UNIVERSIDAD DE GRANADA

Escuela Técnica Superior de Ingenierías
Informática y de Telecomunicación

Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial

Nuevos Modelos de Toma de Decisión en Grupo con Información Lingüística Difusa

Memoria de Tesis presentada por

Francisco Javier Cabrerizo Lorite

como requisito para
optar al grado de Doctor
en Informática

Granada Junio de 2008

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Francisco Javier Cabrerizo Lorite
D.L.: GR.1768-2008
ISBN: 978-84-691-5527-1

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Nuevos Modelos de Toma de Decisión en Grupo con Información Lingüística Difusa

Memoria de Tesis presentada por

Francisco Javier Cabrerizo Lorite

para optar al grado de Doctor en Informática

Directores

Dr. Enrique Herrera Viedma

Dr. Sergio Alonso Burgos

Granada Junio de 2008

La memoria de tesis titulada **Nuevos Modelos de Toma de Decisión en Grupo con Información Lingüística Difusa**, que presenta **D. Francisco Javier Cabrerizo Lorite** para optar al grado de Doctor en Informática, ha sido realizada en el **Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial** de la Universidad de Granada bajo la dirección de los doctores **Enrique Herrera Viedma** y **Sergio Alonso Burgos**.

Francisco Javier Cabrerizo Lorite
Doctorando

Dr. Enrique Herrera Viedma
Director

Dr. Sergio Alonso Burgos
Director

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sentido agradecimiento a Enrique Herrera Viedma y Sergio Alonso Burgos, mis tutores de tesis, sin cuya dedicación, esfuerzo, entusiasmo y confianza deposita en mí esta memoria jamás habría visto la luz.

A Francisco Herrera y todos los miembros del grupo de investigación *Soft Computing y Sistemas de Información Inteligentes*, y en especial a Nacho, Manolo, Salva, Julián, Antonio, Carlos, Jesús, Alberto y sobre todo a Macarena, que aunque no pertenezca al grupo, está siempre ahí.

Finalmente, agradecer el apoyo recibido desde mi familia y amigos, especialmente de mis padres, Rafael y Juani, y de mi hermana María.

GRACIAS A TODOS

Índice general

Índice de Tablas

Índice de figuras

Introducción

Planteamiento

La Toma de Decisión es un proceso cognitivo que consiste en seleccionar la mejor alternativa (o alternativas) de entre un conjunto de alternativas. Es una tarea compleja y una de las actividades fundamentales de los seres humanos. Algunos autores defienden que la Toma de Decisión en situaciones complejas es una característica fundamental que diferencia a los seres humanos de los animales [32].

La Toma de Decisión es una tarea habitual de la vida cotidiana. Constantemente nos enfrentamos a situaciones en las que existen varias alternativas y, al menos en algunas ocasiones, tenemos que decidir cuál es mejor o cuál llevar a cabo. Ejemplos típicos incluyen qué comprar, decidir dónde viajar o a quién votar en unas elecciones.

Sin embargo, la Toma de Decisión no sólo ocurre para individuos aislados. Muchos problemas de decisión tienen que ser resueltos por un grupo de personas, normalmente expertos, que tienen que decidir de forma conjunta qué alternativa de entre todas es mejor en una situación concreta. Este tipo de Toma de Decisión con múltiples individuos o expertos se denomina Toma de Decisión en Grupo (TDG). El hecho de que estén involucradas varias personas implica algunas complicaciones adicionales que deben resolverse antes de obtener una solución adecuada. Por ejemplo, las opiniones sobre las alternativas de los distintos individuos pueden diferir en gran medida y, por lo tanto, durante el proceso de decisión, es necesario llegar a alcanzar algún tipo de acuerdo o consenso entre los individuos antes de seleccionar la mejor alternativa.

En todo proceso de Toma de Decisión en Grupo, son dos los procesos a desarrollar antes de obtener una solución [46, 111, 122, 123, 140, 142]: el proceso de consenso y el proceso de selección. Ambos procesos han sido objeto de estudio por diversos autores en diferentes contextos de Toma de Decisión en Grupo [90, 139, 147]. El primero, conocido también con el nombre de consenso topológico, hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los individuos o expertos sobre el conjunto de alternativas solución. Normalmente está coordinado por una persona, llamada moderador, que ayuda a los individuos o expertos a acercar sus opiniones [140, 187]. El segundo, conocido también con el nombre de consenso algebraico, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativas solución a partir de las opiniones expresadas por los individuos o expertos. Ambos procesos actúan conjuntamente de forma secuencial. Primero, el proceso de consenso actúa para lograr alcanzar el máximo grado de consenso posible entre las opiniones de los individuos o expertos. En cada momento se calcula el grado de consenso existente. Si el grado es satisfactorio, entonces el proceso de selección se aplica de cara a obtener la solución. Por el contrario, si el grado de consenso medido no es satisfactorio, entonces los individuos o expertos son instados a modificar sus opiniones de cara a aumentar la proximidad en sus planteamientos. De este modo, un proceso de Toma de Decisión en Grupo se puede definir como un proceso dinámico e iterativo en el que los individuos o expertos van cambiando sus opiniones hasta que sus planteamientos sobre la solución son lo suficientemente próximos, momento en el que se obtiene la solución de consenso mediante la aplicación del proceso de selección.

Para modelar correctamente las situaciones de Toma de Decisiones en Grupo, son varios los aspectos que tenemos que tener en cuenta:

- *El dominio de representación* que se usa para valorar las preferencias de los expertos, el cual depende de la naturaleza cuantitativa o cualitativa de los aspectos que se estén valorando. Normalmente se asume que los individuos que participan en un proceso de decisión son capaces de expresar sus preferencias sobre el conjunto de alternativas mediante valores numéricos precisos. Sin embargo, en multitud de ocasiones, puede ocurrir que un individuo tenga que valorar aspectos de naturaleza cualitativa que difícilmente admitan valoraciones precisas, siendo más apropiado utilizar otro tipo de valores como, por ejemplo, términos lingüísticos. Así, en aquellas situaciones de decisión en las que la información disponible es demasiado imprecisa o se valoran aspectos cuya naturaleza recomienda el uso de valoraciones cualitativas [50, 67, 103, 104, 109, 195, 207, 217, 231, 232, 233, 235], el uso del Enfoque Lingüístico Difuso [231, 232, 233] basado en conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos [75, 230] se ha mostrado muy útil para modelar este tipo de aspectos. El uso del enfoque lingüístico implica la necesidad de realizar procesos para operar con palabras que en la Toma de Decisión se ha llevado a cabo usando distintos modelos [67, 69, 114].

- *El formato de representación* que pueden usar los expertos para expresar sus opiniones o preferencias. Dicho formato de representación puede afectar en gran medida al proceso de decisión. Por ejemplo, algunos formatos de representación, como la *selección de un subconjunto de alternativas* o los *órdenes de preferencias de las alternativas*, son modelos de representación simples, de forma que los expertos que no están familiarizados con ellos pueden aprender a usarlos de manera efectiva fácilmente. Sin embargo, su simplicidad implica también que la cantidad de información que puede modelarse con ellos y la granularidad de la misma es escasa. Por otro lado, otros formatos de representación de preferencias, como las *relaciones de* *preferencia* [2, 25, 36, 38, 50, 52, 67, 90, 103, 104, 117, 156, 173, 207, 208, 217, 235], ofrecen una mayor expresividad y, por lo tanto, se puede modelar mucha más información (y más precisa) con ellos.

- *Falta de información.* Es deseable que los expertos que se enfrentan a un problema de decisión tengan un conocimiento exhaustivo y amplio sobre todas las alternativas, sin embargo, esto no siempre se cumple. Existen numerosos factores culturales y personales que pueden dar lugar a situaciones donde existe falta de información para tomar una decisión correctamente. Por ejemplo, los expertos pueden no estar familiarizados con todas las alternativas, lo cual suele ocurrir si el conjunto de alternativas posibles es grande, o quizás los expertos no son capaces de discriminar suficientemente entre alternativas similares.

- *Falta de consistencia* o contradicción en las preferencias expresadas por los expertos. Aunque la diversidad de opiniones entre los distintos expertos para resolver un problema de decisión es típicamente recomendable (incluso cuando las opiniones son antagónicas), ya que esto lleva a la discusión y el estudio profundo del problema a resolver, la contradicción en las opiniones individuales de los expertos no es considerada tan útil normalmente. De hecho, en cualquier situación real, si una persona expresa opiniones inconsistentes o contradictorias, esa persona suele ser menos tenida en cuenta por el resto.

- *Localización de los expertos* que participan en el proceso de decisión. El proceso de consenso normamlmente involucra la comunicación y discusión entre expertos y entre los expertos y el moderador. Por tanto, automatizar totalmente el proceso de consenso es una tarea bastante difícil debido al alto número de interacciones necesarias. Sin embargo, podemos encontrar varias aproximaciones y herramientas que hacen uso de nuevas tecnologías (principalmente tecnologías web) para adaptar los procesos de consenso clásicos a nuevos entornos [11, 145, 146]. La aplicación de estas nuevas tecnologías permite realizar procesos de consenso en situaciones en las que anteriormente no sería posible. Por ejemplo, podemos llevar a cabo procesos de consenso entre varios expertos localizados en diferentes países a lo largo del mundo. Por tanto, es importante notar que, incluso con la adopción de nuevas tecnologías de comunicación (vídeo conferencias, salas de chat, mensajería instantánea, e-mail, etc.), los expertos podrían encontrar dificultades para discutir y colaborar entre ellos a la hora de resolver problemas de Toma de Decisión en Grupo en los cuales no pueden estar físicamente reunidos. Debido a esto, en los procesos de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo donde los expertos no tienen la posibilidad de estar juntos, éstos podrían no tener una idea clara sobre el actual estado de consenso existente entre todos los expertos involucrados en el proceso de decisión.

Por tanto, el estudio de todos estos aspectos es un punto crítico para desarrollar modelos y procesos de decisión en grupo. Así pues, admitiendo que muchos problemas de Toma de Decisión en Grupo cotidianos pueden representarse mediante un modelo lingüístico, el problema que se afronta en esta memoria es el de intentar dar solución a esos modelos lingüísticos de Toma de Decisión en Grupo de la manera más parecida a como se hace en la vida real, con vistas a crear modelos suficientemente consistentes y coherentes con las situaciones reales.

De esta manera, el tratamiento de la información incompleta en Problemas de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia difusas ha sido eficaz y ampliamente estudiado [121, 122, 206]. Sin embargo, para relaciones de preferencia lingüísticas difusas, aunque se han propuestos varias aproximaciones [210, 212, 213], existen todavía ciertas limitaciones a la hora de trabajar con información lingüística incompleta.

Por otra parte, existe gran cantidad de modelos de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo basados en una aproximación lingüística que usa variables lingüísticas valoradas en conjuntos de términos lingüísticos que están uniforme y simétricamente distribuidos, es decir, asumiendo el mismo nivel de discriminación a ambos lados del término lingüístico medio [22, 111, 113, 128, 207]. Sin embargo, existen problemas que necesitan valorar sus variables con términos lingüísticos que no están ni uniforme ni simétricamente distribuidos [107, 125, 159, 191, 202], es decir, usando conjuntos de términos lingüísticos difusos no balanceados, y que no han sido estudiados todavía en profundidad.

Debido a la necesidad de mejorar estos aspectos en los Problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa, nos proponemos en esta memoria desarrollar nuevos modelos que tengan en cuenta todos los aspectos anteriormente mencionados.

Objetivos

El propósito principal de esta memoria es desarrollar nuevos modelos de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa. Para conseguir este propósito, hemos establecido los siguientes objetivos:

- Desarrollar un procedimiento de estimación de valores perdidos para relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas basado en criterios de consistencia.

- Desarrollar un proceso de selección para resolver problemas de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas que haga uso del procedimiento de estimación anterior.

- Desarrollar un modelo de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada que realice todo el proceso de forma automática, es decir, sin moderador, realizando las tareas habituales del mismo como son la identificación de los expertos más alejados del consenso y la recomendación de los cambios de opinión que deberían acometer tales expertos para mejorar el consenso. El desarrollo de este modelo de consenso implica:
    - Proponer una nueva metodología lingüística difusa para trabajar con conjuntos de términos lingüísticos no balanceados.
    - Proponer medidas de consenso entre las preferencias expresadas por los expertos.
    - Proponer medidas de proximidad entre las preferencias expresadas por los expertos y la preferencia colectiva.
    - Desarrollar un mecanismo de retroalimentación que use las medidas anteriores para dar consejo a los expertos sobre cómo deberían cambiar sus preferencias para obtener un nivel de consenso mayor.
    - Desarrollar una herramienta de visualización que ayude a los expertos a comprender mejor cuál es el actual estado de consenso en todo momento.

Estructura de la Memoria

Para alcanzar los objetivos planteados, esta memoria se estructura en cuatro capítulos. A continuación, presentamos un breve resumen de cada uno de ellos:

- En el Capítulo 1 se hace una introducción a la Toma de Decisión y a las características de estos problemas, dedicando especial interés al esquema general de los modelos de Toma de Decisión en Grupo. Además, se presentan las herramientas y modelos básicos que serán usados en los siguientes capítulos: estructuras de representación de preferencias, propiedades de las relaciones de preferencia, consistencia, cuantificadores difusos, operadores de agregación y el problema de la información incompleta.

- En el Capítulo 2 se estudian los conceptos y herramientas del modelado lingüístico difuso, además de los diferentes enfoques del mismo para la representación de información: el modelado lingüístico difuso clásico, el modelado lingüístico difuso ordinal, el modelado lingüístico difuso 2-tupla, el modelado lingüístico difuso multi-granular y el modelado lingüístico difuso no balanceado.

- En el Capítulo 3 se desarrolla un proceso de selección de alternativas que permitirá abordar problemas de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas. Para ello, se desarrollará un procedimiento de estimación iterativo basado en criterios de consistencia que es capaz de calcular información perdida en las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas.

- En el Capítulo 4 se desarrolla un modelo de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada. El modelo de consenso será capaz de generar recomendaciones a los expertos para que puedan cambiar sus opiniones con el objetivo de llegar a una solución lo suficientemente consensuada. Además, se desarrolla una herramienta de visualización para ayudar a los expertos a comprender mejor cuál es el actual estado de consenso.

- Finalmente, se presentan las conclusiones y resultados más relevantes obtenidos de la investigación realizada en esta memoria, así como las futuras líneas de investigación a seguir y las publicaciones derivadas a partir de la misma. La memoria concluye con una recopilación bibliográfica de las contribuciones más destacadas en la materia estudiada.

Capítulo 1

La Toma de Decisión en Grupo

La Toma de Decisión, es decir, el proceso de seleccionar la mejor alternativa o alternativas de entre un conjunto de las mismas, es una tarea muy común y que está presente en casi todas las actividades humanas. Por tanto, el estudio de situaciones de Toma de Decisión y de los mecanismos que permiten resolver esta clase de problemas es fundamental.

Este primer capítulo está dedicado a hacer una revisión de los problemas de Toma de Decisión en Grupo, es decir, problemas en los que participan varios individuos o expertos con el objetivo de alcanzar una solución en común al mismo, y a presentar los aspectos a tener en cuenta para resolver esta clase de problemas.

La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, presentamos el concepto de Toma de Decisión junto con algunos ejemplos de situaciones de Toma de Decisión típicas en la Sección 1.1. Las principales características de los problemas de Toma de Decisión se describen en la Sección 1.2. A continuación, mostramos el esquema general de los modelos de Toma de Decisión en Grupo en la Sección 1.3 y, en la Sección 1.4, revisamos los formatos más comunes de representación de preferencias usados por los expertos para expresar sus opiniones. Posteriormente, tratamos el problema de la consistencia en las opiniones de los expertos en la Sección 1.5. Los cuantificadores lingüísticos difusos se presentan en la Sección 1.6. Algunos operadores de agregación son descritos en la Sección 1.7. Y para finalizar este capítulo, introducimos el problema de la información incompleta en la Sección 1.8.

1.1. La Toma de Decisión

Muchas de las actividades humanas precisan tomar decisiones en algún momento determinado. Así, diariamente nos enfrentamos a situaciones en las que debemos decidir qué hacer o qué alternativa elegir en función del entorno en el que nos encontramos. Por ejemplo, decidir qué ropa ponerse o qué comer. De esta forma, cada vez que se plantea la necesidad de tomar una decisión, ésta va acompañada de un conjunto de posibles alternativas que, a su vez, tienen una serie de consecuencias que pueden hacernos dudar sobre la idoneidad de cada una de ellas. Por tanto, en un sentido amplio, tomar una decisión consiste en elegir la mejor opción o alternativa de entre un conjunto de opciones o alternativas.

Una situación de Toma de Decisión clásica presenta los siguientes elementos básicos [51]:

1. Uno o varios objetivos por resolver.

2. Un conjunto de alternativas o decisiones posibles para alcanzar dichos objetivos.

3. Un conjunto de factores o estados de la naturaleza que definen el contexto en el que se plantea el problema de decisión.

4. Un conjunto de valores de utilidad o consecuencias asociados a los pares formados por cada alternativa y estado de la naturaleza.

Como la Toma de Decisión [90, 178, 203] está presente en casi todas las actividades humanas, no es sorprendente que el estudio de modelos de Toma de Decisión tenga un papel destacado no sólo en Teoría de Decisión, sino también en otras áreas de investigación como la Inteligencia Artificial, Economía, Sociología, Ingeniería, etc.

Sin embargo, los modelos de decisión básicos tienen poco en común con los modelos de decisión reales. Muchos procesos de Toma de Decisión reales se desarrollan en ambientes donde los objetivos, restricciones y posibles alternativas no son conocidas con precisión o no están bien definidas. Por lo tanto, es necesario estudiar y refinar estos modelos de decisión para poder modelar esa incertidumbre. El profesor Zadeh propuso en 1965 una manera práctica y poderosa de tratar dicha incertidumbre en el conocimiento humano: La Teoría de Conjuntos Difusos [230]. La aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos, para resolver la incertidumbre en la información en los procesos de Toma de Decisión, fue propuesta por Bellman y Zadeh en 1970 [20] y, desde ese momento, se ha utilizado extensivamente debido a su utilidad. Su principal cualidad es la de presentar un entorno de trabajo mucho más flexible, donde es posible representar la imprecisión, tanto cualitativa como cuantitativa, de los juicios humanos. Esto permite solucionar satisfactoriamente muchos de los problemas derivados de la pérdida de información.

Por otro lado, es normal que los problemas de decisión necesiten de un análisis de las diferentes alternativas y del problema al que nos enfrentamos. La Toma de Decisión, como apuntan Keeney y Raiffa [144], intenta ayudar a los individuos a tomar decisiones difíciles y complejas de una forma racional. Esta racionalidad implica el desarrollo de métodos y modelos que permitan representar fielmente cada problema y analizar las distintas alternativas con criterios objetivos. Sin embargo, no todo problema de decisión se resuelve por medio de un proceso completamente racional. De hecho, muchos factores externos y subjetivos afectan a los procesos de decisión y, por lo tanto, la solución final puede variar si las condiciones en las que se presenta el problema cambian.

A continuación, mostramos algunos ejemplos comunes y reales de procesos de Toma de Decisión y comprobaremos como su solución puede verse influenciada por factores externos o subjetivos:

- *Elegir lo que se va a comer.* Elegir entre varias comidas posibles cuando uno está hambriento es una situación común en nuestra vida diaria. Sin embargo, la elección de un tipo particular de comida o incluso la manera de cocinarla, no depende exclusivamente de factores racionales (por ejemplo, las necesidades corporales, las propiedades nutritivas del alimento, etc.), sino que otros factores externos y subjetivos afectan en gran manera a la decisión final. Por ejemplo, gustos personales, el aspecto de los distintos platos (que no implica directamente buena calidad o sabor), etc.

- *Comprar.* Este es un claro ejemplo de Toma de Decisión. Cuando queremos comprar un producto particular, usualmente tenemos que elegir entre una gama de alternativas diferentes pero similares. Está claro que existen factores externos que nos influencian en gran medida sobre qué productos comprar. Por ejemplo, el lugar donde se encuentran situados los productos en la tienda o la ayuda que ofrece el vendedor al cliente son factores fundamentales que determinan qué productos se venden bien y cuáles no. Además de los factores externos, que pueden influenciar mucho en la decisión final, éste es un buen ejemplo donde nos enfrentamos al problema de la falta de información. No es extraño que un cliente, que tiene que escoger entre diversos productos similares, no posea información suficiente sobre las características particulares que los diferencian.

- *Votar en unas elecciones.* En unas elecciones, los votantes tienen que elegir entre diversos candidatos. En este caso, es fácil percibir que factores muy subjetivos pueden influir muy seriamente en el resultado final. Además, este es un claro ejemplo donde es mejor utilizar valoraciones lingüísticas, tales como *bueno, malo, mejor*, para valorar a los candidatos que valores numéricos exactos.

1.2. Características de los Problemas de Toma de Decisión

Ante la gran variedad de situaciones o problemas de decisión que se pueden presentar en la vida real, la Teoría de la Decisión ha establecido una serie de características que permiten clasificar estas situaciones o problemas atendiendo a diferentes puntos de vista como, por ejemplo, la fuente o fuentes de información y el formato de representación de preferencias utilizado para resolver dicho problema de decisión.

En los siguientes apartados, se hace una breve revisión de las características que definen cada uno de estos puntos de vista.

1.2.1. Número de Criterios

El número de criterios o atributos que se tienen en cuenta en los procesos de decisión para obtener la solución permite clasificar a los problemas de decisión en dos tipos [56, 57, 90, 92, 96, 135, 160, 162, 179, 203]:

1. *Problemas con un único criterio o atributo.* Problemas de decisión en los que, para evaluar las alternativas, se tiene en cuenta un único valor que representa la valoración dada a esa alternativa. La solución se obtiene como la alternativa que mejor resuelve el problema teniendo en cuenta este único criterio de decisión.

   Ejemplo 1.1. Supongamos un problema de decisión en el que nos planteamos cambiar de trabajo y nos ofrecen tres posibles alternativas, cada una de ellas caracterizada por el atributo sueldo. Este problema de decisión sería muy simple de resolver puesto que escogeríamos la alternativa con mejor sueldo.

En los problemas de decisión con un único criterio, cada alternativa se caracteriza por un único valor. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el conjunto de alternativas del problema. Una forma de representación de la información del problema se muestra en la Tabla 1.1:

Alternativas	Criterio
(x_i)	c
x_1	y_1
...	...
x_n	y_n

Tabla 1.1: Esquema general de la información de un problema de Toma de Decisión con un único criterio.

Cada entrada y_l de la tabla indica la preferencia de la alternativa x_l de acuerdo al criterio c. Según el contexto de definición del problema, cada y_l estará valorada en un dominio de expresión determinado (numérico, lingüístico, etc.).

2. *Problemas multi-criterio o multi-atributo.* Problemas de decisión en los que, para evaluar las alternativas, se tienen en cuenta los valores de dos o más criterios o atributos que definen las características de cada alternativa. La alternativa solución será aquella que mejor resuelve el problema considerando todos estos criterios.

Ejemplo 1.2. Supongamos un problema de decisión en el que nos planteamos cambiar de trabajo y nos ofrecen tres posibles alternativas, pero, en este caso, cada una de ellas se caracteriza por tres atributos: el sueldo, la ubicación geográfica y el tipo de trabajo a desarrollar. En esta situación, estamos ante un problema en el que se consideran varios criterios para tomar una decisión y, por tanto, hablamos de un problema de decisión multi-criterio o multi-atributo.

Los problemas de Toma de Decisión multi-criterio son más complejos de resolver que los problemas en los que sólo hay que tener en cuenta un criterio para obtener la solución. Cada criterio puede establecer un orden de preferencia particular y diferente sobre el conjunto de alternativas. A partir del conjunto de órdenes de preferencia particulares, será necesario establecer algún mecanismo que permita construir un orden global de preferencia. Podemos encontrar varios ejemplos en la literatura [97, 188, 203].

El número de criterios en problemas de decisión multi-criterio se asume que es finito. Sean $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ el conjunto de alternativas y el conjunto de criterios que caracterizan una situación de decisión determinada. Entonces, una forma de representación de la información del problema puede expresarse mediante la Tabla 1.2:

Alternativas	*Criterios*			
(x_i)	c_1	c_2	...	c_m
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m}
...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	...	y_{nm}

Tabla 1.2: Esquema general de la información de un problema de Toma de Decisión multi-criterio.

Cada entrada y_{lk} de la tabla indica la preferencia de la alternativa x_l respecto del criterio c_k. Según el contexto de definición del problema, cada y_{lk} podría estar valorada en un dominio de expresión determinado (numérico, lingüístico, etc.).

1.2.2. Ambiente de Decisión

El ambiente de decisión viene definido por las características y el contexto en el que se va a llevar a cabo la Toma de Decisión. La Teoría Clásica de la Decisión distingue tres situaciones o ambientes de decisión [80, 180]:

1. *Ambiente de certidumbre.* Un problema de decisión está definido en un ambiente de certidumbre cuando se conocen con exactitud todos los elementos y factores que intervienen en el problema. Esta situación permite asignar valores precisos de utilidad a cada una de las alternativas presentes en el problema.

   Ejemplo 1.3. Supongamos que disponemos de una determinada cantidad de dinero que queremos invertir en alguno de los diferentes productos financieros del mercado que nos garantice la inversión realizada (por ejemplo, imposición a plazo fijo). Asumiendo que conocemos con exactitud la rentabilidad de cada producto, los gastos de gestión y la duración del mismo, debemos decidir en qué producto invertir para maximizar la inversión realizada. En este caso, conocemos todos los factores que se han de tener en cuenta para tomar la decisión y el problema consistirá en estructurar correctamente esta información y establecer las preferencias entre las alternativas de forma que nos permita elegir aquella que maximice el beneficio esperado.

2. *Ambiente de riesgo.* Un problema de decisión está definido en un ambiente de riesgo cuando alguno de los elementos o factores que intervienen están sujetos a las leyes del azar. En estos casos, estos problemas se resuelven utilizando la Teoría de la Probabilidad.

   Ejemplo 1.4. Supongamos que queremos realizar una inversión en un depósito ligado a resultados deportivos. Inmediatamente surgen dudas sobre los resultados de equipos de los que depende la inversión. En este caso, el enfoque del problema ha de ser diferente y se podrá utilizar una distribución de probabilidad para reflejar la posible subida o bajada dependiendo de los resultados deportivos que influirá en la utilidad de cada una de las posibles alternativas en las que invertir el dinero.

3. *Ambiente de incertidumbre.* Un problema de decisión está definido en un ambiente de incertidumbre cuando la información disponible sobre las distintas alternativas puede ser incompleta, vaga o imprecisa, lo que implica que la utilidad asignada a cada alternativa tenga que ser valorada de forma aproximada. Esta incertidumbre surge a raíz del intento de modelar la imprecisión propia del comportamiento humano o la inherente a ciertos fenómenos que por su naturaleza son inciertos.

   Ejemplo 1.5. Supongamos que queremos realizar una inversión sobre un nuevo valor en bolsa. En este caso, los expertos intentan valorar fenómenos relacionados con apreciaciones subjetivas sobre una posible subida o bajada en la cotización de las acciones en las que se invierta el dinero.

   Los métodos clásicos no son adecuados para tratar situaciones en las que la incertidumbre se debe a la aparición de información vaga e imprecisa. Esto ha generado la necesidad de recurrir a la definición de nuevos modelos basados en la Teoría de Conjuntos Difusos [230] para modelar la incertidumbre como, por ejemplo, los Conjuntos Aproximados (Rough Sets) [78, 100, 133], los Conjuntos Difusos Intuicionistas [16, 35, 37, 39, 194, 215], etc.

1.2.3. Número de Expertos

Otro punto de vista, a la hora de clasificar los problemas de decisión, hace referencia al número de expertos que toman parte en el proceso de decisión. Un proceso de Toma de Decisión en el que participan varios expertos es más complejo que otro que se realiza de forma individual. Sin embargo, el hecho de que intervengan varios expertos con puntos de vista diferentes puede ofrecer una solución más satisfactoria al problema [180, 187].

Atendiendo al número de expertos que toman parte en el proceso de Toma de Decisión, los problemas de decisión se pueden clasificar en dos tipos [88, 111, 117, 121, 122, 123, 128, 139, 196, 197, 204, 207, 217]:

1. *Unipersonales o individuales.* Las decisiones son tomadas por un único experto. En los problemas de decisión con un único experto, cada alternativa es valorada por un único experto. Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ el conjunto de alternativas que son valoradas por el experto e. Entonces, una forma de representación de la información del problema se puede observar en la Tabla 1.3:

Alternativas	*Experto*
(x_i)	e
x_1	y_1
...	...
x_n	y_n

Tabla 1.3: Esquema general de la información de un problema de Toma de Decisión con un único experto.

   Cada entrada y_l de la tabla indica la preferencia dada por el experto e sobre la alternativa x_l. Según el contexto de definición del problema, cada y_l podría estar valorada en un dominio de expresión determinado (numérico, lingüístico, etc.).

2. *En grupo o multi-experto.* La decisiones son tomadas por un grupo de expertos que intentan alcanzar una solución en común al problema. El número de expertos en los problemas de Toma de Decisión en Grupo se asume que es finito. Sean $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ el conjunto de alternativas y el conjunto de expertos que valoran cada alternativa que caracteriza una situación de

decisión determinada. Entonces, una forma de representación de la información del problema puede observarse en la Tabla 1.4:

Alternativas	*Expertos*			
(x_i)	e_1	e_2	...	e_m
x_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1m}
...	...	...	...	...
x_n	y_{n1}	y_{n2}	$\cdots$	y_{nm}

Tabla 1.4: Esquema general de la información de un problema de Toma de Decisión en Grupo.

Cada entrada y_{li} de la tabla indica la preferencia sobre la alternativa x_l del experto e_i. Según el contexto de definición del problema, cada y_{li} podría estar valorada en un dominio de expresión determinado (numérico, lingüístico, etc.).

Existe cierta similitud entre los problemas de Toma de Decisión en Grupo y los problemas de decisión multi-criterio. En ambos casos, existen múltiples órdenes de preferencia sobre las alternativas y es necesario integrarlos en un único orden global de preferencia. La diferencia consiste en que en los problemas de Toma de Decisión en Grupo, los órdenes de preferencia representan la importancia de las alternativas según cada persona, mientras que en los problemas multi-criterio, los órdenes representan la importancia de cada alternativa respecto a cada criterio.

1.2.4. Importancia del Experto

La importancia de cada experto que participa en el proceso de decisión es otra forma de clasificar los problemas de decisión [22, 111, 112, 113]:

1. *Homogéneos.* Las opiniones de los expertos se consideran igualmente importantes.

2. *Heterogéneos.* Las opiniones de los expertos no se consideran igualmente importantes.

Un modo de recoger este aspecto consiste en asignar un peso a cada experto. Los pesos son valores cualitativos o cuantitativos que pueden ser asignados, por ejemplo, por un moderador. Pueden interpretarse como la importancia del experto dentro del grupo o como lo relevante que realmente es el experto en relación al problema tratado [74, 79]. En cualquier caso, es conveniente apreciar que este peso ha de actuar como una restricción sobre las opiniones de los expertos en el proceso de resolución. En algunas situaciones, estos problemas pueden ser complicados aún más, considerando que tenemos opciones o alternativas con distinta relevancia de cara al domino de aplicación del problema.

1.2.5. Formato de Representación de Preferencias

Finalmente, otra forma de clasificar los problemas de decisión es teniendo en cuenta el formato de representación de preferencias usado por los expertos que participan en el proceso de decisión [52, 53, 54, 86, 88, 117, 123, 128, 165, 239, 240]:

1. *Homogéneos.* Todos los expertos expresan sus preferencias utilizando el mismo formato de representación de preferencias.

2. *Heterogéneos.* Los expertos expresan sus preferencias utilizando distintos formatos de representación de preferencias.

En la vida real no siempre es posible que todos los expertos utilicen el mismo formato de representación de preferencias, debido a que cada experto tiene su propio conocimiento, experiencia y personalidad, lo cual implica que los diferentes expertos expresen sus preferencias mediante distintos formatos de representación. Este es un tema que ha atraído la atención de muchos investigadores del área de Toma de Decisión en Grupo y, como resultado, se han propuesto distintas aproximaciones para integrar diferentes formatos de representación de preferencias [52, 53, 54, 86, 88, 117, 123, 128, 165, 239, 240].

En esta memoria, nosotros nos centramos en los problemas de Toma de Decisión en Grupo homogéneos, tanto en la importancia de los expertos como en el formato de representación de preferencias utilizado.

1.3. Esquema General de los Modelos de Toma de Decisión en Grupo

Tomar decisiones en grupo, como su propio nombre indica, implica la participación de varias personas que han de tomar decisiones de forma colectiva para alcanzar una solución en común a un problema.

Un proceso de Toma de Decisión en el que participen varios individuos o expertos, cada uno de ellos aportando sus propios conocimientos, experiencia y creatividad, proporcionará una decisión de mayor calidad que aquella aportada por un único experto [180, 187]. Por esta razón, el estudio de problemas de Toma de Decisión en Grupo ha sido ampliamente tratado en la literatura [88, 111, 112, 113, 117, 121, 122, 123, 128, 139, 196, 197, 207, 217].

Un problema de Toma de Decisión en Grupo se establece en situaciones donde hay una cuestión común a solucionar, un conjunto de opciones o alternativas posibles a escoger, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, y un conjunto de individuos (expertos, jueces, etc.), $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$, que expresan sus opiniones o preferencias sobre el conjunto de opciones o alternativas. El objetivo es encontrar una solución, que será una o un conjunto de alternativas, que sea la de mayor aceptación por parte de todo el grupo de expertos. A veces, existe una persona singular, llamada moderador [111, 140], que no participa en el proceso de discusión y que se encarga de dirigir todo el proceso de resolución del problema de Toma de Decisión en Grupo y de ayudar a los expertos a aproximar sus preferencias sobre las alternativas hasta que éstos logran un acuerdo sobre la solución a escoger (Figura 1.1).

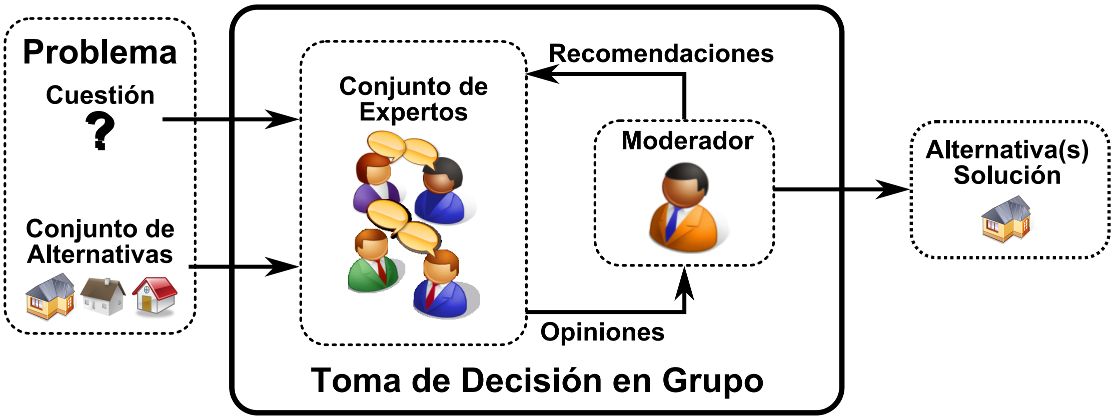

Figura 1.1: Planteamiento de un problema de Toma de Decisión en Grupo.

En todo proceso de Toma de Decisión en Grupo, son dos los procesos a desarrollar antes de obtener una solución [46, 111, 122, 123, 140, 142]: el proceso de consenso y el proceso de selección. Ambos procesos han sido objeto de estudio por diversos autores en diferentes contextos de Toma de Decisión en Grupo [90, 139, 147]. El primero, conocido también con el nombre de consenso topológico, hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los individuos o expertos sobre el conjunto de alternativas solución. Este proceso suele estar coordinado por un moderador [111, 140] que se encarga de controlar el proceso de negociación y de ayudar a los expertos a aproximar sus preferencias. El segundo, conocido también con el nombre de consenso algebraico, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativas solución a partir de las opiniones expresadas por los individuos o expertos. Ambos procesos actúan conjuntamente de forma secuencial. Primero, el proceso de consenso actúa para lograr alcanzar el máximo grado de consenso posible entre las opiniones de los individuos o expertos. En cada momento, el moderador calcula el grado de consenso existente. Si el grado es satisfactorio, entonces el proceso de selección se aplica de cara a obtener la solución. Por el contrario, si el grado de consenso medido no es satisfactorio, entonces el moderador insta a los individuos o expertos a modificar sus opiniones de cara a aumentar la proximidad en sus planteamientos. De este modo, un proceso de Toma de Decisión en Grupo se puede definir como un proceso dinámico e iterativo en el que los individuos o expertos van cambiando sus opiniones hasta que sus planteamientos sobre la solución son lo suficientemente próximos, momento en el que se obtiene la solución de consenso mediante la aplicación del proceso de selección. Este procedimiento puede observarse gráficamente en la Figura 1.2.

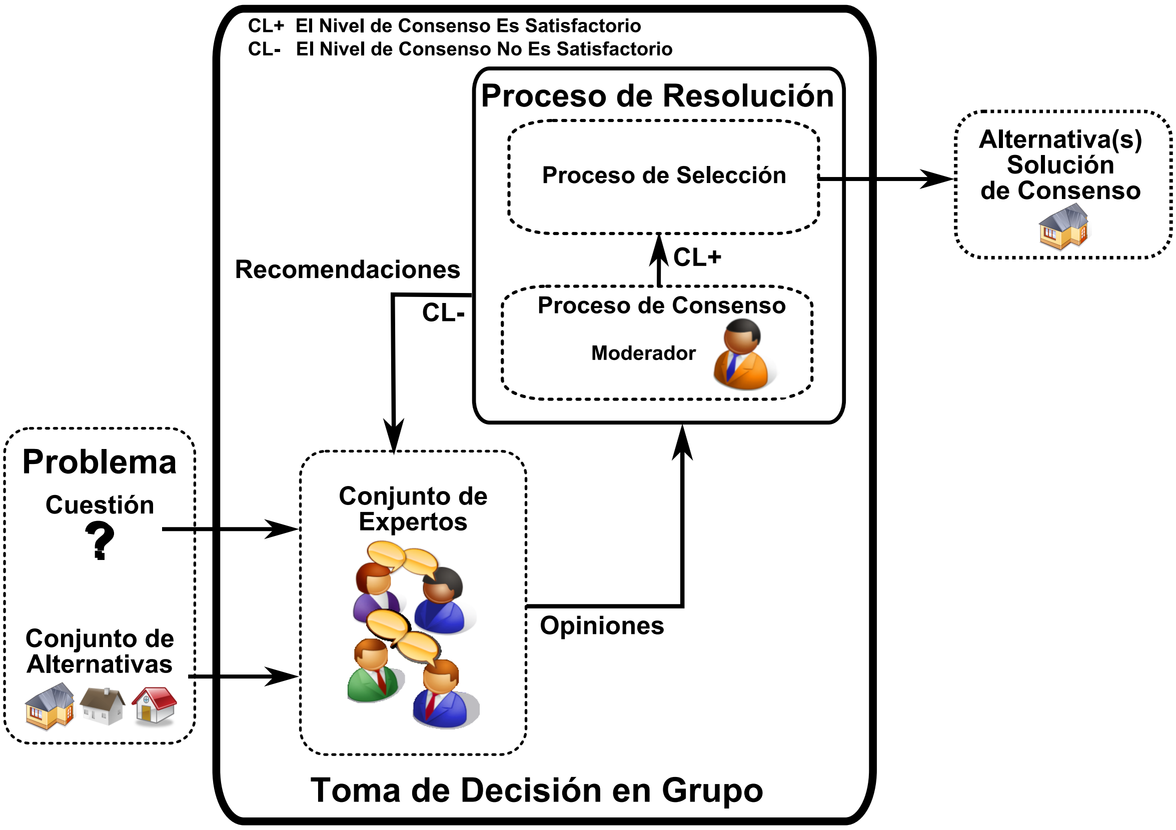

Figura 1.2: Esquema del proceso de Toma de Decisión en Grupo.

Tanto el proceso de consenso como el proceso de selección se describen en mayor detalle en las siguientes subsecciones.

1.3.1. Proceso de Consenso

El proceso de consenso hace referencia a cómo alcanzar el mayor grado de acuerdo o coincidencia entre los individuos o expertos sobre el conjunto solución de alternativas, y constituye un área de investigación importante en el campo de la Toma de Decisión en Grupo [28, 33, 46, 83, 89, 111, 121, 123, 128, 140, 142, 187, 194].

Tal y como recogen S. Saint y J. Lawson en [187], puede ocurrir que en un proceso de Toma de Decisión en Grupo varios expertos consideren que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución final al problema y, por lo tanto, la rechacen o no se sientan identificados con ella. Para evitar esta situación, parece lógico llevar a cabo un proceso en el que los expertos expresen sus preferencias, las justifiquen, y, finalmente, las aproximen con el propósito de alcanzar un nivel de acuerdo aceptable entre todos ellos antes de tomar una decisión sobre el problema.

Este proceso, que se denomina proceso de consenso, desarrolla la idea del consenso en el mismo sentido en que aparece recogido en el diccionario de la Real Academia Española [85], donde se define el término consenso como:

> "*Acuerdo producido por consentimiento entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos*"

Según esta definición, un proceso de Toma de Decisión en Grupo en el que las decisiones se toman por consenso implica que *ningún* experto está en desacuerdo sobre tales decisiones, aunque esto no significa que individualmente cada experto no pueda seguir pensando que sus soluciones son mejores que las finalmente tomadas. Para que este acuerdo sea posible, es necesario que *todos* los expertos cambien sus opiniones o preferencias iniciales y tiendan a aproximarlas hacia una preferencia colectiva que consideren satisfactoria.

Normalmente, al inicio de todo problema de Toma de Decisión en Grupo, las opiniones de los expertos suelen diferir sustancialmente. En esta situación, consideramos que es apropiado que los expertos cambien sus preferencias y tiendan a aproximar sus opiniones. De esta forma, se consigue que todos los expertos cedan en sus pretensiones iniciales en pos de la búsqueda del consenso y que ninguno de ellos rechace la solución obtenida por considerar que él si ha cambiado sus preferencias y el resto no. Por tanto, es importante desarrollar procesos de consensos en un intento de obtener una solución al problema sobre la que dicho conjunto de expertos muestren cierto grado de aceptación.

La visión del concepto de consenso ha evolucionado a lo largo del tiempo. Tradicionalmente el consenso se ha definido como el acuerdo unánime y total entre las preferencias del grupo de expertos [23, 24, 192, 193]. Sin embargo, esta definición de consenso es inconveniente para nuestro propósito por tres razones fundamentalmente:

1. En primer lugar, nos permite diferenciar tan sólo entre dos posibles estados, la existencia y la ausencia de consenso.

2. En segundo lugar, las posibilidades de alcanzar tal acuerdo total, en caso de ser necesario, son prácticamente nulas. Es más, un acuerdo completo y unánime no es esencialmente necesario, incluso a veces es preferible evitarlo en la vida real.

3. En tercer lugar, para tomar una decisión no es necesario alcanzar un acuerdo unánime entre todos los expertos. Es suficiente con que una mayoría de expertos alcance un acuerdo sobre cuál es el conjunto solución de alternativas para resolver el problema.

Todo esto ha conducido a una relajación del concepto clásico del consenso y a la tendencia hacia una interpretación menos estricta en la que se valore la coincidencia de las preferencias de una mayoría más o menos significativa del conjunto de expertos. Dependiendo del contexto y del tipo de problema que se esté abordando, esta mayoría se define utilizando algún tipo de parámetro cuantitativo o umbral de consenso. Por ejemplo, que *la mitad más uno* o *más del 75 %* de los expertos estén de acuerdo.

Kacprzyk en [136, 137] profundiza en el estudio del concepto de mayoría en problemas de Toma de Decisión en Grupo y propone suavizarlo hacia otro más flexible al cual denomina *mayoría difusa*. Esta relajación se consigue acudiendo al uso de cuantificadores lingüísticos difusos del tipo *la mayor parte de* o *muchos más que la mitad* y apoyándose en el cálculo de proposiciones cuantificadas lingüísticamente desarrollado por Zadeh [234] y Yager [218]. Continuando en esta misma dirección, en [137, 138, 141] se propone suavizar el concepto tradicional del consenso entendido como la coincidencia unánime y completa de las opiniones de los expertos por otro más acorde con la percepción humana que se tiene sobre él mismo, surgiendo el concepto de *soft consensus* que Kacprzyk define en [138] como:

> "*most of the relevant individuals agree as to almost all of the important alternatives*"[1]

Por todo esto, todos los procesos de consenso intentan alcanzar el máximo grado de consenso posible entre los individuos o expertos, aunque éste no sea ideal. Para ello, el proceso de consenso consiste en una fase de discusión en la que los expertos expresan sus preferencias e intentan aproximarlas. Esta aproximación se realiza a lo largo de varias rondas de consulta o de consenso donde los expertos van cambiando sus preferencias iniciales. El propósito de estos cambios es alcanzar un nivel de acuerdo mínimo antes de iniciar el proceso de selección de las alternativas solución al problema de Toma de Decisión en Grupo. Todo este proceso suele estar coordinado por al menos una figura humana conocida como *moderador*. La figura del moderador es clave en un proceso de consenso y entre otras funciones tiene asignadas tres que se consideran fundamentales [187]:

[1] La mayoría de los expertos más relevantes están de acuerdo sobre la mayoría de las alternativas más importantes.

- Evaluación del grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso.
- Identificación de las preferencias que impiden la consecución del consenso buscado.
- Recomendación de los cambios que los expertos deben hacer sobre dichas preferencias para conseguir mejorar el consenso.

