





HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO  
CONCRETO REFORZADO Y PREESFORZADO



ENRIQUE HERNÁNDEZ MONTES  
LUISA MARÍA GIL MARTÍN

HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO  
CONCRETO REFORZADO Y PREESFORZADO

GRANADA  
2007

Reservados todos los derechos. Los autores permiten la reproducción total o parcial siempre que se mencione explícitamente la fuente. Está prohibido reproducir o transmitir esta publicación, total o parcialmente, por cualquier medio si no se menciona la fuente, bajo las sanciones establecidas por la ley.

© ENRIQUE HERNÁNDEZ MONTES  
© LUISA MARÍA GIL MARTÍN  
HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO  
-CONCRETO REFORZADO Y PREESFORZADO-  
Depósito Legal: GR-2974/2007. Edición en papel  
Depósito Legal: GR-2975/2007. Edición electrónica  
Edita: Grupo de Investigación TEP-190 Ingeniería e infraestructuras  
Maquetación: Luis Pardo  
Imprime: Gráficas Alhambra

*Printed in Spain*

*Impreso en España*

A Nuestra Señora de las Angustias

A Enrique, Andrés y Luisa María

Violenti Rapiunt



Estimado amigo:

El libro que te presentamos, con el título “Hormigón Armado y Pretensado –Concreto Reforzado y Preesforzado-“ corresponde al libro de texto de la asignatura del mismo nombre en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada, España. Si bien ha sido enriquecido tratando de responder a las dudas que nos han surgido durante nuestros años docentes. Este libro pretende ser un tratado general de cálculo de estructuras de hormigón armado y pretensado, por eso se han obviado temas como soluciones constructivas y detalles, que se pueden consultar en otros volúmenes existentes en el mercado y en proyectos constructivos.

Hoy día, debido a la facilidad de cálculo asociada con el desarrollo de la informática, el uso de tablas y reglas simplificadas está en desuso. De hecho, actualmente es inconcebible abordar el cálculo de una estructura sin la ayuda de un programa de ordenador adecuado. En este contexto, este libro pretende aumentar el conocimiento teórico del ingeniero y del alumno de ingeniería-teniendo como base una importante carga teórica y conceptual.

Aunque generalmente se utiliza la normativa española (EHE) y la europea (Eurocódigo-2), en general el texto no se ciñe a una norma específica, haciéndose mención, por su interés práctico en casos concretos, a otras normas como la americana ACI-318 o la suiza SIA-165 -entre otras-.

Nuestro agradecimiento a los profesores que en mayor o menor medida han colaborado en la edición de este libro, especialmente a: Mark Aschheim de la Universidad de Santa Clara (California), Luis Albajar Molera de la UPM, Rafael Gallego Sevilla y Miguel Losada Rodríguez, ambos de la UGR, a Stravoula Pantazopoulous de la Universidad de Tracia y a Daniel Kuchma de la Universidad de Illinois U-C.

Especial agradecimiento a las empresas y asociaciones que han colaborado y sin cuya financiación no hubiésemos extendido este trabajo a todas la Escuelas de Ingenieros de Caminos de España, para cuyos alumnos de la signatura de hormigón armado, este volumen será gratuito los próximos dos años. Además está disponible en red para cualquier persona que lo desee. Estas empresas son:

SACYR, JOCA, AZVI, PROINTEC, HOLCIM, DETECSA, ORTIZ Construcciones, BRUES Y FERNÁNDEZ, GARASA, IECA y CHM.

Los autores.

Granada, Diciembre de 2007



HORMIGÓN ESTRUCTURAL  
*Hernández-Gil*

---

ÍNDICE

---

1.	PRINCIPIOS FUNDAMENTALES	
1.1.	Introducción	15
1.2.	El hormigón armado y pretensado como material de construcción	16
1.3.	Normativa	23
	Ejercicios propuestos	
	Referencias	
2.	PROCEDIMIENTOS GENERALES DE CÁLCULO	
2.1.	Métodos probabilistas y métodos deterministas	27
2.2.	El método de los estados límite	28
2.3.	Durabilidad	36
	Referencias	
3.	DESCRIPCIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL HORMIGÓN Y DEL ACERO	
3.1.	El Hormigón o Concreto	45
3.2.	Propiedades mecánicas del hormigón	49
3.3.	Diagramas tensión-deformación	51
	3.3.1. Diagramas para el cálculo estructural	
	3.3.2. Resistencia de cálculo del hormigón	
	3.3.3. Diagramas para el diseño en rotura de secciones	
3.4.	Fluencia	60
3.5.	Retracción	64
3.6.	Otras propiedades del hormigón	69
3.7.	Armadura pasiva	72
3.8.	Anclaje	75
3.9.	Armadura activa	78
3.10.	Relajación	83
3.11.	Fatiga	85
	Ejercicios propuestos	
	Referencias	
	Anejo: Modelo de arcos de descarga de hormigón confinado	89
	Referencias	
	Ejemplo	

HORMIGÓN ESTRUCTURAL  
*Hernández-Gil*

4.	LA FUERZA DE PRETENSADO (20)	
4.1.	Las pérdidas de pretensado	103
4.2.	Pérdidas por rozamiento	103
4.3.	Geometría del postesado	106
4.4.	Pérdidas por penetración en cuña	110
4.5.	Pérdidas por acortamiento elástico	116
4.6.	Pérdidas diferidas	120
	Ejercicios propuestos	
	Referencias	
5.	MÉTODO DE LAS BIELAS Y TIRANTES	
5.1.	Regiones B y D	125
5.2.	Modelos de Bielas y Tirantes	128
5.3.	Bielas y Tirantes	131
5.4.	Unicidad de los Modelos de Bielas y Tirantes	132
5.5.	Proceso de diseño	133
	Ejemplo en hormigón armado	
	Ejemplo en hormigón pretensado	
	Referencias	
6.	ANÁLISIS DE LA SECCIÓN EN FLEXIÓN	
6.1.	Introducción	151
6.2.	Hipótesis fundamentales a nivel sección	154
6.3.	Comportamiento del hormigón a tracción	157
6.4.	Ejemplo de respuesta a corto y largo plazo	159
6.5.	Aproximación lineal para la fase de prefisuración	165
6.6.	Agotamiento frente a sollicitaciones normales	172
6.7.	Flexión simple y flexión compuesta uniaxial	187
	6.7.1. Comprobación	
	6.7.2. Dimensionamiento	
6.8.	Flexión biaxial	200
	6.8.1. Comprobación	
	6.8.2. Dimensionamiento	
6.9.	Disposiciones geométricas y cuantías mínimas en armaduras longitudinales	207
	Ejercicios propuestos	
	Referencias	
7.	CORTANTE	
7.1.	Introducción	219
7.2.	Esfuerzo cortante efectivo	223
7.3.	Distribución de tensiones en el hormigón	225

