvis enim duo corpora Divina virtute essent in eodem loco, n. tamen utrumque corpus totum illum locum repleret; possunt enim e. Divinitus in eodem loco; quia cum repletio loci sit efectus corporis, et Deus quemlibet creaturæ efectum impedire queat, potest sanè Deus eficere, ut corpus sit in loco, quin locum repleat; Impediendo igitur ne unum corpus locum repleat, locus nondum repletus capax e. ut ab alio corpore repleatur, quod pluribi explicat Doct. et pægrextim in lib. 4o. Sent. dist. 49. q. 16. ubi inter alia, quæ dicit de posibilitate corporum in eodem loco, inquit, „Non impedit, quin per potentiam Divinam posit ibi e., quia Deus potest „
„ facere causam naturalem sine suo efectu, sicut potest facere calorem
„ sine calefactione, in illis enim tribus pueris ex Daniele, patet.„

66. Obj. 5o Idem numerò efectus potest sucesivè produci à diversis causis adequatis, q. etiam simul. Prob. ant. Deus in finali resurrectione mortuorum integrum reproducet eadem num.o corpora organica, quæ prius genita fuerant à propiis parentibus; q. Resp. dist. 1m ant. Potest sucesivè produci à duabus causis adequatis, si prius efectus ille destruatur; conc. Si perseverat idem; nego. In finali

itaqᵉ judicio omnes quidq iidem numº. resurgemus, idcirco eodem numº. corpore, quo nunc, donati tunc erimus, juxta illud Job cap. 19. „Scio „quod redemptor meus„ &c. Nam Deus cum sit infinitus, ejus potentia non limitatur ad unam speciem l. numº. effectum; ut enim canit David Psalmo 113. „Omnia quæcumque voluit fecit.„ In quo nulla ē. contradictio. Etenim cum humana illa corpora, quæ Deus reproducet in mortuorum resurrectione, prius sint destructa; nihil obstat ut Deus, qui prius una simul cum creatura corporibus existentiam tribuerat, queat ipse solus eamdem jam sublatam restaurare, ac denuo eam illis tribuere.

Quæstio II.

An admitti queat aliqua mutatio in serie causarum?

67. Hæc quæstio agitari solent in Scholis, ut una ex dificilioribus, et sensus est, an idem numº. effectus, qui nunc ab una causa producitur, potuerit ab alia causa numº. distincta ejusdem generis, et ordinis produci: v.g. An Petrus, qui nunc genitus ē. à Josefo, et Rosa, potuerit idem ipse numº. gigni ab aliis Parentibus. Huic controversiæ, occasionem dederunt Ecclesiæ Patres, ac Theologi, qui docent, homines electos ad Gloriam, qui nunc nascuntur à parentibus reprobis, nasituros fuisse à parentibus electis in statu inocentiæ: soli enim electi juxta eorum doctrina procreati fuissent si Adam n. peccasset.

Conclusio Unica.

Idem numº. effectus, qui in præsenti causarum serie producitur immediatè ab una causa, potuisset mutata ipsa serie, produci immediatè ab alia causa ejusdem generis, et ordinis, à qua nunc mediatè tantum procedit.

68. Prob. Idem numº. habetur homo, cum anima, et corpus organicum hominem constituentia s. eodem numº. ē. homo, qui in præsenti causarum serie nascitur à patre, et matre, haberet idem corpus, et animam, si mutata causarum serie ab Avo patris sui, l. ab Avia matris suæ nasceretur; ergo. Min. pat. quoad animam: nam cum à Deo creetur, corporibusqᵉ infundatur, potest in corpore Petri v.g. infundere, quam Pauli nunc infudit. Prob. quoad corpus: In systemate de generatione ovipara, corpus formatur ex ovo jam proximè disposito in utero fœminæ tempore concubitus; nunc sic: in præsenti serie, corpus Petri v.g. formatur ex fœmina reproba, l. electa? Non ex reproba tunc orietur, quia in statu inocentiæ cum filii reprobi nascendi n. essent, nec illa fœmina nasceretur. Si ex electa, et Petrus ē. reprobus, esset, quia in ejus utero Deus posuisset ova reproborum, et electorum; ergo mutata serie Deus n. poneret ova reproborum; ergo.

69. Hoc evidens fit in Eva respectu Abel, et Cain, qui in præsenti serie unus electus, et alter reprobus fuit formatus ex Matre electa. Mutata serie, l. Deus in utero Evæ n. locaset ovulum Cain, l. quamvis locaset nunquam permisisse ovulum Cain ēē. dispositum tempore concubitus, proindeqᵉ nunquam Cain natus fuisset. Nam si primi Parentes n. peccasent, juxta PP. et præsertim juxta D. Aug. sententiam Divinæ spectarent imperium, ut filios procrearent; ergo eo solum tempore concuberent, cum essent ovula proximè disposita ut filii electi nascerentur. Uno verbo, quodcumqᵉ asumatur generationis systema in dubium ē. Deum, priusquam primos parentes condidisset, præscire futurum, l. n. futurum eorum peccatum; ergo sicut prævisso eorum peccato, constituit præsentem seriem, in qua reprobi, et electi oriuntur; ita prævissa eorum perseverantia in bono, potuisset aliam seriem constituere in qua soli electi nascituri erant. Unde recte infertur, q. electi, qui nunc nascuntur similiter tunc nascerentur; ergo qui nunc ex Patribus reprobis oriuntur, tunc ex aliis, v.g. ab Avo, l. ab Atavis, qui nunc medi- [illegible] immediatè: proindeqᵉ idem numº. electus

qui nunc ab una causa producitur, tunc ab alia ejusdem generis, et ordinis produceretur; ergo

70 Obj: 1º Idem specie efectus produci nequit, ut de univocis agitur, a causa specifice diversa; ergo nec idem num.º efectus esse potest a causa numero diversa; ergo 1.ª conseq.ª patet: Sicut enim se habet efectus specificus ad causam specificam, ita efectus numericus ad causam numericam. Ant. similiter. Nam omnes efectus ejusdem rationis, requirunt causas ejusdem rationis; secus in causa non contineretur ratio suficiens illius efectus.

Resp. neg. conseq.m et paritatem. Licet enim causae ejusdem speciei, si univocae fuerint, ut in praesenti loquimur, efectus specifici diversos nequeant produci, attamen eadem numero causa potest et reverà producit, plures efectus num.º diversos, ut v.g. unus Pater plures filios num.º diversos, Arbor plures num.º fructus &. ergo vice versa idem num.º filius poterit produci a patre, A seu a patre B. Sicut enim una num.º causa non est determinata ad unum tantùm num.º efectum, ita nec unus num.º efectus debet esse necesario determinatus ad unam tantum num.º causam.

71. Ob. 2º Virtus agendi, quae est in singulis causis creatis, est finita, ac limitata; ergo extendi nequit ad efectus producendos alterius causae; sed extenderetur, si idem num.º efectus produci posset a causis num.º diversis; ergo Resp. dist. 1.m conseq. extendi nequit ad producendos efectus alterius causae extra suam causarum seriem; et nulla habita mutatione in eadem serie causarum; conc. In sua causarum serie aliqua mutatione habita; neg. Solutio facilè percipitur ex ipsa conclusione, in qua supponitur series mutata.

72. Obj: 3º Si in statu inocentiae nasci debuissent tantùm electi, ea ovula, ex quibus reprobi nasci debuissent, et de facto nascuntur in statu naturae lapsae, fuissent tunc frustranea; sed Deus nihil ponit frustra in rerum natura; ergo Resp. dist. maj. Id esset, si reprobi in statu inocentiae non solùm non fuissent nascituri, sed neq.e nasci potuissent; conc. si nasci potuissent; neg. Doct. Sub. notat nullum quidem reprobum fuisse nasciturum in statu inocentiae; aliquem tamen nasci potuissent. Nam licet in eo statu, ut S. Augustini verbis utar, „Nemo ex Adami stirpe iniquitatem comiteret, quae danationem reciperet.„ Nihilominus eam comitere illae potuissent. Homines enim in eo statu quousque Deum viderent intuitivè adhuc fuissent viatores, de ratione autem viatoris est posse peccare. Undè sicut Adam in statu inocentiae peccavit, ita ejus posteri licet in statu inocentiae essent nascituri, a rectitudine potuissent deficere.

73. Inst. Haec causarum series non esset naturalis, sed pro arbitrio conficta; ergo nequit statui. Resp. neg. ant. Nam series naturalis dicitur, quae ab initio creationis statuitur a Deo, et semel statuta in naturae ordine perpetuo servatur. Si vero praevisa primorum parentum perseverantia in bono statuisse ut docent comunit.r PP. tunc illa causarum series esset naturalis, sicut nunc est naturalis ea, quae in statu naturae lapsae observatur.

Dixi: ut communit.r docent PP. Omnes enim sic sentiunt, et specialiter S. Gregorius lib. 4º Moralium cap. 22. S. August. lib. 14 de Civit. Dei cap. 23. et 10. S. Anselmus lib. 1º Cur Deus homo. Cap. 18. et alios omitendo S. Dyonisius lib. de Divinis nominibus inquit apud Doct. Sub. 2º Sent. dist. 20. q. 1.a „Si primi„ Parentes stetissent in justitia, et rectitudine, in qua confirmati fuissent, genuissent filios in illa justitia confirmatos.

Axioma I.

Nulla datur causarum series absque initio.

74. Hoc pro comuniter asumitur apud Philosophos instar axiomatis; licet illius evidentia non sit planè manifesta, et immediata. Prob. Quod est absque

initio ē. ā se; ð. nulla causarū series ē. a sē; ǥ. Prob. min. Quod ē. ā se, ē. immutabile; ð. nulla causarū series ē. immutabilis; ǥ. Prob. min. Causa alteri causę, efectus alteri efectui in qualibet causarū serie succedit; ǥ. immutabilis n̄. ē. ǥ. neque ā se; ǥ. initium habere debet.

Axioma II.

Non datur causarum progressus in infinitum.

75. Hę, alteri afinis ē. et quidem verissima, cum ā precedente non nisi in vocabulis diferat. Nam in qualibet causarū progressione, deveniendum tamen ē. ad omnium primam, ultra quam progredi minime liceat. Quod intelligendum ē. de qualibet genere causę, sivē extrinseca, sivè intrinseca illa fuerit, tam in genere causę eficientis, finalis, et exemplaris; quam in materialis, aut formalis.

Questio III.

An si Deus necesitate naturę suę operaretur ad extra, res creatę contingentes essent; ac ullę essent causę liberę in Universo?

76. Quamquam enim hęc controversia sit de hypotesi impossibili, tamen magne utilitatis ē. ad eos impios refutandos, qui Deum necesariò agere, quidquid facit, falsò, at temerè sustinent. Nam illis demonstrando 1ª causa necesariò operante, nihil in Mundo futurum ēē. ens contingens, nullamq. causā 2am liberam; cum experientia constet, omnes res mundanas ēē. contingentes, et quasdam causas secundas libertate donari, ut omne rationale; evident sequitur, causę 1am n̄. necesariò agere ad extra, ð. libere agere. Propterea Genuensis, hanc controversiā apellat meritò gravem.

77. Sed quia presens questio ad causę eficientę pertinent, quę potiori quodam jure causę denominationem habet prę cœteris, de ejus definitione, et divisione, ante resolutionem questionis ē. agendū. Itaqe causa eficiens ex ipsa nominis etymologia, illa ē quę aliquid eficit, et definitur: Id, q. vera, et phisica actione aliquid ponit, in rerū natura. Quia verò actionem n̄. haberet, nisi potentia ad agendū donaretur: duo occurrunt in qualibet causa eficiente; scilicet: actio, et agendi potentia. Hinc sequitur, q. nihil ēē. potest causa eficiens, nisi potentia activa preditum sit. Quia etiā actio causę eficientis in efectum tendit, et ab efectu ipso terminatur; efectus vocatur actionis terminus. Ideò in Patre gignente Filiū, generatio ē. actio, Filiusqe generationis trus.

78. Causa eficiens dividitur in Phisicā, Methafisicam, et Moralem. Atqe etiā in principalem, instrumentalem, atqe occasionalem. Sed hęc divisio n̄. ē. generis in species, nam generica definitio causę eficientis nuper tradita, tantum causę principali, et Phisicę, propiè convenit; minus propiè instrumentali; et, prorsus impropiè, occasionali, morali, et methafisicę. Principalis ea nuncupatur, quę ita in efectum influit; ut in illa precipua contineatur ratio, cur efectus existat in rerū natura. Quę ratio sicuti potest ēē. magis, l. minus precipua, ità causa potest dici magis, l. minus principalis; vg. Deus ē. causa principalisima relatè ad quemlibet efectum: deindè causa totalis, et adequata ē. magis principalis; quia in ordine causę eficientis totū ponit efectū; et minus principalis dicitur causa partialis, et inadequata; quę n̄. nisi partialiter, et cū consortio alterius causę, in

eodem genere causæ eficientis, ponit efectum.

79. Causa instrumentalis ea dicitur, quæ absolute sumpta vera n. continet rationem efectus, nisi mota a principali causa, qua utitur ad efectu producendum: v.g. duo fabri qui ope ejusdem serræ simul lignum secant, ambo simul constituunt causam principalem; eoru autem alter, qui in itu, redituq. serræ promovendo alium dirigit, e. partialis causa magis principalis; serra autem e. instrumentalis causa, hæc enim n. e. nisi instrumentum. A causa principali magis distat occasionalis, quæ simul cu principali vere n. agit; s. tantum occasionem quamdam præbet causæ principali ut efectu producat. Idcirco nullomodo e. activa; adeoq. n. nisi impropie causæ eficienti accensetur. Phisica autem eficiens apellatur; quæ e. vere eficiens; seu quæ vera, et reali actione efectum, cujus dicitur causa, producit. Inter illam, et efectum distinctio realis intercedit, sicut inter principiu, et causa propie dictam. Methafisica vero causa illa dicitur, ex qua aliquid quidem profluit, s. hoc n. e. ab ea distinctum, nec vera, et Phisica actione productum. Hujus generis sunt rerum essentiæ, et primaria atributa, ex quibus secundaria atributa dimanant. ¶ Hic etiam addi potest causa etiam Logca, ea scilicet, quæ relate ad scientias, et ntras cognitiones se habet, ac si revera esset causa: ut præmissæ ad syllogismu; et cognitionis principia ex quibus aliaru veritatu cognitiones proveniunt. Deniq. causa Moralis vocatur, quæ licet in efectu, cujus dicitur causa, vere n. influat, juxta judicium prudentum perinde e. ac si vere influeret; ut qui incendium, aut homicidium juvet, l. suadet, incendii, aut homicidii causa Moralis apellatur.

80 Causa eficiens e. l. prima, l. secunda. Causa 1.a e. quæ nullam aliam causam ante se habet, s. reliquas omnes in operando præcedit; ut e. solus Deus. Causa autem 2.a e. quæ in sua operatione a prima pendet; ut omnes causæ creatæ, quæ a Deo dependent, illiq. subordinantur, et ideo subordinatæ apellantur. Quibus supositis ad hypotesim rediens, advertendum e. quod Doct. pluries utitur hac argumentandi ratione adversus Philosofos Ethnicos, et Arabes, qui hanc operandi necesitatem in Deo admitunt; ostenditq. Avicenam pugnantia admitere cum asserit, res mundanas a Deo necesario productas, ee. contingentes; atq. Aristotelem contraria docuisse, dum homines liberos, Deum necesarium fecit.

81. Doctoris Subt. sententiam præter ejus Discipulos, plures Thomistæ, et duo celeberrimi Methafisici amplexandi sunt Suarezius ex Scholasticis, et Antonius Genuensis ex RR. Cum his omnibus sit contra Avicenam

Conclusio I.

Si Deus necesitate suæ naturæ faceret quæcumque facit, nullum in Universo haberetur ens contingens.

82. Prob. 1.o ex Doct. Subt. q. 4.a de rerum principiis num.o 4.o „ Si Deus de necesitate „ produccat aliquod posse ee. g. Deus n. e. nec ee. potest, nisi existat illud potens ee. „ „ Sed illud potens ee. (utpote contingens) potest poni n. ee. absolute; g. necese e. „ „ potest poni n. ee. absolute, quia si creatura per necesitatem fluit a necese „ „ ee; g. per necesitatem habet ee, et sic n. potest n. ee. „; Ergo n. e. ens contingens.

83. Prob. 2.o ratione. Ens contingens illud dicitur, q. potest, aut potuit n. ee. s. si Deus necesario operaretur ad extra, nullum ens esset, q.d posset, aut potuerit n. ee.: g. Prob. min. Quod necesario fit, ita fit, ut n. posset n. fieri; s. q.d ita fit, ut n. posit n. fieri, ita e. ut nequeat, nec potuerit n. ee: g. Min. patet: ex manifesta repugnantia, quæ sequitur. Proindeq. consectarium esset Pantheismum. Si enim tunc nullum esset ens contingens. s. omnia essent entia necesaria; omnia esent Deus; nam quidquid n. e. Deus, et aliquid e. ens contingens est.

Conclusio II.

Si Deus necesariò semper ageret, nulla causa poset liberè operari.

84. Prob. ex Doct. in 1º Sent. dist. 2ª q. 2ª dicente: „ Quelibet causa 2ª causat „ in quantum movetur à 1ª. Ergo si 1ª necesariò movet, quelibet alia nece„ sariò movetur, et quelibet necesariò causat". Ergo ex Doct. &ª

Conf.ª Deus ē. 1ª causa, et primus motor, ꝭ. 1ª causa, 1º q.ᵉ motore necesariò operante, nulla alia causa potest liberè agere; ꝫ. Prob. min. De ratione 1ª causæ, primiq.ᵉ motoris ē. movere alias causas in singulis actibus; ꝫ. si 1ª causa, primusq.ᵉ motor semper necesariò agit, necesariò movet alias causas in singulis actibus; ꝫ. si necesariò movet, movet secundū ultimū potentiæ suæ; ꝭ. si 1ª causa, scilicet: Deus, movet causas secundas in singulis actibus secundum ultimum potentiæ suæ, nulla causa 2ª ē. liber in operando; ꝫ. Prob. subsumptum. tunc motio ē. irresistibilis, adeò ut necesariò sequatur motus in causa 2ª ꝫ. ñ. ē. liber in operando.

¶ Suposita necesitate motionis Divinæ ad omnes, et singulos actus creaturarū, quam admitunt omnes Theologi, et Philosofi, etiā Ethnici, qui expresè Athei ñ. sunt: suposito nempè creaturam nihil omninò operari, nisi à Deo moveatur, liberè agere nequit, nisi à Deo liberè moveatur. Vndè illi, qui docent, creaturam ad omnes suos actus Phisicè à Deo præmoveri, ut humanā tueantur libertatem, inquiunt, voluntatem n̄ram ita à Deo præmoveri, ꝭ. liberè. Sed quomodo causa 1ª poset movere alias causas per modū liberi, si ipsa semper necesariò ageret? Si causas 2ª.ˢ semper necesariò, et quantum potest moveret. tum sanè per modū necesarii semper moveret, nam movere eas ñ. potest nisi juxta suum operandi modum, qui in hypotesi eset necesarius.

85. Obj: In Hypotesi eorū, qui dicunt Deum ēē. liberum circa res ad extra, idem num.º actus causæ 2ª necesariæ ē. liber ex parte Dei, et simul necesarius ex parte creaturæ, quin ulla sequatur contradictio, ꝫ. idem num.º actus causæ 2ª liberæ, poterit absq.ᵉ contradictione ēē. ex parte Dei necesarius, et liber ex parte creaturæ. Conseq.ª patet: non enim videtur potior ratio, cur hoc secundū pugnet, si 1.ᵘᵐ ñ. pugnat.

Resp. dist. ant. Idem num.º actus causæ 2ª necesariæ ē. liber ex parte Dei absolutè, et simul necesarius ex parte creaturæ secundum quid; conc. aliꝭ. nego. Nulla ē. contradictio, ꝫ. necesitas secundū quid sit simul compatibilis cū contingentia, cū hæc necesitas posit absolutè ñ. ēē. Atamen si ponamus Deum semper necesariò operari omnis actus creaturarū eset ex parte Dei absolutè necesarius, ita ut quilibet actus creaturæ aliter ēē. ñ. poset. Vndè eset contradictio, si idem num.º actus simul liber poneretur ex parte creaturæ, ex quo aparet discrimen.

86. Inst. 1º Sicut in hypotesi Divinæ libertatis ponitur absoluta libertas ponitur in actu ex parte Dei, et necesitas secundū quid ex parte creaturæ in causis 2ⁱˢ necesariis; ita juxta hypotesim Dei necesariò operantis poni potest in causis secundis liberis necesitas actus absoluta ex parte Dei, et libertas secundū quid ejusdem actus ex parte creaturæ; ꝫ. ē. par in utroque ratio. Resp. nego parit. Nā in 2ª hypotesi de libertate secundum quid statui nequit. Libertas secundū quid ñ. ē. propia, et vera libertas, sicut necesitas secundū quid ñ. ē. vera, et propia necesitas. Atq.ᵉ si libertatē tantū secundū quid in causis secundis admitunt Anti-Scotistæ

nullam causam verè liberam faciunt. Propterea inconcussum adhuc exit, nullaque causa secunda verè liberam esse futura, si Deus necessariò semper operetur.

87. Inst. 2° Licet assumatur hypotesis Dei necesariò operantis, non tamen poneretur ab ipso actus creaturae cum absoluta necessitate, sed juxta exigentiae liberè voluntatis; ergo. Resp. neg. ant. Nam falsum est tunc actum creaturae non esse ponendum cum absoluta necessitate; nam illud omne est necesarium, quod à Deo profluit ex necessitate suae naturae; ex necessitate autem ipsius Dei naturae; tunc creaturae omnes, tunc omnes earum actus haberentur, si Deus necesarius prorsus ageret: atque systema Spinozismum simillimum poneretur, in quo de medio tollitur omnis agendi libertas. Vnde intelligi nequit, quomodo Deus agere posset juxta exigentiae liberae voluntatis creatae.

Quaestio IV.

An praedeterminet causa prima eficiens causas creatas ad agendum?

88. Causa 1a nempè Deus duplici modo potest concurrere efectivè, et immediatè, ut infertur ex dictis, scilicet: immediatè immediatione virtutis, et supositi. Tunc dicitur causam 1am eficientem concurrere immediatè immediatione virtutis, quando causis 2is conferant virtutem qua operentur suosque efectus producant. Immediationeque supositi si dum agunt, ita cum illis agat, ut et ipse Deus actione sua immediatè existentiam efectus attingat. Deum utroque modo concurrere ad actiones causarum secundarum ipsa Scriptura pluries testatur, Doct. Sub. et omnes PP. unanimiter fatentur. Coeterum Thomistis id satis non est, sed insuper contendunt nihil prorsus fieri posse ab illis, quin ad operandum Phisicè praedeterminentur à causa 1a contrariò verò sentiunt alii, et quidem non inferioris notae Philosofi, ac Theologi Scotistae, qui judicant, concursum simultaneum solum suficere.

89. Haec praedeterminatio, seu Phisica praemotio si Thomistae audiantur est influxus causae 1ae receptus non immediatè in efectibus, sed in causis 2is quo causa 1a ipsis eficacitatem actualem inspirans, eas movet, et aplicat non solum objectivè, et moraliter aliciendo, et suadendo; sed etiam Phisicè, et activè interius inclinando, aplicando, determinando, ac ultimam illam activitatem, ad quam sequitur actio influendo; et ideò motio Phisica dicitur: Sed quia motio, et aplicatio virtutis activae ad agendum est prior naturâ, quam ipsa actio, sicut omnis via est prior suo termino, et omnis causa suo efectu; ideò motio illa dicitur previa motio, seu praemotio. Hinc fieri nullatenus potest, ut in causis sivè necesariis, sivè liberis negatio actus, cum Phisica praemotione componatur. Nam repugnare videtur agens esse otiosum, cum est ad operandum Phisicè determinatum.

90. Quarè in causis naturalibus, et necesariis videtur omninò superflua. Nam istae per suam naturam determinatae sunt ad operandum. In hoc enim difert causa necesaria à libera. Etiam quia ut inquiunt Thomistae ideò humana voluntas indiget à Deo praedeterminari, quia ipsa voluntas in agendo, potest per suam naturam se habere ad opositum; ergo cum causa necesaria sit ex sua natura determinata, non indiget à Deo Phisicè praedeterminari, ut enim merito habet Doct. in causis praecisès afirmatio est causa afirmationis, et negatio causa negationis. Sed quid de causis liberis est dicendum in sequentibus aparet:

Conclusio I

Phisica præmotio in causis liberis videtur cum earum libertate indifferentiæ minime posse componi.

91. Prob. Voluntas n. ē. libera libertate indifferentiæ, si qualit[er] potest agere et n. agere; s[ed] cum Phisica præmotione nequit agere, et n. agere, ergo. Prob. min. In signo priori ad præmotionem voluntas n. potest agere, quia juxta Thomistas voluntas nequit agere nisi prædeterminetur; s[ed] simul cum Phisica præmotione nequit ~~n. agere nisi prædeterminat.~~ ~~phisica~~ quia juxta ipsos actionis negatio nequit cum phisica præmotione componi, ergo.

Confirm. In signo priori ad Phisicam præmotionem, vel potest voluntas determinari ad operandum, vel n. potest. Si potest, ergo præmotio frustranea ē. quia juxta Contra ponitur ut voluntas per eam determinetur. Si n. potest, ergo voluntas n. ē libera; quia libertas indifferentiæ consistit in eo, quod possit se ipsa determinari ad eam partem contradictionis, quæ sibi magis placuerit.

Dicunt: voluntatem in signo priori ad præmotionem posse quidem agere, licet nunquam ageret. Sed contra: Nisi Thomistæ vellint aliquid ponere sine ratione, cur illud potius ponant, quam n. ponant, nequeunt hoc asserere; nam negatio actus, quæ in tali signo semper habetur, vel provenit ab eo, quod potentia voluntatis ē. intrinsecè manca, sicuti manca semper ē. ad actiones supernaturales absque Divinæ gratiæ auxilio; vel oritur eo, quod aliqua tunc ei desit conditio ad operandum prærequisita. Si primum, ergo falsum ē voluntatem in illo signo priori ad præmotionem agere posse. Completa enim debet ēē. potentia causæ, ut ipsa posse agere jure dicatur. Si secundum, ergo negatio actus componi potest unà simul cum Phisica præmotione; ē. enim de ratione intrinseca causæ liberæ, ut omnibus positis requisitis ad agendum, possit ex suo arbitrio agere, vel n. agere, vel agere contrarium.

Dicunt etiam: voluntatem n. habere à fato, ut possit agere, s[ed] ipsam posse quidem n. operari, etiam dum à fato determinata ē. nunquam tamen foret, ut tunc n. operetur. Uno verbo fatalem influxum n. respicere potentiam, s[ed] actum; s[ed] contra: Si humana libertas involuntariè n. ē. quia præmotio ē. prior actione voluntatis, et ipsa posita, fieri nequit, ut n. operetur, et solum est in actu; actus ille quilibet n. exit liber, s[ed] necessarius. Jam in actibus humanis n. ē ratio meriti, nec demeriti; nulla esset laus virtutis, nullus fructus laboris, nec puniendi essent reprobi, nec admirandi electi, si n. libera voluntate, s[ed] necessitati à nobis fieret qui nos facimus. Hæc omnia producit in causis liberis Phisica præmotio.

Conclusio II.

Phisica præmotio in causis liberis videtur Divinæ sanctitati plurimum derogare.

92 Prob. In Thomistarum sententia, nihil prorsus agere potest creatura, nisi à Deo phisicè prædeterminetur, ita ut Phisica præmotione opus habet hoc, etiam ut malè operetur; s[ed] hoc Divinæ Majestatis Sanctitati opponitur; ergo. Prob. min. Si Deus hominem præmovet ut malè agat, ideo homo pessimè vivit, quia ad pessimè operandum à Deo præmovetur, s[ed] hoc tantum dicere repugnat cum ejus Sanctitate; ergo. Prob. causalis. tunc sequeretur Deum accusari debere; eique imputari, si inhonestè vitam suam homo traducat; ergo.

Confirmatur. Non vacat culpa, qui hominem ad malè operandum moralit[er] præmovet; ergo à fortiori, immunis n. culpa erit, qui eum ad inhonestas actiones phisicè præmovet. Dicunt. Deum n. prædeterminare hominem ad formale, s[ed] tantum ad materiale peccati. Sed contra: homo suadens alteri ut malè operetur, ipsum n.

præmovet moralitr nisi ad materiale actus malæ; ergo si hac ratione imputatur Deo inhonesta hominis vita, etiam hoc immunis est a culpa, quia tantum suadet alteri materiale peccatum. Certe, qui Deum faciunt authorem peccati nihil dicunt nisi a Deo esse materiale illius actionis, quæ habet anexam malitiam.

93. Obj: 1o Thomistæ asignantes innumera tum Conciliorum, tum SS. Patrum testimonia, putantes adeo evident. Phisicæ præmotionem ex hoc capite evinci ut eorum judicio nemo sine periculo contrarium sentire posse; sed omnia prætermito, ut consulam brebitati, et quia omnibus una responsione fit satis. Resp. Ea omnia testimonia intelligenda esse vel de concursu Dei simultaneo, vel de motione humanæ voluntatis ad bonum inhærere; vel de præmotione tantum morali, vel de motione quadam speciali per gratiam ad actus supernaturales, et meritorios. Et sane vel loca CC. vel PP. quæ prædeterminantium paginas implent, rem evident. demostrant, vel probabiliter suadent. Si demostrant, ergo male se gerit Ecclesia in Scholis catolicis opositum doceri sinens; si tantum probabilit.; ergo periculosum non est præmotionem Phisicam negare.

94. Obj: 2o Deus est 1a causa, et 1us motor; atqui ita non esset si inferiores causas non præmoveret, easque ad operandum Phisice non determinaret; ergo. Resp. neg. min. Bene enim salvatur, Deum esse 1am causam, et 1um motorem, licet causas creatas Phisice non prædeterminet. Deus est 1a causa 1o dignitate, quatenus nempe omnibus creatis causis sublimior est, tanquam præstantis naturæ, ut omnes perfectiones suas infinite excedat. 2o fecunditate, quia rebus singulis vim ipse tribuit, qua operetur. 3o Independentia. Nullius enim auxilio indiget Deus ut agat; contra vero agentia creata opus habet Div. concursu et in operando ita a Deo dependet, ut omnino repugnet fieri aliquid, licet diminutum, nisi Deus non solum permitat, verum etiam nisi Phisice cum ipsis concurrat.

℣ Speciali quodam modo habet Deus rationem 1æ causæ, 1ique motoris si ad voluntatem referatur. Etenim 1o eam præmovet motione generali versus bonum in genere. Deus inquit Ang. Doct. movet voluntatem hominis, sicut universalis motor ad universale objectum voluntatis, quod est bonum; et sine hac universali motione homo non potest aliquid velle. 2o speciali motione eam excitat ad act. supernaturales; eique gratiam confert, qua actiones ipsas eliciat; unde dicit Apost. ;;Deum operari in nobis, et velle, et perficere pro bona voluntate.;; Quod si nomine 1æ causæ intelligant Thomistæ causam phisice prædeterminantem, non assumunt velluti notum ex terminis, Deum esse primam causam, atqui id ratione demostrent. Si vero secus, argumentum eo laborat fallatiæ genere, quod petitio principii nuncupatur.

95. Inst. Deus est prior creatura in essendo; ergo etiam in operando. Prob. conseq. Modus operandi sequitur modo essendi, ergo. Resp. dist. conseqe Deus est prior creatura in operando prioritate dignitatis, fecunditatis, et independentiæ; conc. Prioritate phisicæ prædeterminationis; nego. Distinctio satis constat ex dictis.

96. Obj. 3o Causa 2a esentialiter subordinatur 1æ ergo ab illa phisice præmovetur. Prob. conseq. Non in alio, quod in exigentia phisicæ præmotionis stare posse videtur subordinatio causæ 2æ ad 1um. ergo. Resp. dist. ant. Causa 2a esentialiter subordinatur 1æ quatenus habet a causa 1a ut posit agere, et re ipsa agat; conc. quatenus ita illi subjicitur, ut nisi ab ea phisice præmoveatur, operari non posit; nego. Causa itaque 2a subordinatur 1æ quatenus non solum vim operandi habet a 1a verum etiam, quia ita ab illa in operando dependet, ut nihil omnino queat causa 2a agere, nisi 1a simul operetur, ipsumque efectum simul cum illa producat.

97. Inst. 1º magis dependet creatura à Deo, quam instrumentum ab Artifice, s. instrumentum ita dependet ab Artifice, ut nihil queat eficere, nisi ab eo præmoveatur; g. nihil quoque creatura operari potest nisi à Deo phisicè prædeterminetur. Resp. dist. maj. Magis dependet creatura à Deo, quam instrumentum ab Artifice in essendo, conc. in operando nego. Cum enim secus, ac instrumentum, vim habeat agendi, fieri nequit, ut major sit dependentia creaturæ à Deo in operando, quam instrumenti ab Artifice.

98. Inst. 2º Majus ē. dominium Dei in creaturas, si phisica premotione indigerent, g. illa re ipsa indigent. Resp. dist. conseq. Phisica præmotione indigent, si n̄. repugnant, ut præmoveantur, conc. si repugnant. neg. Ostendant Thomistæ stare posse phisicā præmot.m cū libertate voluntatis creatæ, et Dnæ sanctitati nihil oficere, et tunc dabimus, Deū præmovere phisicè creaturas; ut dominium habeat super eas, q. potest ēē maximum.

99. Obj. 4º Voluntas ē. indeferens natura sua ad operandū, et n̄. operandū, g. indiget phisica prædeterminatione, ut operetur. Resp. dist. ant. Voluntas ē. indiferens natura sua ad operandū, et n̄ operandū indeferentia activa; conc. Indiferentia pasiva, neg. Indiferens itaqc ē voluntas ad utramqe contradictionis partē, verū ita, ut simul n̄. habeat se se determinandi. Quod enī pasivè ē. indiferens determinari ab alio debet, minimè verò, quod ē. indiferens activè; hoc ē, q.d vim habet agendi, et n̄. agendi, prout sibi magis placeat. Sed de hac tam graviori controversia jam satis. Reliqua videantur apud Authores. Quoniā verò causa eficiens afine ad agendū movetur, et ab exemplari in agendo dirigitur, ideo necese videtur immediatè post eficientem nonnulla de illis subjicere, præsertim cum omnes istæ sint paritèr causæ extrinsecæ.

Corollarium I.

100. Causa finalis, seu finis causis moralibus accenseri posse videtur: finis enim n̄. phisicè, s. moralit. tantū, ac methaforicè, ut inquiunt Doct. Subt. et Arist. in efectū influunt. Quid verò, quotuplexqe sit finis in 2a Logē part. disp. 1a q. IV. in II. ad num. 61. aparet. Ad verā rationem finis iis causæ eficientē queat determinari, triplex conditio requiritur. 1a ut finis sit cognitus; si enim ille operantem lateat, perinde ē. quantum ad hunc determinandū, ac si nullus esset. 2a ut aliqua bonitas in ipso fine percipi possit: nam si tantum sub ratione mali queat intelligi, cum voluntas in malum sub ratione mali nequeat nunquā ipsa ad agendū determinabitur, ut eum finem asequatur. 3a Demum ut prædicta bonitas ametur, et illius asequutio desideretur: cum enim omne agens propter finem operetur, ut finem atingat, nisi prius vellet, seu amet, et cupiat; nunquā ponet media, seu operationes, quibus illum assequi possit. Propterea inquit Doct. in 2º Sent. dist. 25. q. Unica. ,, Finis n̄. movet nisi sit cognitus ab agente.,, Et in prolog. Sent. q. 4a. ,, Finis n̄. ē. causa nisi in quantū amatus, et desideratus movet eficiens ad eficiendum.

Corollarium II.

101. Porquā eficiens causa ad agendum ad cognitū, et amato fine determinata ē. exemplari q.d mente tenet, aut exterius præ oculis habet in operando dirigitur.

Exemplar itaq. seu causa exemplaris, id ē. q. respicit agens dum operatur, ut ad illius similitudinem suum opus efficiat. Exemplar autē vocatur internum, si operis idea faciendi in mente operantis tantùm existat; externum verò, si operis exemplar exterius habeatur, l. in naturali prototipo, l. in opere planè simili, l. lineamentis in papiro formatum. Communiter Scholastici post suum Magist. Arist. causam exemplarem, velùt genere distinctam ab aliis causis rejecerunt, duntaxàt efficientē, finalem, materialem, et formalem admitentes. Recentiores verò Philosofi, et quotquot ex Antiquioribus Platonis doctrinam sustinuerunt; exemplarem addiderunt, q. propia, et peculiari causalitate ab aliis diversa donari optimo jure contendunt. Certè n̄. videtur major ratio de fine, q̄. de exemplari. Si enim fini conceditur propia causalitas, quia causam eficientem ad operandum movet pariter causalitas propia exemplari tribuenda ē, q. eadem causa in agendo dirigat: nam si dirigit operantem in efectus producente aliquam profectò rationem continet, cur efectus existat in rerū natura.

102. Doct. verò Subt. sicut in multis ab Aristotelis doctrina recessit; ità ac etiam de re, cum Platonicis, et Recentioribus eadem sentit. Vndè in Quodlibet. q. 8.ª hec habet: „ Ex dictis de causalitate efectiva patet solu-„ „tio questionis de causalitate exemplari, et finali; quia cum causa exem-„ „plaris sit aliqua ratione formali exemplans, et causa finalis sit ali-„ „qua ratione determinans, sivè finiens, sicut causa eficiens aliqua „ „ratione formali eficiens: sequitur ex consimili ratione, q. nulla istarū „ „causalitatū potest ēē propia, nisi ratio formalis causandi sit propia. „ Que verba Doct. adeò ~~[illegible]~~ clara, ut interpretatione n̄. egeant.

Questio V.

An materia l.ª sit vera Substantia; et quid sit hec?

103. De causa materiali, que est materia, ex qua aliquid fit, et de causa formali, que est forma, qua materia determinatur, aut perficitur, seu fit tale ens sivè in genere, sivè in specie, sivè numero procedit presens questio, ex qua pendet plurium questionū resolutio. Que Phylosoforū mentes solent vexare. Nomine materie generalissimè accepte intelligitur subjectū quodlibet, sivè substractum circa quod causa eficiens potest operari, in illud forma aliqua de novo inducere, atque ità ex illo, quodpiam disimile ens eficere quale prius n̄. erat. Hoc ēst, ut exemplo sensibili utar: truncus arboris ē: materia circa quam. Scultor operatur, in quam, aut hominis, aut Leonis figuram inducit, ac ita ex illo hominem, aut Leonem eformat. Ideò eadem numero materia si refertur ad causā eficientem materia circa quam apellatur: si comparetur ad formam, que in illa recipitur; in qua, et in quam; et tamen si relatè ad ~~[illegible]~~ ens, q. ex illa consurgit, materia ex qua dicitur.

104. Contra verò forma generalissime sumpta illud omne vocatur, quod à causa efficiente in materia inducitur, l. ex ipsa educitur in materia ipsa recipitur, et subjectum aliqua ratione determinat, perficit, et in alterum l. essentialiter l. accidentaliter trasmutat. Hinc duplex distinguitur forma, una substantialis, et essentialis, et altera accidentalis: quatenus subjectum per accessum hujus formae ab eo, quod antea erat, aut essentialiter, aut accidentaliter differt. Formae substantiales, seu essentiales apellantur, quibus duo quaedam inter se diversa fiunt substantia, seu essentia. Ut sunt omnia corpora, quae specie differunt. Formae verò accidentales dicuntur, quae differentiam tantum accidentalem in subjectum, seu materiam inducunt: vg. albedo, l. nigredo. Forma, quae educitur de potentia materiae ea dicitur, quae neque fieri, neque operari, neque esse potest saltem naturae viribus absque subjecto. Dico saltem naturae viribus; nam possibile est aliquam esse formam, ut ex naturae instituto, neque fieri, neque esse neque operari possit extra materiam; quae tamen si vera sit substantia queat divinitus per se existere; ut anima bellarum in sententia eorum, qui ajunt esse spirituales, quae licet extra corpus agere nequeant, et interire omnino debeant unà cum corpore, possent tamen quia verae substantiae, etiam sine corpore à Deo conservari.

105. Quare duplex est eductio formae de potentia materiae, nempè: eductio subjectiva, et eductio naturalis solius dependentiae. Eductio subjectiva de potentia materiae his omnibus competit formis, quae sunt in materia tanquam in subjecto, adeoque sine subjecto neque Divina virtute existere possunt. Eductio verò naturalis solius dependentiae est, quae formis convenit nunquam sine materia existentibus, quod extra materiam agere nequeat, quas tamen existere sine materia minime pugnat. Prioris generis sunt omnes formae merè corporeae. Posterioris quoque brutorum animae spirituales. Ex quibus colligitur, formas purè corporeas, quae formae substantiales vulgò dicuntur, veras substantias non esse. Cum enim substantia sit ens per se existens, et illis repugnet per se existere, certè substantiae nequeunt dici. Et quamvis Doct. videatur substantias vocare tantum secundum quid substantiales apellat, scilicet quatenus est ratio, propter quam novae consurgunt substantiae ab aliis substantiis specie diversae. Alterum quoque est genus formae substantialis, quae est vera substantia, ut mens humana; quae hec nullomodo educitur de potentia materiae: nam non solum sine corpore existere potest divinitùs, sed etiam absque illo naturaliter existit, et operatur, dum in hominis interitu separatur à corpore organico.