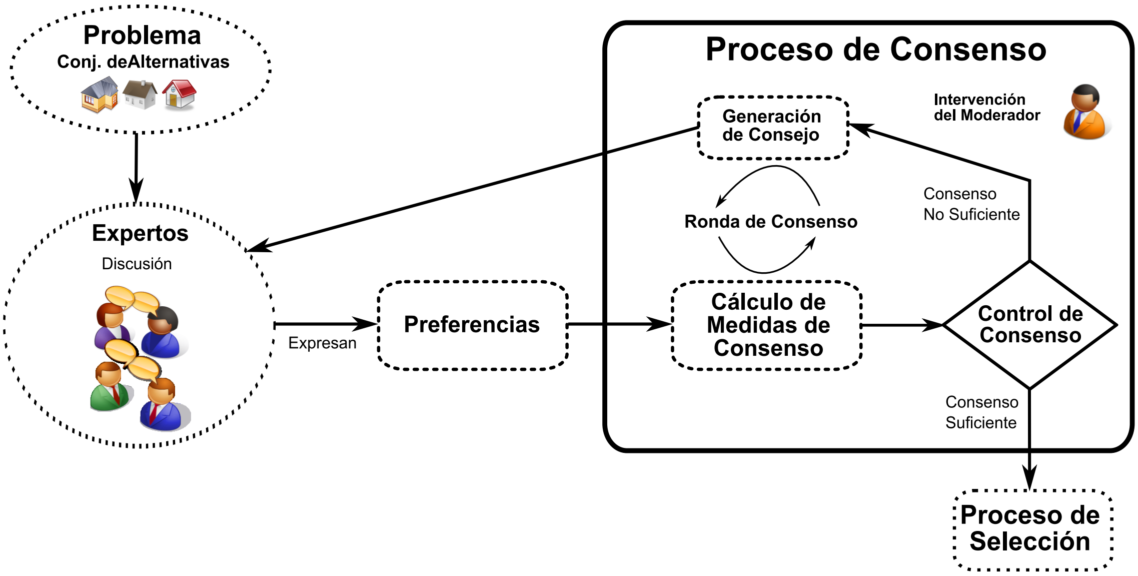

Figura 1.3: Fases del proceso de consenso.

La Figura 1.3 muestra las distintas fases básicas que componen un proceso de consenso estándar. Si bien alguna de estas fases puede variar debido al contexto de definición del problema que se esté resolviendo, básicamente todas ellas realizan las operaciones que se describen a continuación.

1.3.1.1. Cálculo de las Medidas de Consenso

Inicialmente, en cualquier problema de Toma de Decisión en Grupo no trivial, cabe esperar que las preferencias de los expertos sean diferentes. Esto implica un grado de consenso bajo. Conforme van transcurriendo las diferentes rondas, si el moderador dirige correctamente el proceso, el grado de consenso deberá ir aumentando. Por lo tanto, es primordial establecer o definir operadores y medidas capaces de calcular y evaluar el nivel de acuerdo alcanzado entre los expertos a lo largo del proceso.

Para evaluar el grado de consenso, la mayoría de los autores [33, 46, 136, 148, 236] utilizan un valor numérico cuantificado dentro del intervalo $[0, 1]$. De esta manera, un grado de consenso próximo a 0 indica que el nivel de acuerdo es muy bajo y, por el contrario, un valor próximo a 1 significa que las preferencias de los expertos son muy similares.[2]

Una variante al uso de valores numéricos en el intervalo $[0, 1]$ la podemos encontrar en [71, 111] para resolver problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos lingüísticos difusos. En este tipo de problemas, debido a la naturaleza cualitativa de las alternativas que se están valorando, los expertos expresan sus preferencias mediante términos lingüísticos, los cuales se utilizan también para evaluar el nivel de acuerdo.

Para calcular el grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso, todos los autores coinciden en la idea de medir la similitud entre las preferencias dadas por los expertos a cada una de las alternativas presentes en el problema de decisión. Las propuestas se diferencian en la forma de calcular esta similitud, distinguiendo dos posibles vías de cálculo:

1. *Cálculo de Distancias.* La idea es muy simple y consiste en utilizar funciones que permitan medir la distancia entre las preferencias de los expertos. A partir de esos valores, es posible obtener un valor que represente el grado de consenso alcanzado entre los expertos. Como ejemplos de funciones de distancia, los autores han utilizado distancias clásicas como:

   - Distancia Euclídea [59].

[2] Resaltar que Carlsson en [46] hace una interpretación del grado de consenso justo al contrario, es decir, un valor proximo a 0 indica un grado de consenso alto y un valor próximo a 1 un grado de consenso bajo.

- Distancia Geométrica [46].
- L-1 norma [58].
- El seno [17, 33] y coseno [101] del ángulo entre dos vectores.

2. *Cálculo de Coincidencias.* Consiste en medir el grado de coincidencia entre las preferencias de los expertos y, a partir de estas, obtener el grado de consenso. Diremos que las preferencias de dos expertos coinciden si ambos asignan los mismos valores a dichas preferencias. El grado de coincidencia se puede tratar desde dos puntos de vista [141]:

   a) Coincidencia rígida. Se hace una interpretación estricta del concepto de coincidencia, de ahí que el resultado de la comparación entre dos preferencias sólo admite dos valores:

   - 1, si los valores de las preferencias son exactamente iguales.
   - 0, en caso contrario.

   b) Coincidencia flexible. Se hace una interpretación relajada del concepto de coincidencia en el sentido de que se tiene en cuenta la proximidad o cercanía de los valores asignados a las preferencias. El resultado de la comparación entre dos preferencias admite valores entre $[0, 1]$.

1.3.1.2. Control de Consenso

Una vez calculado el grado de consenso existente entre los expertos, es necesario establecer una condición de parada del proceso de consenso. Esta condición consiste en comprobar si el nivel de acuerdo ha alcanzado un *umbral de consenso* fijado previamente. Este umbral de consenso representa el valor mínimo que debe alcanzar el grado de consenso para dar por finalizada la fase de consenso y dar paso al proceso de selección de alternativas. El valor del umbral de consenso suele estar comprendido en el intervalo

$[0, 1]$ y su valor dependerá del tipo y objetivos del problema que se esté tratando en cada momento. De esta forma, si las consecuencias de la decisión a tomar son muy importantes, entonces se puede exigir que el valor mínimo del grado de consenso sea alto (por ejemplo, 0.8). Por otro lado, si las consecuencias de la decisión a tomar no son muy importantes o si es necesario obtener la solución al problema rápidamente, entonces se puede plantear rebajar el umbral de consenso hasta un valor próximo a 0.5. Valores inferiores a 0.5 no tienen sentido porque podrían interpretarse como que existe consenso cuando ni siquiera la mitad de los expertos están de acuerdo en sus preferencias.

1.3.1.3. Generación de Consejo

Si el grado de consenso no es suficiente, significa que existe bastante discrepancia entre las preferencias de los expertos. En esta fase el moderador identifica a los expertos y las preferencias que impiden que se alcance el grado de consenso deseado de la siguiente forma:

1. Se calcula la opinión o preferencia colectiva del grupo de expertos a partir de las preferencias individuales dadas por cada uno de ellos.
2. Se calcula la proximidad de las preferencias individuales de los expertos respecto a la preferencia colectiva del grupo de expertos.

Teniendo en cuenta la proximidad, es posible identificar los expertos y las preferencias más alejadas de la opinión colectiva y, por lo tanto, las que más inciden negativamente en la consecución del consenso. De esta forma, el moderador sugerirá o aconsejará a los expertos que cambien sus preferencias más alejadas con el propósito de acercar sus opiniones y, de este modo, mejorar el grado de consenso o acuerdo en la siguiente ronda de consenso.

1.3.2. Proceso de Selección

Una vez que el proceso de consenso ha finalizado, esto es, se ha alcanzado un nivel de consenso suficiente, se aplica el proceso de selección [48, 68, 69, 87, 88, 104, 109, 122, 153, 155, 164, 209, 239].

Por proceso de selección se entiende el proceso mediante el cual se obtiene el conjunto de alternativas solución a partir de las preferencias individuales sobre el conjunto de alternativas de cada uno de los expertos implicados en el proceso de Toma de Decisión en Grupo. Para conseguir este objetivo, se ha de tener claro el criterio global o de conjunto a aplicar en la elección de las alternativas que formarán parte del conjunto solución. Este criterio global suele reducirse a una comparación de las alternativas entre sí, para lo que normalmente se suele utilizar una función, llamada de selección, para asociar a cada alternativa un valor, llamado grado de selección, que se utilizará obviamente para producir un orden parcial de las alternativas [72, 90, 137, 173, 198].

Se conocen dos esquemas de selección de alternativas:

1. *Esquema directo.* Este esquema propone obtener la solución trabajando directamente sobre las opiniones individuales de los individuos o expertos.

2. *Esquema indirecto.* En este caso, se obtiene la solución a partir de la opinión colectiva, que representa la opinión social del grupo de individuos o expertos.

Los modelos de selección de alternativas, tanto si adoptan el esquema directo como el indirecto, se basan en diversos tipos de grados de selección de alternativas. Estos grados expresan la relevancia de una alternativa dentro del conjunto de alternativas, y actúan selectivamente sobre el conjunto de alternativas durante el proceso de selección. Suelen considerarse tres tipos de grados:

1. *Grados de selección individuales.* Se calculan para cada alternativa x_i en base a la opinión individual del individuo o experto e_i, considerado independiente del resto.

Se aplican en los modelos de selección directos.

2. *Grados de selección colectivos.* En este caso, se evalúan a partir de la opinión colectiva del grupo de individuos o expertos. Lógicamente, se aplican en los modelos de selección indirectos.

3. *Grados de selección sociales.* Por último, éstos se obtienen mediante la agregación de los grados de selección individuales obtenidos para dicha alternativa. Por tanto, este tipo de grados se usa siempre junto con los grados individuales y, en consecuencia, se aplican en los modelos de selección directos.

Tanto los modelos de selección directos como los indirectos se desarrollan a lo largo de dos fases [90, 182]: agregación y explotación (Figura 1.4).

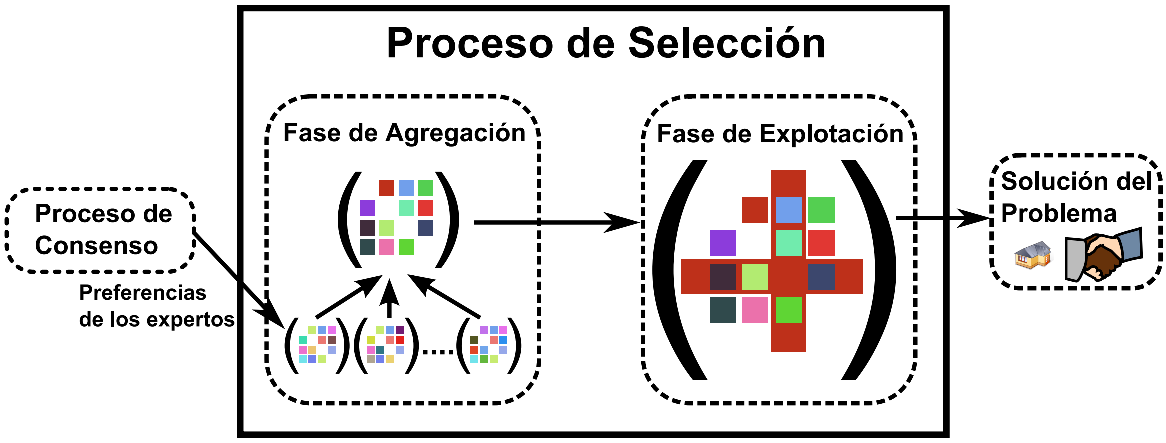

Figura 1.4: Fases del proceso de selección.

1.3.2.1. Agregación

La agregación es la operación consistente en transformar un conjunto de elementos (conjuntos difusos, opiniones individuales sobre un conjunto de alternativas expresadas cardinalmente o lingüísticamente, etc.) en un único elemento representativo del mismo [74, 76, 219]. En los problemas de Toma de Decisión en Grupo, la fase de agregación consiste en la combinación de las unidades de información individuales en unidades de información colectivas. Esta combinación de preferencias se realiza utilizando operadores de agregación (ver Sección 1.7).

- En los modelos de selección directos, estas unidades de información individuales son los grados de selección de alternativas, hallados para cada preferencia individual de un experto, y las unidades colectivas son grados de selección sociales.
- En los modelos de selección indirectos, estas unidades de información individuales son cada una de las unidades elementales de preferencia de un experto, es decir, el grado de preferencia expresado por un experto para cada par de alternativas. Las unidades colectivas son cada uno de los grados de preferencia de la preferencia u opinión colectiva.

1.3.2.2. Explotación

El último paso de un proceso de Toma de Decisión en Grupo es la fase de explotación, la cual utiliza la información proporcionada por la fase de agregación para identificar el conjunto solución de alternativas. Así, el proceso de explotación transforma la información global sobre las alternativas en una ordenación global de las mismas.

Para llevar a cabo esta fase, es necesario definir un criterio de selección que permita establecer un orden entre el conjunto de alternativas del problema. El procedimiento que normalmente se sigue es la utilización de una función de selección que asigna un grado de selección a cada una de las alternativas. Este grado de selección establece un orden de preferencia entre el conjunto de alternativas. Se utilizan funciones de selección que permiten medir la intensidad del grado de selección en cada alternativa, de forma que aquellas alternativas con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución al problema de decisión. Dos funciones de selección utilizadas frecuentemente en la literatura son las siguientes [15, 103, 173, 181]:

1. *Función de dominancia.* Indica el grado en el cual una alternativa se prefiere o domina al resto de alternativas.
2. *Función de no-dominancia.* Indica el grado en cual una alternativa no es dominada por el resto de alternativas.

Dependiendo de como se calculen, estas funciones de selección pueden ser de tres clases: individuales, colectivas o sociales.

En los modelos de selección indirectos, la fase de explotación conlleva la obtención de los grados de selección de alternativas colectivos de cada alternativa en base a la preferencia colectiva del grupo de expertos o individuos, mientras que en los modelos de selección directos, la fase de selección conlleva la obtención de los grados de selección de alternativas individuales de cada alternativa en base a la preferencia individual de cada experto.

1.4. Formatos de Representación de Preferencias

El formato de representación de preferencias juega un papel esencial, ya que define la naturaleza y estructura de la información en que expresan los expertos sus preferencias sobre las distintas alternativas del problema, independientemente del área en el que se esté trabajando (Economía [14, 66], Psicología [45, 60, 143], Teoría de la Decisión [91, 174, 177, 183], etc.).

Como hemos mencionado anteriormente, en un problema de Toma de Decisión en Grupo, la información proporcionada por los expertos sobre las posibles alternativas puede ser de diversa naturaleza. Así, en base a su conocimiento, experiencias y creencias, los expertos han de emitir sus valoraciones sobre el conjunto de alternativas y establecer un orden de preferencia sobre la idoneidad de cada una de ellas como solución al problema.

Para emitir sus preferencias, los expertos utilizan formatos de representación de preferencias que le resulten cercanos a sus disciplinas o campos de trabajo. Por ejemplo, expertos que pertenecen a áreas técnicas se pueden sentir muy cómodos representando sus preferencias mediante valores numéricos. Sin embargo, expertos que pertenecen a otro tipo de disciplinas menos técnicas, como pueden ser las pertenecientes a áreas sociales (Sociología, Psicología, etc.), pueden preferir expresar sus preferencias utilizando expresiones más cercanas al lenguaje humano, tales como palabras o términos lingüísticos.

En las siguientes subsecciones, describimos brevemente algunos de los formatos de representación de preferencias más comunes que han sido ampliamente usados en la literatura y comparamos sus ventajas y desventajas.

1.4.1. Conjunto Selección

Este formato de representación de preferencias es uno de los más básicos. Consiste en la selección por parte del experto del conjunto solución de alternativas que considera más relevante para resolver el problema [3].

Definición 1.1. Las preferencias de un experto $e_i \in E$ sobre un conjunto de posibles alternativas X se describen mediante el conjunto selección $SS^i \subset X$, $SS^i \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.6. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 piensa que las mejores alternativas para resolver el problema son x_2 y x_3, daría el siguiente conjunto selección de alternativas: $SS^2 = \{x_2, x_3\}$.

Este es un formato de representación muy fácil de entender y de usar. Sin embargo, no ofrece información apenas, ya que al usar una evaluación binaria para las diferentes alternativas (relevante / no relevante), no permite diferenciar el grado de preferencia del experto sobre las alternativas que considera relevantes.

1.4.2. Órdenes de Preferencia

En este formato de representación de preferencias se establece un ranking u orden de alternativas que representa la idoneidad de cada alternativa como solución al problema, según el punto de vista de cada experto [172, 190, 196].

Definición 1.2. Las preferencias de un experto $e_i \in E$ sobre un conjunto de posibles alternativas X se describen como un orden de preferencias $O^i = \{o^i(1), \ldots, o^i(n)\}$, donde $o^i(\cdot)$ es una función de permutación sobre el conjunto de índices $\{1, \ldots, n\}$ para dicho experto.

De esta forma, un experto, de acuerdo a su punto de vista, proporciona un vector de alternativas ordenado de mejor a peor. Para todo orden de preferencia O^i, supondremos, sin pérdida de generalidad, que cuanto menor es la posición de una alternativa en dicho orden, mejor satisface dicha alternativa el criterio del experto que proporciona dicho orden y viceversa.

Ejemplo 1.7. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 proporciona el siguiente orden de preferencia $\{x_2, x_4, x_1, x_3\}$, entonces $o^2(1) = 2,\ o^2(2) = 4,\ o^2(3) = 1,\ o^2(4) = 3$, lo que significará que la alternativa x_2 es la mejor para dicho experto, mientras que la alternativa x_3 es la peor.

Este formato de representación de preferencias ofrece una evaluación de las alternativas a un nivel más fino y permite diferenciar un grado de preferencia entre cada par de alternativas. Por tanto, mejora al conjunto selección como formato de representación de preferencias. Sin embargo, como este formato de representación necesita un orden total entre las alternativas, no permite modelar situaciones típicas de Toma de Decisión, ya que un experto no puede expresar que tiene un grado de preferencia igual entre dos alternativas usando este formato de representación.

1.4.3. Valores de Utilidad

Los valores de utilidad han sido un formato de representación de preferencias muy utilizado en la literatura clásica [72, 161, 197].

Definición 1.3. Las preferencias de un experto $e_i \in E$ sobre un conjunto de posibles alternativas X se describen mediante un conjunto de n valores de utilidad, $U^i = \{u_1^i, ..., u_n^i\},\ u_k^i \in [0, 1]$.

En este caso, el experto asocia a cada alternativa un valor de utilidad que representa el grado de cumplimiento desde su punto de vista por parte de dicha alternativa. Para cada conjunto de valores de utilidad, supondremos, sin pérdida de generalidad, que cuanto mayor es la valuación de una alternativa, mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto.

Ejemplo 1.8. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 proporciona el siguiente vector de utilidad $U^2 = \{0.3, 0.7, 0.9, 0.4\}$, eso significará que, desde su punto de vista, la alternativa x_1 es la peor de todas y que x_3 es la mejor.

Este formato de representación de preferencias es más fino que los anteriores, por lo que un experto puede utilizarlo para representar correctamente sus preferencias sobre las alternativas. Sin embargo, su uso implica que el experto debe ser capaz de evaluar cada alternativa de manera global con respecto a las demás, lo que puede ser una tarea bastante difícil.

1.4.4. Relaciones de Preferencia

En la Teoría Clásica de Preferencias [183], las preferencias sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se pueden modelar a través de una relación binaria R definida como sigue:

$$x_l R x_k \Leftrightarrow \text{“}x_l \textit{ no es peor que } x_k\text{”}$$

Esta definición considera una relación binaria como una relación de preferencia débil, e implica que dicha relación R es reflexiva. Con esta definición, es natural asociar un número real, llamado valuación y denotado $R(x_l, x_k) \in \mathbb{R}$, el cual representa el grado de verdad de la afirmación “x_l *no es peor que* x_k”, o grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k.

Cuando se trabaja con conjuntos de alternativas finitos, las relaciones de preferencia son una estructura de información capaz de soportar este tipo de relaciones binarias entre alternativas.

Relaciones de preferencia de diferentes tipos pueden usarse de acuerdo al dominio usado para evaluar la intensidad de la preferencia. Esto se expresa en la siguiente definición:

Definición 1.4. Una relación de preferencia P sobre un conjunto de alternativas X se caracteriza por una función $\mu_P : X \times X \longrightarrow D$, donde D es el dominio de representación del grado de preferencia.

Cuando la cardinalidad de X es pequeña, la relación de preferencia puede representarse convenientemente por una matriz $P = (p^{lk})$ de $n \times n$, siendo $p^{lk} = \mu_P(x_l, x_k)\ \forall l, k \in \{1, \ldots, n\}$.

$$P = \begin{pmatrix} p^{11} & \cdots & p^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{n1} & \cdots & p^{nn} \end{pmatrix}$$

En las relaciones de preferencia es habitual no definir los elementos de la diagonal principal. Esto es debido a que en los métodos utilizados para la elección de alternativas basados en la comparación de alternativas de dos en dos no tiene mucho sentido comparar una alternativa con ella misma. En todo caso, la comparación de una alternativa con ella misma no debería influir en el proceso de elección de la mejor o mejores alternativas.

Este formato de representación de preferencias resuelve el problema presentado por los valores de utilidad, permitiendo la comparación de las alternativas por pares. De esta forma, los expertos tienen mucha más libertad para expresar sus preferencias y con su uso pueden ganar en expresividad.

1.4.4.1. Relaciones de Preferencia Difusas

Las relaciones de preferencia difusas han sido utilizadas de manera extensa para modelar las preferencias en problemas de Toma de Decisión. En este caso, la intensidad de las preferencias se mide usando una escala $[0, 1]$ [52, 90, 156, 173].

Definición 1.5. Una relación de preferencia difusa P sobre un conjunto de alternativas X es un conjunto difuso sobre el conjunto producto $X \times X$, esto es, caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_P \colon X \times X \longrightarrow [0,1].$$

Cada valor p^{lk} en la matriz P representa el grado de preferencia o intensidad de la alternativa x_l sobre x_k:

- $p^{lk} = 1/2$ indica indiferencia entre las alternativas x_l y x_k ($x_l \sim x_k$).
- $p^{lk} = 1$ indica que la alternativa x_l es absolutamente preferida a x_k.
- $p^{lk} > 1/2$ indica que la alternativa x_l es preferida a x_k en un cierto nivel ($x_l \succ x_k$).

Como hemos comentado, en las relaciones de preferencia es habitual no definir los elementos de la diagonal principal. En todo caso, si los elementos de la diagonal principal están definidos, el valor de dichos elementos en las relaciones de preferencia difusas debería ser 1/2 como consecuencia de lo comentado anteriormente.

Ejemplo 1.9. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 proporciona la siguiente relación de preferencia difusa:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & 0.0 & 0.4 & 0.4 \\ 1.0 & - & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 & - & 0.75 \\ 0.6 & 0.5 & 0.25 & - \end{pmatrix}$$

quiere decir que considera que $x_2 \sim x_4$, ya que $p_2^{24} = 0.5$, que x_2 es completamente mejor que x_1, ya que $p_2^{21} = 1.0$, y que $x_3 \succ x_4$, ya que $p_2^{34} = 0.75$.

1.4.4.2. Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En este caso, el grado de preferencia se interpreta como un indicador de la razón de intensidad de preferencia entre las alternativas [53, 86]. De acuerdo al estudio de

Miller [167], Saaty sugiere medir cada valor usando una escala de razón, concretamente la escala $1-9$ [184, 186].

Definición 1.6. Una relación de preferencia multiplicativa A sobre un conjunto de alternativas X se caracteriza por una función de pertenencia

$$\mu_A\colon X \times X \longrightarrow [1/9, 9].$$

Cada valor a^{lk} en la matriz A representa el número de veces que la alternativa x_l es mejor que la alternativa x_k. Se suelen asociar los siguientes significados con los siguientes números:

1	igualmente importantes
3	un poco más importante
5	bastante más importante
7	demostrablemente más importante o mucho más importante
9	completamente más importante
2,4,6,8	compromiso entre juicios ligeramente distintos

Si los elementos de la diagonal principal están definidos, el valor de dichos elementos en las relaciones de preferencia multiplicativas debería ser 1 como consecuencia de lo comentado anteriormente.

Ejemplo 1.10. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 proporciona la siguiente relación de preferencia multiplicativa:

$$A_2 = \begin{pmatrix} - & 3 & 6 & 1/2 \\ 1/3 & - & 1 & 1/5 \\ 1/6 & 1 & - & 9 \\ 2 & 5 & 1/9 & - \end{pmatrix}$$

quiere decir que considera que $x_2 \sim x_3$, ya que $a_2^{23} = 1$, que x_3 es completamente más importante que x_4, ya que $a_2^{34} = 9$, y que $x_1 \succ x_3$, ya que $a_2^{13} = 6$.

1.4.4.3. Relaciones de Preferencia Intervalares

Las relaciones de preferencia intervalares son usadas como alternativa a las relaciones de preferencia difusas cuando existe dificultad en expresar las preferencias con valores numéricos exactos, pero, sin embargo, puede haber suficiente información como para poder hacer una estimación del intervalo en el que se encuentra dicha preferencia [2, 25, 38, 117, 208].

Definición 1.7. Una relación de preferencia intervalar P sobre un conjunto de alternativas X se caracteriza por una función de pertenencia

$$\mu_P \colon X \times X \longrightarrow \mathcal{P}[0,1],$$

donde $\mathcal{P}[0,1] = \{[a,b] \mid a, b \in [0,1],\ a \leq b\}$ es el conjunto potencia de $[0,1]$.

Si los elementos de la diagonal principal están definidos, el valor de dichos elementos en las relaciones de preferencia intervalares debería ser $[0.5, 0.5]$ como consecuencia de lo comentado anteriormente.

Una relación de preferencia intervalar P puede verse como dos relaciones de preferencia difusas *independientes*. La primera de ellas, PL, que se corresponde con los extremos izquierdos de los intervalos y la segunda, PR, que se corresponde con los extremos derechos de los intervalos:

$$P = (p^{lk}) = ([pl^{lk}, pr^{lk}]),$$

$$\text{con } PL = (pl^{lk}),\ PR = (pr^{lk}) \text{ y } pl^{lk} \leq pr^{lk} \quad \forall l, k.$$

Obviamente, es necesario definir algún tipo de operador de comparación para ser capaces de establecer un orden entre los valores intervalares y, por tanto, ser capaces de interpretar correctamente cuando una alternativa se prefiere a otra.

Ejemplo 1.11. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si el experto e_2 proporciona la siguiente relación de preferencia intervalar:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & [0.0, 0.2] & [0.4, 0.6] & [0.4, 0.45] \\ [1.0, 1.0] & - & [0.7, 0.9] & [0.5, 0.5] \\ [0.4, 0.6] & [0.1, 0.3] & - & [0.3, 0.55] \\ [0.55, 0.6] & [0.5, 0.5] & [0.45, 0.7] & - \end{pmatrix}$$

quiere decir que considera que $x_2 \sim x_4$, ya que $p_2^{24} = [0.5, 0.5]$, que x_2 es completamente mejor que x_1, ya que $p_2^{21} = [1.0, 1.0]$, y que $x_2 \succ x_3$, ya que $p_2^{23} = [0.7, 0.9]$.

1.4.4.4. Relaciones de Preferencia Lingüísticas

Existen situaciones donde puede ser muy difícil para los expertos expresar valores de preferencia numéricos precisos o incluso intervalares. Por ejemplo, en aquellas situaciones de decisión en las que la información disponible es demasiado imprecisa o se valoran aspectos cuya naturaleza recomienda el uso de valoraciones cualitativas [50, 67, 103, 104, 109, 195, 207, 217, 231, 232, 233, 235]. En estos casos, pueden utilizarse valoraciones lingüísticas para expresar las preferencias.

Definición 1.8. Una relación de preferencia lingüística P sobre un conjunto de alternativas X es un conjunto de términos lingüísticos de un cierto conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{g-1}, s_g\}$ en el conjunto producto $X \times X$, esto es, caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_P \colon X \times X \longrightarrow S.$$

El conjunto de términos lingüísticos S tiene un número impar de elementos normalmente. Además, se suele considerar que el elemento $s_{g/2}$ representa una etiqueta neutral (que significa *igualmente preferido*) y que el resto de las etiquetas se distribuyen de manera homogénea alrededor suya.

Si los elementos de la diagonal principal están definidos, el valor de dichos elementos en las relaciones de preferencia lingüísticas debería ser $s_{g/2}$ como consecuencia de lo comentado anteriormente.

Ejemplo 1.12. Sea $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un conjunto de cuatro expertos que han de expresar sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Supongamos el conjunto de etiquetas lingüísticas $S = \{N, MP, P, I, M, MM, T\}$, con el siguiente significado:

$$\begin{array}{lllllll} N & = & Nulo & & MP & = & Mucho\ Peor \\ P & = & Peor & & I & = & Igual \\ M & = & Mejor & & MM & = & Mucho\ Mejor \\ T & = & Total & & & & \end{array}$$

si el experto e_2 proporciona sus preferencias mediante la siguiente relación de preferencia lingüística:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & M & MP & MP \\ P & - & T & I \\ MM & T & - & M \\ MM & I & P & - \end{pmatrix}$$

quiere decir que considera que $x_2 \sim x_4$, ya que $p_2^{24} = I$, que x_2 es completamente mejor que x_3, ya que $p_2^{23} = T$, y que $x_3 \succ x_4$, ya que $p_2^{34} = M$.

1.4.5. Discusión

El uso de cada uno de los formatos de representación de preferencias que han sido descritos tiene una serie de ventajas e inconvenientes que van a ser presentadas y comparadas a continuación.

- El *conjunto selección* de alternativas es un formato muy sencillo de usar. Los expertos pueden entenderlo rápidamente, pero dada la inherente simplicidad del formato, no ofrece una cantidad elevada de información. De hecho, como usa una evaluación binaria para las diferentes alternativas (relevante / no relevante), no permite diferenciar el grado de preferencia del experto sobre las alternativas que considera relevantes.
- Los *órdenes de preferencia* ofrecen una evaluación de las alternativas a un nivel más fino y, de hecho, permiten diferenciar un grado de preferencia entre cada par de alternativas. Sin embargo, ya que este formato necesita un orden total entre las alternativas, no permite modelar situaciones típicas de Toma de Decisión. Por ejemplo, un experto no es capaz, utilizando este formato, de expresar que tiene un grado de preferencia igual entre dos alternativas.
- Los *valores de utilidad* son un formato más fino que los anteriores, por lo que los expertos pueden utilizarlos para representar correctamente sus preferencias sobre las alternativas. Sin embargo, su uso implica que el experto debe ser capaz de evaluar cada alternativa de manera global con respecto a las demás, lo que puede ser una tarea bastante difícil.
- Las *relaciones de preferencia* resuelven el problema presentado por los valores de

utilidad, permitiendo la comparación de las alternativas por pares. Por lo tanto, los expertos tienen mucha más libertad para expresar sus preferencias y con su uso pueden ganar en expresividad. Por todo esto, en esta memoria utilizaremos relaciones de preferencia para modelar las opiniones de los expertos. En concreto, utilizaremos relaciones de preferencia lingüísticas, ya que la mayoría de los problemas de Toma de Decisión en Grupo existentes en la vida real presentan aspectos de naturaleza cualitativa [50, 67, 103, 104, 109, 195, 207, 217, 231, 232, 233, 235] que difícilmente admiten valoraciones numéricas precisas, siendo más apropiado el uso de términos lingüísticos para valorar estos aspectos.

1.5. Consistencia

En los problemas de Toma de Decisión en Grupo, es importante que las opiniones de los expertos sean consistentes [4, 7, 55, 62, 65, 73, 93, 94, 95, 122, 162, 171]. Como hemos comentado, utilizaremos relaciones de preferencia para modelar las opiniones de los expertos debido a su gran expresividad. Sin embargo, esta expresividad puede dar lugar a situaciones donde las relaciones de preferencia no reflejen realmente las preferencias de los expertos debido a que los valores de las preferencias pueden ser contradictorios. Así pues, es interesante estudiar algunas propiedades o restricciones que las relaciones de preferencia deben cumplir para garantizar la consistencia (no contradicción) y que los valores expresados por los expertos puedan considerarse realmente preferencias [197, 198].

Estas propiedades pueden usarse para modelizar la consistencia de la información expresada por los expertos en términos de relaciones de preferencia.

1.5.1. Reciprocidad Aditiva

La *Reciprocidad Aditiva* es una de las restricciones que más comúnmente se asume que las relaciones de preferencia difusas deben verificar [136]. Se describe como:

$$p^{lk} + p^{kl} = 1, \quad \forall l, k = 1, \ldots, n.$$

Sin embargo, esta condición puede relajarse para ofrecer a los expertos un nivel de libertad más grande cuando expresan sus preferencias. Esta propiedad relajada se llama *Reciprocidad Débil*:

$$p^{lk} \geq 0.5 \Rightarrow p^{kl} \leq 0.5, \quad \forall l, k = 1, \ldots, n.$$

1.5.2. Transitividad

La *Transitividad* representa la idea de que un valor de preferencia que se obtiene comparando directamente dos alternativas debe ser igual o mayor que el valor de preferencia que se obtiene entre esas dos alternativas usando una cadena indirecta de alternativas. Esto puede expresarse en la siguiente definición:

Definición 1.9. Una relación de preferencia difusa P es t-transitiva con t una t-norma si

$$p^{lk} \geq t(p^{lj}, p^{jk}), \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n.$$

Siguiendo la definición, existen múltiples caracterizaciones posibles para la transitividad, ya que existen diferentes funciones t (ver Sección 2.2.4). Vamos a describir ahora algunas de las más utilizadas en la literatura.

- **Transitividad Débil:**

$$min\{p^{lj}, p^{jk}\} \geq 0.5 \Rightarrow p^{lk} \geq 0.5, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n.$$

Esta es la condición mínima que una persona aplicaría racionalmente si no quiere expresar información inconsistente.

- **Transitividad MAX-MIN:**

$$p^{lk} \geq min\{p^{lj}, p^{jk}\}, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n.$$

Este tipo de transitividad ha sido tradicionalmente un requisito para caracterizar la consistencia de las relaciones de preferencia difusas.

- **Transitividad MAX-MAX:**

$$p^{lk} \geq max\{p^{lj}, p^{jk}\}, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n.$$

Este tipo de transitividad representa un requisito más fuerte que la transitividad MAX-MIN.

- **Transitividad MAX-MIN Restringida:**

$$p^{lj} \geq 0.5, p^{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p^{lk} \geq min\{p^{lj}, p^{jk}\}, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n = 1, \ldots, n.$$

Esta es una condición más fuerte que la Transitividad Débil, pero más débil que la Transitividad MAX-MIN. Puede ser una suposición racional para considerar a una relación de preferencia difusa consistente el que verifique esta propiedad.

- **Transitividad MAX-MAX Restringida:**

$$p^{lj} \geq 0.5, p^{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p^{jk} \geq max\{p^{lj}, p^{jk}\}, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n.$$

Este es un concepto más fuerte que la Transitividad MAX-MIN Restringida, pero también puede ser una suposición racional para considerar consistente una relación de preferencia difusa el que tenga que verificar esta propiedad.

- **Transitividad Aditiva:** Como puede verse en [124], la transitividad aditiva para las relaciones de preferencia difusas puede verse como un concepto paralelo de la propiedad de consistencia de Saaty para las relaciones de preferencia multiplicativas [185]. La formulación matemática de la transitividad aditiva fue propuesta por Tanino en [196]:

$$(p^{lj} - 0.5) + (p^{jk} - 0.5) = (p^{lk} - 0.5), \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Este tipo de transitividad tiene la siguiente interpretación: supongamos que queremos establecer un ranking entre tres alternativas x_l, x_j y x_k, y que la información disponible sobre dichas alternativas sugiere que nos encontramos ante una situación de indiferencia, es decir, $x_l \sim x_j \sim x_k$. Cuando expresemos nuestras preferencias, esta situación se representaría como $p^{lj} = p^{jk} = p^{lk} = 0.5$. Supongamos a continuación que tenemos alguna información que dice que $x_l \prec x_j$, esto es, $p^{lj} < 0.5$. Esto significa que p^{jk} o p^{lk} deben cambiar, o, si no, incurriríamos en una contradicción porque tendríamos que $x_l \prec x_j \sim x_k \sim x_l$. Si suponemos que $p^{jk} = 0.5$, tendríamos la siguiente situación: x_j es preferida a x_l y no hay diferencia en la preferencia de x_j a x_k. Por lo tanto, debemos concluir que x_k tiene que preferirse a x_l. Lo que es más, dado que $x_j \sim x_k$, entonces $p^{lj} = p^{lk}$ y, por lo tanto, $(p^{lj} - 0.5) + (p^{jk} - 0.5) = (p^{lj} - 0.5) = (p^{lk} - 0.5)$. Obtenemos la misma conclusión si $p^{lk} = 0.5$. En el caso de que $p^{jk} < 0.5$, tendríamos que x_k es preferida a x_j y esta a x_l, por lo que x_k debería preferirse a x_l. Por otro lado, el valor p^{lk} debe ser igual o menor que p^{lj}, siendo igual sólo en el caso de que $p^{jk} = 0.5$, como ya hemos mostrado. Si interpretamos el valor $p^{jl} - 0.5$ como la intensidad de la preferencia de la alternativa x_j sobre x_l, entonces parece razonable suponer que la intensidad de la preferencia de x_l sobre x_k debería ser igual a la suma de las intensidades de las preferencias cuando se usa una alternativa intermedia x_j, esto es, $p^{lk} - 0.5 = (p^{lj} - 0.5) + (p^{jk} - 0.5)$. Podemos aplicar el mismo razonamiento en el caso de que $p^{jk} > 0.5$.

La transitividad aditiva implica la reciprocidad. De hecho, dado que $p^{ll} = 0.5\ \forall l$, si hacemos $k = l$ en la *ecuación 1.1*, tenemos que: $p^{lj} + p^{jl} = 1, \ \ \forall l, j = 1, \ldots, n$.

1.5.3. Consistencia Aditiva

La consistencia, esto es, la no existencia de contradicciones puede caracterizarse mediante la transitividad. Por tanto, si una relación de preferencia verifica cualquiera de las propiedades de transitividad presentadas con anterioridad, podemos decir que es consistente en esa manera particular. Por ejemplo, si una relación de preferencia verifica la Transitividad MAX-MIN Restringida diremos que es consistente en el sentido MAX-MIN restringido.

No obstante, debido a sus buenas propiedades, la transitividad aditiva es la única propiedad que asumiremos a lo largo de esta memoria. De hecho, la *ecuación 1.1* puede reescribirse como:

$$p^{lk} = p^{lj} + p^{jk} - 0.5, \quad \forall l, j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Por lo tanto, consideraremos que una relación de preferencia P es consistente de manera aditiva cuando para cada tres opciones en el problema, $x_l, x_j, x_k \in X$, sus grados de preferencia asociados, p^{lj}, p^{jk}, p^{lk}, cumplan la *ecuación 1.2*. Llamaremos *consistente* a cualquier relación de preferencia que sea consistente de manera aditiva, ya que es la única propiedad de transitividad que estamos considerando.

1.6. Cuantificadores Lingüísticos Difusos

Como hemos comentado anteriormente, uno de los elementos subyacentes en la Toma de Decisión en Grupo es el concepto de mayoría, pues una solución ha de contener el conjunto de alternativas de mayor aceptación por parte del grupo, en el sentido de que la mayoría de sus miembros ha de aceptar tal solución, ya que en ninguna situación real, salvo en las obvias, la solución es aceptada por todos los expertos. En este sentido, algunos de los problemas en la Toma de Decisión en Grupo están claramente relacionados con la concepción demasiado rígida del concepto de mayoría. Una línea de razonamiento que puede adoptarse para resolver dichos problemas es la de adoptar una concepción de mayoría más flexible y cercana a la que de ella tienen las personas, la cual suele ser vaga, en el sentido de no ser la misma para distintas situaciones. Así, puede que en alguna situación quedemos satisfechos con que la mitad de los expertos coincidan en la solución, mientras que en otros casos puede que dicho valor sea insuficiente y necesitemos al menos el acuerdo de un 80 % de los expertos. Se podría decir que la acomodación de una mayoría menos rígida o flexible ayudaría a conseguir modelos de Toma de Decisión en Grupo más consistentes con la forma de actuación humana.

Es fácil ver que las manifestaciones más naturales de tal mayoría flexible son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como, por ejemplo, *bastantes*, *casi todos*, *muchos más que la mitad*, etc., los cuales no pueden manejarse por métodos formales convencionales pues, en éstos, suelen considerarse tan sólo dos cuantificadores, que son *al menos uno* y *todos*. Afortunadamente, en años recientes, se han propuesto cálculos de proposiciones cuantificadas lingüísticamente basados en la Lógica Difusa [220, 223, 234]. Estos cálculos han sido aplicados por Kacprzyk y otros [109, 111, 139] para introducir una mayoría difusa, representada por un cuantificador lingüístico difuso, tanto en los modelos de Toma de Decisión en Grupo como en la implementación de sistemas de ayuda para la obtención de consenso.

Los cuantificadores pueden utilizarse para representar la cantidad de elementos que satisfacen una determinada propiedad. La Lógica Clásica se restringe al uso de tan sólo dos cuantificadores, *al menos uno* y *todos*, los cuales están relacionados con las conjunciones lógicas *o* e *y* respectivamente. Sin embargo, los cuantificadores que habitualmente se utilizan son muchos más. Por ejemplo, *aproximadamente 5*, *casi todos*, *unos pocos*, *muchos*, *la mayor parte de*, *casi la mitad*, *al menos la mitad*, etc. En un intento de proporcionar una representación de tales cuantificadores, Zadeh introdujo el concepto de cuantificador lingüístico difuso [234], el cual fue definido como un conjunto difuso. Él distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüísticos, *absolutos* y *proporcionales* o *relativos*. Los primeros se utilizan para representar cantidades que son absolutas en naturaleza, tales como, por ejemplo, *aproximadamente 5*, *más de 5* o *menos de 5*. Estos cuantificadores lingüísticos absolutos están relacionados con el concepto de número de elementos. Zadeh definió estos cuantificadores como subconjuntos difusos Q del conjunto de números reales no negativos $\mathbb{R}^+$, de forma que para $r \in \mathbb{R}^+$, el grado de pertenencia de r en Q, $Q(r)$, indica el grado con el que la cantidad r es compatible con el cuantificador representado por Q. Los cuantificadores relativos como, por ejemplo, *al menos la mitad* o *la mayor parte*, pueden representarse mediante subconjuntos difusos del intervalo $[0, 1]$. Para $r \in [0, 1]$, $Q(r)$ indica el grado con el que la proporción r es compatible con el significado del cuantificador que representa. Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador relativo o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto.

Un cuantificador absoluto, $Q : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$, verifica

$$Q(0) = 0 \ \wedge \ \exists k \ tal \ que \ Q(k) = 1,$$

mientras que un cuantificador relativo, $Q : [0, 1] \to [0, 1]$, satisface la propiedad

$$Q(0) = 0 \ \wedge \ \exists r \in [0, 1] \ tal \ que \ Q(r) = 1.$$

Yager, en [226], distingue dos categorías de estos cuantificadores relativos: cuantificadores monótonos crecientes regulares (RIM), tales como *todos*, *la mayoría*, *muchos*, *al menos* α, y cuantificadores monótonos decrecientes regulares (RDM), tales como *al menos uno*, *pocos*, *como mucho* α.

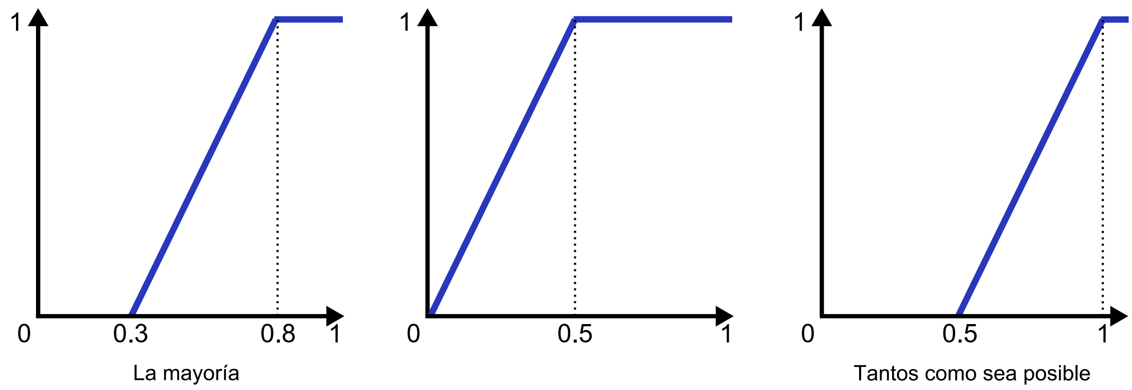

Figura 1.5: Ejemplos de cuantificadores lingüísticos difusos relativos.

Un cuantificador monótono creciente regular (RIM) satisface

$$\forall a, b \ si \ a > b \ entonces \ Q(a) \geq Q(b).$$

Un cuantificador monótono decreciente regular (RDM) satisface

$$\forall a, b \ si \ a > b \ entonces \ Q(a) \leq Q(b).$$

Una función de pertenencia ampliamente usada para representar un cuantificador RIM es la siguiente [136]:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \ r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & si \ a \leq r \leq b \\ 1 & si \ r > b \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0, 1]$. Algunos ejemplos de cuantificadores relativos se muestran en la Figura 1.5, donde los parámetros (a, b) son $(0.3, 0.8)$, $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$ respectivamente.