**HORMIGÓN ESTRUCTURAL**  
*Hernández-Gil*

7.4.	Grietas de cortante	227
7.5.	Planteamiento en la normativa actual	229
7.6.	Comportamiento del hormigón agrietado. Analogía de la celosía.	231
7.7.	Interacción flexión-cortante	247
7.8.	Punzonamiento	252
Ejercicios propuestos		
Anejo. Teorías del campo de compresiones		255
Ejercicios propuestos		
Referencias		
8.	<b>TORSIÓN</b>	
8.1.	Introducción	275
8.2.	Torsión en pre-fisuración	276
8.3.	Torsión en post-fisuración y rotura	280
8.4.	Interacción entre torsión y otros esfuerzos	284
Ejercicios propuestos		
Referencias		
9.	<b>ANÁLISIS ESTRUCTURAL</b>	
9.1.	Introducción	293
9.2.	Tipos de análisis estructural	295
9.3.	Análisis en segundo orden	302
9.4.	Métodos aproximados de cálculo en segundo orden	311
	9.4.1. Método basado en la rigidez nominal	
	9.4.2. Método basado en la curvatura nominal	
9.5.	Flexión compuesta esviada	323
9.6.	Pilares zunchados	326
Ejercicios propuestos		
Referencias		
10.	<b>ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO</b>	
10.1.	Introducción	331
10.2.	Limitaciones a la deformación	332
10.3.	Deformación. Método general	332
10.4.	Método simplificado de cálculo de deformaciones de la EHE	344
10.5.	Estado límite de fisuración	351
10.6.	Estado límite de vibraciones	357

HORMIGÓN ESTRUCTURAL  
*Hernández-Gil*

Ejercicios propuestos  
Referencias

11. DISEÑO DE ELEMENTOS

11.1.	Introducción	359
11.2.	El proceso de diseño	362
11.3.	Secciones compuestas	368

Ejercicios propuestos  
Referencias

12. ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

12.1.	Introducción	379
12.2.	Redistribución de esfuerzos	380
12.3.	Momentos primarios y momentos secundarios	381
12.4.	Diseño del trazado del tendón	393

Referencias

Tablas	399
--------	-----

---

## CAPÍTULO I

---

### PRINCIPIOS FUNDAMENTALES



Viaducto Arroyo del Valle. España.

**Cortesía de Grupo AZVI. [www.azvi.es](http://www.azvi.es)**

#### 1.1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este libro es lograr que el estudiante alcance un conocimiento de los principios básicos del hormigón armado y pretensado. Dado que actualmente el hormigón es el material de construcción más extendido, estos principios básicos han de ser conocidos por arquitectos e ingenieros.

Se entiende por *hormigón estructural*, también denominado *hormigón armado y/o pretensado*, a la disciplina que estudia el empleo del hormigón en elementos estructurales. Para este fin, como veremos más adelante, será necesario el uso del hormigón combinado con barras de acero.

El conocimiento de la forma de trabajar del hormigón estructural hace que el ingeniero o arquitecto pueda emplear el hormigón, un material frágil cuya resistencia a tracción es muy pequeña, para construir elementos estructurales resistentes y dúctiles.

Debido al avance que han experimentado las posibilidades de cálculo, las tablas y manuales han sido sustituidos por programas informáticos. Estos medios han permitido al ingeniero mayor capacidad y libertad en el diseño estructural. Por otra parte, los tipos de hipótesis en el análisis se han visto incrementados: análisis no lineal, análisis dinámico, etc... Esta mayor capacidad hace que los técnicos tengan necesidad de un conocimiento más profundo de las hipótesis y los modelos empleados en el hormigón estructural y una menor preocupación en relación a los métodos de cálculo numérico.

El hormigón es un material heterogéneo que además retrae, fluye y se agrieta, de tal forma que sus tensiones no pueden ser conocidas con exactitud. En general, como veremos a lo largo de este libro, las ecuaciones de diseño están basadas en conceptos básicos de la ingeniería mecánica y de la estática junto con términos deducidos empíricamente.

## 1.2. EL HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO COMO MATERIAL DE CONSTRUCCIÓN

El hormigón por si solo es un material que resiste bien a compresión (en torno a  $30\text{ N/mm}^2$  o  $\text{MPa}$ ) aunque menos que el acero (que su resistencia a compresión está en torno a  $400\text{ N/mm}^2$ ) e incluso menos que la madera. Una característica del hormigón es su baja resistencia a tracción, del orden de 10 veces menor que la resistencia a compresión, hablando en términos poco precisos.

Consideremos la viga fabricada exclusivamente con hormigón (sin acero) de la figura 1.1). El valor máximo de la carga ( $q$ ) que puede resistir la viga será aquella que origine una tensión de tracción igual a la resistencia a tracción del hormigón. Cuando esta carga se alcance la viga colapsará sin previo aviso.

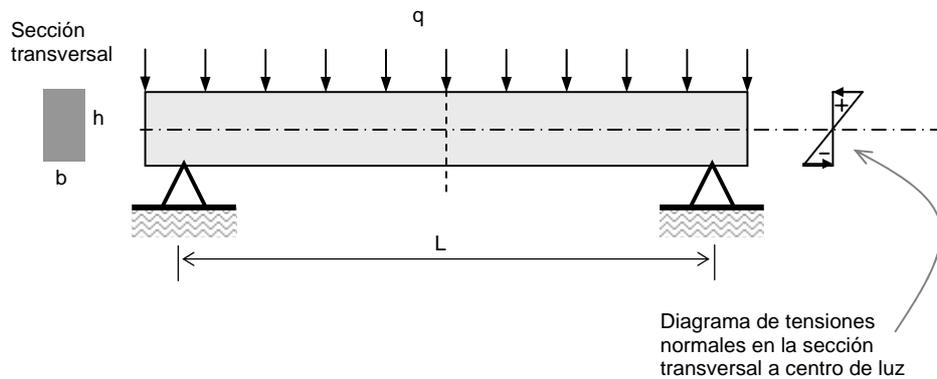


Figura 1.1. Viga de hormigón

En la viga de la figura 1.1 la rotura se producirá en las fibras inferiores, pues es en ellas donde se experimentan las máximas tracciones. Podemos fácilmente intuir que, en general, el empleo de hormigón sin armadura (hormigón en masa) no es adecuado. En el elemento estructural de la figura 1.1 se está desaprovechando la capacidad de trabajo del hormigón a compresión ya que éste podría resistir tensiones mucho mayores. Además se está confiando en la capacidad de trabajo del hormigón a tracción que, dado que no se puede garantizar que el hormigón no tenga grietas que lo incapaciten para resistir esta sollicitación, es muy poco fiable.

Para mejorar los inconvenientes antes descritos se plantea la necesidad de introducir un material que resista a tracción lo que el hormigón no puede: **el acero**. Este material añadido debe colocarse en las zonas donde es más necesario (figura 1.2) o sea, donde se desarrollan las tracciones. Al conjunto de ambos materiales trabajando de esta forma se le denomina *hormigón armado*.