106. Regrediens verò à materia, quam dixit esse substratum quoddam, sive subjectum aliqua ratione determinabile, quod in omni creatura habetur sive corporea, sive spirituali; ideò in hac generalissima notione considerata non significat rem corpoream, extensam, et divisibilem, ut vulgo accipi solet, sed dividi potest cum Doct. in corporalem, et spiritualem. 1a generaliter sumpta est quae naturalem habet capacitatem ad extensionem. 2a verò quae naturalem habet repugnantiam ad extensio-

nem; simulq. naturalem aptitudinem ad recipiendam vim cogitandi. Cum enim extensio, et vis cogitandi in eadem substantia simul ēē. nequeant, eo ipso, q. in spirituali materia habeatur naturalis aptitudo ad recipiendā vim cogitandi, illis simul in ēē. debet repugnantia ad exextensionem. Ex materia spirituali Deus efficit omnes spiritus; ex corporaliq. omnia formantur corpora. Quod novitati tribuendū n̄. ē: nam id ratio persuadet, et multi SS.PP. id ipsū docuerunt.

107. Materia corporalis dividitur in primam, et posteriorem. 1a ē. circa quam actio causę eficientis in suo ordine 1um incipere potest; ita in ordine artis materia 1a ē. lapis in monte, l. Arbor in Silva. Posterior vero ē. circa quā n̄. versatur 1a actio causę eficientis, ꝺ jam circa eam, alia actio precesit; ut lapis jam ē. monte diceptus, et quadā preparatione dispositus; sicut arbor jam cęsa, et in trunco divisa. Vndè sicut annotat Doct. q. 8a de rerū principio numo 17. triplex ē. genus, ordoq. causarū eficientium, seu ut ipse ait: ;; Tria sunt agentia, Deus, natura, ,, et ars. ,, Quorū unum presuponit alterū, nempe: Ars, ut agere posit suponit materiam ā natura paratā, natura vero materiam ā Deo jam 1o formatā; ita triplex materię genus distinguit Doct. scilicet: primò primam, secundō primam, et tertiò primam.

108. Primò prima soli Deo subjicitur, nam cum sit substantia simplex, nequit fieri nisi per creatm ac solus Deus formam omniū primam potest in illam inducere, quā fiat extensa. Quamvis enim reverà sit velut agregatam infinitarum penè numero particularū, quarū quęlibet substantia est; illę tamen singulę sunt simplices, et inextensę, quę parum absimiles videntur Leibnitianis monadibus, de quibus in Phisica. Hęc materia primò prima ā Deo creata, in eamq. ab ipso 1a forma inducta, per unionem plurium simplicium substantiarū, quarum illa ē. agregatum acquirit extensionem; et incipit ēē. corpus. Nam ut habet Doct. quęst. supra citata, num. 47. ;; Esse corpus dicit necesa-,, rio partes extra partes, imo ex hoc ē. corpus, et ponere, q. corpus sit, et q. ,, n̄. habet partes extensas ē. proponere, q. corpus n̄. sit corpus ;; Atq. hinc fiunt primigenia illa corpuscula, seu exilissimę illę moleculę diversę magnitudinis, atq. figurę, quę ab Epicuro, Gasendo, alisq. Recentioribus Mechaniotis velut 1a corporū principia statuuntur. Hęc q. illa sunt, quę materia secundo prima ā Doct. apellantur.

109 Formatis hisce minimis corpusculis, exilissimisq. moleculis, ex quibus fortè immediatè consurgunt vulgaria elementa, aliaq. simplicia corpora, mutatur ordo causę eficientis: et ubi Deus solus in materiā primo primam agebat, formata jam materia secundo prima, in hanc natura incipit agere, ut inquit Doct. in eadē quęst. num. 17. Agente vero natura fiunt mixta, 1o minus, deinde magis composita, quę materia tertiò prima dicitur, atq. in hęc, quotiescumq. sensibilia fuerint, incipit Ars operari; ut sunt terra n̄. elementaris, herbę, plantę, lapides, metalla, osa, pellesq. animalium &a. Ait enim Doct. ibidem: ;; In agen-,, ,, tibus, et naturalibus, et artificialibus s.t. gradus prioris, et ,, ,, posterioris; sicut ars [illegible] vestitū suponit pro ma- ,, ,, teria pannū, et hoc filum, sive opus artis filandi. Sic ,, ,, ē. etiam in naturalibus. ;; Vndè filum ē. materia remota, pannumq. materia proxima, et sic de cęteris.

110 De materia secundo prima, et tertio prima, disserere modo n. praestat. Cum enim hae extensione donentur, et vera sint corpora, ad Methafisicam n. pertinet, s. ad Phisicam de his tractatio. Quare de materia primo prima hic tantum agitur; licet a Deo creata sit, ut ex ipsa etiam corpora fierent, ipsa tamen corpus n. e. s. substantia simplex natura sua indiferens ad corpus, et spiritum. Dum autem determinate dicitur corporalis, aut spiritualis, incipit aliquomodo determinari: nam illa, quae prius indiferens erat ad corporale, et spirituale, accedente praecisse capacitate extensionis, determinatur illius potentia ad solas formas corporeas; ad spirituales vero accedente aptitudine ad recipiendam vim cogitandi, quae cum capacitate extensionis omnino pugnat, ut dictum e. Haec autem potentia, seu indiferentia pasiva materiae omnino primae ad cujuslibet generis formas pertinet ad esentiam ipsius materiae, neque a materia distinguitur nisi ratione, ut probat Doct. in q. 8.a de rerum principio. Secus inquit, inter alias rationes, daretur procesus in infinitum; ut de unitate relate ad ens, et de existentia respectu esentiae ejusdem entis dictum e. in suis propriis locis.

111. Non enim materia 1.a e. pura potentia objectiva, ut omnes olim docebant in Scholis; s. potentia subjectiva vere existens propia existentia, qua e. in composito, et qua potest Divina virtute, etiam in se ipsa sola existere extra compositum, et absque omni forma, quae sit ab illius esentia distincta, ut pluries demostrat Doct. in 2.o Sent. dist. 12. q. 1.a et 2.a Neque propterea putandum e. si materia per se aliquid actu sit nullum futurum ee. discrimen inter materiam, et formam. Nam licet mat.a quatenus mat.a e. propio donetur actu: actus tamen iste n. e. determinatus nisi ratione propiae existentiae, s. in reliquis e. omnino indeterminatus, et solum determinabilis; forma vero quaelibet e. actus secundum se proprius determinatus, atque determinans, unde materia 1.a ex natura sua per se existens e. seu vera Substantia. Quia vero n. e. per se subsistens, utpote ex naturae, seu Dei instituto per se 1.o ordinata ad omnia constituenda, quae in Mundo sunt entia; naturaliter sine omni forma a sua esentia distincta, scilicet: extra rem, cujus e. materia, nunquam existit. Quare hanc rem adm modum abstractam, utilemque ad intelligenda intrinseca omnium creatarum substantiarum principia, tribus conclusionibus cum Doct. Subtili aperire, et distinctius exponere, conabor.

Conclusio I.

Doct. Subt.s materiam 1.am generalissime acceptam in corporalem, et spiritualem n. absurde divisit.

112 Prob. 1.o Haec divisio absurda n. e. si in spiritibus e. materia sui generis, sicut et in corporibus; s. res ita se habet; g. Prob. min. Quod nomine materiae intelligitur in corporibus e. q. in illis habet rationem subjecti propietatum, modorum, accidentium, et omnium formarum; s. in spiritibus creatis adest supraeractum aliquod, q. in ipsis e. subjectum propietatum, modorum, formarum, et accidentium spiritualium, sicut corporeorum in corporibus; g. Prob. min. tales propietates, formae, et modi sive corporales, sive spirituales nequeunt existere nisi in subjecto determinabili, q. per eas formas, seu propietates determinetur, s. istud subjectum nequit ee. nisi materia; g.

Confirm: Quidquid alterū determinat, modificat, aut perficit juxta commune Philosophorum sententia forma vocatur, et contra quidquid determinatur, modificatur, aut perficitur, materia dicitur, sicut enim materia ē. in potentia ad formas; ita formæ respiciunt materiā tanquam actus; ꝭ. in omnibus spiritibus creatis ē. quidpiam perfectibile, modificabile, et determinabile; ergo.

113. Prob. 2º Ea materiæ divisio velut absurda habendan̄ ē. quæ ut probatæ habuerunt plures Doctisimi Viri, et magni nominis Patres; ꝭ. ita ē. divisio materiæ in spiritualem, et corporalem; ergo. Prob. min. In primis S. August. pluribus In locis, S. Joannes Damascenus lib. 2º de Fide orthodoxa, Boetius in lib. de Vnitate, et Vno, cap. 2º et Antonius Genuensis Methaf. part. 1ª pone 17. ubi testatur, omnes ferè Ecclesiæ PP. cum melioribus Philosofis asserere, substantias spirituales creatas ēē. Methafisicè compositas, et divinitus disolubiles, et componi ex aliquo subjecto, et vi activa, quæ licet naturaliter separari ā se invicēm nequeant, divinitùs verò resolvi possunt; ergo.

II;; Est tandem „ „ advertendum inquit Dr. in 2º Sent. dist. 12. q. 7. q.d substantiæ spirituales di-„ „ cuntur aliquando n̄. habere materiam, tum quia earū materia n̄. ē. „ „ similis materiæ corporali, quæ ā Philosofis materia communiter apellatur; „ „ tum quia ut dicit Boetius de Vnitate, et Vno, forma spiritualis propter „ „ suā actualitatem unitur etiam intimè materiæ, quæ trahit eām ad „ „ se intantum, ut totum apareat ut forma; tum quia operatio earū „ „ propter talem materiam n̄. impeditur, eo q.d materia ē. quasi absorta ab „ „ actualitate formæ.„

114. Obj. 1º Si mens humana donaretur materia propia sui generis eadem numº forma informaret simul materias diversi generis; ꝭ. id videtur absurdum; ergo. Prob. seqª tunc forma animæ informaret suam materiā spiritualem, et simul corpus organicū; ꝭ. hæ sunt materiæ diversi generis; ergo.

Resp. neg. sequelam. Nam forma humani corporis n̄. ē. sola forma rationalis animæ; ꝭ. ē. tota ipsa anima ex sua materia spirituali, et ex sua forma conflata. Non itaqe una, et eadem numº forma informaret simul spiritualem mentis humanæ materiam; et corpus organicum: nam tota anima planè differt ā sola peculiari forma. Neqe absonum ē. materiā spiritualem animæ unà cum sua forma ēē forma corporis organici. sicuti absurdum n̄. ē. ā forma corporali organici corporis, simul cum ejus materia unam constitui materiā totalem, quæ ā mente humana informatur. Nam n̄. solum informat materiam, ꝭ. totum corpus in se completum. Sicut quotidiè accidit in compositione rerum corporearū; v.g. forma elementi cum sua materia ē. materia mixti, et sic de cæteris.

115. Inst. Si mens humana componeretur ex materia, et forma, esset per se ens completum; ꝭ. hoc nullus admitit; ergo. Prob. min. tunc esset persona, ꝭ. hoc ā nullo conceditur; ergo. Resp. dist. maj. esset ens completū in ratione formæ humanæ, conc. in ratione personæ; neg. Et dist. maj. prob. esset persona si n̄. esset 1º ordinata ad alterum constituendum, conc. aliter; neg. Licet mens humana composita ex forma, et materia sui generis ē. quidem ens perse, et vera substantia, ac etiam completa in ēē. formæ, atamen ex naturæ instituto n̄. ē. ordinata, ut per se subsistat, ꝭ. ut hominem constituat.

116. Obj. 2º Sanct. August. lib. 7º de Genesi ad litera expresè docet, animam n̄. ēē. factam neqe ex materia corporali, neqe spirituali; ergo frustra asseritur Sanctm Aug. Doctrina, sub. Doct. aprobare.

Resp. dist. ant. et Sancti Aug. testimonium. Docet animam n̄. ēē. factam neqe ex materia corporali, neq.e ex spirituali, quæ tempore præcesserit animæ formationem; conc. quæ ipso instanti creetur, quo anima à Deo conditur; nego. Cit. in loco n. ē hac de re præcipua quæstio, s. præsupponens animam ex aliqua materia fuisse factam præsertim inquirit. An Adami anima condita sit à Deo ex aliqua materia præexistente, sicut formatum fuit corpus ipsius ex terra jam condita: ac resolvi: „De materia spirituali factam animam conquentius credi, quæ materia ipsius animæ formationem nequaquam tempore præcesserit. Unde sicut cum Deus insufflavit in faciem Adami spiraculum vitæ; simul et animæ materiam creavit, et ex ipsa animam condidit; ita, et animas, quas quotidie humanis corporibus infundit; n. ex aliqua præexistente materia confingit; s. simul materiam spiritualem creat, et formam illi tribuit, unde anima fiat. Universa igitur materia corporalis ab initio fuit à Deo creata, n. autem materia spiritualis; verum hanc toties creat, quoties animæ formandæ sunt.

117. Obj. 3.o Si Angeli, et animæ rationales ex materia utcumq.e spirituali formarentur n. essent substantiæ simplices, s. hoc absq.e piaculo nemo negare nequit; g. Prob. seq. tunc constarent ex materia, et forma; g. Resp. dist. maj. n. essent substantiæ simplices absolutè, conc. secundum quid; neg. et similit. dist. min. Omnes enim substantiæ spirituales, præter Deum absolutè simplicem, sunt simplices tantum secundum quid, cum in his omnibus aliqua sit compositio saltem Methafisica. Et simplices tantum dicuntur, quia compositæ n. sunt sicut corpora, neq.e sunt extensæ, neq.e divisibiles. Hinc sequitur simplicitatem secundum quid, Angeli, et animæ rationali absq.e piaculo denegari n. posse cum sint substantiæ spirituales. Quod n. impedit, ut materia spirituali donari possint nisi puros actus instar Dei eos ēē vellimus.

118. Inst. Compositio ex materia, et forma n. ē tantum Methafisica, s. etiam Phisica; g. n. essent simplices secundum quid. Resp. dis. ant. Compositio ex materia corporali, et forma ē Phisica, conc. ex materia spirituali, nego. Ut enim advertit Doct. cum Boetio, forma spiritualis ita intime unitur suæ spirituali materiæ, ut compositum inde exurgens, sit vellut una tantum forma; ideoq.e n. nisi compositio Methafisica ex his haberi potest. Et ad omnem viam adversariis claudendam, si isti intelligant compositionem, quæ rem extensam aut naturæ viribus disolubilem reddat, dico, q. ex materia spirituali, et illius forma esentiali, compositionem Phisicæ minime fieri: nam ex his nulla consurgit extensio, nihilq.e naturæ viribus disolubilem. Si vero intelligant veram, et realem compositionem à Deo factam, s. quæ à Deo disolvi posit, et cum simplicitate, et naturali incorruptibilitate creati spiritus minime pugnet; ego similiter compositionem Phisicam ēē n. dubito. Nihilominus hanc potertiorem magis judico compositionem Methafisicæ, quæ Phisicam vocari debere, nam res inter quas versatur ad Methafisicæ, n. vero Phisicæ objetum pertinent.

119 Obj. 4.o Si Anima rationalis, et Angeli ex materia sui generis, et forma constituerentur, eorum substantiæ n. essent indisolubiles, et per consequens neq.e incorruptibiles, neq. natura sua immortales, s. hoc dicere ē absurdum; g. Resp. neg. seq. maj. Cum enim creati spiritus dicuntur ēē indisolubiles, incorruptibiles, et immortales, n. intelligitur, q. nulla potentia disolvi possunt; nam hac ratione sicut Deus solus ē purus, et simplicissimus actus, ita ipse solus ē absolutè indisolubilis, et immortalis; s. tantum intelligitur, q. disolutio, et interitus contingere illis minime queat

viribus naturæ, quia materia spiritualis, et forma nulla naturæ vi possunt invicem separari, solusq. Deus, qui eas in unum conjunxit, dissolvere possit.

Conclusio II.

Materia prima, sivè spiritualis, sivè corporalis ē. vera Substantia.

120. Prob. 1o ex Doct. Quodlibet. q. 3a ubi inquit: „Substantia ē. illud substractum, cui repugnat inhærere,„ sed materiæ 1æ utpotè 1o substracto repugnat inhærere; ḡ.

121. Prob. 2o ratione deducta ex Doct. in 3o Sent. dist. 22. q. Unica. Materia sivè spiritualis, sivè corporalis aut sub nullo, aut sub aliquo continetur genere. Nequit dici sub nullo genere, nam q. sub nullo continetur genere, l. ē. Deus, l. nihil. Sed materia nequit ēē. Deus, quia ē. à Deo creata; neque nihil, quia juxta Doct. q. 7a de rerum principio num.o 2o. „Materia ē. aliquid, q. à Deo, ē. factum, atq. creatum.„ ḡ. ē. aliquid, ḡ. sub aliquo genere continetur. Nunc sic: Quod sub aliquo genere continetur ē. substantia, l. accidens, quia ens creatum ritè dividitur in substantiam, et Accidens; ḡ. materia 1a aut ē. accidens, aut substantia; n̄. Accidens, neq. proprium, neq. commune; quippè neutrum ē. 1um subjectum, imò supponunt subjectum; materiaq. ē. 1um subjectum; ḡ. præcisè substantia dicenda ē; ḡ. Rā.

Conclusio III.

Materia 1a etiam corporalis universim accepta est quoddam velluti agregatum infinitarum penè particularum, quarum singulæ sunt ex se substantiæ simplices, et inextensæ.

122. Prob. Si materia ex qua coalescunt 1o corpora utcumq. simplicia, esset composita, ex alia priori materia, et ipsa componeretur; ḡ. tum daretur processus in infinitum; ḡ. Prob. min. de hac priori materia ex qua posterior resultaret, iterum quæreretur an simplex sit, l. composita; si simplex, habetur propositum; si verò composita, iterum quæritur an illa, ex qua componitur sit simplex, l. composita; ḡ. tandem aliquando deveniendum ē. ad materiam omnium 1am quæ sit substantia simplex, l. procedendum ē. usque in infinitum, q. ē. absurdum. Hinc meritò inquit Doct. in 2o. Sent. dist. 3a q. 4a. „Dico, q. necese ē. de n̄. composito, ut parte, fieri, l. „ produci compositum, l. ibitur in infinitum.„

¶ Substantias omnium primas, quas materiæ 1æ nomine Doct. intelligit, ēē. omninò simplices, atq. inextensas, communis ē. Recentiorum sententia. Nam post Leibnitum, id docuerunt Wolfius, Sagnerius, Jacquierus, Genuensis, Paulus Mako, aliq. celebriores posterioris ævi Philosofi.

123. Obj: 1o contradictio ē. dicere materiam corporalem simplicem ēē, atq. inextensam; ḡ. Prob. ant. Quod corporale ē. compositum ē. atque extensum; ḡ. Resp. dist. 1um ant. Si pro materia corporali intelli-

gatur materia actu corporea, conc. si intelligatur substantiā quæ actu habent solā capacitatē ad extensionē; neg. Ut distinguatur matª ex qua coalescunt corpora ab ea ex qua Deus efficit spiritus; divisa fuit materia generaliter considerata in spiritualē, et corporalem; pro spirituali intelligendo, cui repugnat extensio, atqᵉ aptitudinē dicit ad recipiendā vim cogitandi; et pro corporali, quæ extensionis capacitate prædita ē. et cui repugnat recipere vim cogitandi.

124. Obj: 2º Inter corpus, et spiritum nulla datur substantia media; ḡ. materia, quæ nec corpus, nec spiritus ē. n̄. ē. vera substantia. Prob. ant. Quidquid ē. substantia, l. corpus, l. spiritus ē. ḡ. Resp. dist. ant. Nulla datur substantia media completa, conc. incompleta; neg. Nomine substantiæ completæ eā intelligo, quæ ex naturæ instituto ē. ordinata ad per se subsistendū. Quo sensu materia 1ª n̄. ē. substantia completa, quia si spiritualis, ē. ordinata ad subsistendū n̄. in se, s̄. in spiritu; si vero corporalis, ad subsistendū in corpore; adeo ut nulla sit materia, quæ in corpore, aut in spiritu n̄. subsistat. Atamen cum vera sit substantia, per se existere potest Divina virtute absqᵉ ulla determinata forma, quæ sit verus actus informans ab illa distinctus, ut enim notat Doctor in q. 8ª de rerū principio num.º 42. ;; Rationes in oppositū ex falsa imaginatione procedunt. ;;

125. Obj: 3º Substantia simplex ē. perfectior substantiis compositis; ḡ. si materia 1ª esset substantia simplex, esset perfectior quolibet corpore, s̄. hoc ē. falsū; ḡ. Prob. subsumptū. Materia 1ª ē. minimum ens, ḡ. n̄. ē. perfectior quolibet corpore. Resp. dist. 1ᵘᵐ ant. Nisi substantia simplex in ipsis compositis substantiis contineatur; conc. aliter; nego. Certum ē. materiā 1ᵃᵐ pluribus formis determinatā in corporibus contineri; ut enī inquit Doct. in 1º Sent. dist. 8ª q. 3ª ;; Perfectius nunquā continetur in minus perfecto. ;; Ideo quamvis materia 1ª simplex sit, corpora vero composita, cū tamen illa in his contineatur, his perfectior illa eē n̄. potest. Quare falsum ē. generalitᵉʳ loquendo res eē. perfectiores, quot sunt simpliciores. Id verum de solo Deo, qui sicut ē. simplicissimus ē. etiā actualissimus, et quoque perfectissimus. Etiā verū ē. cum formæ sunt diversi generis, nā spiritus, qui sunt corpore simpliciores, sunt etiā eo perfectiores; quia forma spiritualis omniū infima ē. perfectior forma corporea omnium suprema.

126. Obj: 4º Materia ē. substantia incompleta; ḡ. n̄. ē. vera Substantia. Resp. dist. ant. Est incompleta quatenus ē. ordinata ad alterū constituendū, et subsistendū in altero conc. ant. Quatenus nequit saltē divinitus per se existere, neg. ant. Mens humana ē. Substantia incompleta quatenus ordinata ē. ad constituendū hominis compositū, et tamen ē. vera Substantia; ḡ. etiā materia 1ª quamvis ordinata sit ad constituendū compositum naturale.

127. Obj: 5º Si materia 1ª esset substantia simplex, et inextensa, impossibile esset, ut ex illa fierent corpora extensa; s̄. hoc ē. contra omnem doctrinā; ḡ. Prob. seq. Doct. Subt. ait ex inextensis n̄. posse fieri extensū, ḡ. Resp. dist. maj. Impossibile esset, si illa neqᵉ actu, neqᵉ potentia extensa fuisset; conc. maj. Si licet actu n̄. potentia tamen extensa fuerit; neg. maj. Distinctio facile percipitur ex dictis. Doctor intelligendus ē. de iis inextensis, quæ nullā habent exigentiā ad extensionē, ut materia 1ª spiritualis, et quælibet spiritualis substantia. Non tamen de illis, quæ licet actu n̄. sint, potentia tamen habent naturalē capacitatē ad extensionē, ut materia 1ª corporalis.

Apendix.

128 Ad tractatum de causis pertinere etiam videntur casus, fortuna, et fatum. Casus, et fortuna dicuntur caus per accidens, Causa autem per accidens ē cujus actione efectus consequitur prater intentu operantis aut naturę; sic qui judicans feram occidere, hominem occidit, ē. causa per accidens; monstruum, qui ex homine, et muliere accidit, dicitur efectus per accidens, vir qe et mulier causę per accidens. Causa per accidens opponitur causę per se, quę producit efectum juxta intentum operantis, et ā natura ordinatum; ut homo generans hominem. Et si casus, et fortunę nomina promiscuè accipi soleant; tamen propiè fortuitum apellatur, q. prater animi designationę ā causa libera procedit; ut cum aliquis fugiens capillis suspensus permanet pendulus in aere. Casuale verò cum ā naturali seu necesaria causa eficitur, ut cum homo casu ē. in eo loco, ad quem pertingit fulmen, et hoc percursus necatur. Fortuna autem, l. bona, l. mala ē. Bona, si efectus fortuitus fuerit bonus; Mala autę si malus. Bona fortuna vocatur ā Doct. in Lib. 2.º Methafisicorū Eufortunium ab eu, q. ē. bonū; mala autę infortunium. Fatū generatim ē. omniū Mundi causarū, et efectum, q.º nescio, ut una ab altera pendeat, et nulla in parte concatenatio arrumpi posit. De fato pluximum supersticiosè usi fuerunt Poetę, et Philosofi Cinici Heretici Planetarii, et Astrologi judicarii tanquā necesitatem nobis imponens, adeò ut etiā actus nrę voluntatis ab influxu Planetarū necesariò dependere. Quarè fatum in hoc sensu damnatum fuit in pluribus Conciliis. Verum catholicè fatū definitur: ā Boetio: Immutabilis mobiliū dispositio per quā Providentia suis quęque ordinibus nectit Vel aliter: Immobile Divinę Providentię decretū, q. singula suo ordine, loco, et tempore Deus firmiter redit. Sed de hiis fusiùs in Methafisica secunda.

Disputatio III.

De reliquiis entium generibus.

Entium genera, de quibus in Ontologia neq.e speciliater, nec satis usq-modo actum ē, sunt potisimum ens simplex et compositū; finitum, et infinitū permanens, et sucesivum. Quarè de his aliqua dicenda restat.

Questio I.

Quenam fuerit mens Doct. circa tertiam entitatem?

129 Ens simplex illud dicitur, q. unica constat Substantia, l. in unica recipitur Substantia. Compositū verò, quod ex pluribus coalescit substantiis, l. in pluribus substantiis simul recipitur. Ideò omnis spiritus, sivè increatus, sivè creatus ē. ens simplex, quia in eo unica ē. substantia; et similitr simplices sunt eorū propietates, quia in unica substantia recipiuntur. Corpora autem, et entia, quę constant ex corpore, et spiritu sunt composita; nam quolibet corpus tot habet substantias, quot sūt partes in quo resolvi potest. Etiā corporis propietates sunt compositę, quia in ente pluribus substantiis composito recipiuntur. Unde infertur, q. ens simplex cum unica constet substantia dividi nequit in plures partes. Nā partes in quas

dividexetur, debexent ēē. tot substantiæ, scilicet entia quæ per se existerēt; quod manifesta contradictio videtur in ente unica habentem substantiam.

130. Ens simplex dividitur in absolutè simplex, et secundum quid. 1.um dicitur si unica substantia, qua illud consistit n̄. habeat rationem subjecti aut potentiæ ð. sit purus actus; ut Deus. 2.um verò si illa unica substantia habeat rationem subjecti, aut substantiæ perfectibilis. Ut omnes spiritus creati qui constant ex materia perfectibili per suam formam. Minus propiè vocantur simplicia quædam cap.a ut s̄s. 1.a et immediata mixtorų naturalių elementa, qui etsi pluribus constent substantiis, sunt tamen ejusdem rationis esentialis. Quo sensu inquit S. August. simplex dicitur, quod ex aliis naturalis n̄. ē: simplex enį corpus ē. terra ex ipso, q.d terra ē; adhuc minus propiè dicuntur simplices herbæ, ex quibus efici solent medice artis mixtiones, quæ licet herbæ sint compositæ, et mixtæ, quatenus constant ex pluribus salibus aliisq.e substantiis, quæ esentialit.e diferunt, tamen comparativè ad mixta, quæ ex ipsis fiunt simplices dicuntur.

131. Spiritus creati sunt absolutè compositi, n̄. sicut corpora, quæ naturalit.e disolvi possunt, quia constant ex distinctis substantiis; ð. compositi ex genere, et diferentia; ex esentia, et propietatibus; ex substantia, et accidente; quorų omnių compositione Deus caret. Etiam in illis possunt ēē. mutationes, et alterationes accidentales; Deus ab illis separando sua Divina virtute atributa esentialia, et facultatę volendi, subjecto manente cum intelligendi facultate. Qua Doctrina respondetur illis Philosofis, qui aserunt creatos spiritus destrui n̄. posse, neq.e esentialit.e mutari, quin ad nihilum reducantur. Si enį quilibet creatus spiritus potentia Dei absoluta spoliari potest aliquo atributo esentiali, manentibus reliquis, et subjecto, destrui potest, quin omninò ad nihilų reducatur.

Dicunt ad hanc rationem, manifestą haberi contradictionem; nam in hypotesi spiritus simul maneret, et n̄. maneret; n̄. maneret, quia esentialit.e mutatur, et maneret, quia adhuc esset materia spiritualis, quæ cų sit substantia spiritualis ēēt spiritus. Sed contra: Nulla ē. contradictio, si distinguatur, ut distingui debet substantia spiritualis, actu, et potentia. Materia 1.a spiritualis ē. substantia spiritualis n̄. actu, ð. potentia, scilicet: quatenus ē. idonea, ut recipiat formą, seu vim cogitandi, et spiritus eficiatur; eo modo, quo materia 1.a corporalis n̄. ē. actu extensa, seu corpus; ð. habet tantų capacitatę ad extensionem, ut ex ea corpus efici posit. Spiritus verò ē. substantia spiritualis actu, quia jam habet formam spiritus, sicut corpus ē. substantia corporalis actu, quia jam habet extensionę, quæ ē. præcipua corporis forma, et primarių ejus atributų. Ergo sicut potest substantia aliqua habere capacitatę ad recipiendą formą spiritus, quamvis ea forma actu nequaquam donetur; ita potest aliquid ad spiritų pertinens tanquą subjectų manere, quin spiritus maneat: scilicet: potest manere spiritualis materia, quin sit spiritus.

132. Præter genera compositorų asignata in Ont. lib. 1.o Disp. IV. q. 3.a n.o 100. Compositum etią dividi potest in naturale, et artificiale. Naturale illud dicitur, q.d ex instituto naturæ coalescit; ut homo bellua, Planta. Artificiale verò quod ab arte provenit; ut templų horologių. 2.a Etią dividi solet in esentiale, et accidentale. Esentiale, q.d in Scholis vocatur Compositų per se, illud ē. q.d coalescit ex subjecto

et forma esentiali; ita ut subjectum esentialiter immutetur. Accidentale, seu per accidens ut Scholae dicunt: est quod consurgit ex subjecto, et forma accidentali, subjecto tantum accidentaliter mutante. Compositum naturale esse potest, sive esentiale, sivè accidentale. v.g. Dum materia, ex qua constituitur humanum corpus, forma organica tribuitur, fit compositum naturale esentiale, quia materia mutatur esentialiter. Dum verò jam perfectè corpus formatum per alimenti susceptionem augetur, tunc fit novum compositum naturale, sed accidentale, quia accidentaliter tantum mutatur. Compositum verò artificiale non nisi accidentale esse potest. Nam si ars sola operetur; tantum accidentaliter potest mutare materiam, et formam tantum accidentalem in illam potest inducere; ut cum tabula pingitur formatur simulacrum, fabricatur Domus, et horologium elaboratur.

Dixi: Si ars sola operetur; Nam si cum arte simul natura operetur, ab Arte saltem occasionaliter compositum esentiale fieri potest: v.g. cum Agricola semina terrae commendat, aqua rigat, et hinc herbae et plantae gignuntur; cum è lapide fit vitrum, è lacte caseus &a. In his, et similibus productionibus ars aplicat activa pasivis, et agentia naturalia, maximè calor, et ignis, sunt, quae praecipuè influunt in novi compositi eformationem.

133. A nonnullis dubitari solet; ad quod compositi genus referendi sunt creati spiritus, qui simplices tantum secundum quid, et absolute compositi, dicuntur. Ad quod respondetur, quod si creati spiritus considerentur, ut quid coalescens ex materia spirituali, et suis specificis formis referendi sunt ad compositum esentiale, et per se; quod compositum Methafisicum, et naturale dici potest, quatenus haec compositio est à Deo, ut authore naturae; non verò potest dici naturale, si nomine compositi naturalis intelligatur, quod viribus naturae efici potest. Potest etiam creatus spiritus appellari compositum per accidens, si accipiatur spiritus in sua specie completus unà simul cum cognitionibus, pasionibus, habitibus sivè acquisitis, sivè infusis, caeterisque accidentibus. Nam haec omnia sunt spiritui accidentalia. Quibus supositis sit

Conclusio I.

Dato ente composito, necesariò admitendum est in eo aliquod ens simplex.

134 Prob. Compositum nequit coalescere nisi ex simplicibus; ergo. Prob. ant. In nullo genere causarum admiti potest procesus in infinitum; sed si compositum non coalesceret ex simplicibus sequeretur procesus in infinitum in serie causarum materialium; ergo. Prob. min. Ea ex quibus conflatur compositum, vel sunt simplicia, vel composita; si simplicia sunt; ergo habetur intentum conclusionis: Si composita iterum quaeritur ex quibus talia composita resultent, et sic inquirendo progredietur, donec ad elementa simplicia deveniatur; Quare inquiro

Doct. loco superius cit.;; Necesse ēē. de ñ. composito, ut parte,,, ,, fieri compositum.;; Ergo ex simplicibus semper componitur.

135. Hoc jam stabilito ante directā quæsiti resolutionē notare oportet, plures ētiā Scotistas Magistro suo imposuisse, ab eo fuisse assertā distinctionē realem inter compositū, seu totum, et omnes illius partes simul conjunctas; adeo ut homo vg. sit tertia quædā substantia realiter distincta ab anima, et corpore simul unitis; quæ tertia substantia in morte hominis intereat. Quod quidem ab iis factū ñ. fuisset, si memoria recoluissent regulā ab ipso Doct. traditā q. 7ª Quodl. ubi dicit:;; Nulli authori imponenda ē. sententia falsa falsa, l. ,, ,, multū absurda nisi habeatur expressè ex dictis ejus, l. sequatur ēvi- ,, ,, dent. ex dictis ejus.;; Quare nunc Doctoris genuina mens ē. aperienda.

Conclusio II.

Doct. Subt. minimè docuit totum, sivè compositum ēē. tertiam substantiā realit. distinctam à suis partibus simul sumptis, et unitis.

136. Prob. 1º ex Doct. in lib. 1º Phis. q. 9ª dicente:;; Totū ē. suæ partes, itaq. ,, omnes partes simul sumptæ sunt ipsum totū.,, Ergo hæc prob. ē. omninò similis illi, quā statuit Baumeisterus Ontolog. § 147.;; Totū ē. idem cum ,, ,, omnibus partibus simul sumptis, et omnes partes simul sumptæ ss. idem cū ,, ,, toto.,, Quā conclusionē pluribus demonstrat Doctoris probationibus solvitq.e omnia, quæ in contrariū afferri possunt argum.ta

137. Prob. 2º ex eodem Doct. cit. in loco, ubi inter alia hoc modo ratiocinatur:;; Si totū sit aliud à suis partibus simul sumptis, sint A et B. ,, ,, partes alicujus totius, et C illud totū, q.d tu dicis distinctū; tunc quæro, ,, ,, utrum compositū ex A. B. et C. sit unū totū, l. ñ. Si ñ, tunc sequitur, q. ,, ,, Socrates ñ. esset una res, imo nec aliqua res Mundi, q. ē. falsū. Si di- ,, ,, catur, q.d sic, tunc, l. sunt unū totū se ipsis, l. per aliud totū distinctū: ,, ,, si se ipsis, igitur eadem ratione A, et B, erant unū totū sic indistinctū; ,, ,, si per totū distinctū sit illud, D, et quæratur de composito ex illis qu- ,, ,, atuor sicut prius, et fiet processus in infinitum.;; Ergo ex Doct.

¶ Fateor, Doctorem videri aliter sensisse in 3º Sent. dist. 2ª q. 2ª. Sed ibi incidenter tantum loquitur, idq.e unum tantum intendit manifestare contra Aristotelis Commentatorem præter animam, et corpus eorumq.e unionem adesse in homine aliā quamdā entitatem absolutam ex anima, et corpore simul conjunctis dimanantem; secus, ut ipse ait, compositū per se ñ. distingueretur à composito per aggregationem; ne unio substantialis præcelleret alteri cuilibet unioni. Quod ē. contra ipsum Doctorem dicentem, hominis compositum differre essentialit. ab una Summa, seu à puro aggregato. Id circò ipse Doct. qui omnes activas vires, omniaq.e rerum creatarū attributa formarum nomine designat, apellat hanc entitatem veluti formam;; non quidem formam informantē, s. formam, ,, ,, quâ compositū ē. ens quidditativè.,, ut inquit Doct. Cæterū ex hoc minimè distinctio à partibus infertur.

138. Objectiones, quæ in hac materia occurrunt, ipse Doct. proponit, et solvit ita:;; Totum componitur ex partibus divisim sumptis, s. totum ñ. ē. partes ,,

,, divisim sumptę, d. conjunctim sumptę, q. : : : partes divisim sumptę sunt priores, ,,
,, et causę totius, d. conjunctim n.; imò sunt ipsum totum. Et cum dicitur ,,
,, partes sunt minores, conc. q. partes divisim sumptę sunt minores sed ,,
,, conjunctim sumptę sunt idem quod totum. Ad aliq. totum ē. notius, conc. ,,
,, quod totum ē. notius secundū sensū, quā suę partes divisim sumptę, d. suę par- ,,
,, tes conjunctę sumptę n. ęquè notę sicut, et totum. Ad illq. totum per se mo- ,,
,, vetur, conc, et ità sequitur, partes conjunctim sumptę per se moventur, d. ,,
,, divisim sumptę non; imò moventur ad motum totius. Ad aliq. partes n. ,,
,, priores, dico, q. verum ē. de partibus divisim sumptis, quia sunt priores via ,,
,, generationis, d. partes conjunctim sumptę, non &c. ,, Quibus respondere potest
ad quęcumque objiciant, mensq. Doct. declaratur, ita ut nemo nisi coecus
suspicari posit distinctionem ā partibus asseruisse.

§39. Objiciunt aliqui citantes Doct.m 1.o Doct.a asserit: ;; Christus verè, quando fuit
mortuus aliquā entitatem n. habuit quā habuit vivus. ;; Ergo &c.a Resp. neg.
conseq.m Adhuc enim cū ntro aserto stat veritas Doct.s Nā in Christo mor-
tuo n. aderat proximum principiū sentiendi, neq.e corporis vegetatio, neq.e
alię propiedates, quę ex anima simul, et corpore, velluti ab uno tantum
principio in homine prodeunt; quę tamen ultra nudā unionē partiū
aderant in Christo vivo.

§40. Objiciunt 2.o Doct. asserit Verbū Divinū n. asumpsise 1.o et immedia-
tē partes humanitatis Christi, d. illius totā humanitatē in suo ēē.
completā; q. n. sunt idem partes, ac humanitas tota completa, q. dis-
tinguuntur. Resp. neg. utramq.e conseq.m Dictum enī Doct.s intelligendū
ē. Verbū n. asumpsise 1.o et immediatè partes nudas ejusdem humanita-
tis, d. easdem partes ad modum unius cum his omnibus atributis, ac
propietatibus, quę ex illis conjunctis profluunt.

¶ Ex hac vera Doctrinę Scoticę
interpretatione, n. obstat neq.e effatum illud Symboli, q. D. Athanasii
dicitur: ;; Sicut anima rationalis, et caro unus ē. homo, ita Deus, et ho- ,,
,, mo unus ē. Christus. ,, Neq.e alterū S. Dionisii de Coelesti Hierarchia cap.
4.o ;; Mors in nobis n. ē. substantię consumptio, d. unitorū separatio. ,,
Neq.e illud Damasceni: ;; Quod semel Deus asumpsit, nunquā dimisit. ;; Non
obstat dico; quia licet, ut dictū ē. homo n. sit agregatū unitorū, d. com-
plectatur aliquid ex partibus unitis dimanans, hoc tamen n. ē. subs-
tantia ā partibus unitis dimanans, ut quid realit. distinctū; d. tantum
formalit. ex natura rei, quo ipsa natura completur. Vndè verum ad-
huc ē. quod habet Dionisius, nullā substantiā in morte consumi; verum
etiam, animam rationalem, et hominem ēē unum, ut dicitur in Sym-
bolo; ac deniq.e verum etiam, nunquā ā Divino Verbo dimissū fuisse id,
q. ab eo semel fuit asumptū, ut inquit Damascenus. Etenī in homine
juxta explicatā Doct. sententiā, pręter animam, et corpus, nulla alia
adest substantia, quę in separatione animę ā corpore consumi debeat,
aut dimiti ā Verbo potuerit.

§41 Objiciunt. Auctores textū Substantię Patroni dicentes: Doct.m Subt. in 1.o
Phisic. q. 9.a asserere realem identitatem inter totū, et partes simul sump-
tas, coeterū hanc n. ēē. mutuā; hoc ē: totum n. distinguū ā partibus si-
mul sumptis distinguit partes simul sumptas ā toto; q. Resp. neg.
ant. Non enim intelligi potest quomodo partes distinguantur ā
toto, totū q.e ab illis n. distinguatur. Nā si juxta illos partes simul
aceptę sunt causę totius, etiā totum erit efectus ipsarū; q. Si-

totū n. distinguitur ā partibus realit; nec partes ā toto; licet enim divisivè sumptę possint n. ēē totū; n. autem simul sumptę; ut merito inquit Doct. cit. in loco: „ Totū ē. suę partes, ita, q. omnes partes simul„ „sumptę sunt ipsum totum.„ Quis n. videt clarius luce meridiana omnem realem distinctionem inter totum, et suas partes simul sumptas ā Doct. excludi?

Quęstio II.

An possibilia sint entia infinitè entitatis?