La función de pertenencia de un cuantificador RIM con parámetros $(0.3, 0.8)$ utilizada para representar el cuantificador lingüístico difuso *mayoría*, cuando se aplica con un operador OWA (Ordered Weighted Averaging) (ver Sección 1.7), asocia un valor *bajo* a los expertos más importantes debido a que asigna un valor de 0 al 30 % primero de

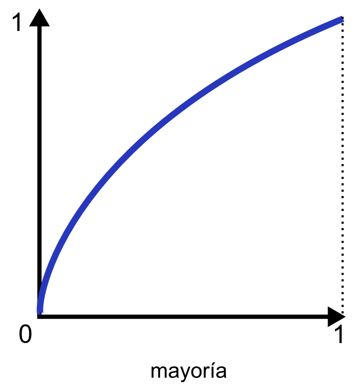

Figura 1.6: El cuantificador lingüístico difuso relativo *mayoría*.

expertos. Para solventar este problema, se debería usar una función de pertenencia diferente para representar el cuantificador lingüístico difuso *mayoría*. Para garantizar que todos los expertos tengan asociado un valor distinto de 0 y, por tanto, todos contribuyan al valor final agregado, debería utilizarse un cuantificador estrictamente creciente. De esta forma, Yager considera la familia parametrizada de cuantificadores RIM [226]:

$$Q(r) = r^a, \quad a \geq 0,$$

la cual es estrictamente creciente. En particular, usaremos la función RIM $Q(r) = r^{1/2}$, mostrada en la Figura 1.6, para representar el cuantificador lingüístico difuso *mayoría* en esta memoria.

Yager, en [223], describió un formalismo para evaluar la verdad de proposiciones cuantificadas lingüísticamente, el cual se basa en una interpretación lógica que utiliza una generalización de las operaciones *y* y *o* vía los operadores de agregación, incorporando de esta forma el concepto de mayoría difusa. El concepto de mayoría difusa se usará en la fase de agregación de la información, así como en la fase de explotación, por lo que se usarán operadores de agregación de información guiados por un cuantificador, pues la idea es la de calcular los pesos de tales operadores utilizando un cuantificador lingüístico para representar el concepto de mayoría en las operaciones de agregación y explotación que se realicen en el proceso de decisión. Por tanto, en los procesos de agregación y explotación, el concepto de mayoría es introducido mediante los pesos del operador utilizado.

1.7. Operadores de Agregación

La agregación es la operación que transforma un conjunto de elementos (conjuntos difusos, opiniones individuales sobre un conjunto de alternativas, etc.) en un único elemento que es representativo del conjunto al completo [74, 76, 219]. En Toma de Decisión en Grupo, la agregación se lleva a cabo a partir de las preferencias individuales de los expertos sobre el conjunto de alternativas para obtener una *preferencia global*, que es un resumen de sus propiedades. El problema de la agregación de información ha sido estudiado en profundidad y existe gran cantidad de publicaciones al respecto [18, 19, 21, 44, 63, 74, 76, 77, 98, 205, 219, 221, 227].

Las distintas formas de llevar a cabo la combinación de las preferencias ha originado que muchos autores se hayan dedicado al estudio y diseño de operadores de agregación de información, entre los que cabe destacar:

1. Agregación de información cuantitativa:
   - Operadores conjuntivos (t-normas), disyuntivos (t-conormas) y operadores promedio [12, 76, 168, 169](Véase la Sección 2.2.4 para una mayor información sobre las t-normas y t-conormas).
   - Operadores de agregación de información ponderada "MAX" y "MIN" [76, 77].
   - Operadores promedio ponderados [63, 64, 219, 221].
2. Agregación de información cualitativa [47, 70, 99, 110, 199, 224].

En las siguientes subsecciones, presentamos dos familias de operadores de agregación que serán usadas en los siguientes capítulos.

1.7.1. Operador OWA

El operador de agregación de información numérica OWA (Ordered Weighted Averaging) fue propuesto por Yager en [219]. Posteriormente, fue estudiado en mayor profundidad y caracterizado en [222]. El operador OWA es conmutativo, idempotente, continuo, monótono, neutral y estable para transformaciones lineales positivas. Un aspecto fundamental del operador OWA es la reordenación de los argumentos que deben ser agregados, basada en la magnitud de sus valores respectivos:

Definición 1.10. [219] Un operador OWA de dimensión n es una función $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que posee unos pesos o vector de pesos asociado, $W = (w_1, ..., w_n)$, con $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, y que se define para agregar una lista de valores $\{p_1, ..., p_n\}$ de acuerdo con la siguiente expresión,

$$\psi_W(p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot p_{\sigma(i)},$$

siendo $\sigma\colon \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ una permutación tal que $p_{\sigma(i)} \geq p_{\sigma(i+1)}, \forall i = 1, ..., n-1$, esto es, $p_{\sigma(i)}$ es el i-ésimo valor más grande en el conjunto $\{p_1, ..., p_n\}$.

Una pregunta natural en la definición del operador OWA es cómo obtener el vector de pesos asociado. En [219] Yager propuso dos maneras de obtenerlo. La primera propuesta es usar algún tipo de mecanismo de aprendizaje usando datos de ejemplo; mientras que la segunda propuesta trata de darle alguna semántica o significado a dichos pesos. La segunda posibilidad ha permitido desarrollar múltiples aplicaciones en el área en el que estamos interesados, la agregación guiada por cuantificadores [218].

En el proceso de agregación guiada por cuantificadores, dada una colección de n criterios representados como subconjuntos difusos de las alternativas X, el operador

OWA se usa para implementar el concepto de mayoría difusa en la fase de agregación por medio de un *cuantificador lingüístico difuso* [228] que indica la proporción de criterios satisfechos *necesarios para una buena solución* [218]. Esta implementación se lleva a cabo usando el cuantificador para calcular los pesos del operador OWA. En el caso de un cuantificador monótono creciente regular (RIM) Q, el procedimiento para evaluar la satisfacción global de Q criterios (o expertos) (e_j) para la alternativa x_l se lleva a cabo calculando los pesos del operador OWA como sigue:

$$w_i = Q(i/n) - Q((i-1)/n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Cuando un cuantificador difuso Q se utiliza para calcular los pesos del operador OWA ψ, entonces se simboliza como ψ_Q. Debemos señalar que este tipo de agregación 'es altamente dependiente del vector de pesos que se use'[226] y, por lo tanto, también sobre la función que se haya usado para representar el cuantificador lingüístico difuso.

En [226] Yager propuso también un procedimiento para evaluar la satisfacción global de Q criterios de importancia (u_j) (o expertos) (e_j) para la alternativa x_l. En este procedimiento, una vez que los valores de satisfacción que deben ser agregados han sido ordenados, el vector de pesos asociado al operador OWA se calcula usando un cuantificador lingüístico Q utilizando la siguiente expresión:

$$w_i = Q\left(\frac{\sum_{j=1}^{i} u_{\sigma(j)}}{T}\right) - Q\left(\frac{\sum_{j=1}^{i-1} u_{\sigma(j)}}{T}\right),$$

siendo $T = \sum_{j=1}^{n} u_j$ la suma total de importancia y σ la permutación usada para producir el orden de los valores que deben ser agregados. Esta propuesta de incluir los grados de importancia asocia un peso nulo a los expertos que tienen un nivel de importancia también nulo.

1.7.2. Operador LOWA

El operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Orderer Weighted Averaging) está basado en el operador OWA y en la combinación convexa de etiquetas lingüísticas definida en [118].

Definición 1.11. [110] Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto de etiquetas a agregar, $a_i \in S$, entonces el operador LOWA, ϕ, se define como:

$$\phi\{a_1, \ldots, a_m\} = W \cdot B^T = C^m\{w_k, b_k,\ k = 1, \ldots, m\} =$$
$$= w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C^{m-1}\{\beta_h, b_h,\ h = 2, \ldots, m\},$$

donde $W = (w_1, \ldots, w_m)$ es un vector de pesos tal que $w_i \in [0, 1]$ y $\sum_i w_i = 1,\ \beta_h = \frac{w_h}{\sum_2^m w_k},\ h = 2, \ldots, m$, y B es el vector ordenado asociado a A. Cada elemento $b_i \in B$ es el i-ésimo mayor elemento en la colección $\{a_1, \ldots, a_m\}$, y C^m es el operador de combinación convexo de m etiquetas. Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$, con $i \neq j\ \forall i, j$, la combinación convexa se define como: $C^m\{w_i, b_i,\ i = 1, \ldots, m\} = b_j$. Y si $m = 2$, entonces se define como:

$$C^2\{w_i, b_i,\ i = 1, 2\} = w_1 \otimes s_j \oplus (1 - w_1) \otimes s_i = s_k,\ s_i, s_j \in S,\ (j \geq i),$$
$$k = MIN\{T, i + round(w_1 \cdot (j - i))\},$$

donde *round* simboliza el operador de redondeo usual, y $b_1 = s_j$ y $b_2 = s_i$. Por otro lado, si $w_j = 1$ y $w_i = 0$, con $i \neq j\ \forall i$, entonces el operador de combinación se define como:

$$C^m\{w_i, b_i, i = 1, \ldots, m\} = b_j.$$

Para obtener el vector de pesos, se pueden usar los métodos anteriormente descritos para calcular el vector de pesos para un operador OWA. Cuando se usa un cuantificador lingüístico difuso Q para obtener el vector de pesos asociado al operador LOWA, se simboliza como ϕ_Q.

1.8. Información Incompleta

Uno de los principales problemas al que nos debemos enfrentar, cuando tratamos de resolver problemas de Toma de Decisión en Grupo, es la falta de información. Como se ha comentado, cada experto tiene sus propias experiencias concernientes al problema estudiado, lo cual puede implicar un grave inconveniente: que un experto no tenga un conocimiento perfecto sobre el problema a resolver [82, 121, 122, 149, 150, 151, 158, 206, 214, 216]. Existen muchas causas posibles por las cuales un experto puede no ser capaz de expresar de manera eficiente todos los valores de preferencia que le son solicitados. Algunas de estas causas son:

- No tener suficiente conocimiento sobre las distintas alternativas. De esta forma, si existe un número alto de alternativas distintas, los expertos pueden no estar familiarizados con todas ellas. Por ejemplo, si el problema al que se enfrentan los expertos es determinar cuál de 10 aerolíneas distintas es mejor, un experto concreto puede no tener conocimiento sobre una aerolínea particular, pero puede tener una experiencia amplia y extensa con todas las demás. En ese caso, parece obvio que ese experto no podrá expresar ningún tipo de preferencia sobre la aerolínea que desconoce.
- Un experto puede no ser capaz de discriminar el grado en el cual prefiere una alternativa sobre otra. Incluso si el experto posee un conocimiento profundo sobre las distintas alternativas, quizás no sea capaz de comparar dos de ellas o de expresar de manera precisa el grado en el cual prefiere una alternativa sobre otra.
- A los expertos se les solicita usualmente que den información consistente, esto es, que sus preferencias no impliquen contradicciones. Por lo tanto, un experto puede preferir no dar todas las preferencias por las que se le preguntan para evitar

introducir inconsistencias.

Por eso, es muy importante ofrecer a los expertos herramientas que les permitan expresar esta falta de conocimiento en sus opiniones.

Tradicionalmente, la falta de información se ha tratado como un tipo especial de incertidumbre. Es por eso que los conjuntos difusos, que han demostrado ser una herramienta poderosa para modelar y tratar incertidumbre, han sido usados de manera extensa para modelar este tipo de situaciones. En el contexto particular en el que las preferencias de los expertos son modeladas por medio de relaciones de preferencia difusas, en las propuestas más simples, se asumía que un valor de preferencia p^{lk} que no fuera dado por un experto podía asignársele el valor 0.5, significando que al experto le son indiferentes las alternativas x_l y x_k entre sí. Nosotros creemos que esta manera de proceder no es correcta, ya que el hecho de que un experto no proporcione un valor de preferencia concreto puede ser el resultado de su incapacidad para cuantificar el grado de preferencia de una alternativa sobre la otra, en cuyo caso, puede preferir no *adivinarlo* para mantener la consistencia de los valores que ya ha proporcionado. Por tanto, debe quedar claro que cuando un experto no es capaz de expresar un valor concreto p^{lk} porque no tiene una idea clara sobre cómo la alternativa x_l es mejor que la alternativa x_k, esto no quiere decir que automáticamente el experto prefiera ambas opciones con la misma intensidad.

Capítulo 2

El Modelado Lingüístico Difuso

Las distintas técnicas de modelado lingüístico difuso para el manejo de información lingüística nos van a proporcionar una mayor flexibilidad en aquellas situaciones de decisión en las que la información disponible es demasiado imprecisa o se valoran aspectos cuya naturaleza recomienda el uso de valoraciones cualitativas.

En este segundo capítulo se hace una revisión de los principales enfoques de modelado lingüístico difuso existentes para manejar información lingüística. La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, hacemos una breve introducción a la Lógica Difusa y mostramos la ventaja de esta lógica respecto de la lógica tradicional en la Sección 2.1. Las nociones y conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos se revisan en la Sección 2.2. A continuación, describimos el modelado lingüístico difuso en la Sección 2.3. El modelo tradicional, es decir, el modelado lingüístico difuso clásico se trata en la Sección 2.4. El modelado lingüístico difuso ordinal, el cual se define para eliminar la excesiva complejidad del enfoque lingüístico difuso clásico, se estudia en la Sección 2.5. Posteriormente, nos centramos en el modelado lingüístico difuso 2-tupla, definido como una mejora del anterior, en la Sección 2.6. El enfoque lingüístico difuso multi-granular, que permite trabajar con distintos conjuntos de etiquetas, se muestra en la Sección 2.7. Finalmente, revisamos el enfoque lingüístico difuso no balanceado en la Sección 2.8, el cual permite trabajar en aquellas situaciones en las que la información necesita ser valorada sobre un conjunto de etiquetas no uniforme, es decir, asimétrico.

2.1. Introducción

La Lógica Difusa se plantea como alternativa a la lógica tradicional con el objetivo de introducir grados de incertidumbre en las sentencias que califica [237]. Fue propuesta, en la década de los 60, por L.A. Zadeh [230] cuando se dio cuenta de lo que él llamó principio de incompatibilidad: *"Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cuál, la precisión y el significado son características excluyentes"*. La Lógica Difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente de tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la Teoría de Conjuntos Difusos [230] y funciones características asociadas a ellos.

Hay numerosas situaciones en las que la lógica tradicional funciona perfectamente. Por ejemplo, supongamos que partimos de las calificaciones obtenidas en una clase y queremos agrupar a los aprobados, es decir, aquellas personas que hayan obtenido una calificación igual o superior a 5. El proceso de razonamiento que se seguiría mediante la lógica tradicional sería ir comparando cada calificación con 5 hasta obtener cuáles están aprobados y cuáles no:

¿Es cierto que $8 \geq 5$*? Sí: Aprobado.*

¿Es cierto que $3 \geq 5$*? No: Suspenso.*

¿Es cierto que $5 \geq 5$*? Sí: Aprobado.*

Sin embargo, el inconveniente de esta lógica es que en la vida real no nos encontramos frecuentemente con criterios de clasificación tan claros como en el ejemplo anterior. En efecto, hay numerosas situaciones en las que la información no puede ser evaluada cuantitativamente de forma precisa, pero puede que sí sea posible hacerlo cualitativamente. En estos casos, hemos de hacer uso de un *enfoque lingüístico*. De esta forma, cuando intentamos cualificar algún fenómeno relacionado con percepciones humanas, a menudo usamos palabras o descripciones en lenguaje natural, en lugar de valores numéricos. Por ejemplo, supongamos que dado un conjunto de personas, las intentamos agrupar según su altura. Las personas no son sólo *altas* o *bajas*, sino que la mayoría pertenecen a grupos de altura intermedia. La gente suele ser *más bien alta* o *de altura media*. Casi nunca las calificamos con rotundidad porque el lenguaje que usamos nos permite introducir modificadores que añaden imprecisión: *un poco, mucho, algo,* etc.

Como la lógica tradicional es bivaluada, es decir, sólo admite dos valores: o el elemento pertenece al conjunto o no pertenece, se ve maniatada para agrupar según su altura al anterior conjunto de personas, puesto que su solución sería definir un umbral de pertenencia. Por ejemplo, un valor que todo el mundo considera que de ser alcanzado o superado, la persona en cuestión puede llamarse *alta*. Si dicho umbral es 1.80 metros, todas las personas que midan 1.80 metros o más serían *altas*, mientras que el resto serían *bajas*. Según esta manera de pensar, alguien que mida 1.79 metros sería tratado igual que otro que mida 1.60 metros, ya que ambos han merecido el calificativo de personas *bajas*.

Si se dispusiera de una herramienta para caracterizar las alturas de forma que las transiciones entre las que son altas y las que no lo son fueran suaves, estaríamos reproduciendo la realidad mucho más fielmente. En la realidad, hay unos puntos de cruce donde las personas dejan de ser *altas* para ser consideradas *medianas*, de forma que el concepto *alto* decrece linealmente con la altura. Al asignar una función lineal para caracterizar el concepto *alto* en lugar de definir un solo umbral de separación, estamos dando mucha más información acerca de los elementos. Esta función, como veremos, se llamará función de pertenencia.

En este sentido, el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para el tratamiento de información de forma cualitativa [231, 232, 233]. El *modelado lingüístico difuso* es una herramienta que permite representar aspectos cualitativos y que está basado en el concepto de *variables lingüísticas*, es decir, variables cuyos valores no son números, sino palabras o sentencias expresadas en lenguaje natural o artificial [231, 232, 233]. Cada valor lingüístico se caracteriza por un *valor sintáctico* o *etiqueta* y un *valor semántico* o *significado*. La etiqueta es una palabra o sentencia perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado es un subconjunto difuso en un universo de discurso.

A lo largo de las cuatro décadas de existencia de la Teoría de Conjuntos Difusos, gran cantidad de investigadores le han prestado atención en sus investigaciones y la han aplicado en dos vertientes principales [176]:

1. Como una teoría matemática formal [132, 170], ampliando conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como, por ejemplo, el Álgebra, la Teoría de Grafos, la Topología, etc., al aplicar conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos a dichas áreas.

2. Como una herramienta potente para tratar situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre (imprecisión, vaguedad, inconsistencia, etc.). Debido a la generalidad de esta teoría, ésta se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas. De esta forma, se ha demostrado que es una herramienta muy útil en numerosos problemas como, por ejemplo: Toma de Decisión [13, 22, 28, 110, 128, 202, 219], evaluación de la calidad informativa de documentos Web [129, 130, 131], modelos de recuperación de información [29, 30, 119, 120, 125, 126, 127],

diagnósticos clásicos [67], análisis político [13], Teoría de Sistemas [34, 175], bases de datos [31, 229], operadores de agregación [102, 201, 202, 211], etc.

2.2. Nociones y Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos

La Teoría de Conjuntos Difusos [230] generaliza la noción clásica de conjunto e introduce el concepto de *conjunto difuso* como aquel conjunto cuya frontera no es precisa. Los conjuntos difusos surgen como una nueva forma de representar la imprecisión y la incertidumbre [152, 241] diferente al tratamiento tradicional llevado a cabo por la Teoría Clásica de Conjuntos y la Teoría de la Probabilidad.

A continuación, haremos una pequeña revisión de los conceptos y las operaciones básicas de la Teoría de Conjuntos Difusos. Para una revisión más detallada, véase [152].

2.2.1. Definición de Conjunto Difuso

La noción de conjunto refleja la idea de agrupar colecciones de objetos que cumplen una o varias propiedades que caracterizan a dicho conjunto. Una propiedad puede ser considerada como una función que a cada elemento del universo de discurso U le asigna un valor en el conjunto $\{0, 1\}$, de forma que si el elemento pertenece al conjunto, es decir, cumple la propiedad, se le asigna el valor 1 o, en caso contrario, el valor 0. De esta forma, los conjuntos introducen una noción de dicotomía que, en esencia, es una clasificación binaria: o se acepta o se rechaza la pertenencia de un objeto a una categoría determinada. Esta decisión de aceptar o rechazar la pertenencia de un objeto a una categoría determinada se expresa mediante una función característica, según las propiedades que posean los objetos del conjunto.

Definición 2.1. Sea A un conjunto en el universo de discurso U, la función característica asociada a A, $A(u),\ u \in U$, se define como:

$$A(u) = \begin{cases} 1, & si\ u \in A \\ 0, & si\ u \notin A. \end{cases}$$

La función $A : U \longrightarrow \{0, 1\}$ induce una restricción, con un límite bien definido, sobre los objetos del universo de discurso U que pueden ser asignados al conjunto A.

La Lógica Difusa se fundamenta en el concepto de conjunto difuso [230], que *relaja* el requerimiento anterior y admite valores intermedios en la función característica, la cual se denomina *función de pertenencia*.

Esta relajación permite una interpretación más realista de la información, puesto que la mayoría de las categorías que describen los objetos del mundo real no tienen unos límites claros y bien definidos. Por ejemplo, ordenador *potente*, *buen* sabor, coche *veloz*, etc. (las palabras en itálica identifican fuentes de imprecisión). Si un objeto pertenece a una categoría con un grado de pertenencia que puede ser expresado por un número real en el intervalo $[0, 1]$, cuanto más cercano a 1 sea el grado, indicará mayor pertenencia a esa categoría determinada, y cuanto más cercano a 0, indicará menor pertenencia a dicha categoría.

Por tanto, un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión total) y 1 (pertenencia total). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente, podemos definir un conjunto difuso como sigue [230]:

Definición 2.2. Un conjunto difuso $\tilde{A}$ sobre un dominio o universo de discurso U está caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{A}} : U \longrightarrow [0, 1]$$

que asocia a cada elemento u, $u \in U$, el grado con que pertenece al conjunto difuso $\tilde{A}$, asignándole un valor en el intervalo $[0, 1]$.

Así, un conjunto difuso $\tilde{A}$ en U puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico u, $u \in U$, y su grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(u)$:

$$\tilde{A} = \{(u, \mu_{\tilde{A}}(u))/ \ u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) \in [0, 1]\}.$$

Claramente, un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto cuya función de pertenencia toma sólo dos valores $\{0, 1\}$.

Ejemplo 2.1. Consideremos el concepto *persona joven* en un contexto donde se clasifica a las personas atendiendo exclusivamente a la edad, la cual oscila en el intervalo $U = [1, 110]$ años. Una persona cuya edad sea menor o igual a 30 años se puede considerar como joven y, por lo tanto, se le asignará un valor 1 a su grado de pertenencia al conjunto difuso de *persona joven*. Una persona con una edad igual o superior a 65 años no puede considerarse como una persona joven, y de ahí que se le asigne el valor 0 al grado de pertenencia al conjunto difuso de *persona joven*. La cuantificación del resto de valores puede llevarse a cabo mediante una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}} : U \longrightarrow [0, 1]$ que caracteriza al conjunto difuso $\tilde{A}$ de *persona joven* en el universo $U = [1, 110]$.

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = \begin{cases} 1 & u \in [1, 30] \\ 1 - \frac{u-30}{35} & u \in (30, 65) \\ 0 & u \in [65, 110]. \end{cases}$$

Los conjuntos difusos pueden definirse sobre universos de discurso finitos o infinitos usando distintas notaciones. Si un universo de discurso U es discreto y finito con cardinalidad n, el conjunto difuso puede expresarse con un vector *n-dimensional* cuyos valores son los grados de pertenencia de los correspondientes elementos de U. Por ejemplo, si $U = \{u_1, ..., u_n\}$, entonces un conjunto difuso $\tilde{A} = \{(a_i/u_i)|u_i \in U\}$, donde $a_i = \mu_{\tilde{A}}(u_i), i = 1, ..., n$, puede notarse por [152]:

$$\tilde{A} = a_1/u_1 + a_2/u_2 + ... + a_n/u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i/u_i.$$

Cuando el universo de discurso U es continuo, para representar un conjunto difuso usamos la siguiente expresión:

$$\tilde{A} = \int_u a/u,$$

donde $a = \mu_{\tilde{A}}(u)$ y la integral debería ser interpretada de la misma forma que el sumatorio en el universo de discurso finito.

2.2.2. Conceptos Básicos sobre Conjuntos Difusos

A continuación, introducimos otros conceptos básicos a la hora de trabajar con conjuntos difusos como son: el *soporte*, el *núcleo*, la *altura*, el *α-corte* y el *conjunto de niveles* de un conjunto difuso.

Definición 2.3. El soporte de un conjunto difuso $\tilde{A}$ en el universo U, $Soporte(\tilde{A})$, se define como el conjunto formado por todos los elementos de U cuyo grado de pertenencia a $\tilde{A}$ sea mayor que 0.

$$Soporte(\tilde{A}) = \{u \in U \mid \ \mu_{\tilde{A}}(u) > 0\}.$$

Si esta definición la restringimos a aquellos elementos del universo de discurso U con grado de pertenencia igual a 1, tendríamos el núcleo del conjunto difuso.

Definición 2.4. El núcleo de un conjunto difuso $\tilde{A}$, $Núcleo(\tilde{A})$, se define como el conjunto de todos los elementos de U cuyo grado de pertenencia a $\tilde{A}$ es igual 1.

$$Núcleo(\tilde{A}) = \{u \in U \mid \ \mu_{\tilde{A}}(u) = 1\}.$$

Definición 2.5. La altura de un conjunto difuso $\tilde{A}$, $Altura(\tilde{A})$, se define como el mayor grado de pertenencia de todos los elementos de dicho conjunto.

$$Altura(\tilde{A}) = max\{\mu_{\tilde{A}}(u) \mid u \in U\}.$$

En muchas ocasiones, puede ser interesante conocer no sólo los elementos que pertenecen en algún grado al conjunto difuso, sino también conocer el conjunto de aquellos elementos que lo hacen con un valor al menos igual o mayor que un umbral determinado α. Estos conjuntos se denominan α-cortes.

Definición 2.6. El α-corte de un conjunto difuso $\tilde{A}$, $\tilde{A}_\alpha$, se define como el conjunto formado por todos los elementos del universo de discurso U cuyos grados de pertenencia en $\tilde{A}$ son mayores o iguales que el valor de corte $\alpha \in [0, 1]$.

$$\tilde{A}_\alpha = \{u \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(u) \geq \alpha\}.$$

2.2.3. Tipos de Funciones de Pertenencia

En principio, cualquier función $\mu_{\tilde{A}} : U \longrightarrow [0, 1]$ describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso $\tilde{A}$ que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Las gráficas de las funciones pueden tener diferentes representaciones o formas y pueden tener algunas propiedades específicas como, por ejemplo, continuidad.

Los conjuntos difusos suelen representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son las siguientes:

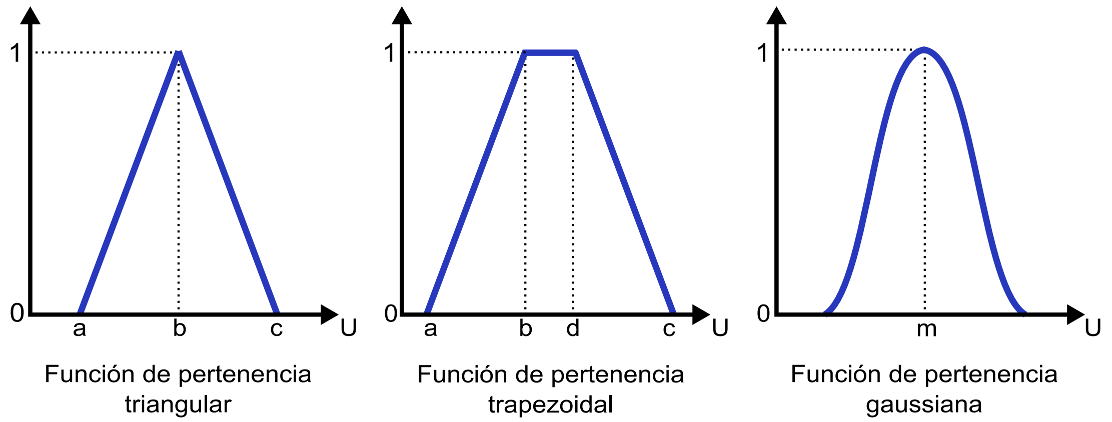

Figura 2.1: Representación gráfica de las funciones de pertenencia triangular, trapezoidal y gaussiana.

1. **Función Triangular:**

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = \begin{cases} 0 & si\ u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a} & si\ u \in [a,b] \\ \frac{c-u}{c-b} & si\ u \in [b,c] \\ 0 & si\ u \geq c, \end{cases}$$

   donde b es el punto modal de la función triangular y a y c los límites inferior y superior respectivamente para los valores no nulos de $\mu_{\tilde{A}}(u)$.

2. **Función Trapezoidal:**

$$\mu_{\tilde{A}}(u) = \begin{cases} 0, & si\ u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a} & si\ u \in [a,b] \\ 1 & si\ u \in [b,d] \\ \frac{c-u}{c-d} & si\ u \in [d,c] \\ 0 & si\ u \geq c, \end{cases}$$

   donde b y d indican el intervalo dónde la función de pertenencia vale 1 y a y c los límites izquierdo y derecho del dominio de definición de la función de pertenencia trapezoidal.

3. **Función Gaussiana:**

$$A(u) = e^{-k(u-m)^2},$$

donde $k > 0$ y m es el punto modal.

La representación gráfica de cada una de estas funciones de pertenencia puede verse en la Figura 2.1.

2.2.4. Operaciones con Conjuntos Difusos

Como en la lógica tradicional, las operaciones lógicas que se pueden establecer entre conjuntos difusos son: la intersección, la unión y el complemento. Al igual que el resultado de operar dos conjuntos clásicos es un nuevo conjunto clásico, las mismas operaciones con conjuntos difusos nos darán como resultado otros conjuntos también difusos.

Hay muchas formas de definir estas operaciones. Cualquier operación que cumpla las propiedades de una t-norma puede ser usada para hacer la intersección, de igual manera que cualquier operación que cumpla las propiedades de una t-conorma puede ser empleada para la unión.

Las t-normas y t-conormas son conceptos derivados de Menger [166] y Schwizer y Sklar [189], y actualmente están muy desarrollados. Establecen modelos genéricos para las operaciones de unión e intersección y deben cumplir ciertas propiedades básicas:

1. *Propiedad Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$
2. *Propiedad Asociativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$
3. *Condiciones Frontera:* $A \cup \emptyset = A; \quad A \cup X = X; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap X = A.$
4. *Monotonicidad.*

Definición 2.7. Se define la norma triangular o t-norma, como una operación binaria $t\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:

- *Conmutativa:* $x\ t\ y = y\ t\ x$.
- *Asociativa:* $x\ t\ (y\ t\ z) = (x\ t\ y)\ t\ z$.
- *Monotonicidad:* Si $x \leq y$ y $w \leq z$, entonces $x\ t\ w \leq y\ t\ z$.
- *Condiciones Frontera:* $x\ t\ 0 = 0,\ x\ t\ 1 = x$.

Definición 2.8. Se define la conorma triangular, t-conorma o s-norma, como una operación binaria $s\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:

- *Conmutativa:* $x\ s\ y = y\ s\ x$.
- *Asociativa:* $x\ s\ (y\ s\ z) = (x\ s\ y)\ s\ z$.
- *Monotonicidad:* Si $x \leq y$ y $w \leq z$, entonces $x\ s\ w \leq y\ s\ z$.
- *Condiciones Frontera:* $x\ s\ 0 = x,\ x\ s\ 1 = 1$.

Como t-norma y s-norma más importantes, podemos encontrar las siguientes:

1. **t-norma del mínimo:** La función $min(\wedge)$ es una t-norma que corresponde a la operación de intersección en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Por eso, esta función es la extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.
2. **t-conorma o s-norma del máximo:** La función $max(\vee)$ es una t-conorma que corresponde a la operación de unión en conjunto clásicos cuyos grados de pertenencia están en $\{0,1\}$. Por eso, esta función es la extensión natural de la unión en conjuntos difusos.

Estas son las t-normas y t-conormas principales. Sin embargo, no son las únicas. Ejemplos de otras t-normas son las siguientes:

1. **Producto:** $x \cdot y$.

2. **Producto Drástico:**

$$PD = \begin{cases} x & si\ y = 1 \\ y & si\ x = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

3. **Producto Acotado:**

$$max\,(0,\ (1\ +\ p)(x\ +\ y\ -\ 1)\ -\ pxy)\,,\ p \geq 1,\ (usualmente\ p = 0);$$

$$\sqrt[p]{max\,(0,\ x^p\ +\ y^p\ -\ 1)},\ p > 0,\ (usualmente\ p = 1).$$

4. **Producto de Hamacher:**

$$\frac{xy}{p\ +\ (1\ -\ p)(x\ +\ y\ -\ xy)},\ p \geq 0,\ (usualmente\ p = 0).$$

5. **Familia Yager:**

$$1\ -\ min\left(1,\ \sqrt[p]{(1\ -\ x)^p\ +\ (1\ -\ y)^p}\right),\ p > 0.$$

6. **Familia Dubois-Prade:**

$$\frac{xy}{max(x, y, p)},\ p \in [0, 1].$$

7. **Familias Frank:**

$$\log_p\left(1\ +\ \frac{(p^x\ -\ 1)(p^y\ -\ 1)}{p\ -\ 1}\right),\ p > 0,\ p \neq 1.$$

8. **Producto de Einstein:**

$$\frac{xy}{1\ +\ (1\ -\ x)\ +\ (1\ -\ y)}.$$

Ejemplos de otras t-conormas son las siguientes:

1. **Suma-Producto:** $x\ +\ y\ -\ xy$.

2. **Suma Drástica:**

$$SD = \begin{cases} x & si\ y = 0 \\ y & si\ x = 0 \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

3. **Suma Acotada:**

$$min\,(1,\ x\ +\ y\ +\ pxy)\,,\ p \geq 0.$$

4. **Familia Sugeno:**

$$min\,(1,\ x\ +\ y\ +\ p\ -\ xy)\,,\ p \geq 0.$$

5. **Familia Yager:**

$$min\left(1,\ \sqrt[p]{x^p\ +\ y^p}\right),\ p > 0.$$

6. **Familia Dubois-Prade:**

$$1\ -\ \frac{(1\ -\ x)(1\ -\ y)}{max(1\ -\ x,\ 1\ -\ y,\ p)},\ p \in [0,1].$$

7. **Familias Frank:**

$$\log_p\left(1\ +\ \frac{(p^{1-x}\ -\ 1)(p^{1-y}\ -\ 1)}{p\ -\ 1}\right),\ p > 0,\ p \neq 1.$$

Finalmente, algunas de las características de las t-normas y de las t-conormas son:

- *Para cada t-norma existe una t-conorma dual y viceversa:*
  - $x\ s\ y = 1\ -\ (1\ -\ x)\ t\ (1\ -\ y)$.
  - $x\ t\ y = 1\ -\ (1\ -\ x)\ s\ (1\ -\ y)$.
  - Estas son las Leyes de De Morgan de la Teoría de Conjuntos Difusos que, en conjuntos crisp, se aplican a la unión y a la intersección:

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}.$$

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

- *Las t-normas y t-conormas no pueden ordenarse de mayor a menor:* Sin embargo, es fácil identificar la mayor y la menor t-norma y t-conorma:
    - Mayor t-norma: Función mínimo.
    - Menor t-norma: Producto drástico.
    - Mayor t-conorma: Suma drástica.
    - Menor t-conorma: Función mínimo.
- *t-norma Arquimediana:* Si es continua y $x\ t\ y < x,\ \forall\ x \in (0,1)$.
- *t-conorma Arquimediana:* Si es continua y $x\ s\ y > x,\ \forall\ x \in (0,1)$.
- *En general, las t-normas no satisfacen las siguientes leyes fundamentales en la lógica bivaluada:*
    - Contradicción: $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$.
    - Exclusión del medio: $A \cup \overline{A} \neq X$.
    - Estas contradicciones se producen al operar con valores de pertenencia entre 0 y 1. La mayor desviación es para el valor 1/2.
- *Excepciones:* Operaciones introducidas por J. Lukasiewicz.
    - t-norma Suma Acotada con $p = 0$:

$$(A \cap \overline{A})(x) = max\,[0,\ A(x)\ +\ (1\ -\ A(x))\ -\ 1] = 0.$$

    - t-conorma Producto Acotado con $p = 0$:

$$(A \cup \overline{A})(x) = min\,[1,\ A(x)\ +\ (1\ -\ A(x))] = 1.$$

- *Propiedad de Idempotencia:* Sólo se cumple para el mínimo y el máximo: $x\ t\ x = x$ y $x\ s\ x = x$. Si se repite la t-norma (t-conorma) sobre el mismo x los valores decrecen (crecen).

- *Propiedad Distributiva:* En general, no se cumple, excepto para el mínimo y el máximo.
- *La intersección y la unión pueden ser identificadas con los conectivos lógicos AND y OR respectivamente.*

Teniendo esto en cuenta, las operaciones con conjuntos difusos se definen de la siguiente manera:

- Intersección: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(u, \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}) \ / \ \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(u) = t[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)]\}$.
- Unión: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(u, \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}) \ / \ \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(u) = s[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)]\}$.
- Complemento: $\mu_{\sim\tilde{A}}(u) = 1 \ - \ \mu_{\tilde{A}}(u)$.

La representación gráfica de algunas de estas operaciones puede verse en la Figura 2.2.

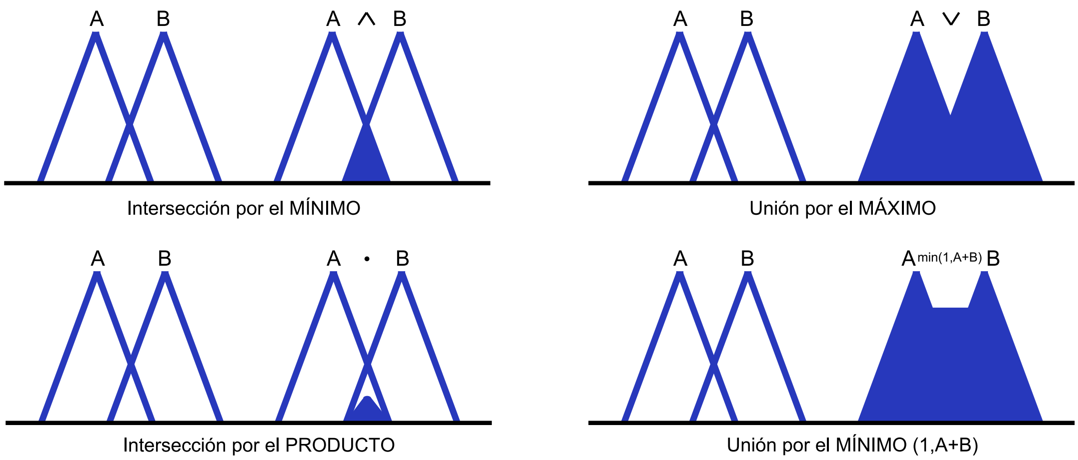

Figura 2.2: Intersección y unión en conjuntos difusos.

2.2.5. Principio de Extensión

El Principio de Extensión es un concepto básico de la Teoría de Conjuntos Difusos utilizado para generalizar conceptos matemáticos no difusos a conjuntos difusos. A lo largo del tiempo, han aparecido diferentes formulaciones de este concepto [134, 152, 231, 232, 233], que se puede definir como:

Definición 2.9. Sea U el producto cartesiano de los universos $U_1, ..., U_r$ y sean $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_r$, r conjuntos difusos en $U_1, ..., U_r$ respectivamente. Sea f una función definida desde el universo U, $(U = U_1 \times ... \times U_r)$, al universo Y, $y = f(u_1, ..., u_r)$. El Principio de Extensión nos permite definir un conjunto difuso $\tilde{B}$ en Y a partir de los conjuntos difusos $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_r$, representando su imagen a partir de la función f de acuerdo a la siguiente expresión,

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(u_1, ..., u_r), (u_1, ..., u_r) \in U\},$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(u_1,...,u_r) \in f^{-1}(y)} \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}_1}(u_1), ..., \mu_{\tilde{A}_r}(u_r)\}, & si \;\; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Para $r = 1$, el Principio de Extensión se reduce a:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y))/y = f(u), u \in U),$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{u \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(u), & si \;\; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

2.2.6. Números Difusos

Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen una especial significación aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

$$\tilde{A} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

Bajo ciertas condiciones, estos conjuntos difusos pueden ser vistos como *números difusos* o *intervalos difusos*, definiéndose el concepto de número difuso como [231, 232, 233]:

Definición 2.10. Un número difuso $\tilde{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. La función de pertenencia es convexa,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in [0,1], \mu_{\tilde{A}}(z) \geq min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}.$$

2. Para cualquier $\alpha \in (0,1]$, $\tilde{A}_\alpha$ debe ser un intervalo cerrado.

3. El soporte de $\tilde{A}$ debe ser finito.

4. $\tilde{A}$ está normalizado,

$$sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$$

Casos particulares de números difusos [152]:

- Los números reales (Figura 2.3.a).
- Intervalos de números reales (Figura 2.3.b).
- Valores aproximados (Figura 2.3.c).
- Intervalos aproximados o difusos (Figura 2.3.d).

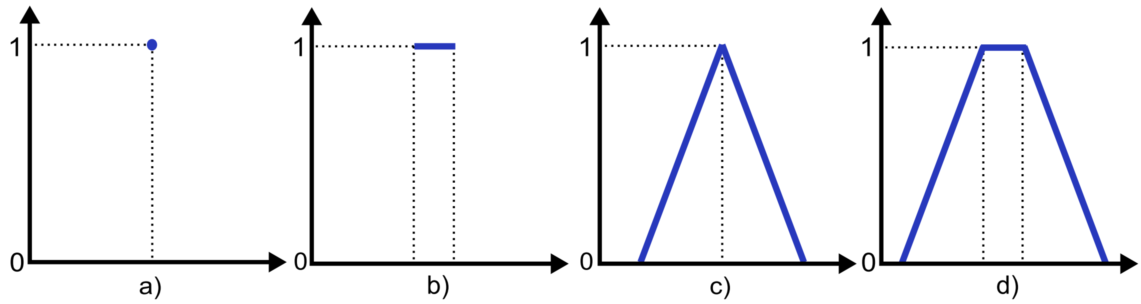

Figura 2.3: Ejemplos de números difusos.

Para terminar esta sección dedicada a los conjuntos difusos, tan sólo añadir que las operaciones aritméticas habituales sobre números reales se extienden a los números difusos mediante el Principio de Extensión presentado anteriormente.

2.3. El Modelado Lingüístico Difuso

Los problemas presentes en el mundo real presentan aspectos que pueden ser de distinta naturaleza. Cuando dichos aspectos o fenómenos son de naturaleza cuantitativa, éstos se valoran fácilmente utilizando valores numéricos más o menos precisos. Sin embargo, cuando se trabaja con información vaga e imprecisa o cuando la naturaleza de tales aspectos no es cuantitativa sino cualitativa, no es sencillo ni adecuado utilizar un modelado de preferencias numérico. En este caso, es más aconsejable utilizar otro tipo de modelado como, por ejemplo, el lingüístico.

Este tipo de aspectos suele aparecer frecuentemente en problemas en los que se pretenden evaluar fenómenos relacionados con percepciones y relaciones de los seres humanos (diseño, gusto, diversión, etc.). En estos casos, se suelen utilizar palabras del lenguaje natural (bonito, feo, dulce, salado, simpático, mucha, poca, etc.) en lugar de valores numéricos para emitir tales valoraciones. Tal y como se indica en [49, 235], el uso de un modelado lingüístico de preferencias puede deberse a varias razones:

- La información disponible con la que trabajan los expertos es demasiado vaga o imprecisa para ser valorada utilizando valores numéricos precisos.
- Situaciones en las que la información no puede ser cuantificada debido a su naturaleza y sólo puede *medirse* utilizando términos lingüísticos. Por ejemplo, para evaluar el *comfort* o el *diseño* de un coche [157], el uso de términos como *bueno*, *medio* y *malo*, suele ser habitual.
- Información cuantitativa que no puede medirse porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta o porque el coste de su medición es muy elevado. En este caso, el uso de un *valor aproximado* que permita reflejar los distintos valores del problema puede ser adecuado. Por ejemplo,

imaginemos una situación en la que se pretende evaluar la *velocidad* de un coche y no disponemos de cronómetro, sirviéndonos tan sólo de nuestras percepciones. Entonces, en lugar de valores numéricos, podemos utilizar términos lingüísticos como, por ejemplo, *rápido*, *muy rápido* y *lento*, para medir la *velocidad*.

El *modelado lingüístico difuso*, que tiene como base teórica la Teoría de Conjuntos Difusos, se ha mostrado como una técnica eficaz para valorar aspectos de naturaleza cualitativa [1, 13, 26, 29, 67, 69, 105, 202, 207, 225]. Para representar los aspectos cualitativos como valores lingüísticos, utiliza *variables lingüísticas* cuyo dominio de expresión son conjuntos de palabras o términos lingüísticos [231, 232, 233].

Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o *etiqueta* y por un *valor semántico* o *significado*. La etiqueta es una palabra o frase perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo de discurso. Al ser las palabras menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística es una buena propuesta para caracterizar aquellos fenómenos que no son adecuados para poder ser evaluados mediante valores numéricos. Formalmente, una variable lingüística se define como:

Definición 2.11. [231, 232, 233] Una variable lingüística está caracterizada por una quíntupla $(H, T(H), U, G, M)$, donde:

- H es el nombre de la variable.
- $T(H)$ es el conjunto de valores lingüísticos o etiquetas lingüísticas.
- U es el universo de discurso de la variable.
- G es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los valores de $T(H)$.
- M es una regla semántica que asocia a cada elemento de $T(H)$ su significado. Para cada valor $L \in T(H)$, M(L) será un subconjunto difuso de U.

Ejemplo 2.2. Consideremos la variable lingüística $H = velocidad$ y la variable base $u \in U$, con $U = [0, 125]$. El conjunto de términos asociados con la velocidad podría ser $T(H) = \{baja, media, alta\}$, donde cada término en $T(H)$ es el nombre de un valor lingüístico de *velocidad*. El significado $M(L)$ de una etiqueta $L \in T(H)$ se define como la restricción $L(u)$ sobre la variable base u, impuesta según el nombre de L. Por lo tanto, $M(L)$ es un conjunto difuso de U cuya función de pertenencia $L(u)$ representa la semántica del nombre L. La representación gráfica del ejemplo puede observarse en la Figura 2.4.