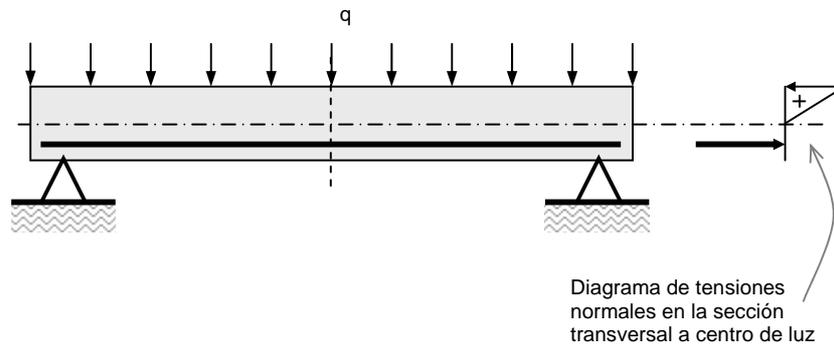


Figura 1.2. Viga de hormigón con acero en la zona de tracción

Como se verá más adelante, salvo excepciones, no se considera la colaboración del hormigón a tracción, tal y como se aprecia en el diagrama de tensiones normales de la figura 1.2.

Puesto que sobre la viga de la figura 1.2 no actúa ningún esfuerzo axial (flexión simple), en toda sección transversal se debe cumplir que la resultante de las compresiones iguale a la resultante de las tracciones:

$$\int_{\text{Zona Comprimida}} \sigma_c dA_c = \int_{\text{Zona Traccionada}} \sigma_s dA_s$$

donde  $\sigma_c$  es la tensión en el hormigón (el subíndice  $c$  proviene de la palabra inglesa *concrete*),  $\sigma_s$  es la tensión del acero (el subíndice  $s$  proviene de la palabra inglesa *steel*), y  $dA_c$  y  $dA_s$  son las diferenciales de área de hormigón y de acero respectivamente.

Con la aparición en el mercado aceros de alto límite elástico, aceros cuya resistencia a tracción es muy elevada (en torno a  $2000 \text{ N/mm}^2$ ), se plantea la posibilidad de su empleo junto con el hormigón. Para ambos aceros, el de alto y bajo límite elástico, el módulo de elasticidad es siempre aproximadamente el mismo,  $E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$ , lo que implica que pasar de una tensión inicial de  $0$  a una tensión igual a su resistencia máxima requiere una deformación grande en el acero de alto límite elástico. Por tanto, si se pretende emplear este tipo de acero para armar una viga, tal como se indica en la figura 1.2, el hormigón se agrietará exageradamente y aparecerán grandes deformaciones antes de alcanzar tensiones próximas a su máxima capacidad. Trabajar a resistencias máximas con acero de alto límite elástico sólo es posible si éste es introducido en el hormigón con una predeformación (o tensión inicial, denominada *pretensado*). Con esta técnica es posible que, para deformaciones pequeñas o nulas, el acero trabaje a tensiones cercanas a su tensión

máxima. En la figura 1.3 se representan los diagramas de tensiones normales debidas al efecto del pretensado, suponiendo en la sección transversal situada en el centro de luz el acero (cable de pretensado) está sometido a una carga axial de valor  $N$ .

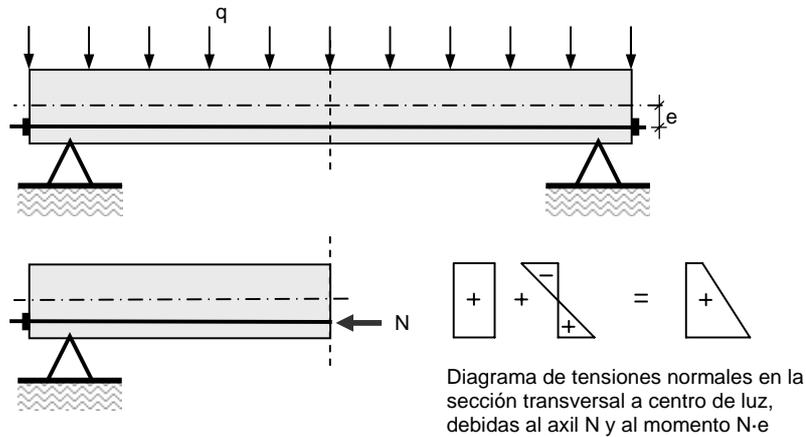


Figura 1.3. Viga de hormigón con acero pretensado

Si al estado de tensiones inicial, debido al pretensado -fuerza del axil  $N$  y momento  $N \cdot e$  -, se le suman las tensiones correspondientes al momento flector generado por la carga  $q$ , tenemos:

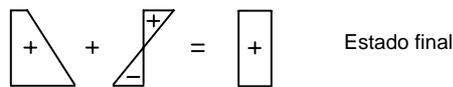


Figura 1.4. Estado de tensiones en la viga pretensada

Se puede observar que el estado de tensiones final (o en carga), representado en la figura 1.4, presenta tensiones menores que el estado de tensiones inicial (o descargado) de la figura 1.3.

Este nuevo tipo de hormigón estructural se denomina *hormigón pretensado*. Es interesante señalar que cuando un hormigón armado se desencofra (el encofrado es el sustento necesario hasta que endurezca) las barras de acero quedan traccionadas mientras que, en la zona de compresiones, el hormigón queda comprimido. Así pues, tanto en el hormigón armado como en el pretensado, el acero quedará finalmente tensado.

A la armadura propia del hormigón armado se le denomina *armadura pasiva* y a la propia del hormigón pretensado se le denomina *armadura activa*.

### ***Particularidades del material compuesto***

El material compuesto hormigón-acero posee algunas características especiales debido a su relación sinérgica que van más allá de la introducción que acabamos de hacer, puramente mecanicista.

La primera gran ventaja es que el hormigón genera cal libre durante su fraguado y endurecimiento,  $\text{Ca(OH)}_2$ , lo que hace que tenga un pH muy elevado ( $\cong 12$ ). Este ambiente alcalino protege al acero de un posible proceso de corrosión.

El acero, que de por sí es muy vulnerable frente a la acción del fuego, está recubierto por una capa de hormigón que le confiere un gran aislamiento. El efecto es que el conjunto puede permanecer expuesto a grandes temperaturas durante horas sin que su capacidad mecánica se vea alterada.

Con el paso del tiempo, y debido a que el hormigón es poroso, el  $\text{CO}_2$  del aire penetra por los poros del hormigón reaccionando con la cal libre y despasivizando el medio (proceso de carbonatación). Este fenómeno es el principal causante de la degradación del hormigón pues deja expuesto al acero frente a la corrosión. Durante este proceso el hormigón se carbonata. La superficie que separa la masa de hormigón carbonatado de la que no lo está se denomina frente de carbonatación.

Las contaminaciones del hormigón por sales de cloro (Cl) crean un efecto parecido al descrito anteriormente; estas sales pueden provenir del agua, de los áridos, o aparecer con posterioridad a la fabricación del hormigón ( p.ej. uso de sales de deshielo en carreteras).