142. Sive finitū, sivè infinitum accipi queunt positivè, et negativè. Finitum positivè accipitur vulgò pro re jam finita, seu in suo genere completa, ita ut nihil eorū desit, quę illi debentur, ut sit tale ens; sic ē. quodlibet opus fabrefactum, cui Artifex ultimā manum imponit. Infinitum verò negativè idem ē. ac nondum finitum, seu in suo genere adhuc n. completum, ā. aliquid deest eorū, quę ad illius perfectionē requiruntur; ut ē. idem opus fabrefactum duntaxat inceptum. Hęc autem vulgaris acceptio apud Philosofos n. ē. in usu. Sensu enī Philosofico notio infiniti positiva est, finiti verò negativa. Infinitum itaq. positivè acceptū idem sonat; ac ens carens fine, seu limite; ut ē Deus. Finitū ē contra ē. quod finem, seu limitem habet; finis, seu limes, ē. negatio ulterioris realitatis, aut virtutis, aut perfectionis. Quarè Doct. in 1º Sent. dist. 2ª q. 2ª ens finitum vocat, quod perfectius ēē potest, q. ē. mutabile, et contingens. Infinitum verò ab ipso Doct. describitur l. 3º Phisic. q. 1ª „ Infinitum ē. illud, q. finitum quodlibet excedit sine proportione.„ Adeò ut finiti quamvis maximi ad infinitum, ut asserit Doct. in 4º Sent. dist. 49 q. 11. „ Nulla sit proportio geometrica,„ „ quia finitum quotiescumq. sumptum nunquam reddit infinitum.„ Infinitum semper infinitè distat ā qualibet re finita. Hanc juxta Doctorem in 1º sent. dist. 2ª q. 2ª „ Deus distat in infinitum ā creatura, etiam su„ „prema possibili, si qua daretur.„

143. Infinitū dividitur ab Scholasticis in cathegorematicū, seu infinitum actu, et sincathegorematicū, seu in potentia. Infinitū actu illud apellant, quod secundum ea, quę actu habet, caret fine, nec magis perfici, aut augeri potest. Infinitumq. in potentia, illud, quo actu caret fine, ā. potest perfici, aut augeri magis usque in infinitum. Sic Divina substantia, omnesq. ejus perfectiones sunt actu infinitę.* Contrà: omnes substantię creatę, omnesq. earū proprietates sunt infinitę in potentia, quia cū ut potè finitę careant semper aliquo possibili gradu, magis, ac magis perfici possunt in infinitum. Vg. num. creaturarū possibiliū dicitur infinitiès infinitum, quia sunt possibiles infinitè num. diversę entium species; et in qualibet specie possibilia sunt infinita numero individua. Iste tamen numerus n. ē. infinitus actu, ā. tantum in potentia, quia quocumq. dato creaturarū num. pręter illud numerū adhuc alię et alię in infinitū creaturę sunt possibiles.

144 Infinitū dividitur in Mathematicū, et Methaf. utrumq. ē. infinitū actu; ā. Mathematicū ē. infinitū actu duntaxat

* hocq. vocatur infinitum intensivè, absolutè, simpliciter, a per essentiam.

ideale, Methaficus vero infinitus actu reale. Infinitus Mathematicus seu ideale occasione sumpsit ex infinito in potentia, ex eo, q. Geometrae, et Arithmetici concipiunt lineam, l. numerum, augeri posse in infinitum. Quare infinitum Mathematicum iterum dividunt in infinite magnum, scilicet, q. augeri magis n. posse concipiunt; et infinite parvum, illud nempe, quod minui nequit similiter concipiunt. Quibus suppositis, sit

Conclusio I.

Ex entibus finitis, licet numero infinitis, infinitum fieri nequit.

145. Prob. Ponantur v.g. corpora extensione finita, et num.° infinita; si invicem conjungerentur corpus infinitum n. constituerent, d. idem debet dici de caeteris entibus; q. Prob. seq.ª Facies externa additorum corporum usq.e in infinitum, semper terminata esset; q. Praeterea ut habet Doct. super Phisicam Arist. textu 40. „De ratione corporis ē. quod sit figuratum, scilicet clausum termino, l. tris; q. nullum corpus ē. infinitum." Unde finitum per additione finiti nulla ratione fieri potest infinitum, etiā si finita simul addita essent num.° infinita.

146. Hinc colligitur 1.° Infinitum partibus constare n. posse. Nam istae partes sunt secundum se finitae, l. infinitae. Non finitae, quia ut dicitur in Conclusione ex finitis, licet num.° infinitis, infinitum fieri nequit. Si autē infinitae sunt, jam partes n. sunt partes, d. totum; l. sane totum n. erit majus sua parte, contra vulgatum axioma. Quare optime ait Doct. - Comentat. Methaf. lib 11. „Secundum rei veritatem habere partes repugnat infinito." Quod similiter valet de variis entitatis gradibus.

147. Colligitur 2.° Infinitum nulla ratione augeri posse, nec minui. Non augeri, Nam juxta omnes, infinito nulla perfectio deest. Non minui, nam tantum minui potest, q. ē. divisibile, l. secundum partes, l. secundum variorum entitatis gradus; cum diminutio fieri nequeat, nisi aut separatione entitatis, aut alicujus gradus subtractione. Infinitum vero ē. omnino, et absolute simplex, adeo, ut neq.e partes, neq.e varii entitatis gradus in illo habeantur.

148 Colligitur 3º Infinitum esse omnino immutabile, nihilque in eo contingens esse posse. Cum enim entitas, nec augeri, nec minui ulla ratione potest, neque ullis continetur gradibus; ita ut totum simul necessario semper esse debeat. Quare inquit Doct. in 1º Sent. dist. 10. q. Unic. : „Infinito non repugnat necessitas, imo convenit necessario sibi, quia nullum infinitum potest esse possibile, non necessarium."

149 Colligitur 4º Neque secundum numerum, neque secundum magnitudinem, seu extensionem ullum posset esse infinitum. Nam sive quilibet magnitudo, sive quilibet numerus constat ex partibus, illa continuis, iste diversis unitatibus. Tam quod pugnat extensionem infinite magnam haberi posse, quam numerum infinite magnum, quibus, aut nulla pars, aut unitas addi ulterius possit. Idcirco inquit Doct. in 3º Sent. dist. 13. q. 4ª „Possibile est innumeris procedere in infinitum, nullus tamen ~~aut~~ numerus est actu infinitus."

150. Colligitur 5º Nulla qualitate ita augeri posse, ut evadat infinita. Cum enim omnis qualitas gradibus distinguantur, quorum accessione augetur, et substractione minuitur, si infinita illa evadere posset, id fieret per additionem infinitorum numero graduum. Quod ut dictum est nequit esse, nam ex variis entitatis gradibus et si numero infinitis, infinita entitas nequit exsurgere.

Quaeritur etiam an illa qualitas postquam suponitur infinita aliquo gradu minui possit, vel non? Ad quod dicitur, quod minui potest, eo modo, quo fuit aucta. Sed tunc infinita adhuc maneret, vel infinita evaderet. Infinita manere nequit, quia gradu uno ablato, non haberet omnem possibilem entitatis gradum, sicut requiritur ut esset infinita. Nec etiam finita, quia sicut finitum per additionem finiti non fit infinitum; ita infinitum per substractionem finiti nequit fieri finitum.

151. Colligitur Denique Infinitum consurgere non posse ex finito, et infinito tanquam partibus. Nam repugnat infinito componi ex partibus, sicut habere notionem partis, quia infinitum omnem complectatur entitatem, quae augeri non potest; ratio autem partis postulat, ut augeri possit. Propterea Divinum Verbum Christi humanitati hypostatice unitum, non habet rationem neque formae, neque partis, sed tantum ratio dignificantis, ac elevantis naturam humanam ad esse Divinum per communicationem idiomatum.

Conclusio II.

Plura entia, quae singula sunt infinitae entitatis minime sunt possibilia.

152. Prob. Quod est infinitae entitatis omnem continet entitatem, aut per entitatem idem, aut per eminentiam, sed si plura essent entia infinitae entitatis eorum neutrum

contineret entitatem alterius, neque per identitatem, neque per eminentiam; ergo Min. prob. Non per identitatem, quia si per identitatem alterius per identitatem contineret, nam non plura infinita, sed unum tantum infinitum esset; ergo Non similiter per eminentiam, quia in ente perfectiori perfectio alterius eminenter continetur; ergo illa plura non essent equè perfecta; ergo neque infinita.

Confirmatur ratione adducta à Clar. Genuensi part. 1a Methaf. pone 2a "Si essent plura entia infinitè entitatis necesse est, ut diferant, aut specie, aut numero. Si autem diferunt sunt diversè terminata, si sunt diversè terminata non infinitè entitatis; ergo plura entia infinitè entitatis repugnant; ergo non sunt posibilia."

Corollarium.

153. Ex dictis satis infertur, nullam quantitatem infinitè parvam esse posibilem. Nam ea ratione, quam numerus infinitum augeri potest, quin unquam ad maximum seu definitè magnum deveniatur eadem ipsa quælibet magnitudo, seu quantitas minui potest in infinitum, quin ad minimam, scilicet infinitè parvam, ea unquam reducatur.

Apendix.

In quo nonnulla de ente permanente, et sucesivo brebiter exponuntur.

154 Ens permanens illud apellatur, quod totum simul est. Unde omne ens sive indivisibile, sive divisibile, cujus partes simul existunt, sunt entia permanentia. Ens autem sucesivum dicitur, quod totum nunquam est simul, imo ejus partes sunt in continuo fluxu; ac non nisi una parte intereunte sucedit altera. Doct. Sub. in lib. 3o Phis. q. 6a triplex genus entis permanentis distinguit. 1mum est quod secundum se totum manet perpetuo idem adeò ut nullomodo immutetur; ut Deus. 2m quod manet idem secundum omnem sui substantiam, sed in eo est aliqua

sucesio dispositionis, seu modificationis; ut omnes substantiæ simplices. 3.^m vero quod manet idem secundum aliquas sui partes; secundum alias vero sucesivè variatur: imo, ut ipse ait: „Aliquæ adveniunt, et aliquæ recedunt; et ista „sunt, quodadmodo sucesiva, sicut sunt corpora naturalia, „quæ sunt in continua sucesione„ Similiter ibi quoque asignat duplex genus entis sucesivi; unum, cujus pars quælibet secundum se est permanentis naturæ, atamen nulla manet per tempus notabile ob defectum causæ conservantis; atque in exemplum afert lumen à lucido corpore jugiter émanans, quod continuè mutatur, ac semper alius, et alius est illius radius, et ideò continuè est aliud, et aliud lumen„ Magis propriè ens sucesivum dicit, esse naturam, ut: „Sibi repugnet, quod aliqua pars ejus maneat per tempus: ut multi imaginantur de motu, et tempore, qui ponunt, quod motus est fluxus distinctus à mobili„;

155. Ens permanens per omnium omnium entium vagatur genera quare sufficiat jam dictum. De sucesivo vero, scilicet de motu, et tempore erit sermo. Motus itaque generalisimè consideratus accipi solet pro quacumque status mutatione, atque hoc sensu definitur in Scholis: transitus rei de non esse ad esse, vel contra. Quare præter motum localem, qui solus notione motus vulgò intelligitur alios asignant Scholastici, nempe: motus generationis, aut corruptionis; motus augmenti, vel decrementi; motus alterationis, ac demum motus creationis, et anichilationis. Motum creationis vocant transitum de non esse simpliciter, ad esse simpliciter; contra: Anichilationis transitum de esse ad non esse simpliciter: Res enim, quæ creatur, antequam creetur, nihil omninò est et cum anichilatur, ad nihilum omnino reducitur. Reliquos autem motus dicunt: transitum de non esse ad esse secundum quid, vel ab esse ad non esse secundum quid. Nam res per tales motus non acquirit, vel amittit omne, sed tantum aliquid quatenus non omninò producitur, aut destruitur illius esse.

156. Motus generationis, aut corruptionis communiter vocatur motus ad substantiam. Motus augmenti, aut decrementi motus ad quantitatem; motus alterationis, motus ad qualitatem, motus tandem localis motus ad ubi. Nam dum res generatur, aut corrumpitur mutatur substantialiter. Dum augetur, aut minuitur

variatur quantitas; dum alteratur intenditur, aut remittitur qualitas; dum denique loco movetur, mutatur ubi, seu respectus loci ad locatum. Verum creatio, et anihilatio non nisi impropriissimè motus possunt vocari. Nam motus propriè nequit esse simul totus, neque in solo instanti fieri potest, ut est communis RR. patrum sententia, et pluriès docet Doct. et praesertim in lib. 6.o Phisic. q. 6. ubi inter alia ad rem expressè inquit: ;; Imposibile est motum localem fieri subitò ;; Et in 4.o Sent. dist. 1.a q. 5.a ait: ;; Motus non est in instanti.;; Atque id esse videtur, quod significare voluit Arist. cum motum generatim descripsit: ;; Actum entis in po-,, ,, tentia, quatenus in potentia.;; Hoc est quod cum pluribus constet partibus per sucesionem, una tantum est in actu, reliquae verò in potentia.

157. Dum verò absolutè ponitur motus, communiter intelligitur motus localis, cui subordinantur omnes alii motus, et ad omnes necesariò presuponitur, ut habet Arist. apud Doct. Quodlibet. q. 7.a ;; Omnes alii motus sunt posteriores illo, quod est secundum locum.;; Ideò Deus, qui localiter moveri nequit, nec alteri motui subjicitur. Motus autem localis definitur tam a RR. quam a Doct. lib. 4.o Phis. q. 1.a ;; Motus localis ,, ,, est loci mutatio; ideò per motum localem locatum movetur ,, ,, de uno loco ad alium.;; Sucessionem verò ad motum necesariò requirit pluribi docet idem Doct. Motus autem non est aliquod accidens rei motae superadditum, neque res sucessiva a re mobili distincta; sed est ipsum mobile in diversis locis sucesivè constitutum; ut idem Doct. censet in lib. 3.o Phisic. q. 7.a Sucesionem verò statuit in eo quod corpus motum fiat sucessivè praesens diversis partibus spatii, muteturque continuè relatio loci ad locatum. Quae omnia verè a Doct. fuerunt prolata, atque a pluribus RR. probata. Sed de caeteris ad motum localem pertinentibus in Phisica erit sermo.

158 Nunc de tempore subjicienda quaedam sunt, sed quoniam tempus est quoddam durationis genus, durationis notionem scire oportet. Duratio igitur est continuata rei alicujus existentia. Quae duplex est absoluta, et relativa. Absoluta dicitur cum in re spectatur ipsa continuata existentia, nulla habita relatione ad res alias, aut rerum motum, quo mensurari illa posit. Relativa verò, quae ex quodam respectu ad alias res aliqua ratione mensuratur, licet in se mensurabilis verè non sit. Duratio iterum dividi solet in aeternam, et temporalem. Aeterna, quae aeternitas, et sempiternitas apellatur,

ē duratio rei necesariæ, et omnino immutabilis; quæ soli Deo convenit. temporalis verò ē duratio rei contingentis, et mutabilis; ut ē duratio creaturæ. Deinde temporalis duratio, aut ē rei, quæ habuit initiũ, q. fine ē caritura, et vocatur ævum, seu æviternitas; aut ē rei, quæ habuit initium, et finem habitura ē, et propriè dicitur tempus. Hinc triplex ē duratio, æternitas, ævum, et tempus.

159. Æternitas complectitur durationẽ infinitã, quæ ideò initio, et fine caret. Seu æternitas; ut eam ex Boetio definit Doct. Quodlibet. q. 6.a ;; Est interminabilis vitæ, ,, tota simul, et perfecta posesio.;; Ævũ complectitur durationẽ infinitam à parte post, seu ex nunc deinceps in perpetuum, n. verò à parte ante, cum initium agnoscat. Tempus deniqe durationẽ involvit absolutè infinitã, cum initiũ, et finem habeat.* In ævo, et tempore habetur sucesio, et neutrum ē totum simul; æternitas verò omni caret sucesione, tota simul ē, neqe in ea prius, et posterius existit, q. idem ē eē ac posse eē.
Pars minima temporis vocatur instans, momentũ, et etiã nunc temporis præsertim apud Scholasticos, qui dicere etiã solent nunc ævi ad significandã minimã ævi particulã. Sed cum dicunt nunc æternitatis, toti æternitati æquari, ut innuant æternitatẽ eē indivisibilem indicant.

160 Ea, quæ de multiplici temporis divisione in periodos, Cyclos, Sæcula, lustra Olympiades, Annos, Menses, Dies, et horas tradi solent cum clarè intelligi nequeant nisi prius intellecta Astronomiæ Elementa, in posteriori Phisicæ parte explanabuntur; ubi si Deus voluerit, Chronologiæ principia compendio explanabo. Nunc sufficiat, temporis, ævi, atqe æternitatis exponuise notiones, quibus Ontologiã concludi curavi; ut cordi sit, temporalia, quæ finem habet contemnere; æviternis; nempe: Animæ nunquã interituræ consulere; ac demum æterna diligere magis, et colere, quã curiosius scrutari.

Finis Methafisice 1.æ
seu Ontologiæ.

Amen.

*In Ævo, et tempore distingui potest præsens, præteritum, et futurũ, q. in æternitate neqe præteritũ, neqe futurũ, q. omne ē præsens.

Consectaria Ontologiæ, et aparatum ad Phisicam.

Cum in Scientia Phisica, plura ex principiis Mathematicis sint demonstranda, oportunum, ac necesarium duco ipsæ Phisicæ aliqua elementa Matesis præmitere. Quod à Doct.s mente minime distat, nam in 1o Phisic. q. 1a hæc habet: „Scientia natu-„ralis quantum ad aliquam partem sui, presuponit Mathema-„ticæ via doctrinæ; et probatur de parte Phisicæ, quæ ē de „Halone, de Iride, de volocitate motuum, de motibus Planetarum „de proportione Elementorum, et hujusmodi.„ Quare Mathematicæ elementa in Arithmeticam, et Geometriam dividens cum communi Philosofonum sensu supono, q.d Arithmetica, ē numerorum scientia. Quæ dividitur in Arithmeticam vulgarem, et speciosam, seu Algebram. Vulgaris ē. quæ utitur numeris vulgaribus; ut 1. 2. 3. &a Speciosa vero, seu Algebra ē quæ loco numerorum literis Alphabetici A.B.C.D. &a utitur. Cum autem meus labor præsertim ad ea, quæ frequentiora, et ad partium Philosofiæ intelligentiam utiliora sunt sectanda; cum usus Arithmeticæ tam vulgaris, quam speciosæ, seu Algebræ, in mea tradenda Phisica sit parum, l. nihil frequentior; ejus maximam utilitatem studiosis in re relinquens; tantum aliqua de vulgari, et speciosa tradam. Geometriam q.e (utpote in mea Phisica frequentior explanare conabor) incipiens autem ab Arithmetica vulgari, seu numerorum, hæc pauca brebiter subdo.

1. Numerus est ~~numerorum~~ unitatum multitudo; v.g num.s 6. ē multitudo sex unitatum. Numeri alii dicuntur vulgares, alii Romani. Vulgares primum acceperunt Hispani ab Arabibus, deinde Latini ab Hispaniis, ideo numeri Arabici, et Latini, et Hispani vulgo vocantur, qui sit figurandus: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. His decem notis

omnes scribuntur, qui seorsim sumpti simplices vocantur; si vero uniantur, compositi, vel si 0. solus inveniatur, non dicitur numerus, sed Ciphra, et nullitatis nota.

2. Romani autem septem literis majusculis Alphabeti explicantur; nempe: I.V.X.L.C. D.M. quae nostris respondent. 1. 5. 10. 50. 100. 500. 1000. Aliquando veteres Romani utebantur loco numeri D id est 500. scribebant I.Ɔ, et loco M. seu 1000. scribebant C.I.Ɔ. Numerus integer est, qui ad unitatem comparatur, velut totum ad partem; sic 8 est numerus integer, eo quod componatur octo unitatibus tanquam partibus unum totum scilicet 8 constituentibus. Numerus fractus, qui fractio, et minutia etiam vocatur, est ille, qui ad aliquam unitatem refertur, tanquam pars ad totum; sic sumpto uno pede pro unitate, eoque diviso in 12 partes aequales, si ex his partibus capiantur tres, hae tres duodecimae partes dicentur numerus fractus.

3 Numeri fracti duplici notarum ordine scribi solent interposita linea in hunc modum: $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{11}{13}$ $\frac{35}{1000}$. Superiores notae vocantur numerator, inferiores, denominator. Denominator exprimit numerum partium, in quas concipimus divisum aliquod totum; unde denominator unitatem adequat. Numerator autem indicat, quot sumantur ex his partibus. Sic in 1a fractione supra posita denotatur una secunda pars. In secunda duae tertiae partes. In tertia undecim tertiae decimae partes. Et in 4a triginta quinque millesimae. Fractiones, quae diversum habent denominatorem dicuntur dissimiles. Quae autem eundem habent, vocantur similes.

4 Fracti dicuntur decimales, qui sunt partes decimae, septesimae, millesimae, etc. alicujus totius; sive qui in progressione decupla ab unitate augentur. Fracti sexagesimales

vocantur, quorum denominatores crescunt in ratione sexagecupla; v.g. $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{3600}$ $\frac{1}{216000}$. et apellari etiam solent minutiès phisicales. In sexagesimalibus pars sexagesima totius, dicitur scrupulum, 1.^{m} pars sexagesima hujus vocatur minutum, seu scrupulum, 2.^{m} Atq.^{e} pars sexagesima hujus vocatur minutum, sivè scrupulum 3.^{m} et ità deinceps.

§. Cum numerus integer ex pluribus componatur, in eo potest verificari additio. Additio ē. colectio plurium numerorum in unum summam, qua cognocitur summa ex pluribus numeris resultans; v.g. addendi sunt anni, quibus absolutę fuerunt sex Mundi ętates Ante Christi-Jesu Nativitatem: sic procedes:

A Creatione Mundi ad Diluvium anni	1656.
A Diluvio, ad vocationem Abrahę	0126.
A Vocatione Abrahę, ad exitum Israëlitarum ex Egipto	0430.
Ab exitu Israelitarum ex Egipto, ad ędificationem Templi	0479.
Ab ędificatione Templi, ad finem captivitatis Babylonicę	0477.
A soluta captivitate, ad Christi Adventum	0532
Summa.	4000.

Aliud exemplum similiter utile.

Ilustriores Epochę post Christum natum.

A Christo nato, ad ejus mortem, anni	033.
A Christi morte, ad destructionem Templi	037.
A Templi eversione ad eram Martyrum sub Diocletiano.	214.
Ab Ęra Martyrum, ad I Nicœnum Concilium.	041.
A I Nicœno Concilio, ad Ęgiram seu fugam Mahumetis	297.
Ab Ęgira, ad Imperium Caroli Magni	178.
A Carolo Magno, ad expugnationem Jerusalem à Christianis	297.

Ab expugnata Jerusalem, ad capta Constantinopolim à Mahumete II. . . . . 356.
A capta Constantinopoli, ad conciliu Tridentinu . . . . 092.
A Concilio Tridentino incepto, ad presentē annum 1787. . . . . 242.

Summa. 1787.

Nonnulla Algebræ elementa.

6. Dictum § initiali, q̄ Algebrici loco numerorū, literis Alphabeti quascunque quantitates designant. Sed cū hoc discrimine, q̄ quantitates nobis innotæ exprimi solent tribus ultimis literis Alphabetici z, y, x; nobis autē notæ reliquis prioribus A B. C. D. &a. Quantitates solent designari prima litera rei, quæ significant, ut numerus per n, tempus per t, velocitas per v, massa per m. &a. Etiā Algebrici variis signis utuntur in suis operationibus perficiendis. + ē. signū addictionis; unde si scripsero a + b, indico ā plus b, sive me sumere ā simul cum b. — ē. signū substractionis: unde ā — b, indicat ā minus b. = ē. signum æqualitatis; unde ā = b, exprimit ā ēē æqualē b. > ē. signū majoritatis in quantitate ipsū præcedente; quare a > b, significat ā majorē b; et ex adverso ā < b, significat ā minorē b. ∞ ē. signū infinitatis; unde ut ostendam ā ēē magnitudinis infinitæ, scribam ā = ∞. X ē signū multiplicationis; quare ad denotandū, me multiplicare ā per b, scribam ā X b.

7. Quantitas, quæ exprimitur una sola litera, sumitur pro unitate. Si verò litera habeat aliquē præfixū numerū ad sinistrā, hic numerus coefficiens dicitur, indicans, quoties ea quantitas in calculo sumi debeat.

Quantitates similes, seu homogeneç, hoc ē ejusdem speciei, designantur iisdem alphabeti literis, etiā cū diversis coefficientibus, si opus fuerit, ut a a, l. 2 a, 5a.

8. Quantitas alia ē positiva, seu afirmativa, alteraqe negativa, seu absurda. 1a ē quçcumqe quantitas nihilo major; et hoc præfixo signo distinguitur + a: 2a verò ē quçcumqe quantitas nihilo minor. Et sic designatur ⊣ â. Quantitas nullo afecta signo, sumitur pro positiva. Positiva alteri addita illius auget valorē; negativa autem minuit. Quantitas simplex, incomplexa, l. monomium, dicitur, quç una tantū litera scribitur; l. si pluribus, nullū interponitur signū; ut â, l. a, b, c; Quantitas composita, l. complexa vocatur, quç plures continet literas signo +, l. ⊣, copulatas; ut â + b, ⊣ c. Si tantum sint duç literç, ut â + b, l. â ⊣ b, dicitur binomiū; si tres, ut â + b, + c, l. â ⊣ b, ⊣ c, trinomiū; et generaliter polynomium vocabitur, quçcumqe quantitas pluribus expresa literis signo aliquo conexis. Suficiant dicta. Reliqua verò, videantur â plura desiderantibus in Jacquiero, Floriano, Altieri, aliisqe Authoribus de hac re fusè nimis pertractantibus.

Frequentiora traduntur Geometriç elementa.

9. Geometria ē ea Mathematicç pars, quç de extensis agit. Vnde omnia extensa metienda tam juxta solā longitudinē, quā juxta longitudinē, et latitudinē; similiter qe juxta longitudinē latitudinē, et profunditatē, sunt objectū Geometriç. Sed ea, quç metiuntur tantū secundū longitudinē vocantur lineç; quç secundum

longitudine, simul et latitudine; dicuntur superficies; 317
quæ autem secundum longitudinem, latitudinem, et profunditatem, seu crassitiem, corpus, seu solidum nominatur. Ex fluxu puncti linea generatur. Punctum autem Mathematicum ē. lineæ terminus omni parte destitutus. Ex fluxu lineæ superficies gignitur; et tandem ex fluxu superficiei, solidum, seu corpus. Itaq. extrema lineæ sunt puncta, extrema superficiei sunt lineæ; et extrema solidi, seu corporis sunt superficies.

10 Cum linea in se ipsa rediens, l. plures lineæ invicem conjunctæ spatium undiq. claudunt, hoc spatium figura appellatur, et definitur: Spatium undequaq. terminatum. Si tales spatium sit undequaq. terminatum secundum superficiem, dicitur figura plana. Si vero triplici dimensione donetur, figura solida vocatur. Sed ut recta, clariorq. quo fieri potest servetur methodus, 1° de lineis erit sermo. 2° de figuris planis. 3° de figuris solidis. Et 4° de curvis lineis, quæ Sectiones conicæ vocari solent. Omnia in quatuor Articulis. Incipiens autem â lineis, prius agam de lineis simplicibus, et angulis â lineis rectis constitutis. Posteaq. de linearum nominibus ex mutua earum comparatione provenientibus.

Articulus I.

De lineis.

§. I.

De Lineis simplicibus, et Angulis.

11. Linea potest ēē. recta, curva, et mixta. Recta ē. cujus

partes omnes inter duo puncta extrema clausę, in nullam partem deflectunt; Curva ē. cujus partes in aliquam partem declinant; et mixta, quę ex recta, et curva componitur. Sic in fig.ª 1.ª pars **A.B.** ē. recta; pars **B C.** ē. curva; et tota linea **AB C** ē. mixta. Tam in linea curva, quę in superficie curva ex ea genita, adest pars concava, et convexa. Concava dicitur ea, versus quę linea, aut superficies curva inflectitur. Convexa que ē. pars concavę opposita. Ita in fig.ª dicta in parte **B C** latus convexum ē. superius ubi linea ē. gibosa; concavum autem latus inferius ubi linea ē cava.

Scholion.

12. Ad metiendas longitudines assumunt practici quasdam determinatas lineas rectas, l. longitudines. Usitatiores sunt digitus, passus pertica, milliare. Pes dividitur in 12 partes equales, quę uncię, l. pollices, l. digiti dicuntur; harum quęlibet in alias 12 partes dividitur, quę lineę dicuntur. Passus continet quinque pedes. Pertica decem pedes. Milliare autem 1000 passus, l. 5000 pedes. Cum autem pedis longitudo diversa sit pro variis Nationibus, etiam diversa erit harum mensurarum longitudo, quę à pedibus pendet.

13 Angulus ē. duarum linearum in idem punctum concurrentium mutua quędam inclinatio; sic concursus linearum **AB, CB**, fig.ª 2.ª in puncto **B**, dicitur Angulus. Punctum concursus **B**, vocatur apex, seu vertex Anguli; Lineę autem **AB CB** nuncupantur latera, l. crura Anguli; Circulus autem de **E** indicat distantiam Anguli, quę n. pendet à laterum longitudine, n. ab eorum arbitraria distractione, quę metitur ex arcu inter duo latera clauso. Angulus inter duas quascunque lineas comprehensus ē. Angulus linearis; inter duas superficies, ē. Angulus planus; et denique si inter duo solida, solidus dicitur. Angulus linearis potest ēē. 1. rectilineus, curvilineus, et mixtilineus. Rectilineus ē. spatium inter duas lineas rectas comprehensum; ut **B** in fig.ª 2.ª Curvilineus inter duas curvas; ut **C** fig.ª 3.ª et mixtilineus, inter curvam, et rectam; ut X in eadem fig.ª Eodem modo dividitur Angulus planus, et solidus.

14 Angulus etiā alius ē. rectus, alter acutus, et obtusus alter: Rectus ē qui eformatur ā linea recta ita super aliā cadente, ut in neutrā partem inclinet, et æquales angulos ex utraque parte efficiat; sic in fig.ª 3.ª Angulus ABD ē. rectus, quia indirectū producto latere ā B in C, fit alter Angulus DBC æqualis angulo ABD. Linea super aliā cadens, perpendicularis dicitur. Angulus acutus censetur is, qui ē. minor recto. Et obtusus, qui ē major angulo recto. Sic in dicta fig.ª 3.ª Angulus EBC ē acutus, quia deficit ā recto DBC toto angulo DBE; Angulus vero ABE ē. obtusus, quia superat rectū ABD toto similiter Angulo DBE. Quoniā verò circuli Pherifería dividi soleat in 360 partes æquales, quæ singulæ Gradus appellantur, mensura unius Anguli recti erit Pheriferiæ portio, quæ contineat 90 Gradus; Anguli obtusi excedet recto 90 Gradus, et acuti deficiet 90 Gradibus.

§. II.

De lineis rectis inter se comparatis.

15 Lineæ rectæ ad alias rectas comparatæ, aliæ sunt perpendiculares, et aliæ obliquæ. Perpendicularis ē. quæ super aliā cadens n̄ magis ad unā quā ad aliam partem inclinat. obliqua autem, quæ magis in unā, quā in alterā partem inclinat. Sic in fig.ª 4.ª Recta BD ē. perpendicularis, et BE obliquæ. Etiā aliæ sunt parallelæ, aliæ convergentes, et aliæ divergentes. Parallelæ dicuntur, quæ inter se ubiquè æqualiter distant, ut in fig.ª 5.ª duæ rectæ lineæ AB, et CD vocantur parallelæ; si eadē distantia, quæ adest in A et C jugitèr perseverèt usque in B, et D. Ideo D.r Subt. in 2.º Sent. dist. 2.ª q. 9.ª lineas parallelas vocat: „ Lineas, æquè distantes. Convergentes vocantur si aspiciantur per partem secundū quā magis adse accedunt; et divergentes

si aspiciantur per partem secundum quæ magis recedunt; sic in fig.ª 6.ª si duæ lineæ **AB**, et **CD** aspiciantur, ut procedentes ex **A** in **B** convergentes dicuntur. Si autem ut procedentes à **B** in **A** divergentes appellantur. Istis adhæret linea incidens, quæ est linea secans duas rectas lineas; ut in fig.ª 5.ª et 6.ª linea **GH**.

16 Aliæ sunt lineæ horizontales, aliæque verticales. Horizontalis accipit nomen ab horizonte. Horizon est circularis ille Cœli limes, qui terram lambere videtur; seu est circulus, qui partem Cœli conspicuam ad non conspicuam dirimit. Unde linea, et quælibet hujus lineæ portio, quæ hinc inde conjungit oculum intuentis cum aliquo intuentis puncto; horizontalis dicitur. Apparens, et non vera est; quæ cum lineæ visuali planè congruat, recta esse debet. Horizontalis vera est cujus partes à centro gravium æqualiter distant, et ideò curva esse debet. Sic in fig.ª 7.ª recta **EBD** est horizontalis aparens. Arcus verò **FBC** horizontalis vera. Segmentum **CD** lineæ rectæ **AD**, et segmentum **FE** lineæ rectæ **AF**, est differentia aparentis horizontalis à vera. Denique sicut linea horizontalis vera est ea, cujus partes à terræ centro æqualiter distant; sic verticalis est ea, quæ si in directum deorsum produceretur per terræ centrum transiret; seu est illa recta linea, quæ horizontali veræ insistens, est illi perpendicularis, duos angulos inter se æquales efformans. Sic in fig.ª 8.ª linea **CL** est verticalis, quæ horizontali veræ **ALB** ad perpendiculum insistens, duos angulos mixtilineos **CLA**, **CLB**, undequaque æquales efformat.

Articulus II.

De figuris planis.

17. **Figura** ē extensio quæcumque suis lineis circumscripta; istæ lineæ dici solent latera figuræ. Figura plana saltēm tribus lineis rectis, aut quatuor, aut quinque, aut pluribus constare debet; et quot sint lineæ, seu latera in ambitu figuræ, tot in illa erunt Anguli. Vndè figura cujus ambitus tribus constat lineis vocatur trilatera, triangulum, aut trigonum; quæ quatuor lineis, quadrilatera, quadrangula, seu tetragona; quæ autē pluribus multilatera, ac polygona, hoc ē. multangula. Triangulū ē. figª plana tribus lineis constans; proindeque etiā tribus angulis constans. Ita figª 9. **AC B** ē. triangulū. In quo sicut, et in omni triangulo habentur latera, basis, crura, vertex, et area. Latus dicitur, quælibet ex tribus lineis, ex quibus coalescit ambitus, seu perimeter trianguli. Basis ē. latus illud inferius, supra qđ. triangulū ē. locatum ad horizontem; ut in dicta figª latus **AB**. Crura sū. reliqua duo latera, quæ cū basi triangulū complent; ut **AC**, et **BC**. Vertex seu apex ē. illud summū punctū **C**. Et denique Area ē. totum spatiū, qđ clauditur intra perimetrū, seu ambitū trianguli.

18 Quadrilaterū, seu quadrangulū ē. figª plana quatuor lateribus, et angulis constans; ut figª 10 recta **BC**. Ratione laterum dividitur in parallelogramum, trapeziū, et trapezoidem. Parallelogramū ē. hujus oposita latera sū. invicem parallela ut in dicta figª 10. Trapeziū cujus nulla latera sunt mutuò parallela; ut figª 11. Trapezoides verò, cujus duo latera sū. parallela, reliquaque duo n̄. sunt; ut in figª 12. duo latera **AB**, **CD** sunt parallela, n̄. qđ. alia duo **AC**, **BD**. Ratione angulorū dividitur quadrilaterū in rectangulū, et mixtangulū. Rectangulū vocatur cujus omnes

anguli sunt recti, et æqualis magnitudinis, ut fig.ª 13. Mixtagulũ vero cujus omnes anguli n̄. æquales; s̄. quidã majores, quidam minores; ut in fig.ª 11. et 12. Quadrilaterũ rectangulum potest eē et quadratũ, et oblongũ quadratũ ē q.º n̄. tantũ habet omnes angulos æquales, s̄. etiã omnia latera æqualia ut 13 fig.ª oblongum vero ē q.ᵈ habet omnes angulos æquales, seu rectos, s̄. latera sibi opposita tantum æqualia; ut fig.ª 10. et istud vocatur absolutè rectangulũ.

Articulus III.

De Polygonis; ubi de Circulo, et figuris solidis.

19 Polygonũ idem sonat, ac multangulum. Sed n̄. omnes figuræ multangulæ polygonũ apellantur, s̄. illæ tantũ, quæ pluribus quã quatuor donantur angulis. Unde tot sunt species polygonorum, quot est numerus angulorũ in figura plana ultrà quatuor; qui cum in infinitũ augeri possit, infinitæ quoqᵉ esse possunt species polygonorum. Itaqᵉ vocatur pentagonum, si quinqᵉ angulos, et latera habeat. Hexagonum, si sex; Heptagonum, si septem; Octagonum; si octo; &c.ª ità figura 14 ē. pentagonum, et figura 15 hexagonum.

20. Polygonis accensendus ē. circulus, qui infinitagolum vocari potest, quia infinita latera habere potest; et definitur: est linea curva in se ipsam rediens, cujus sinqula puncta æquè distant ab eodem puncto existente intrà spatium ab ea clausum. Ut fig.ª 16 ubi punctũ A centrum vocatur. Curva in se ipsam rediens, peripheria, l. circumferentia, seu perimetros. Recta ducta ab uno puncto circumferentiæ ad oppositũ, quin

centrum pertranseat, vocatur chorda, l. subtensa; ut **DE**. si vero centrum transeat, ut **CB**, diameter appellatur. Rectæ à centro ad circumferentiam terminatæ, ut **AB**, l. **AC**, radii, l. semidiametri dicuntur, suntque omnes inter se æquales. Totum spatium à circumferentia clausum circulus vocatur. Cujus dimidium dicitur semicirculus; pars autem aliqua major, l. minor semicirculo, arcus nominatur.

Scholion.

21. Circulus quicumque à Geometris dividitur in 360 partes æquales, quas gradus appellant; quilibet gradus in 60 minuta, l. scrupula prima: minutum, l. scrupulum 1.^{m} in 60 minuta, l. scrupula 2.^{a} Secundum in 60 tertia &.^{a} Gradus designatur ziphra 0, minuta 1.^{a} hac nota ′. Minuta 2.^{a} hac ″. Unde ut exprimam arcum graduum v.g. 75.° 49.′ minutorum, 35.″ secundorum; scribam 75.°

¶ Circulorum peripheriæ, sive majores, sive minores eumdem numerum partium habent nempe 360 cum hoc tantum discrimine, q.^{d} in circulis majoribus, gradus sunt majores, in minoribusque minores.

22. Circuli alii sunt concentrici, et alii excentrici. Concentrici sunt, qui idem habent centrum; ut circuli **AB** fig.^{a} 17. Excentrici vero, qui diversum habent centrum; ut **CD** fig.^{a} 18. Et distantia utriusque centri excentricitas vocatur ut linea **EF**.

23. Figura solida e. figura tribus dimensionibus prædita; quæ dividitur communiter præcipue in Prisma, et Pyramidem. Prisma e. fig.^{a} rectilinea habens duas oppositas bases æquales, similes, et parallelas; ut **AGR**, et **EFO**. fig.^{a} 19.

Et dicitur triangulare, sivè trigonum, si opositæ bases sint triangula; quadrangulare vero si oposita plana fuerint quadrata.

24. Pyramis ita dicitur à vocabulo ignis, quia habet formam ignee flammæ, et definitur: solidum corpus comprehensum tribus, l. pluribus planis triangulis terminantibus in unum punctum, q. vertex dicitur; ut fig.a 20. Plana pyramidem constituentia, dicuntur ejus latera. Basis ē. planum, ex quo latera oriuntur; quæ basis potest ēē. variè fig.e nempè: l. triangularis, l. quadrata, l. polygona; undè juxta diversitatē basis dicetur pyramis, l. triangularis, l. quadrata, l. polygona. Axis ē. recta ducta à vertice ad centrū basis. Et altitudo ē. recta demisa perpendiculariter à vertice ad planum basis; et aliquando potest extra basim cadere.

25. Ad figuras solidas pertinent Conus, et Sphera. Conus ē. solidū habens circulum pro basi, et contentū curva superficie, quæ ex una parte in punctū tota desinit; ut fig.a 21. Sphera autem ē. solidū unica superficie curva terminatū, à cujus singulis punctis rectæ ductæ in mediū punctū sunt inter se æquales; ut fig.a 22. in qua punctū **A** dicitur spheræ centrum. Ejus dimidia pars dicitur Emisphærium. Recta **BC** per centrū **A** transiens, et ad spheræ superficiem utrinq. terminata, ē. sphere diameter, et etiā Axis. Hujus extrema puncta **BC**, polis sphere, et cardines dicuntur, quia circa ea immobilia sphera rotatur. Spheræ circulus dicitur, qui ipsā circumambit. Et sphere circulus maximus ē qui formatur, si plano per centrū transeunte sphera secetur: unde circulus maximus ē. qui totā spherā, et omnes alios circulos ma-

rimus ē. qui totam sphæram, et omnes alios circulos maximos bifariam dividit.

Articulus IV.

De Lineis curvis, quæ sectiones conicæ vocantur.

26. Si Conus ita secetur, ut sectionis planũ neqꝫ basi sit parallelũ, neqꝫ per coni apicem transeat, tres oriuntur curvæ inter se omninò diversæ, quæ ideò sectiones conicæ vocantur. Quæ sunt: Elipsis, Parabola, et Hyperbola. Elipsis, seu ovalis ē. superficies plana circunscripta ã linea curva in se ipsã redeunte, quæ dilatatur magis in longitudinẽ, quã in latitudinẽ; ut figª 23. linea **ACBD**. Parabola ē. superficies plana terminata ã linea curva in se ipsã minimè redeunte, cujus latera ab invicèm semper recedunt, quo magis dilatantur; ut linea **NAL** figª 24. Hyperbola ē. plana superficies, quæ terminatur ã curva linea in se ipsã minimè redeunte, et in qua quadrata sunt majora rectangulis; talis ē. curva **AB C.** figª 25.

¶ Inter curvas lineas numerari solet Spiralis scilicet, linea flexuosa in orbem, aut plures orbes in se minimè redeuntes circumvoluta; cujus lineæ exemplum habetur, tum in serpente, qui medio statuto capite circa illud convolvitur; tum in fune nautico in orbes revoluto; tum etiã in fune altero, qui dum aqua è puteo haurritur, per succedentes ibi invicèm orbes revolvitur. Hæc de Geometria, plura alia in Phisicæ decursu apparebunt. Reli qua verò in prænarratis authoribus videantur. Nunc autem ad aliquas partium Phisicæ definitiones transitum facio.

Partium Phisicæ definitiones.

Phisica tam Generalis, quæ particularis, cum sit rerum naturalium scientia, tot continet partes, quot sunt species entium naturalium, ab ipsis entibus nominis ethymologiæ accipientes. Cœterum principales, quæ hisce diebus in usum habentur, sunt sequentes.