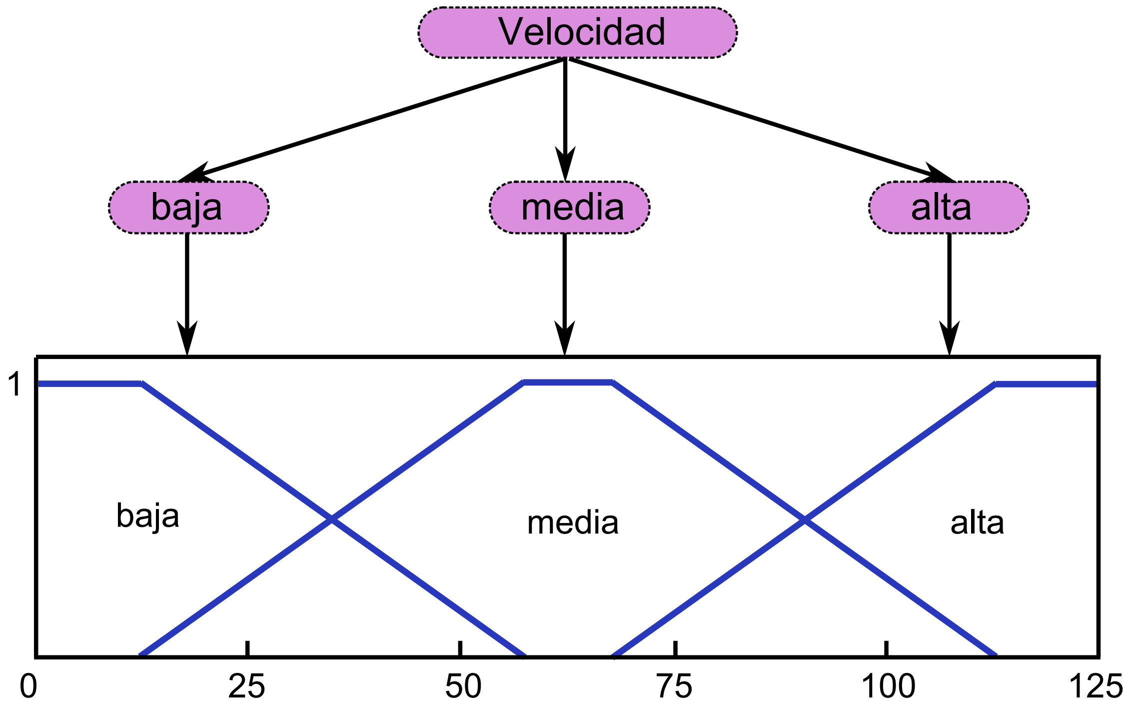

Figura 2.4: Ejemplo de variable lingüística.

En cualquier ámbito en el que deseemos aplicar un enfoque lingüístico difuso para la resolución de algún problema, debemos tomar dos decisiones:

- *Modelo de representación.* Elección del conjunto de términos lingüísticos junto con su semántica. De esta forma, se proporciona a una fuente de información (experto, juez, etc.) un número reducido de términos con los que poder expresarla.

- *Modelo computacional.* Definir el modelo computacional seleccionando los correspondientes operadores de comparación y de agregación.

A continuación, vamos a describir varios enfoques existentes tanto para generar el conjunto de términos lingüísticos como para definir la semántica que está asociada a los mismos.

2.3.1. Elección del Conjunto de Términos Lingüísticos

Para que una fuente de información pueda expresar con facilidad su información y conocimiento es necesario que disponga de un conjunto apropiado de descriptores lingüísticos. Un aspecto muy importante que es necesario analizar con el fin de establecer la descripción de una variable lingüística es *la granularidad de la incertidumbre* [27], es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usado para expresar y representar la información.

Se dice que un conjunto de términos lingüísticos tiene:

- Una granularidad baja o un tamaño de grano grueso cuando la cardinalidad del conjunto de etiquetas lingüísticas es pequeña. Esto significa que el dominio está poco particionado y que existen pocos niveles de distinción de la incertidumbre, produciéndose una pérdida de expresividad.
- Una granularidad alta o un tamaño de grano fino cuando la cardinalidad del conjunto de etiquetas lingüísticas es alta. Esta situación puede provocar un aumento de la complejidad en la descripción del dominio.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos no debe ser demasiado pequeña como para imponer una restricción de precisión a la información que quiere expresar cada fuente de información, y debe ser lo suficientemente grande como para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Habitualmente, la cardinalidad usada en los modelos lingüísticos suele ser un valor impar como 7 o 9, no superando las 11 o 13 etiquetas. El término medio representa una valoración de *aproximadamente 0.5* y el resto de los términos se distribuyen alrededor de éste [27]. Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de Miller [167] sobre la capacidad humana, en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de 7 o 9 términos diferentes.

Una vez establecida la cardinalidad, es necesario definir un mecanismo para generar los términos lingüísticos. Existen dos enfoques para esto, uno los define a partir de una gramática libre de contexto y el otro mediante un orden total definido sobre el conjunto de términos lingüísticos. Como veremos más adelante, dependiendo del mecanismo utilizado para generar los términos lingüísticos, encontramos dos modelados lingüísticos diferentes: el modelado lingüístico difuso clásico y el modelado lingüístico difuso ordinal.

2.3.2. Semántica del Conjunto de Términos Lingüísticos

Existen varios enfoques para definir la semántica del conjunto de etiquetas lingüísticas [28, 201, 221], siendo uno de los más utilizados el enfoque basado en funciones de pertenencia [27, 29, 69, 154, 199].

El enfoque basado en funciones de pertenencia define la semántica del conjunto de términos lingüísticos utilizando números difusos en el intervalo $[0, 1]$, donde cada número difuso es descrito por una función de pertenencia. Un método eficiente desde un punto de vista computacional para caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de su función de pertenencia [26]. Debido a que las valoraciones lingüísticas dadas por las fuentes de información son aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones de pertenencia trapezoidales son lo suficientemente buenas como para representar la vaguedad de dichas valoraciones lingüísticas [26, 27, 69, 199, 200].

En la Figura 2.5, se muestra la semántica de una variable lingüística que evalúa la altura de una persona utilizando números difusos definidos por funciones de pertenencia trapezoidales:

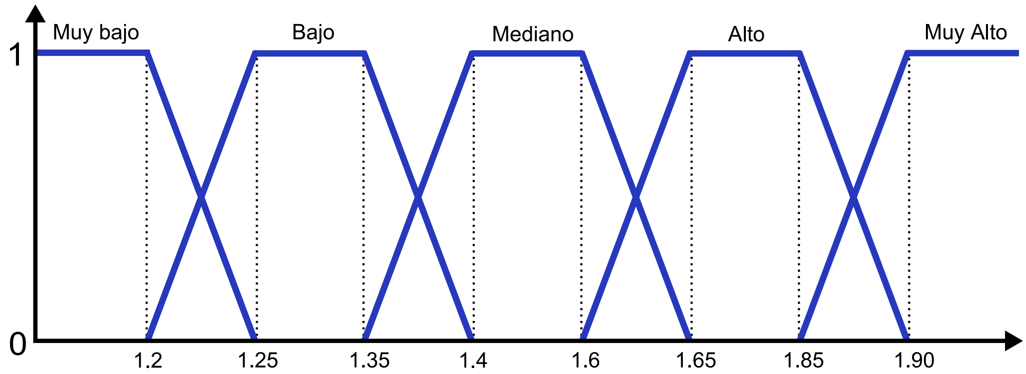

Figura 2.5: Definición semántica de la variable lingüística *altura* usando funciones de pertenencia trapezoidales.

$$T(Altura) = \{\text{Muy bajo, Bajo, Mediano, Alto, Muy Alto}\}$$

$$Muy\ Bajo = (0, 0, 1.2, 1.25)$$

$$Bajo = (1.2, 1.25, 1.35, 1.4)$$

$$Mediano = (1.35, 1.4, 1.6, 1.65)$$

$$Alto = (1.6, 1.65, 1.85, 1.9)$$

$$Muy\ Alto = (1.85, 1.9, 2, 2)$$

Un caso particular de este tipo de representación son las funciones de pertenencia triangulares, en las que $b = d$. La Figura 2.6 muestra el mismo conjunto visto anteriormente, pero representado ahora con funciones de pertenencia triangulares.

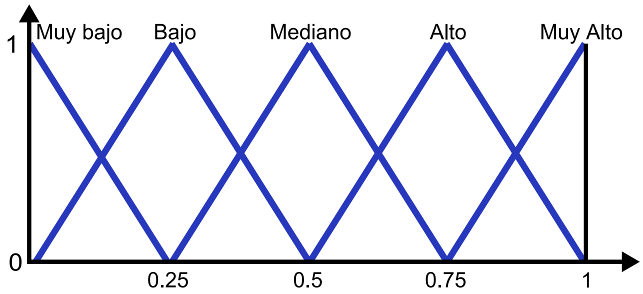

Figura 2.6: Definición semántica de la variable lingüística *altura* usando funciones de pertenencia triangulares.

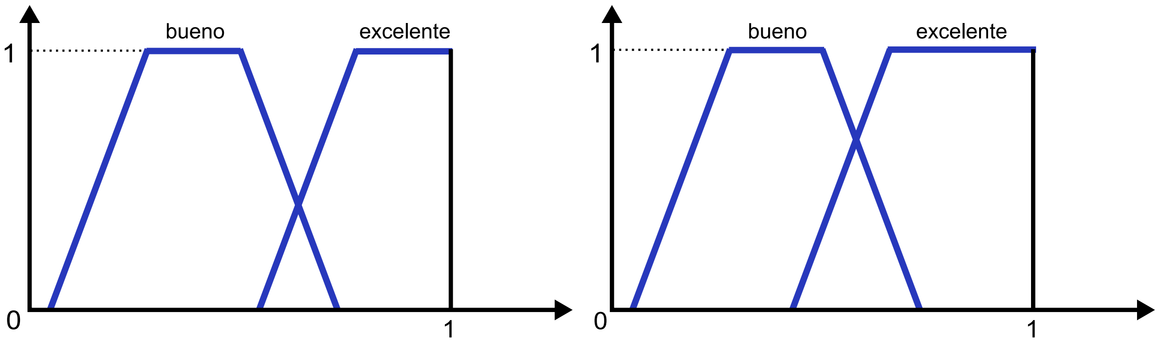

Figura 2.7: Distribuciones diferentes del concepto *excelente*.

Este enfoque implica establecer las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta. Esta tarea presenta el problema de determinar los parámetros según los puntos de vista de todas las fuentes de información. En la realidad, es difícil que todas las fuentes de información propongan exactamente las mismas funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos, debido a que cada una de ellas puede interpretar de forma parecida, pero a la vez diferente, el mismo concepto. Por ejemplo, dos percepciones muy cercanas pero diferentes de la evaluación del concepto *excelente* pueden verse en la Figura 2.7.

Por lo tanto, puede darse el caso de términos lingüísticos con una sintaxis similar pero con diferente semántica [105].

2.4. Modelado Lingüístico Difuso Clásico

A continuación, vamos a describir el modelado lingüístico difuso clásico. Para ello, como hemos comentado anteriormente, vamos a definir tanto su modelo de representación como su modelo computacional.

2.4.1. Modelo de Representación en el Modelado Lingüístico Difuso Clásico

El modelado lingüístico difuso clásico adopta un enfoque basado en una gramática libre de contexto [26, 27, 29, 231, 232, 233, 234] para generar el conjunto de términos lingüísticos. Una gramática generadora G es una 4-tupla (V_N, V_T, I, P), siendo V_N el conjunto de símbolos no terminales, V_T el conjunto de símbolos terminales, I el símbolo inicial y P el conjunto de reglas de producción. La elección de estos cuatro elementos determinará la cardinalidad y forma del conjunto de términos lingüísticos. El lenguaje generado debería ser lo suficientemente grande como para que pueda describir cualquier posible situación del problema. De acuerdo con las observaciones de Miller [167], el lenguaje generado no tiene que ser infinito, sino más bien fácilmente comprensible.

Entre los símbolos terminales y no terminales de G, podemos encontrar términos primarios (por ejemplo, *alto, medio, bajo*), modificadores (por ejemplo, *no, mucho, muy, más o menos*), relaciones (por ejemplo, *mayor que, menor que*) y conectivos (por ejemplo, *y, o, pero*). Construyendo I como cualquier término primario, el conjunto de términos lingüísticos $H = \{muy\ alto,\ bastante\ alto,\ alto\}$ se genera usando P. La semántica del conjunto de términos lingüísticos se define utilizando números difusos en el intervalo $[0, 1]$, donde cada número difuso se describe por una función de pertenencia basada en ciertos parámetros o reglas semánticas.

2.4.2. Modelo Computacional en el Modelado Lingüístico Difuso Clásico

Con respecto a la definición de operadores de agregación de información lingüística, el modelo clásico lo que hace es extender las operaciones de la lógica tradicional para aplicarlas sobre las funciones de pertenencia. El inconveniente es que, como resultado, obtendremos otro conjunto difuso que no se corresponde con ninguna etiqueta del conjunto de términos originalmente considerado. Si finalmente deseamos obtener una etiqueta de dicho conjunto, es necesario realizar un proceso de aproximación lingüística, el cual consiste en encontrar una etiqueta cuyo significado sea el mismo o lo más parecido posible (de acuerdo a alguna métrica) al significado del conjunto difuso no etiquetado obtenido como resultado de alguna operación.

2.5. Modelado Lingüístico Difuso Ordinal

El modelado lingüístico difuso ordinal [68, 102, 110] es un tipo muy útil de enfoque lingüístico difuso. Fue propuesto como una herramienta alternativa al modelado lingüístico difuso clásico, ya que simplifica la computación con palabras al eliminar la complejidad de tener que definir una gramática.

Además, el modelado lingüístico difuso clásico, al trabajar con números difusos, presenta el inconveniente de que no suelen coincidir con etiquetas del conjunto de términos lingüísticos, por lo que si se desea obtener una etiqueta, se hace necesaria una aproximación lingüística. Sin embargo, el modelado lingüístico difuso ordinal trabaja directamente con las etiquetas previamente definidas, por lo que evita tener que recurrir a aproximaciones lingüísticas complejas.

2.5.1. Modelo de Representación en el Modelado Lingüístico Difuso Ordinal

Un enfoque lingüístico difuso ordinal se define considerando un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado $S = \{s_i\}$, $i \in \{0, \ldots, g\}$, con $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$, y con una cardinalidad impar (la cardinalidad de S es $g + 1$). La semántica del conjunto de etiquetas se establece según la estructura ordenada del conjunto de etiquetas [28], considerando que cada etiqueta del par (s_i, s_{g-i}) es igualmente informativa. Por ejemplo, podríamos usar el siguiente conjunto de 7 etiquetas para representar la información lingüística:

$$S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$$

$$\begin{array}{ll} s_0 = Nulo = N & s_1 = Muy\ Bajo = MB \\ s_2 = Bajo = B & s_3 = Medio = M \\ s_4 = Alto = A & s_5 = Muy\ Alto = MA \\ s_6 = Perfecto = P & \end{array}$$

donde $s_i < s_j$ si y sólo si $i < j$.

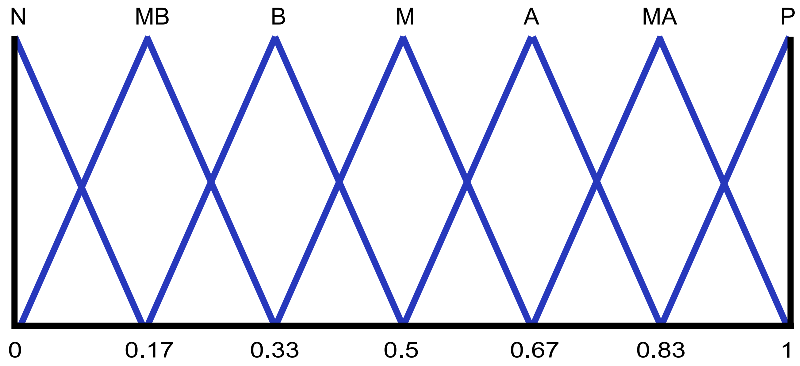

Figura 2.8: Un conjunto de 7 términos lingüísticos y su semántica.

A continuación, tenemos que dar significado al conjunto de etiquetas lingüísticas, asociando con cada término lingüístico un conjunto difuso definido en el intervalo $[0, 1]$. Para ello, podemos hacer uso de una representación trapezoidal de la función de pertenencia, o de su caso más particular, una representación triangular. Como ejemplo, podemos considerar el anterior conjunto de etiquetas con las siguientes funciones de pertenencia (ver Figura 2.8):

$s_0 = Nulo(N) = (0, 0, 0.17)$ $s_1 = Muy\ Bajo(MB) = (0, 0.17, 0.33)$

$s_2 = Bajo(B) = (0.17, 0.33, 0.5)$ $s_3 = Medio(M) = (0.33, 0.5, 0.67)$

$s_4 = Alto(A) = (0.5, 0.67, 0.83)$ $s_5 = Muy\ Alto(MA) = (0.67, 0.83, 1)$

$s_6 = Perfecto(P) = (0.83, 1, 1)$

2.5.2. Modelo Computacional en el Modelado Lingüístico Difuso Ordinal

En cualquier enfoque lingüístico, necesitamos operadores para el manejo de la información lingüística. Una ventaja del enfoque lingüístico difuso ordinal es la simplicidad y agilidad de su modelo computacional. Está basado en el cálculo simbólico [102, 110] y actúa operando directamente sobre las etiquetas, teniendo en cuenta el orden de las valoraciones lingüísticas en la estructura ordenada de las etiquetas. Habitualmente, el modelo lingüístico difuso ordinal para la computación con palabras se define estableciendo:

1. un operador de negación,
2. operadores de comparación basados en la estructura ordenada de los términos lingüísticos, y
3. operadores apropiados para la agregación de información lingüística difusa ordinal.

En la mayoría de los enfoques lingüísticos difusos ordinales, a partir de la semántica asociada a los términos lingüísticos, el operador de negación se define como:

$$NEG(s_i) = s_j \mid j = g - i.$$

También se pueden definir dos operadores de comparación de términos lingüísticos:

1. *Operador de maximización:* $MAX(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.
2. *Operador de minimización:* $MIN(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

A partir de estos operadores, es posible definir operadores automáticos y simbólicos de agregación de información lingüística como, por ejemplo, el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) [110], que está basado en el operador OWA (Ordered Weighted Averaging).

Para concluir, indicar que existen otras opciones de modelado lingüístico difuso ordinal, como generar la semántica de las etiquetas lingüísticas utilizando funciones de negación que inducen una semántica para cada etiqueta [201], estando éstas definidas como intervalos en $[0, 1]$.

2.6. Modelado Lingüístico Difuso 2-tupla

El modelado lingüístico difuso 2-tupla [114, 115] es un tipo de modelado lingüístico difuso que nos permite reducir la pérdida de información que habitualmente se produce en el modelado lingüístico difuso ordinal. Esta pérdida de información, que provoca una falta de precisión en los resultados, se debe al propio modelo, puesto que opera con valores discretos sobre un universo de discurso continuo. La principal ventaja del modelo computacional lingüístico basado en 2-tupla es que permite realizar procesos de cómputo con palabras de forma más precisa y, por tanto, sin pérdida de información, puesto que utiliza un modelo continuo de representación de la información.

2.6.1. Modelo de Representación en el Modelado Lingüístico Difuso 2-tupla

Consideremos que $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ es un conjunto de términos lingüísticos con cardinalidad impar, donde el término intermedio representa una valoración de *aproximadamente 0.5* y con el resto de términos lingüísticos del conjunto distribuidos simétricamente alrededor de ese punto intermedio. Asumimos que la semántica asociada con cada una de las etiquetas viene dada por medio de funciones de pertenencia triangulares y consideramos todos los términos distribuidos sobre una escala sobre la que hay establecida una relación de orden total, es decir, $s_i \leq s_j \Longleftrightarrow i \leq j$. En este contexto lingüístico difuso, si mediante un método simbólico de agregación de información lingüística [102, 110] obtenemos un valor $\beta \in [0, g]$, y $\beta \notin \{0, \ldots, g\}$, podemos usar una función de aproximación para expresar el resultado obtenido como un valor de S.

Definición 2.12. [114] Sea β el resultado de una agregación de los índices de un conjunto de etiquetas valoradas sobre un conjunto de términos lingüísticos S, es decir, el resultado de una operación de agregación simbólica. $\beta \in [0, g]$, siendo $g + 1$ la cardinalidad de S. Dados $i = round(\beta)$ y $\alpha = \beta - i$ dos valores, tales que $i \in [0, g]$ y $\alpha \in [-0.5, 0.5)$, entonces α es lo que denominamos *traslación simbólica.*

La traslación simbólica de un término lingüístico s_i es un valor numérico valorado en $[-0.5, 0.5)$ que representa la *diferencia de información* entre la información $\beta \in [0, g]$ obtenida después de una operación de agregación simbólica y el valor más cercano en $\{0, \ldots, g\}$ que indica el índice del término lingüístico más cercano en S ($i = round(\beta)$).

El enfoque lingüístico difuso basado en 2-tupla se desarrolla a partir del concepto de traslación simbólica, representando la información lingüística por medio de una 2-tupla (s_i, α_i), $s_i \in S$ y $\alpha_i \in [-0.5, 0.5)$:

- s_i representa la etiqueta lingüística, y
- α_i es un valor numérico que expresa la traslación de β al índice de la etiqueta más cercana, i, en el conjunto de términos lingüísticos ($s_i \in S$).

Este modelo define un conjunto de funciones de transformación entre términos lingüísticos y 2-tupla y entre valores numéricos y 2-tupla.

Definición 2.13. [114] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación de agregación simbólica, la 2-tupla que expresa la información equivalente a β se obtiene mediante la siguiente función:

$$\Delta\colon [0,g] \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha) \ con \begin{cases} s_i & i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i & \alpha \in [-0.5, 0.5) \end{cases}$$

donde $round(\cdot)$ es el típico operador de redondeo, s_i es la etiqueta cuyo índice es el más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

Proposición 2.1. *[114] Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y (s_i, α) una 2-tupla. Existe siempre una función Δ^{-1} tal que aplicada sobre una 2-tupla (s_i, α) devuelve su valor numérico $\beta \in [0, g]$.*

$$\Delta^{-1}\colon S \times [-0.5, 0.5) \longrightarrow [0, g]$$

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta.$$

Nota 2.1. A partir de las *definiciones 2.12, 2.13* y de la *proposición 2.1*, la conversión de un término lingüístico en una 2-tupla consiste en añadir el valor cero como traslación simbólica:

$$s_i \in S \Rightarrow (s_i, 0).$$

2.6.2. Modelo Computacional en el Modelado Lingüístico Difuso 2-tupla

Vamos a mostrar ahora el modelo computacional que nos permite operar sobre la representación lingüística difusa 2-tupla, presentando los operadores de comparación, negación y agregación de 2-tupla:

1. *Operador de comparación de 2-tupla:* La comparación de información lingüística representada por medio de 2-tupla se realiza de acuerdo a un orden lexicográfico normal y corriente. Consideremos dos 2-tupla (s_k, α_1) y (s_l, α_2) que representan cantidades de información:

   - Si $k < l$, entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2).
   - Si $k = l$, entonces

     a) Si $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces (s_k, α_1) y (s_l, α_2) representan la misma información,

     b) Si $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2),

     c) Si $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces (s_k, α_1) es mayor que (s_l, α_2),

2. *Operador de negación de 2-tupla:* El operador de negación sobre una 2-tupla se define como:

$$Neg(s_i, \alpha) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha))),$$

   siendo $g + 1$ la cardinalidad del conjunto de etiquetas S.

3. *Operador de agregación de 2-tupla:* La agregación de información consiste en obtener un valor que resuma un conjunto de valores, por lo que el resultado de la agregación de un conjunto de varias 2-tupla debe ser una 2-tupla. En la literatura podemos encontrar numerosos operadores de agregación que nos permiten combinar la información de acuerdo a distintos criterios. Cualquiera de estos operadores puede ser fácilmente extendido para trabajar con 2-tupla usando funciones Δ y

Δ^{-1}, que transforman valores numéricos en 2-tupla y viceversa sin pérdida de información. Algunos ejemplos de estos operadores son los siguientes:

Definición 2.14. Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2-tuplas lingüísticas, la 2-tupla que simboliza la media aritmética, $\bar{x}^e$, se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x}^e[(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)] = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\right) = \Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right).$$

Definición 2.15. Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2-tuplas lingüísticas y $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un vector numérico con sus pesos asociados, la 2-tupla que simboliza la media ponderada, $\bar{x}^w$, es:

$$\bar{x}^w[(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)] = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right).$$

Definición 2.16. Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de varias 2-tuplas y $W = \{(w_1, \alpha_1^w), \ldots, (w_n, \alpha_n^w)\}$ sus pesos asociados representados mediante 2-tuplas lingüísticas, la 2-tupla que representa la media ponderada lingüística, $\bar{x}_l^w$, se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x}_l^w = [((r_1, \alpha_1), (w_1, \alpha_1^w)) \ldots ((r_n, \alpha_n), (w_n, \alpha_n^w))] = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \beta_{W_i}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{W_i}}\right),$$

con $\beta_i = \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)$ y $\beta_{W_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i^w)$.

2.7. Modelado Lingüístico Difuso Multi-Granular

Con anterioridad hemos comentado que en cualquier enfoque lingüístico difuso, uno de los parámetros más importantes que hay que determinar es la *granularidad de la incertidumbre*, es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos S usado para expresar la información lingüística. En función del grado de incertidumbre que un experto encargado de calificar un fenómeno tenga sobre el mismo, el conjunto de términos lingüísticos elegido para proporcionar ese conocimiento tendrá más o menos términos. Por lo tanto, cuando distintos expertos tienen diferentes grados de incertidumbre sobre el fenómeno, es conveniente que cada uno trabaje con conjuntos de términos lingüísticos de diferente granularidad de incertidumbre (es decir, trabajar con información lingüística multi-granular) [105, 116, 128]. El uso de diferentes conjuntos de etiquetas es también necesario cuando un experto tiene que valorar conceptos diferentes. En ese tipo de situaciones, necesitamos herramientas que nos permitan gestionar información lingüística multi-granular, es decir, necesitamos definir un modelado lingüístico difuso multi-granular.

De esta forma, para operar con la información lingüística multi-granular, el primer paso es unificarla en un único dominio de expresión. Todas las preferencias lingüísticas de los expertos deben transformarse (usando una función de transformación) en un único dominio llamado *conjunto de términos lingüísticos básico* (BLTS) y denotado como S_T [105, 128].

El BLTS debe ser un conjunto de términos lingüísticos que permita mantener los grados de incertidumbre asociados a cada dominio individual S_i. Así, en un contexto lingüístico multi-granular general, para seleccionar S_T se procede de la siguiente forma:

1. Si solamente hay un único conjunto de términos lingüísticos con granularidad máxima, entonces se elige ese como el conjunto BLTS, S_T.

2. Si hay dos o más conjuntos de términos lingüísticos con granularidad máxima, entonces la selección de S_T dependerá de la semántica asociada a ellos:

   a) Si todos los términos lingüísticos tienen la misma semántica (con diferentes etiquetas), entonces cualquiera de ellos puede seleccionarse como S_T.

b) Si dos o más de los conjuntos de términos lingüísticos tienen diferentes semánticas, entonces S_T se define como un conjunto genérico de términos lingüísticos con un número de términos mayor que el número de términos que una persona puede discriminar, el cual normalmente es 7 o 9 [167].

Una vez que el conjunto BLTS ha sido seleccionado, la información lingüística multi-granular se unifica en conjuntos difusos definidos sobre el conjunto BLTS mediante una función de transformación multi-granular:

Definición 2.17. [105] Si $S = \{l_0, \ldots, l_p\}$ y $S_T = \{s_0, \ldots, s_g\}$ son dos conjuntos de términos lingüísticos, con $g \geq p$, entonces una función de transformación multi-granular τ_{SS_T} se define como $\tau_{SS_T} \colon S \rightarrow F(S_T)$, tal que $\tau_{SS_T}(l_i) = \{(s_h, \alpha_h) \mid h = 0, \ldots, g\}$, $\forall l_i \in A$, con $\alpha_h = \text{máx}_y \, \text{mín}\{\mu_{l_i}(y), \mu_{c_h}(y)\}$, y donde $F(S_T)$ es el conjunto de conjuntos difusos definidos sobre S_T, y $\mu_{l_i}(y)$ y $\mu_{c_h}(y)$ son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos asociados a los términos lingüísticos l_i y c_h respectivamente.

Ejemplo 2.3. Sean $S = \{l_0, l_1, \ldots, l_4\}$ y $S_T = \{s_0, s_1, \ldots, s_6\}$ dos conjuntos de términos lingüísticos con la siguiente semántica asociada cuya representación mediante números difusos triangulares se muestra en la Figura 2.9:

$$\begin{array}{ll}
l_0 = (0, 0, 0.25) & s_0 = (0, 0, 0.16) \\
l_1 = (0, 0.25, 0.5) & s_1 = (0, 0.16, 0.34) \\
l_2 = (0.25, 0.5, 0.75) & s_2 = (0.16, 0.34, 0.5) \\
l_3 = (0.5, 0.75, 1) & s_3 = (0.34, 0.5, 0.66) \\
l_4 = (0.75, 1, 1) & s_4 = (0.5, 0.66, 0.84) \\
 & s_5 = (0.66, 0.84, 1) \\
 & s_6 = (0.84, 1, 1)
\end{array}$$

El conjunto difuso obtenido después de aplicar la función de transformación multi-granular τ_{SS_T} para la etiqueta l_1 es:

$$\tau_{SS_T}(l_1) = \{(s_0, 0.39), (s_1, 0.85), (s_2, 0.85), (s_3, 0.39), (s_4, 0), (s_5, 0), (s_6, 0)\}.$$

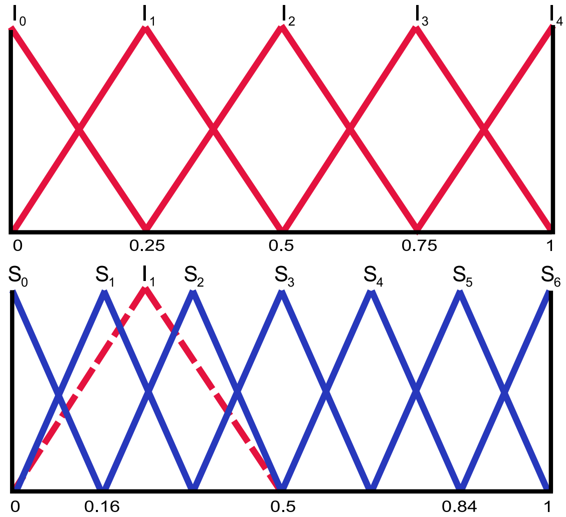

Figura 2.9: Transformación de $l_1 \in S$ en un conjunto difuso sobre S_T.

Para unificar las preferencias de cada experto e_i, se definen *funciones de transformación multi-granular*, $\tau_{S_iS_T}$, tal que cada preferencia lingüística $p_i^{lk} \in S_i$ será transformada dentro del conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk}$ sobre $S_T = \{s_0, \ldots, s_g\}$, tal que $\tilde{p}_i^{lk} = \tau_{S_iS_T}(p_i^{lk}) = \{(s_h, \alpha_h^{lk}) \mid h = 0, \ldots, g\}$, $\alpha_h^{lk} = \text{máx}_y \, \text{mín}\{\mu_{p_i^{lk}}(y), \mu_{c_h}(y)\}$, donde al menos $\exists\ \alpha_h^{lk} > 0$ y $\forall\ \alpha_h^{lk} \in [0, 1]$. Para simplificar, usaremos los grados de pertenencia $(\alpha_0^{lk}, \ldots, \alpha_g^{lk})$ para denotar cada conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk}$:

$$\tilde{P}_i = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_0^{11}, \ldots, \alpha_g^{11}) & \cdots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_0^{1n}, \ldots, \alpha_g^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_0^{n1}, \ldots, \alpha_g^{n1}) & \cdots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_0^{nn}, \ldots, \alpha_g^{nn}) \end{pmatrix}$$

2.8. Modelado Lingüístico Difuso No Balanceado

Según se ha comentado, ante cualquier problema que hace uso de información lingüística, el primer objetivo que hay que satisfacer es la elección de los términos lingüísticos con sus correspondientes semánticas para, así, establecer el conjunto de etiquetas que se va a usar. A lo largo de la literatura, podemos encontrar dos posibilidades distintas para la elección de los términos lingüísticos y sus semánticas:

- Por un lado, podemos asumir que todos los términos del conjunto de etiquetas son igualmente informativos, es decir, están distribuidos simétricamente tal y como sucede en los modelados lingüísticos difusos que hemos estado viendo hasta ahora.
- Por otro lado, podemos asumir que no todos los términos del conjunto de etiquetas son igualmente informativos, es decir, las etiquetas no están distribuidas simétricamente. En este caso, necesitamos un modelado lingüístico difuso no balanceado [106, 108, 125] para gestionar los conjuntos de términos lingüísticos con distintos niveles de discriminación a ambos lados del término medio. La necesidad de utilizar conjuntos de términos lingüísticos no balanceados aparece, por ejemplo, en el sistema de evaluación de educación español (Figura 2.10):

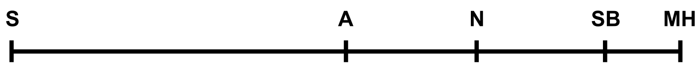

Figura 2.10: Conjunto de etiquetas del sistema de evaluación de eduación español.

$$\mathcal{S}_{un} = \{S, A, N, SB, MH\}$$

$S = Suspenso$ $\quad$ $A = Aprobado$

$N = Notable$ $\quad$ $SB = Sobresaliente$

$MH = Matrícula\ de\ Honor$

Así, aunque existe gran cantidad de modelos de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo basados en una aproximación lingüística que usa variables lingüísticas valoradas en conjuntos de términos lingüísticos uniforme y simétricamente distribuidos, es decir, asumiendo el mismo nivel de discriminación a ambos lados del término lingüístico medio [22, 111, 113, 128, 207], existen problemas que necesitan valorar sus variables con términos lingüísticos que no están ni uniforme ni simétricamente distribuidos [107, 125, 159, 191, 202], es decir, usando conjuntos de términos lingüísticos difusos no balanceados.

Para gestionar los conjuntos de términos lingüísticos no balanceados, se puede hacer uso del modelado lingüístico difuso basado en 2-tuplas. Básicamente, el método consiste en representar los términos lingüísticos no balanceados usando distintos niveles de una jerarquía lingüística LH [61, 116], llevando a cabo todas las operaciones mediante el uso del modelo computacional definido para la representación de 2-tuplas.

Una jerarquía lingüística es un conjunto de niveles, donde cada nivel, a su vez, es un conjunto de términos lingüísticos con una granularidad diferente del resto de niveles de la jerarquía [61, 116]. Cada uno de los niveles de una jerarquía lingüística se denota como $l(t, n(t))$, siendo t un número que indica el nivel de la jerarquía y $n(t)$ la granularidad del conjunto de términos lingüísticos del nivel t.

Normalmente, las jerarquías lingüísticas trabajan con términos lingüísticos cuyas funciones de pertenencia son de forma triangular, simétricas y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$. Además, los conjuntos de términos lingüísticos tienen una granularidad impar, con la etiqueta central indicando un valor de indiferencia.

Los niveles de una jerarquía lingüística están ordenados en función de su granularidad, es decir, que para dos niveles consecutivos t y $t+1$, $n(t+1) > n(t)$. Por lo tanto, cada nivel $t+1$ proporciona un refinamiento lingüístico con respecto al nivel anterior t.

Definición 2.18. Una jerarquía lingüística LH se define como la unión de todos los niveles t que la conforman:

$$LH = \bigcup_t l(t, n(t)).$$

Para la construcción de LH debemos tener en mente que el orden jerárquico nos viene dado por el incremento de granularidad de los conjuntos de términos lingüísticos de cada nivel.

Partiendo de que $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \ldots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$ sea el conjunto de términos lingüísticos definido para el nivel t con $n(t)$ términos, la construcción de una jerarquía lingüística debe satisfacer las siguientes reglas básicas [116]:

1. Preservar todos los puntos modales previos de las funciones de pertenencia de cada uno de los términos lingüísticos de cada nivel con respecto a los del nivel siguiente.
2. Hacer que las transacciones entre dos niveles consecutivos sean suaves. El propósito es construir un nuevo conjunto de términos lingüísticos, $S^{n(t+1)}$, de forma que añadiremos un nuevo término lingüístico entre cada pareja de términos pertenecientes al conjunto de términos del nivel anterior t. Para realizar esta inserción de nuevos términos, reduciremos el soporte de las etiquetas lingüísticas para dejar hueco entre ellas para la nueva etiqueta.

De forma genérica, podemos establecer que el conjunto de términos lingüísticos de nivel $t+1$, $S^{n(t+1)}$, puede obtenerse a partir del nivel anterior t, $S^{n(t)}$, de la siguiente manera:

$$l(t, n(t)) \rightarrow l(t+1, 2 \cdot n(t) - 1).$$

La granularidad necesaria en cada conjunto de términos lingüísticos de nivel t, dependiendo del valor $n(t)$ definido en el primer nivel (para valores de 3 y 7 respectivamente), puede verse en la Tabla 2.1.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
$l(t, n(t))$	l(1,3)	l(2,5)	l(3,9)
$l(t, n(t))$	l(1,7)	l(2,13)	

Tabla 2.1: Granularidad en distintos niveles de una jerarquía.

Un ejemplo gráfico de una jerarquía lingüística compuesta de 3 niveles de 3, 5 y 9 etiquetas cada uno de ellos, puede observarse en la Figura 2.11.

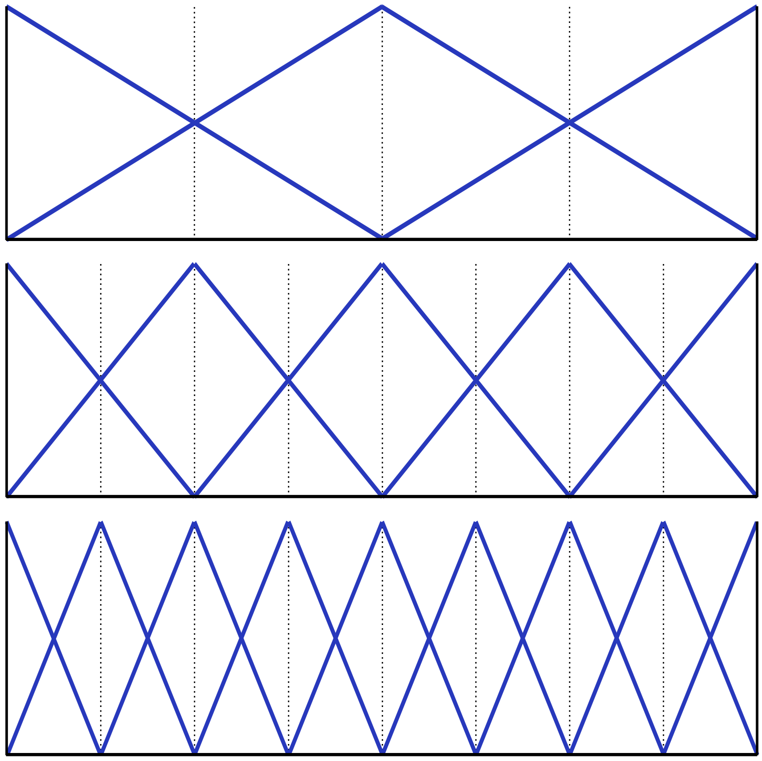

Figura 2.11: Jerarquía lingüística de 3 niveles de 3, 5 y 9 etiquetas.

En [116] se demostró que las jerarquías lingüísticas son útiles para representar información lingüística multi-granular y, por tanto, permiten trabajar con información lingüística sin pérdida de información. Para conseguirlo, fue definida una familia de funciones de transformación entre etiquetas de diferentes niveles.

Definición 2.19. Sea $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$ una jerarquía lingüística cuyos conjuntos de términos lingüísticos son denotados como $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \dots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$. La función de transformación de una etiqueta lingüística (representada mediante una 2-tupla) de un nivel t a una etiqueta de un nivel consecutivo $t+c$, con $c \in \{-1, 1\}$, se define como:

$$TF_{t+c}^{t} \colon l(t, n(t)) \longrightarrow l(t+c, n(t+c)).$$

$$TF_{t+c}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = \Delta_{t+c}\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) \cdot (n(t+c)-1)}{n(t)-1}\right).$$

Esta función de transformación fue generalizada para transformar términos lingüísticos entre cualquier nivel dentro de la jerarquía lingüística.

Definición 2.20. Sea $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$ una jerarquía lingüística cuyos conjuntos de términos lingüísticos son denotados como $S^{n(t)} = \{s_0^{n(t)}, \dots, s_{n(t)-1}^{n(t)}\}$. La función de transformación recursiva entre una etiqueta lingüística (representada mediante una 2-tupla) perteneciente a un nivel t y una etiqueta perteneciente al nivel $t^{'} = t + a$, con $a \in \mathbb{Z}$, se define como:

$$TF_{t'}^{t} \colon l(t, n(t)) \longrightarrow l(t', n(t')).$$

Si $|a| > 1$ entonces

$$TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t'}^{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}(TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)})).$$

Si $|a| = 1$ entonces

$$TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}) = TF_{t+\frac{t-t'}{|t-t'|}}^{t}(s_i^{n(t)}, \alpha^{n(t)}).$$

Esta función de transformación recursiva puede ser definida fácilmente de una forma no recursiva de la siguiente manera:

$$TF_{t'}^{t}\colon l(t,n(t)) \longrightarrow l(t',n(t')).$$

$$TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)}) = \Delta_{t'}\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})\cdot(n(t')-1)}{n(t)-1}\right).$$

Proposición 2.2. *[116] Esta familia de funciones de transformación entre etiquetas lingüísticas de distintos niveles de una jerarquía lingüística es biyectiva:*

$$TF_{t}^{t'}(TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})) = (s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)}).$$

Demostración:

$$TF_{t}^{t'}(TF_{t'}^{t}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})) = TF_{t}^{t'}\left(\Delta_{t'}\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})\cdot(n(t')-1)}{n(t)-1}\right)\right) =$$
$$= \Delta_t\left(\frac{\Delta_{t'}^{-1}\left(\Delta_{t'}\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})\cdot(n(t')-1)}{n(t)-1}\right)\cdot(n(t)-1)\right)}{n(t')-1}\right) =$$
$$= \Delta_t\left(\frac{\Delta_t^{-1}(s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)})\cdot(n(t')-1)\cdot(n(t)-1)}{(n(t)-1)\cdot(n(t')-1)}\right) =$$
$$= (s_i^{n(t)},\alpha^{n(t)}).$$

Este resultado garantiza que la transformación entre niveles de una jerarquía lingüística se realizan sin pérdida de información.

2.8.1. Modelo de Representación en el Modelado Lingüístico Difuso No Balanceado

Para manejar información lingüística difusa no balanceada, debemos representar la información en otro dominio de expresión. Para representar el conjunto de términos lingüísticos no balanceado $\mathcal{S}_{un}$ por medio de una jerarquía lingüística LH, usamos diferentes niveles de la jerarquía LH para representar ambos lados del término lingüístico medio. Así, el lado con más términos lingüísticos necesita un nivel de granularidad mayor, $l(i, n(i))$ de LH, y el lado con menor número de términos lingüísticos necesita un nivel de granularidad menor, $l(j, n(j))$ de LH, siendo $i > j$. En concreto, se necesita un procedimiento formado por dos pasos [106, 125]:

1. Encontrar un nivel t^- de la jerarquía lingüística LH para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}_{un}^L$ a la izquierda del término lingüístico medio del conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado.
2. Encontrar un nivel t^+ de la jerarquía lingüística LH para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}_{un}^R$ a la derecha del término lingüístico medio del conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado.
3. Representar el término medio de $\mathcal{S}_{un}$ utilizando los términos medios de los niveles t^- y t^+.

$$\mathcal{S}_{un} = \{N, B, M, A, BA, MA, T\}$$

$$\begin{array}{ll} N = Nulo & B = Bajo \\ M = Medio & A = Alto \\ BA = Bastante\ Alto & MA = Muy\ Alto \\ T = Total & \end{array}$$

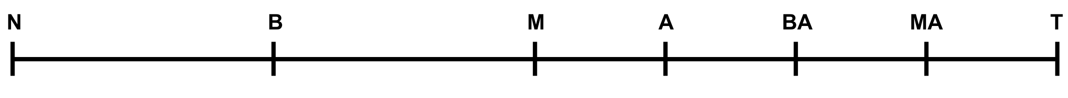

Figura 2.12: Conjunto de términos lingüísticos no balanceado de 7 etiquetas.

Por ejemplo, asumiendo el conjunto de términos lingüísticos no balanceados $\mathcal{S}_{un} = \{N, B, M, A, BA, MA, T\}$ mostrado en la Figura 2.12 y la jerarquía lingüística LH

mostrada en la Figura 2.11, en la Figura 2.13 podemos ver una jerarquía lingüística en la que se usan diferentes niveles de la jerarquía lingüística para representar los términos de ambos lados del término central. Por lo tanto, para representar los términos $\{N, B\}$ se usa el nivel $l(2, 5)$, ($t^- = l(2, 5)$), mientras que para representar $\{A, BA, MA, T\}$ se usa el nivel $l(3, 9)$, ($t^+ = l(3, 9)$). Finalmente, se utilizan ambos niveles de la jerarquía, $l(2, 3)$ y $l(3, 9)$, para representar el término medio M.