La tracción absorbida por las barras de acero será transmitida al hormigón mediante tensión cortante (fricción) a lo largo del perímetro de las barras de acero. Para asegurar la transmisión de estas tensiones de cortante se necesita garantizar una buena adherencia entre hormigón y acero. Esta adherencia queda garantizada por varios mecanismos. El primero de estos mecanismos es de naturaleza físico-química, su origen está en la interfase hormigón-acero que se produce en el contacto de ambos. El segundo mecanismo se debe al hecho de que el hormigón retrae al endurecer, lo que provoca un mejor agarre de las armaduras. El tercer mecanismo es un mecanismo forzado: las barras de las armaduras pasivas, que son las empleadas en hormigón armado, están fabricadas con corrugas que mejoran la adherencia.

En relación con el hormigón pretensado, existen dos grandes diferencias técnicas dependiendo de si la tensión en el acero se introduce antes o después del endurecimiento del hormigón (hormigón preteso y posteso, respectivamente). En elementos pretesos, el acero se tensa dentro del molde del elemento, posteriormente se hormigona y una vez endurecido se liberan los extremos de los cables. En estas estructuras el trazado del cable debe de ser rectilíneo. En el caso de estructuras postesas, en el interior de la masa de hormigón se

colocan unos conductos o vainas por los que,, una vez endurecido el hormigón, se procede a introducir los cables de pretensado para su posterior tesado. El trazado de los cables en estas últimas estructuras puede ser curvo.

De lo anteriormente expuesto se puede intuir que la transmisión de las tracciones del acero al hormigón en elementos de hormigón pretensado es más compleja que en el caso del hormigón armado. Como ya comentamos, el acero de pretensar alcanza tracciones mucho mayores que el acero de armar. La solución a este problema ha generado grandes diferencias entre distintos sistemas ideados para realizar dicha transmisión existiendo numerosos sistemas de pretensado (tanto postesado como preteso) y múltiples patentes.

Con la técnica del hormigón armado las luces que se pueden salvar en una viga horizontal son muy limitadas. Las grandes luces en hormigón armado se consiguen mediante estructuras cuya geometría obliga a que las secciones trabajen fundamentalmente a compresión, siendo los esfuerzos de flexión muy limitados, tal es el caso de los arcos. Un gran maestro en el arte de sacar al hormigón armado su máximo partido fue D. Eduardo Torroja. Las figuras 1.5 y 1.6 corresponden a dos de sus obras: El Frontón de Recoletos (figura 1.5) - destruido durante la Guerra Civil Española - y El Viaducto Martín Gil (figura 1.6), obra muy singular debido a que la armadura pasiva hizo de sustento del encofrado.

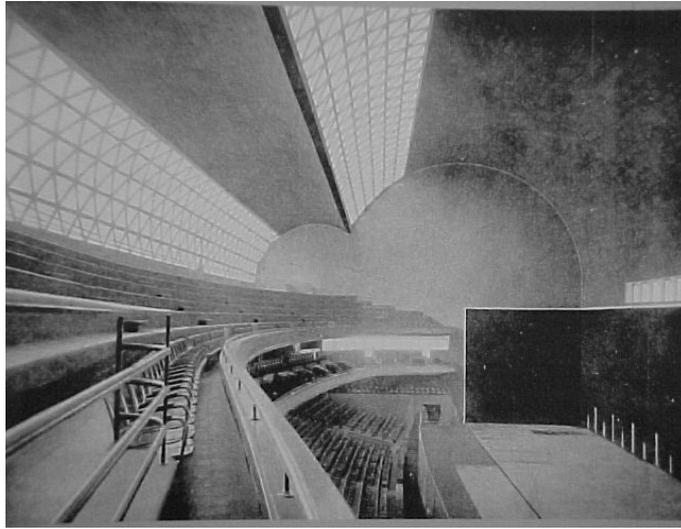


Figura 1.5. Frontón de Recoletos. Cortesía de la familia Torroja.



Figura 1.6. Viaducto Martín Gil. Cortesía de la familia Torroja.

La técnica del hormigón pretensado permite salvar mayores luces y, de hecho, en la mayoría de los puentes de grandes vanos construidos hoy día se emplea hormigón

pretensado. En la figura 1.7 podemos ver un puente fabricado con hormigón pretensado posteso.



Figura 1.7. Puente de Huétor-Santillán.

### 1.3. NORMATIVA

El uso del hormigón en la sociedad es de tal importancia que los modelos de comportamiento del hormigón y del acero, las hipótesis de cálculo y su rango de aplicación están normalizados.

En Europa es de aplicación el Eurocódigo 2 para hormigón estructural y el Eurocódigo 1 para el estudio de las cargas sobre las estructuras. En España la norma vigente es la Instrucción de Hormigón Estructural (EHE). En la parte dedicada a hormigón estructural la EHE y el Eurocódigo 2 son similares aunque en algunos casos existen diferencias apreciables, debido sobre todo a la tradición tecnológica de nuestro país.

Una obra interesante desde el punto de vista técnico es el Código Modelo CEB-FIP (Comité Euro-Internacional del Hormigón - Federación Internacional del Pretensado). Esta obra, cuya última versión es de 1990, es un compendio de la tecnología del hormigón estructural y constituye una fuente para las normativas nacionales.

En el caso arquitectos e ingenieros especialistas en estructuras es interesante y recomendable el conocimiento de las normativas de otros países, en especial la norma americana ACI-318, editada por el *American Concrete Institute* en inglés y en español.

***Denominación básica***

En la norma española si el hormigón no contiene armadura se le denomina hormigón en masa (HM), si su armadura está constituida exclusivamente por armadura pasiva se denomina hormigón armado (HA) y si existe armadura activa se llama hormigón pretensado (HP). En la nomenclatura del Eurocódigo 2 no existe esa diferencia y al hormigón estructural se le nombra con la letra C.

### Ejercicios propuestos

1. ¿Dónde rompería una viga pretensada como la de la figura 1.3 si la fuerza de pretensado fuese excesivamente grande y no estuviera sometida más que a la acción de su peso propio?.
2. En las vigas como la de la figura 1.2 las barras de armadura que se colocan en la parte inferior se denominan *positivos*. Si las barras se colocan en la parte superior de la viga se denominan *negativos*. ¿Tiene esto algo que ver con el signo de los momentos flectores?.
3. Considérese una viga continua de tres vanos ¿en qué partes se necesitaría armadura y en cuales no?, dicho de otra forma ¿dónde se colocarían los *positivos* y dónde los *negativos*?.

### Referencias

Jiménez Montoya P., García Meseguer A. y Morán Cabré F. (1994). *Hormigón Armado*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

Páez, Alfredo (1986). *Hormigón Armado, tomo 1*. Editorial Reberté. Barcelona

Torroja Miret E., (1991). *Razón y ser de los tipos estructurales*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Ciencias de la Construcción "Eduardo Torroja".