27. Dinamica ē. ea Phisicæ pars, quæ de virium, et potentiarum luctamine, et pugna agit; de qua in Phisica Generali num 139.

28. Ballistica, seu Jaculatrix ē. scientia, quæ agit de projectis; de qua in Phisica num.º 200.

29. Mechanica, ē. ea scientia, quæ de Machinis, earumqᵉ. usu agit; de qua in Phisica Generali num.º 214.

30. Statica, ē. quæ de ponderibus agit; de qua in Phisica Generali ibidem.

31. Hydrostatica, seu Hygrostatica, ē. scientia de mutua aquæ liquorumqᵉ. omnium libratione disserens; de qua in Phisica Generali num. 226.

32. Hydraulica, ē. ea Phisicæ pars, quæ de exitu liquorum ex vasis, fluviorum decursu, fluidorum jactu, seu salientibus fontibus agit; de qua in Phisica Generali num. idem.

33. Cosmographia, ē. quæ describit Mundum, præcipuè Spheram Cœlestem, et Terram.

34 Cosmologia ē. scientia de Mundo in genere agens; et appellari solet cosmologia generalis, seu transcendentalis.

35. Astronomomia ē. Astrorū scientia; de qua in Phisica Particulari num.

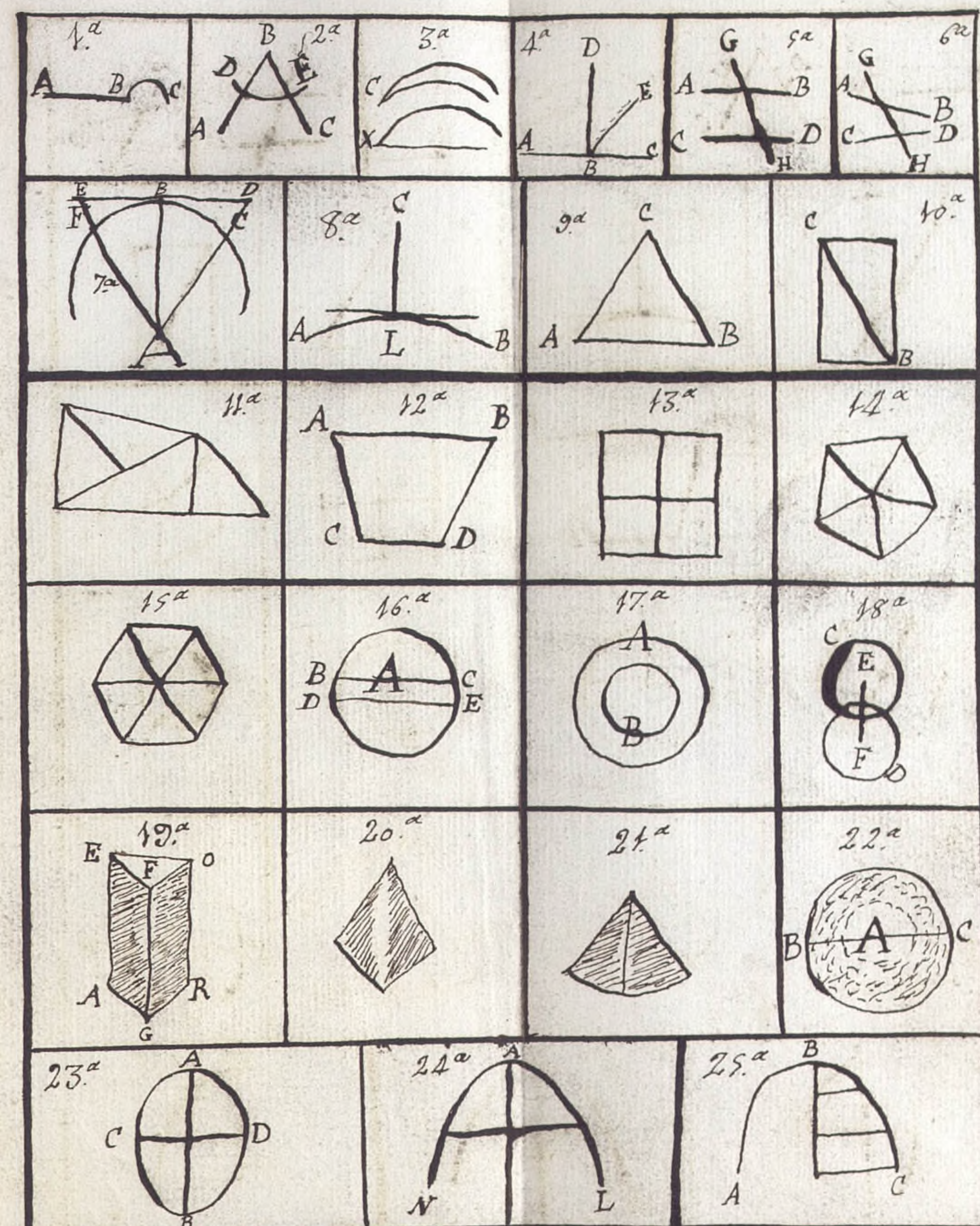
36. Geografia ē. scientia telluris, prout ē. mensurabilis; de qua in Phisica particulari, num.

37. Optica ē. scientia visionis directę; de qua in Phisica particulari. num.

38. Catoptrica, l. specularia, ē. scientia, quę examinat Phenomena visionis reflexę; de qua in Phisica part. numero

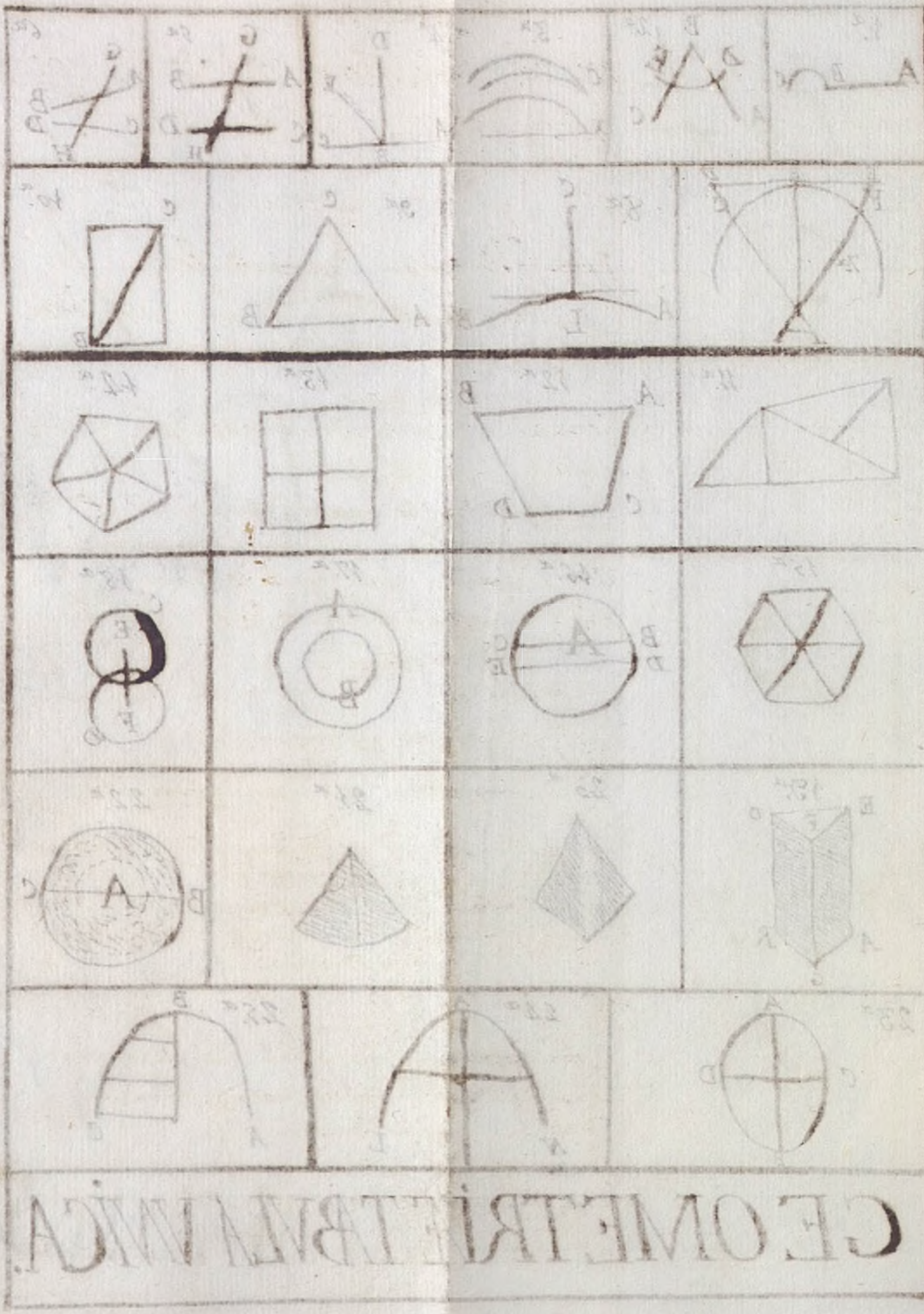
39. Dioptrica ē. scientia visionis refractę; de qua in Phisica particulari num.

40. Chronologia ē scientia temporū, sivè ratio metiendi aut distinguendi tempora. Reliquę verò definitiones ex ipsis terminis clarę sunt.



GEOMETRIÆ TABULA UNICA.

1.º



Index

Rerum, et Quæstionum, quæ in hoc Cursu Philosofico continentur....

Index Tomi primi.

Quæst. II. An judicium sit actus intus, l. voluntatis?
Quæst. III. An pro̅o̅ loga. posit e̅e̅ vera simul, et falsa?
Quæst. IV. Vtrum pro̅o̅ mutari posit de vera in falsam, et vice versa eadem ipsa po̅ne̅ manente?
Disputatio IV. Exercitationes ad III intellectus operationem attinentes.
Quæst. I. Quodnam statuendum sit Vniversale veritatis Criterium?
Quæst. II. An Scientia, Fides, et Opinio in eodem intu̅ de eadem re simul consistere posint?
Logicę pars III. de Methodo IV. intellectus operationę pertractans.
Articulus I. De generali methodo inveniendę veritatis.
Art. II. De methodo excogitandi hypotheses iisq.e utendi.
Art. III. De methodo instituendi experimenta et observationes.
De Methodo Sintetica.
Art. Vnicus: De methodo aliorų doctrinam suscipiendi.
De quibusdam peculiaribus methodis.
Art. I. De methodo Mathematica.
Art. II. et ultimus de Methodo credendi.

Ontologia.
Methafisicę I.e seu Ontologię Proœmium.
Ontologię Liber I. De ente in genere, ejusq.e Affectionibus.
Disputatio I. De primis generalibus cognitionis principiis.
Quæst. I. An ratio Evidentię sit I.m cognitionis principium?
Quæst. II. An principium Contradictionis sit I. cognitionis principių?
Quæst. III. Quid dicendum de sufficientis rationis principio?
Quæst. IV. An dentur aliqua de quibus aliqua ratione dubitari posit?
Disputatio II. De Generalissima entis notione.
Quæst. I. Qualis sit esentia entis ut objectum Methafisicę, seu ontologię?
Quæst. II. A quo habeant res, seu entia esse posibile?

Quest. III. An notio entis sit univoce communis Deo, et Creaturæ, Substantiæ, et Accidenti?

Disputatio III. De simplicibus entis affectionibus.

Quest. Unica: Utrum Unitas Veritas, et Bonitas aliquid reale importent suprà ens, cujus sunt proprietates?

Inquiritur: quænam ex duabus passionibus veri, et boni sit perfectior altera?

Animadversio: De Unitate Entis Pantheistica.

Disputatio IV. De Complexis Entis affectionibus.

Quest. I. An Potentia obedientialis à naturali potentia realiter, et substantialiter differat?

Quest. II. Quænam possit atingere creatura per potentiam obedientialem?

Quest. III. An cum Identitate reali sit compatibilis distinctio Formalis ex natura rei Scotica?

Quest. IV. An essentia, et existentia inter se distinguantur?

Quest. V. An, et quonam sensu creaturarum essentiæ sint necessariæ, et immutabiles?

Ontologiæ Liber II. De Generalibus entis divisionibus.

Disputatio I. De Substantia, et Accidente.

Quest. I. Per quid substantia fiat Individua?

Quest. II. Quid statuendum possit, ut principium indiscernibilium?

Quest. III. Quid importet subsistentia suprà Substantiam Individuam?

Disputatio II. De causa, et effectu.

Quest. I. An idem numero effectus à duabus causis adequatis ejusdem generis, et ordinis provenire possit?

Quest. II. An admiti queat aliqua mutatio in serie causarum?

Quest. III. An si Deus necessitate suæ naturæ operaretur ad extra, res creatæ contingentes essent; ac ullæ essent causæ liberæ in Universo?

Quest. IV. An prædeterminet causa 1.ª efficiens causas creatas ad agendum?

Quest. V. An materia 1.ª sit vera Substantia, et quid sit hæc?

Elementos de Geometria [illegible]

Capitulo I.

De la naturaleza de la Geometria [illegible]

1. [illegible]

2. [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible]

5. [illegible]

6. [illegible]

7. [illegible]

8. [illegible]

9. [illegible]

10. [illegible]

11. [illegible]

12. [illegible]

Elementos de Geometria.

Capitulo I.

De la naturaleza de la Geometria, y de sus principios y terminos.

1. Definiciones. La Geometria es aquella parte de la Matematica, q.e considera de las cosas extensas.

2. Dividese en teorica y practica. La primera considera la extension en abstracto y como separada de los cuerpos. La segunda considera y mide las extensiones como existentes en los cuerpos: á saber, la distancia de las cosas, las alturas de los montes y de las torres y cosas semejantes.

3. Los principios de que usa la Geometria son: Definiciones, Axiomas y postulados. Definicion es la explicacion de alguna cosa ó nombre. Log. n. 66.

4. Axioma es una preposicion, q.e contiene una verdad indubitable y evidente.

5. Postulado es una verdad posible, q.e se supone como cierta y evidente p.a todos: como si se pida echar una linea de un punto á otro.

6. Las preposiciones, cuya verdad demuestran los Geometras, ó se dicen Theoremas, ó Problemas, ó Lemmas.

7. Theorema es una preposicion especulativa, en la qual se nos propone considerar alguna cosa; como por exemplo: q.e los angulos verticalm.te opuestos son iguales.

8. Problema es una proposicion practica, en la qual nos proponemos executar alguna de las operaciones, q.e enseña la Matematica y el modo d hacerlo.

9. Lemma es una proposicion especulativa, q.e debe anteceder p.a demonstrar algun Theorema ó Problema.

10. Los terminos mas frequentes en los Geometras son: Corolario, Scholion é Hypotesis. Corolario es una proposicion, q.e se infiere de otra ya demostrada por legitima consequencia.

11. Scholion es una explicacion ó declaracion mas abundante de alguna proposicion ya demostrada.

12. Hypotesis es una proposicion verdadera, ó q.e se supone como tal, sin nece-

sidad de alguna demostracion; y q.e sirve p.a demostrar alguna otra proposicion, y â esta llamamos Thesis.

Capitulo II.

De las Lineas y Angulos.

13. Definiciones. Los extensos, q.e son el objeto de la Geometria (num. 1) ô tienen su dimension solam.te â lo largo, y esto se llama linea: ô â lo largo y ancho, y se dice superficie; ô â lo largo, ancho y profundo, y se llamará cuerpo ô solido.

14. Luego la Linea es una pura longitud, sin latitud, ni profundidad.

15. La superficie es una longitud y latitud, ô es una extension considerada solamente â lo largo y ancho, y destituida de toda profundidad ô crasitud.

16. Solido ô cuerpo es una extension considerada segun su longitud, latitud y profundidad ô crasicie.

17. La Linea se forma por el movimiento de un punto; de tal modo, q.e el espacio corrido por el punto es lo q.e llamamos linea Matematica. Punto Matematico es el extremo de la linea destituido de toda parte.

18. Linea recta es aquella, cuyas partes incluidas entre dos puntos no mudan de direccion; ô es la linea mas breve, q.e se puede colocar entre dos puntos: como la AB fig. 1.a Curva es aquella cuyas partes contenidas entre dos puntos, se apartan de su primera direccion, como la F I. Linea mixta es la q.e consta de una recta y otra curva; como E P.

19. Scholion. Para medir las longitudes ô distancias usan los Practicos de ciertas y determinadas lineas rectas ô longitudes. Las mas usadas son: Pie, paso, vara, pertica y milla. La pertica consta de dos pasos ô diez pies. El paso consta de cinco pies. La vara de tres pies; la milla de mil pasos ô cinco mil pies: el pie se divide en doze partes iguales y se llaman pulgadas dedos ô polices. Cada pulgada ô dedo se divide en doze iguales partes y estas se llaman lineas. Se advierte, q.e como todas estas medidas dicen relacion al pie y este es diverso en diversas Naciones, de aqui es q.e tambien varian todas estas medidas en diversos Reynos y Provincias.

20. La superficie se compone del movimiento lateral de la linea, de tal suerte, q.e todos los espacios ocupados sucesivamente por la linea en su movimiento lateral, es lo q.e llamamos superficie. La superficie será plana

quando segun todas sus direcciones se le puede acomodar una linea recta; y esta suele decirse absolutamente plano. Superficie curva es aquella, á la q.e no se acomoda la linea recta segun todas sus direcciones; tal es la superficie de la Esfera, del Arco &c.

21. Asi la superficie curva como la linea curva, por aquella parte q.e se elevan q.e es la externa, se dicen convexa; por la parte opuesta, interior, q.e es por donde se estrechan, se llaman concavas.

22. De todas lineas curvas la mas celebre es la circular ô circulo; y es una linea curva, q.e vuelve al mismo donde principió, y q.e saliendo de todos sus puntos lineas rectas al punto A fig. q.e se dice centro son todas iguales. La curva, q.e comprehende el circulo se llama periferia, circumferencia y perimetro. Vna linea recta echada desde un punto de la circumferencia â otro opuesto y q.e no pasa por el centro se llama cuerda ô subtensa: tales son las lineas Pero si la tal linea pasa por el centro del circulo se llamará diametro, como Vna recta echada desde el centro y q.e termine en la circumferencia, como las lineas se dice diametro ô rayo. Todo el espacio comprehendido ~~[illegible]~~ en la circumferencia es lo q.e llamamos circulo; se dice semicirculo el espacio comprehendido entre el diametro y qualesquier lado de la circumferencia, como Qualesquier parte comprehendida entre una subtensa y la parte de circumferencia q.e le corresponde se llama arco: el arco puede ser mayor ô menor, q.e el semicirculo; será mayor quando la parte de la circumferencia, q.e corresponde â la cuerda ô subtensa, es mayor q.e la q.e se divide por el diametro: menor, si la parte de la circumferencia correspondiente â la subtensa, sea menor, q.e la q.e comprehende el semicirculo.

23. Scholion. Todo circulo se divide por los Geometras en trecientas y sesenta partes iguales, â quienes llaman grados, cada grado se divide en sesenta partes iguales, q.e se dicen minutos primeros ô escrupulos primeros: cada minuto primero en sesenta segundos, y cada segundo en sesenta terceros &c. Los grados se señalan con un zero o puesto sobre el numero de los grados: los minutos primeros se señalan con una unidad como v.g.' Los minutos segundos con dos.'' Los terceros con tres.''' Y asi si se nos ofrece escribir 96 grados sesenta minutos primeros, quarenta y cinco segundos y veinte y quatro terceros, se hará asi: 96.º 60.' 45.'' 24.'''

24. Corolario. Qualesquier periferia de circulo mayor ô menor consta de igual numero de partes ô grados, â saber 360; con sola la diferencia, q.e estos grados serán menores en los circulos menores, y mayores en los circulos mayores.

25. Los circulos q.e tienen un mismo centro, como fig. se llaman concentricos: excentricos si tienen diverso centro: como fig. Excentricidad es la distancia, q.e hay de un centro â otro de dos circulos excentricos; tal es la linea

26. Dos lineas comparadas entre si, si conservan siempre una misma distancia por mucho q.e se prolonguen, se llaman paralelas: tales son las lineas fig. Pero quando dos lineas no guardan igual distancia, como se llaman inclinadas. Las lineas inclinadas por la parte q.e menos distan como son convergentes, y divergentes por la parte q.e tienen mayor distancia. Mas si dos lineas inclinadas llegan â concurrir en un punto, forman un angulo.

27. Luego el angulo es la inclinacion mutua de dos lineas, q.e concurren en un mismo punto, como fig. El punto del concurso se llama apex ô vertex del angulo; las lineas se llaman lados ô piernas del angulo; estos lados ô piernas decimos, q.e hacen, contienen, ô comprehenden el angulo.

28. Scholion. Si un angulo se señale con tres letras, la q.e se halla en el punto del concurso ô vertex, debe pronunciarse la segunda; demodo q.e si se nos ofrece hablar del angulo fig. diremos el angulo

29. Angulo rectilineo es el q.e se compone de lineas rectas como Angulo curvilineo, el q.e consta de lineas curvas, como fig.a Angulo mixtilineo, el q.e consta de una recta y una curva, como

30. Scholion. La magnitud del angulo no depende de la longitud de sus lados ô piernas, sino de su distraccion ô abertura, la qual se mide por el arco, q.e se forma entre los dos lados del angulo, tomando por centro al vertex. Esto supuesto, si queremos medir la magnitud del angulo fig. tomaremos por centro el punto y â la distancia q.e nos pareciere formaremos un arco, q.e corte los dos lados del angulo, como y este arco dará la magnitud de dho angulo; demodo q.e el angulo consta de tantos grados y minutos, quantos contiene el arco

31. Corolario. Todos los angulos, q.e â una misma distancia del vertex comprehenden un arco de igual longitud, son iguales.

32. Angulo recto es el q.e se forma con una linea recta, q.e cae sobre otra sin inclinarse â alguna parte de ella, de tal suerte, q.e â uno y otro lado haga angulos iguales; como en la fig.a los angulos formados por la linea q.e cae sobre la linea La linea respecto de la linea se llama perpendicular, ô normal; luego toda linea, q.e cayendo sobre otra, hace con ella angulos rectos; es perpendicular.

33. Angulo agudo es aquel, q.e es menor, q.e el recto; como el angulo fig.a Angulo obtuso se dice, el q.e es mayor, q.e el recto; como el angulo

34. Por quanto en el centro de qualesquier circulo solo pueden formarse quatro angulos rectos; â saber: fig. es evidente, q.e la medida del angulo recto, es la quarta parte del circulo (num.) ô noventa grados (num.). La medida del angulo agudo es menor, q.e la quarta parte del circulo, ô menos de noventa grados, y la medida del angulo obtuso es mayor, q.e la quarta parte del circulo, ô mas de 90.°

35. Corolario I. Todos los angulos, q.e pueden formarse al rededor de un punto por todas las rectas, q.e de el salgan, como son:

y aunque sean infinitas en numero; todos los dhos angulos equivalen â quatro rectos. La razon es, porq.e si desde el punto que sirva de centro, describimos un circulo, q.e comprehenda todas las dhas lineas, y los angulos, que por ellas se forman: este circulo será la medida de todos los angulos: es asi, que en el centro de un circulo solo se pueden formar quatro rectos (n. 34) Luego &.

36. Corolario II. Todas las rectas, aunque sean infinitas en numero, q.e caen sobre otra recta; como sobre la recta y concurren en un punto, como en fig.a q.e caen las rectas todos los angulos formados por estas lineas, equivalen â dos rectos. La razon es, porque si tomando el punto por centro, echamos un circulo, todos los dhos angulos quedarán comprehendidos en el semicirculo es asi, q.e en el semicirculo solo pueden formarse dos rectos, (n. 34). luego &.a

37. Corolario III. Una recta, q.e cae sobre otra, ô haze dos angulos rectos en el punto del contacto, si fuese perpendicular, (n. 32) ô la suma de dos rectos, si es inclinada, ù obliqua. Es la razon, por que si la linea q.e cae sobre fig. es haràn dos angulos iguales comprehendidos en un semicirculo, y por consiguiente, rectos; pero si la linea fuese harà con la linea dos angulos desiguales, que seràn . los q.e por estàr comprehendidos en el semicirculo equivalen â dos rectos. (n. 36).

38. Los angulos, q.e tienen un lado comun, como fig. se llaman adyacentes.

39. Quando una linea recta corta â otra recta y la pasa con la misma direccion, de estas dos lineas en el punto en donde se cortan, se forman quatro angulos, que son de estos, los q.e no son adyacentes, se llaman verticalmente opuestos, ô ad inricèm oppossiti; tales son comparado con ó comparado con

40. Si una linea recta fig. corta dos paralelas forma ocho angulos, de estos los quatro se llaman internos; los restantes externos. Si el angulo se compara con se dirà interno y opuesto, y lo mismo sucede al angulo si lo comparamos con el angulo respecto de se llaman alternos; del mismo modo q.e respecto de el angulo junto con se dicen internos â una misma parte; asi como el angulo

Axiomas.

41. I.º El todo es mayor q.e cada una de sus partes, pero es igual â todas sus partes juntas.

II. Las cantidades ô magnitudes, q.e son iguales â otra tercera cantidad ô magnitud, son iguales entre si.

III. Las cantidades q.e son duplas, triplas, &c.a ô mitades, ô terceras partes &c.a de una misma cantidad, ô magnitud, son iguales entre si.

IV. Si â iguales cantidades se añaden iguales partes, los todos ô sumas seràn iguales.

V. Si de iguales cantidades se quitan iguales partes, los residuos son iguales.

VI. Si de desiguales cantidades se quitan iguales partes, los residuos seràn desiguales.

VII. Si â desiguales cantidades se añaden partes iguales, los todos ô las sumas serán desiguales.

VIII. Si â desiguales cantidades se les quitan ô añaden partes iguales, los residuos ô los todos serán desiguales.

Theorema I.

Los Angulos opuestos verticalmente, ô adinvicem oppositi, son iguales entre si.

42. Demostracion. Los angulos A. C. fig.ª 11ª hacen la suma de dos rectos (n. 37.) tambien los angulos A D por la misma razon hacen la suma de dos rectos, luego quitadas de estas dos iguales cantidades el angulo A, q.e es comun para los dos, quedará el angulo D igual al angulo C por el axioma V. (n. 41).

Theorema II.

Si una linea recta corta dos paralelas hace el angulo interno igual al externo de la misma parte.

43. Demostracion. Cortando la recta EF fig. 12 â las dos paralelas AB, CD con la misma obliguidad ô inclinacion en los dos puntos H L, es evidente, q.e el angulo L interno es igual â su externo y opuesto de la misma parte H; pues la magnitud del angulo depende de la distraccion ô inclinacion de las lineas q.e le forman (num. 30).

44. Y si el angulo L fuese mayor, q.e el externo H, seria necesario, que la linea DC se separase mas de la recta AB por los extremos BD y se aproximase por los puntos A C, en cuyo caso no serian paralelas las rectas AB, CD, y si el angulo L fuese menor, q.e el angulo H, tampoco serian paralelas, pues seria necesario, q.e se aproximasen por los puntos BD y se separasen por los extremos AC. Esto se hará mas sensible si hacemos moverse â la recta AB con una direccion siempre paralela hacia la linea CD, hasta q.e el punto H se halle en el punto L, en este caso se confundirán las dos lineas en una sola y el angulo q.e se formaba en H le encontraremos en el mismo L.

45. Corolario. Quando una linea recta corta dos paralelas los angulos al-

ternos L G fig. 12 son iguales entre si; por q.^e el angulo L es igual al externo y opuesto H; tambien el angulo G es igual al angulo H por opuestos por el vertexo (num. 42): luego los d.^os angulos L, G son iguales al angulo H, luego serán iguales entre si por el axioma II. num. 41.

Theorema III.

Quando una linea recta corta dos paralelas, los angulos internos de una misma parte hacen la suma de dos rectos.

46. Demostracion. Los angulos G Y hacen la suma de dos rectos (n. 37) el angulo L es igual al angulo G por alterno (n. 45): luego puesto el angulo L en lugar del angulo G, tambien L Y haran la suma de dos rectos por el axioma IV. num. 41.

47. Corolario. Quando una linea recta, q.^e corta â otras dos rectas, hace un angulo interno igual al externo y opuesto de una misma parte, las dos rectas cortadas son necesariamente paralelas (num. 43 y 44). Serán tambien paralelas, si los angulos alternos son iguales (n. 45): y tambien si los dos angulos internos de una misma parte hacen la suma de dos rectos, (n. 46).

Capitulo III.

De las figuras, y en primer lugar de los triangulos.

48. Definiciones. Por nombre de figura entendemos una extension terminada, ô rodeada por lineas, las q.^e llamamos lado de la figura.

49. La figura, q.^e tiene solo una superficie se llama plana, ô absolutam.^te plano; pero si tiene muchas superficies se llama solido, ô cuerpo.

50. Si las lineas q.^e terminan, ô rodean la figura fueren rectas, la figura será rectilinea; mas si fueren curvas se dirá curvilinea, y si en las lineas, q.^e terminan la figura hay rectas y curvas, se dirá mixtilinea.

51. Todas las lineas, q.^e terminan la figura juntam.^te tomadas, se llaman el circuito, la circumferencia, la periferia, ô el perimetro de la figura.

52 La figura rectilinea es equilatera, quando tiene todos sus lados iguales; y equiangula, quando todos sus angulos son iguales.

53. Dos figuras comparadas una con otra son equiangulas, quando todos los angulos de una figura son iguales â los angulos de la otra; y son equilateras, quando todos los lados de la una sean iguales â los lados de la otra.

54. Triangulo plano es ~~la distancia q.e media~~ es una figura terminada por tres lineas, que comprehenden tres angulos, como E C D fig. 13; de estas tres lineas, qualesquiera de ellas se dice base del triangulo, y las dos restantes se llaman lados. El angulo opuesto â la base, como en la fig. 13 el angulo C, siendo la base E D se llama angulo vertical.

55. La altura del triangulo es la distancia q.e media entre su base D P fig. 16, y otra recta paralela â la base, q.e pase por el angulo vertical; como la linea B C, pero se debe advertir, q.e la distancia entre las dos paralelas se mide por una linea perpendicular â la base del triangulo; como es la linea A V.

56. Los lados de un triangulo, q.e con su concurso forman un angulo, como son los lados B A, C A fig. 14, se dice, q.e contienen el angulo, lo comprehenden, ô lo forman. El tercer lado se dice opuesto â dho angulo, como es el lado B C.

57. En el triangulo, q.e tiene un angulo recto (n. 32), el lado, q.e se opone al angulo recto se llama hipotenusa, como en la fig. 13 el angulo E es recto, y el lado C D, q.e se le opone es la hipotenusa; los otros dos lados C E, E D, se llaman catetos, ô perpendiculos.

58. El triangulo, q.e tiene todos los lados iguales, como B A C fig. 14, se llama equilatero, el q.e tiene todos los angulos desiguales se llama escaleno, como B A C fig. 15, el q.e tiene solo dos lados iguales, como D A P fig. 16 se llama isoscele.

59. El triangulo q.e tiene un angulo recto, como C E D fig. 13, se llama rectangulo; el q.e tiene los tres angulos agudos, como B A C fig. 14, se llama acutangulo; y el q.e tiene un angulo obtuso, como A B C fig. 15, se llama obtusangulo.

Theorema I.

Los tres angulos de qualesquier angulo rectilineo equivalen, ô hacen la suma de dos rectos.

60. Demostracion. En el triangulo rectilineo B A C fig. 17, por el angulo vertical echese la recta D E, q.e sea paralela â la base B C; es evidente, que los tres angulos z o x equivalen â dos rectos (num. 36); es asi q.e el angulo x es igual al alterno C (num. 45); y por la misma razon el angulo z igual al alterno B, luego los tres angulos B o C son equivalentes â los tres z o x, y por consiguiente los tres angulos del triangulo rectilineo hacen la suma de dos rectos.

61. Corolario I. En qualesquier triangulo rectilineo, si se prolonga alguno de sus lados, como B C acia S fig.a 17, hace un angulo externo P igual â los dos internos B o: es la razon, porq.e los dos angulos P C hacen la suma de

dos rectos (n. 37), tambien los tres internos del triangulo BoC hacen la suma de dos rectos (n. 60); luego si de estas dos cantidades iguales, quitada la parte comun C, quedan iguales los residuos P, y Bo.

62 Corolario II. Ningun triangulo rectilineo puede tener mas, que un angulo recto, por que si tubiere dos, ya estos juntos con el tercero tendria el valor de mas de dos rectos. Por la misma razon, ningun triangulo puede tener mas, qe un angulo obtuso.

63. Corolario III. Si dos triangulos tienen dos angulos iguales, serán iguales en quanto al tercero; y por tanto dichos triangulos serán equiangulos.

Theorema II.

En todo triangulo rectilineo el mayor angulo será, el qe se opone al mayor lado; y el mayor lado, el qe se opone al mayor angulo.

64. Demuestrase la 1a parte. Si por la suposicion, el mayor lado del triangulo ABC, fig. 15, es AC, es evidente, qe los lados AB, BC tendrán mayor distraccion, ô abertura, qe otros qualesquiera lados, qe formen otro angulo distinto del angulo B; es asi qe la magnitud del angulo depende de la distraccion, ô abertura de sus lados, luego el angulo B opuesto al mayor lado AC será mayor, qe algun otro, de los qe forma el triangulo ABC.

65. Se demuestra la 2a parte. Pues el mayor angulo de un triangulo debe formarse por los lados qe tienen mayor distraccion, ô abertura (n. 30): luego el lado opuesto al mayor angulo, qe ha de cerrar la abertura de dho angulo, será el mayor de todos los lados; y así en la figura 15 por ser el angulo B el mayor de el triangulo, el lado AC, qe se le opone será el mayor de todos.

66. Corolario I. En todo triangulo, los angulos opuestos â iguales lados son iguales luego en el triangulo equilatero (n. 58) serán iguales todos los angulos, y por consiguiente todo triangulo equilatero es equiangulo, y todo triangulo equiangulo es equilatero.

67. Corolario II. En todo triangulo isosceles DAP fig. 16, los dos angulos D, P, qe se forman en la base son iguales; pues son opuestos â iguales lados DA, PA, (n. 58).

68. Corolario III. En todo triangulo obtusangulo (n. 59), el mayor lado es el qe se opone al angulo obtuso; y en el triangulo rectangulo (n. 59)

el mayor lado es la hipotenusa.

69. Corolario IV. Desde el punto A fig. 9.ª no se puede echar linea recta, sobre la recta BC, q.e no sea mas larga, q.e la perpendicular AD; pues qualquier otra, como AC, será hipotenusa de un triangulo rectangulo ADC, cuyo angulo recto está en el punto D, y por consiguiente AC opuesta al angulo recto, será mayor, q.e la perpendicular AD.

Theorema III.

En todo triangulo dos lados juntos son mayores q.e el tercero.

70. Demostracion. Los lados AB, BC fig. 15, pueden considerarse como una linea curva comprehendida entre los mismos puntos, q.e la recta AC; es así, q. la linea recta es la mas corta, de las q.e pueden echarse de un punto á otro (n. 18): luego la recta AC es mas corta, q.e la curva ABC; y de consiguiente los dos lados AB, BC son mayores, q.e el tercero AC.

Theorema IV.

Si dos lados de un triangulo son iguales á otros dos lados de otro triangulo; y el angulo comprehendido en ellos es igual en los dos triangulos, igualarán tambien en las bases y en todos los triangulos.

71. Demostracion. Si suponemos, q.e los dos lados AB, AC, fig.ª 18, son iguales á los dos lados ab, ac, y el angulo A comprehendido en el triangulo ABC, es igual al angulo a del triangulo abc, puesto el punto A sobre a, el punto B vendrá sobre el punto b, y el punto C sobre c; luego la base bc debe ser igual á la base BC; el angulo B igual á b, y el angulo C igual á c, y los espacios comprehendidos en los dos triangulos en todo iguales.

Theorema V.

Si dos triangulos fueren equiangulos y tengan un lado igual, igualarán en todo.

72. Demostracion. Si los dos triangulos ABC, abc son equiangulos, y el lado BC, igual á bc; puesto BC sobre bc; es evidente, q. tambien el punto A caerá sobre a, y en este caso, son los dos triangulos en todo iguales: pues si A cayese sobre algun punto distinto, de a v.g. sobre H, ya el an-

gulo c seria mayor, q.e el angulo C, contra el hipotesi (n.30); y el angulo H menor q.e el angulo A; luego siendo iguales todos los angulos de los dos triangulos, y teniendo un lado igual, son en todo perfectamente iguales.

Theorema VI.

Los triangulos q.e tienen todos los lados iguales, esto es, q.e todos los lados de uno son iguales â todos los lados de otro, son iguales en todo.

73. Demostracion. Si por el hipotesi todos los lados del triangulo BAC fig. 18 son iguales â todos los lados del triangulo b a c, puesto el uno sobre el otro caerán todos los lados del uno sobre los lados del otro; y tambien los angulos sobre los angulos, y asi serán en todo iguales.

74. Corolario. Quando dos triangulos tienen todos los lados de uno, iguales â los lados del otro, ô q.e son comparados entre equilateros, son tambien equiangulos (n.53).

Theorema VII.

Si dos triangulos tengan los lados desiguales y sean equiangulos; puesto el uno sobre el otro, las dos bases serán paralelas.

75. Demostracion. Puesto el angulo A fig. 18 sobre a; el punto B caerá sobre b, y el punto C sobre c: luego si por el hipotesi el angulo C es igual al angulo d, y el angulo B igual â e, la base BC será paralela â la base e d, pues el angulo e es un angulo interno y el angulo b externo; y quando una recta corta dos rectas haciendo angulos interno y externo iguales, las dos rectas cortadas son paralelas (n.47).

Problema I.

Dada una recta, echar sobre ella una perpendicular.

76. Resolucion. La recta dada sea CD fig. 19. tomese por centro sus extremos C, D, y echense â una misma distancia los arcos GH, LN, EF, IK, y desde los puntos de las secciones echese la recta AO, y sino la recta BO, y qualesquiera de ellas es perpendicular. Es la razon, porq.e siendo las rectas AD, AC, BD, BC todas iguales como rayos de iguales circulos (n.22) tienen los puntos AB una misma distancia de los puntos CD, y siendo asi la recta AB, no se inclina mas al punto D, que al

punto C; por consiguiente es perpendicular (n. 32). Por q.e si la recta AO se inclinase mas â algun lado de la recta CD, v.g. al punto C, de modo q.e pasase por el punto S, ya prolongada no llegaria al punto B, sino al punto T, en cuyo caso no serian iguales las distancias BD, BC, como se supone.

77. Corolario I. Quando una recta AB tiene dos puntos AB, q.e disten igualm.te de otros dos puntos de otra recta CD; qualquier punto de la recta AB tiene igual distancia de los puntos CD; pues si la recta AB en qualquiera de sus puntos, v.g. V.O distase mas de D, q.e de C, suponiendo iguales las distancias AD, AC, ya seguiria la direccion AST, se inclinaria mas acia D, q.e acia C, y por consiguiente no seria perpendicular, ni llegaria al punto B, p.a q.e sean tambien iguales las distancias BD, BC, como se supone.

78. Corolario II. Si la perpendicular se hubiese de levantar en el extremo de una recta, v.g. en el punto O, dada la recta CO, esta misma recta dada prolonguese acia D, de modo, q.e OD sea igual â CO, tomense por centros los puntos CD, y echense los arcos GH, EF, y desde el punto A donde se cortan, echese la recta AO, y esta será la perpendicular; pues tiene dos puntos AO, q.e distan igualm.te de los puntos C, D, y por tanto, todos los puntos de la recta AO distan igualmente de los puntos C, D, (n. 77): y por consiguiente es perpendicular.

79. Corolario III. Si la recta sobre, cuyo extremo se ha de levantar la perpendicular, no pudiese prolongarse, como si se ha de levantar sobre el punto D de la recta CD; levantese la perpendicular AO en medio de la linea dada, y echese â la perpendicular AO, la paralela HD, sobre el punto D, y esta será tambien perpendicular: pues siendo paralelas HD, AO, el angulo HDO interno, es igual al angulo externo y opuesto AOC (n. 44); y siendo el segundo recto por ser la linea AO perpendicular (n. 32), tambien será recto el angulo HDO, y la linea HD perpendicular â CD.

Problema II.

Dada una recta dividirla en dos iguales partes.

80. Resolucion. La recta dada sea CD fig. 19, tomense por centro sus extremos, y echense los arcos GH, EF, CB, DB, q.e tengan por rayo la distancia CD, desde los puntos AB donde se cortan los arcos, echese la recta AB, y esta divide â la dada en dos iguales partes CO, OD. Es la razon, porq.e siendo AO perpendicular â CD (n. 76), todos los puntos de la recta AB di-

tan igualmente de los extremos de la dada CD y por consiguiente las distancias DO, CO son iguales: luego la recta dada CD, queda dividida en dos iguales partes.

81. Esto mismo se demuestra de otro modo. Siendo las rectas CA, AD, CD iguales, por ser rayos de iguales circulos (n. 22) el triangulo CAD es equilatero y de consiguiente, equiangulo (n. 66), y por tanto el angulo ADC igual al angulo ACD, dividase el triangulo ACD por la perpendicular AO (n. 76) y serán rectos los angulos AOD, AOC (n. 32); luego los dos triangulos AOD, AOC son tambien equiangulos (n. 63), y teniendo un lado comun AO serán tambien iguales en las bases CO, DO, (n. 72): luego la recta CD quedó dividida en dos iguales partes en el punto O.

82 Corolario. Está patente el modo de dividir un angulo rectilineo en dos iguales partes. El angulo dado sea CAB fig. 20, tomese por centro el punto A, y á distancia arbitraria echese un arco DE; unanse los puntos de las secciones por la recta DE, en medio de esta sobre el punto I levantese la perpendicular AI (n. 76), y esta q.e terminará en el vertexo del angulo, lo dexa dividido en dos iguales partes. Pues de esta operacion resultan dos triangulos, q.e todos los lados del uno, son iguales á los lados del otro: el lado AI comun p.a los dos, el lado AD igual al lado AB, como rayos de un mismo circulo (n. 22), el lado IE igual al lado ID por estar la recta DE dividida en dos iguales partes en el punto I; y teniendo dhos triangulos equilateros un angulo igual en el punto I p.a los dos, son iguales en todo (n. 71. 73): y por consiguiente iguales los angulos IAB, IAC. luego el angulo dado, quedó dividido en dos iguales partes.