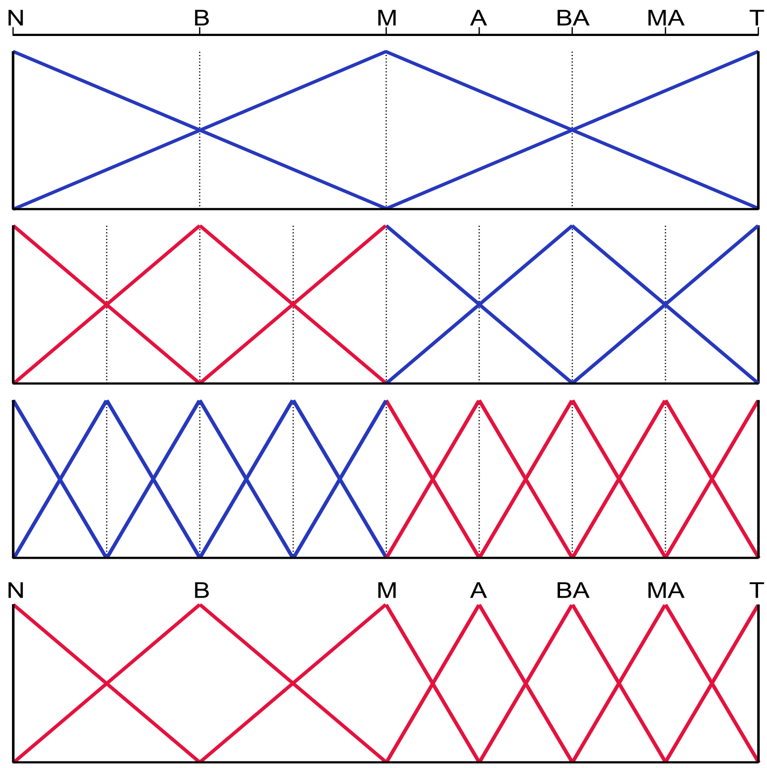

Figura 2.13: Representación de un conjunto de términos lingüísticos no balanceado de 7 etiquetas utilizando una jerarquía lingüística.

2.8.2. Modelo Computacional en el Modelado Lingüístico Difuso No Balanceado

Para manejar la información lingüística difusa no balanceada se necesitan herramientas de computación. Pero antes de llevar a cabo cualquier tarea computacional con información lingüística difusa no balanceada, necesitamos elegir un nivel $t' \in \{t^-, t^+\}$, tal que $n(t') = max\{n(t^-), n(t^+)\}$ [106, 125]. Además, como en el modelo lingüístico computacional difuso 2-tupla, se debe definir un operador de comparación, un operador de negación y un operador de agregación de información lingüística difusa no balanceada:

1. *Operador de comparación de información lingüística no balanceada:* La comparación de información lingüística no balanceada representada por 2-tuplas, $(s_k^{n(t)}, \alpha_1)$, $t \in \{t^-, t^+\}$, y $(s_l^{n(t)}, \alpha_2)$, $t \in \{t^-, t^+\}$, es similar a la comparación de dos 2-tuplas, pero actuando sobre los valores $TF_{t'}^t(s_k^{n(t)}, \alpha_1) = (s_v^{n(t')}, \beta_1)$ y $TF_{t'}^t(s_l^{n(t)}, \alpha_2) = (s_w^{n(t')}, \beta_2)$. Entonces tenemos:
   - si $v < w$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es más pequeño que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
   - si $v = w$, entonces
     a) si $\beta_1 = \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ y $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$ representan la misma información.
     b) si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es más pequeño que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
     c) si $\beta_1 > \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es mayor que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
2. *Operador de negación de información lingüística no balanceada:* Sea $(s_k^{n(t)}, \alpha)$, $t \in \{t^-, t^+\}$, una 2-tupla lingüística no balanceada, entonces:
$$\mathcal{NEG}(s_k^{n(t)}, \alpha) = Neg(TF_{t''}^t(s_k^{n(t)}, \alpha)),$$
   donde $t \neq t''$, $t'' \in \{t^-, t^+\}$.

3. *Operador de agregación de información lingüística no balanceada:* Como mencionamos, para trabajar con información lingüística difusa no balanceada, tenemos que representarla en una jerarquía lingüística LH. Por lo tanto, cualquier operador de agregación de información lingüística no balanceada debe agregar información lingüística difusa no balanceada por medio de su representación en una jerarquía lingüística LH. Para ello, usamos los procesos de agregación diseñados en el modelo computacional 2-tupla, pero actuando sobre valores lingüísticos no balanceados transformados por medio de $TF_{t'}^{t}$. Una vez que se obtiene el resultado, se transforma al nivel correspondiente $t \in \{t^-, t^+\}$ mediante $TF_t^{t'}$ para expresar el resultado en el conjunto de términos lingüísticos no balanceado $\mathcal{S}_{un}$. De esta forma, el operador $LOWA_{un}$, que es una extensión del operador LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) [110], se define de la siguiente manera:

Definición 2.21. Sea $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de valoraciones no balanceadas a agregar, el operador $LOWA_{un}$, ϕ_{un}, se define como:

$$\phi_{un}\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\} = W \cdot B^T = C_{un}^m\{w_k, b_k,\ k = 1, \ldots, m\} =$$

$$= w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C_{un}^{m-1}\{\beta_h, b_h,\ h = 2, \ldots, m\},$$

donde $b_i = (a_i, \alpha_i) \in (S \times [-0.5, 0.5))$, $W = [w_1, \ldots, w_m]$, es un vector de pesos tal que $w_i \in [0, 1]$ y $\sum_i w_i = 1$, $\beta_h = \frac{w_h}{\sum_2^m w_k}$, $h = 2, \ldots, m$, y B es el vector ordenado 2-tupla no balanceado asociado. Cada elemento $b_i \in B$ es el i-ésimo mayor elemento 2-tupla no balanceado en la colección $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\}$, y C_{un}^m es el operador de combinación convexo de m 2-tuplas no balanceadas. Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j$ $\forall i, j$ la combinación convexa se define como: $C_{un}^m\{w_i, b_i,\ i = 1, \ldots, m\} = b_j$. Y si $m = 2$, entonces se define como:

$$C_{un}^2\{w_l, b_l,\ l = 1, 2\} = w_1 \otimes b_j \oplus (1 - w_1) \otimes b_i = TF_t^{t'}(s_k^{n(t')}, \alpha),$$

donde $(s_k^{n(t')}, \alpha) = \Delta(\lambda)$ y $\lambda = \Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_i)) + w_1 \cdot (\Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_j)) - \Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_i)))$, $b_j, b_i \in (S \times [-0.5, 0.5)),\ (b_j \geq b_i),\ \lambda \in [0, n(t') - 1],\ t \in \{t^-, t^+\}$.

Para calcular el vector de pesos W del operador $LOWA_{un}$, ϕ_{un}, usamos un cuantificador lingüístico difuso Q para implementar el concepto de mayoría y la *ecuación 1.3*.

Capítulo 3

Un Proceso de Selección para TDG con Relaciones de Preferencia Lingüísticas Difusas Incompletas

En las situaciones de Toma de Decisión en Grupo presentes en la vida real, el problema de la falta de información es bastante común, es decir, los expertos no proporcionan toda la información que se les solicita. Por tanto, el estudio de procesos que permitan manejar esta clase de situaciones es muy importante para resolver eficientemente un problema de Toma de Decisión en Grupo.

La falta de información en las preferencias proporcionadas por un experto pueden deberse a que el experto no posea un nivel de conocimiento preciso o suficiente del problema, a que no pueda discriminar el grado con el cual algunas alternativas son mejores que otras o a que prefiera no dar todas las preferencias por las que se le pregunta para evitar introducir inconsistencias (ver Sección 1.8). En tales situaciones, los expertos proporcionan *relaciones de preferencia incompletas* [82, 121, 122, 149, 150, 151, 158, 206, 214, 216]. Por tanto, es de gran importancia proporcionar a los expertos herramientas que les permitan trabajar con la falta de conocimiento en sus opiniones.

Además, como comentamos al principio de la memoria, otro aspecto importante a tener en cuenta es el de la consistencia en las opiniones de los expertos (ver Sección 1.5).

De esta forma, para mantener los niveles de consistencia de los expertos, muchos autores han propuesto procedimientos de estimación de preferencias basados en criterios de consistencia [122, 206, 210, 212, 213]. Así, para las relaciones de preferencia difusas, se han propuesto procedimientos para estimar valores perdidos en [122, 206] basados en la *propiedad de consistencia aditiva de Tanino* [196]. Para relaciones de preferencia lingüísticas difusas ordinales, se han propuesto procedimientos para estimar valores perdidos en [212, 213] basados en la *propiedad de consistencia de Saaty* [184], la cual se define para relaciones de preferencia multiplicativas y, por lo tanto, no es aplicable a relaciones de preferencia lingüísticas difusas. Sin embargo, es bien conocido que la traslación difusa de la propiedad de consistencia de Saaty coincide con la propiedad de consistencia aditiva de Tanino [122, 124]. Por lo tanto, sería deseable diseñar un procedimiento de estimación para relaciones de preferencia lingüísticas difusas basado en la propiedad de consistencia aditiva. En [210] se propuso una primera aproximación para el caso de relaciones de preferencia lingüísticas difusas ordinales basado en la propiedad de consistencia aditiva. Sin embargo, falla en el uso de todas las posibilidades de estimación que pueden derivarse de la propiedad de consistencia aditiva.

En este capítulo presentamos un proceso de selección de alternativas para problemas de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas siguiendo el esquema de elección propuesto en [90], esto es, *agregación* seguida de *explotación* (Figura 3.1).

Además, proponemos un procedimiento de estimación de valores perdidos para relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas basado en la extensión lingüística del principio de consistencia de Tanino y que hace uso de todas las posibilidades de estimación que se derivan de él. Este procedimiento intenta estimar la información perdida en una relación de preferencia lingüística difusa incompleta individual usando sólo los valores de preferencia proporcionados por ese experto. Para ello, asumimos relaciones de

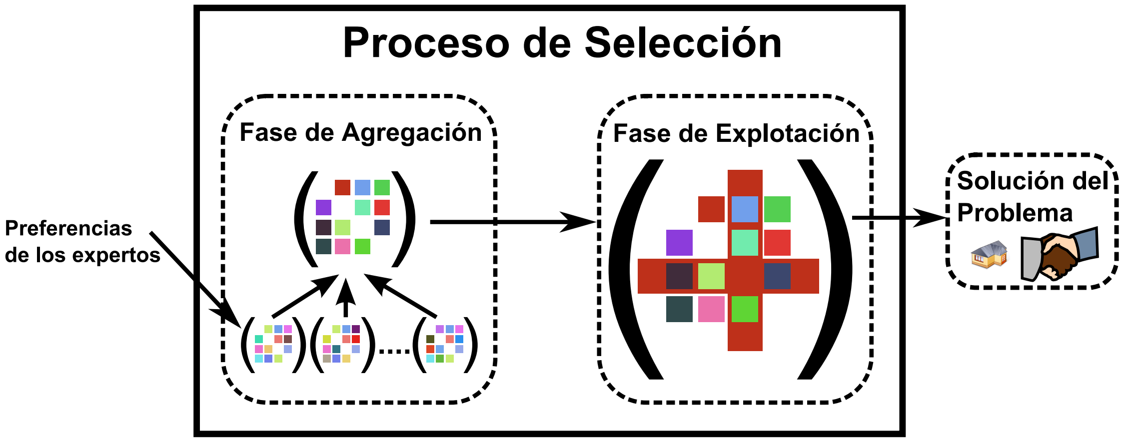

Figura 3.1: Esquema de elección de un proceso de selección.

preferencia lingüísticas difusas valoradas usando el modelado lingüístico difuso 2-tupla, debido a las ventajas que proporciona con respecto al modelado lingüístico difuso ordinal [115]. Este procedimiento de estimación será usado por el proceso de selección para completar las relaciones de preferencia lingüísticas difusas. Además, analizamos el uso del procedimiento de estimación en el proceso de selección y la ventaja del mismo frente a los procesos de selección clásicos.

De esta forma, este capítulo se estructura de la siguiente manera. En primer lugar, presentamos las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas como un formato de representación de preferencias que permite la expresión de preferencias incompletas en la Sección 3.1. A continuación, definimos la consistencia lingüística aditiva para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla en la Sección 3.2. El procedimiento de estimación de valores perdidos para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas junto con las condiciones suficientes que garantizan la estimación de todos los valores perdidos y un ejemplo de su aplicación se muestra en la Sección 3.3. El proceso de selección de alternativas para problemas de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas se presenta en la Sección 3.4 junto con un ejemplo de su aplicación. Finalmente, analizamos el uso del procedimiento de estimación de valores perdidos en el proceso de selección y la ventaja del mismo frente a los procesos de selección clásicos en la Sección 3.5.

3.1. Relaciones de Preferencia Lingüísticas Difusas Incompletas

Como estudiamos en la Sección 2.6, un término lingüístico puede verse como una 2-tupla lingüística añadiéndole el valor 0 como traslación simbólica, $s_i \in S \equiv (s_i, 0)$, y, por lo tanto, este modelo lingüístico puede usarse para representar relaciones de preferencia lingüísticas.

Definición 3.1. Una relación de preferencia lingüística 2-tupla P sobre un conjunto de alternativas X es un conjunto de 2-tuplas sobre el conjunto producto $X \times X$, esto es, está caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_P : X \times X \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5).$$

Cuando la cardinalidad de X es pequeña, la relación de preferencia puede representarse mediante una matriz $n \times n$, $P = (p^{lk})$, siendo $p^{lk} = \mu_P(x_l, x_k)$ $\forall l, k \in \{1, \ldots, n\}$ y $p^{lk} \in S \times [-0.5, 0.5)$.

Como hemos mencionado, la información incompleta es un problema que necesita ser abordado ya que no siempre es posible para los expertos proporcionar todas las posibles valoraciones de preferencia sobre el conjunto de alternativas. Un valor perdido en una relación de preferencia lingüística no es equivalente a la falta de preferencia de una alternativa sobre otra, sino que puede ser, por ejemplo, el resultado de la incapacidad de un experto para cuantificar el grado de preferencia entre ese par de alternativas.

Por tanto, debe quedar claro que cuando un experto no puede expresar el valor p^{lk}, ya que no tiene una idea clara de cómo una alternativa x_l es mejor que otra x_k, esto no significa que prefiera ambas alternativas con la misma intensidad.

Para modelar esta situación, en las siguientes definiciones expresamos el concepto de relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta.

Definición 3.2. Una función $f : X \times Y$ es *parcial* cuando no necesariamente cada elemento en el conjunto X se asocia con un elemento en el conjunto Y. Cuando cada elemento del conjunto X se asocia con un elemento del conjunto Y, tenemos una función *total*.

Definición 3.3. Una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla P sobre un conjunto de alternativas X con una función de pertenencia *parcial* es una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta.

Obviamente, una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla es completa cuando su función de pertenencia es total. Claramente, la *definición 3.1* incluye tanto la definición de relación de preferencia lingüística 2-tupla completa como la definición de relación de preferencia lingüística 2-tupla incompleta. Sin embargo, como no hay riesgo de confusión entre ambas, nosotros nos referiremos al primer tipo como relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla simplemente.

3.2. Consistencia Lingüística Aditiva

La anterior definición de una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla no implica ninguna clase de propiedad de consistencia. En realidad, los valores de preferencia de una relación de preferencia pueden ser contradictorios. Obviamente, una fuente inconsistente de información no suele considerarse tan útil como una consistente y, por lo tanto, es bastante importante poder medir la consistencia de la información proporcionada por los expertos para un problema particular.

Como hemos mostrado en la Sección 1.5, la consistencia es caracterizada usualmente por la *transitividad*, la cual parece un criterio razonable de coherencia para preferencias individuales: si x se prefiere a y e y se prefiere a z, el sentido común sugiere que x debería preferirse a z. Además, como mostramos en la Sección 1.5.2, la transitividad aditiva para relaciones de preferencia difusas puede verse como un concepto paralelo de la propiedad de consistencia de Saaty para las relaciones de preferencia multiplicativas [185]. La formulación matemática de la transitividad aditiva fue propuesta por Tanino en [196]:

$$(p^{lj} - 0.5) + (p^{jk} - 0.5) = (p^{lk} - 0.5)\ \forall l, j, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

De esta manera, usando las funciones de transformación Δ y Δ^{-1} presentadas en la Sección 2.6, se puede definir la propiedad de transitividad aditiva lingüística para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla como:

$$\begin{aligned} &\Delta[(\Delta^{-1}(p^{lj}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)) + (\Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0))] = \\ &= \Delta[(\Delta^{-1}(p^{lk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)]\ \forall l, j, k \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como en el caso de la aditividad transitiva, la aditividad transitiva lingüística implica reciprocidad aditiva lingüística. Así, como $p^{ll} = (s_{g/2}, 0)\ \forall l$, si hacemos $k = l$ en la *ecuación 3.1*, entonces tenemos:

$$\Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(p^{jl})) = (s_g, 0)\ \forall l, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

La *ecuación 3.1* puede reescribirse como:

$$p^{lk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0))\ \forall l, j, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.2}$$

Una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla se considerará *consistente aditiva* cuando para cada tres opciones en el problema, $x_l, x_j, x_k \in X$, sus grados de preferencia lingüísticos asociados, p^{lj}, p^{jk}, p^{lk}, cumplan totalmente la *ecuación 3.2*. Una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla consistente aditiva será nombrada como consistente a través de esta memoria, ya que es la única propiedad de transitividad que consideraremos.

3.3. Estimación de Valores Perdidos para Relaciones de Preferencia Lingüísticas Difusas Incompletas

En esta sección, presentamos un procedimiento basado en consistencia para estimar valores perdidos en las relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas. Así, en primer lugar, mostramos las distintas formas de estimación de valores lingüísticos perdidos basadas en la consistencia lingüística aditiva, las cuales serán usadas por el procedimiento de estimación que será presentado posteriormente y que consta de dos pasos: 1) estimación de los elementos que pueden estimarse en cada iteración del procedimiento, y 2) obtención de la expresión particular que será usada para estimar un valor perdido dado.

3.3.1. Estimación de Valores Lingüísticos Perdidos Basada en la Consistencia Lingüística Aditiva

La *ecuación 3.2* puede usarse para obtener un valor estimado de un grado de preferencia usando otros grados de preferencia en una relación de preferencia lingüística difusa. En [210] se usa una expresión equivalente para estimar valores perdidos en relaciones de preferencia lingüísticas ordinales. Sin embargo, de la *ecuación 3.1* se pueden derivar otras dos posibles formas para estimar valores perdidos. Por tanto, un valor de preferencia lingüístico p^{lk} $(l \neq k)$ puede estimarse usando una alternativa intermedia x_j de tres formas diferentes:

1. De $p^{lk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0))$ podemos obtener el valor estimado

$$(cp^{lk})^{j1} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)). \tag{3.3}$$

2. De $p^{jk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jl}) + \Delta^{-1}(p^{lk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0))$ podemos obtener el valor estimado

$$(cp^{lk})^{j2} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(p^{jl}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)). \tag{3.4}$$

3. De $p^{lj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lk}) + \Delta^{-1}(p^{kj}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0))$ podemos obtener el valor estimado

$$(cp^{lk})^{j3} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) - \Delta^{-1}(p^{kj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)). \tag{3.5}$$

3.3.2. Procedimiento de Estimación de Valores Lingüísticos Perdidos en una Relación de Preferencia Lingüística Difusa

Los procedimientos de estimación de información incompleta para problemas de Toma de Decisión en Grupo corrigen usualmente la falta de información de un experto particular usando la información proporcionada por el resto de los expertos junto con procedimientos de agregación [151]. Sin embargo, esta aproximación tiene varias desventajas. Entre ellas, podemos citar la necesidad de tener varios expertos para estimar el valor perdido de un experto concreto. Otra desventaja es que estos procedimientos normalmente no tienen en cuenta las diferencias entre las preferencias de los expertos, las cuales podrían guiar a la estimación de un valor perdido que podría no ser compatible con el resto de los valores de preferencia proporcionados por el experto. Finalmente, algunos de estos procedimientos de estimación de información perdida son interactivos, es decir, necesitan que los expertos colaboren en tiempo real, lo cual no es siempre posible.

Nuestro procedimiento es bastante diferente de las anteriores aproximaciones. Nosotros proponemos un procedimiento que intenta estimar la información perdida en la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta de un experto usando sólo el resto de los valores de preferencia proporcionados por ese experto concreto. De esta forma, nos aseguramos que la reconstrucción de la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta es compatible con el resto de la información proporcionada por el experto. Pero antes de presentar nuestro procedimiento de estimación de valores perdidos para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tuplas incompletas, necesitamos introducir los siguientes conjuntos para manejar relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas [122]:

$$\begin{aligned}
&A = \{(l,k) \mid l,k \in \{1,\ldots,n\} \ \wedge \ l \neq k\} \\
&MV = \{(l,k) \in A \mid p^{lk} \ \textit{es desconocido}\} \\
&EV = A \setminus MV
\end{aligned}$$

donde MV es el conjunto de pares de alternativas cuyos grados de preferencia son desconocidos o perdidos y EV es el conjunto de pares de alternativas cuyos grados de preferencia han sido proporcionados por el experto. Nosotros no tenemos en cuenta el valor de preferencia de una alternativa sobre sí misma, ya que se asume que es igual a $(s_{g/2}, 0)$.

Las *ecuaciones 3.3, 3.4* y *3.5* se usan para definir un procedimiento de estimación iterativo de valores perdidos en una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta de acuerdo a los siguientes dos pasos:

1. Identificación de los elementos que pueden estimarse en cada iteración del procedimiento, y

2. obtención de la expresión particular que será usada para estimar un valor perdido dado.

3.3.2.1. Elementos que Pueden Estimarse en Cada Iteración del Procedimiento

El subconjunto de valores perdidos MV que pueden estimarse en el paso h de nuestro procedimiento se denota por EMV_h y se define como:

$$EMV_h = \left\{ (l,k) \in MV \setminus \bigcup_{i=0}^{h-1} EMV_i \mid l \neq k \wedge \exists j \in \{H_1^{lk} \cup H_2^{lk} \cup H_3^{lk}\} \right\},$$

con

$$H_1^{lk} = \left\{ j \mid (l,j),(j,k) \in \left\{ EV \bigcup_{i=0}^{h-1} EMV_i \right\} \right\},$$

$$H_2^{lk} = \left\{ j \mid (j,l),(j,k) \in \left\{ EV \bigcup_{i=0}^{h-1} EMV_i \right\} \right\},$$

$$H_3^{lk} = \left\{ j \mid (l,j),(k,j) \in \left\{ EV \bigcup_{i=0}^{h-1} EMV_i \right\} \right\},$$

donde H_1^{lk}, H_2^{lk} y H_3^{lk} son los conjuntos de la alternativa intermedia x_j $(j \neq l,k)$ que pueden usarse para estimar el valor de preferencia p^{lk} en el paso h usando las *ecuaciones 3.3, 3.4* y *3.5* respectivamente, y $EMV_0 = \emptyset$ (por definición). Cuando $EMV_{maxIter} = \emptyset$, con $maxIter > 0$, el procedimiento parará, ya que no habrá más valores perdidos que estimar. Además, si $\bigcup_{i=0}^{maxIter} EMV_i = MV$, entonces todos los valores perdidos son estimados y, consecuentemente, se dice que el procedimiento ha tenido éxito en la completitud de la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta.

3.3.2.2. Expresión para Estimar un Valor Perdido Particular

En la iteración h, para estimar un valor particular p^{lk} con $(l,k) \in EMV_h$, se propone la aplicación de la siguiente función:

función estimación_p(l,k)

1) $(cp^{lk})^1 = (s_0, 0),\ (cp^{lk})^2 = (s_0, 0),\ (cp^{lk})^3 = (s_0, 0),\ \mathcal{K} = 0.$

2) $(cp^{lk})^1 = \Delta\left(\dfrac{\sum_{j \in H_1^{lk}} \Delta^{-1}(cp^{lk})^{j1}}{\# H_1^{lk}}\right),\ \mathcal{K}++\ si\ H_1^{lk} \neq 0.$

3) $(cp^{lk})^2 = \Delta\left(\dfrac{\sum_{j \in H_2^{lk}} \Delta^{-1}(cp^{lk})^{j2}}{\# H_2^{lk}}\right),\ \mathcal{K}++\ si\ H_2^{lk} \neq 0.$

4) $(cp^{lk})^3 = \Delta\left(\dfrac{\sum_{j \in H_3^{lk}} \Delta^{-1}(cp^{lk})^{j3}}{\# H_3^{lk}}\right),\ \mathcal{K}++\ si\ H_3^{lk} \neq 0.$

5) Calcular $cp^{lk} = \Delta\left(\dfrac{1}{\mathcal{K}}\left(\Delta^{-1}((cp^{lk})^1) + \Delta^{-1}((cp^{lk})^2) + \Delta^{-1}((cp^{lk})^3)\right)\right).$

fin función

La función *estimación_p*(l,k) calcula el valor estimado final cp^{lk} de un valor perdido como la media de todos los valores estimados que pueden calcularse usando todas las posibles alternativas intermedias x_j y las *ecuaciones 3.3, 3.4* y *3.5*.

Resumiendo, el *pseudo-código del procedimiento de estimación* de valores perdidos para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas es:

PROCEDIMIENTO DE ESTIMACIÓN ITERATIVO

0. $EMV_0 = \emptyset$
1. $h = 1$
2. mientras $EMV_h \neq \emptyset$ {
3. para cada $(l, k) \in EMV_h$ {
4. estimación_p(l,k)
5. }
6. $h++$
7. }

3.3.3. Condición Suficiente para Estimar Todos los Valores Perdidos

Es muy importante establecer condiciones que garanticen que los valores perdidos de una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta pueden estimarse. De esta forma, presentamos una condición suficiente que garantiza el éxito del anterior procedimiento de estimación para relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta puede completarse si un conjunto de $n-1$ valores de preferencia que no pertenecen a la diagonal principal, donde cada una de las alternativas es comparada al menos una vez, es conocido.*

Demostración: Demostración por inducción sobre el número de alternativas que serán usadas:

1. Base: Para $n = 3$, suponemos que dos grados de preferencia lingüísticos que involucran tres alternativas son conocidos. Estos grados pueden ser proporcionados de tres formas diferentes :

   a) p^{lj} y p^{jk} $(l \neq j \neq k)$ son dados.

   En este primer caso, todas las posibles combinaciones de los dos valores de preferencia lingüísticos 2-tupla son: $\{p^{12}, p^{23}\}$, $\{p^{13}, p^{32}\}$, $\{p^{21}, p^{13}\}$, $\{p^{23}, p^{31}\}$, $\{p^{31}, p^{12}\}$ y $\{p^{32}, p^{21}\}$. En cualquiera de estos casos, podemos encontrar el resto de los grados de preferencia lingüísticos 2-tupla de la relación $\{p^{lk}, p^{kj}, p^{jl}, p^{kl}\}$ como:

   $$p^{lk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{kj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lk}) - \Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{jl} = \Delta(\Delta^{-1}(p_{jk}) - \Delta^{-1}(p^{lk}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{kl} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{kj}) - \Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$

   b) p^{jl} y p^{jk} $(l \neq j \neq k)$ son dados.

   En este segundo caso, todas las posibles combinaciones de los dos valores de preferencia lingüísticos 2-tupla son: $\{p^{21}, p^{23}\}$, $\{p^{31}, p^{32}\}$ y $\{p^{12}, p^{13}\}$. En cualquiera de estos casos, podemos encontrar el resto de los grados de preferencia lingüísticos 2-tupla de la relación $\{p^{lk}, p^{kl}, p^{kj}, p^{lj}\}$ como:

   $$p^{lk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jk}) - \Delta^{-1}(p^{jl}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{kl} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jl}) - \Delta^{-1}(p^{jk}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{kj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{kl}) - \Delta^{-1}(p^{jl}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
   $$p^{lj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{kj}) - \Delta^{-1}(p^{kl}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$

   c) p^{lj} y p^{kj} $(l \neq j \neq k)$ son dados.

   En este tercer caso, todas las posibles combinaciones de los dos valores de preferencia lingüísticos 2-tupla son: $\{p^{12}, p^{32}\}$, $\{p^{13}, p^{23}\}$ y $\{p^{21}, p^{31}\}$. En cualquiera de estos casos, podemos encontrar el resto de los grados de preferencia lingüísticos 2-tupla de la relación $\{p^{lk}, p^{kl}, p^{jl}, p^{jk}\}$ como:

$$p^{lk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) - \Delta^{-1}(p^{kj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
$$p^{kl} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{kj}) - \Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
$$p^{jl} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{kl}) - \Delta^{-1}(p^{kj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$
$$p^{jk} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lk}) - \Delta^{-1}(p^{lj}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)).$$

2. Hipótesis de Inducción: Asumamos que la proposición es cierta para $n = q - 1$.

3. Paso de Inducción: Supongamos que el experto proporciona sólo $(q-1)$ grados de preferencia lingüísticos 2-tupla, donde cada una de las q alternativas se compara al menos una vez.

   En este caso, podemos seleccionar un conjunto de $(q-2)$ grados de preferencia lingüísticos 2-tupla donde $(q-1)$ alternativas diferentes están involucradas. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que estas $(q-1)$ alternativas son $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}$, y, por lo tanto, el resto de los grados de preferencia lingüísticos 2-tupla que involucran la alternativa x_q podrían ser p^{ql} $(l \in \{1, \ldots, q-1\})$ o p^{lq} $(l \in \{1, \ldots, q-1\})$.

   Por la hipótesis de inducción, podemos estimar todos los valores de preferencia lingüísticos 2-tupla de la relación de preferencia lingüística 2-tupla de orden $(q-1) \times (q-1)$ asociado con el conjunto de alternativas $\{x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}\}$. Por lo tanto, hemos estimado por el siguiente conjunto de grados de preferencia lingüísticos 2-tupla

$$\{p^{lj},\ l, j = 1, \ldots, q-1,\ l \neq j\}.$$

   Si el valor lingüístico 2-tupla que conocemos es $p^{ql},\ l \in \{1, \ldots, q-1\}$ entonces, podemos estimar $\{p^{qj},\ j = 1, \ldots, q-1,\ l \neq j\}$ y $\{p^{jq},\ j = 1, \ldots, q-1\}$ usando $p^{qj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{ql}) + \Delta^{-1}(p^{lj}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)),\ \forall j$, y $p^{jq} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jl}) - \Delta^{-1}(p^{ql}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)),\ \forall j$, respectivamente.

Si el valor lingüístico 2-tupla que conocemos es p^{lq}, $l \in \{1, \ldots, q-1\}$, entonces, $\{p^{qj},\ j = 1, \ldots, q-1\}$ y $\{p^{jq},\ j = 1, \ldots, q-1,\ l \neq j\}$, son estimados por medio de $p^{qj} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{lj}) - \Delta^{-1}(p^{lq}) + \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)),\ \forall j$, y $p^{jq} = \Delta(\Delta^{-1}(p^{jl}) + \Delta^{-1}(p^{lq}) - \Delta^{-1}(s_{g/2}, 0)),\ \forall j$, respectivamente.

3.3.4. Ejemplo de Aplicación del Procedimiento de Estimación de Valores Perdidos

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un conjunto de cuatro alternativas y $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ un conjunto de tres expertos que proporcionan sus preferencias sobre el anterior conjunto de alternativas usando el conjunto de términos lingüísticos $S = \{N, MP, P, I, M, MM, T\}$:

$$
\begin{array}{lcllcl}
N & = & Nulo & MP & = & Mucho\ Peor \\
P & = & Peor & I & = & Igual \\
M & = & Mejor & MM & = & Mucho\ Mejor \\
T & = & Total & & &
\end{array}
$$

Supongamos que el experto e_2 proporciona la siguiente relación de preferencia lingüística difusa incompleta:

$$
P_2 = \begin{pmatrix}
- & x & P & x \\
x & - & x & MP \\
MM & x & - & I \\
x & M & I & -
\end{pmatrix}
$$

Notemos que el experto e_2 no proporciona ningún valor α, lo cual es una práctica común cuando se expresan preferencias con términos lingüísticos. En estos casos, establecemos $\alpha = 0$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & x & (P,0) & x \\ x & - & x & (MP,0) \\ (MM,0) & x & - & (I,0) \\ x & (M,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

El procedimiento de estimación se aplica de la siguiente forma:

Iteración 1: El conjunto de elementos que pueden estimarse es:

$$EMV_1 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

- Para estimar p_2^{14}, el procedimiento es el siguiente:

  $H_1^{14} = \{3\} \Rightarrow (cp_2^{14})^1 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{14})^{31}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{13}) + \Delta^{-1}(p_2^{34}) - g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(2+3-3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(2))) = (P,0)$.

  $H_2^{14} = \{3\} \Rightarrow (cp_2^{14})^2 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{14})^{32}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{34}) - \Delta^{-1}(p_2^{31}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3-5+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(1))) = (MP,0)$.

  $H_3^{14} = \{3\} \Rightarrow (cp_2^{14})^3 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{14})^{33}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{13}) - \Delta^{-1}(p_2^{43}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(2-3+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(2))) = (P,0)$.

  $\mathcal{K} = 3 \ \Rightarrow cp_2^{14} = \Delta\left(\dfrac{\Delta^{-1}(cp_2^{14})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{14})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{14})^3}{3}\right) = \Delta\left(\dfrac{2+1+2}{3}\right) =$

  $= (P,-0.33)$.

- Para estimar p_2^{23}, el procedimiento es el siguiente:

  $H_1^{23} = \{4\} \Rightarrow (cp_2^{23})^1 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{23})^{41}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{24}) + \Delta^{-1}(p_2^{43}) - g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(1+3-3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(1))) = (MP,0)$.

  $H_2^{23} = \{4\} \Rightarrow (cp_2^{23})^2 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{23})^{42}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{43}) - \Delta^{-1}(p_2^{42}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3-4+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(2))) = (P,0)$.

  $H_3^{23} = \{4\} \Rightarrow (cp_2^{23})^3 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{23})^{43}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{24}) - \Delta^{-1}(p_2^{34}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(1-3+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(1))) = (MP,0)$.

$\mathcal{K} = 3 \ \Rightarrow cp_2^{23} = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(cp_2^{23})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{23})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{23})^3}{3}\right) = \Delta\left(\frac{1+2+1}{3}\right) =$

$= (MP, 0.33)$.

- Para estimar p_2^{32}, el procedimiento es el siguiente:

  $H_1^{32} = \{4\} \ \Rightarrow (cp_2^{32})^1 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{32})^{41}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{34}) + \Delta^{-1}(p_2^{42}) - g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3+4-3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(4))) = (M, 0)$.

  $H_2^{32} = \{4\} \ \Rightarrow (cp_2^{32})^2 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{32})^{42}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{42}) - \Delta^{-1}(p_2^{43}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(4-3+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(4))) = (M, 0)$.

  $H_3^{32} = \{4\} \ \Rightarrow (cp_2^{32})^3 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{32})^{43}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{34}) - \Delta^{-1}(p_2^{24}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3-1+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(5))) = (MM, 0)$.

  $\mathcal{K} = 3 \ \Rightarrow cp_2^{32} = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(cp_2^{32})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{32})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{32})^3}{3}\right) = \Delta\left(\frac{4+4+5}{3}\right) =$

  $= (M, 0.33)$.

- Para estimar p_2^{41}, el procedimiento es el siguiente:

  $H_1^{41} = \{3\} \ \Rightarrow (cp_2^{41})^1 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{41})^{31}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{43}) + \Delta^{-1}(p_2^{31}) - g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3+5-3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(5))) = (MM, 0)$.

  $H_2^{41} = \{3\} \ \Rightarrow (cp_2^{41})^2 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{41})^{32}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{31}) - \Delta^{-1}(p_2^{34}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(5-3+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(5))) = (MM, 0)$.

  $H_3^{41} = \{3\} \ \Rightarrow (cp_2^{41})^3 = \Delta(\Delta^{-1}(cp_2^{41})^{33}) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(\Delta^{-1}(p_2^{43}) - \Delta^{-1}(p_2^{13}) + g/2))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(3-2+3))) = \Delta(\Delta^{-1}(\Delta(4))) = (M, 0)$.

  $\mathcal{K} = 3 \ \Rightarrow cp_2^{41} = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(cp_2^{14})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{14})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{14})^3}{3}\right) = \Delta\left(\frac{5+5+4}{3}\right) =$

  $= (MM, -0.33)$.

Después de que estos elementos hayan sido estimados, tenemos:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & x & (P,0) & (\mathbf{P}, -\mathbf{0.33}) \\ x & - & (\mathbf{MP}, \mathbf{0.33}) & (MP,0) \\ (M,0) & (\mathbf{M}, \mathbf{0.33}) & - & (I,0) \\ (\mathbf{MM}, -\mathbf{0.33}) & (MM,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

Iteración 2: El conjunto de elementos que pueden estimarse es:

$$EMV_2 = \{(1,2),(2,1)\}.$$

- Para estimar p_2^{12}, el procedimiento es el siguiente:
  $H_1^{12} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{12})^1 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{12})^{31} + (cp_2^{12})^{41}}{2}\right)) = (I,0).$
  $H_2^{12} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{12})^2 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{12})^{32} + (cp_2^{12})^{42}}{2}\right)) = (P,0.33).$
  $H_3^{12} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{12})^3 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{12})^{33} + (cp_2^{12})^{43}}{2}\right)) = (M,-0.33).$
  $\mathcal{K} = 3 \Rightarrow cp_2^{12} = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(cp_2^{12})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{12})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{12})^3}{3}\right) = \Delta\left(\frac{3+2.33+3.67}{3}\right) =$

  $= (I,0).$

- Para estimar p_2^{21}, el procedimiento es el siguiente:
  $H_1^{21} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{21})^1 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{21})^{31} + (cp_2^{21})^{41}}{2}\right)) = (I,0).$
  $H_2^{21} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{21})^2 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{21})^{32} + (cp_2^{21})^{42}}{2}\right)) = (M,-0.33).$
  $H_3^{21} = \{3,4\} \Rightarrow (cp_2^{21})^3 = \Delta(\Delta^{-1}\left(\frac{(cp_2^{21})^{33} + (cp_2^{21})^{43}}{2}\right)) = (M,-0.33).$
  $\mathcal{K} = 3 \Rightarrow cp_2^{21} = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(cp_2^{21})^1 + \Delta^{-1}(cp_2^{21})^2 + \Delta^{-1}(cp_2^{21})^3}{3}\right) = \Delta\left(\frac{3+3.67+3.67}{3}\right) =$

  $= (I,0.44).$

Después de que estos elementos hayan sido estimados, tenemos la siguiente relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla completa:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & (\mathbf{I}, \mathbf{0}) & (P, 0) & (\mathbf{P}, -\mathbf{0.33}) \\ (\mathbf{I}, \mathbf{0.44}) & - & (\mathbf{MP}, \mathbf{0.33}) & (MP, 0) \\ (M, 0) & (\mathbf{M}, \mathbf{0.33}) & - & (I, 0) \\ (\mathbf{MM}, -\mathbf{0.33}) & (MM, 0) & (I, 0) & - \end{pmatrix}$$

3.4. Proceso de Selección para TDG con Relaciones de Preferencia Lingüísticas Difusas Incompletas

El objetivo del proceso de selección en Toma de Decisión en Grupo es elegir las mejores alternativas de acuerdo a las opiniones dadas por los expertos. Un proceso de selección clásico consiste en dos fases diferentes [90]: *agregación* y *explotación* (Figura 3.2).

Asumiendo relaciones de preferencia para representar las opiniones de los expertos, la fase de agregación define una relación de preferencia colectiva indicando la preferencia global entre cada par de alternativas, mientras que la fase de explotación transforma la información global sobre las alternativas en un ranking global de ellas para identificar las mejores alternativas o el conjuntos solución de alternativas.

Cuando trabajamos con situaciones de Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia incompletas, existen casos en los cuales el proceso de selección anterior podría no ser aplicado satisfactoriamente. Por ejemplo, podríamos encontrar que algunos grados de preferencia de la relación de preferencia colectiva no pueden calcularse en la fase de agregación y, consecuentemente, el orden de algunas alternativas no podría

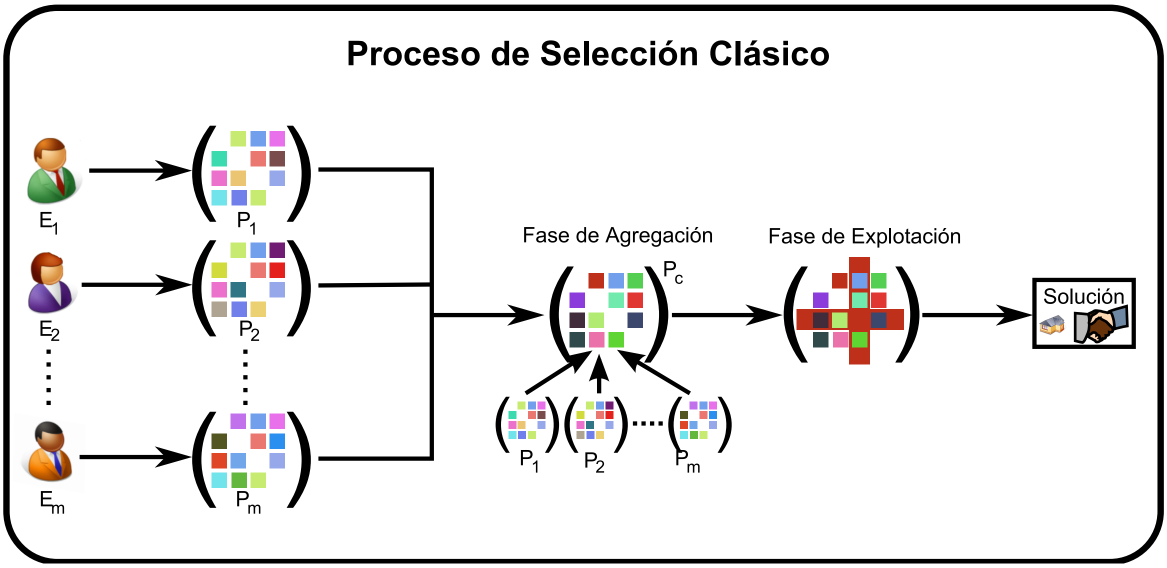

Figura 3.2: Proceso de selección clásico.

ser calculado en la fase de explotación. Para superar este problema, presentamos un proceso de selección para Toma de Decisión en Grupo con relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas compuesto por tres fases (Figura 3.3): (1) *fase de estimación de valores perdidos*, (2) *fase de agregación* y (3) *fase de explotación*.

3.4.1. Estimación de Valores Perdidos

En esta fase, cada relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta es completada siguiendo el procedimiento de estimación de valores perdidos previamente presentado en la Sección 3.3.

3.4.2. Agregación: La Relación de Preferencia Lingüística Colectiva

Una vez que todos los valores perdidos en cada relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta han sido estimados, tenemos un conjunto de m relaciones

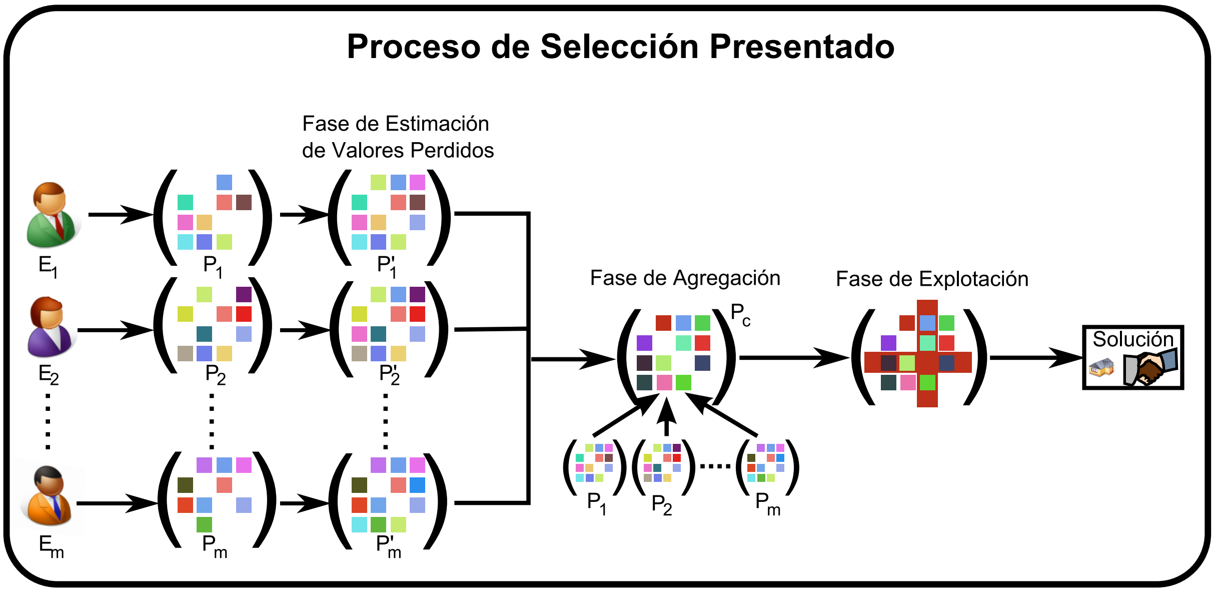

Figura 3.3: Proceso de selección presentado.

de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla individuales $\{P_1, \ldots, P_m\}$. A partir de este conjunto, una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla colectiva, $P_c = (p_c^{lk})$, debe obtenerse por medio de un procedimiento de agregación. En este caso, cada valor $p_c^{lk} \in S \times [-0.5, 0.5)$ representará la preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k de acuerdo a la mayoría de las opiniones de los expertos. Para obtener P_c, definimos el siguiente operador OWA lingüístico 2-tupla:

Definición 3.4. Un operador OWA lingüístico 2-tupla de dimensión n es una función $\psi : (S \times [-0.5, 0.5))^n \longrightarrow S \times [-0.5, 0.5)$ que tiene un vector de pesos asociado $W = (w_1, \ldots, w_n)$, con $w_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, y se define de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\psi_W(p_1, \ldots, p_n) = \Delta(\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \Delta^{-1}(p_{\sigma(i)})), \ p_i \in S \times [-0.5, 0.5),$$

siendo $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ una permutación definida sobre valores lingüísticos 2-tupla, tal que $p_{\sigma(i)} \geq p_{\sigma(i+1)}$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$, esto es, $p_{\sigma(i)}$ es el valor lingüístico 2-tupla i-ésimo en el conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\}$; y siendo el operador de comparación de valores lingüísticos 2-tupla (s_k, α_1) y (s_l, α_2) el definido en la Sección 2.6.