---

## CAPÍTULO II

---

### PROCEDIMIENTOS GENERALES DE CÁLCULO



Carga móvil de ferrocarril sobre una estructura.  
Cortesía de **PROINTEC S.A.** [www.prointec.es](http://www.prointec.es)

#### 2.1. DESCRIPCIONES PROBABILISTAS Y DETERMINISTAS

Cuando se acomete el cálculo de una estructura con objeto de dimensionarla existen algunos datos que es necesario conocer: acciones, propiedades de los materiales, condiciones ambientales y geometría. En relación al valor de cada uno de estos datos caben dos posibilidades:

- suponer que sus valores son conocidos y únicos, o bien
- suponer que el valor de cada uno o conjunto de ellos tiene asociada una cierta distribución estadística.

El primero de los planteamientos se conoce como determinista. Los planteamientos deterministas fueron adoptados por las primeras normas de hormigón, de manera que partiendo de unos valores determinados en los datos de entrada se

realizaba todo el cálculo estructural. Al final del proceso de cálculo se comparaba el resultado de algunos valores obtenidos con los que se consideraban valores *admisibles* de estos resultados. P.ej. las tensiones obtenidas en el cálculo se comparaban con lo que se denominaban *tensiones admisibles*, siendo en éstas donde se introducía el coeficiente de seguridad, asociado a la incertidumbre inherente al proceso.

$$\sigma_{admissible} = \frac{\sigma_{max}}{\gamma}$$

El segundo de los planteamientos es mucho más realista y consiste en asignar a cada una de las variables del proceso una función de densidad y obtener la garantía de funcionamiento de la estructura en términos de probabilidad.

Un planteamiento intermedio a los anteriores es el **método de los estados límites**. En este método se fijan una serie de estados que la estructura, durante un tiempo determinado, no debe sobrepasar para garantizar una determinada funcionalidad. A ese intervalo de tiempo se le conoce como **vida útil** de la estructura.

## 2.2. EL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITES

Cuando se proyecta y construye una estructura se debe hacer de forma que durante la vida útil estimada se mantenga en las condiciones de uso requeridas, tanto durante su construcción como durante su uso, sin que ello requiera operaciones más complicadas que un simple mantenimiento. A lo largo de esta vida útil pueden aparecer distintas situaciones en función de su duración en el tiempo denominadas *situaciones de proyecto*:

- situaciones persistentes o definitivas
- situaciones transitorias o provisionales
- situaciones accidentales
- situaciones sísmicas

Durante todas estas situaciones hemos de garantizar que no se alcanzará ningún ESTADO LÍMITE, definidos como aquellos a partir de los cuales la estructura no satisface los requerimientos de seguridad y de funcionalidad para los que había sido proyectada.

Los estados límite se agrupan en los dos siguientes:

1. **Estados límite últimos** (ELU): Asociados al colapso o a otra forma de fallo similar de la estructura, parte de ella, o a la seguridad de personas. Los estados límites últimos, según la norma española de hormigón EHE, se producen cuando el fallo se presenta por:

- Pérdida de estabilidad
- Solicitaciones normales
- Cortante

- Torsión
- Punzonamiento
- Deformaciones estructurales (pandeo)
- Fatiga

2. **Estados límite de servicio (ELS):** Asociados a la falta de servicio en funcionalidad, comodidad o apariencia estética de la estructura. Los estados límite de servicio pueden ser reversibles o irreversibles. Los estados límites de servicio en hormigón son:

- de limitación de tensiones bajo condiciones de servicio
- de fisuración
- de deformación

El método de los estados límites centra su estudio sobre las acciones y sobre las características de los materiales. La durabilidad de la estructura es un supuesto de proyecto, lo que quiere decir que se supone que los materiales de la estructura permanecerán en perfecto estado durante su vida útil. Para garantizar esto último, se tomarán medidas paliativas en función del tipo de ambiente en el que se encuentre y se asegurará la calidad durante todo el proceso constructivo.

Se supone que las hipótesis de cálculo establecidas para el análisis estructural son apropiadas para predecir el comportamiento estructural y los estados límites considerados. El método de los estados límites está basado en el principio de superposición y, por tanto, todo análisis estructural cuyas hipótesis no verifiquen el principio de superposición (como puede ser el caso del estudio de estabilidad de pilares) no es compatible, en principio, con el método de los estados límites.

Las acciones sobre una estructura se pueden clasificar atendiendo a varios criterios:

- Por su forma de aplicación: directas (cargas) o indirectas (deformaciones impuestas, acciones térmicas, ..).
- Según su variación en el tiempo:
  - **G permanentes:** como el peso propio o los elementos permanentes.
  - **Q variables:** como la sobrecarga de uso, el viento o la nieve.
  - **A accidentales:** como explosiones o impactos de vehículos
- Por su variación espacial: fijas o libres.
- Por su naturaleza o respuesta estructural: estáticas o dinámicas.

### **Valores característicos, valores representativos y valores de cálculo**

Un concepto muy importante en el método de los estados límites es el de *valor característico*, tanto para las acciones como para los materiales. El concepto de valor

característico está ligado a la distribución estadística que presenta el valor en cuestión, denominándose valor característico aquel que más interese destacar dentro de la distribución estadística. Algunas veces el valor característico corresponderá al valor medio y en otras ocasiones será el asociado a un percentil determinado de la distribución estadística.

### *Materiales*

En relación a los materiales, desde el punto de vista del método de los estados límites, caben dos posibilidades: referirse a situaciones de resistencia última (relacionadas con los ELU) o bien referirse a situaciones de limitación de deformaciones (relacionadas con los ELS). Según se trate de un caso u otro, el valor característico de los materiales será conceptualmente diferente y el nivel de seguridad requerido en el cálculo también será diferente.

Consideremos un ejemplo: si se pretende estudiar la deformación de una viga de hormigón lo que interesa es considerar el valor medio del módulo de deformación ya que en el cálculo de la deformación de ésta interviene todo el hormigón que la compone. Por el contrario, si lo que se pretende es estudiar la resistencia a rotura de la viga será conveniente tener en cuenta el valor de la resistencia del hormigón correspondiente a un percentil determinado ya que la rotura se producirá por el punto más débil.

En el caso de las resistencias últimas de los materiales, se supone que sus valores siguen una distribución normal. El valor característico de la resistencia última será el que presente una garantía del 95% (sólo el 5% de las probetas ensayadas tendrán una resistencia menor a la característica):

$$f_k = f_m - 1.65\sigma$$

donde  $f_m$  es el valor medio y  $\sigma$  es la desviación estándar.

En cuanto a parámetros relativos a la rigidez de los materiales, necesarios para medir deformaciones, el valor característico será su valor medio, ya que la deformación vendrá dada con mayor exactitud por el valor medio que por el del cuantil del 0.95.

Como ya hemos dicho, el valor característico de la propiedad de un material es aquel valor que es más interesante resaltar ( $X_k$ ). No obstante, cuando se introduce en el cálculo es necesario aplicarle un coeficiente de seguridad con objeto de garantizar que no se va a sobrepasar en los ELU y que los ELS van a ser calculados con exactitud. Con este objeto se introduce el *coeficiente parcial* de la propiedad del material:  $\gamma_M$ .