Problema III.

Dada una recta y señalado en ella un punto, echar desde el otra recta, q.e con la dada haga un angulo igual á un angulo dado.

83. Resolucion. Sea la recta DE fig. 21, el punto señalado L, y el angulo dado ABC, tomese por centro el punto B, y á distancia arbitraria echese el arco IO; con la misma distancia, echese el arco GH; juntense los puntos IO por la recta IO con la misma distancia puesto el centro en H, echese el arco PS, y desde el punto de la seccion de los dos arcos PS, GH,

echese la recta GH, la q.e por su construccion es igual â la recta IO, el lado BI igual al lado LG; y el lado BO igual al lado BH; luego los dos triangulos IBO, GLH son equilateros, y por consiguiente en todo iguales (n. 73): luego el angulo GLH es igual al angulo dado ABC.

Problema IV.

Dado un punto, echár por una recta, que sea paralela â otra recta dada.

84. Resolucion. El punto dado sea V, la recta dada AB fig. 22; desde el punto V echese la recta VR, q.e concurra con la recta dada AB, en qualesquiera de sus puntos: en el punto V formese un angulo RVC, q.e sea igual â VRB, y la linea CV, q.e con RV forma el angulo RVC, es paralela â la dada AB; por ser los angulos BRV, CVR alternos é iguales (n. 45).

85. Corolario. De lo dho está patente el modo de formar un angulo desde un punto fuera de una linea con otra linea dada. El punto dado fuera de la linea sea V, la recta dada AB, echese â esta una paralela CD, q.e pase por el punto V (n. 84); en este punto hagase un angulo CVR igual al dado SOT, y prolonguese la linea VR hasta q.e concurra con la paralela AB, y con ella formará el angulo BRV igual al alterno ROC (n. 45). y por consiguiente igual al angulo dado SOT, por el axioma II num. 41.

Problema V.

Sobre una recta dada hacer un triangulo equilatero.

86. Resolucion. La recta dada sea AC fig. 23, desde sus extremos tomados por centro echense los dos arcos EH, DF, con la distancia AC; dhos arcos se cortarán en el punto B, desde este punto echense las rectas BA, BC, y quedará hecho el triangulo equilatero, por ser todos sus lados rayos de iguales circulos (n. 22).

Problema VI.

Dadas tres lineas de longitud determinada formar de ellas un triangulo.

87. Resolucion. Las rectas dadas sean AB, CD, EF, fig. 24; sobre qualesquiera de ellas v.g. sobre EF, tomando por centro el punto F, echese el arco VH, con la distancia de la segunda linea CD; tomese tambien por centro el punto E y echese el arco ST con la distancia de la tercera linea AB; desde el punto

de la seccion I echense las rectas IF, IE, y quedará hecho el triangulo, cuyos lados son iguales â las tres lineas dadas.

88. Scholion. Siendo en todo triangulo dos lados mayores, q.e el tercero (n. 70): es evidente, q.e de las tres lineas dadas p.a formar el triangulo, dos de ellas juntas deben ser mayores, q.e la tercera.

Problema VII.

Sobre una recta dada, hacer un triangulo equiangulo â otro triangulo dado.

89. La recta dada sea a c fig. 25, y el triangulo dado ABC, en el punto a hagase un angulo igual al angulo A (n. 83), en el punto c hagase otro angulo igual â C, y prolongadas las lineas, q.e salen de los puntos a c, concurrirán en el punto b, donde formarán necesariamente un angulo igual al angulo B; pues quando dos triangulos tienen dos angulos iguales, igualan tambien en quanto al tercero (n. 63).

Capitulo IV.

De las figuras q.e tienen mas de tres lados.

90. Definiciones. Quadrilatero, ô quadrangulo es una figura terminada por quatro lados, q.e comprehenden quatro angulos; como es la fig.a 26.

91. Si el quadrilatero tiene los lados opuestos paralelos; como son EB paralela â CD, y BC paralela â ED, el quadrilatero se llama paralelogramo; pero si no tiene todos los lados opuestos paralelos, como es la fig. 27, el quadrilatero se llamará trapezio. El paralelogramo suele señalarse por los Geometras con dos letras colocadas en dos angulos opuestos; y asi p.a señalar el paralelogramo de la figura 26, se dice el paralelogramo BD.

92. La altura del paralelogramo es la distancia, que media entre dos de sus lados opuestos, la qual se conoce por una perpendicular, q.e se levanta desde uno de ~~los~~ lados â su opuesto y paralelo; y asi la altura del paralelogramo BD fig. 26 será la perpendicular BC.

93. La base del paralelogramo es una de los lados entre los quales se comprehende la altura; y asi si CB es la altura del paralelogramo BD fig. 26, CD se llamará su base.

94. El paralelogramo que tiene un angulo recto necesariamente son rectos los demas angulos por la naturaleza de las paralelas (n. 26); y este paralelogramo se llama rectangulo, como BD fig. 26.

95. El paralelogramo rectangulo, q.e tiene los quatro lados iguales y los quatro angulos rectos, se llama quadrado, como BD fig. 26.

96. Scholion. Todo quadrado es rectangulo, y todo rectangulo paralelogramo, aunque no todo paralelogramo es rectangulo, ni todo rectangulo es quadrado.

97. El paralelogramo, que tiene todos los lados iguales, pero sus angulos no son rectos, se llama rombo, como CD fig. 28.

98. El paralelogramo q.e tiene los lados desiguales y q.e sus angulos no son rectos, como LH fig. 29, se llama romboide.

99. Una recta echada desde un angulo de un paralelogramo al angulo opuesto, como ST fig. 30, se llama diagonal, ô diametro del paralelogramo.

100. La figura que tiene mas de quatro lados, aunque sean infinitos, se llama poligono. Si el poligono tiene cinco lados se llamarâ pentagono; si tiene seis, hexagono; si siete heptagono; &c.a

101. La figura se dice regular, quando tiene todos sus angulos iguales, y tambien son iguales todos sus lados: tales son el triangulo equilatero, el quadrado y qualquier poligono cuyos lados son todos iguales, y tambien los angulos. Pero si la figura tiene los angulos ô lados desiguales, se dirâ irregular.

Theorema I.

La diagonal de qualquier paralelogramo lo divide en dos partes iguales; y en tal caso, asi los lados opuestos, como los angulos opuestos son iguales entre si.

102. Demostracion. Echada la diagonal ST fig. 30, divide al paralelogramo YZ en los dos triangulos STZ, TSY, es asi q.e estos dos triangulos son iguales en todo, pues el angulo b es igual â su alterno a (n. 45), el lado SZ igual â TY, el lado ST comun para los dos triangulos; y asi tenemos dos triangulos, que tienen iguales los angulos a, b, comprehendidos en lados iguales; luego igualarân tambien en las bases TZ, YS, y en todos los triangulos (n. 71); luego son en todo iguales, y asi quedó dividido el paralelogramo en dos iguales partes, por la diagonal. Tambien el angulo Y es igual al angulo Z, el angulo c igual al angulo d; el lado YS igual â TZ, y el lado SZ igual al lado TY; luego en d.ho paralelogramo todos los angulos opuestos son iguales y tambien los lados opuestos.

103. Corolario I. Si dos lineas paralelas é iguales VS, TZ fig. 30, se unan por sus extremos con otras dos rectas SZ, VT, estas serán tambien iguales y paralelas; y con las dos primeras harán un paralelogramo VZ.

104. Corolario II. Si por qualquier punto de la diagonal del paralelogramo AB fig. 31, se echan dos rectas ST, XZ paralelas á los lados del paralelogramo AD, XZ y q.e las dos se corten en el punto I de la diagonal CD, los dos paralelogramos negros SX, ZT q.e se forman y se llaman complementos, son iguales entre si; porque si de los dos triangulos CDA, DCB iguales (n. 102) se quitan las dos porciones SIC, ICZ iguales (n. 102), quedan dos trapezios iguales DIZB, ADIS por el axioma V n. 41: y si de estos dos trapecios iguales se quitan los dos triangulos XDI, TID (n. 102), quedarán iguales los paralelogramos TZ, SX, por el axioma V n. 41.

Theorema II.

Los paralelogramos, q.e tienen una misma base y una misma altura, ó q.e están construidos entre unas mismas paralelas, son iguales entre si.

105. Demostracion. Los dos paralelogramos ABCD, BSVD tienen una misma base BD, y una misma altura DC; por estar construidos entre unas mismas paralelas BS, AV, son perfectamente iguales; pues los dos triangulos BCA, DCV son iguales entre si, porque el angulo C es igual al angulo A, siendo los dos rectos, el lado AB igual al lado CD; el lado AS igual al lado CV; pues estos dos ultimos lados se componen de las dos porciones iguales AC, SV y la parte comun CS; y asi, el lado AS es igual al lado CV por el axioma IV num. 41: luego teniendo estos dos triangulos un angulo igual comprehendido por lados iguales, son en todo iguales (n. 72): quitese de estos dos triangulos la porcion SOC comun para los dos, y quedarán iguales los trapecios COBA, SODV, por el axioma V n. 41: á estos dos iguales trapecios añadase la parte comun BOD, y resultarán los dos paralelogramos AD, BV en todo iguales por el axioma IV n. 41: luego los paralelogramos de una misma base y de una misma altura, son iguales.

Theorema III.

Los triangulos que tienen una misma base y una misma altura, ó q.e están construidos entre unas mismas paralelas, son entre si iguales.

106. Demostracion. Sean los dos triangulos BCD, BVD de una misma base BD y una misma altura DC, ó q.e estan construidos entre las dos paralelas AV, BS, estos dos triangulos son iguales entre si; pues el triangulo BCD es la mitad del para-

lelogramo AD (n. 102) y por la misma razon, el triangulo BVD es la mitad del paralelogramo SD; los dos paralelogramos son iguales (n. 105), luego tambien lo serán los triangulos, por el axioma III num. 41.

107. Corolario. El paralelogramo es doble del triangulo, quando los dos tienen una misma base y una misma altura; y asi el paralelogramo AD es doble del triangulo BVD. El triangulo es la mitad de un paralelogramo, quando los dos tienen una misma base y una misma altura: se infiere de lo dho en los num.s 102 y 105.

Theorema IV.

En todo triangulo rectangulo, el quadrado de la hipotenusa es igual á los dos quadrados de los catetos juntos.

108. Demostracion. Sea el triangulo rectangulo ACB fig. 33, echense sobre sus lados los quadrados RB, BD, PA; echese despues desde el angulo recto C, la recta CV, que sea perpendicular á RL, (num. 76); desde el punto A echese la recta AS y otra recta CL: hecho esto, resultarán los dos triangulos CBL, SBA en todo iguales; porque el lado AB es igual al lado BL; y el lado CB igual al lado BS, el angulo obtuso ABS igual al angulo obtuso CBL, pues ambos angulos constan de un angulo recto en B y la parte comun CBA; luego teniendo estos dos triangulos, dos lados de uno iguales á dos lados de otro, y el angulo obtuso comprehendido en ellos tambien igual, igualarán en todo, (num. 71): el triangulo CBL es la mitad del paralelogramo BV, pues tiene una misma base BL, y construido entre las dos paralelas BL, CV (n. 107); tambien por la misma razon el triangulo ABS es la mitad del quadrado DB, luego siendo iguales los dos triangulos, tambien será igual el paralelogramo BV al quadrado BD por el axioma III n. 41. Del mismo modo se demuestra, que el quadrado AP es igual al paralelogramo AV: y asi todo el quadrado de la hipotenusa es igual al de los catetos juntos.

109. Corolario. El quadrado q.e puede formarse sobre la diagonal de un quadrado, es doble del quadrado mismo, ó de otro quadrado q.e pueda formarse sobre qualquiera de sus lados. Pues la diagonal CB fig. 36, del quadrado DA es hipotenusa de los dos triangulos rectangulos CDB, CAB y por consiguiente el quadrado de la diagonal CB es igual á los dos quadrados de los catetos CD, DB; y tambien es igual á los quadrados de los dos catetos CA, AB; y siendo iguales todos los quadrados, q.e pueden formarse sobre los lados CD, DB, BA, AC; y tambien son iguales estos quadrados al quadrado dado AD; es evidente, que si el quadrado de la diagonal es igual á los dos de dhos quadrados, será el doble de cada uno.

Theorema V.

Los angulos internos de qualquier polygono, todos juntos hacen la suma de tantos rectos, quantos son sus lados duplicados, menos quatro.

110. Demostracion. Sea el poligono ADCB fig. 35 de ocho lados; elijase un punto arbitrario dentro del mismo poligono v.g. el punto I; desde cada uno de los angulos internos del poligono echense las rectas AI, PI, DI &c.a de modo, q.e todas concurran en el punto I, y resultarán tantos triangulos rectilineos, quantos son los lados del poligono; cada uno de estos triangulos tiene tres angulos, q.e hazen la suma de dos rectos (n. 60), luego formandose ocho triangulos en el poligono, q.e tiene ocho lados, todos juntos harán la suma de diez y seis rectos; quitense ahora todos los angulos formados en el punto I, pues no pertenecen á los internos del poligono; los quales componen quatro rectos (n. 35), y quedarán doce rectos, q.e son el duplo de los lados del poligono, menos quatro.

111. Corolario. El numero de los grados de qualesquiera angulo interno de un poligono regular (n. 101), se sabrá, si el numero de todos los grados, q.e componen todos los angulos, se parte por el numero de los lados del poligono. Luego para saber quantos grados tiene qualquiera angulo A, P, D, O, C, S, B, T del poligono regular fig. 35; supuesto, q.e como hemos dicho, todos sus angulos internos hacen la suma de doce rectos, y estos doce multiplicados por noventa, hacen la suma de mil y ochenta grados (n. 34); partase toda esta suma por ocho, q.e son los lados del poligono, y quociente, q.e es ciento treinta y cinco, es el numero de grados, q.e tiene el angulo APD, ú otro qualesquiera de los internos del poligono.

Problema I.

Sobre una recta dada hacer un quadrado.

112. Resolucion. La recta dada sea AB fig. 36; sobre sus extremos levantense las dos perpendiculares AC, BD (n. 78), q.e sean iguales á la recta asignada AB; unande los puntos CD por la recta CD, q.e será igual á la dada AB, y tambien paralela; luego siendo por la construccion los quatro lados iguales, paralelos y que forman angulos rectos, la figura construida será quadrado (n. 95).

Problema II.

Hacer un paralelogramo igual á un triangulo, y q.e tenga un angulo igual á un angulo dado.

113. Resolucion. El triangulo dado sea BAC fig. 34; por el angulo vertical A echese la recta SL paralela á BN base del triangulo (n. 84), dividase la base del triangulo BC en dos iguales partes BD, DC (n. 80), desde el punto D echese una recta DA, q.e termine en el angulo vertical; hecho esto; sobre DC, q.e es la mitad de la base del triangulo, echense las dos rectas DT, CL, q.e sean paralelas entre sí, y q.e en el punto D se forme un angulo igual al angulo dado N, y está hecha la operacion. Porq.e el paralelogramo DTLC es duplo del triangulo DAC (n. 107); tambien

el triangulo dado B A C es duplo del triangulo D A C (num. 82 y 106), luego por el axioma III n. 41. el paralelogramo D L será igual al triangulo dado B A C, y tiene tambien en el punto D un angulo igual al angulo dado N.

114. Scholion. Si el paralelogramo, q.e se pide igual al triangulo haya de ser rectangulo (n. 34) se hará la operacion del modo siguiente: En uno de los extremos de la base del triangulo v.g. en el punto B fig. 34, levantese una perpendicular B S (n. 78), q.e no pase de la recta S S paralela á la base del triangulo; desde el medio de la base del triangulo levantese otra perpendicular D A (n. 76), y quedará formado el paralelogramo rectangulo S D igual al triangulo A B C; pues dho paralelogramo rectangulo es duplo del triangulo B A D (n. 82). luego por el axioma III n. 41, el paralelogramo rectangulo S D será igual al triangulo B A C.

115. Corolario I. Si por el contrario, se pide un triangulo igual á un paralelogramo dado, se hará lo siguiente: Sea el paralelogramo dado S D fig. 34, dupliquese su base B D, de modo q.e se haga la base B C; ~~v.g. en el punto A, y quedará formado~~ de los extremos de esta base echense dos rectas, q.e concurran en una linea paralela á la base B C v.g. en el punto A; y quedará formado el triangulo B A C igual al paralelogramo S D: como se infiere de los numeros antecedentes.

116. Corolario II. Está patente de lo dho, el modo de hacer un triangulo, q.e sea duplo de otro triangulo: Si se nos pide hacer un triangulo duplo del triangulo B A D fig. 34, prolonguese su base hasta hacerla dupla, esto es, hasta el punto C, y desde este punto echese una recta C A al angulo vertical A, y el triangulo B A C será duplo del triangulo B A D; pues estos dos triangulos B A D, D A C son iguales por tener iguales bases B D, D C y una misma altura D A (n. 106); luego todo el triangulo B A C será duplo de cada uno de ellos.

117. Corolario III. Un triangulo es igual á un paralelogramo, quando tiene doble la base y está construido entre unas mismas paralelas. Se infiere de los numeros 102, 105, 107, y 115.

Problema III.

Hacer un quadrado, que sea igual á un rectangulo dado.

118. Resolucion. Sea el rectangulo dado E D fig. 37, sus lados mas cortos E A D prolonguense hasta los puntos I P, de modo q.e las rectas A P, E I sean iguales al lado E A, y unanse los puntos I P por la recta I P y resultará un quadrado E P (n. 112). Sobre el lado A P echese un semicirculo A G P, q.e tenga por diametro toda la recta A P y por centro el punto S, q.e es el medio de la recta A P; la recta C D prolonguese hasta q.e toque en el punto G del semicirculo, desde este punto G echese la recta G A, q.e toque en el extremo A del diametro P A, formese sobre la recta G A un quadrado (n. 112), y este quadrado será igual al rectangulo dado E D. La

razon es; porq.e echada otra recta SP, el angulo ASP como existente en un semicirculo, es recto (n.   ) y por consiguiente el triangulo ASP es rectangulo (n. 59) y el quadrado EP de la hipotenusa AP igual â los quadrados de los catetos AS, SP juntos (n. 108); y el rectangulo CP igual al quadrado del cateto PS: luego tambien el rectangulo ED será igual al quadrado q.e se forme sobre el cateto AS.

119. Corolario I. Si se pide un quadrado igual â un paralelogramo, q.e no sea rectangulo; reduzcase el paralelogramo dado â rectangulo (n. 114); y lo demas se hará como se ha dicho en el numero antecedente.

120. Corolario II. Tambien se infiere de lo dicho, el modo de hacer un quadrado igual â un triangulo dado. El triangulo dado sea EAR fig. 37, tomando de su base la mitad, q.e será EC, hagase un paralelogramo rectangulo igual al triangulo dado (n. 114); hagase despues un quadrado igual al rectangulo ED (n. 118), y dicho quadrado será igual al triangulo dado, por el axioma II n. 41.

Problema IV.

Dados dos quadrados, hacer uno, que sea igual â los dos.

121. Resolucion. Los dos quadrados sean MN, fig. 38, un lado de uno de estos quadrados v.g. AB prolonguese tanto, quanto es el lado del otro quadrado, esto es, añadasele la porcion BD igual â bd; desde el punto D echese la recta DC; y será hipotenusa del triangulo rectangulo CBD; y siendo el quadrado de la hipotenusa igual â los dos quadrados de los catetos juntos (n. 108), será el quadrado formado sobre la recta CD igual â los dos quadrados, q.e pueden formarse sobre las dos rectas CB, BD, ô igual â los dos quadrados dados.

122. Corolario I. De aqui está patente, el modo de hacer un quadrado, q.e sea doble de otro quadrado dado: esto se hará, ô echando al quadrado una diagonal y sobre ella haciendo un quadrado: este será duplo del quadrado dado (n. 109): ô prolongando un lado del quadrado dado, hasta q.e sea duplo, y lo demás se hará como se ha dicho en el numero antecedente

123. Corolario II. Tambien se infiere de lo dicho, el modo de hacer un quadrado, que sea igual â muchos quadrados; porq.e si de los dos primeros hacemos uno igual â los dos (n. 121), despues produciendo uno de los lados de este nuevo quadrado, tanto, quanto sea el lado de otro tercer quadrado, y echada la hipotenusa, como se dixo en el (n. 121), el quadrado de esta, dará un quadrado igual â los tres primeros propuestos: repetida la operacion, puede formarse un quadrado igual â todos quantos nos propongan.

Problema V.

Hacer un rectangulo igual â un quadrado.

124. Resolucion. Sea el quadrado dado, el q.e pueda formarse sobre la recta AS, desde el punto A echese una recta indefinida AP, y q.e con el lado AS del quadrado haga el angulo agudo PAS fig. 37 (num. 34) en el punto S levantese una perpendicular

SI, que concurra con la indefinida AP (n. 78) y resultará un triangulo rectangulo ASP (num. 57), cuya hipotenusa será AP, sobre esta hipotenusa formese el quadrado EP (n. 112), y desde el angulo recto S echese la recta SL perpendicular â la recta EI (n. 76), hecho esto, tendremos un rectangulo ED; y es evidente, q.e este rectangulo es igual al quadrado, que pueda formarse sobre AS; como consta del (n. 108).

Problema VI.

Hacer un paralelogramo igual â un rectangulo, y que tenga un angulo igual â un angulo dado.

125. Resolucion. El rectangulo dado sea SD fig. 34, desde el punto B de su base echese una recta AB, q.e con la base BD del rectangulo haga un angulo igual al angulo dado X (n. 83); desde el otro punto de la base D echese una recta DT paralela â la recta BA; prolonguese el lado SA del rectangulo, hasta q.e concurra en el punto T, con la recta DT, y tendremos al paralelogramo BATD igual al rectangulo dado SD; pues tiene la misma base BD, y está construido entre las mismas paralelas BX, SL; tiene tambien el angulo DBA igual al angulo dado X.

Problema VII.

Reducir qualquiera figura rectilinea â quadrado.

126. Resolucion. La figura rectilinea sea DABE fig. 40, desde uno de sus angulos v.g. desde D echense rectas â los otros angulos CB, y quedará la figura rectilinea reducida â triangulos; cada uno de estos triangulos reduzcase â quadrado (n. 118), de todos estos quadrados hagase uno, q.e sea igual â todos (n. 123) y este quadrado será igual â la figura rectilinea.

Problema VIII.

Hacer un paralelogramo rectangulo igual â una figura rectilinea.

127. Resolucion. La figura rectilinea reduzcase â quadrado (n. 126): este quadrado reduzcase â rectangulo (n. 124), y quedará la figura rectilinea reducida â un paralelogramo rectangulo.

Problema IX.

Reducir una figura rectilinea â un paralelogramo, que tenga un angulo igual â un angulo dado, ô dada una recta, formar sobre ella un paralelogramo, que tenga un angulo igual â un angulo dado, y q.e sea igual â un poligono dado.

128. Resolucion. La figura rectilinea ô poligono dado reduzcase â un quadrado (n. 126): este quadrado reduzcase â rectangulo (n. 124), y el rectangulo â un paralelogramo, que tenga un angulo igual â un angulo dado (n. 125); hagase esta ulti-

tima operacion sobre la recta dada y tendremos un paralelogramo igual á una figura rectilinea, ó á un poligono.

Problema X.

Hacer un triangulo igual á un quadrado, y que tenga un angulo igual á un angulo dado.

129. Resolucion. Hagase un paralelogramo igual al quadrado dado, y q.e tenga un angulo igual al angulo dado (n. 125), dividase este paralelogramo en dos iguales partes por una diagonal (n. 102) echada á los angulos diversos del angulo, q.e tiene el paralelogramo igual al angulo dado; y dicho paralelogramo quedará dividido en dos triangulos, q.e cada uno de ellos es igual al quadrado dado.

Problema XI.

Dados dos quadrados desiguales, hacer uno, q.e sea la diferencia, que hay entre los dos.

130. Resolucion. Los dos quadrados dados sean M, m; sobre uno de los lados AC fig. 39 del quadrado mayor M echese un semicirculo ABC, q.e tenga por diametro el lado del quadrado AC y por centro el medio de dicho lado; tomese luego la medida de un lado del quadrado m, y con esta medida, puesto el centro en A, echese un arco a b, que cortará al semicirculo en B, desde este punto echense dos rectas BA, BC á los extremos del lado AC del quadrado; y el quadrado, q.e se forme sobre la recta BC será la diferencia, que hay entre los dos quadrados dados M, m. Porq.e el triangulo ABC, por tener en B un angulo recto como existente en un semicirculo (n.   ), es rectangulo; de consiguiente el quadrado de la hipotenusa AC es igual al de los dos catetos juntos (n. 108); y siendo el quadrado m por su construccion igual al del cateto AB, el quadrado del cateto BC será la diferencia, que hay entre los dos quadrados M, m.

Problema XII.

Medir qualquiera figura plana.

131. Resolucion. Si la figura, q.e ha de medirse sea rectangulo (n. 94); midase uno de sus lados mayores SR fig. 42 con una determinada medida v.g. pie, palmo, vara &c: vease quantas veces se contiene esta medida en d.ho lado y señalese con un numero, q.e exprese los pies, palmos &c. como en el rectangulo RT se contiene quatro veces la medida RP; vease tambien quantas veces se contiene d.ha medida en uno de los lados menores ST del rectangulo y señalese con un numero, que lo exprese v.g. tres: los dos numeros multipliquense uno por otro, y el producto doze es el numero de dedos, pies, palmos &c. quadrados, q.e tiene el rectangulo RT. Si la medida asignada no adequa á los dos lados exactamente, como en el

rectangulo HY, q.e por el lado HI tiene quatro y medio, y por el lado IY tres, se multiplica quatro y medio por tres, y el producto dá el area del rectangulo HY. fig.a 41.

132. Corolario I. La comun medida de los planos es el quadrado; v.g. pies quadrados, varas quadradas, &c.a

133. Corolario II. El area de un quadrado se sabrá multiplicando uno de sus lados por si mismo. Pues siendo iguales todos sus lados (n. 95) lo mismo es multiplicar un lado por si mismo, que por su adyacente.

134. Corolario III. Siendo todo paralelogramo igual â un rectangulo, que con el tiene una misma base, y está construido entre las mismas paralelas (n. 105), como el paralelogramo SD fig. 32 igual al rectangulo AD: el area de qualquier paralelogramo se sabrá multiplicando su base (n. 93) por su altura (n. 92).

135. Corolario IV. Quando un triangulo y un paralelogramo tienen una misma base y una misma altura, el paralelogramo es duplo del triangulo (n. 107); por tanto se sabrá el area del triangulo, multiplicando la mitad de su base por toda la altura; ô toda la base por la mitad de la altura; ô si se multiplica toda la base por toda la altura, la mitad del producto dará el area de un triangulo.

136. Corolario V. Como todo poligono pueda reducirse â triangulos (n. 110. 126); para saber el area de un poligono se medirán cada uno de los triangulos (n. 135) y la suma de todos ellos dará el area del poligono.

137. Corolario VI. Siendo el circulo un poligono de infinitos lados; de modo q.e en el se puedan formar infinitos triangulos de una misma altura, esto es, el rayo; y de una misma base, â saber, iguales porciones de la circumferencia: se sigue de lo dicho, q.e podremos medir el area de un circulo, multiplicando la mitad de su circumferencia por todo el rayo, ô la mitad del rayo por toda la circunferencia (n. 135). El diametro de un circulo se tiene â su circumferencia segun Archimides, como quasi siete â veinte y dos; segun otros como 113 â 355; segun otros como 100 â 314; segun otros como 1 â 3. De esta ultima opinion nos valdremos en adelante, quando se ofresca medir el area de algun circulo, como la mas facil, aunque en rigor geometrico la medida no será exacta; pero será poco el error y fisicamente quasi ninguno. Lo mismo sucede en las demás opiniones, pues no se ha encontrado la proporcion exacta, q.e dice un diametro de un circulo con su circumferencia, aunque sobre esto han sudado mucho los Geometras.

Capitulo V.
Del Circulo.

138. Definiciones. Una recta, q.e toca en la periferia de un circulo, y no entra en su capacidad, le toca en un solo punto, y se llama tangente: tal es la recta AB. fig. 43.

139. Una recta, que saliendo del centro de un circulo se prolonga hasta salir de la circumferencia, y concurrir con la tangente, se llama secante del arco: tal es la recta CB, fig.a 43.

140. Una recta q.e saliendo de la extremidad de un rayo cae perpendicular sobre otro rayo del mismo circulo, se llama seno del angulo, q.e se forma en el centro del circulo, y tambien seno del arco correspondiente: tal es la recta SY fig. 44, que es seno del angulo YCX, y tambien del arco XY: igualmente la recta YI es seno del angulo YCD y del arco YD.

141. Segmento de un circulo es una parte del circulo comprehendida entre una subtensa y el arco correspondiente: tal es la porcion S fig. 45 comprehendida entre la subtensa BC y el arco BOC. Los segmentos son semejantes, quando aunque sean desiguales, se pueden inscribir en ellos angulos iguales; ô quando las porciones de los arcos, entre quienes se comprehenden, son partes semejantes de sus respectivos circulos.

142. Angulo del segmento es el q.e se forma por una subtensa y una tangente en el punto donde concurren estas dos lineas: tales son los angulos CBL fig. 45 y CBD. El segmento se dice alterno si se compara con el angulo del otro segmento, y asi el segmento S es alterno si se compara con el angulo CBL.

143. Angulo en el segmento, ô inscripto en un segmento, es el q.e se forma por dos rectas, que saliendo de los extremos de una subtensa concurren en qualesquier punto de la circumferencia: como el angulo BAC fig. 45.

144. Angulo q.e insiste en la periferia, ô en el arco, es el q.e se forma por dos rectas, que salen de dos puntos de la periferia de un circulo y concurren en el centro, ô en un punto opuesto de la circumferencia misma: tales son los angulos BAC, BPC fig. 45: el 1.o de estos dos angulos se llama angulo â la periferia, y el segundo, angulo al centro.

145. Sector de un circulo es aquella porcion del circulo comprehendida entre dos rayos y el correspondiente arco: tal es la porcion del circulo BPCO: fig. 45.

Theorema I.

Qualquier recta echada desde el centro de un circulo perpendicularmente â una subtensa, la divide en dos iguales partes.

146. Demostracion. La perpendicular ZS fig. 46, q.e cae sobre la subtensa AB hace, en el punto S dos angulos rectos (n. 32), de consiguiente iguales: tambien son iguales los angulos ZBA, ZAB por ser opuestos â rayos de un mismo circulo (n. 66), luego los dos triangulos BZS, AZS son en todo iguales, porq.e son equiangulos (n. 63), y tienen un lado comun ZS, luego seràn iguales tambien en las bases AS, SB (n. 72), y asi la subtensa AB quedò dividida en dos iguales partes por la perpendicular ZS, q.e sale del centro.

147. Corolario I. En un mismo circulo iguales cuerdas insisten â iguales arcos, y al contrario, iguales arcos insisten â iguales cuerdas. Porq.e prolongada la recta SZ fig. 46, hasta el punto V, es evidente, q.e los dos triangulos VSB, VSA son iguales en todo, pues tienen iguales los dos angulos rectos formados en el punto S (n. 32): el lado SB igual al lado SA, el lado SV comun p.a los dos, luego tambien igualan en las bases BV, AV, (n. 71). Tambien el arco BV es igual al arco AV, por ser medida de dos angulos iguales BZV, AZV, (n. 146), luego â

iguales arcos insisten iguales cuerdas, y á iguales cuerdas iguales arcos.

148. Corolario II. El diametro del circulo es la mayor de todas las subtensas, q. puede haber en el mismo circulo. Pues es evidente, q.e los dos lados AZ, AB del triangulo AZB, q. juntos hazen un diametro (n. 22), son mayores, q.e la subtensa AB (n. 70).

149. Corolario III. De todas las subtensas de un mismo circulo, será mayor, la q. menos dista del centro, y menor, la q.e diste mas de dho centro.

Theorema II.

En los arcos, que son menores, q.e el semicirculo, creciendo el arco, crece la cuerda, y al contrario. Pero en los arcos mayores, q.e el semicirculo, creciendo el arco disminuye la cuerda.

150. Demuestrase la primera parte. Al circulo ORT fig. 47 echesele las subtensas OT, OS, y es evidente, q.e el arco OS menor, q.e el semicirculo, tiene por subtensa la recta OS; y aumentado el arco hasta q. sea OST tambien menor, q.e el semicirculo, su correspondiente subtensa será TO, mayor, q.e la subtensa SO del menor arco; porq.e puesto el centro en O y echado el arco ZXRTS á la distancia TO, la subtensa SO no alcanzará á la circumferencia de dho arco, como alcanza la subtensa TO; luego en los arcos menores, q.e el semicirculo, creciendo el arco, crece la subtensa y al contrario.

151. La segunda parte es tambien evidente. Considerese el arco ORT mayor, q. el semicirculo, y será su subtensa TO, si se aumenta este arco de modo, q. se haga ORTS será su subtensa SO menor, q.e la subtensa TO, por lo dho en el num.o antecedente: luego en los arcos, q.e son mayores, q.e el semicirculo, creciendo el arco disminuye la cuerda.

152. Corolario. En un mismo circulo creciendo el arco, crece el segmento, y creciendo el segmento, crece el arco; está patente de lo dho.

Theorema III.

Qualesquier recta, q.e cae perpendicularmente en el extremo de un semidiametro toca al circulo en un punto.

153. Demostracion. Desde el centro C fig. 48, echada qualquier recta, v.g. CA, á la linea AB, y fuera del punto donde la linea AB toca en el semidiametro, dha recta AC será hipotenusa (n. 69) del triangulo rectangulo CDA, (n. 59) y por consiguiente mayor, q.e el lado DC (n. 68), luego qualquiera punto de la linea AB, q.e no sea el punto D, está fuera del circulo, y por tanto la perpendicular AB toca en un solo punto al circulo.

154. Corolario. Si una recta tocare al circulo en un punto D fig. 48, y desde este punto se echa un semidiametro DC, estas dos rectas harán un angulo recto ADC. Se infiere de lo dho en el numero antecedente.

Theorema IV.

Entre la tangente y la periferia del circulo no se puede echar alguna linea recta, que no corte al circulo.

155. Demostracion. Si la recta ca fig. 46, echada entre la periferia y la tangente no cortase al circulo, ya el angulo caz seria recto (n. 154), es asi q.e tambien es recto el

angulo $b\,a\,z$ (n. 154) luego estos dos angulos serian iguales, ó la parte $c\,a\,z$ igualaria al todo $b\,a\,z$; lag.^{e} es imposible, por el axioma I num. 41.

Theorema V.

Dos tangentes echadas desde un punto á un mismo circulo son iguales entre si.

156. Demostracion. Desde el punto C fig. 49. echense las dos tangentes CA, CB al circulo AB, unanse los dos puntos AB por la cuerda AB, echense los dos rayos DA, DB; y en este caso los angulos CBD, CAD son rectos (n. 154), y por tanto iguales: tambien son iguales los angulos ABD, BAD por opuestos á rayos de un mismo circulo (n. 66), luego quitados estos dos ultimos angulos de los dos recto, quedarán tambien iguales los dos angulos CAB, CBA, por el axioma V, n. 41. Es así q.^{e} á iguales angulos se oponen iguales lados (n. 66); luego los lados CA, CB son iguales y de consiguiente las dos tangentes.

Theorema VI.

Señalado en un circulo un punto diverso del centro, si desde él se echan rectas á la circumferencia, la mayor de todas será, lag.^{e} pasa por el centro, y la menor su complemento.

157. Demuestrase la 1.^{a} parte. Desde el punto D fig. 50, echense las rectas DA, DP, DO, hasta la circumferencia del circulo, de todas estas la mayor será DA, q.^{e} pasa por el centro C, porq.^{e} echado el rayo CP ~~igual á CA, y de la parte comun CD~~ los dos lados DC, CP del triangulo igualan á toda la linea DA, constando del rayo CP igual á CA, y de la parte comun CD; es así, q.^{e} dhos dos lados DC, CP son mayores, q.^{e} el tercer lado DP (n. 70), luego tambien la recta DA será mayor, q.^{e} la recta DP, ó qualesquiera otra, q.^{e} saliendo del punto D llegue á la circumferencia.

158. Demuestrase la 2.^{a} parte. En el mismo triangulo CDP, los dos lados CD, DP, son mayores, q.^{e} el tercero CP (n. 70) y tambien serán mayores, q.^{e} el rayo CO igual á CP (n. 22) luego quitada la parte comun CD, quedará DP mayor, q.^{e} DO complemento de la recta DA, q.^{e} pasa por el centro.

Theorema VII.

De todas las rectas, que desde un punto fuera de un circulo pueden echarse á la parte convexa de su circumferencia, la menor es, la que prolongada pasaria por el centro. Pero si desde el mismo punto se echan rectas hasta la parte concava de la circumferencia del mismo circulo, la q.^{e} pasa por el centro será la mayor de todas.

159. Demuestrase la 1.^{a} parte. Desde el punto B fig 51, echense las rectas BS, BT á la parte convexa de la circumferencia del circulo STDC, en este caso la recta BS, q.^{e} prolongada pasaria por el centro V, será menor, q.^{e} la recta BT. La razon,

porque si desde el punto, ô centro V se echa un rayo VT; los dos lados BTV, serán mayores, q.e el tercero BV (n. 70), y si â estas dos magnitudes se les quitan porciones iguales, como son los dos rayos VS, VT, quedará SB menor q.e BT, por el axioma VII. n. 41.

160. Demuestrase la 2.a parte. Si desde el punto B se echan dos rectas BC, BD, fig. 51, la mayor será la q.e para por el centro V. Porq.e si se echa el rayo VD, los dos lados BV, VD son mayores, q.e el tercero BD (n. 70). Es asi, q.e dhos dos lados igualan â toda la recta BC por componerse de dos rayos CV, VD, y la parte comun BV, luego tambien la recta BC será mayor, q.e la recta BD.

Theorema VIII.

Si dos angulos insistan en un mismo arco de un mismo circulo y uno de dhos angulos tenga el vertex en el centro y el otro en la circumferencia; el angulo al centro será doble del angulo â la circumferencia.

161. Demostracion. Sean los dos angulos BCD, BAD fig. 52, insistentes en un mismo arco BD; en este caso, el angulo BCD por externo es igual â los dos internos y opuestos (n. 61). Es asi, q.e los dos internos A, D, son entre si iguales por opuestos â rayos de un mismo circulo (n. 66), luego el angulo externo BCD al centro será doble del angulo A, â la circumferencia.

162. Corolario I. Si los lados del angulo â la circumferencia MPN, fig. 53, sean diversos de los lados del angulo al centro MCN, dividanse estos dos angulos por la recta PL, y en este caso, el angulo MCL será doble del angulo MPL (n. 161); y por la misma razon el angulo NCL doble del angulo NPL, luego todo el angulo MCN será doble de todo el angulo â la circumferencia MPN.

163. Corolario II. Si un lado del angulo al centro cortase â un lado del angulo â la circumferencia, como son los angulos SCR al centro, SPR â la circumferencia, fig. 54, q.e insisten en un mismo arco SR, echese el diametro TP, q.e toque en el vertex de los dos angulos; y tendremos, q.e el angulo TCR es doble del angulo TPR (n. 161), y el angulo TCS doble del angulo TPS (n. 161), luego si de estas dos cantidades, q.e son TCR, TPR doble la una de la otra, + los residuos SCR, SPR, será el primero doble del segundo por el axioma n.); luego tambien en este caso el angulo al centro C, es doble del angulo â la circumferencia P.

+ se quitan las dos porciones TCS, TPS tambien doble la una de la otra,

164. Corolario III. Todos los angulos â la periferia, q.e están incluidos en un mismo segmento, son entre si iguales, como son los angulos C, D, E, F, fig. 55. Es la razon, porq.e qualquiera de estos angulos es la mitad del angulo al centro ASB (n. 161), luego todos los dhos angulos son iguales entre si, por el axioma III, num. 41.

165. Corolario IV. El angulo al centro es igual al angulo â la circumferencia, quando el arco â quien insiste el primero, sea doble del arco â quien insiste el segundo. Por esta razon, si los dos angulos insisten â un mismo arco, la medida del angulo â la circumferencia será la mitad del arco â quien insiste. Porq.e la medida del angulo al centro es todo el arco, (n.).

166. Corolario V. Quando el angulo â la circumferencia insiste en un segmento igu-

al á un semicirculo es recto. Porque los angulos CID, BID fig. 56, juntos, hacen la suma de dos rectos (n.), el angulo CAD es la mitad del angulo CID (n. 161); y por la misma razon el angulo BAD es la mitad del angulo BID: luego todo el angulo CAB existente en el semicirculo, será la mitad de los dos CID, BID, y por consiguiente recto.

167. Corolario VI. El angulo, q.e insiste en un segmento menor q. un semicirculo, es obtuso. Porq.e los dos angulos TRP, YRP, fig. 57, q.e tienen por medida el arco TPY, mayor q.e un semicirculo, hacen mas de dos rectos (n.); el angulo TSP es la mitad del angulo TRP, (n. 161), y por la misma razon el angulo YSP es la mitad del angulo YRP: luego el angulo TSY será la mitad de los dos TRP, YRP y de consiguiente mayor q. un recto, luego será obtuso.

168. Corolario VII. El angulo q.e insiste en un segmento mayor q.e un semicirculo, es agudo. Porq.e el angulo ZXY, fig. 58, es la mitad del angulo ZCY; (n. 161); es asi que el angulo ZCY, q.e tiene por medida un arco menor, q.e un semicirculo, es menor q.e dos rectos (n.), luego el angulo ZXY será menor q.e un recto, y por consiguiente agudo.