Por lo tanto, la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla colectiva podría obtenerse de la siguiente forma:

$$p_c^{lk} = \psi_Q(p_1^{lk}, \ldots, p_m^{lk})$$

donde Q es el cuantificador lingüístico difuso usado para implementar el concepto de mayoría difusa y, utilizando la *ecuación 1.3*, calcular el vector de pesos W del operador ψ_Q.

3.4.3. Explotación: Elección del Conjunto Solución

Para seleccionar el conjunto solución de alternativas a partir de la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla colectiva, se definen dos grados de elección de alternativas guiados por cuantificador [103]: un grado de dominancia y un grado de no dominancia.

1. $QGDD_l$: El grado de dominancia guiado por cuantificador cuantifica la dominancia de una alternativa sobre todas las demás, en el sentido de mayoría difusa, y se define de la siguiente forma:

$$QGDD_l = \psi_Q(p_c^{l1}, p_c^{l2}, \ldots, p_c^{l(l-1)}, p_c^{l(l+1)}, \ldots, p_c^{ln}).$$

   Esta medida nos permite definir el conjunto de alternativas no dominadas con máximo grado de dominancia lingüístico:

$$X^{QGDD} = \{x_l \in X \mid QGDD_l = sup_{x_k \in X} QGDD_k\}.$$

   Para calcular $sup_{x_k \in X} QGDD_k$, se usa el operador de comparación lingüística 2-tupla.

2. $QGNDD_l$: El grado de no dominancia guiado por cuantificador da el grado en el cual cada alternativa no es dominada por una mayoría difusa del resto de alternativas. Su expresión es:

$$QGNDD_l = \psi_Q(Neg(p_s^{1l}), Neg(p_s^{2l}), \ldots, Neg(p_s^{(l-1)l}), Neg(p_s^{(l+1)l}), \ldots, Neg(p_s^{nl})),$$

donde

$$p_s^{lk} = \begin{cases} (s_0, 0) & \text{si } p^{lk} < p^{kl} \\ \Delta(\Delta^{-1}(p^{lk}) - \Delta^{-1}(p^{kl})) & \text{si } p^{lk} \geq p^{kl} \end{cases}$$

representa el grado en el cual x_l es estrictamente dominada por x_k, y Neg es el operador de negación lingüística 2-tupla definido en la Sección 2.6, $Neg(p_s^{lk}) = \Delta(g - \Delta^{-1}(p_s^{lk}))$. El conjunto de alternativas no dominadas con máximo grado de no dominancia lingüístico es:

$$X^{QGNDD} = \{x_l \in X \mid QGNDD_l = sup_{x_k \in X} QGNDD_k\}.$$

Como mencionamos anteriormente, para calcular $sup_{x_k \in X} QGNDD_k$ se usa el operador de comparación lingüístico 2-tupla.

Los anteriores grados de elección de alternativas, a su vez, se pueden aplicar siguiendo dos políticas de selección distintas:

1. *Política secuencial.* Uno de los grados de elección de alternativas se selecciona y se aplica a X de acuerdo a las preferencias de los expertos, obteniendo un conjunto selección de alternativas. Si hay más de una alternativa en este conjunto selección, entonces se aplica el otro grado de elección de alternativas para seleccionar la alternativa de este conjunto con el mejor grado de elección.

2. *Política conjunta.* Se aplican los dos grados de elección de alternativas sobre X, obteniendo dos conjuntos selección de alternativas. El conjunto selección final de alternativas se obtiene como la intersección de estos dos conjuntos selección de alternativas.

La política de selección conjunta es más restrictiva que la política de selección secuencial ya que es posible obtener un conjunto de selección vacío. Por tanto, en un proceso de selección completo, los grados de elección pueden aplicarse en tres pasos:

- *Paso 1.* La aplicación de cada grado de elección de alternativas sobre X obtiene los siguientes conjuntos de alternativas:

$$X^{QGDD} = \{x_l \in X \mid QGDD_l = sup_{x_k \in X} QGDD_k\},$$

$$X^{QGNDD} = \{x_l \in X \mid QGNDD_l = sup_{x_k \in X} QGNDD_k\},$$

  cuyos elementos se llaman elementos de máxima dominancia sobre la mayoría difusa de X cuantificados mediante el cuantificador lingüístico difuso Q y elementos no dominados maximales sobre la mayoría difusa de X cuantificados mediante el cuantificador lingüístico difuso Q respectivamente.

- *Paso 2.* Aplicar la política de selección conjunta, obteniendo el siguiente conjunto de alternativas:

$$X^{QGCP} = X^{QGDD} \cap X^{QGNDD}.$$

  Si $X^{QGCP} \neq \emptyset$, entonces, Fin.

  En otro caso, continuar.

- *Paso 3.* Aplicar una de las dos políticas de selección secuencial, de acuerdo al criterio de dominancia o de no dominancia, es decir,

  - *Proceso de selección secuencial basado en dominancia QG-DD-NDD.* Aplicar el grado de dominancia guiado por cuantificador sobre X y obtener X^{QGDD}. Si $\#(X^{QGDD}) = 1$, entonces Fin, y este es el conjunto solución. En otro caso, obtener

$$X^{QG-DD-NDD} = \{x_l \in X^{QGDD} \mid QGNDD_l = sup_{x_k \in X^{QGDD}} QGNDD_k\}.$$

    Este es el conjunto selección de alternativas.

- *Proceso de selección secuencial basado en no dominancia QG-NDD-DD.* Aplicar el grado de no dominancia guiado por cuantificador sobre X y obtener X^{QGNDD}. Si $\#(X^{QGNDD}) = 1$, entonces Fin, y este es el conjunto solución. En otro caso, obtener

$$X^{QG-NDD-DD} = \{x_l \in X^{QGNDD} \ |QGDD_l = sup_{x_k \in X^{QGNDD}} QGDD_k\}.$$

Este es el conjunto selección de alternativas.

3.4.4. Ejemplo de Aplicación del Proceso de Selección de Alternativas

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un conjunto de cuatro alternativas y supongamos que tres expertos $\{e_1, e_2, e_3\}$ proporcionan las siguientes relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas usando el mismo conjunto de términos lingüísticos $S = \{N, MP, P, I, M, MM, T\}$ que en el ejemplo anterior:

$$P_1 = \begin{pmatrix} - & x & (P,0) & x \\ x & - & x & (MP,0) \\ (M,0) & x & - & (I,0) \\ x & (MM,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & (MP,0) & (P,0) & (P,0) \\ (MM,0) & - & (MM,0) & (MM,0) \\ (I,0) & (MP,0) & - & (P,0) \\ (I,0) & (MP,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} - & (MP,0) & x & x \\ (M,0) & - & (MM,0) & (MM,0) \\ (P,0) & x & - & (P,0) \\ (P,0) & (MP,0) & (M,0) & - \end{pmatrix}$$

(1) Estimación de información perdida

En primer lugar, se usa el procedimiento de estimación presentado en la Sección 3.3 para obtener las relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla completas, obteniéndose, en este caso, las siguientes:

$$P_1' = \begin{pmatrix} - & (M,0) & (P,0) & (P,0) \\ (P,0) & - & (MP,0) & (MP,0) \\ (M,0) & (MM,0) & - & (I,0) \\ (M,0) & (MM,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_2' = \begin{pmatrix} - & (MP,0) & (P,0) & (P,0) \\ (MM,0) & - & (MM,0) & (MM,0) \\ (I,0) & (MP,0) & - & (P,0) \\ (I,0) & (MP,0) & (I,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_3' = \begin{pmatrix} - & (MP,0) & (M,0) & (I,0) \\ (M,0) & - & (MM,0) & (MM,0) \\ (P,0) & (N,0) & - & (P,0) \\ (P,0) & (MP,0) & (M,0) & - \end{pmatrix}$$

(2) Fase de Agregación

Una vez que las relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla son completadas, las agregamos por medio del operador OWA lingüístico 2-tupla. Nosotros hacemos uso del cuantificador lingüístico *mayoría* definido como $Q(r) = r^{1/2}$, el cual, aplicando la *ecuación 1.3*, genera un vector de pesos de tres valores para obtener cada valor de preferencia lingüístico 2-tupla colectivo p_c^{lk}. Como ejemplo, el valor de preferencia lingüístico 2-tupla colectivo p_c^{12} se obtiene como sigue:

- $p_1^{12} = (M, 0), \quad p_2^{12} = (MP, 0), \quad p_3^{12} = (MP, 0) \Rightarrow \sigma(1) = 1, \quad \sigma(2) = 2, \quad \sigma(3) = 3.$
- $Q(0) = 0,\ Q(1/3) = 0.58,\ Q(2/3) = 0.82,\ Q(1) = 1 \Rightarrow (w_1, w_2, w_3) = (0.58, 0.24, 0.18).$
- $p_c^{12} = \Delta(w_1 \cdot \Delta^{-1}(p_1^{12}) + w_2 \cdot \Delta^{-1}(p_2^{12}) + w_3 \cdot \Delta^{-1}(p_3^{12})) = \Delta(0.58 \cdot 4 + 0.24 \cdot 1 + 0.18 \cdot 1) =$ $= \Delta(2.74) = (I, -0.26).$

La relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla colectiva obtenida es:

$$P_c = \begin{pmatrix} - & (I, -0.26) & (I, 0.16) & (I, -0.42) \\ (M, 0.22) & - & (M, 0.28) & (M, 0.28) \\ (I, 0.40) & (I, 0.14) & - & (I, -0.42) \\ (I, 0.40) & (I, 0.32) & (M, -0.42) & - \end{pmatrix}$$

(3) Fase de Explotación

Usando de nuevo el mismo cuantificador difuso *mayoría* y el correspondiente vector de pesos $W = (0.58, 0.24, 0.18)$, se obtiene el siguiente grado de dominancia guiado por cuantificador:

$$(QGDD_1, QGDD_2, QGDD_3, QGDD_4) = \{(E, -0.05), (B, 0.27), (E, 0.19), (E, 0.49)\}$$

Para calcular el grado de no dominancia guiado por cuantificador, primero obtenemos la matriz P^s:

$$P_s = \begin{pmatrix} - & (N,0) & (N,0) & (N,0) \\ (W,0.48) & - & (W,0.14) & (W,-0.04) \\ (N,0.24) & (N,0) & - & (N,0) \\ (N,0.82) & (N,0) & (W,0) & - \end{pmatrix}$$

Los grados de no dominancia guiados por cuantificador obtenidos son:

$$(QGNDD_1, QGNDD_2, QGNDD_3, QGNDD_4) = \{(MB, 0.4), (T, 0), (T, -0.45), (T, -0.18)\}$$

En ambos casos, los conjuntos maximales son $X^{QGDD} = \{x_2\}$ y $X^{QGNDD} = \{x_2\}$. Finalmente, aplicando la política de selección conjunta, obtenemos:

$$X^{QGCP} = X^{QGDD} \cap X^{QGNDD} = x_2,$$

lo que significa que la alternativa x_2 es la mejor alternativa de acuerdo a la mayoría de los expertos.

3.5. Discusión

En esta sección, analizamos algunos aspectos importantes del uso del procedimiento de estimación de valores perdidos dentro del proceso de decisión presentado en este capítulo. Para hacer esto, comparamos nuestro modelo con otros modelos y mostramos las ventajas de su uso en los procesos de decisión.

1. *Comparación con el modelo propuesto por Xu [210].* La *proposición 3.1* establece la condición mínima que debe satisfacer nuestro procedimiento de estimación de valores perdidos para resolver todas las posibilidades de información incompleta cuando trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas difusas individuales. Sin embargo, el modelo propuesto por Xu [210] no satisface esa proposición. Por

tanto, podría no resolver todas las posibilidades de información incompleta debido a que no usa todas las posibilidades de estimación que pueden derivarse de la propiedad de consistencia de Tanino, ya que hace uso sólo de la *ecuación 3.3*, y no tiene en cuenta las *ecuaciones 3.4* y *3.5*.

Ejemplo 3.1. Supongamos la siguiente relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta:

$$P = \begin{pmatrix} - & x & (P,0) & x \\ x & - & (I,0) & x \\ x & x & - & x \\ x & x & (MM,0) & - \end{pmatrix}$$

Si utilizamos nuestro procedimiento de estimación de valores perdidos, obtenemos la siguiente relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla:

$$P' = \begin{pmatrix} - & (P,0) & (P,0) & (N,0) \\ (M,0) & - & (I,0) & (MP,0) \\ (M,0) & (I,0) & - & (MP,0) \\ (T,0) & (MM,0) & (MM,0) & - \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el modelo propuesto por Xu [210] no puede obtener ningún valor perdido porque no hay ninguna alternativa intermedia x_j para la que la *ecuación 3.3* pueda aplicarse. Por lo tanto, la relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla no podría calcularse.

2. *Sobre el grado de elección en el proceso de selección.* Dada un relación de preferencia lingüística difusa incompleta, el proceso de selección no podría llevarse a cabo porque los grados de elección no podrían ser obtenidos.

Ejemplo 3.2. Supongamos la siguiente relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla incompleta:

$$P = \begin{pmatrix} - & (P,0) & x & x \\ x & - & x & x \\ x & (MP,0) & - & x \\ I & (MP,0) & x & - \end{pmatrix}$$

En este caso, no podemos obtener ni QGDD ni QGNDD para todas las alternativas. Esto se debe a que, por un lado, el grado de dominancia guiado por cuantificador no puede obtenerse porque no hay valores en la segunda fila y, por otro lado, no es posible calcular la matriz P_s porque hay valores perdidos en la relación de preferencia lingüística y, por lo tanto, el grado de no dominancia guiado por cuantificador no puede calcularse. Sin embargo, si usamos nuestro proceso de selección, el procedimiento de estimación de valores perdidos obtendría una relación de preferencia lingüística difusa completa a partir de la relación de preferencia lingüística difusa incompleta anterior y, de esta manera, tanto el QGDD como el QGNDD podrían ser obtenidos.

3. *En el proceso de selección.* En muchos casos de situaciones de información incompleta, un proceso de selección clásico no podría aplicarse satisfactoriamente. Así, si los expertos proporcionan relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas, la fase de agregación podría no obtener una relación de preferencia lingüística difusa 2-tupla colectiva completa y, por lo tanto, como hemos mencionado, los grados de elección no podrían ser aplicados.

Ejemplo 3.3. Supongamos que cuatro expertos proporcionan las siguientes relaciones de preferencia lingüísticas difusas 2-tupla incompletas:

$$P_1 = \begin{pmatrix} - & x & (P,0) & x \\ x & - & (I,0) & x \\ x & x & - & x \\ x & x & (MM,0) & - \end{pmatrix} ; P_2 = \begin{pmatrix} - & x & (M,0) & x \\ x & - & (M,0) & x \\ x & x & - & x \\ x & x & (MP,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} - & x & (MP,0) & x \\ x & - & (T,0) & x \\ x & x & - & x \\ x & x & (M,0) & - \end{pmatrix} ; P_4 = \begin{pmatrix} - & x & (I,0) & x \\ x & - & (I,0) & x \\ x & x & - & x \\ x & x & (N,0) & - \end{pmatrix}$$

A partir de ellas, solamente se pueden obtener los valores colectivos p_c^{13}, p_c^{23} y p_c^{43}. Por tanto, el proceso de selección no podría aplicarse satisfactoriamente, ya que ni QGDD ni QGNDD podrían obtenerse por lo comentado en el punto anterior. Sin embargo, nuestro modelo, utilizando el procedimiento de estimación de valores perdidos, obtendría relaciones de preferencia lingüísticas difusas completas a partir de las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas proporcionadas por los expertos. De esta manera, al realizar la agregación de las preferencias proporcionadas por los expertos, se obtendría una relación de preferencia colectiva completa y, por tanto, tanto QGDD como QGNDD podría ser obtenidos.

Capítulo 4

Un Modelo de Consenso para TDG con Información Lingüística Difusa No Balanceada

La mayoría de los problemas de Toma de Decisión en Grupo basados en aproximaciones lingüísticas usan conjuntos de términos lingüísticos distribuidos simétrica y uniformemente para expresar las opiniones proporcionadas por los expertos sobre el conjunto de alternativas [22, 111, 113, 128, 207]. Sin embargo, existen problemas cuyas valoraciones necesitan representarse por medio de conjuntos de términos lingüísticos no balanceados, es decir, usando conjuntos de términos que no están ni uniforme ni simétricamente distribuidos [107, 125, 159, 191, 202].

Por otro lado, una cuestión muy importante en los problemas de Toma de Decisión en Grupo es como sustituir las acciones del moderador en el proceso de discusión entre los expertos para modelar automáticamente todo el proceso de consenso. Para solucionar esta cuestión, se han propuesto algunos modelos de consenso en problemas de Toma de Decisión en Grupo con múltiples formatos de representación de preferencias [123], en problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística multi-granular [128] y en problemas de Toma de Decisión con información incompleta [121, 122]. Sin embargo, todavía no se ha propuesto ningún modelo de consenso para problemas de

Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada.

En este capítulo presentamos un modelo de consenso para ayudar a los expertos en todas las fases del proceso de consenso en problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada. Este modelo de consenso está basado tanto en una nueva metodología lingüística difusa para trabajar con conjuntos de términos lingüísticos no balanceados como en dos criterios de consenso: grados de consenso que indican el acuerdo entre las opiniones de los expertos, y medidas de proximidad que se utilizan para encontrar cómo de similares son las opiniones individuales de los expertos respecto de la opinión del grupo. Para hacer esto, presentamos una nueva metodología para manejar información lingüística difusa no balanceada y utilizamos el modelo lingüístico difuso 2-tupla como base de representación de la información lingüística difusa no balanceada. En [125] se presenta una metodología basada en el modelo computacional lingüístico 2-tupla que usa los contextos jerárquicos lingüísticos para manejar información lingüística difusa no balanceada en sistemas de recuperación de información. Sin embargo, esta metodología sólo puede representar conjuntos de términos lingüísticos no balanceados cuando existe un nivel con una granularidad adecuada para representar el subconjunto de términos lingüísticos a la izquierda del término medio y un nivel con una granularidad adecuada para representar el subconjunto de términos lingüísticos a la derecha del término medio. De esta forma, la metodología presentada en este capítulo mejora a la anterior, ya que permite representar conjuntos de términos lingüísticos no balanceados cuando las anteriores condiciones no se satisfacen. Además, el modelo de consenso incorpora un mecanismo de realimentación que sustituye las acciones del moderador y que está basado en reglas simples y fáciles para ayudar a los expertos a cambiar sus opiniones con el objetivo de obtener el mayor grado de consenso posible.

Este modelo de consenso presenta dos ventajas principales. Primero, su habilidad para trabajar con problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada, superando el problema de encontrar diferentes niveles de discriminación a ambos lados del término lingüístico medio en los conjuntos de términos lingüísticos. Y segundo, la capacidad de realizar el proceso de consenso automáticamente, es decir, sin moderador, el cual está tradicionalmente presente en los procesos de consenso del mundo real. De esta forma, se consigue evitar la posible subjetividad que el moderador puede introducir en esta fase.

Además, presentamos una herramienta que crea diagramas de consenso para ayudar a los expertos a comprender fácilmente el estado actual de consenso en el problema de decisión. Así, en la resolución de los problemas de Toma de Decisión en Grupo, es usual que todos los expertos estén juntos en un lugar donde puedan hablar y discutir sobre las alternativas del problema. Sin embargo, en situaciones donde no es posible que todos los expertos permanezcan juntos, es bastante difícil para los expertos identificar la cercanía de sus opiniones con el resto de expertos y, por tanto, es difícil tener una idea clara del actual estado del proceso de consenso. Esta herramienta está basada en medidas de consenso y similitud y junto con la aplicación de un algoritmo de clustering identifica y representa los diferentes grupos de expertos con opiniones similares y un posible candidato como portavoz de cada grupo.

De esta forma, la estructura del capítulo es la siguiente. La nueva metodología para manejar información lingüística difusa no balanceada se presenta en la Sección 4.1. A continuación, se definen los problemas de Toma de Decisión en Grupo en contextos lingüísticos difusos no balanceados en la Sección 4.2. El modelo de consenso propuesto para problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada se describe en la Sección 4.3 junto con un ejemplo de su aplicación. Por último, se muestra la herramienta de visualización de consenso desarrollada para ayudar a los expertos a comprender mejor cuál es el actual estado de consenso en la Sección 4.5.

4.1. Nueva Metodología para Manejar Información Lingüística Difusa No Balanceada

En esta sección, presentamos una metodología nueva basada en el modelo lingüístico difuso 2-tupla [114] para manejar conjuntos de términos lingüísticos difusos no balanceados. Esta metodología nueva lleva a cabo operaciones computacionales con información lingüística difusa no balanceada utilizando el modelo computacional 2-tupla [114] y diferentes niveles de una jerarquía lingüística LH [116]. Presenta dos componentes:

- un modelo nuevo de representación de información lingüística difusa no balanceada y
- un modelo nuevo computacional de información lingüística difusa no balanceada.

4.1.1. Nuevo Modelo de Representación de Información Lingüística Difusa No Balanceada

El procedimiento utilizado para representar información lingüística difusa no balanceada descrito en la Sección 2.8 trabajaba de la siguiente forma [106, 125]:

1. Encontrar un nivel t^- de la jerarquía lingüística LH para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}_{un}^L$ a la izquierda del término lingüístico medio del conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado. Este nivel de la jerarquía lingüística LH debería soportar la distribución de las etiquetas de $\mathcal{S}_{un}^L$ sobre el universo de discurso.
2. Encontrar un nivel t^+ de la jerarquía lingüística LH para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}_{un}^R$ a la derecha del término lingüístico medio del conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado. Este nivel de la jerarquía lingüística

LH debería soportar la distribución de las etiquetas de $\mathcal{S}_{un}^{R}$ sobre el universo de discurso.

3. Representar el término medio de $\mathcal{S}_{un}$ utilizando los términos medios de los niveles t^{-} y t^{+}.

Sin embargo, esta metodología sólo puede representar conjuntos de términos lingüísticos difusos no balanceados cuando existe un nivel de la jerarquía LH con una granularidad adecuada para representar el subconjunto de términos lingüísticos a la izquierda del término lingüístico medio y cuando existe un nivel con una granularidad adecuada para representar el subconjunto de términos lingüísticos a la derecha del término lingüístico medio. Es decir, el problema aparece cuando no existe un nivel t^{-} o t^{+} para representar $\mathcal{S}_{un}^{L}$ o $\mathcal{S}_{un}^{R}$ respectivamente.

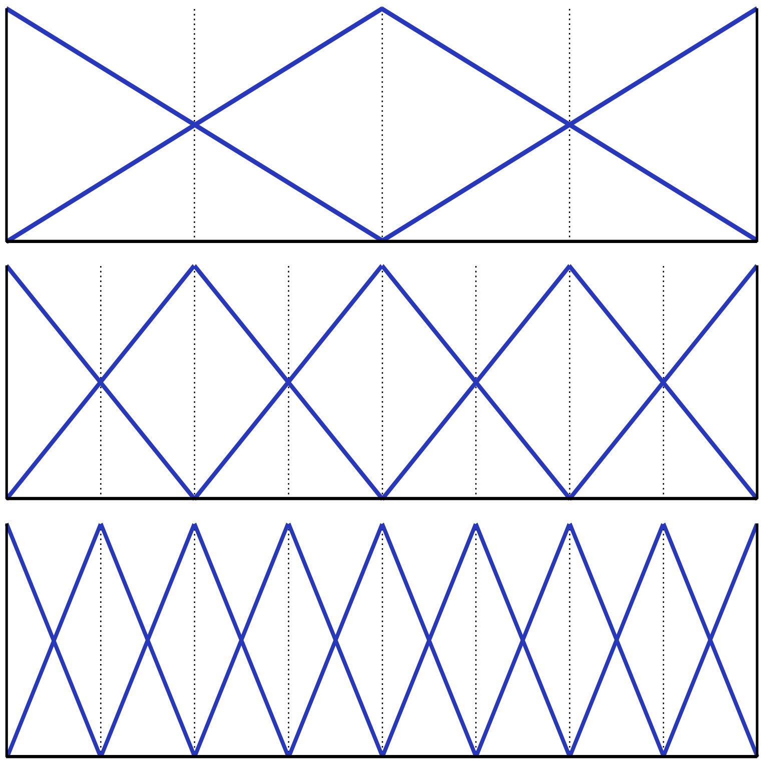

Figura 4.1: Jerarquía lingüística de 3, 5 y 9 etiquetas.

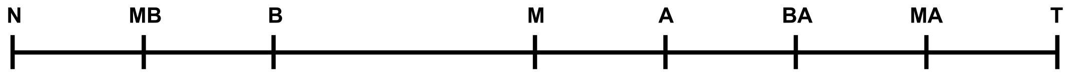

Figura 4.2: Ejemplo de un conjunto de términos lingüísticos no balanceado de 8 etiquetas.

Ejemplo 4.1. Supongamos que tenemos el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado $S_{un} = \{N, MB, B, M, A, BA, MA, T\}$ mostrado en la Figura 4.2 y la jerarquía lingüística de la Figura 4.1. El significado de los términos lingüísticos es el siguiente:

$N = Nulo$	$MB = Muy\ Bajo$
$B = Bajo$	$M = Medio$
$A = Alto$	$BA = Bastante\ Alto$
$MA = Muy\ Alto$	$T = Total$

Utilizando la metodología anterior, este conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado no podría representarse, ya que aunque existe un nivel t^+, en concreto $t^+ = l(3, 9)$, para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\{A, BA, MA, T\}$ que está a la derecha del término medio M, no existe un nivel t^- con una granularidad adecuada para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\{N, MB, B\}$ que está a la izquierda del término lingüístico medio M. Por tanto, el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado anterior, no podría representarse usando esta metodología.

Para solucionar este problema, es decir, que no exista un nivel t^- o t^+ con una granularidad adecuada para representar $\mathcal{S}_{un}^L$ o $\mathcal{S}_{un}^R$ respectivamente, proponemos la aplicación del siguiente algoritmo, el cual se define asumiendo que no existe el nivel t^-, como ocurre en el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado mostrado en el ejemplo anterior.

1. Representar $\mathcal{S}_{un}^{L}$:
   a) Identificar el término medio de $\mathcal{S}_{un}^{L}$, llamado $\mathcal{S}_{mid}^{L}$. Para hacer esto, debemos observar la distribución de las etiquetas de $\mathcal{S}_{un}^{L}$ sobre el universo de discurso.
   b) Encontrar un nivel t_2^- de los conjuntos izquierda de LH^L para representar el subconjunto de términos izquierdo de $\mathcal{S}_{un}^{L}$, donde LH^L representa la parte izquierda de LH.
   c) Encontrar un nivel t_2^+ de los conjuntos derecha de LH^L para representar el subconjunto de términos derecho de $\mathcal{S}_{un}^{L}$.
   d) Representar el término medio $\mathcal{S}_{mid}^{L}$ utilizando los niveles t_2^- y t_2^+.
2. Encontrar un nivel t^+ de LH para representar el subconjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}_{un}^{R}$.
3. Representar el término medio de $\mathcal{S}_{un}$ utilizando los niveles t_2^+ y t^+.

Ejemplo 4.2. Supongamos el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado $\mathcal{S}_{un} = \{N, MB, B, M, A, BA, MA, T\}$ mostrado en la Figura 4.2. Aplicando el algoritmo anterior, la representación de este conjunto de términos lingüísticos utilizando la jerarquía lingüística LH mostrada en la la Figura 4.1 sería la mostrada en la Figura 4.3. En este caso,

- $\mathcal{S}_{un}^{L} = \{N, MB, B\}$,
- $\mathcal{S}_{mid}^{L} = B$,
- $LH^L = \{s_0^{n(1)}\} \bigcup \{s_0^{n(2)}, s_1^{n(2)}\} \bigcup \{s_0^{n(3)}, s_1^{n(3)}, s_2^{n(3)}, s_3^{n(3)}\}$.

Por tanto, tenemos que $t_2^- = 3$, $t_2^+ = 2$, el término medio $\mathcal{S}_{mid}^{L} = L$ (debido a su posición en el universo de discurso) se representa usando ambos niveles, 3 y 2, y el término medio de $\mathcal{S}_{un}$ se representa usando los niveles 2 y 3.

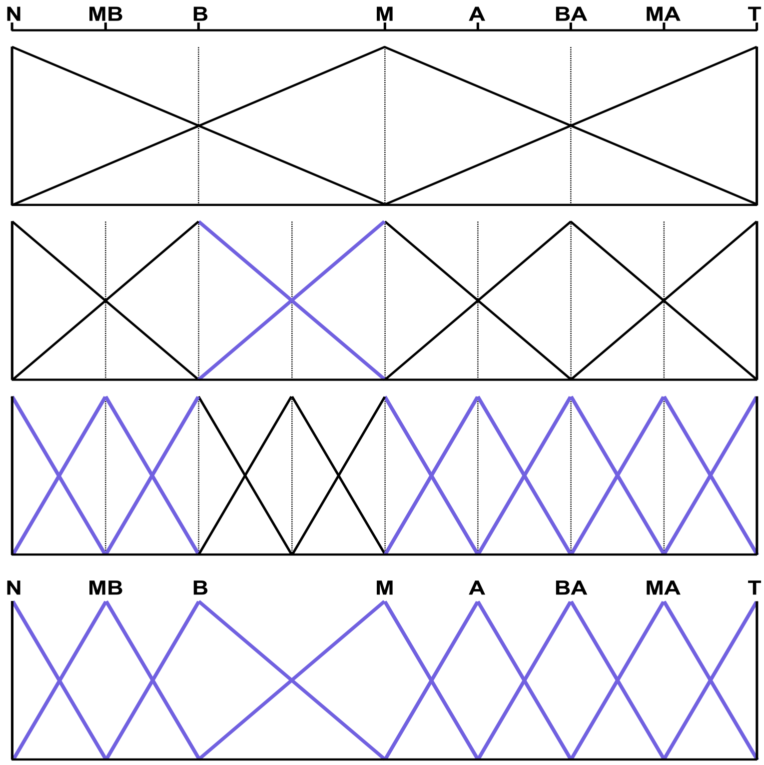

Figura 4.3: Representación de un conjunto de términos lingüísticos no balanceado de 8 etiquetas utilizando una jerarquía lingüística.

4.1.2. Nuevo Modelo Computacional de Información Lingüística Difusa No Balanceada

Al igual que en el modelo computacional del modelado lingüístico difuso no balanceado presentado en la Sección 2.8 [106, 125], tenemos que definir tres tipos de operadores de computación: operador de comparación, negación y agregación. En este caso, aunque estos operadores son muy similares a los definidos en la Sección 2.8, hay que tener en cuenta que ahora, previamente a llevar a cabo cualquier operación de computación, en lugar de tener que elegir un nivel $t' \in \{t^-, t^+\}$ tal que $n(t') = max\{n(t^-), n(t^+)\}$, tenemos que elegir un nivel $t' \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$ tal que $n(t') = max\{n(t^-), n(t_2^-), n(t^+), n(t_2^+)\}$:

1. *Operador de comparación de información lingüística no balanceada:* La comparación de información lingüística representada por 2-tuplas lingüísticas no balanceadas $(s_k^{n(t)}, \alpha_1)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, y $(s_l^{n(t)}, \alpha_2)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, es similar a la operación de comparación usual de 2-tuplas, pero actuando sobre los valores $TF_{t'}^t(s_k^{n(t)}, \alpha_1) = (s_v^{n(t')}, \beta_1)$ y $TF_{t'}^t(s_l^{n(t)}, \alpha_2) = (s_w^{n(t')}, \beta_2)$. Entonces tenemos:
   - si $v < w$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es más pequeño que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
   - si $v = w$, entonces
     - si $\beta_1 = \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$, $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$ representan la misma información.
     - si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es más pequeño que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
     - si $\beta_1 > \beta_2$, entonces $(s_v^{n(t')}, \beta_1)$ es mayor que $(s_w^{n(t')}, \beta_2)$.
2. *Operador de negación de información lingüística no balanceada:* Sea $(s_k^{n(t)}, \alpha)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, una 2-tupla lingüística no balanceada, entonces:

   $$\mathcal{NEG}(s_k^{n(t)}, \alpha) = Neg(TF_{t''}^t(s_k^{n(t)}, \alpha)),$$

   donde $t \neq t''$, $t'' \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$.
3. *Operador de agregación de información lingüística no balanceada:* Para definir el operador de agregación, tenemos que tener en cuenta que, en este caso, una vez que se obtiene el resultado de la agregación, se transforma al nivel correspondiente $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$ mediante $TF_t^{t'}$ para expresar el resultado en el conjunto de términos lingüísticos no balanceado $\mathcal{S}_{un}$. De esta forma, la nueva definición del operador $LOWA_{un}$ presentado en la Sección 2.8 es la siguiente:

   Definición 4.1. Sea $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\}$ un conjunto de valoraciones lingüísticas no balanceadas a agregar, el operador $LOWA_{un}$, ϕ_{un}, se define como:

   $$\phi_{un}\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\} = W \cdot B^T = C_{un}^m\{w_k, b_k,\ k = 1, \ldots, m\} =$$

   $$= w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C_{un}^{m-1}\{\beta_h, b_h,\ h = 2, \ldots, m\},$$

donde $b_i = (a_i, \alpha_i) \in (S \times [-0.5, 0.5))$, $W = (w_1, \ldots, w_m)$ es un vector de pesos tal que $w_i \in [0,1]$ y $\sum_i w_i = 1$, $\beta_h = \frac{w_h}{\sum_2^m w_k}$, $h = 2, \ldots, m$, y B es el vector ordenado 2-tupla no balanceado asociado. Cada elemento $b_i \in B$ es el i-ésimo mayor elemento 2-tupla no balanceado en la colección $\{(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_m, \alpha_m)\}$, y C_{un}^m es el operador de combinación convexo de m 2-tuplas no balanceadas. Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j$ $\forall i, j$ la combinación convexa se define como: $C_{un}^m\{w_i, b_i,\ i = 1, \ldots, m\} = b_j$. Y si $m = 2$, entonces se define como:

$$C_{un}^2\{w_l, b_l,\ l = 1, 2\} = w_1 \otimes b_j \oplus (1 - w_1) \otimes b_i = TF_t^{t'}(s_k^{n(t')}, \alpha),$$

donde $(s_k^{n(t')}, \alpha) = \Delta(\lambda)$ y $\lambda = \Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_i)) + w_1 \cdot (\Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_j)) - \Delta^{-1}(TF_{t'}^t(b_i)))$, $b_j, b_i \in (S \times [-0.5, 0.5))$, $(b_j \geq b_i)$, $\lambda \in [0, n(t') - 1]$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$.

En este caso, para calcular el vector de pesos W del operador $LOWA_{un}$, ϕ_{un}, usamos también un cuantificador lingüístico difuso Q para implementar el concepto de mayoría y la *ecuación 1.3*.

4.2. Problemas de Toma de Decisión en Grupo en Contextos Lingüísticos Difusos No Balanceados

Como ya se comentó en el Capítulo 1, un problema de Toma de Decisión en Grupo se define como una situación de decisión en la que intervienen varios expertos, los cuales pueden tener diferentes conocimientos, actitudes y percepciones sobre el problema, que intentan alcanzar una solución en común al mismo.

En los problemas de decisión, los expertos pueden valorar cuestiones o aspectos de naturaleza cuantitativa que admiten valoraciones numéricas más o menos precisas, o bien aspectos cuya naturaleza cualitativa difícilmente admite valoraciones numéricas. En este último caso, es más apropiado que los expertos utilicen un modelado lingüístico de preferencias, el cual se adapta mejor a ese tipo de aspectos.

De esta manera, la mayoría de los problemas de Toma de Decisión en Grupo basados en aproximaciones lingüísticas usan conjuntos de términos lingüísticos distribuidos simétrica y uniformemente para expresar las opiniones proporcionadas por los expertos sobre el conjunto de alternativas [22, 111, 113, 128, 207]. Sin embargo, existen problemas cuyas valoraciones necesitan representarse por medio de conjuntos de términos lingüísticos no balanceados, es decir, usando conjuntos de términos que no están ni uniforme ni simétricamente distribuidos [107, 125, 159, 191, 202].

La información lingüística difusa no balanceada puede aparecer como consecuencia de la naturaleza de las variables lingüísticas que participan en el problema. Esto ocurre, por ejemplo, en el sistema de evaluación de educación español (Figura 2.10). En otros casos, puede aparecer debido a que los expertos, para valorar sus preferencias, necesitan trabajar con escalas que tienen un número de términos en un lado del dominio de referencia mayor que en el otro lado (Figura 4.2).

Formalmente, un problema de Toma de Decisión en Grupo está definido en un contexto lingüístico difuso no balanceado cuando dado un conjunto finito de expertos

$$E = \{e_1, \ldots, e_m\}, (m \geq 2),$$

y un conjunto finito de alternativas

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, (n \geq 2),$$

cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre X mediante un conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado

$$\mathcal{S}_{un} = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\},$$

el cual tiene una etiqueta mínima, una etiqueta máxima, una etiqueta central, y el resto de etiquetas se distribuyen de forma no uniforme ni simétrica alrededor de la etiqueta central.

4.3. Modelo de Consenso para Problemas de Toma de Decisión en Grupo con Información Lingüística Difusa No Balanceada

En cualquier problema de Toma de Decisión en Grupo, cada experto tiene su propia opinión sobre cuál es la mejor alternativa para resolver el problema planteado. Este tipo de problemas ha sido resuelto llevando a cabo un proceso de selección de alternativas que consiste en realizar una serie de operaciones (agregación y explotación) con el propósito de buscar la mejor alternativa solución al problema a partir del conjunto de preferencias dadas por los expertos.

Ahora bien, el hecho de resolver un problema de Toma de Decisión en Grupo llevando a cabo exclusivamente el proceso de selección, no garantiza que la solución final obtenida sea asumida como la mejor por todo el grupo de expertos. De hecho, pueden existir expertos que a título individual tengan la sensación de que sus preferencias no han sido tenidas en cuenta para obtener la solución y, por lo tanto, la rechacen.

Para evitar estas situaciones no deseables, es recomendable realizar un proceso de consenso previo al proceso de selección. En este proceso, que ya ha sido descrito en detalle en la Sección 1.3.1, los expertos proponen, discuten y cambian sus preferencias con el fin de acercar sus opiniones y alcanzar un nivel de acuerdo mínimo que garantice que la solución final sea aceptada por todos ellos.

El intento de modelar este proceso de consenso nos ha llevado a proponer un modelo de consenso capaz de llevar a cabo el proceso de búsqueda del consenso de forma automática y sin la intervención de la figura del moderador humano en problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada.

La Figura 4.4 describe gráficamente el papel que desempeñaría el modelo de consenso en el esquema general de resolución de un problema de Toma de Decisión en Grupo.

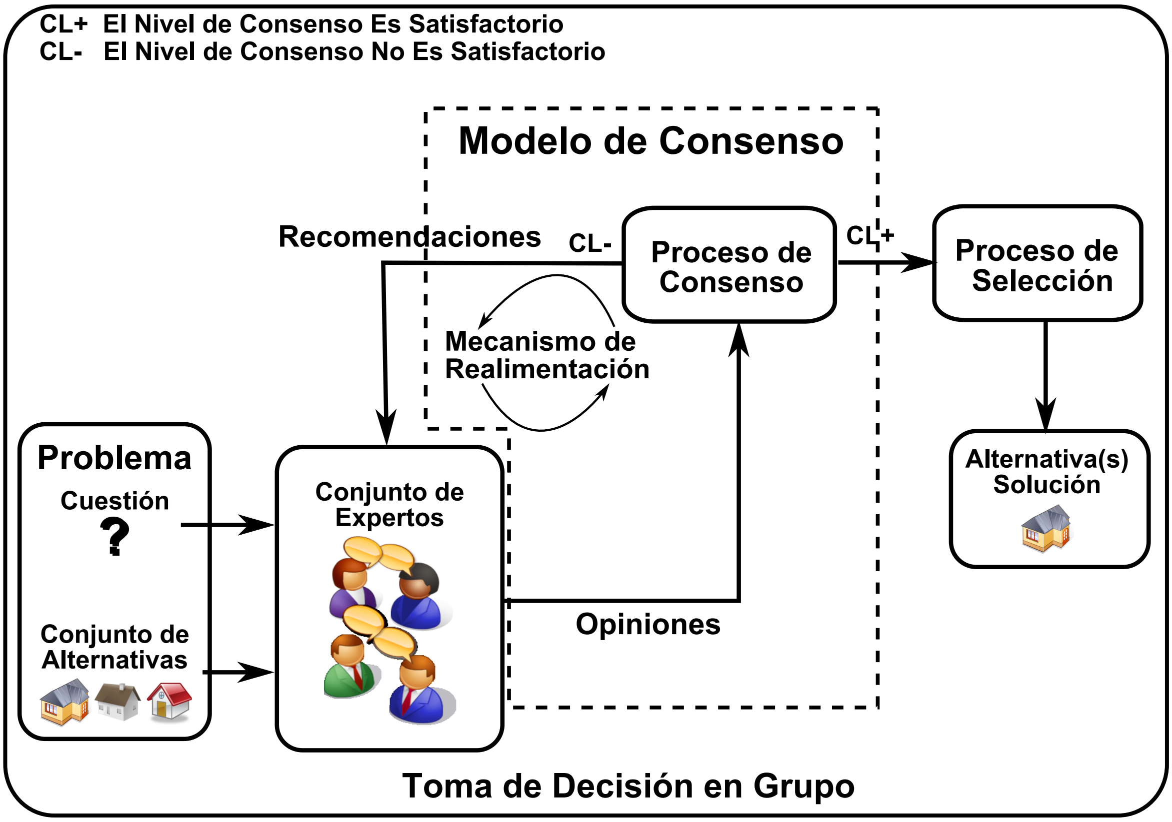

Figura 4.4: Modelo de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo.

Como se observa, una vez que los expertos han expresado sus opiniones, un proceso de consenso calcula el nivel de acuerdo entre ellos. Si el grado de consenso es aceptable, se da por finalizado el proceso de consenso. En caso contrario, se generan una serie de recomendaciones que, apoyándose en un mecanismo de realimentación, se hacen llegar a los expertos. A continuación, se repite de nuevo todo el proceso.

El modelo que presentamos en esta sección ha sido pensado para aplicarse en problemas de Toma de Decisión en Grupo en los que los expertos utilizan conjuntos de términos lingüísticos difusos no balanceados para expresar sus preferencias. Por este motivo, además de proponer la anterior metodología para trabajar con información lingüística difusa no balanceada, se han definido una serie de medidas que permiten evaluar el nivel de acuerdo que existe entre los expertos en este tipo de contextos. Para conseguir automatizar el proceso de consenso, se ha diseñado un sistema de producción de consejo, cuya finalidad es identificar las preferencias en las que no existe suficiente acuerdo y recomendar a los expertos la dirección en la que han de cambiar tales preferencias con el propósito de aproximarlas y, así, mejorar el grado de consenso o acuerdo en la siguiente ronda de consenso.

Las características y el funcionamiento del modelo de consenso propuesto se presentan en las siguientes subsecciones.

4.3.1. Características del Modelo de Consenso

Antes de pasar a describir las distintas fases que componen el modelo de consenso propuesto, comentaremos las características más sobresalientes del mismo:

a) **Expresión de preferencias.** Los expertos expresan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas utilizando relaciones de preferencia lingüísticas difusas no balanceadas. Una descripción más formal del contexto de definición del problema sería la siguiente. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$ el conjunto finito de alternativas valoradas por un conjunto finito de expertos $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$. Cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre X por medio de una relación de preferencia $P_i\colon X \times X$ con función de pertenencia $\mu_{P_i}\colon X \times X \to \mathcal{S}_{un}$, donde cada valor $\mu_{P_i}(x_l, x_k) = p_i^{lk}$ denota el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k expresada por el experto e_i,

$$P_i = \begin{pmatrix} p_i^{11} & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & p_i^{nn} \end{pmatrix}$$

y $\mathcal{S}_{un} = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$ representa el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado utilizado por el experto e_i para dar sus preferencias.

Una de las ventajas de usar relaciones de preferencia es que permiten trabajar con tres niveles de información diferentes:

1) *A nivel de pares de alternativas.* Fijada una alternativa x_l y una alternativa x_k, es posible conocer la información disponible sobre el par (x_l, x_k).

2) *A nivel de alternativas.* Fijada una alternativa x_l, es posible conocer la información disponible sobre esa alternativa a partir de los pares (x_l, x_k) que la componen, con $k = 1, \ldots, n$ y $k \neq l$.

3) *A nivel de relación.* Teniendo en cuenta la información aportada por todas las alternativas, se puede obtener un valor que represente la información contenida en la relación de preferencia.

Al considerar nuestra propuesta como un modelo general, en los ejemplos presentados en esta memoria no se requerirá que las relaciones de preferencia satisfagan las propiedades enumeradas en la Sección 1.5, dejando para cada problema particular la posibilidad de exigir el cumplimiento de alguna de estas propiedades.

b) **Medición del consenso.** Se definen dos tipos de medidas para estudiar el consenso:

1) *Grados de consenso.* El grado de consenso mide el grado o el nivel de acuerdo alcanzado entre los expertos en cada una de las rondas que componen el proceso

de búsqueda del consenso. Está valorado dentro del intervalo [0,1], de forma que un valor cercano a 1 indica un grado de consenso muy alto, mientras que un valor cercano a 0 indica un grado de consenso muy bajo.

2) *Medidas de proximidad.* Las medidas de proximidad miden la distancia que existe entre las preferencias dadas por cada experto y la preferencia colectiva dada por el grupo de expertos. Al igual que el grado de consenso, la proximidad también se valora en [0,1], de forma que una proximidad cercana a 1 indica que la opinión del experto está muy próxima a la opinión colectiva, mientras que un valor cercano a 0 indica que ambas opiniones son muy diferentes.