Se denomina *valor de cálculo* de la propiedad de un material al valor  $X_d$ :

$$X_d = \frac{X_k}{\gamma_M}$$

Los coeficientes parciales de seguridad para ELU de las propiedades de los materiales según la EHE y el EC2 se recogen en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Coeficientes parciales de seguridad de materiales

Situación de proyecto	Hormigón	Acero pasivo y activo
	$\gamma_c$	$\gamma_s$
Persistente o transitoria	1.5	1.15
Accidental	1.3	1.0

Obviamente el valor del coeficiente parcial de seguridad en hormigón es mayor que en acero puesto existe mayor desviación de la media en su valor característico. Si los valores característicos de resistencia son de 30 MPa para un hormigón y de 500 MPa para un acero, sus correspondientes valores de cálculo -en situaciones persistentes- serán de 20 y 435 MPa, respectivamente. Esto significa que, debido al proceso de fabricación, se tiene la misma garantía de que el acero de 500 MPa no supere el valor de 435 MPa como de que un hormigón de 30 MPa no supere 20 MPa.

Para los ELS se tomará  $\gamma_M=1$ .

### Acciones

En el caso de las acciones el valor característico depende del tipo de acción considerada, pudiendo ser el valor medio, un valor superior, un valor inferior o un valor nominal.

En el caso de acciones permanentes:

- si su variación es pequeña se suele usar un único valor  $G_k$
- si su variabilidad es grande se suelen usar dos valores característicos  $G_{k,inf}$  y  $G_{k,sup}$ , asociados al cuantil del 5% y del 95% respectivamente.

En el caso de acciones variables, en la definición de su valor característico se usan niveles de confianza del 2% y del 98% para  $Q_{k,inf}$  y  $Q_{k,sup}$  respectivamente, o bien su valor medio.

Se denomina *valor representativo* de una acción al valor adoptado como carga sobre la estructura, en general este valor será el valor característico y, de hecho, para las cargas permanentes el valor característico y el representativo coinciden. Cuando se consideran numerosas cargas o combinaciones de cargas sobre una estructura la probabilidad de que aparezcan todas simultáneamente disminuye. Por ejemplo: sobre un puente actúan varias cargas variables: el tráfico, la nieve, el viento, las cargas térmicas, ... pero la probabilidad de que todas actúen a la vez es menor que la de que actúen sólo algunas de ellas y, por tanto, es lógico considerar sólo fracciones de las cargas variables cuando actúen a la vez. Considerar combinación de acciones implica tener en cuenta que es poco probable la actuación simultánea de todas ellas, lo que se realiza mediante

los coeficientes de compatibilidad  $\Psi$ . Así pues, aparecen tres valores representativos de las acciones variables:

- $\Psi_0 Q_k$  el valor de combinación
- $\Psi_1 Q_k$  el valor frecuente (ligado a una parte de tiempo del 5%)
- $\Psi_2 Q_k$  el valor cuasipermanente (ligado a una parte del tiempo del 50%)

Los valores de  $\Psi$  dependerán de cada normativa. En la tabla 2.2 se indican los valores establecidos por el EC-1 para estructuras de edificación.

Tabla 2.2. Coeficientes  $\Psi$  para edificación, según EC-1

Acción	$\Psi_0$	$\Psi_1$	$\Psi_2$
Carga exterior en:			
A.- Edificios domésticos	0.7	0.5	0.3
B.- Oficinas	0.7	0.5	0.3
C.- Áreas de reunión	0.7	0.7	0.6
D.- Comercios	0.7	0.7	0.6
E.- Almacenes	1.0	0.9	0.8
Carga de tráfico:			
- vehículo $\leq 30$ kN	0.7	0.7	0.6
- vehículo entre 30 y 160 kN	0.7	0.5	0.3
- cubiertas	0	0	0
Nieve	0.6	0.2	0
Viento	0.6	0.5	0
Térmicas (no fuego)	0.6	0.5	0

Hasta ahora se ha hablado de valor característico: el más idóneo, y de valor representativo: para tener en cuenta el carácter de ocurrencia simultánea. El siguiente paso es establecer el nivel de seguridad o coeficiente de seguridad que, en el caso de las acciones, se lleva a cabo mediante el coeficiente parcial de la acción:  $\gamma_F$ .

Se denomina *valor de cálculo* (también denominado valor de diseño) de una acción al valor  $F_d$ :

$$F_d = \gamma_F \Psi_i F_k$$

El valor de  $\gamma_F$  además tiene en cuenta si el efecto de la acción sobre la estructura es favorable o desfavorable, según sea este efecto  $\gamma_F$  tomará diferentes valores. El valor de  $\gamma_F$  establecido por la EHE viene recogido en la tabla 2.3. Estos valores pueden ser modificados en función del nivel de control en la ejecución de la obra, ver tabla 2.4.

Tabla 2.3. Coeficientes parciales de seguridad para las acciones

TIPO DE ACCIÓN	Situación persistente o transitoria		Situación accidental	
	Efecto favorable	Efecto desfavorable	Efecto favorable	Efecto desfavorable
Permanente	$\gamma_G=1.00$	$\gamma_G=1.35$	$\gamma_G=1.00$	$\gamma_G=1.00$
Pretensado	$\gamma_P=1.00$	$\gamma_P=1.00$	$\gamma_P=1.00$	$\gamma_P=1.00$
Permanente de valor no constante	$\gamma_{G^*}=1.00$	$\gamma_{G^*}=1.50$	$\gamma_{G^*}=1.00$	$\gamma_{G^*}=1.00$
Variable	$\gamma_Q=0.00$	$\gamma_Q=1.50$	$\gamma_Q=0.00$	$\gamma_Q=0.00$
Accidental	-	-	$\gamma_A=1.00$	$\gamma_A=1.00$

Tabla 2.4. Correcciones según el nivel de control de ejecución

TIPO DE ACCIÓN	Nivel de control de ejecución		
	Intenso	Normal	Reducido
Permanente	$\gamma_G=1.35$	$\gamma_G=1.50$	$\gamma_G=1.65$
Pretensado	$\gamma_P=1.00$	$\gamma_P=1.00$	-
Permanente de valor no constante	$\gamma_{G^*}=1.50$	$\gamma_{G^*}=1.60$	$\gamma_{G^*}=1.80$
Variable	$\gamma_Q=1.50$	$\gamma_Q=1.60$	$\gamma_Q=1.80$

### Combinación de acciones para verificar los Estados Límites

Una vez conocidas todas las acciones a las que está sometida la estructura y sus valores de cálculo, los valores de cálculo de las propiedades de los materiales, los datos geométricos y decidido el tipo de análisis estructural se pueden comprobar cada uno de los Estados Límites. Este nuevo paso consiste en verificar que no se sobrepasa ninguno de los estados límites durante la vida útil de la estructura. Para ello hay que considerar todas las formas posibles en que las acciones pueden actuar sobre la estructura (combinaciones) durante la vida de la estructura (situaciones de proyecto).