Theorema IX.

Dos arcos comprehendidos entre dos paralelas, son iguales entre si.

169. Demostracion. En el circulo ACDB, fig. 59, echense las dos paralelas AB, CD, los dos arcos AC, CB, q.e se comprehenden en ellas, son iguales; es la razon, porq.e echadas las dos rectas AD, CB resultan los dos triangulos ABD, BAC en todo iguales, porq.e el angulo ADB, BCA son iguales, porq.e insisten en un mismo arco AB, y los dos son á la periferia (n. 164); los angulos ABD, BAC son tambien iguales, porq.e los dos insisten en un segmento igual á un semicirculo (n. 166); luego tambien el angulo BAD será igual al angulo ABC (n. 63); y siendo estos dos triangulos equiangulos, y teniendo un lado comun AB, igualarán en todo, y por consiguiente las bases AC, BD serán iguales (n. 72); estas dos bases son subtensas á cuerdas de un mismo circulo, q. por ser iguales han de insistir á iguales arcos (n. 147); luego los arcos AC, BD comprehendidos entre las dos paralelas, son iguales.

Theorema X.

El angulo del segmento, q.e se forma por una subtensa y una tangente tiene por medida la mitad del arco comprehendido entre la tangente y la subtensa.

170. Demostracion. Al circulo CBD fig. 60, echese la tangente AB y desde el punto del contacto B echese la subtensa BC y el angulo ABC será el angulo del segmento, q.e tiene por medida el arco BE la mitad de todo el arco BEC; porq.e echada la recta DC paralela á la tangente, en este caso el angulo ABC es igual al alterno BCD (n. 4); es asi que el angulo BCD por ser angulo á la

periferia, tiene por medida el arco BP mitad de todo el arco BD (n. 165): y los arcos BD, BC son iguales por estar comprehendidos entre dos paralelas (n. 169), luego tambien el angulo ABC tendrá por medida la mitad del arco BC comprehendido entre la tangente y la subtensa.

Theorema XI.

Las subtensas de un mismo circulo, que son iguales; distan igualmte del centro.

171. Demostracion. Sean las dos subtensas AB, CD fig. 59. sus distancias del centro del circulo se miden por las perpendiculares IZ, YZ: estas dos perpendiculares son iguales; luego tambien las subtensas distan igualmte del centro. Porque echadas las rectas AD, CB los dos triangulos ZAI, ZCY son en todo iguales; pues el angulo A es igual al angulo C por ser los dos angulos à la periferia, que insisten en un mismo arco BD (n. 164): el angulo AIZ es igual al angulo CYZ, pues los dos son rectos, luego tambien el angulo AZI será igual al angulo CZY (n. 63); y por consiguiente los dos triangulos CZY, AZI son equiangulos; y teniendo un lado igual, pues el lado AI es igual al lado CY (n. 146) serán iguales entodo (n. 72) y de consiguiente la base IZ igual à la base YZ: luego son iguales las perpendiculares IZ, YZ, qe son las distancias, qe las dos subtensas tienen del centro.

Theorema XII.

El angulo formado por una subtensa y la continuacion de otra tiene por medida la mitad del arco comprehendido en el mismo angulo y mas la mitad del arco opuesto.

172. Demostracion. Sea el angulo DBC fig. 61 formado por la subtensa BC y por la continuacion dela subtensa AB, qe es la porcion BD; para medir este angulo dividase con una tangente HI, y el angulo inferior HBC tiene por medida el arco Ba, qe es la mitad de todo el arco BC (n. 170); el angulo superior DBH es igual al angulo IBA por ser opuesto verticalmte (n.); es asi qe el angulo IBA tiene por medida el arco Bb, qe es la mitad de todo el arco BA (n. 170), luego tambien el angulo DBH tendrá por medida el arco Bb, por el axioma III n. 41; luego todo el angulo DBC tiene por medida el arco Ba, qe es la mitad de todo el arco comprehendido en dho angulo, y mas el arco Bb, qe es la mitad del arco opuesto.

Theorema XIII.

Todo el angulo, cuyo vertice está entre el centro y la circumferencia de un circulo, tiene por medida la mitad del arco, á q. insiste, y mas la mitad del arco comprehendido entre sus lados, si se prolongan por el vertice.

173. Demostracion. Sea el angulo CBD fig. 62, prolonguense sus lados hasta los puntos AE de la circumferencia, desde el punto A echese la recta AH paralela á la recta BD; en este caso, el angulo A será igual al externo B (n. 4); es asi q.e el angulo A, por ser angulo á la circumferencia tiene por medida la mitad del arco HIC (n. 165), luego el angulo B tendrá la misma medida, esto es, la porcion HI mitad de todo el arco HIC y por consiguiente tendrá por medida la mitad del arco DC, y mas la mitad del arco HD: el arco EF es igual al arco HD por estar ambos comprehendidos entre dos paralelas (n. 169), luego el angulo B, q.e tiene el vertice entre la circumferencia y el centro, tiene por medida la mitad del arco DC á quien insiste, y mas la porcion Ab, q.e es la mitad del arco comprehendido entre sus lados prolongados por el vertice hasta la circumferencia.

Theorema XIV.

El angulo formado por dos secantes, q.e se juntan fuera del circulo, tiene por medida la mitad del arco á quien insiste, menos la mitad del arco, que corta sus lados.

174. Demostracion. Sea el angulo ABC fig. 63, formado por las dos secantes AB, CB, echese la recta bo, q.e sea paralela á la recta BC; en este caso, el angulo b será igual al angulo B (n. 47) es asi q.e el angulo b tiene por medida la mitad del arco AO (n. 165), luego la misma medida será la del angulo B. Ahora pues, si suponemos, q.e al angulo B le damos por medida la mitad de todo el arco AC, se le debe quitar, lo q.e se le dió demás, esto es, la mitad del arco OC igual al arco bD (n. 169), luego el angulo B tiene por medida la mitad del arco AC menos la mitad del arco bD.

Problema I.

Dado un punto en la periferia de un circulo, echarle una tangente.

175. Resolucion. Sea el punto D fig. 64, busquese el centro del circulo (n. 176) y echese el semidiametro CD, sobre el extremo D echese la perpendicular AC,

y esta será la tangente (n. 153).

Problema II.

Dado un circulo encontrar su centro.

176. Resolucion. El circulo dado sea ABD fig. 66, echensele dos subtensas arbitrarias, que serán AB, BD, dividanse estas dos subtensas cada una en dos iguales partes (n. 80) y desde los punto L, I, q. son el medio de las subtensas, levantense las dos perpendiculares IV, LT, estas dos perpendiculares concurriran en el punto C, q. será el centro del circulo (n. 146).

177. Corolario I. La misma operacion se hará para buscar el centro de un arco dado. El arco dado sea ABD fig. 66 elijanse en el tres puntos arbitrarios ABD; unanse estos tres puntos por las dos subtensas AB, BD, y lo demás como en el num. antecedte.

178. Corolario II. Está patente el modo de hacer un circulo cuya periferia pase por tres puntos dados; siempre q. los tres puntos no estén en linea recta. Los tres puntos sean ABD fig. 66, unanse por las dos subtensas AB, BD, y echadas las perpendiculares, como se ha dho en el num. 176, el punto C en donde se cortan las perpendiculares será el centro de un circulo, cuya periferia, si pasa por uno de los puntos dados, pasará por todos tres; (n. 146).

Problema III.

Dado un circulo echarle una tangente desde un punto fuera del circulo.

179. Resolucion. Sea el circulo dado SDH, fig. 65, y el punto desde donde se pide la tangente sea P, busquese el centro del circulo (n. 176) y desde el punto P echese al centro la recta PA, sobre ella formese el semicirculo ADP, q. tenga por diametro toda la recta AP; desde el centro A echese el semidiametro AD al punto D de la periferia donde el semicirculo ADP corta al circulo dado; despues echese la recta DP en el extremo del semidiametro AD; y dha recta DP será la tangente, q. se busca.

Problema IV.

Dado un arco de un circulo dividirlo en dos iguales partes.

180. Resolucion. Sea el arco dado AHB fig. 67, desde los puntos A, B, echense al centro los dos rayos AC, BC y se formará el angulo ACB; dividase este angulo en dos partes iguales (n. 82), y quedará el arco dividido en dos porciones AH, BH en todo iguales, por ser medida de iguales angulos. Si se hubiese de dividir el arco AIB mayor q. el semicirculo, se hará

prolongando la recta HC hasta el punto I de la circumferencia. Porq.^e si los angulos BCH, ACH son iguales, tambien serán iguales los dos angulos ACI, BCI, pues cada uno de estos ultimos con qualesquiera de los dos primeros completan un semicirculo.

Capitulo VI.

De las Proporciones en comun.

181. Definiciones. Qualesquier magnitud se compone de partes respecto de las quales se llama todo.

182. Las partes, q.^e repetidas muchas veces componen exactam.^te el todo, sin que nada sobre ni falte, se llaman aliquotas: asi el palmo respecto de la vara castellana es parte aliquota; porq.^e repetido el palmo quatro veces compone exactam.^te la vara: lo mismo se dice del pie, q.^e es parte aliquota del paso, porq.^e repetido cinco veces el pie compone exactam.^te el paso.

183. Las partes, que repetidas muchas veces no adequan exactam.^te al todo, sino q.^e sobra, ô falta alguna cosa, se llaman aliquantas; asi una medida q.^e tiene dos pies de longitud, es parte aliquanta respecto del paso; porq.^e si dha medida se repite dos veces, compondrá quatro pies y no alcanzará â componer un paso; y si se repite tres veces hace seis pies, q.^e exceden al paso.

184. Qualesquier magnitud respecto de sus partes aliquotas se dice multiplice, porq.^e el todo ha de contener â su parte aliquota muchas veces; y la parte aliquota respecto de su todo, en quien se contiene muchas veces, se llama submultiplice.

185. La magnitud, q.^e contiene â su parte aliquota dos veces, se llama dupla; la q.^e la contiene tres, tripla, &c.^a La parte, q.^e se contiene dos veces en el todo se llama subdupla; la q.^e se contiene tres, subtripla, &c.^a

186. Muchas magnitudes, aunque sean de diverso genero, se dicen equimultiplices, quando cada una de las magnitudes contiene â su parte aliquota igual numero de veces: y asi estas tres magnitudes, la vara castellana, el quintal, y el doblon, son equimultiplices respecto del palmo, de la arroba y del peso; pues la vara contiene quatro veces al palmo, el quintal quatro veces â la arroba, y el doblon quatro veces al peso. Las partes, q.^e se contienen igual numero de veces en sus todos se llaman semejantes ô similes, y asi el palmo respecto de la vara, y la arroba respecto del quintal son partes semejantes,

pues asi una como otra, son la quarta parte de sus respectivos todos.

187. Dos ô muchas cantidades se dicen commensurables, ô racionales, quando se les puede señalar una aliquota comun, q. las mida exactamente â todas; y asi serán commensurables el paso y la decempeda; porq. las dos cantidades pueden medirse exactam.te con una misma aliquota, q. es el pie; porq. repetido cinco veces compone exactam.te el paso; y repetido diez veces, compone exactamente la decempeda.

188. Inconmensurables, inefables, irracionales, ô sordas, se dicen aquellas cantidades, ô magnitudes â quienes no se les puede señalar una aliquota comun, que las mida exactamente.

189. Scholion. Que hay cantidades, ô magnitudes inconmensurables, es evidente: tales son, por exemplo, qualquier lado de un quadrado comparado con la diagonal del mismo quadrado; porq. si estas dos magnitudes fuesen conmensurables es cierto, q. sus aliquotas podrian expresarse con algun numero, de consiguiente el quadrado de estas dos lineas podria manifestarse con el quadrado del numero, q. expresaba sus partes aliquotas; es asi q. esto es imposible en la diagonal de un quadrado, y el lado del quadrado mismo. porq. el quadrado de la diagonal es duplo del quadrado del lado (n. 109); y asi si se pudiesen manifestar los quadrados de estas dos lineas con algun numero, ya habria algun numero quadrado, duplo de otro numero quadrado; tal numero no le hay: luego la diagonal de un quadrado y un lado del quadrado mismo son inconmensurables. Tambien son inconmensurables el lado de un triangulo equilatero, y la altura del mismo triangulo.

190. Razon ô proporcion es una comparacion, q. se haze entre dos cantidades ô magnitudes de una misma especie; â saber entre dos longitudes, dos superficies, dos cuerpos, dos numeros, dos velocidades, dos tiempos, &c.a en quanto comparada una magnitud con otra es mayor, menor, ô igual.

191. Toda razon consta de dos magnitudes ô cantidades, q. se comparan entre si, y se llaman terminos de la razon ô proporcion; la 1.a magnitud, q. se compara â otra se llama antecedente de la razon; y la segunda magnitud â quien se compara la 1.a se llama consiguiente. La razon ô proporcion será ascendente, quando sus terminos van en aumento, como 3, 6: pero si van de mayor â menor, como 6, 3; la proporcion será descend.te

192. Razon de igualdad se halla entre dos magnitudes iguales, como 4, 4: mas si las magnitudes fuesen desiguales, la razon q. hay entre es de desigualdad: de mayor, si el antecedente sea mayor, q. el consiguiente; mas si el antecedente es menor q. el consiguiente, la razon será de menor.

193. Si el antecedente contiene muchas veces al consiguiente, se dice q. tiene razon multiplice: si el antecedente contiene dos veces al consiguiente, la razon será dupla, como 4, 2; si le contiene tres veces, será la razon tripla, como 9, 3; si quatro veces, quadupla, &c.a Por el contrario, la razon será submultiplice, quando el antecedente se contiene muchas veces en el consiguiente: será subdupla, quando el

antecedente se contiene dos veces en el consiguiente, como 2, 4: subtripla, quando el antecedente se contiene tres veces en el consiguiente, como 3, 9, &c.

194. Exponente ô quociente de la razon, es el numero q.e indica quantas veces el antecedente contiene al consiguiente, ô es contenido en el; y asi dados por terminos de una razon los numeros 10, 5, el exponente será dos, porque el 10 contiene dos veces al 5. Y dados por terminos de otra razon los numeros 3, 12, el exponente será 4, por q.e el 3 se contiene 4 veces en el 12. Luego el exponente de una razon, es el quociente del mayor termino partido por el menor; y asi en los exemplos precedentes, el 10 partido por 5 el quociente es 2; y el 12 partido por 3 el quociente será 4.

195. Dados muchos terminos de proporcion comparados entre si los antecedentes, se llaman homologos, y tambien los consiguientes entre si comparados, se dicen homologos; y asi dados los numeros 8: 4: : 6: 3; el 8 comparado con el 6, se dicen homologos, porq.e son antecedentes, y lo mismo el 4 comparado con el 3, q.e son los consiguientes.

196. Quando algunas cantidades son inconmensurables (n. 187), la razon q.e hay entre ellas, se dice racional. Por el contrario, la razon se llama irracional, ô sorda, quando sus terminos son inconmensurables (n. 188).

197. Muchas razones son semejantes, ô es una misma la razon entre muchas magnitudes, quando un antecedente es â su consiguiente, como otro antecedente â su consiguiente: esto es, (quando el antecedente de una razon contiene â su consiguiente, ô es contenido en el tantas veces, como el antecedente de otra razon contiene â su consiguiente, ô es contenido en el): y asi dados los numeros 5: 15: : 10: 30. la misma razon hay de 5 â 15, q.e de 10 â 30; ô son semejantes las razones.

198. La semejanza de razones se llama tambien analogía, ô proporcion; los terminos entre los quales hay una misma razon, se llaman proporcionales; de estos, el primero y el ultimo se llaman extremos, y el segundo y tercero (si son 4 los terminos) se llaman medios. Si los terminos proporcionales fuesen solo tres, el primero y tercero se dicen extremos, y el segundo medio, ô media proporcional. Los terminos de proporcion, ô cantidades proporcionales, suelen expresarse del modo siguiente: 8: 4: : 6: 3. De otro modo: 8 – 4 = 6 – 3. De otro: 8: 4 = 6: 3. y se pronuncian asi: el 8 se tiene al 4, como el 6 al 3. O de otro modo: el 8 es al 4, como el 6 al 3.

199. Quatro terminos se dicen entre si geometricamente proporcionales, quando el primero es al segundo, como el tercero al quarto: tales son 10: 5: : 8: 4. O si fuesen solo tres, quando el primero es al segundo, como el segundo al tercero; como son: 8. 4. 2.

200. Quatro terminos se dicen discrete proporcionales, ô en proporcion discreta, quando el primero es al segundo, como el tercero al quarto, (sin atender

al segundo, respecto del tercero) como son los numeros: 12: 6 :: 8: 4. Pero si el primero es al segundo, como el segundo al tercero; y el segundo al tercero como el tercero al quarto; como son los numeros: 16: 8 :: 4: 2. se dicen continuó proporcionales, ô q.e están en proporcion continua, la qual suele expresarse así: ∻ 24. 12. 6. 3.

201. Quando los terminos proporcionales estan dispuestos con un orden natural, de tal suerte, q.e el primero sea al segundo, como el tercero al quarto, se dicen q.e están en razon ô proporcion directa; como son los numeros: 8: 4 :: 6: 3. Pero si los terminos de la proporcion invierten el orden de tal modo, q.e el primero sea al segundo, como el quarto al tercero; se dice, q.e están en proporcion inversa, ô reciproca; como en los numeros: 8: 4 :: 3: 6.

202. La proporcion ô razon se dice aritmetica, quando quatro cantidades son de tal modo proporcionales, q.e la diferencia de la primera â la segunda sea igual â la diferencia de la tercera â la quarta: tales son los numeros: 10, 8, 6, 4. Esta proporcion suele escrivirse de este modo: ÷ 4. 6. 10. 12.

203. Scholion. Aunque hay otras muchas especies de proporciones, se omiten aquí por no ser necesarias p.a el estudio de la Fisica. Solo advertimos, q.e esta palabra Sesqui junta con otras sirve para denotar las razones, q.e se encuentran entre algunas magnitudes, las quales razones no se expresan con lo q.e se dixo en el (n. 193); y así se dice razon sesquialtera, quando el antecedente contiene â su consiguiente una vez y media: sesquitertia, quando le contiene una vez y una tercera parte: sesquiquarta, quando le contiene una vez y una quarta parte, &c.a

204. Si la proporcion geometrica continua pasa de tres terminos, la coleccion de todos ellos se llama progresion, ô serie geometrica: como son los numeros: ∻ 32. 16. 8. 4. 2. Y si los terminos estubiesen en proporcion aritmetica (n. 202), su coleccion se dirá, progresion, ô serie aritmetica, como son los numeros: ÷ 10. 8. 6. 4. 2. &c.a

205. Si â una progresion geometrica se le pone debaxo otra progresion aritmetica, de tal suerte q.e el primer termino de la primera esté sobre el primer termino de la segunda, el segundo sobre el segundo, &c.a los terminos de la progresion aritmetica se llaman logarithmos de los terminos de la progresion geometrica; como se ve en el exemplo siguiente:

∻ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.
÷ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Luego el zero es logarithmo de la unidad, el 4 del 16, el 9 del 512, &c.a Del uso, y utilidad de los logarithmos, se dirá algo en adelante.

206. Quatro terminos proporcionales se pueden comparar entre si, quedando

siempre proporcionales: á saber, se pueden invertir, ó convertir: alternar, ó permutar: componer; dividir: se pueden tambien comparar por conversion de razon: ordenadamente dispuestos, ó ex equo ordinaté: y con proporcion perturbada, ó ex equo perturbaté; v. g.^{r} los quatro terminos proporcionales:

12 : 6 :: 8 : 4.

207. Se comparan convirtiendo, ó invirtiendo, quando los antecedentes se ponen en lugar de consiguientes, y los consiguientes en lugar de antecedentes; como:

6 : 12 :: 4 : 8.

208. Se comparan alternando, quando un antecedente se compara á otro antecedente, y un consiguiente á otro consiguiente; como:

12 : 8 :: 6 : 4.

209. Se comparan componiendo, quando la suma del antecedente y consiguiente se compara á solo el antecedente, ó á solo el consiguiente; como: (esta señal + significa mas).

12+6 : 12 :: 8+4 : 8.

ó haciendo la comparacion al consiguiente:

12+6 : 6 :: 8+4 : 4.

210. Se comparan dividiendo, quando el exceso del antecedente sobre el consiguiente se refiere á solo el antecedente, ó á solo el consiguiente; como: (esta señal — significa menos).

12−6 : 12 :: 8−4 : 8.

ó haciendo la comparacion al consiguiente:

12−6 : 6 :: 8−4 : 4.

211. Se comparan por conversion de la razon, quando la suma del antecedente y consiguiente, ó quando la diferencia del antecedente al consiguiente, se pone en lugar de consiguiente; como:

12 : 12+6 :: 8 : 8+4.

Si se pone la diferencia, en lugar de consiguiente, serán:

12 : 12−6 :: 8 : 8−4.

212. Se comparan con proporcion ordenada, ó ex equo ordinaté, quando dadas dos series geometricas, en las quales el primer termino de la primera serie es al segundo, como el primero de la segunda serie, es á su segundo; el segundo de la primera serie es al tercero, como en la segunda serie, el segundo es al tercero, &c.^{a} En este caso inferimos, q.^{e} el primer termino de la primera serie, es al ultimo, como en la segunda serie, el primer termino al ultimo; y asi dadas las dos series geometricas, dispuestas en el modo dho, como son las siguientes:

Primera serie . . . . ÷ 12. 6. 3.
Segunda serie . . . . ÷ 8. 4. 2.
Inferimos, que . . . . 12: 3: : 8: 2.
Y lo mismo sucede, si la progresion ô serie tuviese mas terminos.

213. Se comparan con proporcion perturbada, quando dos series geometricas de tal suerte son proporcionales, q.e en la primera serie, el primer termino sea al segundo, como en la segunda serie el primer termino al segundo, y el segundo termino de la primera serie sea al tercero, como en la segunda serie otra qualquiera magnitud es al primer termino; en este caso inferimos, que en la primera serie, el primer termino es al tercero, como en la segunda serie la magnitud, q.e comparamos con el primer termino es al segundo, y asi dadas las dos series geometricas:

Primera . . . . ÷ 12. 6. 3.
Segunda . . . . ÷ 16: 8. 4.
En las quales 12: 6: : 8: 4. (Suponemos al 8 por primer termino de la segunda serie), y 6: 3: : 16: 8. (Suponemos al 16 como una magnitud, que comparamos al primer termino de la segunda serie, que es 8.)
Inferimos, que . . . . 12: 3: : 16: 4.
Esto es, que el 12 primer termino de la primera serie es al 3 ultimo termino de la primera serie, como el 16, magnitud, que comparamos con el 8, primer termino de la segunda serie, es al 4 segundo termino de la segunda serie.

Exemplos de estas comparaciones en quantidades literales reducidas a num.s

214. Dadas las quatro cantidades proporcionales ~~[illegible]~~ a: b: : c: d. que equivalgan â los numeros: 12: 6: : 8: 4. (Està señal = significa igual) seràn: . . . .
Invirtiendo . . . . b: a: : d: c. = 6: 12: : 8: 4.
Alternando . . . . a: c: : b: d. = 12: 8: : 6: 4.
Componiendo . . . . . . a+b: b: : c+d: d. = 12+6: 6: : 8+4: 4.
Ô como en el n. 209 . . . a+b: a: : c+d: c. = 12+6: 12: : 8+4: 8.
Dividiendo . . . . a−b: a: : c−d: c. = 12−6: 12: : 8−4: 8.
Ô como en el nu. 210 . . . a−b: b: : c−d: d. = 12−6: 6: : 8−4: 4.
Por conversion de razon. a: a+b: : c: c+d. = 12: 12+6: : 8: 8+4.
Ô como en el n. 211 . . . a: a−b: : c: c−d. = 12: 12−6: : 8: 8−4.
Con proporcion ordenada, dados los terminos ÷ a. b. c. d. = 16. 8. 4. 2.
Y dados tambien los terminos . . . . ÷ o. g. x. s. = 24. 12. 6. 3.
Infeximos, que . . . . a: d: : o: x. = 16: 2: : 24: 3.

215. Si se disponen las dos series en proporcion perturbada, de tal modo, q. dadas las cantidades $a, b, c. x, o, g, s.$ que en la primera serie $a : b$: como en la segunda serie $o : g$. y en la primera $b : c$. como en la segunda $x : o$. inferimos, que $a : c :: x : g$. O si en lugar de las magnitudes . . . . $a,\ b,\ c.\ \div\ x,\ o,\ g,\ s.$
Se ponen los numeros . . . . $8.\ 4.\ 2.\ \div\ 24.\ 12,\ 6,\ 3.$
Dispuesto en la misma proporcion, que las quantidades literales, de modo que asi como la cantidad o la suponemos como el primer termino de la segunda serie, y la cantidad x, como una tercera magnitud, que comparamos con dicho primer termino o; asi tambien el 12 lo suponemos por primer termino, y el 24. como uno q.e comparamos al 12. Inferimos que . . . . $8 : 2 :: 24 : 6$.

Axiomas.

216. I.º Si dos magnitudes fueren iguales, tendrán una misma razon con otra tercera magnitud. Y si dos magnitudes tubiesen una misma razon con una tercera, serán iguales; asi, si $a = 8$, y $c = 8$. $a : 4 :: c : 4$.

II. Si dos magnitudes fueren iguales, tendrán igual razon â iguales magnitudes. Y si dos magnitudes tienen igual razon â iguales magnitudes, son iguales: v. g. si $a = b$. y tambien $c = d$, se sigue, que $a : c :: b : d$.

III. Si dos magnitudes fueren desiguales, la mayor tendrá mayor razon â otra tercera magnitud, que la menor. Por el contrario, la tercera magnitud tendrá menor razon â la mayor de las dadas.

IV. Si una magnitud se multiplica separadamente por dos cantidades iguales, los productos serán iguales. Lo mismo sucederá si dos magnitudes iguales se multiplican separadamente por una misma, ô por iguales cantidades.

V. Si una misma magnitud se parte por iguales cantidades, los quocientes serán iguales; y lo mismo si iguales cantidades se parten por una misma, ô por iguales cantidades; serán tambien iguales los quocientes.

VI. Las razones iguales tienen iguales exponentes; y al contrario, las razones, q.e tienen un mismo exponente son iguales entre si.

Theorema I.

Si dos cantidades homogeneas se multiplican por una misma, la razon que hay de la primera cantidad â la segunda, habrá tambien del producto de la primera, al producto de la segunda.

217. Demostracion. Sean las dos cantidades homogeneas $A. B$, las que se multipliquen por una tercera cantidad D, y los productos serán AD, BD; los quales productos están en la misma razon, q.e las dos cantidades dadas A, B; y se hará la proporcion en esta forma: $A : B :: AD : BD$.

Esto se hará patente reducidas estas cantidades á numeros, porqᵉ si $A=6$. $B=3$. $D=4$. El producto AD será 24; y el producto BD, 12; es evidente, que $6:3::24:12$.

218. Corolario. Dadas dos cantidades y tambien dos iguales multitudes de las mismas cantidades, la razon de la primera cantidad á la segunda; por exemplo: Dados dos triangulos, que el uno sea doble del otro triangulo, si suponemos veinte triangulos iguales al mayor, y otros veinte iguales al triangulo menor, asi como los dos triangulos dados están en razon dupla, lo estarán tambien los veinte triangulos mayores con los veinte menores en razon dupla. De esto se sigue, qᵉ dos magnitudes tienen entre si la misma razon, que sus partes semejantes, y dos partes semejantes están entre si en la misma razon, que sus todos, (n. 186).

Theorema II.

Si quatro cantidades sean proporcionales, tambien invirtiendo serán proporcionales.

219. Demostracion. Sean los quatro terminos proporcionales $A:B::C:D$, inviertanse (n. 207) y perseverará la proporcion $B:A::D:C$. Esto es evidente; pues siempre perseverán los mismos exponentes en las razones, ya se pongan por antecedentes A, C, ya se pongan BD; como está patente en los numeros $2:4::3:6$. Serán invirtiendo $4:2::6:3$, cuyos exponentes son iguales en las dos proporciones, luego siempre será una misma razon, por el axioma VI, n. 216.

Theorema III.

Si quatro cantidades fueren proporcionales, tambien alternando serán proporcionales.

220. Demostracion. Sean los numeros proporcionales $4:2::6:3$, alternense (n. 208), y quedará la proporcion $4:6::2:3$. Pues ó los antecedentes 4, 6 son multiplices de los consiguientes 2, 3; y en este caso tendrán la misma razon, que sus partes semejantes, que son los consiguientes (n. 218), ó los antecedentes son partes semejantes de los consiguientes, y sucederá lo mismo (n. 218).

377

Theorema IV.

Si quatro cantidades fueren proporcionales, dividiendo serán tambien proporcionales.

221. Demostracion. Dados quatro terminos proporcionales A: B : : C: D; hagase la comparacion dividiendo (n. 210) y quedará la proporcion: A − B: B : : C − D: D; y tambien son proporcionales, porque en este caso, por la substraccion, se quitan á los antecedentes partes semejantes, como son B. D. Esto está patente en los numeros 4: 2 : : 6: 3, que si se comparan dividiendo serán 4 − 2: 2 : : 6 − 3: que equivalen á esta proporcion 2: 2 : : 3: 3, como está manifiesto.

Theorema V.

Si quatro cantidades son proporcionales, tambien componiendo serán proporcionales.

222. Demostracion. Sean las quatro cantidades proporcionales A: B : : C: D. Si se comparan componiendo (n. 209) serán: A + B: B : : C + D: D, tambien proporcionales; porque en este caso, á los antecedentes se les añaden partes proporcionales, y de consiguiente, no mudan la proporcion: como está patente en los numeros: 4: 2 : : 6: 3, que componiendo serán: 4 + 2: 2 : : 6 + 3: 3.

Theorema VI.

Si quatro cantidades fueren proporcionales, por conversion de la razon serán proporcionales.

223. Demostracion. Dadas las quatro cantidades proporcionales A: B : : C: D, serán por conversion de la razon (n. 211) A: A + B : : C: C + D; y si se pone la diferencia en lugar de consiguiente, será: A: A − B : : C: C − D, cuyas cantidades reducidas á numeros, de modo, q.e A sea = 12, B = 6, C = 8, D = 4; serán las quatro cantidades proporcionales en la forma siguiente: 12: 6 : : 8: 4; y por conversion de razon: 12: 12 + 6 : : 8: 8 + 4; y poniendo la diferencia en lugar de consiguiente; será: 12: 12 − 6 : : 8: 8 − 4; y de ambos modos quedan siempre proporcionales, pues en el primer caso, la proporcion equivale á esta: 12: 18 : : 8: 12, y en el segundo, que el consiguiente sea la diferencia, será: 12: 6 : : 8: 4.

Theorema VII.

Dadas dos series geometricas de magnitudes dispuertas en proporcion ordenada, la razon de los extremos de una serie es semejante â la razon de los extremos de la otra serie.

224. Demostracion. Sean las dos series en proporcion ordenada ∺ A, B, D. ∺ O, I, R, que equivalgan en numeros â las siguientes ∺ 12, 6, 3. ∺ 8, 4, 2; sean los dos extremos D, R, menores que B, I, (lo mismo será la demostracion siendo mayores los extremos) siendo por la suposicion B : D : : I : R, serán por consigte D, R, partes semejantes de las quantidades B, I. Mas las magnitudes A, O son proporcionales â los todos B, I; luego tambien serán proporcionales â las partes semejantes de dichos todos, porqe las partes semejantes y sus todos tienen una misma razon (n. 218). Esto se hace mas claro en los numeros, qe hemos dho equivalen â estas cantidades literales, cuyos extremos de las dos series son proporcionales, porqe es evidente, qe 12 : 3 : : 8 : 2. Luego tambien serán proporcionales estas magnitudes A : D : : O : R.

Theorema VIII.

Si se ponen dos series de cantidades con proporcion perturbada, los extremos de la primera serie estan en la misma razon, que los extremos de la segunda.

225. Demostracion. Sean las dos series de magnitudes, la primera ∺ A, B, C; la segunda ∺ R, O, I; dispuestas en proporcion perturbada (n. 213) â quienes equivalgan los numeros 12, 6, 3; y en la segunda serie 16, 8, 4; en este caso A : C : : R : I, ô en numeros: 12 : 3 : : 16 : 4. Es la razon, porque si en la segunda serie imaginamos otra cantidad, v. g. S (que en numeros equivalga â 2) â la qual la segunda cantidad I se tenga como en la primera serie B se tiene â C, serán en la primera serie las cantidades A, B, C; (en numeros 12, 6, 3) y en la segunda serie O, I, S, (en numeros 8, 4, 2) dispuestas con proporcion ordenada (n. 224) y por consiguiente serán A : C : : O : S; y en numeros: 12 : 3 : : 8 : 2.

Y siendo por la suposicion . . . . I : S : : B : C = 4 : 2 : : 6 : 3.
Siendo tambien por la suposicion . . . . B : C : : R : O = 6 : 3 : : 16 : 8.
Serán por consiguiente . . . . I : S : : R : O = 4 : 2 : : 16 : 8.
Y alternando (num. 220). . . . . I : R : : S : O = 4 : 16 : : 2 : 8 :
E invirtiendo (num. 219) . . . . O : S : : R : I = 8 : 2 : : 16 : 4.
Es así que con proporcion ordenada son. O : S : : A : C = 8 : 2 : : 12 : 3.
Luego se infiere que . . . . R : I : : A : C = 16 : 4 : : 12 : 3.
Que es lo propuesto. Lo mismo se hará la demostracion si fuesen mas los

terminos en las dos series geometricas.

Capitulo VII.

De la razon compuesta.

226. Suposicion. Sucede muchas veces, que una cantidad excede à otra por muchos principios: v.g. el rectangulo B fig. 68, es mayor que el rectangulo A, por ser mayor la altura HL del primero, que la altura TY del segundo, y por ser tambien mayor la base HI, que la base TV; supongamos q.e la altura del rectangulo B=6, es dupla de la altura del rectangulo A=3; solo por este principio estarian estos dos rectangulos como de dos à uno, ò en razon dupla: supongamos tambien, q.e la base del rectangulo B=8, es quatro veces mayor, q.e la base del rectangulo A=2, ya por razon de las bases deberia ser el rectangulo B al rectangulo A como de 4 à 1, ò en razon quadrupla; y combinando estas dos razones de alturas y bases, no hemos de sumar una con otra diciendo: 4 y 2 son 6, y de consiguiente inferir, q.e el rectangulo B sea 6 veces mayor, que el rectangulo A; sino q.e los exponentes de las dos razones de bases y alturas, se han de multiplicar uno por otro, à saber: 4 por 2 y el producto igual à 8 es el exponente de la razon, q.e hay del rectangulo B al rectangulo A compuesta de las dos razones, que hay entre las dos alturas y las dos bases; y el exponente de esta razon compuesta, manifiesta quantas veces el rectangulo B contiene al rectangulo A. Esto supuesto:

227. Definiciones. Razon compuesta de otras razones, se dice quando las cantidades, que componen otras razones: ò los exponentes de muchas razones se multiplican y componen una razon: v.g. será razon compuesta la que hay entre las dos cantidades expresadas por las areas de los dos rectangulos B A fig. 68 (por area de un rectangulo ò de otra fig.a entendemos todo el espacio comprehendido dentro de sus lados) por q.e estas dos cantidades están compuestas de las dos alturas TY, HL, y de las dos bases TS, HI, y por tanto es una razon compuesta de la razon, q.e hay de la altura HL=6, à la altura TY=3, y de la razon de la base HI=8, à la base TS=2, porq.e multiplicado el exponente de las alturas, q.e es el 2, por el exponente de las bases, q.e es 4, su producto 8, es el exponente de la razon, que hay entre las areas de los dos rectangulos, el qual exponente 8 da à entender, q.e el rectangulo B es 8 veces mayor, q.e el rectangulo A.

228. Lo mismo sucederá si multiplicamos las cantidades, que componen las razones simples, que son las bases y alturas de los rectangulos, de tal modo que la base HI del rectangulo B=8, se multiplique por la altura HL=6 del mismo rectangulo y el producto igual à 48 expresará el area del rectangulo B (n. 131) y la altura TV=3 del rectangulo A se mul-

tiplique por la base TS = 2 del mismo rectangulo, el producto 6 expresará el area del rectangulo A; estos dos productos 48 y 6 tienen por exponente 8, que es la razon que hay del area del rectangulo B al area del rectangulo A; luego p.ª hacer una razon compuesta, es lo mismo multiplicar los exponentes de las razones simples, que multiplicar las cantidades, que componen las misma razones simples. Las razones de cuyo producto se hace la razon compuesta, se llaman razones componentes.

229. Scholion. Luego la razon compuesta es el producto de otras razones, cuyos exponentes multiplicados entre si, dan el exponente de la razon compuesta; y asi la razon de 192 á 24 (estos numeros manifiestan las areas de los rectangulos C D fig. 69) cuyo exponente es 8, es compuesta de las dos razones 8.4 (cuyos numeros manifiestan las alturas de dhos dos rectangulos) y 24 y 6 (cuyos numeros manifiestan las bases de los mismos rectangulos) pues el exponente de la 1.ª razon, ó de las alturas es 2, y el de la 2.ª ó el de las bases es 4; los quales exponentes multiplicados hacen 8, que es el exponente de la razon que hay de 192 á 24. Este mismo exponente 8 saldrá si se multiplicar los terminos de las razones simples que producen las cantidades 192 y 24: esto es, si multiplicamos 8 q.e manifiesta la altura del rectangulo C por 24, q.e expresa la base, el producto será 192, y si multiplicamos 4 altura del rectangulo D por su base 6, el producto será 24; y es evidente, q.e entre estos dos productos 192 y 24 hay una razon, cuyo exponente es 8. Lo mismo se dice de otras qualesquiera magnitudes, q.e se pueden considerar como rectangulos, siempre que cada una de ellas se componga de dos cantidades.

230. Corolario. Se infiere de lo dicho, que dos qualesquiera productos están entre si en la razon compuesta de las razones q.e hay entre sus factores, ó cantidades, que los producen; pues no se pueden multiplicar los factores, ó cantidades producentes, sin que resulte entre los productos el mismo exponente, q.e si se multiplicasen los exponentes de las razones simples, que hay entre los factores, á saber: entre los dos multiplicadores y los dos multiplicandos; y asi dados los productos de 4 multiplicado por 10 = á 40, que manifiesta el area del rectangulo E fig. 80, y 8 multiplicado por 20 = á 160, el qual producto expresa el area del rectangulo F, la razon q.e hay entre los dos productos 40 y 160, es compuesta de las razones que hay de 4 á 8, cuyo exponente es 2, y de 10 á 20, cuyo exponente es 2. Multiplicados tambien estos dos exponentes, hacen un producto igual á 4, que es el exponente de la razon que hay de 40 á 160.

231. La razon compuesta, q.e se compone de dos razones semejantes, se llama duplicada, yasi la razon compuesta, que hay entre los dos rectangulos F, E, fig. 80, es duplicada, porque la razon que hay de la altura del rectangulo F=20 â la altura del rectangulo E=10 es la misma, q.e la razon que hay de la base 8, â la base 4 de los mismos rectangulos. Luego la razon duplicada es aquella, que tiene por exponente el quadrado de qualesquiera de las razones componentes; porque siendo la razon duplicada compuesta de dos razones semejantes, será lo mismo multiplicar los dos exponentes, que hacer el quadrado de uno de ellos, pues siempre será el mismo el exponente de la razon compuesta: como en el caso de los dos rectangulos F E fig. 80, el exponente de las dos bases es 2, y lo mismo el exponente de las alturas: luego ya sea multiplicando estos dos exponentes, ô haciendo el quadrado de qualesquiera de ellos siempre el producto será 4; y podrémos decir, que estos dos rectangulos (y lo mismo otras magnitudes, q.e se componen de dos razones iguales) están en la razon duplicada de sus bases, ô de sus alturas, que será lo mismo, que decir: que están en la razon compuesta de sus bases y alturas; siempre que la razon de las bases sea la misma, que la razon de las alturas.

232. Del mismo modo: Dados tres numeros en proporcion continua (n. 200) (que equivalgan â qualquier genero de magnitudes) como son 32. 8. 2. la razon del primero al tercero es duplicada de la razon que hay del primero al segundo, porq.e el exponente de la razon de 32 â 2 es 16 quadrado del exponente de la razon, q.e hay de 32 â 8, q.e es 4. Igualm.te si decimos, q.e los pesos de dos cuerpos estan en la razon duplicada de sus longitudes, será decir, q.e la razon que hay entre los pesos de los dos cuerpos tiene por exponente un numero, que debe ser el quadrado del numero, q.e exprese la razon q.e hay entre las dos longitudes: De modo, que si por exemplo: el exponente de la razon de las longitudes es 6, por ser una longitud 6 veces mayor que otra, el exponente de la razon q.e hay entre los pesos será 36.

233. Razon subduplicada es aquella, q.e tiene por exponente la raiz quadrada del exponente de otra razon; y asi, dadas tres magnitudes en proporcion continua (n. 200) expresadas por los numeros 12. 6. 3. la razon de la primera â la segunda es subduplicada de la razon de la primera â la tercera, pues el exponente de 12 â 3 es 4, y el exponente de 12 â 6 es 2 raiz quadrada de 4. Lo mismo será si decimos q.e las anchuras de dos torres están en la razon subduplicada de sus alturas; en este caso, si una torre fuese mas alta q.e otra 16 veces, q.e la razon de las alturas, tendrá por exponente 16, el exponente de la razon de las anchuras será 4, raiz quadrada de 16, y una torre será mas ancha q.e otra 4 veces.