Ambas medidas se calcularán en los tres niveles descritos anteriormente:

- *Pares de alternativas.* Permiten conocer el grado de consenso y la proximidad de las valoraciones dadas a cada par de alternativas (x_l, x_k).
- *Alternativas.* Permiten conocer el grado de consenso y la proximidad que existe en cada una de las alternativas al problema.
- *Relaciones.* Permiten conocer el grado de consenso total que existe entre los expertos, así como la proximidad del conjunto de preferencias dadas por cada experto respecto a la opinión colectiva.

Con ambas medidas se podrá identificar, por ejemplo, los pares de alternativas en los que no hay consenso o aquellos expertos cuya opinión global está más alejada de la opinión del grupo.

El cálculo y estudio del grado de consenso y proximidad a nivel de pares de alternativas, alternativas y relaciones permite conocer en detalle la contribución de cada uno de ellos a la consecución del consenso buscado.

c) **Mecanismo de realimentación.** En un proceso de consenso, la tarea de identificar a los expertos más discrepantes y recomendar que cambien sus preferencias ha sido siempre desempeñada por la figura del moderador, siendo esta una actividad fundamental para conseguir alcanzar el consenso en un periodo de tiempo no demasiado grande. En este modelo se propone un módulo denominado mecanismo de realimentación que se encargará de realizar esta tarea, sirviéndose para ello de las medidas de consenso presentadas anteriormente. De esta forma, se consigue automatizar las tareas del moderador. Este módulo tiene asignadas dos funciones:

1) Identificar aquellas preferencias que no contribuyen a alcanzar un grado de consenso satisfactorio.

2) Recomendar a los expertos los cambios que deben hacer en sus preferencias para mejorar el grado de consenso.

Una vez comentadas las características más importantes del modelo de consenso, pasamos a describir las diferentes fases que lo componen.

4.3.2. Fases del Modelo de Consenso

El esquema general del modelo de consenso propuesto para problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos lingüísticos difusos no balanceados se puede observar en la Figura 4.5.

El modelo esta dividido en tres grandes fases que presentamos brevemente a continuación y que se describirán en detalle en las siguientes subsecciones:

1. **Cálculo de los grados de consenso.** En esta fase se calcula el grado de consenso alcanzado a nivel de pares de alternativas, a nivel de alternativas y a nivel de relación de preferencia. Para hacer estos cálculos, se definirá una función para medir la similitud entre las preferencias de los expertos.

2. **Control de consenso.** En esta fase se comprueba el grado de consenso alcanzado entre los expertos. Puede ocurrir que este grado de consenso sea suficiente, dando

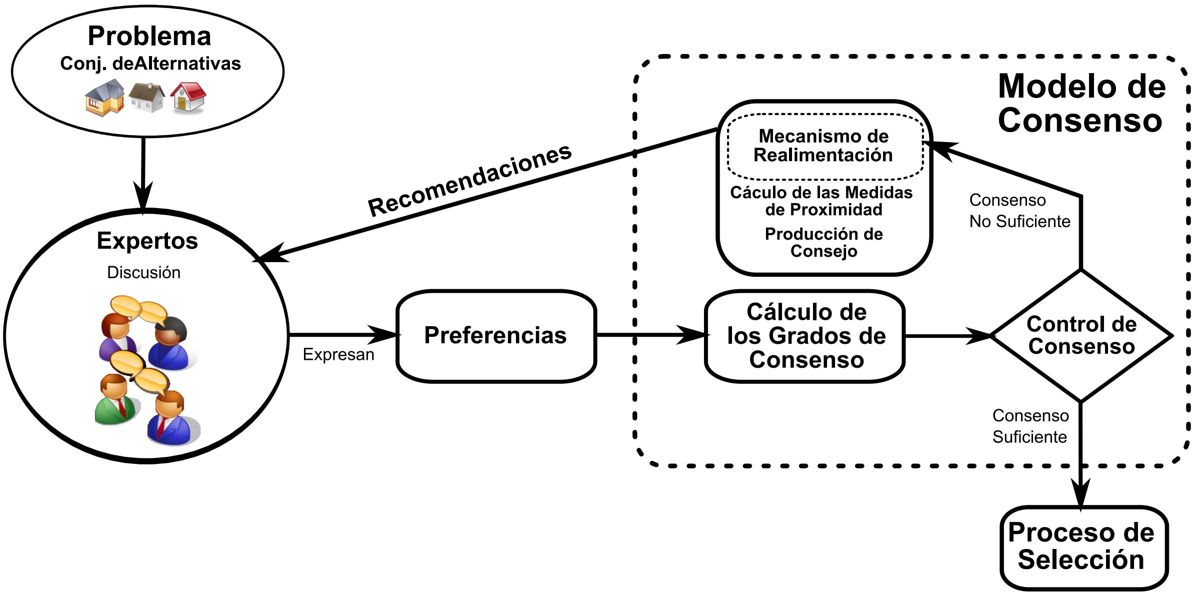

Figura 4.5: Modelo de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo definidos en contextos lingüísticos difusos no balanceados.

por finalizado el proceso de consenso, o bien insuficiente, continuando el modelo por la siguiente fase.

3. **Mecanismo de realimentación.** Finalmente, en la última fase, el modelo genera el conjunto de recomendaciones que los expertos deberían seguir para aproximar sus preferencias y mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda. Para hacer esto, primero se calcularán las medidas de proximidad. A continuación, un sistema basado en reglas utilizará los grados de consenso y las medidas de proximidad para identificar y sugerir los cambios de preferencias que recomendará a los expertos.

Como puede verse en la descripción gráfica del modelo, estas tres fases se ejecutan secuencialmente y dentro de un ciclo que se corresponde con lo que podríamos entender por una *ronda de consenso*. El modelo de consenso recibe las preferencias de los expertos expresadas mediante relaciones de preferencia lingüísticas difusas no balanceadas. El modelo calcula el grado de consenso alcanzado entre los expertos. A continuación, se compara el grado de consenso alcanzado en esa ronda con un umbral de consenso γ. Este umbral representa el grado de consenso mínimo que debe alcanzarse para dar por finalizada la fase de consenso, y habrá sido acordado previamente por el conjunto de expertos e introducido como un parámetro al modelo. Si el grado de consenso es mayor que γ, finaliza el proceso de consenso y comenzará el proceso de selección de alternativas. En caso contrario, se generará un conjunto de recomendaciones que a través de un mecanismo de realimentación serán propuestas a los expertos.

Finalmente, comentar que aunque el principal propósito del modelo de consenso es ayudar a los expertos a través del proceso de consenso, ellos son los que deciden si seguir o no el consejo generado por el modelo de consenso. En cualquier caso, el modelo de consenso reduce considerablemente el tiempo asociado en tomar la decisión y, por tanto, extiende la habilidad de los expertos para analizar la información envuelta en el proceso de decisión.

4.3.3. Cálculo de los Grados de Consenso

Los grados de consenso se usan para medir el nivel actual de consenso o acuerdo entre los expertos. Como mencionamos anteriormente, los grados de consenso se dan en tres niveles diferentes: pares de alternativas, alternativas y relación. Para calcularlos, se necesitan funciones de similitud o coincidencia para obtener el nivel de acuerdo entre todos los expertos [111, 113, 128]. Además, estas funciones de similitud detectan cómo de lejos están las opiniones individuales del resto. De esta forma, el cálculo de los grados de consenso se realiza de la siguiente forma:

1. **Cálculo de las matrices de similitud.** Las matrices de similitud representan la coincidencia o similitud entre las preferencias de los expertos. Para cada par de expertos, e_i, e_j $(i = 1, \ldots, m-1,\ j = i+1, \ldots, m)$, se define una matriz de

similitud, $SM_{ij} = (sm_{ij}^{lk})$, donde

$$sm_{ij}^{lk} = 1 - \frac{|\Delta_{t'}^{-1}(TF_{t'}^{t}(p_i^{lk})) - \Delta_{t'}^{-1}(TF_{t'}^{t}(p_j^{lk}))|}{n(t') - 1},$$

siendo $p_i^{lk} = (s_v^{n(t)}, \alpha_1)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, $p_j^{lk} = (s_w^{n(t)}, \alpha_2)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, y $t' \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$.

2. **Cálculo de la matriz de consenso.** Se calcula una matriz de consenso, $CM = (cm^{lk})$, agregando todas las matrices de similitud, usando la media aritmética como función de agregación ϕ. Conceptualmente, esta matriz representa la similitud entre todas las preferencias de todos los expertos y contiene la información a partir de la cual se va a calcular el grado de consenso,

$$cm^{lk} = \phi(sm_{ij}^{lk},\ i = 1, \ldots, m-1,\ j = i+1, \ldots, m).$$

Nota 4.1. Aunque hemos usado la media aritmética como función de agregación, ya que consideramos a todos los expertos igualmente importantes, diferentes operadores de agregación podrían usarse de acuerdo a los propiedades particulares que queramos implementar.

3. **Cálculo de los grados de consenso.** Una vez que se ha calculado la matriz de consenso CM, procedemos a calcular los grados de consenso. Una de las características de este modelo es la posibilidad de conocer con detalle la distribución del consenso dentro del conjunto de preferencias dadas por los expertos. No sólo se mide el grado de consenso general alcanzado entre los expertos, sino que también se mide el grado de consenso que existe en una alternativa o en cada par de alternativas concreto. Este conocimiento exhaustivo de la contribución de cada preferencia a alcanzar el consenso permite al modelo identificar de forma muy precisa aquellas preferencias en las que existe mayor discrepancia y proponer que los cambios les afecten exclusivamente a ellas. De este modo, se garantiza que las preferencias

en las que existe suficiente acuerdo no sean modificadas y que en aquellas en las que no existe se pueda alcanzar en un futuro, siempre y cuando los cambios se realicen en la dirección adecuada. Los detalles para llevar a cabo los cambios en las preferencias se verán más adelante en el apartado dedicado a la generación de recomendaciones, centrándonos ahora en las operaciones del cálculo de los distintos grados de consenso.

El modelo propone calcular el grado de consenso en tres niveles diferentes: pares de alternativas, alternativas y relación.

a) **Nivel 1.** *Grado de consenso sobre pares de alternativas.* El grado de consenso sobre un par de alternativas (x_l, x_k), llamado cp^{lk}, se define para medir el grado de consenso entre todos los expertos sobre ese par de alternativas. Cuanto más cercano sea cp^{lk} a 1, mayor es el acuerdo entre todos los expertos sobre ese par de alternativas (x_l, x_k). Por tanto, esta medida se usa para identificar aquellos pares de alternativas con un pobre nivel de consenso y se expresa por el elemento (l, k) de la matriz de consenso CM:

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \ \forall \ l, k = 1, \ldots, n \wedge l \neq k.$$

b) **Nivel 2.** *Grado de consenso sobre alternativas.* El grado de consenso sobre una alternativa x_l, llamado ca^l, se define para medir el grado de consenso entre todos los expertos sobre esa alternativa:

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, k\neq l}^{n} cp^{lk}}{n-1}.$$

Con esta medida se puede saber el grado de consenso que existe sobre las preferencias dadas a cada alternativa.

c) **Nivel 3.** *Grado de consenso sobre la relación.* El grado de consenso sobre la relación, llamado cr, se define para medir el grado de consenso global entre todas las opiniones de los expertos. Se calcula como la media aritmética de todos los grados de consenso sobre las alternativas:

$$cr = \frac{\sum_{l=1}^{n} ca^l}{n}.$$

Este valor es fundamental, ya que es utilizado por el modelo de consenso para conocer el nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda de consenso y como condición de parada del proceso de consenso tal y como veremos en el siguiente apartado.

4.3.4. Control de Consenso

El proceso de control de consenso involucra decidir si el mecanismo de realimentación debería aplicarse para proporcionar consejo a los expertos o si el proceso de consenso debería terminar. Para hacer esto, se fija un mínimo umbral de consenso, $\gamma \in [0, 1]$, antes de aplicar el modelo de consenso. Este mínimo umbral de consenso dependerá del problema particular con el que estemos trabajando. Por un lado, cuando las consecuencias de la decisión tengan una gran importancia, el mínimo nivel de consenso requerido para tomar la decisión debería ser lógicamente tan alto como sea posible, y no es inusual si se establece un valor mínimo de 0.8 o mayor. Por otro lado, si las consecuencias no son tan importantes o es urgente obtener una solución al problema, podría requerirse un valor mínimo de consenso tan cercano como sea posible a 0.5.

En cualquier caso, cuando la medida de consenso cr satisface el mínimo umbral de consenso γ, el proceso de consenso finaliza y el proceso de selección se aplica para obtener la solución final.

Es necesario destacar que si el valor del mínimo umbral de consenso γ es muy alto, es posible que los expertos nunca alcancen un grado de consenso igual o superior a γ, o bien que el tiempo empleado para alcanzarlo sea demasiado largo. Para evitar esta situación, se ha definido un parámetro denominado *MaxRondas* que impide que se lleve a cabo un número mayor de rondas de consenso al previsto inicialmente. Si se llega a esta situación, hay varias formas de proceder, tal y como se indica en [187], habiéndose optado en esta propuesta por la opción de dar por terminado el proceso de consenso, indicando que no se ha alcanzado el acuerdo deseado y dando paso al proceso de selección de alternativas.

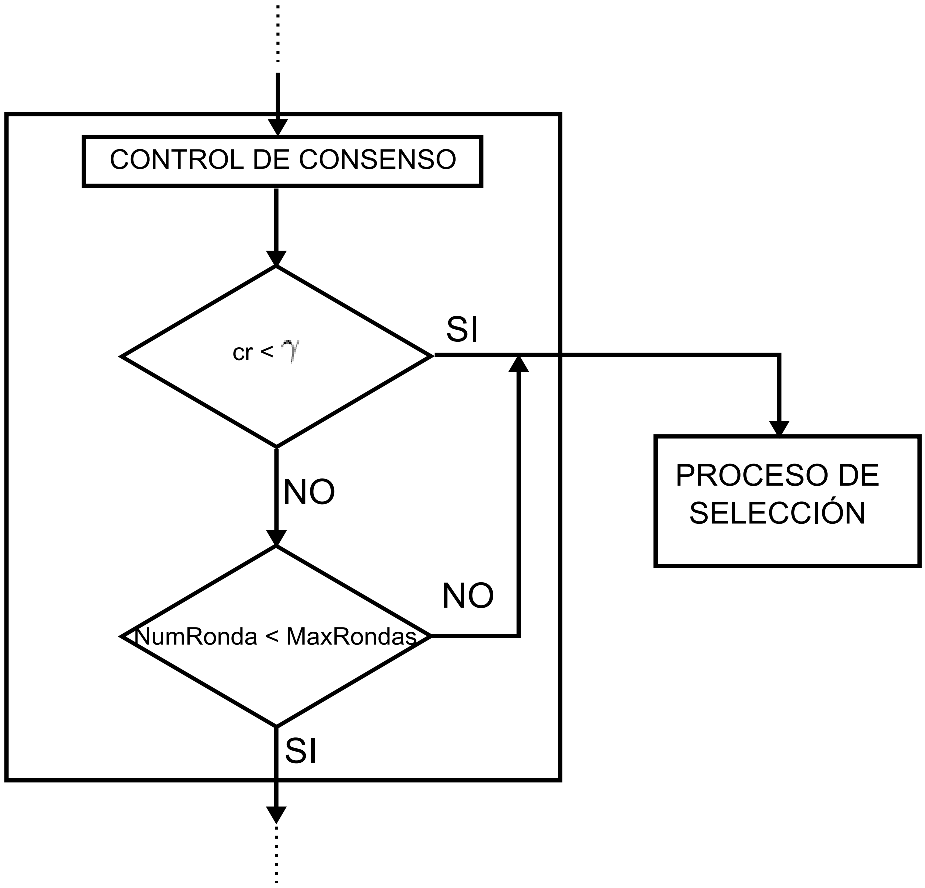

Figura 4.6: Control de consenso.

De esta forma, la operación del proceso de control de consenso es la siguiente (Figura 4.6): primero, la medida de consenso global *cr* se compara con el mínimo umbral de consenso γ. Si $cr > \gamma$, el proceso de consenso termina y el proceso de selección se aplica. En otro caso, se comprobará si el máximo número de rondas ha sido alcanzado. Si es así, el proceso de consenso termina y el proceso de selección se aplica, y si no, se activa el mecanismo de realimentación.

4.3.5. Mecanismo de Realimentación

Como acabamos de mencionar, si la medida de consenso global es menor que un mínimo umbral de consenso, las opiniones de los expertos deben modificarse. Cuando se explicó el funcionamiento de los procesos de consenso en la Sección 1.3.1, comentamos que una tarea fundamental del moderador era la de aconsejar o recomendar a los expertos hacer cambios en sus preferencias más discrepantes para acercar sus posiciones y así incrementar el nivel de acuerdo. Este es el objetivo que se persigue en esta fase.

El resultado de las operaciones que se realizan en esta fase es un conjunto de recomendaciones donde se sugiere la dirección en la que los expertos deben cambiar las preferencias más discrepantes. Para hacer esto, el mecanismo de realimentación usa medidas de proximidad para identificar a aquellos expertos más alejados de la opinión colectiva y a continuación aplicar un mecanismo de recomendaciones o producción de consejo. Seguidamente, tanto el cálculo de las medidas de proximidad como la producción de consejo son explicadas en detalle.

4.3.5.1. Cálculo de las Medidas de Proximidad

Las medidas de proximidad evalúan la distancia entre las preferencias individuales de cada uno de los expertos y una preferencia colectiva que representa la preferencia del grupo de expertos. Son utilizadas en nuestro modelo para identificar los expertos cuyas opiniones están más alejadas de la opinión del grupo y de ahí que puedan ser consideradas como las más discrepantes.

Para calcular estas medidas, el modelo realiza las siguientes operaciones:

1. **Cálculo de la relación de preferencia colectiva.** Para identificar las preferencias más alejadas, es necesario calcular previamente una preferencia que represente la posición intermedia en la que se encuentran todos los expertos. La relación de preferencia lingüística difusa no balanceada colectiva, $P_c = (p_c^{lk})$, se obtiene a partir de las relaciones de preferencia individuales y representa la preferencia media dada por el conjunto de expertos. Se calcula agregando todas las relaciones de preferencia individuales, $\{P_1, \ldots, P_m\}$, de la siguiente forma:

$$p_c^{lk} = \phi_{un}(p_1^{lk}, \ldots, p_m^{lk}),$$

con ϕ_{un} el operador $LOWA_{un}$ definido en la Sección 4.1.

2. **Cálculo de la matriz de proximidad.** Una vez que se obtiene la matriz de preferencia colectiva P_c, para cada experto e_i se obtiene una matriz de proximidad, $PM_i = (pm_i^{lk})$, donde

$$pm_i^{lk} = 1 - \frac{\left|\Delta_{t'}^{-1}(TF_{t'}^{t}(p_i^{lk})) - \Delta_{t'}^{-1}(TF_{t'}^{t}(p_c^{lk}))\right|}{n(t') - 1},$$

siendo $p_i^{lk} = (s_v^{n(t)}, \alpha_1)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, $p_c^{lk} = (s_w^{n(t)}, \alpha_2)$, $t \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$, y $t' \in \{t^-, t_2^-, t^+, t_2^+\}$.

Los elementos de la matriz de proximidad representan la distancia entre las preferencias individuales del experto y la preferencia colectiva.

3. **Cálculo de las medidas de proximidad.** Utilizando un razonamiento similar al utilizado para justificar el cálculo de las medidas de consenso en diferentes niveles, el modelo también calcula proximidad a nivel de pares de alternativas, alternativas y relación.

   a) **Nivel 1.** *Medida de proximidad sobre pares de alternativas.* Dado un experto e_i, la medida de proximidad del par de alternativas (x_l, x_k), denominada pp_i^{lk}, mide la distancia que existe en ese par entre la preferencia del experto y la preferencia colectiva, coincidiendo, en este caso, con el elemento (l, k) de la matriz de proximidad PM_i:

$$pp_i^{lk} = pm_i^{lk},\ \forall\ l, k = 1, \ldots, n \wedge l \neq k.$$

b) **Nivel 2.** *Medida de proximidad sobre alternativas.* Dado un experto e_i, la medida de proximidad de la alternativa x_l, denominada pa_i^l, mide la distancia entre las preferencias del experto y la preferencia colectiva evaluada a nivel de esa alternativa. Fijada una alternativa x_l, pa_i^l se calcula como la media aritmética de todos los pp_i^{lk}:

$$pa_i^l = \frac{\sum_{k=1, k\neq l}^{n} pp_i^{lk}}{n-1}.$$

c) **Nivel 3.** *Medida de proximidad sobre la relación.* Dado un experto e_i, la medida de proximidad de la relación de preferencia P_i, denominada pr_i, mide la distancia global entre el conjunto de preferencias del experto y la preferencia colectiva. Se calcula como la media aritmética de las medidas de proximidad a nivel de alternativas:

$$pr_i = \frac{\sum_{l=1}^{n} pa_i^l}{n}.$$

4.3.5.2. Producción de Consejo

Un proceso de búsqueda del consenso puede verse como un proceso de acercamiento de unas posturas u opiniones iniciales que inexorablemente va a llevar aparejado una serie de cambios en las preferencias de los expertos. Un problema que se les puede plantear a los expertos a la hora de cambiar sus preferencias es la elección de la dirección más adecuada en la que han de hacer los cambios para conseguir acercar sus opiniones. Hemos de tener en cuenta que si los cambios no se realizan en la dirección correcta se producirá un alejamiento de las preferencias y, por lo tanto, una disminución en el grado de consenso. En situaciones de decisión del mundo real, este problema queda resuelto con la intervención del moderador que, al conocer con detalle las opiniones de los expertos, recomienda la dirección de los cambios más idónea para aproximar las preferencias.

En nuestro modelo, esta función la realiza un sistema de producción de consejo, consiguiendo eliminar la figura del moderador de esta forma. Este sistema tiene asignados dos objetivos:

1) Identificar de una forma precisa los expertos, alternativas y pares de alternativas que no contribuyen favorablemente a la consecución del consenso.

2) Recomendar la dirección en la que los expertos deben cambiar sus preferencias para aproximar sus opiniones y, por lo tanto, incrementar el grado de acuerdo en las siguientes rondas de consenso.

Para conseguir ambos objetivos se han definido dos conjuntos de reglas cuya descripción y funcionamiento se presentan a continuación:

1. **Reglas de identificación (IR).** Las reglas de identificación seleccionan los pares de alternativas que los expertos han de cambiar. Con estas reglas se consigue que el modelo propuesto recomiende cambiar sólo aquellas preferencias en las que no existe suficiente consenso, dejando de lado aquellas otras en las que el consenso es satisfactorio. De este modo, se asegura que el nivel de acuerdo vaya aumentando a lo largo del proceso de consenso siempre y cuando los cambios se produzcan en la dirección apropiada.

   Se han definido tres reglas que se aplican secuencialmente y que identifican, en primer lugar, a los expertos que han de cambiar sus preferencias. A continuación, las alternativas en las que no hay consenso y, finalmente, los pares más alejados en dichas alternativas y, por lo tanto, las que deben modificarse.

a) *Regla de identificación de expertos (IR.1).* Identifica el conjunto de expertos que deberían recibir consejo sobre cómo cambiar algunos de sus valores de preferencia. Este conjunto de expertos, llamado $EXPCH$, que deberían cambiar sus opiniones, son aquellos cuya medida de proximidad a la relación es menor que el mínimo umbral de consenso γ. Por lo tanto, la regla de identificación de expertos es la siguiente:

$$EXPCH = \{i \mid pr_i < \gamma\}.$$

b) *Regla de identificación de alternativas (IR.2).* Identifica las alternativas cuyas valoraciones asociadas deberían tenerse en cuenta por los expertos anteriores en el proceso de cambio de sus preferencias, ya que en ellas no existe un grado de consenso suficiente. Este conjunto de alternativas se denota como ALT. La regla de identificación de alternativas es la siguiente:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < \gamma\},$$

donde ca^l es el grado de consenso a nivel de alternativas y γ es el mínimo umbral de consenso.

c) *Regla de identificación de pares de alternativas (IR.3).* Identifica los pares de alternativas particulares (x_l, x_k) cuyas valoraciones respectivas asociadas, p_i^{lk}, el experto e_i debería cambiar. Este conjunto de pares de alternativas se denota como $PALT_i$. La regla de identificación de pares de alternativas es la siguiente:

$$PALT_i = \{(x_l, x_k) \mid x_l \in ALT \wedge e_i \in EXPCH \wedge pp_i^{lk} < \gamma\},$$

siendo pp_i^{lk} la medida de proximidad a nivel de pares de alternativas y γ el mínimo umbral de consenso.

2. **Reglas de dirección (DR).** Identificado los pares de alternativas $(x_l, x_k) \in PALT_i$ que cada experto e_i debe modificar, el modelo recomienda la dirección

en la que han de hacerse tales cambios para mejorar el acuerdo. El resultado de aplicar las reglas de dirección será recomendar que se incremente o decremente las valoraciones de las preferencias a cambiar. Por ejemplo, si un experto e_i ha de cambiar la preferencia $p_i^{lk} = s_j$, el modelo de consenso le recomendará incrementarla, $p_i^{lk} = s_n$, siendo $n > j$, o decrementarla, $p_i^{lk} = s_m$, siendo $m < j$. Para hacer esto, definimos las siguientes reglas de dirección.

a) *DR.1.* Si $p_i^{lk} > p_c^{lk}$, el experto e_i debería decrementar la valoración asociada al par de alternativas (x_l, x_k), esto es, p_i^{lk}.

b) *DR.2.* Si $p_i^{lk} < p_c^{lk}$, el experto e_i debería incrementar la valoración asociada al par de alternativas (x_l, x_k), esto es, p_i^{lk}.

Obviamente, el proceso de consenso dependerá del tamaño del grupo de expertos, así como del conjunto de alternativas, de forma que cuando los tamaños sean pequeños y cuando las opiniones sean homogéneas, el nivel de consenso requerido es más fácil de obtener [123, 238]. Por otro lado, notamos que los cambios en las opiniones de los expertos producirán un cambio en la opinión colectiva, especialmente cuando las opiniones de los expertos son bastante diferentes, es decir, en las primeras etapas del proceso de consenso. En realidad, cuando las opiniones de los expertos son parecidas, es decir, cuando la medida de consenso se aproxima al nivel de consenso requerido, los cambios en las opiniones de los expertos no producirán una gran diferencia en la opinión colectiva.

4.4. Ejemplo de Aplicación

Por simplicidad, asumiremos un número bajo de expertos y alternativas. Vamos a suponer que cuatro expertos diferentes, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, proporcionan las siguientes relaciones de preferencia lingüísticas difusas no balanceadas sobre un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, usando el conjunto de términos lingüísticos difusos no balanceado $\mathcal{S}_{un} = \{N, MB, B, M, A, BA, MA, T\}$ (Figura 4.2 y Figura 4.3):

$$P_1 = \begin{pmatrix} - & A & BA & B \\ MB & - & M & A \\ B & M & - & B \\ MA & MB & MA & - \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} - & MB & B & MA \\ A & - & BA & T \\ BA & B & - & A \\ MB & N & B & - \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} - & MB & M & MA \\ A & - & BA & B \\ M & B & - & T \\ B & A & N & - \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} - & MA & BA & M \\ MB & - & M & MA \\ B & M & - & MB \\ M & B & BA & - \end{pmatrix}$$

Hay que notar que los expertos no proporcionan ningún valor α, lo cuál es una práctica común cuando se expresan preferencias con términos lingüísticos. En estos casos, establecemos $\alpha = 0$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} - & (A,0) & (BA,0) & (B,0) \\ (MB,0) & - & (M,0) & (A,0) \\ (B,0) & (M,0) & - & (B,0) \\ (MA,0) & (MB,0) & (MA,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & (MB,0) & (B,0) & (MA,0) \\ (A,0) & - & (BA,0) & (T,0) \\ (BA,0) & (B,0) & - & (A,0) \\ (MB,0) & (N,0) & (B,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} - & (MB,0) & (M,0) & (MA,0) \\ (A,0) & - & (BA,0) & (B,0) \\ (M,0) & (B,0) & - & (T,0) \\ (B,0) & (A,0) & (N,0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} - & (MA,0) & (BA,0) & (M,0) \\ (MB,0) & - & (M,0) & (MA,0) \\ (B,0) & (M,0) & - & (MB,0) \\ (M,0) & (B,0) & (BA,0) & - \end{pmatrix}$$

PRIMERA RONDA

A continuación, mostramos como aplicar cada paso del modelo de consenso.

1. **Cálculo de los grados de consenso:** Primero, el modelo de consenso calcula la matriz de similitud para cada par de expertos y, entonces, obtiene la matriz de consenso. Una vez obtenida, el modelo de consenso calcula los grados de consenso sobre los pares de alternativas, sobre las alternativas y sobre la relación.

   a) *Matrices de similitud:*

$$SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.50 & 0.50 & 0.37 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.62 \\ 0.50 & 0.75 & - & 0.62 \\ 0.25 & 0.87 & 0.37 & - \end{pmatrix}; SM_{13} = \begin{pmatrix} - & 0.50 & 0.75 & 0.37 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.62 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.25 \\ 0.37 & 0.50 & 0.12 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{14} = \begin{pmatrix} - & 0.75 & 1.00 & 0.75 \\ 1.00 & - & 1.00 & 0.75 \\ 1.00 & 1.00 & - & 0.87 \\ 0.62 & 0.87 & 0.87 & - \end{pmatrix}; SM_{23} = \begin{pmatrix} - & 1.00 & 0.75 & 1.00 \\ 1.00 & - & 1.00 & 0.25 \\ 0.75 & 1.00 & - & 0.62 \\ 0.87 & 0.37 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{24} = \begin{pmatrix} - & 0.25 & 0.50 & 0.62 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.50 & 0.75 & - & 0.50 \\ 0.62 & 0.75 & 0.50 & - \end{pmatrix}; SM_{34} = \begin{pmatrix} - & 0.25 & 0.75 & 0.62 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.37 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.12 \\ 0.75 & 0.62 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

b) *Matriz de consenso:*

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.54 & 0.70 & 0.62 \\ 0.66 & - & 0.83 & 0.58 \\ 0.70 & 0.83 & - & 0.50 \\ 0.58 & 0.66 & 0.56 & - \end{pmatrix}$$

c) *Grados de consenso sobre pares de alternativas.* El elemento (l, k) de CM representa los grados de consenso sobre el par de alternativas (x_l, x_k).

d) *Consenso sobre las alternativas:*

$$ca^1 = 0.62 \quad ca^2 = 0.69 \quad ca^3 = 0.67 \quad ca^4 = 0.60$$

e) *Consenso sobre la relación:*

$$cr = 0.65$$

2. **Control de consenso:** En este paso del modelo de consenso, el valor de consenso global cr se compara con el mínimo umbral de consenso γ. En este ejemplo, hemos decidido usar el valor, $\gamma = 0.75$. Como $cr < \gamma$, el modelo determina que no hay acuerdo entre los expertos y, consecuentemente, el modelo de consenso calcula las medidas de proximidad para ayudar a los expertos sobre los cambios necesarios en sus preferencias para incrementar cr.

3. **Mecanismo de realimentación:** En este paso, el modelo de consenso calcula las medidas de proximidad. Para hacer esto, el modelo de consenso obtiene, en primer lugar, la relación de preferencia lingüística difusa no balanceada colectiva

agregando todas las relaciones de preferencia individuales. En este caso, el modelo hace esto usando el operador $LOWA_{un}$ descrito en la Sección 4.1 y el cuantificador lingüístico *mayoría* definido como $Q(r) = r^{1/2}$, el cual, aplicando la *ecuación 1.3*, genera el siguiente vector de pesos $\{0.5, 0.20, 0.16, 0.14\}$.

$$P_c = \begin{pmatrix} - & (M, 0.40) & (A, 0.04) & (BA, -0.36) \\ (M, -0.30) & - & (BA, 0.46) & (BA, -0.46) \\ (M, 0.20) & (M, -0.40) & - & (A, 0.22) \\ (A, -0.38) & (M, -0.49) & (A, -0.26) & - \end{pmatrix}$$

a) **Cálculo de las medidas de proximidad:**

1) *Matrices de proximidad:*

$$PM_1 = \begin{pmatrix} - & 0.92 & 0.88 & 0.54 \\ 0.66 & - & 0.70 & 0.93 \\ 0.72 & 0.95 & - & 0.60 \\ 0.83 & 0.68 & 0.72 & - \end{pmatrix}; PM_2 = \begin{pmatrix} - & 0.57 & 0.62 & 0.83 \\ 0.83 & - & 0.94 & 0.69 \\ 0.65 & 0.80 & - & 0.97 \\ 0.55 & 0.56 & 0.65 & - \end{pmatrix}$$

$$PM_3 = \begin{pmatrix} - & 0.57 & 0.87 & 0.83 \\ 0.83 & - & 0.94 & 0.56 \\ 0.97 & 0.80 & - & 0.65 \\ 0.67 & 0.81 & 0.41 & - \end{pmatrix}; PM_4 = \begin{pmatrix} - & 0.67 & 0.88 & 0.80 \\ 0.66 & - & 0.70 & 0.82 \\ 0.72 & 0.95 & - & 0.47 \\ 0.92 & 0.81 & 0.84 & - \end{pmatrix}$$

2) *La proximidad sobre pares de alternativas para el experto e_i se da en PM_i.*

3) *Proximidad sobre alternativas:*

x_1	x_2	x_3	x_4
$pa_1^1 = 0.78$	$pa_1^2 = 0.76$	$pa_1^3 = 0.75$	$pa_1^4 = 0.74$
$pa_2^1 = 0.67$	$pa_2^2 = 0.82$	$pa_2^3 = 0.80$	$pa_2^4 = 0.58$
$pa_3^1 = 0.75$	$pa_3^2 = 0.77$	$pa_3^3 = 0.80$	$pa_3^4 = 0.63$
$pa_4^1 = 0.78$	$pa_4^2 = 0.72$	$pa_4^3 = 0.71$	$pa_4^4 = 0.86$

4) *Proximidad sobre la relación:*

$$pr_1 = 0.76 \quad pr_2 = 0.72 \quad pr_3 = 0.74 \quad pr_4 = 0.77$$

b) **Producción de Consejo.**

1) *Reglas de Identificación.*

IR.1. Conjunto de expertos que deben cambiar sus preferencias:

$$EXPCH = \{i \mid pr_i < 0.75\} = \{e_2, e_3\}$$

IR.2. Conjunto de alternativas cuyas valoraciones deberían considerarse en el proceso de cambio:

$$ALT = \{x_l \in X \mid ca^l < 0.75\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

IR.3. Conjunto de pares de alternativas cuyas valoraciones asociadas deberían cambiar:

$$PALT_2 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\},$$

el cual da la siguiente lista de valores de preferencia:

$$p_2^{12} \;\; p_2^{13} \;\; p_2^{24} \;\; p_2^{31} \;\; p_2^{41} \;\; p_2^{42} \;\; p_2^{43}$$

y $PALT_3 = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_3)\}$, el cual da la siguiente lista de valores de preferencia:

$$p_3^{12} \;\; p_3^{24} \;\; p_3^{34} \;\; p_3^{41} \;\; p_3^{43}$$

2) *Reglas de Dirección.*

Como $p_2^{12} < p_c^{12}$, $p_2^{13} < p_c^{13}$, $p_2^{41} < p_c^{41}$, $p_2^{42} < p_c^{42}$, $p_2^{43} < p_c^{43}$, $p_2^{24} > p_c^{24}$ y $p_2^{31} > p_c^{31}$ al experto e_2 se le aconseja que incremente las valoraciones de los cinco primeros valores de preferencia y decremente las valoraciones de los dos últimos valores de preferencia. Por la misma razón, como $p_3^{12} < p_c^{12}$, $p_3^{24} < p_c^{24}$, $p_3^{41} < p_c^{41}$, $p_3^{43} < p_c^{43}$ y $p_3^{34} > p_c^{34}$ al experto e_3 se le aconseja incrementar las valoraciones de los cuatro primeros valores de preferencia y decrementar la valoración del último valor de preferencia.

SEGUNDA RONDA

1. **Proporcionar nuevas preferencias:** En este ejemplo, suponemos que los expertos e_2 y e_3 siguen el consejo dado y, por lo tanto, sus nuevas relaciones de preferencia son las siguientes:

$$P_2 = \begin{pmatrix} - & (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (\mathbf{A},\mathbf{0}) & (MA,0) \\ (A,0) & - & (BA,0) & (\mathbf{BA},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (B,0) & - & (A,0) \\ (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (\mathbf{A},\mathbf{0}) & - \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} - & (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (M,0) & (MA,0) \\ (A,0) & - & (BA,0) & (\mathbf{BA},\mathbf{0}) \\ (M,0) & (B,0) & - & (\mathbf{A},\mathbf{0}) \\ (\mathbf{M},\mathbf{0}) & (A,0) & (\mathbf{A},\mathbf{0}) & - \end{pmatrix}$$

2. **Cálculo de los grados de consenso:**

   a) *Matrices de similitud:*

$$SM_{12} = \begin{pmatrix} - & 0.87 & 0.87 & 0.37 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.62 \\ 0.62 & 0.62 & 0.75 & - \end{pmatrix} ; SM_{13} = \begin{pmatrix} - & 0.87 & 0.75 & 0.37 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.62 \\ 0.62 & 0.50 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{14} = \begin{pmatrix} - & 0.75 & 1.00 & 0.75 \\ 1.00 & - & 1.00 & 0.75 \\ 1.00 & 1.00 & - & 0.87 \\ 0.62 & 0.87 & 0.87 & - \end{pmatrix} ; SM_{23} = \begin{pmatrix} - & 1.00 & 0.87 & 1.00 \\ 1.00 & - & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & - & 1.00 \\ 1.00 & 0.87 & 1.00 & - \end{pmatrix}$$

$$SM_{24} = \begin{pmatrix} - & 0.62 & 0.87 & 0.62 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.50 \\ 1.00 & 0.75 & 0.87 & - \end{pmatrix} ; SM_{34} = \begin{pmatrix} - & 0.62 & 0.75 & 0.62 \\ 0.50 & - & 0.75 & 0.87 \\ 0.75 & 0.75 & - & 0.50 \\ 1.00 & 0.62 & 0.87 & - \end{pmatrix}$$

b) *Matriz de consenso:*

$$CM = \begin{pmatrix} - & 0.78 & 0.85 & 0.63 \\ 0.66 & - & 0.83 & 0.87 \\ 0.83 & 0.83 & - & 0.68 \\ 0.81 & 0.71 & 0.85 & - \end{pmatrix}$$

c) *Grados de consenso sobre pares de alternativas.* El elemento (l, k) de CM representa el grado de consenso sobre el par de alternativas (x_l, x_k).

d) *Consenso sobre alternativas:*

$$ca^1 = 0.75 \quad ca^2 = 0.79 \quad ca^3 = 0.78 \quad ca^4 = 0.79$$

e) *Consenso sobre la relación:*

$$cr = 0.78$$

3. **Control del estado de consenso:** Como podemos observar, los cambios en los valores de preferencia introducidos dan como resultado un incremento del consenso global de 0.65 a 0.78. De esta forma, el mínimo umbral de consenso es alcanzado, $cr = 0.78 > \gamma = 0.75$, y, por lo tanto, el modelo de consenso pararía y el proceso de selección sería aplicado para obtener la solución final de consenso.

4.5. Herramienta de Visualización para Guiar el Consenso en Problemas de Toma de Decisión en Grupo

En esta sección, presentamos una herramienta para la elaboración de diagramas de consenso, los cuales se utilizan para ayudar a los expertos a comprender fácilmente el estado actual de consenso en el problema de decisión. Esta herramienta está basada en medidas de consenso y similitud, y junto con la aplicación de un algoritmo de clustering identifica y representa los diferentes grupos de expertos con opiniones similares y un posible candidato como portavoz de cada grupo.

El proceso de consenso involucra la comunicación y discusión entre expertos y entre los expertos y el moderador. Por tanto, automatizar totalmente el proceso de consenso es una tarea bastante difícil debido al alto número de interacciones necesarias. Sin embargo, podemos encontrar varias aproximaciones y herramientas que hacen uso de nuevas tecnologías (principalmente tecnologías web) para adaptar los procesos de consenso clásicos a nuevos entornos [11, 145, 146].

La aplicación de estas nuevas tecnologías permite realizar procesos de consenso en situaciones en las que anteriormente no sería posible. Por ejemplo, podemos llevar a cabo procesos entre varios expertos localizados en diferentes países a lo largo del mundo. Por tanto, es importante notar que incluso con la adopción de nuevas tecnologías de comunicación (vídeo conferencias, salas de chat, mensajería instantánea, e-mail, etc.), los expertos podrían encontrar dificultades para discutir y colaborar entre ellos a la hora de resolver los problemas de Toma de Decisión en Grupo donde no pueden estar físicamente reunidos.

Debido a esto, en los procesos de consenso para problemas de Toma de Decisión en Grupo donde los expertos no tienen la posibilidad de estar juntos, éstos podrían no tener una idea clara sobre el actual estado de consenso entre todos los expertos involucrados en el proceso de decisión. En los modelos de Toma de Decisión usuales, donde los expertos están juntos para discutir sus opiniones sobre las diferentes alternativas, es relativamente fácil determinar qué expertos tienen opiniones similares atendiendo a la discusiones entre los expertos y, por tanto, los expertos pueden unirse o formar diferentes grupos para discutir mejor y razonar sobre los pros y contras de cada alternativa. Además, cuando los expertos pueden determinar el estado de consenso del proceso de decisión, es más fácil para ellos influenciar a otros expertos [84].

Sin embargo, en los casos donde la comunicación directa no es posible, los expertos probablemente encontrarán dificultades para establecer conexiones entre ellos y obtener una vista clara del progreso del proceso de consenso. Este problema se incrementa cuando el número de expertos en el problema es alto.

Para resolver este problema, proponemos usar nuevas técnicas y herramientas para generar automáticamente información de alto nivel y diagramas de consenso simples sobre el estado de consenso en el problema de decisión que está siendo resuelto. Entre otra información, podremos identificar grupos de expertos separados con opiniones comunes sobre las alternativas en el problema, seleccionar un candidato para en uno de los grupos para actuar, en caso necesario, como portavoz del grupo, e identificar individuos aislados, es decir, aquellos cuyas preferencias sobre las alternativas son muy diferentes de las preferencias del resto de expertos. Además, se generarán diagramas de consenso en los que se muestra el estado actual de consenso. En estos diagramas de consenso, los expertos serán dibujados como los nodos de un grafo que estarán separados de acuerdo a la afinidad de sus preferencias sobre las alternativas del problema. Además, en estos grafos, introduciremos la posición relativa de la solución de consenso. Estos diagramas de consenso permitirán a los expertos tener una visión más clara sobre el actual proceso de consenso y sobre qué expertos tienen opiniones similares o diferentes sobre las alternativas. Estos diagramas serán dibujados por una herramienta de visualización que tiene en cuenta los expertos y medidas de consenso en tres niveles diferentes. Además, usa un algoritmo de clustering (k-medias [163]) para agrupar a los expertos de acuerdo a sus opiniones sobre las alternativas. Finalmente, otra de las ventajas de esta herramienta de visualización es que puede ser integrada fácilmente en los modelos de consenso existentes.

4.5.1. Medidas de Similitud y Algoritmo de Clustering para el Agrupamiento de Expertos

En esta sección, presentamos nuevas medidas de similitud que pueden calcularse a partir de las relaciones de preferencia expresadas por los expertos. Estas medidas, como las medidas de consenso presentadas en la Sección 4.3.3, se calculan en tres niveles diferentes (pares de alternativas, alternativas y relación) para cada par de expertos en el problema.

4.5.1.1. Medidas de Similitud

A partir de la matriz de similitud SM_{ij} presentada en la Sección 4.3.3, definimos varias medidas de similitud entre los expertos en tres niveles diferentes.

Definición 4.2. La medida de similitud de la preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k de los expertos e_i y e_j es sm_{ij}^{lk}.

Cuanto más cercano sea sm_{ij}^{lk} a 1, más similar es la preferencia de la alternativa x_l sobre la alternativa x_k de los expertos e_i y e_j.

Siguiendo el mismo esquema, calculamos las medidas de similitud a nivel de alternativas y de relación:

Definición 4.3. Una medida de similitud para los expertos e_i y e_j sobre una alternativa particular x_l se calcula como:

$$sm_{ij}^{l} = \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ l \neq k}}^{n} (sm_{ij}^{lk} + sm_{ij}^{kl})}{2(n-1)}.$$

Cuanto más cercano sea sm_l^{ij} a 1, más similar es la preferencia de los expertos e_i y e_j sobre la alternativa x_l.

Definición 4.4. Una medida de similitud global para los expertos e_i y e_j se calcula como:

$$sm_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{n} sm_{ij}^{l}}{n}.$$

Cuanto más cercano es sm_{ij} a 1, más similares son las preferencias de los expertos e_i y e_j.

4.5.1.2. Algoritmo de Clustering para el Agrupamiento de Expertos

Vamos ahora a describir la aplicación del algoritmo de clustering que permite agrupar a los diferentes expertos en el problema de acuerdo a sus preferencias. Este agrupamiento puede usarse para detectar a los expertos en el problema que tienen opiniones parecidas. Esta clase de información puede ser muy útil en problemas de Toma de Decisión en Grupo donde los expertos no tienen la posibilidad de estar juntos para discutir las alternativas que finalmente son la solución del consenso (por ejemplo, en procesos de consenso web) porque puede ayudar a los expertos a diferenciar claramente cuales de los otros expertos tienen opiniones similares y, por tanto, unirse a ellos para discutir efectivamente con el resto de los expertos con diferentes preferencias. El algoritmo puede aplicarse a grupos de expertos de acuerdo a un valor de preferencia, a una alternativa o a la relación de preferencia. Para ello, usamos las medidas de consenso y similitud en los tres niveles.