El método de los estados límites plantea una serie de combinaciones de acciones que tienen en cuenta la probabilidad de que se presente una determinada situación de proyecto junto con la probabilidad de que las acciones actúen simultáneamente. Se establecen así unas determinadas combinaciones de acciones para cada situación de proyecto.

Sean  $E$  los efectos de las acciones (p.ej. esfuerzos en barras, tensiones, deformaciones y desplazamientos) y  $R$  la resistencia de la estructura, cuyos valores de cálculo son:

$$E_d = E(\underbrace{F_{d1}, F_{d2}, \dots}_{\text{acciones}} \underbrace{a_{d1}, a_{d2}, \dots}_{\text{geometría}} \underbrace{X_{d1}, X_{d2}, \dots}_{\text{materiales}})$$

$$R_d = R(a_{d1}, a_{d2}, \dots, X_{d1}, X_{d2}, \dots)$$

donde:

- $F_{di}$  son las acciones
- $a_{di}$  los datos geométricos de la estructura
- $X_{di}$  las acciones sobre la estructura

Para verificar los estados límites últimos se debe de cumplir:

- Equilibrio estático:

$$E_{d,dst} \leq E_{d,stab}$$

$E_{d,dst}$  es el valor de cálculo de los efectos desestabilizadores de las acciones  
 $E_{d,stab}$  es el valor de cálculo de los efectos estabilizadores de las acciones

Un ejemplo de esto puede verse en el muro de contención de tierras de la figura 2.1. No sólo hay que garantizar que el muro no rompa sino que éste tampoco puede deslizar o volcar si se quiere asegurar la funcionalidad de la estructura.

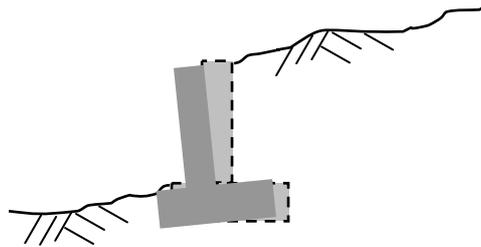


Figura 2.1. Pérdida de estabilidad en un muro de contención de tierras.

- Estado límite de rotura o deformación excesiva

$$E_d \leq R_d$$

Para cada estado límite último (excepto para fatiga) el valor de  $E_d$  debe de ser calculado para las siguientes situaciones de proyecto:

Para situaciones persistentes y transitorias de proyecto:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{Gj} G_{kj} + \gamma_P P_k + \gamma_{Q1} Q_{k1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Qi} \Psi_{0i} Q_{ki}$$

Para situaciones accidentales de proyecto:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{GAj} G_{kj} + \gamma_{PA} P_k + A_d + \Psi_{11} Q_{k1} + \sum_{i > 1} \Psi_{2i} Q_{ki}$$

Para la situación sísmica de proyecto:

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + \gamma_I A_{Ed} + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2i} G_{ki}$$

donde:

+	significa “se combina con”
$\Sigma$	significa “efecto combinado de”
$G_{kj}$	valor característico de las acciones permanentes
$P_k$	valor característico de las acciones de pretensado, que se consideran permanentes
$Q_{k1}$	valor característico de la acción variable 1
$Q_{ki}$	valor característico de la acción variable i
$A_d$	valor de cálculo de la acción accidental
$A_{Ed}$	valor de cálculo de la acción sísmica
$\gamma_{Gj}$	coeficiente parcial de la acción permanente j
$\gamma_{GAj}$	igual al anterior pero para situaciones accidentales de proyecto
$\gamma_P$	coeficiente parcial para la acción de pretensado
$\gamma_{PA}$	igual al anterior pero para situaciones accidentales de proyecto
$\gamma_{Qi}$	coeficiente parcial para la acción variable i
$\gamma_I$	coeficiente de importancia. Este coeficiente diferencia las estructuras según su importancia.

Para verificar los estados límites de servicio se debe de cumplir:

$$E_d \leq C_d$$

Donde  $C_d$  es el valor nominal o una función de la propiedad de cálculo del material relacionada con los efectos de cálculo de las acciones consideradas, o sea, una limitación impuesta a la estructura (por ejemplo: unas deformaciones).

Para cada estado límite de servicio, el valor de  $E_d$  debe de ser calculado para las siguientes combinaciones:

- Combinación característica o rara

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + Q_{k1} + \sum_{i > 1} \Psi_{0i} Q_{ki}$$

- Combinación frecuente

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + \Psi_{11} Q_{k1} + \sum_{i > 1} \Psi_{2i} Q_{ki}$$

- Combinación cuasipermanente

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2i} Q_{ki}$$

Algunas normas pueden presentar comprobaciones simplificadas, el EC1 y la EHE presentan comprobaciones simplificadas para estructuras de edificación.

### 2.3. DURABILIDAD

Las estructuras pueden colapsar por sobrepasar uno de los Estados Límites debido a causas tales como el deterioro de los materiales y, en especial, a problemas de corrosión. El problema de la durabilidad de la estructura se enfoca fuera del método de los estados límites y con carácter paliativo. La norma EHE plantea 4 clases generales de ambientes relativos a corrosión de armaduras y 4 clases de ambientes específicos para procesos de deterioro distintos de la corrosión, éstos se especifican en las tablas 2.5 y 2.6.

Tabla 2.5. Clases generales de exposiciones relativas a corrosión de las armaduras

Clase de ambiente	Ejemplos
I –no agresivo-	Interior de edificios
Ila –normal de humedad alta-	Sótanos no ventilados, cimentaciones
Ilb –normal de humedad media-	Tableros y pilas de puentes
Illa –ambiente marino aéreo-	Edificaciones a menos de 5 km de la costa
IIlb –ambiente marino sumergido-	Diques, pantalanés
IIlc –ambiente marino en zona de mareas-	Pilas de puentes sobre el mar
IV –corrosión por cloruros-	Piscinas

Tabla 2.6. Clases específicas de exposición relativas a otros procesos de deterioro distintos de la corrosión

Clase específica de exposición	Ejemplos
Qa –ataque químico débil-	Instalaciones industriales con ataque débil
Qb –ataque químico medio-	Estructuras marinas en general
Qc –ataque químico fuerte-	Conducciones de aguas residuales
H –heladas sin sales fundentes-	Construcciones en alta montaña
F –heladas con sales fundentes-	Tableros de puentes en alta montaña
E –erosión por cavitación o abrasión-	Pilas en cauces muy torrenciales

La durabilidad se garantiza clasificando la estructura dentro de una o varias clases de exposición e imponiendo condiciones relativas a:

- Máxima relación agua/cemento y mínimo contenido de cemento (tabla 37.3.2.a de la EHE-98) para garantizar la mínima porosidad.
- Resistencias mínimas (tabla 37.3.2. de la EHE-98) para garantizar máxima compacidad.
- Formas estructurales adecuadas que proporcionen el máximo aislamiento del agua.
- Adopción del adecuado espesor de recubrimiento (apdo. 37.2.4 de la EHE-98)
- Control de sustancias perjudiciales (apdos. 37.3.4 al 37.3.5)
- Cantidad mínima de aire ocluido para resistencia a heladas (apdo. 37.3.3)
- Limitación de fisura (apdo. 49.2.4)
- Calidad adecuada del hormigón, tanto en dosificación como en ejecución.