234. Tambien suele suceder, q.e una cantidad, ô magnitud excede â otra por tres ô mas principios, como por exemplo; el cubo A B, fig.a 81 (q.e sea cubo, se dirá quando

se trate de los solidos) excede al cubo a b, por ser mas largo, por ser mas ancho, y por ser mas alto: y en este caso la razon q.e hay de un cubo â otro será compuesta de tres razones, â saber: de la que hay entre sus longitudes, sus latitudes y sus alturas. Para hacer esta razon compuesta de tres razones, se buscan los tres exponentes de las longitudes, latitudes y alturas, y multiplicados entre si, hacen con su producto el exponente de la razon q.e hay de un cubo â otro: sea v.g. el exponente de las longitudes 2 por ser el cubo AB dos veces mas largo, q.e el cubo a b. Sea tambien el exponente de las latitudes 2, por ser la anchura del cubo AB doble del cubo a b: y sea finalmente el exponente de las alturas 2 por la altura de AB doble de a b; multiplicados estos tres exponentes su producto es 8, q.e es la razon que hay del cubo AB al cubo a b.

235. Se hará esto mas claro poniendo un exemplo en numeros. Sean los quatro numeros proporcionales en proporcion continua: 24. 12. 6. 3. la razon q.e hay del 24 al 3 es compuesta de tres razones, esto es, de la razon que hay de 24 â 12 de 12 â 6, de 6 â 3: pues dichas tres razones todas tienen por exponente 2; y si 2 lo multiplicamos por 2, su producto será 4, q.e multiplicado por 2 hace 8, q.e es el exponente de la razon q.e hay de 24 â 3. Asi mismo la razon q.e hay entre dos habitaciones desiguales, es compuesta de las tres razones, â saber: entre sus longitudes, latitudes, y alturas: y asi para buscar la razon compuesta, se buscarán antes las razones simples, esto es, de las longitudes, latitudes, y alturas, cuyos exponentes multiplicados con su producto harán el exponente de la razon compuesta que hay entre las dos habitaciones; si por exemplo, una habitacion es tres veces mas larga q.e otra; quatro veces mas ancha, y seis veces mas alta, los exponentes de las razones simples serán 3. 4. 6, que multiplicados darán por producto 72, que será el exponente de la razon que hay de una habitacion â otra, y este exponente expresa, que la habitacion mayor contiene â la menor 72 veces.

236. Quando la razon compuesta de tres razones, se compone de tres razones semejantes, ô iguales, como son: la que hay entre los dos cubos AB, a b, fig. 81; y la que hay en el exemplo de los 4 numeros de proporcion continua (num. anteced.te) esta razon compuesta se llama triplicada. Luego el exponente de la razon triplicada es el cubo del exponente de una de las razones simples: y asi, si decimos que los cubos AB, a b están en la razon triplicada de sus alturas, se buscará el exponente de la razon q.e hay entre las alturas, q.e en este caso es 2, y buscado el cubo de 2, q.e es 8, será el exponente de la razon q.e hay entre los dos cubos.

237. El exponente de la razon subtriplicada es la raiz cubica del numero que expresa el exponente de otra razon: y asi si decimos, que dos celeridades están en la razon subtriplicada de las distancias de dos cuerpos, lo q.e se entiende es, q.e si la razon de las distancias tiene por exponente 64, por ser una distancia

64 veces mayor q.e otra, el exponente de la razon q.e hay entre las celeridades será 4, q.e es la raiz cubica de 64. Si la razon compuesta se compone de 4 razones iguales, se llama quadruplicada, &c.a

238. Scholion. Es mucha la diferencia q.e hay entre la razon dupla y duplicada; tripla y triplicada; subdupla y subduplicada; subtripla y subtriplicada; porq.e razon dupla, ô tripla se dice respecto de una magnitud, que contiene â otra dos ô tres veces (num. 193): Subdupla ô subtripla respecto de una magnitud, que es contenida en otra dos ô tres veces: Pero razon duplicada, ô triplicada no se dice respecto de las magnitudes, sino respecto de las razones q.e hay entre las magnitudes, en quanto una razon contiene â otra dos, tres, ô mas veces; ô en quanto una razon tiene por exponente el quadrado ô cubo del numero q.e expresa el exponente de otra razon (n. 232 y sig.tes). Esto se entenderá facilmente, si se advierte la diferencia que hay entre las magnitudes y razones.

Capitulo VIII.

De la proporcion que hay entre los planos rectilineos.

239. Definiciones. Las figuras se dicen semejantes, quando tienen iguales angulos, y los lados opuestos â sus angulos iguales son proporcionales. Luego todas las figuras regulares de una misma especie (n. 101) son semejantes entre sí.

240. Segmentos, sectores y arcos semejantes son aquellos, q.e â sus enteros circulos dicen una misma razon. Luego todos los sectores, q.e tienen por medida un angulo recto (n.) sean de circulos mayores ô menores, son semejantes. Lo mismo se dice respectivamente de los arcos y segmentos.

241. Dos figuras se dicen reciprocas, quando la base de la primera es â la base de la segunda, como la altura de esta segunda â la altura de la primera (n. 201).

242. La figura se dice inscripta en un circulo, quando todos los angulos de la figura tocan en la periferia del circulo. Se dirá circunscripta, quando todos los lados de la figura tocan en la periferia del circulo.

243. El circulo se dice inscripto en una figura, quando su periferia toca todos los lados de la figura. Se dirá circunscripto, quando su periferia toca todos los angulos de la figura.

Theorema I.

Los triangulos y paralelogramos de una misma altura, están entre sí en la razon de sus bases.

244. Demostracion: y primeramente en quanto â los triangulos. Dados los dos triangulos ADB, FCE fig. 82, de una misma altura, pero de desiguales bases; midanse las bases con una aliquota comun (n. 182) y notese quantas veces

contienen dhas bases à la aliquota; desde cada uno de los puntos, q.e señalan las aliquotas, echense otras tantas rectas, q.e concurran todas en los angulos verticales D, C, y por estas rectas quedarán divididos los dos triangulos dados en tantos triangulos menores y todos iguales (n. 106) quantas son las aliquotas de las bases: Por consiguiente tendremos quatro terminos, à saber: dos bases AB, FE y dos multitudes de triangulos; estas y las multitudes de triangulos se expresan por el numero de las aliquotas, q.e se contienen en cada una de las bases: esto es, si la base AB contiene quatro aliquotas serán quatro los triangulos menores, è iguales, q.e constituyen al triangulo ADB; y si la base FE contiene ocho aliquotas, serán ocho los triangulos menores è iguales, q.e componen todo el triangulo FCE: luego un triangulo es â otro triangulo, como una base â otra base: luego los triangulos de una misma altura están en la misma razon q.e sus bases. Esta misma demostracion tiene su valor, aun quando las bases de los triangulos dados sean inconmensurables (n.   pudiendose elegir por aliquota una longitud infinitamente pequeña.

245. Por quanto los paralelogramos son duplos de los triangulos quando los triangulos y paralelogramos tienen bases y alturas iguales (n. 107) y los todos estan entre si en la misma razon q.e sus partes semejantes (n. 218), está patente que los paralelogramos, q.e tienen una misma altura están entre si en la razon de sus bases.

Theorema II.

Los triangulos y paralelogramos que tienen una misma base y diversas alturas estan entre si en la razon de las alturas.

246. Demostracion. Dados los triangulos ACB, DFE fig. 83 de iguales bases AB, DE y de desiguales alturas; si desde los angulos verticales C, F se echan las perpendiculares Cb, Fe, estas serán las alturas de los triangulos dados (n. 55); prolonguense las bases de los triangulos hasta los puntos a, d, de tal suerte, q.e la distancia A, a, sea igual â la distancia B, b, y la distancia D, d, igual â la distancia E, e, y toda la recta a b igual â la base AB; y la recta d e pequeña igual â la base D; desde los puntos a, d, echense las rectas a, C, d F, y tendremos los dos triangulos a C b, d Fe iguales â los triangulos dados ACB, DFE (n. 106). Ahora pues, si consideramos las dos perpendiculares Cb, Fe como bases de los dos nuevos triangulos, y las bases ab, de como alturas, es evidente por la demostracion antecedente (n. 244) q.e el triangulo a C b, es al triangulo d Fe como la perpendicular b C es â la perpendicular e F; es así q.e estas perpendiculares son las alturas de los triangulos a C b, d Fe, luego dhos triangulos están en la misma razon q.e sus alturas; y siendo estos

385

iguales à los triangulos dados ACB, DFE, estarán estos por consiguiente en la razon de sus alturas.

247. La misma demostracion prueba, q.e los paralelogramos de diversas alturas, pero de iguales bases, estan en la razon de sus alturas; pues los paralelogramos son dobles de los triangulos, q.e tienen con ellos una misma base y altura (n. 107), y los todos están en la misma razon, q.e sus partes semejantes (n. 218).

Theorema III.

Qualesquiera paralelogramos comparados entre si estan en la razon compuesta de sus bases y alturas.

248. Demostracion. Dados los paralelogramos C, D, fig. 69, es evidente, q.e el area del paralelogramo C es el producto de la base multiplicada por la altura (n. 131) y el area del paralelogramo D es el producto de su base multiplicada por la altura, luego las bases y las alturas de estos paralelogramos son magnitudes ô cantidades de q.e se componen las areas; es así que estas areas ô magnitudes compuestas cada una de otras dos magnitudes están en la razon compuesta de las cantidades ô magnitudes componentes por lo dicho en los num.s 226 y sig.tes; luego los paralelogramos están en la razon compuesta de sus bases y alturas.

249. Siendo los triangulos mitades de los paralelogramos, quando con ellos tienen iguales bases y alturas (n. 107), y estando las partes semejantes en la misma razon, q.e los todos (n. 218) tambien los triangulos están en la razon compuesta de bases y alturas.

Theorema IV.

Los paralelogramos que tienen bases y alturas reciprocas son iguales; y por el contrario, si fuesen iguales, tendrán bases y alturas reciprocas.

250. Demostracion. Sean los dos paralelogramos rectangulos AE, DC, fig. 84, en los quales, la base AB se tenga â la base BC como la altura DB â la altura BE (así debe ser, p.a q.e tengan bases y alturas reciprocas n. 241) prolonguense los lados SE, TC hasta que concurran en el punto X; en este caso el rectangulo F será al rectangulo H, por ser los dos de una misma altura BE, como la base AB â la base BC, (n. 245) y el rectangulo L será al rectangulo H, por ser los dos de una misma base BC, como la altura DB â la altura BE (n. 247); las bases y las alturas tienen una misma razon, pues por el hipotesi, la base AB es â la base BC, como la altura DB, â la altura BE, luego los dos rectangulos L F tienen una misma razon con el rectangulo H; es así, q.e quando dos magnitudes dicen la misma razon con otra tercera magnitud, son iguales dichas dos magnitudes por el axioma I, n. 216; luego los dos paralelogramos F, L, q.e tienen bases y alturas reciprocas son iguales.

251. La segunda parte es tambien evidente: Porque si siendo AB: BC :: DB: BE; son iguales los paralelogramos F, L, quando dichos paralelogramos sean iguales, será AB: BC :: DB: BE; ô tendrán bases y alturas reciprocas.

252. Corolario I. Esto es verdad de qualesquiera paralelogramos aunq.e no sean rectangulos; pues todo paralelogramo se puede reducir â rectangulo (n. 105). tambien los triangulos, q.e tienen bases y alturas reciprocas son iguales; pues los triangulos son mitades de los paralelogramos, quando tienen con ellos unas mismas bases y alturas (n. 107) y las partes semejantes estan entre si en la misma razon que los todos (n. 218).

253. ~~Dada~~ Corolario II. Dadas quatro cantidades geometricamente proporcionales, el rectangulo formado de los extremos es igual al rectangulo formado de los medios; pues en este caso, dhos rectangulos tendrán bases y alturas reciprocas; porq.e si la base AB es igual â 8, la base BC igual â 4, la altura DB igual â 4, y la altura BE igual â 2, será la base del primer rectangulo â la base del segundo, como la altura de este segundo, âla altura del primero, y resultarán los quatro terminos geometricam.te proporcionales: 8: 4:: 4: 2. El producto de los extremos 8, 2, es igual â 16, y el producto de los medios 8, 4 es tambien igual â 16.

254. Corolario III. Dadas tres cantidades en proporcion continua, el quadrado de la media es igual al rectangulo de las extremas. Pues en este caso los dos rectangulos tendrán bases y alturas reciprocas (n. 215). Si las tres cantidades en proporcion continua, son: AB = 8, BC = 4, BE = 2, el quadrado de la media será L = 16 (n. 131), y el rectangulo de las extremas será F tambien = 16: luego dadas tres cantidades continuo proporcionales, el quadrado de la media es igual al rectangulo de las extremas.

Theorema V.

Los lados de los triangulos equiangulos, que comprehenden iguales angulos son entre si proporcionales.

255. Demostracion. Dados los dos triangulos equiangulos ACB, DEC fig. 85; prolongando sus lados, formese una figura como es dha 85; siendo los angulos ABC, DCE iguales por la suposicion, serán paralelas las rectas AB, CD, tambien por la misma razon serán paralelas las rectas AC, DE (n. 47): toda la linea BE será la diagonal del paralelogramo FH y los complementos AD, GI serán iguales (n. 104) y equiangulos, pues los angulos GCI, ACD son iguales por opuestos en el vertex (n), y dos paralelogramos q.e tienen un angulo igual son equiangulos (n. 94) los quales complementos por ser dos paralelogramos iguales deben tener bases y alturas reciprocas (n. 251) y por consiguiente la base AC será â la base CI = DE como la altura GC = BA â la altura CD; luego AC: DE:: AB: DC, y alternando AC: AB:: DE: DC. Igualmente por la produccion de los lados podrá demostrarse, q.e BC: CE:: AC: DE. Luego todos los lados de los triangulos semejantes, que comprehenden iguales angulos son entre si proporcionales.

256. Corolario I. En todo triangulo echada una linea paralela â uno de sus lados, corta â los otros dos proporcionalmente, y al contrario, quando una linea corta propor-

cionalmente â dos lados de un triangulo será paralela al tercer lado. Pues en el triangulo STR fig. 86, la paralela MN forma el triangulo MTN equiangulo al triangulo RTS (n. 75) y por consiguiente los lados, q.e comprehenden el angulo T comun para los dos triangulos, serán proporcionales (n. 255); luego RT: ST: : MT: NT.

257. La segunda parte está tambien manifiesta, porq.e si DE fig. 87 no es paralela â BC será otra linea distinta, v.g. dE, y en este caso los lados AB, AC se cortarán en la misma proporcion en el punto D, q.e en el punto d (n. 256); lo qual es un absurdo, porq.e siendo por la suposicion: AB: DB: : CB: EB, no puede ser AB: dB: : CB: EB.

258. Corolario II. Dados dos triangulos, en los quales dos lados de uno sean proporcionales â dos lados de otro, y los angulos comprehendidos en dhos lados sean iguales; los tales triangulos serán necesariamente equiangulos. Los dos triangulos dados sean ABC, abc, fig. 18, si el triangulo ABC se pone sobre abc, de tal modo que el angulo A cayga sobre a, y por la suposicion AB: ae: : AC: ad; tambien la base BC será paralela â la base ed (n. 257); luego los dos triangulos dados serán equiangulos (n. 4).

Theorema VI.

Los triangulos cuyos lados son proporcionales serán equiangulos, y por consiguiente semejantes.

259. Demostracion. Dados los dos triangulos BAC, FDE, q.e tengan lados proporcionales, si suponemos q.e son homologos los lados AB, DF fig. 88, formado sobre DF el angulo DFH igual al angulo B y el angulo HDF ~~igual al angulo~~ igual al angulo A, todo el triangulo DHF será equiangulo con el triangulo BAC (n. 258) y por consiguiente AB: AC: : FD: HD (n. 255); es así q.e por el hipotesi AB: AC: : DF: DE, luego será DH: DF: : ED: DF, y por consiguiente DH igual â DE, por el axioma I n. 216. Del mismo modo puede demostrarse, q.e el lado HF es igual al lado FE; y siendo el lado DF comun p.a los dos triangulos, se sigue necesariamente, q.e el triangulo FHD es igual en todo al triangulo FED (n. 73) y por consiguiente serán iguales los angulos E, H, opuestos â un mismo lado DF (n. 66); es así q.e el triangulo FHD es por su construccion equiangulo al triangulo ABC, luego tambien el triangulo DFE será equiangulo al triangulo ABC; y por consiguiente los dos triangulos dados son perfectamente semejantes.

Theorema VII.

Dadas tres lineas en proporcion continua, el quadrado de la primera es al quadrado de la segunda, como la primera linea â la tercera.

260. Demostracion. Las tres lineas dadas sean AB, DE, HI, fig. 89, de tal modo q.e AB: DE: : DE: HI, el rectangulo CM formado por la primera linea AB y por la tercera HI (la linea AB es igual â la linea AC por ser lados de un quadrado: HI

igual â A M por construccion) es igual al quadrado de la media D E (n. 254); es asi que el quadrado de la primera A B es al rectangulo C M por ser de una misma altura B G como la base A B â la base A M (n. 245), ô como la primera linea A B â la tercera H I igual â A M; y siendo iguales el rectangulo C M, y el quadrado G E, el quadrado C B dirá la misma razon al rectangulo C M, q.e al quadrado G E por el axioma I n. 216. Queda dicho q.e el quadrado C B es al rectangulo C M, como la linea primera â la tercera; luego el mismo quadrado C B será al quadrado G E como la primera linea â la tercera.

Theorema VIII.

Dadas tres lineas en proporcion continua el triangulo formado sobre la primera es al triangulo formado sobre la segunda, como la linea primera â la tercera; si los dos triangulos son semejantes.

261. Demostracion. Sean las tres lineas dadas A B; D G, E I, fig. 90, de tal modo que A B : D G :: D G : E I; prolonguese la primera A B hasta q.e sea igual â la tercera E I, juntense los extremos F H por la recta F H y en este caso el triangulo A F H será igual al triangulo D C G formado sobre la segunda linea D G: la razon es, porq.e siendo semejantes los dos triangulos A F B, D C G por su construccion, los lados q.e comprehenden los angulos iguales A, D. serán proporcionales (n. 255), y de consig.te A B : A F :: D G : D C, y alternando A B : D G :: A F : D C, es asi q.e por la suposicion A B : D G :: D G : A H; luego A B : D G :: D C : A H; y por consiguiente los dos triangulos A F H, D C G tienen reciprocamente proporcionales los lados, q.e comprehenden los angulos iguales A D. y asi serán iguales los triangulos A F H. D C G (n. 252). El triangulo A F B formado sobre la primera linea ~~AB~~ es al triangulo A F H, por ser los dos de una misma altura, como la base A B, â la base A H (n. 244) ô como la linea primera â la tercera; queda tambien demostrado, q.e el triangulo A F H es igual al triangulo D C G, luego tambien el triangulo A F B formado sobre la primera linea, será al triangulo D C G, formado sobre la segunda, como la primera linea â la tercera por el axioma I n. 216.

262. Corolario I. Dos triangulos semejantes comparados entre si, están en la razon duplicada de sus lados homologos; porq.e el triangulo A F B es al triangulo semejante D C G como la linea A B â la linea E I; es asi q.e la linea A B es â la linea E I en la razon duplicada de la linea A B â la linea D G (num. 232) luego los dos triangulos estan en la razon duplicada de sus lados A B, D G.

263. Corolario II. Siendo la razon de la linea H I â la linea A B fig. 89, duplicada de la razon q.e hay de la linea D E â la linea A B, se infiere q.e dos qualesquiera quadrados comparados entre si, están en la razon duplicada de sus lados.

264. Corolario III. Estando dos triangulos comparados entre si (siendo semejantes) en la razon duplicada de sus lados homologos (n. 262) y tambien dos quadrados en la razon duplicada de sus lados (n. 263), se infiere que dos triangulos semejantes estan en la misma razon q.e dos quadrados q.e se formen sobre sus lados homologos.

265. Corolario IV. Siendo cierto q.e qualesquiera figuras planas semejantes pueden dividirse en triangulos, no solamente semejantes, sino tambien iguales en numero, se infiere de lo dho. q.e tambien dos figuras planas semejantes comparadas entre si, estarán en la razon duplicada de sus lados homologos; asi como lo están los triangulos, en que se dividen dhas figuras planas comparando un triangulo de una figura con otro de otra figura. La razon es, porq.e dhos triangulos son partes semejantes de las figuras planas, es asi q.e las partes semejantes estan entre si en la misma razon que sus todos (n. 218), luego las figuras planas semejantes estarán en la razon duplicada de sus lados homologos.

266. Corolario V. Tambien los circulos â quienes podemos considerar como poligonos semejantes (n. 137), estan entre si en la razon duplicada de sus lados homologos, esto es, de sus rayos ô diametros.

267. Scholion. Dadas dos figuras planas semejantes, â saber, dos circulos, se encontrará la proporcion q.e hay entre ellos si se forman dos quadrados sobre los rayos de dhos circulos, esto es, un quadrado sobre un rayo de un circulo, y otro quadrado sobre el rayo de otro circulo; y la misma razon q.e hay entre los quadrados hay en los circulos.

Problema I.

Dadas dos lineas encontrar una que sea tercera proporcional.

268. Resolucion. Las dos lineas dadas sean ab, ac fig. 91. si la tercera q.e se busca haya de ser la menor, ô en proporcion descendente, se hará la operacion del modo siguiente: Vnanse las dos lineas dadas en qualesquier angulo, v.g. en el angulo BAC, los extremos BC unanse por la recta CB, el angulo ACB dividase de tal suerte, q.e en el punto C se forme el angulo ACD igual al angulo B, y prolongada la recta CD hasta q.e concurra con la linea AB, la porcion AD cortada por la recta DC, será la tercera proporcional q.e se busca. La razon es, porque hecha la dha operacion, resultan dos triangulos equiangulos, q.e son BAC, CAD, pues el angulo A es comun p.a los dos triangulos, el angulo ACD por su construccion, igual al angulo B, luego igualarán en quanto al tercer angulo (n. 63), y siendo equiangulos estos dos triangulos, serán proporcionales aquellos lados, q.e comprehenden iguales angulos (n. 255), y por consiguiente AB. AC :: AC. AD; luego es evidente, q.e AD es la tercera proporcional, q.e puesta fuera del triangulo, será a d.

269. Si la tercera q.e se busca sea la mayor, ô en proporcion ascendente, se hará de otro modo la operacion. Las dos lineas dadas sean ab, ac fig. 92, juntense â qualesquier angulo, v.g. al angulo BAC; la primera AB prolonguese hasta

F, de modo q.e sea igual â la segunda AC, esta segunda prolonguese indefinidamente: juntense los puntos BC por la recta BC, desde el punto F echese la recta FD, q.e sea paralela â BC, y q.e concurra en el punto D con la indefinida AD; y toda la recta AD será la tercera proporcional q.e se busca. Es la razon, porq.e de la operacion resultan los dos triangulos BAC, FAD equiangulos (n. 75) y 256), y por tanto los dos lados, q.e comprehenden el angulo A, q.e es comun p.a los dos, estarán proporcionales (n. 255) y por consiguiente: AB: AC :: AF: AD; y siendo por la construccion AF igual â AC, serán: AB: AC :: AC: AD; luego la recta AD será la tercera proporcional q.e se busca, y fuera del triangulo será a d.

270. Corolario. Está patente el modo de resolver este otro problema; â saber: Dado un quadrado y una linea, buscar otra linea q.e con la dada se forme un rectangulo, q.e sea igual al quadrado. Pues encontrada la tercera proporcional despues de la linea dada y un lado del quadrado, de modo q.e el lado del quadrado sea media proporcional, dha tercera proporcional será la q.e con la primera formará un rectangulo igual al quadrado dado; pues dadas tres lineas en proporcion continua, el rectangulo de las extremas es al quadrado de la media: (n. 254).

Problema II.

Dadas dos rectas, buscar una que sea media proporcional.

271. Resolucion. Las dos rectas dadas sean a b, a c, fig. 93, sobre la mayor de ellas echese un semicirculo ADB, q.e tenga por diametro toda la recta AB, q.e sea igual â la dada a b, señalese la porcion AC, q.e sea igual â la dada a c, sobre el punto C levantese la perpendicular CD, hasta q.e concurra en el punto D con el semicirculo, desde el punto D echese la recta DA, q.e concurra en el punto con el semidiametro AB, y la recta AD será la media proporcional. Pues siendo el angulo ADB, q.e existe en el semicirculo, recto (n. 116) es evidente, q.e los dos triangulos ADB, ACD son equiangulos, por ser el angulo A comun p.a los dos, el angulo ACD es tambien recto (n.), luego igualarán tambien en quanto al tercer angulo (n. 63), y de consiguiente los lados q.e comprehenden iguales angulos, estarán entre si proporcionales (n. 255); y por tanto AB: AD :: AD: AC. Luego la recta AD es la media proporcional que se busca, â quien es igual a d.

Problema III.

Dado un rectangulo hacer un quadrado q.e sea igual â dho rectangulo.

272. Resolucion. El rectangulo dado sea D fig. 94, busquese una linea q.e sea media proporcional entre los dos lados del rectangulo AB, BC, y encontrada la media proporcional (n. 271), q.e será EF, formese sobre ella el quadrado H (n. 112) y este será igual al rectangulo; pues siendo EF media proporcional entre AB, BC, y sien-

do tambien el quadrado de la media igual al quadrado de las extremas, quando tres lineas estan en proporcion continua (n. 254), es evidente, q.e el quadrado H será igual al rectangulo D.

273. Corolario. Esta patente el modo de hacer un quadrado q.e sea igual â un circulo. Porq.e si dado un circulo se hace un rectangulo de la mitad de su circumferencia y un rayo; este rectangulo será igual al circulo (n. 137); haciendo despues igual â dho rectangulo (n. 118), será el quadrado igual al circulo q.e se busca.

274. Scholion. No se infiera de lo dicho en el numero antecedente, q.e se ha encontrado geometricamente la quadratura del circulo, sobre cuyo problema se está trabajando mas de dos mil años sin haver encontrado su solucion; por no haverse encontrado la proporcion geometrica entre el diametro del circulo y su circumferencia (n. 137): ô no se ha encontrado una linea recta, que sea igual geometricam.te â la circumferencia del circulo, en lo q.e consiste toda la dificultad de su quadratura; y asi quando se propone el modo de formar un circulo igual â un quadrado, ô al contrario, un quadrado igual â un circulo, se debe entender de una igualdad fisica ô sensible, y no matematica.

Problema IV.

Dadas tres rectas buscar una que sea quarta proporcional.

275. Resolucion. Las rectas dadas sean ab, ad, ac, fig. 95, si la quarta q.e se busca haya de ser en proporcion descendente, ô la menor, las dos mayores ab, ad, se juntarán en qualesquier angulo v.g. DAB, los puntos DB se unirán por la recta DB, en la mayor de las dadas ab señalese la distancia AC igual â la tercera ac, desde el punto C echese la recta CE, q.e sea paralela â la ~~tercera~~ recta BD, hecho esto, la porcion AE será la quarta proporcional, q.e se busca. Pues tenemos en este caso, dos triangulos ADB. AEC equiangulos (n. 75), y por consiguiente los lados que comprehenden el angulo A comun para los dos, estarán proporcionales (n. 255), y asi diremos: AB: AD: : AC: AE: luego la recta AE es la quarta proporcional.

276. Si la quarta q.e se busca sea en proporcion ascendente, ô la mayor, las tres dadas serán ae, ac, ad, y se hará la operacion del modo siguiente: Vnanse las dos primeras ae, ac, en qualesquier angulo v.g. EAC, los puntos EC unanse por la recta CE, prolonguese el lado AE hasta D, de modo q.e sea igual â la tercera de las dadas ad, prolonguese tambien el lado AC indefinidamente, echese la recta DB, q.e sea paralela â la recta EC, y que concurra con la indefinida en el punto B; hecho esto, la recta AB será la quarta proporcional q.e se busca. Pues los dos triangulos AEC, ADB son equiangulos, y por tanto tienen los lados proporcionales, por lo dho en el num. antecedte y asi: AE: AC: : AD: AB. Luego la recta AB es la quarta proporcional.

Problema V.

Dado un rectangulo, hacer otro sobre una linea dada, q.e sea igual al rectangulo dado.

277. Resolucion. El rectangulo dado sea D fig. 96, y la linea dada sea ab, busquese la quarta proporcional despues de la recta dada ab, y los dos lados del rectangulo dado (n.

275 y 276); de modo q.e a b, sea la primera, el lado mayor del rectangulo ST, la segunda; el lado menor TV, la tercera, y encontrada la quarta proporcional, que será a c, puesta esta en el angulo recto CAB con la recta dada a b = AB, echadas las dos rectas CX, XB paralelas â las rectas CAB, resultará el rectangulo H igual al rectangulo dado D. Pues es evidente, q.e dadas tres lineas en proporcion continua, el rectangulo formado por las extremas, es igual al rectangulo de las medias (n. 253); es así que el rectangulo H está formado por las extremas de las quatro proporcionales, y el rectangulo D por las medias; luego son iguales los dos rectangulos.

278. Si la linea dada sobre la q.e se ha de formar el rectangulo sea menor, q.e los dos lados del rectangulo dado, se busca la quarta proporcional en proporcion ascendente, poniendo por primera la recta dada, por segunda el lado menor del rectangulo, y por tercera el lado mayor, y encontrada la quarta proporcional (n. 276) ésta con la dada hace un rectangulo igual al rectangulo dado.

Problema VI.

Dada una linea, dividirla en media y extrema razon; esto es, dividirla de tal suerte, que la porcion mayor sea media proporcional entre la porcion menor y toda la recta dada.

279. Resolucion 1.a La linea dada sea AB fig. 97, sobre uno de sus extremos levantese una perpendicular BE, q.e sea la mitad de la dada AB, puesto el centro en E, echese el circulo FBD, q.e tenga por rayo la recta EB; desde el punto A echese la secante AD, q.e pase por el centro del circulo y toque â la circumferencia del punto D; los puntos BD juntense por la recta BD, desde el punto F echese la recta FC, q.e sea paralela â la recta BD; y en el punto C es donde la dada AB queda dividida en media y extrema razon; y así: AB: BC: : BC: AC. Esto es evidente, porq.e los dos triangulos ABD, ACF son equiangulos (n. 75), luego tendrán proporcionales los lados q.e comprehenden el angulo A comun para los dos (n. 255), y será la propocion: AD: AF: : AB: AC. Luego la linea AB queda dividida en el punto C, en la misma propocion q.e la linea AD en el punto F: la linea AD en el punto F está dividida en media y extrema razon; pues unidos los puntos BF por la recta FB resultan los dos triangulos ABD, AFB equiangulos, pues tienen el angulo A comun para los dos, el angulo ABF por ser angulo del segmento (n. 170) tiene por medida la mitad del arco FB, tambien el angulo FDB por ser angulo â la circumferencia tiene tambien por medida la mitad del mismo arco FB â quien insiste (n. 165); luego los angulos ABF, ADB serán iguales, y por consiguiente iguales tambien los angulos AFB, ABD (n. 63); luego los dos triangulos AFB, ABD son equiangulos y por consiguiente sus lados, q.e comprehenden iguales angulos están proporcionales (n. 255), y así diremos: ~~[illegible]~~ AD: AB: : AB: AF. Es así q.e AB, por su construccion, es igual â FD, luego AD: FD: : FD: AF. y así la recta AD queda dividida en media y extrema razon en el punto F; por lo dicho la dada AB queda dividida en el punto C en la misma proporcion q.e AD en el punto F; luego la dada AB queda dividida en el punto C, en media y extrema razon: luego AB: CB: : CB: AC.

280. Corol.º Si una tangente se une con una secante en el punto A fuera del circulo, y la secante se prolonga hasta tocar en el punto D de la circumferencia del mismo circulo, el quadrado de la tangente será igual al rectangulo q.e por un lado tenga la secante AD, y por otro lado la porcion exterior AF de la secante misma. Porq.e la tangente es media proporcional entre toda la secante y su porcion exterior (n. 279), y dadas tres lineas en proporcion continua, el quadrado de la media es igual al rectangulo de las extremas (n. 254).

281. Resolucion 2.ª La linea dada, q.e se ha de dividir en media y extrema razon sea AB fig. 98, pongase en angulo recto con otra recta BC, que sea la mitad de AB, echese la hipotenusa CA y se formará el triangulo rectangulo ABC, cuya base será CB, hagase correr la hipotenusa CA, demodo q.e cayga sobre la base CB, prolonguese esta hipotenusa hasta q.e desde el punto B del angulo recto se haga la linea BD igual á la dada AB, y en el punto E donde cayó el extremo de la hipotenusa queda dividida la linea BD en media y extrema razon, demodo q.e BD:BE::BE:ED.

282. Esto es evidente; porq.e si tomando el punto C por centro, se echa el arco LGB, y tomando tambien el punto B por centro, se echa el arco FPE, y desde el punto E se echa la recta EG tangente del arco LGB (n. 179), y tomando el punto H por centro, se echa el circulo GFSB, resultan los dos triangulos CGE, CBA equiangulos y equilateros, pues el angulo C es comun para los dos, los lados CG, CB iguales como rayos de un mismo circulo (n.   ), el lado CA igual al lado CE por su construccion, luego serán iguales los lados GE, BA y todos los triangulos (n. 71); la recta GE es una secante unida con una tangente EB en el punto E fuera del circulo; luego el diametro GS es media proporcional entre toda la secante GE y su porcion exterior SE. Es asi q.e GE es igual á AB, la porcion SE igual á FA por el axioma V num. 41, luego tambien la recta AB queda dividida en el punto F en media y extrema razon; y siendo BD por su construccion igual á BA; BE igual á BF como rayos de un mismo circulo (n.   ), será FA igual á ED por el axioma d.ho; y de consiguiente la recta BD queda dividida en el punto E en media y extrema razon.

Problema VII.

Dadas dos lineas que la una sea doble de la otra, buscar entre ellas dos medias proporcionales, que con las dos dadas sean quatro continuo proporcionales.

283. Resolucion. Sean las dadas AB, BC, fig. 99, ponganse en el angulo recto B, tomese la distancia CA y prolonguese CB hasta el punto E, demodo q.e sea igual á CA, tomese tambien la distancia BE y con ella haciendo el centro en B, echese el arco EOF, tirese la recta CF, y en el punto F hagase el angulo BFP, q.e sea igual al angulo C, prolonguese la recta CE hasta q.e concurra en P con la recta FP, tirese la recta PA, y hecho esto, tendremos quatro lineas en proporcion continua, q.e serán CB, BF, BP, BA. Se advierte q.e en el punto F es

donde la recta BA queda dividida en media y extrema razon, de suerte, q. BA: BF :: BF: FA.

284. Que las quatro lineas dhas CB, BF, BP, BA estén en proporcion continua, se manifiesta del modo siguiente: Señalese la distancia PS igual â BC, y en el punto S levantese la perpendicular RS paralela â BA, siendo por construccion el angulo PFB igual al angulo C (n. 283), y echado el semicirculo PFC, q.e tenga por diametro la recta PC, será recto el angulo PFC (n. 166), y por consiguiente igual al angulo FBC, luego será tambien el angulo BPF igual al angulo BFC (n. 63), luego los dos triangulos PFC, FBC, son equiangulos: tambien el triangulo PRS, por su construccion, es equiangulo con el angulo BFC, pues en ese tiene un angulo recto, el lado PS igual al lado BC, y el lado RS igual al lado FB, luego igualarán tambien en quanto al tercer lado, y en todo lo demas (n. 71), y siendo tambien, por razon de las paralelas AB, RS, el angulo A, igual al angulo R, será tambien el angulo A igual al angulo BFC, por el axioma II num. 41: luego todos los quatro triangulos ABP, PBF, RSP, FBC son rectangulos, y tienen los demas angulos iguales cada uno â sus correspondientes â los otros, y por consiguiente, todos son equiangulos: luego los lados, q.e en ellos comprehenden iguales angulos (n. 255), serán proporcionales: luego BC: BF :: BF: BP. BF: BP :: BP: BA. q. puestas en proporcion continua serán ∺ BC. BF. BP. BA. Luego las rectas BF, BP son las medias proporcionales, q.e se buscan.

Problema VIII.

Hacer un triangulo isoscele, que cada angulo sobre la base sea triplo del angulo vertical.

285. Resolucion. Pongarse en el angulo recto las dos lineas AB, BC, fig. 100, de las quales AB sea doble de BC, puesto el centro en C, echese el arco BIT, q.e tenga por rayo la recta BC, echese la hipotenusa AC, en la qual tomese la distancia AP igual â BC, y señalese la misma distancia AS, en la recta AB, hagase un circulo, cuya circumferencia pase por los tres puntos ASI (n. 178), y echense las rectas IS, PE, de modo q.e la distancia ES, sea igual â la distancia IP, passese la distancia PE, desde el punto P al punto D, y señalado el punto D, echese la recta DE, y se formará un triangulo isosceles PED (n. 58), desde el punto I echese la recta EI, y quedará formado otro triangulo isoscele IAE, en el q.e cada angulo sobre la base EI es triplo del angulo vertical A.

286. Pues por no tocar la linea EI al circulo ASI, mas q.e en el punto I por la parte exterior, es tangente, (n. 138), y asi el angulo EIS formado por dha tangente y la subtensa SI, tiene por medida la mitad del arco IS, (n. 170), y por consiguiente es igual al angulo A, (n. 165), añadase â cada uno el angulo AIS, y será todo el angulo AIE igual â los angulos SAI, AIS juntos pero el angulo ESI por ser externo respecto del triangulo ASI, es tambien igual al angulo A, y al angulo AIS juntos; (n. 61). Luego el angulo ESI es igual al angulo AIE, y siendo este

igual al angulo AEI, por la igualdad de los lados AE, AI, (n. 66), serán iguales los angulos ESI, AEI; luego los lados, q.e se les oponen IE, IS serán iguales (n. 66), y por consiguiente el triangulo SIE será isocele (n. 67); tambien la linea EP es igual â la linea IS, por que los triangulos ESI, EIP tienen las bases ES, IP iguales, y el lado EI comun para los dos, luego son iguales en todo (n. 71), luego el angulo PEI es igual al angulo EIS.

287. Además de esto: El angulo APE por ser externo respecto del triangulo EIP, y tambien del triangulo EPD, es igual â los angulos PIE, PEI (n. 61), y tambien es igual â los angulos PED, PDE juntos, por la misma razon: Luego los dos angulos PED, PDE juntos son iguales â los dos PIE, PEI juntos por el axioma II num. 41. Quitese el angulo comun EPI, y de ambas partes los angulos AIS, PDE, q.e son iguales por ser las lineas de IS paralelas (n. 46), y quedará el angulo IED igual al angulo A; el angulo PED es doble del angulo A, y por consiguiente su igual PDE es tambien doble del angulo A.

288. Ahora bien: El angulo APE es igual â los dos PED, PDE juntos y por consiguiente es quadruplo del angulo A, y el angulo AEP, que es igual al angulo ADE, es doble del angulo A, luego el angulo A es igual âla septima parte de los dos angulos rectos, que comprehenden los tres angulos del triangulo EAP (n. 60), y siendo la suma de los tres angulos de un triangulo, igual â la suma de los tres angulos de otro triangulo (n. 60), será tambien el angulo A la septima parte de los tres angulos del triangulo EAI, por el axioma I. n. 216. Y siendo iguales los dos angulos de la base de dho triangulo (n. 67), tendrá cada uno el valor de tres septimas partes de todo el triangulo; luego cada uno de estos angulos de la base es triplo del angulo vertical A.

289. Corolario. De lo dho se infiere, q.e para hacer un triangulo isocele, cuyo angulo vertical sea la tercera parte de cada uno de los angulos de la base, basta que se pongan dos lineas en angulo recto, de las quales la una sea doble de la otra, como son las rectas AB, BC, fig. 100, y echada la hipotenusa AC, si de esta hipotenusa se corta la porcion CH, que es lo q.e excede la hipotenusa CA â la recta BA, quedará hecho el triangulo BAH, que por construccion es isocele (n. 58), y el angulo A tercera parte de cada uno de los de la base B, H.

Problema IX.

Dividir la periferia de un circulo en las partes que se pida.

290. Resolucion. Si la periferia del circulo LBCH se haya de dividir en dos iguales partes, quedará hecha la operacion con solo echarle el diametro IH, fig. 101. Si se ha de dividir en quatro partes iguales, se hará echando otro diametro LC, que corte al primero en angulos rectos, pues en este caso, queda el circulo dividido en quatro angulos rectos, y por consiguiente en quatro partes iguales. Si se pide q.e se divida en ocho partes iguales, se hará dividiendo cada uno de los angulos rectos en dos iguales partes (n. 82); y de aqui está patente como se

puedan encontrar geometricamente las partes de la periferia de un circulo segun la serie ÷ 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.ª

291. Para encontrar las partes de la periferia segun la serie geometrica ÷ 3. 6. 12. 24. 48. 96, &c.ª se usará de otro metodo. A la periferia del circulo CBH fig. 100, echesele la subtensa CD, que sea igual al semidiametro AC, y el arco CD comprehendido entre las dos extremidades de la subtensa, será la sexta parte del circulo, ô un arco de 60 grados: pues echado el rayo AD, el triangulo CAD será equilatero, por ser todos sus lados rayos de un mismo circulo, y por lo mismo será tambien equiangulo (n. 66); y de consiguiente cada uno de sus angulos será la tercera parte de los dos rectos, que componen los tres angulos del triangulo rectilineo (n. 60); y siendo la tercera parte de dos rectos 60 grados, es evidente, q.e el arco CD, medida del angulo A, contiene 60 grados ô la sexta parte de la periferia. Si el arco CD se prolonga hasta B, de modo q.e CB sea igual â CD, todo el arco DB será la tercera parte de la periferia; dividido el arco CD en el punto E, las porciones DE, CE, cada una de ellas serán la duodecima parte de la periferia, y con este mismo metodo se encontrará la 24.ª 48.ª &c.ª

292. Para encontrar otras partes de la periferia segun la serie geometrica ÷ 5. 10. 20. 40. &c.ª al circulo dado BEH, fig. 102, echesele el semidiametro AB, dividase en el punto C, de modo q.e la porcion AC sea media proporcional entre todo el semidiametro AB, y la porcion CB, (n. 279) y sig.tes echese la subtensa BD, q.e sea igual â la porcion AC, y el arco BD será la decima parte de la periferia, ô 36 grados. Duplicando el arco BD, de modo q.e se haga BE, será la quinta parte, ô 72 grados.