El algoritmo que hemos usado es una variación del algoritmo de las k-medias [163]. Debemos notar que este algoritmo, además de las distancias entre los puntos al cluster, toma como entrada un parámetro k que representa el número de clusters en los cuales los puntos van a ser organizados. De esta forma, es tarea de la persona que define el problema proporcionar un valor apropiado para k al algoritmo de clustering.

El algoritmo comienza asociando aleatoriamente cada experto a uno de los k clusters. Una vez que todos los expertos han sido asignados a un cluster, el algoritmo calcula el centroide de los clusters de una forma similar a como hicimos con P_c. La matriz de similitud se calcula entre cada par de expertos y los centroides, y el cluster de cada experto se cambia al centroide más cercano. El proceso se repite hasta que no hay más cambios en los clusters. Cuando el algoritmo de clustering finaliza, devuelve un conjunto de k grupos de expertos:

$$EG = \{eg_1, \ldots, eg_k\} \mid \cup_{i=1}^{k} eg_i = E \ \wedge \ \cap_{i=1}^{k} eg_i = \emptyset.$$

Además, podemos calcular el experto más representativo de cada uno de los grupos, esto es, el experto más cercano al centroide de su cluster. Calcular cuál es el experto más representativo para un grupo de expertos que tienen opiniones similares pueden ser de gran importancia para situaciones de Toma de Decisión en Grupo donde hay muchos expertos involucrados. En estos casos, cuando el proceso de consenso está en una etapa avanzada, el experto más representativo de cada grupo puede actuar como portavoz para acelerar y terminar con éxito el proceso de consenso.

4.5.2. Herramienta para Visualizar el Estado de Consenso en Problemas de Toma de Decisión en Grupo

La herramienta de visualización genera diagramas de consenso en los cuáles los expertos del problema están dibujados en diferentes localizaciones dependiendo de la similitud de sus opiniones. De esta forma, los expertos con opiniones similares serán dibujados unos cerca de otros, mientras que los expertos cuyas opiniones difieren bastante serán dibujados alejados unos de otros. Estos diagramas pueden ser muy simples y directos para identificar cuál es el actual estado de consenso del problema.

Para dibujar los diagramas de consenso, usamos un algoritmo [81] en el cual los expertos corresponden a los nodos del grafo y una medida de similitud entre cada par de expertos actúa como la longitud asociada a cada camino del grafo.

Como hemos definido varias medidas de similitud, la herramienta puede usar diferentes medidas de similitud dependiendo de la información que queramos visualizar. Por ejemplo, si necesitamos una vista general del estado de consenso para el problema, podemos elegir usar las medidas de similitud globales sm_{ij}, pero si queremos visualizar el estado de consenso de una alternativa particular x_l podemos elegir usar las medidas de similitud sm_{ij}^l.

Finalmente, la herramienta usa diferentes colores para representar los diferentes grupos de expertos y, de esta forma, reconocer fácilmente las facciones de opinión principales en el proceso de consenso. Además, marca las posiciones relativas de la solución de consenso global actual P_c, los centroides para cada uno de los grupos de expertos y los expertos que están más cercanos al centroide para cada grupo, es decir, el posible representante o portavoz de cada grupo.

4.5.3. Ejemplo de Diagrama de Consenso

La Figura 4.7 representa una captura de uno de los diagramas de consenso generados por la herramienta de visualización para un problema de Toma de Decisión en Grupo de ejemplo. En el problema, 7 expertos son requeridos para seleccionar la mejor alternativa de entre cuatro posibles. Los expertos han proporcionado sus opiniones sobre las alternativas en forma de relaciones de preferencia lingüísticas difusas no balanceadas. Como puede verse, existen dos grupos principales de expertos (el rojo y el azul) y dos expertos aislados (*Sergio* y *Javier*), que son aquellos cuyas opiniones son bastante diferentes del resto de expertos (en verde).

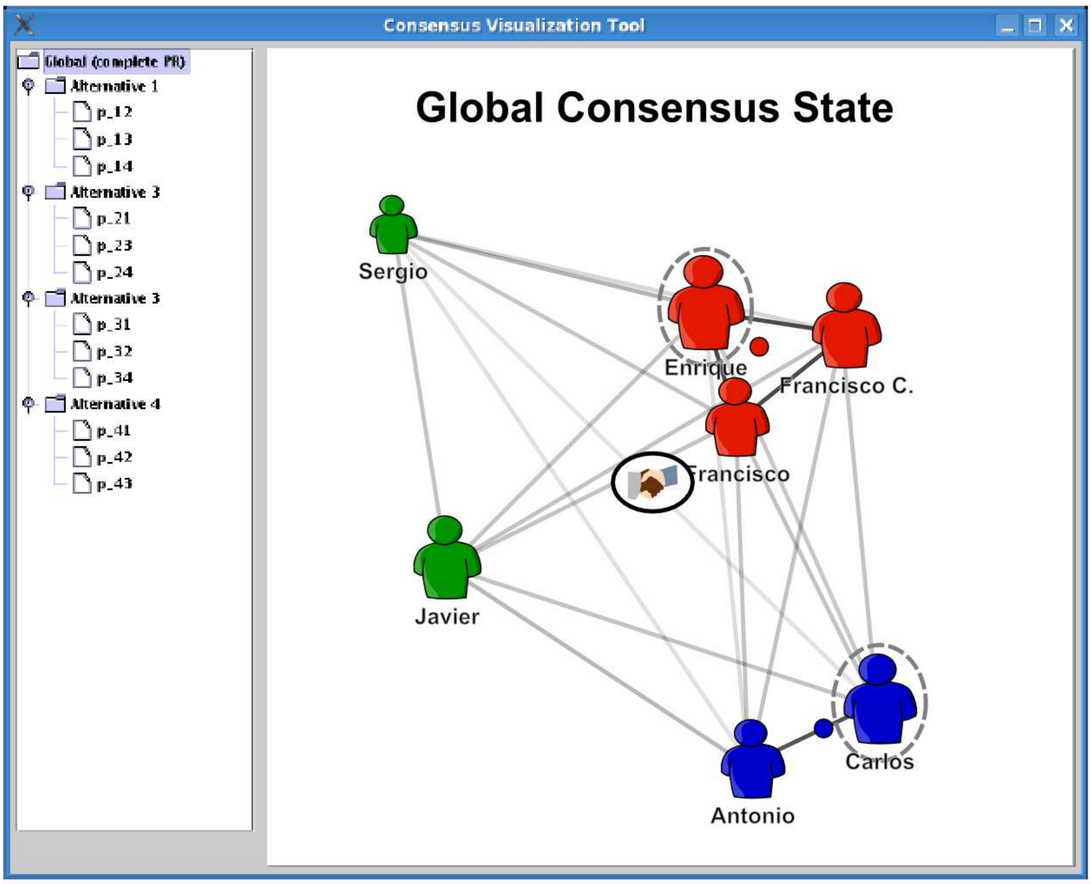

Figura 4.7: Herramienta de visualización del estado de consenso.

Las distancias entre los expertos dependen de la similitud entre sus opiniones y, por tanto, tan sólo mirando el diagrama una vez, podemos inferir que la opinión de *Javier* es bastante diferente de la opinión del resto de expertos.

Los centroides de los diferentes grupos han sido marcados con puntos de colores. A partir de estos puntos, podemos decir que aunque *Enrique*, *Francisco* y *Francisco C.* tienen opiniones similares (pertenecen al mismo grupo), *Enrique* es el mejor candidato para ser el portavoz del grupo si es requerido. El mismo razonamiento se aplica para seleccionar a *Carlos* como candidato para portavoz del grupo azul.

Finalmente, la actual solución de consenso, pintada como un *apretón de manos*, nos dice que el grupo rojo y *Javier* son las facciones cuyas opiniones son más cercanas a la actual solución de consenso.

Conclusiones y Trabajos Futuros

A continuación, revisamos cuáles han sido las principales propuestas y los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria y proponemos cuáles son las líneas de investigación y trabajos futuros que nos planteamos construir a partir de estos resultados. Finalmente, presentamos una lista de las publicaciones derivadas de los resultados de nuestra investigación en este campo.

Propuestas y Resultados Obtenidos

En esta memoria hemos estudiado los procesos de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa. Para ello, hemos propuesto nuevos modelos tanto para el proceso de selección como para el proceso de consenso que tienen lugar en esta clase de problemas. Además, se ha propuesto una herramienta de visualización para comprender mejor el estado actual de consenso. Teniendo esto en cuenta, los resultados presentados en esta memoria y algunas conclusiones sobre los mismos se exponen en los siguientes puntos:

1. **Sobre el modelado de situaciones de falta de información.**

   En esta memoria hemos presentado las *relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas* como modelo de representación de preferencias para modelar situaciones de falta de información de manera apropiada. Sobre este aspecto hemos obtenido las siguientes conclusiones:

a) Los modelos usuales de representación de preferencias no están preparados para tratar correctamente las situaciones de falta de información con información lingüística difusa. De hecho, para solucionar este tipo de problemas, tradicionalmente se confunde el concepto de falta de información con el de incertidumbre en la información. Sin embargo, con las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas, hemos comprobado que se pueden modelizar de manera mucho más correcta este tipo de situaciones, diferenciando de manera mucho más clara la incertidumbre de la falta de información.

b) Un factor crítico que determinará en gran medida la calidad de las soluciones en los problemas de Toma de Decisión es la consistencia de la información que ofrecen los expertos, ya que usualmente la información contradictoria no nos proporcionará soluciones coherentes. Por tanto, es necesario el estudio de propiedades de consistencia que ayuden a evitar los problemas de inconsistencia en las preferencias expresadas por los expertos.

2. **Sobre el proceso de selección.**

Hemos desarrollado un proceso de selección nuevo que permite manejar correctamente las situaciones de falta de información en entornos de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística. Para ello, se usan las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas como formato de representación de preferencias y un nuevo *procedimiento de estimación* que es capaz de calcular los valores perdidos en las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas. Del desarrollo de este proceso de selección podemos extraer las siguientes conclusiones:

a) Los procesos de selección desarrollados hasta ahora no poseían ningún mecanismo eficiente que permitiera tratar situaciones de falta de información en entornos con información lingüística. Sin embargo, mediante el uso de las relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas y el procedimiento de estimación de valores perdidos, hemos verificado que las situaciones de falta de información pueden ser solucionadas eficientemente.

b) Este nuevo modelo de selección permite resolver problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa incompleta que con los modelos clásicos de selección de alternativas no pueden resolverse.

3. **Sobre el proceso de consenso.**

Hemos desarrollado un proceso de consenso nuevo que permite trabajar con problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada. Este modelo está basado tanto en grados de consenso como en medidas de proximidad que se calculan en tres niveles diferentes de representación de información: pares de alternativas, alternativas y relación. Además, el modelo de consenso se ha complementado con un mecanismo de realimentación que genera recomendaciones a los expertos sobre cómo deberían cambiar sus preferencias para conseguir una solución mejor de consenso. Del desarrollo de este proceso de consenso podemos extraer las siguientes conclusiones:

a) Los modelos de consenso típicos no tratan de manera correcta la información lingüística no balanceada. Sin embargo, este modelo permite superar el problema de encontrar diferentes niveles de discriminación a ambos lados del término lingüístico medio. Para ello, hemos presentado una nueva metodología para manejar la información lingüística difusa no balanceada.

b) El modelo de consenso propuesto consigue automatizar los procesos de consenso, sustituyendo la figura del moderador humano y realizando las operaciones que éste tiene asignadas.

c) Dentro de un contexto lingüístico difuso no balanceado, se han definido un conjunto de medidas y operadores para evaluar el nivel de acuerdo alcanzado a lo largo del proceso de consenso.

d) El modelo incorpora un sistema de realimentación basado en un conjunto de reglas que permite identificar las preferencias más discrepantes y recomendar la dirección en la que los expertos han de modificarlas para conseguir aproximarlas a las del resto de expertos y, de este modo, incrementar el grado de consenso paulatinamente.

4. **Sobre la herramienta de visualización.**

   Hemos presentado una herramienta que permite visualizar el estado del proceso de consenso. Esta herramienta hace uso de medidas de consenso y similitud junto con un algoritmo de clustering para generar diagramas de consenso donde los expertos se dibujan más cerca cuanto más similares son sus opiniones. Del desarrollo de esta herramienta de visualización podemos destacar:

   a) Permite identificar los principales grupos de expertos (aquellos con opiniones similares) y seleccionar un candidato como portavoz de cada grupo.

   b) Es una herramienta de gran ayuda para los expertos que participan en procesos de consenso donde no existe la posibilidad de permanecer juntos (por ejemplo, si el proceso de consenso se realiza mediante tecnologías web) y, consecuentemente, donde es difícil obtener una vista clara del actual estado de consenso.

Trabajos Futuros

En el mundo real, existen numerosas situaciones que pueden considerarse como problemas de Toma de Decisión en Grupo. Por lo tanto, sería interesante aplicar los modelos de selección y consenso presentados a dichas situaciones. Para llevarlo a cabo, nuestros futuros esfuerzos irán encaminados en los siguientes caminos:

- **Teóricos:**
  - Para incrementar el número de situaciones de Toma de Decisión en Grupo del mundo real que puedan ser modeladas, estudiaremos los problemas donde la información incompleta pueda ser expresada por los expertos con distintos formatos de representación de preferencias (otros tipos de relaciones de preferencia incompletas, valores de utilidad incompletos, etc.).
  - Para modelar procesos de consenso reales más complejos, se tendrían que desarrollar diversos cambios y adiciones a los modelos actuales. Por ejemplo, en los procesos de consenso reales es usualmente posible añadir y quitar alternativas (lo cual ocurre durante las discusiones de los expertos en las diversas rondas de consenso).
  - Profundizar en el estudio de técnicas de búsqueda de consenso e incorporarlas al modelo. El propósito de esta línea de investigación es la de representar situaciones que pueden darse en problemas del mundo real como puede ser el hecho de considerar que las opiniones de unos expertos son más relevantes que las de otros.
  - Adaptar el modelo de consenso propuesto para que pueda trabajar con problemas de Toma de Decisión en Grupo con información lingüística difusa no balanceada incompleta y añadirle medidas de consistencia para tener más en cuenta las opiniones de los expertos más consistentes.
- **Prácticos:**
  - Es importante implementar todos los modelos presentados en esta memoria para ser capaces de usarlos en diversos contextos. Debemos aprovechar las poderosas ventajas de comunicación que nos ofrece la World Wide Web hoy en día.

Por eso, implementar estos modelos usando las nuevas tecnologías de Internet permitiría llevar a cabo procesos de Toma de Decisión en Grupo en cualquier país del mundo, incluso cuando los expertos estén lejos unos de otros.

- Estudiar el desarrollo de mecanismos de realimentación más eficientes que produzcan recomendaciones más útiles y precisas para los expertos y, por tanto, ayuden a resolver los problemas de decisión de manera más eficiente.

Publicaciones

En relación a la difusión y publicación de los resultados presentados en esta memoria, destacaremos las siguientes publicaciones:

- dos publicaciones en revistas internacionales del JCR [4, 40].
- siete contribuciones en congresos internacionales [6, 8, 9, 10, 11, 41, 43].
- dos contribuciones en congresos nacionales [5, 42].

Bibliografía

[1] G.I. Adamopoulos and C.P. Pappis. A fuzzy linguistic approach to a multicriteria sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 92(3):628–636, 1996.

[2] C. Alcalde, A. Burusco, and R. Fuentes-González. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(2):211–227, 2005.

[3] S. Alonso. *Group Decision Making With Incomplete Fuzzy Preference Relations*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2006.

[4] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. An interactive decision support system based on consistency criteria. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 14(3–5):371–386, 2008.

[5] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana. A procedure to estimate missing information in group decision-making with fuzzy linguistic information. Actas del II Congreso Español de Informática (CEDI 2007). II Simposio sobre Lógica Fuzzy y Soft Computing (LFSC 2007), pages 131–138, Zaragoza (España), 2007.

[6] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A web consensus support system to deal with GDM problems under incomplete fuzzy preference relations. Proceedings of EUROFUSE Workshop on New Trends in

Preference Modeling (EUROFUSE 2007), pages 15–20, Jaén (España), 2007.

[7] S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. Alcalá-Fdez, and C. Porcel. A consistency-based procedure to estimate missing pairwise preference values. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(2):155–175, 2008.

[8] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F.J. Cabrerizo, F. Chiclana, and F. Herrera. Visualizing consensus in group decision making situations. Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2007), pages 1818–1823, Londres (Reino Unido), 2007.

[9] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F.J. Cabrerizo, C. Porcel, and A.G. López-Herrera. Using visualization tools to guide consensus in group decision making. International Workshop on Fuzzy Logic and Applications (WILF 2007), Lecture Notes in Computer Science 4578, Springer-Verlag, pages 77–85, Génova (Italia), 2007.

[10] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F.J. Cabrerizo, and F. Chiclana. A decision aid system to provide consistent linguistic preference relations. 6th International Conference on Recent Advances in Soft Computing (RASC 2006), pages 130–135, Canterbury (Reino Unido), 2006.

[11] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F.J. Cabrerizo, and F. Chiclana. An interactive support system to aid experts to express consistent preferences. 7th International FLINS Conference on Applied Artificial Intelligence, pages 425–432, Génova (Italia), 2006.

[12] C. Alsina, E. Trillas, and L. Valverde. On some logical connectives for fuzzy sets theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93(1):15–26, 1983.

[13] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: a linguistic fuzzy-set approach (LFSA). *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.

[14] W.E. Armstrong. Uncertainty and the utility function. *Economic Journal*,

58(228):1–10, 1948.

[15] K.J. Arrow. *Social choice and individual values.* Yale University Press, New Haven, 1963.

[16] K. Atanassov and G. Gargov. Interval valued intuitionistic fuzzy-sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 31(3):343–349, 1989.

[17] A. Basilevsky. *Applied matrix algebra in the statistical sciences.* Elsevier, New York, 1983.

[18] G. Beliakov, R. Mesiar, and L. Valaskova. Fitting generated aggregation operators to empirical data. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(2):219–236, 2004.

[19] G. Beliakov and J. Warren. Appropiate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(6):773–784, 2001.

[20] R.E. Bellman and L.A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):53–79, 1970.

[21] D. Ben-Arieh and Z. Chen. Linguistic group decision-making: opinion aggregation and measures of consensus. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 5(4):371–386, 2006.

[22] D. Ben-Arieh and Z. Chen. Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*, 36(3):558–568, 2006.

[23] J. Bezdek, B. Spillman, and R. Spillman. Fuzzy measures of preferences and consensus in group decision making. IEEE Conference on Decision and Control, pages 1303–1309, 1977.

[24] J. Bezdek, B. Spillman, and R. Spillman. A fuzzy relation space for group decision theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(4):255–268, 1978.

[25] T. Bilgiç. Interval-valued preference structures. *European Journal of Operational Research*, 105(1):162–183, 1998.

[26] P.P. Bonissone. *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, chapter A fuzzy sets based linguistic approach: theory and applications, pages 329–339. In: M.M. Gupta and E. Sánchez (Eds.). Norh-Holland Publishing Company, 1982.

[27] P.P. Bonissone and K.S. Decker. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, chapter Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity, pages 217–247. In: L.H. Kanal and J.F. Lemmer (Eds.). Norh-Holland, Amsterdam, 1986.

[28] G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Pasi. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*, 27(1):126–133, 1997.

[29] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: a model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44(2):70–82, 1993.

[30] G. Bordogna and G. Pasi. An ordinal information retrieval model. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Supplement 1):63–75, 2001.

[31] P. Bosc, D. Kraft, and F. Petry. Fuzzy sets in database and information systems: status and opportunities. *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3):418–426, 2005.

[32] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, A. Tsoukiàs, and P. Vincke. *Evaluation and decision models: a critical perspective*. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 2000.

[33] N. Bryson. Group decision-making and the analytic hierarchy process: exploring the consensus-relevant information content. *European Journal of Operational Research*, 23(1):27–35, 1996.

[34] Z. Bubnicki. *Analysis and decision making in uncertain systems.* Springer-Verlag, Berlín/London/New York, 2004.

[35] P. Burillo and H. Bustince. Construction theorems for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 84(3):271–281, 1996.

[36] H. Bustince. Construction of intuitionistic fuzzy relations with predetermined properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 109(3):379–403, 2000.

[37] H. Bustince, E. Barrenechea, and V. Mohedano. Intuitionistic fuzzy implication operators: an expression and main properties. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(3):387–406, 2004.

[38] H. Bustince and P. Burillo. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, 113(2):205–219, 2000.

[39] H. Bustince and P. Burillo. Perturbation of intuitionistic fuzzy relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(1):81–103, 2001.

[40] F.J. Cabrerizo, S. Alonso, and E. Herrera-Viedma. A consensus model for group decision making problems with unbalanced fuzzy linguistic information. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2008. Aceptado.

[41] F.J. Cabrerizo, S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A selection process to deal with incomplete fuzzy preference relations in a 2-tuple fuzzy linguistic approach. The 8th International FLINS Conference on Computational Intelligence in Decision and Control (FLINS 2008), Madrid (España),

2008. Aceptado.

[42] F.J. Cabrerizo, S. Alonso, I.J. Pérez, and E. Herrera-Viedma. A consensus model for group decision making in unbalanced fuzzy linguistic contexts. XIV Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2008), Mieres (España), 2008. Aceptado.

[43] F.J. Cabrerizo, S. Alonso, I.J. Pérez, and E. Herrera-Viedma. On consensus measures in fuzzy group decision making. Modeling Decisions for Artificial Intelligence 2008 (MDAI 2008), Sabadell (España), 2008. Aceptado.

[44] T. Calvo, R. Mesiar, and R.R. Yager. Quantitative weight and aggregation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(1):62–69, 2004.

[45] E. Capurso and A. Tsoukiàs. Decision aiding and psychotherapy. *Bulletin of the EURO Working Group on MCDA*, 61(1–2):165–185, 2003.

[46] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkuryeva, T. Riissanen, and A.G.S. Ventre. Consensus in distributed soft environments. *European Journal of Operational Research*, 61(1-2):165–185, 1992.

[47] C. Carlsson and R. Fuller. Benchmarking and linguistic importance weighted aggregations. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):35–41, 2000.

[48] C. Carlsson and R. Fuller. *Fuzzy reasoning in decision making and optimization.* Springer-Verlag, Berlín/Heidelberg, 2001.

[49] S.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy multiple attribute decision-making: methods and applications.* Springer-Verlag, Berlín/New York, 1992.

[50] C.-H. Cheng and Y. Lin. Evaluating the best main battle tank using fuzzy decision theory with linguistic criteria evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142(1):174–186, 2002.

[51] H. Chernoff. *Elementary decision theory.* Dover Publications, New York, 1987.

[52] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 97(1):33–48, 1998.

[53] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating multiplicative preference relations in a multiplicative decision making model based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2):277–291, 2001.

[54] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. A note on the internal consistency of various preference representations. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1):75–78, 2002.

[55] F. Chiclana, F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma, and S. Alonso. Integration of a consistency control module within a consensus model. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(1):35–53, 2008.

[56] D.H. Choi, B.S. Ahn, and S.H. Kim. Multicriteria group decision making under incomplete preference judgments: using fuzzy logic with a linguistic quantifier. *International Journal of Intelligent Systems*, 22(6):641–660, 2007.

[57] S.-J. Chuu. Fuzzy multi-attribute decision-making for evaluating manufacturing flexibility. *Production Planning and Control*, 16(3):323–335, 2005.

[58] W. Cook and M. Kress. Ordinal ranking with intensity of preference. *Management Science*, 31(1):26–32, 1985.

[59] W. Cook and L. Seiford. Priory ranking and consensus formation. *Management Science*, 24:1721–1732, 1978.

[60] C. Coombs and J. Smith. On the detection of structures in attitudes and developmental processes. *Psychological Review*, 80(5):337–351, 1973.

[61] O. Cordón, F. Herrera, and I. Zwir. Linguistic modelling by hierarchical systems of linguistic rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(1):2–20, 2001.

[62] V. Cutello and J. Montero. Fuzzy rationality measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 62(1):39–44, 1994.

[63] V. Cutello and J. Montero. Hierarchies of aggregation operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(11):1025–1045, 1994.

[64] V. Cutello and J. Montero. Hierarchies of intensity preference aggregations. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10(2):123–133, 1994.

[65] V. Cutello and J. Montero. Equivalence and compositions of fuzzy rationality measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 85(1):31–43, 1997.

[66] G. Debreu. *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium.* John Wiley and Sons Inc., New York, 1959.

[67] R. Degani and G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate reasoning*, 2(2):143–162, 1988.

[68] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. Combining numerical and linguistic information in group decision making. *Information Sciences*, 107(1–4):177–194, 1998.

[69] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. Linguistic decision making models. *International Journal of Intelligent Systems*, 7(5):479–492, 1992.

[70] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(3):351–370, 1993.

[71] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. A model for linguistic partial information in decision making problem. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(5):365–384, 1994.

[72] J. Dombi. *Fuzzy logic and soft computing*, chapter A general framework for the utility-based and outranking methods, pages 202–208. B.B. Bouchon (Ed.). World

Scientific, London, 1995.

[73] Y. Dong, Y. Xu, and H. Li. On consistency measures of linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 189(2):430–444, 2008.

[74] D. Dubois and J.L. Koning. Social choice axioms for fuzzy set aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(3):257–274, 1991.

[75] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy sets and systems: theory and applications.* Academic Press, New York, 1980.

[76] D. Dubois and H. Prade. A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences*, 36(1–2):85–121, 1985.

[77] D. Dubois and H. Prade. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *Information Sciences*, 39(2):205–210, 1986.

[78] D. Dubois and H. Prade. Rough fuzzy-sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 13(2-3):191–209, 1990.

[79] D. Dubois, H. Prade, and C. Testemale. Weighted fuzzy pattern matching. *Fuzzy Sets and Systems*, 28(3):313–331, 1988.

[80] R. Duncan and H. Raiffa. *Games and decision. Introduction and critical survey.* Dover Publications, New York, 1985.

[81] P. Eades. A heuristic for graph drawing. *Congress Numerantium*, 42:149–160, 1984.

[82] A.Ok. Efe. Utility representation of an incomplete preference relation. *Journal of Economic Theory*, 104(2):429–449, 2002.

[83] E. Ephrati and J.S. Rosenschein. Deriving consensus in multiagent systems. *Artificial Intelligence*, 87(1):21–74, 1996.

[84] H.P. Erb and G. Bohner. *Group consensus and minority influence*, chapter Mere consensus effects in minority and majority influence, pages 40–59. In: C.K.W. De

Dreu and N.K. De Vries (Eds.). Oxford: Blackwell, 2001.

[85] Real Academia Española. *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima Segunda Edición*. Espasa, 2001.

[86] Z.-P. Fan, J. Ma, Y.-P. Jiang, Y.-H. Sun, and L. Ma. A goal programming approach to group decision making based on multiplicative preference relations and fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 174(1):311–321, 2006.

[87] Z.-P. Fan, J. Ma, and Q. Zhang. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information alternatives. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1):101–106, 2002.

[88] Z.-P. Fan, S.-H. Xiao, and G.-F. Hu. An optimization method for integrating two kinds of preference information in group decision-making. *Computers & Industrial Engineering*, 46(2):329–335, 2004.

[89] M. Fedrizzi and R.A. Marqués Pereira. Soft consensus and network dynamics in group decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 14(1):63–77, 1999.

[90] J. Fodors and M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[91] P. Fortemps and R. Slowinski. A graded quadrivalent logic for ordinal preference modelling: Loyola-like approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(1):93–111, 2002.

[92] G. Fu. A fuzzy optimization method for multicriteria decision making: An application to reservoir flood control operation. *Expert Systems with Applications*, 34(1):145–149, 2008.

[93] J.L. García-Lapresta and L.C. Meneses. An empirical analysis of transitivity

with four scaled preferential judgment modalities. *Review of Economic Design*, 8(3):335–346, 2003.

[94] J.L. García-Lapresta and L.C. Meneses. Individual valued preferences and their aggregation: analysis of consistency in a real case. *Fuzzy Sets and Systems*, 151(2):269–284, 2005.

[95] J.L. García-Lapresta and J. Montero. *Modern information processing: from theory to applications*, chapter Consistency in preference modelling, pages 87–97. In: B. Bouchon-Meunier and G. Coletti and R.R. Yager (Eds.). Elsevier, 2006.

[96] R.A. Gheorghe, A. Bufardi, and P. Xirouchakis. Fuzzy multicriteria decision aid method for conceptual design. *Cirp Annals-Manufacturing Technology*, 54(1):151–154, 2005.

[97] N. Giuliano and T. Giovani. Selecting quality-based programmes in small firms: a comparison between the fuzzy linguistic approach and the analytic hierarchy processs. *International Journal of Production Economics*, 67(2):113–133, 2000.

[98] D. Gómez and J. Montero. A discussion on aggregation operators. *Kybernetika*, 40(1):107–120, 2004.

[99] L. Godo and V. Torra. On aggregation operators for ordinal qualitative information. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):143–154, 2000.

[100] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129(1):1–47, 2001.

[101] L. Hamer, Y. Hemeryck, G. Herweyers, M. Janssen, H. Keters, R. Rousseau, and A. Vanhoutte. Similarity measures in scientometric research: the jaccard index versus salton's cosine formula. *Information Processing and Management*, 25(3):315–318, 1989.

[102] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted

information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*, 27(5):646–656, 1997.

[103] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 120(1):144–161, 2000.

[104] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(1):67–82, 2000.

[105] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.

[106] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. An information retrieval system with unbalanced linguistic information based on the linguistic 2-tuple model. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'2002), pages 23–29, Annecy (Francia), 2002.

[107] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(2):354–370, 2008.

[108] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, and P.J. Sánchez. A methodology for generating the semantics of unbalanced term sets. 9th International Conference on Fuzzy Theory and Technology, pages 151–154, Florida (USA), 2003.

[109] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences*, 85(4):223–239, 1995.

[110] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(2):175–190, 1996.

[111] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 78(1):73–87, 1996.

[112] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Linguistic measures based on fuzzy coincidence for reaching consensus in group decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 16(3–4):309–334, 1997.

[113] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 88(1):31–49, 1997.

[114] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.

[115] F. Herrera and L. Martínez. The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Supplement 1):33–48, 2001.

[116] F. Herrera and L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 31(2):227–234, 2001.

[117] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.

[118] F. Herrera and J.L. Verdegay. Linguistic assessments in group decision. First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies, pages 941–948, Aachen, 1993.

[119] E. Herrera-Viedma. An information retrieval system with ordinal linguistic weighted queries based on two weighting elements. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(Supplement 1):77–88, 2001.

[120] E. Herrera-Viedma. Modeling the retrieval process of an information retrieval system using an ordinal fuzzy linguistic approach. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 52(6):460–475, 2001.

[121] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, and F. Herrera. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(5):863–877, 2007.

[122] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, and S. Alonso. A group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 37(1):176–189, 2007.

[123] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.

[124] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana, and M. Luque. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 154(1):98–109, 2004.

[125] E. Herrera-Viedma and A.G. López-Herrera. A model of information retrieval system with unbalanced fuzzy linguistic information. *International Journal of*

Intelligent Systems, 22(11):1197–1214, 2007.

[126] E. Herrera-Viedma, A.G. López-Herrera, M. Luque, and C. Porcel. A fuzzy linguistic IRS model based on a 2-tuple fuzzy linguistic approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 15(2):225–250, 2007.

[127] E. Herrera-Viedma, A.G. López-Herrera, and C. Porcel. Tuning the matching function for a threshold weighting semantics in a linguistic information retrieval system. *International Journal of Intelligent Systems*, 20(9):921–937, 2005.

[128] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, and F. Chiclana. A consensus support system model for group decision-making problems with multi-granular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.

[129] E. Herrera-Viedma, G. Pasi, A.G. López-Herrera, and C. Porcel. Evaluating the information quality of web sites: a methodology based on fuzzy computing with words. *Journal of American Society for Information Science and Technology*, 57(4):538–549, 2006.

[130] E. Herrera-Viedma and E. Peis. Evaluating the informative quality of documents in sgml-format using fuzzy linguistic techniques based on computing with words. *Information Processing & Management*, 39(2):195–213, 2003.

[131] E. Herrera-Viedma, E. Peis, J.M. Morales del Castillo, S. Alonso, and E.K. Anaya. A fuzzy linguistic model to evaluate the quality of web sites that store xml documents. *International Journal of Approximate Reasoning*, 46(1):226–253, 2007.

[132] U. Hohle and S.E. Rodabaugh. *Mathematics of fuzzy sets: logic, topology and measure theory*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1999.

[133] M. Inuiguchi. Generalizations of rough sets: from crisp to fuzzy cases. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3066:26–37, 2004.

[134] R. Jain. Tolerance analysis using fuzzy sets. *International Journal of Systems Science*, 7(12):1393–1401, 1976.

[135] A. Jiménez, S. Ríos-Insúa, and A. Mateos. A decision support system for multiattribute utility evaluation based on imprecise assignments. *Decision Support Systems*, 36(1):65–79, 2003.

[136] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105–118, 1986.

[137] J. Kacprzyk. *The analysis of fuzzy information*, chapter On some fuzzy cores and "soft" consensus measures in group decision making, pages 119–130. In: J. Bezdek (Ed.). CRC Press, 1987.

[138] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi. A "soft" measure of consensus in the setting of partial (fuzzy) preferences. *European Journal of Operational Research*, 34(3):316–325, 1988.

[139] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi. *Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[140] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1):21–31, 1992.

[141] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. *Consensus under fuzziness*, chapter "Soft" degrees of consensus under fuzzy preferences and fuzzy majorities, pages 55–82. In: J. Kacprzyk and H. Nurmi and M. Fedrizzi (Eds.). Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1997.

[142] J. Kacprzyk, H. Nurmi, and M. Fedrizzi. *Consensus under fuzziness.* Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1997.

[143] D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky. *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[144] R.L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[145] G. Kersten. E-democracy and participatory decision processess: lessons from e-negotiation experiments. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 12(2–3):127–143, 2004.

[146] G. Kersten and S. Noronha. Negotiation via the world wide web: a cross-cultural study of decision making. *Group Decision and Negotiation*, 8(3):251–279, 1999.

[147] W.J.M. Kickert. *Fuzzy theories on decision making.* Martinus Nijhoff, Leiden/Boston/London, 1978.

[148] J.K. Kim, S.H. Choi, C.H. Han, and S.H. Kim. An interactive procedure for multiple criteria group decision making with incomplete informacion. *Computers and Industrial Engineering*, 35(1–2):295–298, 1998.

[149] S.H. Kim and B.S. Ahn. Group decision making procedure considering preference strenght under incomplete information. *Computers and Operations Research*, 24(12):1101–1112, 1997.

[150] S.H. Kim and B.S. Ahn. Interactive group decision making procedure under incomplete information. *European Journal of Operational Research*, 116(3):498–507, 1999.

[151] S.H. Kim, S.H. Choi, and J.K. Kim. An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information: range-based approach. *European Journal of Operational Research*, 118(1):139–152, 1999.

[152] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications.* Prentice-Hall PTR, New Jersey, 1995.

[153] S. Kundu. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 86(3):357–367, 1997.

[154] H.M. Lee. Applying fuzzy sets theory for evaluating the rate of aggregative risk in software development. *Fuzzy Sets and Systems*, 79(3):323–336, 1996.

[155] H.M. Lee. Generalization of the group decision making using fuzzy sets theory for evaluating the rate of aggregate risk in software development. *Information Sciences*, 113(3–4):301–311, 1999.

[156] H.S. Lee. On fuzzy preference relation in group decision making. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(2):133–140, 2005.

[157] E. Levrat, A. Voisin, S. Bombardier, and J. Bremont. Subjective evaluation of car seat comfort with fuzzy set techniques. *International Journal of Intelligent Systems*, 12(12):891–913, 1997.

[158] D.-F. Li and T. Sun. Fuzzy linear programming approach to multi-attribute decision-making with linguistic variables and incomplete information. *Advances in Complex Systems*, 10(4):505–525, 2007.

[159] J. Liu, J.B. Yang, J. Wang, H.S. Sii, and Y.M. Wang. Fuzzy rule-based evidential reasoning approach for safety analysis. *International Journal of General Systems*, 33(2–3):183–204, 2004.

[160] J. Lu, G. Zhang, and D. Ruan. Intelligent multi-criteria fuzzy group decision-making for situation assessments. *Soft Computing*, 12(3):289–299, 2008.

[161] R.D. Luce and P. Suppes. *Handbook of mathematical psychology*, chapter Preferences, utility and subject probability, pages 249–410. In: R.D. Luce et al. (Eds.). Wiley, New York, 1965.

[162] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *International*

Journal of Approximate Reasoning, 44(2):165–181, 2007.

[163] J.B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. 5th Symposium on Math, Statistics and Probability, pages 281–297, Berkeley, 1967. CA: University of California Press.

[164] M. Marimin, M. Umano, I. Hatono, and H. Tamura. Linguistic labels for expressing fuzzy preference relation in fuzzy group decision making. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 28(2):205–218, 1998.

[165] L. Martínez, J. Liu, D. Ruan, and J.-B. Yang. Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes. *Information Sciences*, 177(7):1533–1542, 2007.

[166] K. Menger. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535–537, 1942.

[167] G.A. Miller. The magical number seven plus or minus two: some limits on our capacity of processing information. *Psychological Review*, 63(2):81–97, 1956.

[168] M. Mizumoto. Pictorial representations of fuzzy connectives. Part I: cases t-norms, t-conorms and averaging operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 31(2):217–242, 1989.

[169] M. Mizumoto. Pictorial representations of fuzzy connectives. Part II: cases of compensatory operators and self-dual operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 32(1):45–79, 1989.

[170] J.N. Moderson and P.S. Nair. *Fuzzy mathematics*. Physica-Verlag, New York, 1998.

[171] J. Montero. Arrow's theorem under fuzzy rationality. *Behavioral Science*, 32(4):267–273, 1987.

[172] H. Nurmi. *Non-conventional preference relations in decision making*, chapter Assumptions of individual preferences in theory of voting procedures, pages 142–155. In: J. Kacprzyk and M. Roubens (Eds.). Springer-Verlag, Berlín, 1988.

[173] S.A. Orlovski. Decision-making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(3):155–167, 1978.

[174] M. Oztürk, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. *State of the art in multiple criteria Decision Analysis*, chapter Preference Modelling, pages 27–72. In: M. Ehrgott and S. Greco and J. Figueira (Eds.). Springer-Verlag, 2005.

[175] W. Pedrycz. *Fuzzy modeling: paradigms and practice.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[176] W. Pedrycz and F. Gomida. *An introduction to fuzzy sets: analysis and design (complex adaptive systems).* Bradfor Book. The MIT Pres, Massachusetts, 1998.

[177] P. Perny and A. Tsoukiàs. On the continuous extension of a four valued logic for preference modelling. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), pages 302–309, París, 1998.

[178] M. Rogers, M. Bruen, and L.Y. Maystre. *Electre and decision support.* Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2000.

[179] C. Romero. *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones.* Alianza Universidad, Madrid, 1993.

[180] S. Ríos, C. Bielza, and A. Mateos. *Fundamentos de los Sistemas de Ayuda a la Decisión.* Ra-Ma, Madrid, 2002.

[181] M. Roubens. Some properties of choice functions based on valued binary relations. *European Journal of Operational Research*, 40(3):309–321, 1989.

[182] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):199–206, 1997.

[183] M. Roubens and Ph. Vincke. *Preference modelling.* Springer-Verlag, Berlín/Heidelberg, 1985.

[184] Th.L. Saaty. *The analytic hierarchy process.* MacGraw-Hill, New York, 1980.

[185] Th.L. Saaty. *Fundamentals of decision making and priority theory with the ahp.* RWS Publications, Pittsburg, 1994.

[186] Th.L. Saaty and L. Vargas. *Models, methods, concepts and applications of the analytic hierarchy process.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[187] S. Saint and J.R. Lawson. *Rules for reaching consensus. A modern approach to decision making.* Jossey-Bass, San Francisco, 1994.

[188] P. Salminen, J. Hokkanen, and R. Lahdelma. Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems. *European Journal of Operational Research*, 104(3):485–496, 1998.

[189] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic metric spaces.* North-Holland, New York, 1983.

[190] S. Seo and M. Sakawa. Fuzzy multiattribute utility analysis for collective choice. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1):45–53, 1985.

[191] H.S. Sii and J. Wang. A subjective design for safety framework for offshore engineering products. Workshops on Realibility and Risk Based Inspection Planning and ESRA Technical Committe on Offshore Safety, Zurich (Suiza), 2000.

[192] B. Spillman, J. Bezdek, and R. Spillman. Coalition analysis with fuzzy sets. *Kybernetes*, 8(3):203–211, 1979.

[193] B. Spillman, R. Spillman, and J. Bezdek. *Fuzzy automata and decision processes*, chapter A fuzzy analysis of consensus in small groups, pages 331–356. In: P.P Wang and S.K. Chang (Eds.). North-Holland, 1980.

[194] E. Szmidt and J. Kacprzyk. A consensus-reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations. *International Journal of Intelligent Systems*, 18(7):837–852, 2003.

[195] Y. Tang. A collective decision model involving vague concepts and linguistic expressions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernectics. Part B: Cybernetics*, 38(2):421–428, 2008.

[196] T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(2):117–131, 1984.

[197] T. Tanino. *Non-conventional preference relations in decision making*, chapter Fuzzy preference relations in group decision making, pages 54–71. In: J. Kacprzyk and M. Roubens (Eds.). Springer-Verlag, Berlín, 1988.

[198] T. Tanino. *Multiperson decision making using fuzzy sets and possibility theory*, chapter On group decision making under fuzzy preferences, pages 172–185. In: J. Kacprzyk and M. Roubens (Eds.). Kluwer Academic Publishers, 1990.

[199] M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 10(11):716–723, 1980.

[200] M. Tong and P.P. Bonissone. *Studies in the management science*, chapter Linguistic solutions to fuzzy decision problems, pages 323–334. In: H.J. Zimmerman and L.A. Zadeh and B.R. Gaines (Eds.). North Holland, 1984.

[201] V. Torra. Negation function based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(11):975–988, 1996.

[202] V. Torra. Aggregation of linguistic labels when semantics is based on antonyms. *International Journal of Intelligent Systems*, 16(4):513–524, 2001.

[203] E. Triantaphyllou. *Multi-criteria decision making methods: a comparative study.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2000.

[204] R.C. Wang and S.J. Chuu. Group decision-making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system. *European Journal of Operational Research*, 153(3):563–572, 2004.

[205] D. Wu and J.M. Mendel. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1145–1161, 2007.

[206] Z.S. Xu. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36(3):261–270, 2004.

[207] Z.S. Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166(1–4):19–30, 2004.

[208] Z.S. Xu. On compatibility of interval fuzzy preference relations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(3):217–225, 2004.

[209] Z.S. Xu. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. *Information Sciences*, 168(1–4):171–184, 2004.

[210] Z.S. Xu. An approach to group decision making based on incomplete linguistic preference relations. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 4(1):153–160, 2005.

[211] Z.S. Xu. A an approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations. *Decision Support Systems*, 41(6):488–499, 2006.

[212] Z.S. Xu. Incomplete linguistic preference relations and their fusion. *Information Fusion*, 7(3):331–337, 2006.

[213] Z.S. Xu. A practical procedure for group decision making under incomplete multiplicative linguistic preference relations. *Group Decision and Negotiation*, 15(6):581–591, 2006.

[214] Z.S. Xu. An interactive procedure for linguistic multiple attribute decision making with incomplete weight information. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(1):17–27, 2007.

[215] Z.S. Xu. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making. *Information Sciences*, 177(11):2363–2379, 2007.

[216] Z.S. Xu. A method for multiple atribute decision making with incomplete weight information in linguistic setting. *Knowledge-Based Systems*, 20(8):719–725, 2007.

[217] Z.S. Xu. Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations. *Information Sciences*, 178(2):452–467, 2008.

[218] R.R. Yager. Quantifiers in the formulation of multiple objective decision functions. *Information Sciences*, 31(2):107–139, 1983.

[219] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[220] R.R. Yager. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 40(1):39–75, 1991.

[221] R.R. Yager. Aggregation operators and fuzzy system modelling. *Fuzzy Sets and Systems*, 67(2):129–145, 1993.

[222] R.R. Yager. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2):125–148, 1993.

[223] R.R. Yager. Interpreting linguistically quantified proposition. *International Journal of Intelligent Systems*, 9(6):541–569, 1994.

[224] R.R. Yager. On weighted median aggregation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2(1):101–113, 1994.

[225] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3–4):237–261, 1995.

[226] R.R. Yager. Quantifier guided aggregations using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(1):49–73, 1996.

[227] R.R. Yager. Aggregation of ordinal information. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(3):199–219, 2007.

[228] R.R. Yager and D.P. Filev. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computer & Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1983.

[229] A. Yazici and R. George. *Fuzzy database modeling*. Physica-Verlag, New York, 1999.

[230] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.

[231] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part I. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.

[232] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part II. *Information Sciences*, 8(4):301–357, 1975.

[233] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part III. *Information Sciences*, 9(1):43–80, 1975.

[234] L.A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computer & Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1983.

[235] L.A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.

[236] L.A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):111–127, 1997.

[237] L.A. Zadeh and J. Kacprzyk. *Fuzzy logic for the management of uncertainty.* John Wiley, New York, 1992.

[238] S. Zadrozny. *Consensus under fuzziness*, chapter An approach to the consensus reaching support in fuzzy environmnet, pages 83–109. In: J. Kacprzyk and H. Nurmi and M. Fedrizzi (Eds.). Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1997.

[239] Q. Zhang, J.C.H. Chen, and P.P. Chong. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. *Decision Support Systems*, 38(2):247–258, 2004.

[240] Q. Zhang, J.C.H. Chen, Y.-Q. He, J. Ma, and D.-N. Zhou. Multiple attribute decision making: approach integrating subjective and objective information. *International Journal of Manufacturing Technology and Management*, 5(4):338–361, 2003.

[241] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets: theory and its applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.