293. Pues siendo por la suposicion BA : BD : : BD : BC, ya los dos triangulos BAD, BDC, serán equiangulos (n. 255), es asi q.e el triangulo BAD por construccion es isocele (n. 58), luego tambien lo será el triangulo BDC, y el lado CD igual al lado BD, y al lado AC; luego tambien será isocele el triangulo ACD. Pero los angulos CAD, CDA son iguales entre sí, por opuestos â iguales lados (n. 67), y el angulo BCD por externo, respecto del triangulo ACD igual â los dos angulos A, D, ô duplo de cada uno de ellos (n. 61); luego tambien el angulo CBD igual, por el hipotesis, al angulo BCD, será doble del angulo A; es asi q.e el angulo CBD, ô su igual BCD es igual al angulo ADB, luego los dos juntos ABD, ADB son quadruplos del angulo CAD, ô del angulo BAD; constando los tres angulos del triangulo BAD, de dos rectos (n. 60), ô de ciento y ochenta grados; si esta ~~suposicion~~ suma se divide por 5, el quociente dará el numero de grados, q.e contiene el angulo A quinta parte del triangulo BAD, y por tanto el arco BD, medida del angulo A contiene 36 grados, q.e son la quinta parte de dos rectos, ô la decima parte de la periferia.

294. De lo dicho se infiere tambien el modo de encontrar la decima quinta parte, la trigesima, y otras segun la serie de los numeros ÷ 15. 30. 60. 120. &c.ª Pues encontrada la tercera parte de la periferia (n. 291), q.e son 120 grados, encontra-

da tambien la quinta parte (n. 292), q.e son 72 grados; tomando un arco q. se componga de dos terceras partes, y una quinta parte de la periferia, este arco contendrá trescientos y doce grados, y lo q.e resta hasta completar el circulo, q.e son 48 grados, dividido en dos iguales partes cada una de 24 grados, dará la decima quinta parte de la periferia; y ésta dividida en dos partes iguales dará la trigesima parte; &c.a

295. Si se busca la septima parte de la periferia; al circulo dado AD, fig. 103, echesele el semidiametro AC, sobre el extremo A del semidiametro echese la perpendicular AB (n. 78), q.e sea la mitad del semidiametro AC, los puntos CB unanse por la hipotenusa CB, quitesele á esta hipotenusa la porcion EB, q.e es el exceso que tiene sobre el semidiametro AC, echese la subtensa AE y tendremos un triangulo isoscele ACE, cuyo angulo vertical C es la tercera parte de cada uno de los angulos de la base AE, (n. 289), y de consiguiente el angulo del centro C, será la septima parte de los dos angulos rectos, q.e comprehende el triangulo ACE, (n. 60), y el arco AE medida del angulo del centro C tendrá 25 grados $\frac{5}{7}$ que es la septima parte de dos angulos rectos, ó la decima quarta parte de toda la periferia: duplicado el arco AE, demodo que sea AD serán 51 grados $\frac{3}{7}$ q.e es la septima parte de la periferia del circulo.

296. Si se busca la nona parte de la periferia se encontrará haciendo un triangulo isoscele, en el q.e cada angulo de la base sea quadruplo del vertical; y poniendo la base de este triangulo por subtensa del circulo, su arco correspondiente dará la 18.a parte de la periferia, duplicado este arco será la parte nona.

Problema X.

Inscribir un Poligono regular en un circulo.

297. Resolucion. Si por exemplo el poligono q. se ha de inscribir fuese de cinco lados, dividase la periferia del circulo dado ABE, fig. 104, en cinco partes iguales (n. 292), y señalese esta division en los puntos ABCED, de cada uno de estos puntos echense las subtensas AB, BC, CE, ED, DA, siendo todas estas subtensas iguales, por ser correspondientes á iguales arcos (n. 147), es evidente, que la suma de estas subtensas forman el poligono q.e se pide inscripto en el circulo (n. 142).

Problema XI.

A un circulo dado circunscribir un poligono regular.

298. Resolucion. Sea el circulo dado ABD, fig. 105, inscribase en el un poligono semejante al que se ha de circunscribir, (n. 297); por cada uno

de los puntos donde el poligono inscripto toca al circulo, echense otras tantas tangentes (n. 175), prolongadas estas tangentes, concurrirán en los puntos G E K I H, y la suma de todas ellas dará el poligono circunscripto, q.e se busca. Porq.e echadas desde el centro L las rectas L G, L A, L E, L F, siendo las tangentes iguales (n. 196), serán iguales los tres lados del triangulo E F L á los otros tres lados del triangulo E A L, y por lo mismo el angulo A L F es doble del angulo A L E, las mitades de este ultimo angulo, q.e son A L E, F L E son tambien iguales por el axioma III, num. 41. Y lo mismo se dice de los otros triangulos A L G, B L G, B L H, &c.a Por lo tanto en estos triangulos, los angulos A, F, D, C, B, son iguales por rectos; luego son iguales todos los triangulos; de q.e se infiere, q.e el poligono circunscripto es equiangulo y equilatero y de consiguiente regular, (n. 101).

Problema XII.

Dado un poligono regular, inscribir en el un circulo.

299. Resolucion. Sea el poligono regular G I, fig. 105, desde los angulos del poligono echense á su centro las rectas G L, H L, I L, &c.a echense tambien desde el centro del poligono las rectas L A, L B, L F, &c.a y está patente por lo dicho en el numero antecedente, q.e el poligono quedará dividido en tantos triangulos iguales, quantos son sus lados, y tambien que todas las perpendiculares, q.e saliendo del centro llegan á los lados del poligono, son iguales; de q.e se sigue, q.e si puesto el centro en L se echa un circulo q.e pase por el punto A, passará tambien por los puntos F, D, C, B.

Problema XIII.

Dado un poligono regular, circunscribirle un circulo.

300. Resolucion. El poligono dado sea A B E, fig. 104, desde todos sus angulos echense á su centro las rectas A O, B O, &c.a estas serán todas iguales: luego si puesto el centro en O se echase un circulo, que tenga por rayo qualquiera de las rectas O D, O E, &c.a este será el circulo q.e se busca.

Problema XIV.

Medir las distancias inacesibles; y las alturas de los edificios, &c.a

301. Resolucion. Por distancia inacesible entendemos, quando la disposicion del terreno, que media entre nosotros y el cuerpo, cuya distancia queremos saber, no permite q.e hagamos la medida, en cuyo caso nos valdrémos de lo q.e p.a este fin enseña la Geometria: como si por exemplo: desde el punto C, fig. 106, queremos medir la distancia de la Piramide M A N, y no podemos llegar á ella por mediar entre el punto C en donde nos hallamos, y la Piramide, un rio, ú otro semejante impedimento. Para areiguar esta distancia nos valdrémos del metodo siguiente.

401

302. Clavarémos las dos estacas L C, a b, perpendicularmente y por consiguiente paralelas â la altura AB de la piramide; puesto el ojo en el punto L mirarémos al punto B q.e es el centro de la base de la piramide, de modo q.e la linea visual LB pase por el punto m de la estaca a b: despues desde el punto L mirarémos al punto S de la piramide con tal direccion que la visual LS sea paralela al pavimento ô suelo expresado por la recta CB; de estas tres lineas LS, LB, BS, resulta el triangulo BSL igual al triangulo LCB (n. 102). Despues desde el punto donde la visual LB pasa por la estaca a b, que será m, echarémos la recta n m paralela â la visual LS, y resultará el triangulo pequeño L n m, en un todo semejante al triangulo LSB; pues el angulo L es comun para los dos triangulos, el angulo m n L igual al angulo BCL por razon de las paralelas (n. 47), luego tambien el angulo L m n será igual al angulo LBC, (n. 63).

303. Siendo los dos triangulos LBC, L m n, equiangulos, sus lados q.e comprehenden iguales angulos deben estar proporcionales (n. 255); y asi L n : mn : : LC : CB. de estos quatro terminos tenemos conocido el valor de los tres primeros, que son L n, m n, L C, y por la regla de proporcion encontrarémos facilmente el valor del quarto termino BC, que será la distancia, que deseamos saber desde el punto C donde nos hallamos, hasta el punto B, q.e es el centro de la base de la piramide. Si por exemplo: medida la recta L n, encontramos q.e tiene un palmo, y la recta m n tuviese tres palmos; si despues en la estaca LC encontramos seis palmos, podemos asegurar, q.e la recta CB, q.e expresa la distancia q.e se busca, tendrá 18 palmos: porque puestos los tres numeros 1. 3. 6. y buscado el quarto proporcional encontrarémos, q.e es 18; pues asi como el 1 se contiene 3 veces en el 3, asi el 6 se contiene 3 veces en el 18: luego en el caso propuesto sabemos con toda seguridad, q.e la distancia inacesible CB tiene 18 palmos.

304. Casi del mismo metodo usarémos para medir la altura de qualquier edificio, monte, &c.a Si se nos propone medir v. g. la altura de la piramide AMPN, clavadas perpendicularmente las dos estacas LC, a b, y que estén paralelas entre si, y tambien con la recta BA, que manifiesta la altura de la piramide, conocida la distancia BC, q.e es igual â SL, pondrémos el ojo en el punto L, y mirarémos â lo mas alto del edificio, de tal modo, q.e la linea visual se dirija al punto A; señalarémos el punto donde la misma visual LA pasa por la estaca a b; desde el punto L volverémos â mirar al punto S en la misma direccion, q.e en la operacion antecedente; y notado el punto e donde la visual LS toca en la estaca a b, tendrémos dos triangulos a e L, ASL equiangulos por ser el angulo L comun para los dos, el angulo e es igual al angulo S por razon de las

paralelas, luego tambien el angulo a será igual al angulo A (n. 63); siendo equiangulos estos dos triangulos, tendrán proporcionales aquellos lados q.e comprehenden iguales angulos (n. 255), y así diremos, que L e : L S :: ae : AS. De estos quatro terminos tenemos conocidos los tres primeros, à saber eL, LS, ea; luego por la regla de proporcion será facil el encontrar el valor del quarto termino SA, q.e expresa la altura de la piramide desde el punto S. hasta el punto A. Demodo q.e si por exemplo, en la recta eL medimos 20 palmos, en la recta LS, 20 varas, y en la recta ae encontramos 24 palmos, resulta por la regla de proporcion, q.e la altura SA tiene 24 varas; añadase à esta altura la porcion LC igual à la porcion de la piramide SB, y sabrémos toda la altura BA de la piramide.

Capitulo IX.

De los Solidos.

305. Definiciones. Solido ô cuerpo es una extension concideada segun su longitud, latitud, y profundidad. (n

306. Los cuerpos ô solidos se llaman regulares quando se contienen en planos regulares (n. 101) è iguales, y cuyos angulos son todos iguales entre sí. Se llaman los cuerpos semejantes, quando constan de igual numero de planos, ô lados semejantes.

307. Los solidos tienen diversos nombres por la diversidad de su figura. Si el solido sea una figura rectilinea, que tenga iguales las dos bases superior è inferior, semejantes y paralelas; y que de una à otra base queden formados tantos paralelogramos, quantos son los lados de cada una de las bases, este solido se llamará prisma; como es AROE, fig. 107. El prisma será triangular si sus bases sean triangulos, pero si las bases del prisma fueren quadrados, ô paralelogramos, el prisma será quadrangular.

308. Cilindro es un solido comprehendido en una superficie curva, y q.e termina por ambos extremos en dos circulos iguales, q.e son sus bases; como ABC, fig. 108.

309. Scholion. El cilindro puede considerarse como un prisma de infinitos lados. Pues dado el prisma quadrangular ABC, fig. 108, es evidente, q.e los lados de sus bases se pueden multiplicarse en infinito, baxo la misma circumferencia, sin que los paralelogramos, q.e componen la superficie del prisma sean infinitos, y de una anchura infinitamente pequeña; y por consiguiente sin q.e toda la superficie de dho prisma aparezca curva; y por tanto será sensiblemente un cilindro.

310. Piramide es un solido comprehendido en tres, ô mas triangulos planos, q.e tienen las bases en los lados de la base de la piramide, y terminan todos en un punto; tal es el solido BAC, fig. 109. Los planos q.e constituyen la piramide se llaman sus lados. La base de la piramide es el plano de

403 donde salen sus lados, como B C. El vertex de la piramide es el punto A donde concurren todos los q.e salen de la base. La piramide será triangular, quadrangular, &c.a si su base fuese triangulo, quadrado, &c.a El exe de la piramide es una recta echada desde el vertex al centro de su base; tal es la recta AD. La altura de la piramide es una recta que saliendo del vertex cae perpendicular sobre el plano donde estaba la base de la piramide: que algunas veces puede caer fuera de la base, si la piramide fuere inclinada; como en la fig. 110, la recta A a será la altura de la piramide inclinada B A C. Piramide truncada es aquella â la que se le corta alguna porcion por baxo del vertex con direccion paralela â su base, como es B A C, fig. 111.

311. Cono es un solido, q.e tiene por base un circulo, y está comprehendido en una superficie curva, q.e por una parte termina en un punto, q.e se llama vertex; tal es el solido B A C, fig. 112.

312. Scholion. El cono puede considerarse como una piramide de infinitos lados. Pues es evidente, q.e la base de la piramide B A C, fig. 109, multiplicados sus lados en infinito baxo la misma circumferencia, estos lados serán infinitamente pequeños, y de consiguiente la base aparecerá circular, en cuyo caso, toda la piramide representará sensiblem.te un cono.

313. Cono truncado es aquel, al q.e se le corta alguna porcion por debaxo del vertex, con direccion paralela â su base: tal es D E F, fig. 113.

314. Paralelipedo es un solido rodeado por seis paralelogramos, de los quales los q.e están opuestos entre si, son iguales, semejantes, y paralelos; como es P H fig. 114. De donde se sigue, q.e todo paralelipedo es prisma (n. 307), aunque no todo prisma es paralelipedo.

315. Si los seis planos, que terminan al paralelipedo fueren quadrados, el paralelipedo se llamará cubo, y por tanto todo cubo es paralelipedo, aunque no todo paralelipedo sea cubo; fig. 81.

316. Scholion. Asi como la medida de los planos es el quadrado (n. 131), asi tambien la comun medida de los solidos es el cubo, en el qual qualquiera de sus lados, es ô vara, ô pie, ô dedo, &c.a y se llamarán vara, pie, ô dedo cubico.

317. Poliedro entre los solidos viene â ser como el poligono entre los planos fig. 115: luego el poliedro es un solido terminado por muchas superficies planas.

318. Los poliedros principales son Tetrahedro, Octahedro, Ycocahedro, y Dodecahedro: el 1.o se comprehende en quatro triangulos equilateros, é iguales: el 2.o en ocho: el 3.o en veinte; y el 4.o está comprehendido por doce pentagonos regulares, é iguales.

319. Esfera es un solido comprehendido en una sola superficie curva, de la

qual si se echan rectas al punto A fig. 116 q.e se llama el centro de la esfera, son todas iguales entre si. La mitad de la esfera, como la porcion BDC, se llama hemisferio; el diametro de la esfera es una recta BC de un punto de la circumferencia al opuesto, y q.e pase por el centro, y esta misma recta se llama exe de la esfera; los extremos del exe, como BC, son los polos de la esfera, ô quicios; porque permaneciendo estos puntos inmobles, rueda al rededor de ellos toda la esfera.

320. Circulo de la esfera es aquel que rodea à su periferia. Si el circulo divida la superficie de la esfera en dos partes iguales, será circulo maximo, y circulo menor, si la divida en dos partes desiguales; luego será circulo maximo, aquel q.e cortada por el la esfera, la divide en dos partes iguales, y los planos de la seccion pasan por el centro.

Theorema I.

Qualesquier prisma es el producto del plano de su base multiplicado por su altura.

321. Demostracion. Si la figura rectilinea EFO, fig. 107 que es la base del prisma AEOR, se levante con un movimiento paralelo asi misma segun la direccion de las rectas OR, EA, es evidente que quedará formado el prisma EFORSA. Luego el prisma se compone de tantos planos semejantes, iguales y paralelos entre si, quantos son los puntos de su altura; luego multiplicada la base EFO por la altura OR dará toda la solidez del prisma.

322. Corolario I. Los prismas de una misma base estàn entre si en la razon de sus alturas: los de una misma altura como sus bases: los que tienen una misma base y altura, ô bases y alturas reciprocas son iguales. La razon es, porq.e dos productos, q.e resultan de quantidades desiguales, estàn entre si en la misma razon, q.e las mismas quantidades (n. 217).

223. Corolario II. Qualesquiera prismas estàn entre si en la razon compuesta de sus bases y alturas; porq.e el prisma es el producto de la base por su altura; (n. 322): luego dos prismas comparados entre si como dos productos, q.e resultan de quatro cantidades: à saber, de dos bases y dos alturas: es asi q.e dos productos comparados entre si, estàn en la razon compuesta de las razones de aquellas quantidades q.e les producen, ô de los antecedentes à los consiguientes (n. 230): luego qualesquiera dos prismas estàn entre si en la razon compuesta de sus bases y alturas.

324. Corolario III. Siendo los cilindros prismas de infinitos lados (n. 308); si se comparan entre si dos cilindros, estaràn en la razon de sus bases y alturas.

325. Corolario IV. Todo paralelepipedo es prisma (n. 314): luego tambien los paralelepipedos estàn entre si en la razon de sus bases y alturas.

Theorema II.

Las piramides de una misma base y de una misma altura son iguales.

326. Demostracion. Dadas dos piramides de una misma base y altura, si â las dos se les corten porciones paralelas â sus bases, es evidente, q.e en las dos resultará igual numero de porciones, de igual magnitud, y que igualmente rayan decreciendo desde la base al vertex: luego componiendose dhas piramides de las porciones cortadas, tendrán igual numero de partes, y las partes de la una iguales en magnitud â las partes de la otra: y de consiguiente las piramides son iguales entre si.

327. Corolario I. Dado un prisma triangular BACDEF, fig. 117, si por el punto A, que es el vertex del triangulo, q.e forma la base del prisma BAC, se echa una seccion, q.e termine en los puntos DF, base del triangulo, q.e se forma en la opuesta base del prisma DEF, si despues desde BA se echa otra seccion hasta el punto F, de estas dos secciones resultarán tres piramides ADEF, DABF, BAFC, que tienen iguales bases y alturas, y por consiguiente son iguales entre si, (n. 326). De aqui está patente, q.e toda piramide es la tercera parte de un prisma, que con ella tiene igual base y altura.

328. Corolario II. Por quanto las partes semejantes están entre si en la misma razon q.e sus todos (n. 218), se infiere de lo dho, que quanto se ha dicho de los prismas, debe decirse tambien de las piramides, q.e son partes semejantes de los prismas. Vease log.e está despues n. 332

330. Corolario III. Siendo el cono una piramide de infinitos lados (n. 312), y el cilindro un prisma de infinitos lados (n. 309); si la piramide es la tercera parte del prisma de una misma base y una misma altura (n. 327), tambien el cono será la tercera parte del cilindro de una misma base y altura.

Theorema III.

Las superficies de todos los solidos semejantes terminados por planos rectilineos, están entre si en la razon duplicada de dos de sus lados homologos.

331. ~~Resolucion~~ Demostracion. Cada uno de los planos de dos solidos semejantes, son entre si semejantes: luego un plano de un solido comparado â otro plano de otro solido su semejante, está en la razon duplicada de sus lados homologos (n. 265) luego siendo la misma, la razon de todos los planos, q.e terminan las superficies de los solidos semejantes, estarán dhas superficies comparadas entre si en la razon duplicada de sus lados homologos, ô de dos de sus dimensiones semejantes, esto es, en la razon duplicada de sus alturas, de sus longitudes, ô de sus latitudes.

332. Corolario. Reduciendose las esferas â poliedros regulares, se sigue q. tambien las superficies de las esferas comparadas entre si, están en la razon duplicada de sus rayos.
329. Corolario III del Theorema II. Siendo el cono una piramide de infinitos lados (n. 312), se sigue q.e tambien los conos comparados entre sí, están en la misma razon, que las piramides.

Theorema IV.

Las masas, ô solideces de dos prismas semejantes, están entre si en la razon triplicada de sus lados homologos.

333. Demostracion. Dos prismas semejantes comparados entre si, están en la razon compuesta de sus bases y alturas (n. 223); es así que la razon de las bases es duplicada de sus lados homologos (n. 265), y la razon de las alturas es la misma, que la razon, que se encuentra entre dos lados homologos de las bases, pues las longitudes, latitudes, y alturas de dos solidos semejantes, todas están en una misma proporcion, ô razon; luego las masas, ô solideces de dos prismas estarán entre si en la razon triplicada de sus lados homologos.

334. Corolario. Siendo todo paralelipedo prisma (n. 314) estarán las solideces de dos paralelipedos semejantes, en la razon triplicada de sus lados homologos. Los cilindros pueden considerarse como prismas de infinitos lados (n. 303). Las piramides son terceras partes de los prismas (n. 227). Los conos terceras partes de los cilindros (n. 330). Los poliedros se componen de muchas piramides; y las esferas se reducen â poliedros regulares; por tanto así los cilindros, como las piramides, los conos, los poliedros, y las esferas están en sus masas ô solideces en la misma razon q.e los prismas; esto es, en la razon triplicada de sus lados homologos.

Theorema V.

Dadas quatro lineas en proporcion continua, el cubo de la primera es al cubo de la segunda, como la primera linea es â la quarta.

335. Demostracion. Las quatro lineas dadas sean Aa, Ab, Ac, Ad, fig. 118, de las quales la primera sea igual â 1, la segunda igual â 2, la tercera igual â 4, y la quarta igual â 8; en este caso, la primera linea está con la tercera en razon suboctupla, ô como de 1 â 8, y por lo tanto, el exponente de esta razon será igual â 8; tambien el cubo de la primera es igual â 1, y el cubo de la segunda igual â 8, luego el exponente de estos dos cubos será igual â 8, y la razon que hay entre ellos será tambien suboctupla, por el axioma VI (n. 216).

Problema I.

Medir un Prisma.

336. Resolucion. Sea el prisma, cuya solidez se ha de medir STV, fig. 119, midase el plano de su base RT, todo el producto de la base multipliquese por la altura TV, y el producto de esta multiplicacion dará la medida de toda la solidez del prisma. Si por exemplo, la base del prisma sea el quadrado RT, que tiene por cada uno de sus lados quatro dedos, multiplicado un lado de esta base, habrá en ella 16 dedos quadrados; de esta base por la construccion del prisma, saldrán 16 columnas cada una de lado quadrado en la base, y tan altas, quanta es la altura de todo el prisma: luego si la altura TV es tambien de quatro dedos, podrán cortarse en dho prisma, haciendo secciones paralelas â la base cada una de un dedo, 64 dedos cubicos, que es la multiplicacion de 16 de base por 4 de altura.

337. Corolario I. Los cilindros se reducen â prismas de infinitos lados (n. 309) y asi para saber la solidez de un cilindro se encontrará multiplicando toda su base por la altura.

338. Corolario II. La piramide es tercera parte del prisma (n. 327), el cono es la tercera parte del cilindro, (n. 330), luego para saber la solidez de las piramides y los conos, se encontrará multiplicando toda su base por la tercera parte de la altura, ô toda la altura por la tercera parte de la base.

339. Corolario III. Porquanto la esfera puede considerarse como una piramide, q.e tenga por base toda su superficie, y por altura qualquiera de sus rayos; se sigue q.e la solidez de toda la esfera será igual â la de un prisma, ô un cilindro, cuya altura sea igual al rayo de la esfera, y la base la tercera parte de su superficie, ô la base del prisma, ô cilindro sea igual â toda la superficie de la esfera, y la altura igual al rayo, de q.e se sigue, que para saber la solidez de la esfera, se encontrará multiplicando la tercera parte del rayo por toda la superficie, ô la tercera parte de la superficie por todo el rayo.

Problema II.

Medir la superficie de la Esfera.

340. Resolucion. Dada una esfera, busquese su diametro, q.e se encontrará poniendo la esfera sobre un plano, y echando una linea paralela por el punto opuesto al q.e la esfera toca en el plano, la distancia q.e hay desde esta linea al plano q.e la mide una linea perpendicular comprehendida entre el plano y su paralela, dará el diametro de la esfera. Encontrado el diametro, busquese la circunferencia del circulo maximo de la Esfera (n. 137), multipliquese la mitad del diametro de la esfera, por la mitad del circulo maximo, y el producto será el area del circulo maximo; este producto multiplicado por quatro dará toda

la superficie de la esfera; estando demostrado por Archimides, q.e la superficie de la esfera es quadrupla del area de su circulo maximo.

341. Corolario. La superficie de qualesquier globo se sabrá, multiplicando todo su diametro por toda la circumferencia del circulo maximo; pues el producto del diametro del globo y de la circumferencia de su circulo maximo es igual al producto del area del circulo maximo multiplicado por quatro.

Problema III.

Conocida la circumferencia de la tierra, buscar su semidiametro, su superficie, y su solidez, ô masa.

342. Resolucion. La circumferencia de la tierra tiene, como qualquier otro circulo, 360 grados (n), cada grado en la circumferencia de la tierra contiene 17 leguas y media españolas, luego multiplicando 360 por $17\frac{1}{2}$ el producto 6300 dará la circumferencia de la tierra; y por quanto el diametro es â la circumferencia de un circulo, como de 1:3; será el diametro de la tierra 2100 leguas españolas, y el semidiametro 1050 leguas: multipliquese todo el diametro, que son 2100 leguas, por toda la circumferencia que son 6300, y el producto 13230000 serán las leguas quadradas, q.e tiene toda la superficie de la tierra: multipliquese toda la superficie por la tercera parte del semidiametro de la tierra, q.e tiene 350 leguas, y el producto q.e resulta de esta multiplicacion, q.e son 4630500000 leguas, dan toda la solidez, ô masa de la tierra.

Problema IV.

Hacer un cubo, que sea doble de otro cubo dado.

343. Resolucion. El cubo dado sea e h, fig. 120, echese la recta a b, q.e sea doble de uno de los lados del cubo dado, y tendrémos dos lineas a b, a e; busquense entre estas dos, otras dos lineas, que sean entre ellas medias proporcionales, que serán las rectas a d, a c (n. 283), y hecho esto tendrémos, q.e las quatro rectas a e, a d, a c, a b, están en proporcion continua (num. 200); sobre la segunda a d hagase un cubo, y será doble del cubo dado. Pues dadas quatro lineas en proporcion continua, el cubo de la primera es al cubo de la segunda, como la primera linea â la quarta (n. 335); es así q.e por la suposicion, la recta a b, q.e es la quarta, es doble de la primera a e; luego tambien el cubo de la segunda a d será doble del cubo de la primera a e, que es el cubo dado.

409

344. Scholion. Queda resuelto el celebre problema de la duplicacion del cubo, que por tanto tiempo se ha juzgado por imposible su resolucion.

Capitulo X.

De las Secciones Conicas.

345. Si el cono se corte de tal manera, que el plano de la seccion ni sea paralelo â la base, ni corte perpendicularmente al exe del cono; resultarán tres secciones, q.e manifestarán tres planos terminados por tres curvas en todo diversas, y son la Elipse, la Parabola, y la Hiperbola; que por lo tanto se llaman secciones conicas.

De la Elipse.

346. Definiciones. Elipse, q.e por otro nombre se llama oval, es una superficie plana rodeada por una linea curva, que buelve al mismo punto de donde salió; y que se estiende mas segun su longitud, q. su latitud. Tal es la curva ACBD, fig. 121.

347. En la Elipse el punto medio G se llama centro; las rectas AB, CD, q.e pasan por el centro, y forman en el quatro angulos rectos, se dicen los exes de la Elipse, AB exe mayor, CD exe menor, q. tambien se llaman exes conjugados.

348. Si en el exe mayor AB se señalan dos puntos IP, q.e cada uno diste de los extremos del exe menor CD, el intervalo igual â la mitad del exe mayor, estos se llaman focos, ô polos de la elipse.

349. Todas las rectas paralelas â qualquiera de los exes, como son las rectas HK, HZ, se llaman ordenadas; la mitad de las ordenadas, q. son las rectas HI, HL, se dicen semiordenadas. Las porciones del exe, que hay entre las ordenadas y la circunferencia, como son las porciones AI, CL, se llaman sagitas, ô abcisas.

350. Si del extremo de qualesquiera de los exes se saque una perpendicular paralela â las ordenadas, y q.e sea tercera proporcional despues de los dos exes, como es la recta AE, ô la recta CF, esta se llama parametro de la elipse; el parametro echado sobre el exe mayor, es tercera proporcional, de tal manera, q. la primera sea el exe mayor AB, la segunda el exe menor CD, la tercera el parametro AE, y será la proporcion: AB : CD :: DC : AE. Pero el parametro q.e cae sobre el exe menor es tercera proporcional de tal modo, q.e la primera sea el exe menor CD,

la segunda el exe mayor AB, y la tercera el parametro CF. Y entonces se hará la proporcion CD: AB : : AB: CF.

351. Scholion. Está demostrado por los Geometras, que en la elipse, los quadrados de las semiordinadas tienen entre sí la misma razon q.e los rectangulos formados del parametro y de las abcisas correspondientes; esto es, q.e el quadrado de la semiordenada IK es al quadrado de la semiordinada GD; como el rectangulo AX compuesto del parametro AE, y la abcisa AI, es al rectangulo formado del parametro AE, y la abcisa AG. Pero los rectangulos son siempre mayores, q.e los quadrados. El exceso de los rectangulos sobre los quadrados de las semiordenadas se conocerá echando las hipotenusas BE, DF, desde los extremos de los exes, y prolongandolas hasta q.e concurran la q.e sale del punto B, en el punto E con el parametro AE; la q.e sale del punto D, en el punto F del parametro CF; estas hipotenusas cortarán los rectangulos en los puntos R M; si sobre el punto R se levanta la perpendicular RN, quedará formado el rectangulo NX, que es lo que excede el rectangulo AX al quadrado IT; igualmente, si sobre el punto M se levanta la perpendicular MO, el rectangulo SO es el exceso del rectangulo CS sobre el quadrado LI.

352. Está demostrado lo segundo, que dos rectas q.e salen de los focos de la elipse, y concurren en qualquier punto de la circumferencia, las dos juntas igualan á todo el exe mayor; tales son las rectas PH, IH. Está demostrado lo tercero, que las mismas rectas PH, IH, q.e saliendo de los focos concurren en un punto de la circumferencia, estas con la tangente hacen angulos iguales; y así son iguales los angulos GHI, VHP.

353. Corolario. De lo d.ho está patente el modo de construir la elipse. Tomese un hilo igual á toda la longitud del exe mayor de la elipse; los extremos de este hilo asegurense con clavos en dos puntos del exe mismo mayor, v.g. PI, q.e serán los focos de la elipse; pongase la pluma, ú otro instrumento para señalar, demodo q.e tenga tirante el hilo y hagasele dar una revolucion, y con ella señalará los puntos de la elipse AHCZB; buelvase ahora el hilo al otro lado y señalará los puntos AKDB.

De la Parabola.

354. Definiciones. Parabola es una superficie plana terminada por una linea curva, que no buelve al punto de donde salió, cuyos lados se separan uno de otro quanto mas se alargan, y en la qual los quadrados de las semiordenadas son en todo iguales á los rectangulos formados del parametro y de las correspondientes abcisas; tal es la linea ECADE, fig. 122.

355. En la parabola, el parametro es la linea AK paralela á las ordenadas, y perpendicular al punto A del exe AB, el qual punto A es el vertice dela Parabola. El parametro debe ser una linea tercera proporcional despues de qualesquiera abcisa y su correspondiente semiordenada, y asi el parametro será la linea AK, de tal modo que ÷ AM : MN : : MN : AK.

356. En la parabola el punto M dista del vertice A la quarta parte del parametro AK, se llama foco de la parabola.

357. Scholion. Está demostrado por los Geometras, que en la parabola los quadrados de las semiordenadas están entre si en la misma razon, q.^e las abcisas correspondientes. Lo segundo está demostrado, q.^e si desde el foco M se echa una recta á qualesquier punto de la circunferencia, como es la recta MC, y desde el mismo punto C se echa otra recta CX paralela al exe, estas con la tangente PR forman angulos iguales; y asi son iguales los angulos MCP, XCR. Lo tercero está demostrado, q.^e si dadas dos parabolas semejantes, la una se inscribe en la otra, aunque sus lados se prolonguen infinitamente, jamás llegarán á tocarse, aunq.^e siempre se van aproximando, y estas lineas se llaman asymptotas de la parabola.

358. Corolario. De lo dho está patente el modo de construir la parabola. Dado el exe AL, y el parametro AB, fig. 123. señalense en el exe los puntos CEG IL, y en ellos levantense las perpendiculares CD, EF, GH, IK, LM, de tal longitud, q.^e CD sea media proporcional entre el parametro AB, y la abcisa AC, y la recta EF sea media proporcional entre el parametro AB y la abcisa AE, y asi de las demás; demodo que GH, IK, LM sean todas medias proporcionales entre el parametro y su abcisa correspondiente; echese despues la curva AM, de modo q.^e pase por los puntos DFHK &c. y está será la mitad de la parabola; repitiendo la misma operacion por el otro lado, resultará la parabola entera.

De la Hiperbola.

359. Definiciones. Hiperbola es una superficie plana terminada por una linea curva, q.^e no vuelve en si misma, y en la qual, los quadrados de las semiordenadas son mayores, que los rectangulos hechos del parametro y de las abcisas correspondientes: tal es la curva CED, fig. 124.

360. Si en la hiperbola CED se prolonga su exe EB hasta el punto A, la porcion EA, se llama exe transverso, cuyo centro será el punto L medio entre EA; si por el punto L se echa la recta HI, que haga angulos rectos con el exe transverso AE, y sea media proporcional entre el exe transverso AE, y el parametro EF; esta recta HI, se dice exe conjugado.

361. Scholion. En la hiperbola, los quadrados de las semiordinadas tienen

entre si la misma razon, que los rectangulos hechos de las abcisas correspondientes, y de la linea compuesta de las mismas abcisas, y el exe transverso, â saber, el quadrado de la semiordenada SX, es al quadrado de la semiordenada NT, como el rectangulo compuesto, por un lado de la abcisa ES, y por otro lado de toda la recta AN. El exceso de los quadrados de las semiordenadas sobre los rectangulos del parametro y de las abcisas correspondientes, se conoce echando una recta desde el punto A, que es el extremo del exe transverso, y tocando en la extremidad del parametro, siga segun la direccion AM; prolongada la semiordenada, hasta q.e concurra con la recta AM en el punto G, y desde los puntos de las secciones FG se echan las perpendiculares XF, GO, y el rectangulo FG es el exceso, que el quadrado de la semiordenada SX tiene sobre el rectangulo SF. Finalmente, si desde el centro G, fig. 125, se echan las dos rectas GI, GZ, con tal direccion, q.e toquen en los extremos del exe conjugado puesto sobre el vertice de la hiperbola KDV: estas dos rectas GZ, GI, prolongadas infinitamente, y tambien los lados de la hiperbola DK y DV, se van aproximando cada vez mas â los lados de la hiperbola, sin q.e nunca lleguen â juntarse; y portanto se llaman asymptotas de la hiperbola. Estas son las principales propiedades, que los Geometras demuestran en la hiperbola.

362. Corolario. Está patente de lo dho el modo de construir la hiperbola. Dadas dos qualesquiera rectas, v.g. AD, BC, fig. 125, que se corten en angulos rectos en el punto G, y en dho punto queden divididas ambas en iguales partes, y señalados los puntos AD, q.e son los extremos de la recta AD, esta misma se prolongue indefinidam.te acia los puntos SO; en la parte prolongada DO señalense iguales porciones, que serán DE, EF, FL, &c.a y despues desde el punto D echese una perpendicular indefinida DY: tomese el compás, y poniendo el centro en G, echense los circulos ta, qd, nb, mg, q.e tengan por rayos, el primero la distancia GE, el segundo GF, &c.a los quales circulos cortarán la perpendicular DY en los puntos a d b g.

363. Tomense despues las dos rectas AD, BC, por dos primeros terminos de proporcion, y puesta por tercer termino la recta Da, hasta donde corta el primer circulo, busquese la quarta proporcional, y pongase perpendicular en el punto E, y tendrémos la semiordenada EP. Permaneciendo las rectas AD, BC, por primeros dos terminos de proporcion, pongase por tercer termino la recta Dd, busquese la quarta proporcional, que será FN, y es la segunda semiordenada, puesta perpendicular sobre el punto F. Pongase por tercer termino proporcional Db, busquese la quarta, q.e será LX, y esta es la tercera semiordenada;

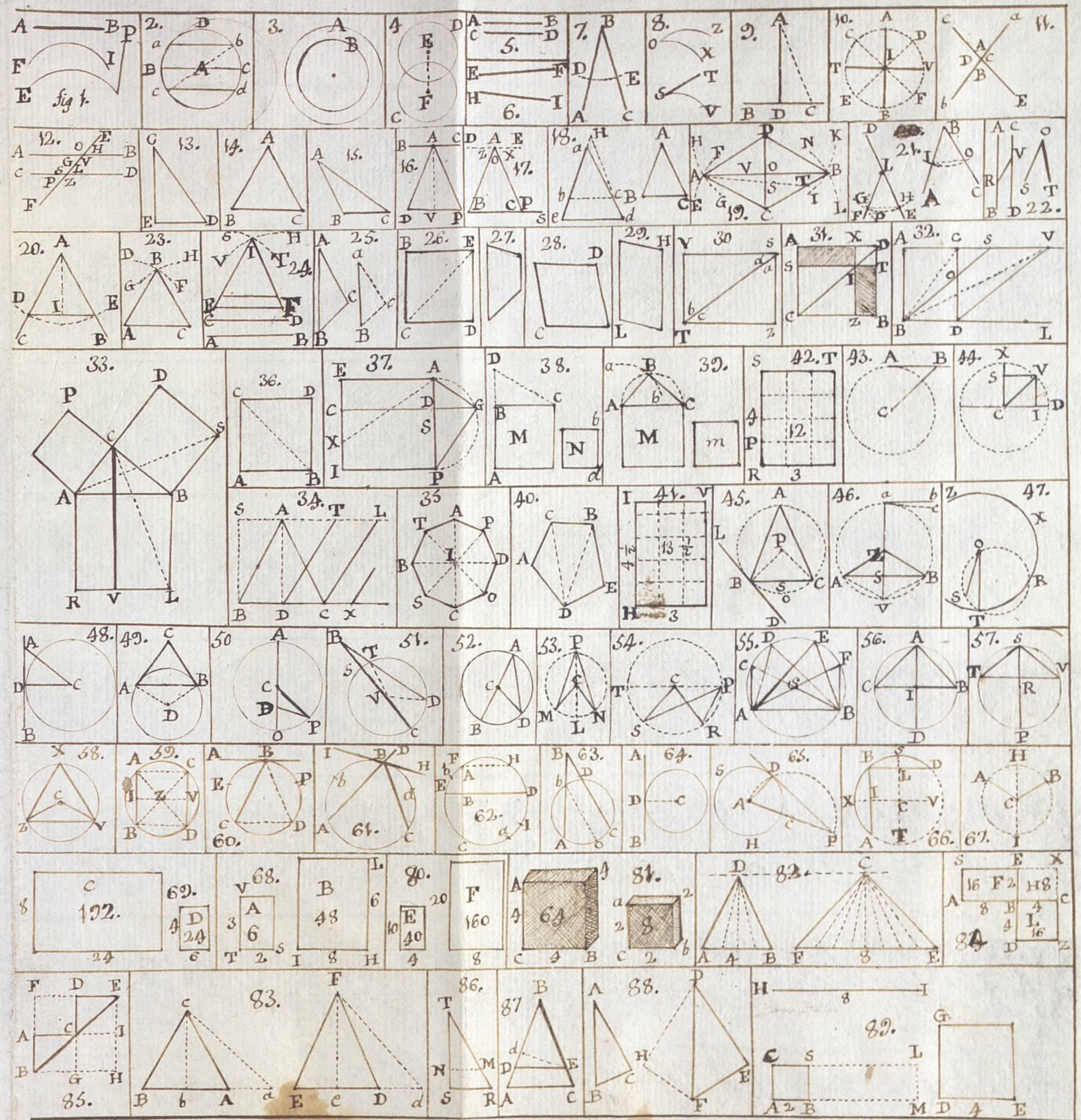
y ultimamente, puesta por tercer termino proporcional la recta Dg, y buscada la quarta proporcional MV, esta será la quarta semiordenada. Prolongadas las rectas EP hasta p, FE hasta o, LN hasta x, MV hasta u; demodo q.^e lo q.^e se prolongan estas lineas sea igual â las mismas lineas. Echese despues la curva KDV, q.^e pase por los puntos uxop DPNXV, y esta curva será la hiperbola, y el espacio contenido en ella será hiperbolico. Del mismo modo se puede construir en la parte opuesta la curva hiperbola TAH en todo semejante â la primera. El punto G es el centro comun para las dos hiperbolas, la recta AD exe transverso p.^a entrambas, y la recta BC es el conjugado para una y otra.

Apendice del Cycloide.

364. Definiciones. Si el circulo CEF, fig. 126, tocando â la recta CD igual â su circunferencia, haga sobre dha recta una entera revolucion, demodo q.^e el punto del contacto C llegue â tocar al punto D, este mismo punto describe en su revolucion la curva CAD, q.^e se llama cycloide.

365. La recta CD se dice la base del cycloide; la linea BA perpendicular â la base, y que divide al cycloide en dos iguales partes, es la altura ô exe del cycloide, el punto A el vertice; y ultimam.^te el circulo CEF, de cuya revolucion se hace el cycloide, se llama el circulo genitor.

366. Scholion. Esta demostrado por los Geometras, q.^e toda la ~~superficie~~ periferia del cycloide es quadrupla del diametro del circulo genitor; el area del cycloide es tripla del area del mismo circulo; y el rectangulo hecho de la base y exe del cycloide, es al area del cycloide mismo, como 4 : 3. Y finalmente, omitiendo otras cosas, qualquier arco del cycloide, v.g. AH es duplo de la cuerda, q.^e le corresponde en el circulo genitor, v.g. AI. Basta lo dho acerca de los Elementos de la Geometria, para tener algun conocimiento en las cosas fisicas.



4