Con todas estas limitaciones se pretende que el hormigón no presente deterioro durante su vida útil con objeto de garantizar las resistencias del acero y del hormigón durante este periodo.

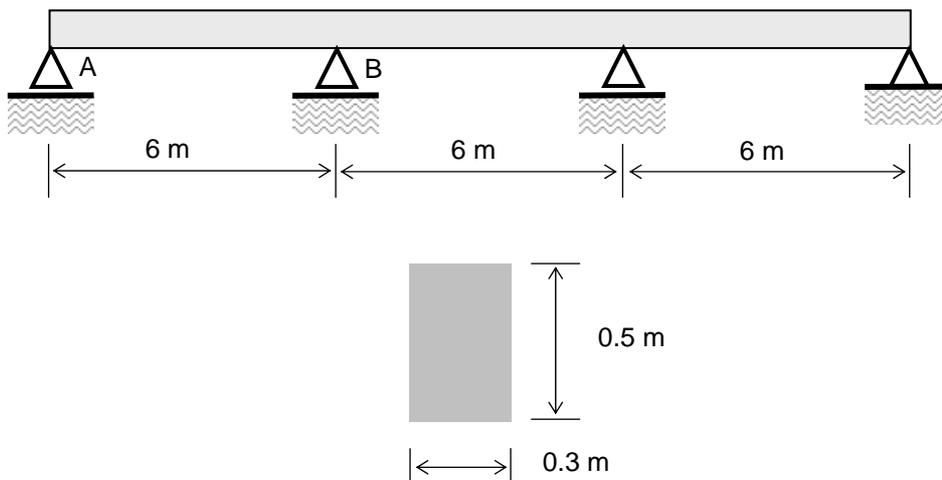
**Ejemplo**

La azotea de un edificio está compuesta por vigas continuas de tres vanos separadas 5 m entre sí. Todos los vanos tienen una luz de 6 m. La sección transversal de la viga tiene unas dimensiones de 0.5×0.3 m. Las cargas que actúan sobre ella son:

- Una carga permanente compuesta de su peso propio más 2 kN/m<sup>2</sup>.
- Una carga variable de nieve de 0.6 kN/m<sup>2</sup>.
- Una carga variable de uso de 1.5 kN/m<sup>2</sup>.

El nivel de ejecución de la obra es intenso.

Se pide: hallar el momento flector de cálculo en ELU para un apoyo intermedio en la situación persistente o transitoria.



**Solución:**

La fórmula correspondiente para la situación de proyecto persistente y transitoria es:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{Gj} G_{kj} + \gamma_P P_k + \gamma_{Q1} Q_{k1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Qi} \Psi_{0i} Q_{ki}$$

En primer lugar hay que estudiar las acciones que actúan sobre la estructura y clasificarlas. Si la densidad del hormigón armado es de 2500 kg/m<sup>3</sup>, los valores característicos de las acciones serán:

$$\begin{aligned}
 G &= 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} + 2000 \text{ N/m}^2 \cdot 5 \text{ m} = \\
 &= 13.7 \text{ kN/m} \\
 Q_{nieve} &= 0.6 \text{ kN/m}^2 \cdot 5 \text{ m} = 3.0 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

Hernández-Gil

$$Q_{uso} = 1.5 \text{ kN/m}^2 \cdot 5\text{m} = 7.5 \text{ kN/m}$$

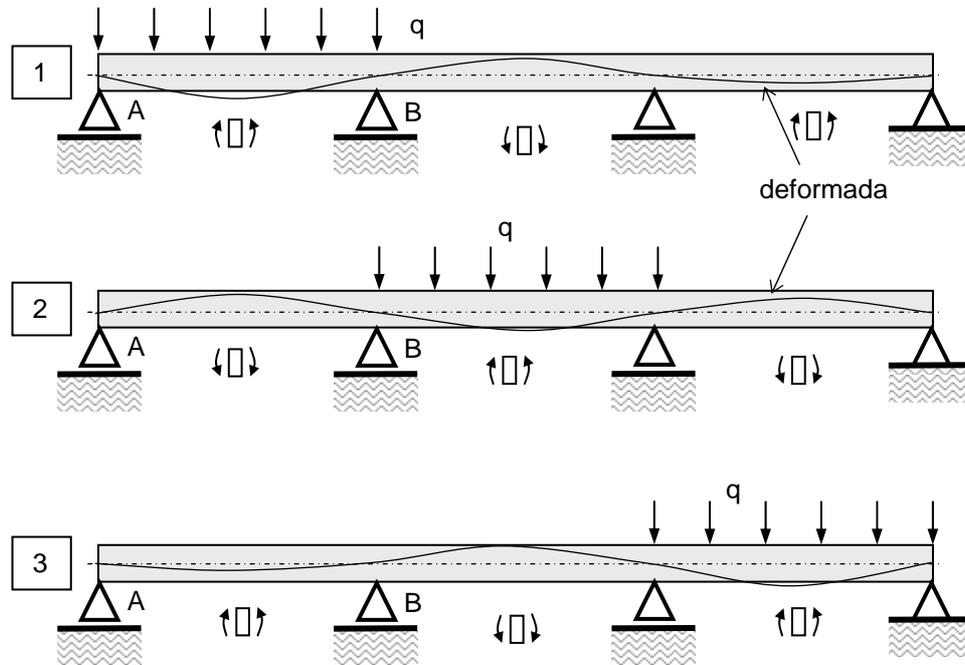
Para conocer los valores representativos de las acciones variables es necesario conocer los valores de los coeficientes  $\psi$ , que vienen dados en la tabla 2.4.  $\psi_0$  para la nieve toma el valor de 0.6 y para la carga variable de uso 0.7.

Para obtener los valores de cálculo necesitamos multiplicar los valores representativos por los coeficientes parciales de seguridad de las acciones  $\gamma_f$ , que son:

$$G \quad 1.35 \text{ si la acción es desfavorable, } 1.0 \text{ si la acción es favorable}$$

$$Q_{nieve} \text{ y } Q_{uso} \quad 1.50 \text{ si la acción es desfavorable, } 0 \text{ si la acción es favorable}$$

Como se puede observar el carácter favorable o desfavorable de la carga, en este problema, dependerá de dónde se sitúe ésta. Una carga distribuida en el primer o segundo vano será desfavorable en cuanto al momento en B mientras que una carga distribuida situada en el tercer vano será favorable para el momento en B. Esto se puede apreciar en los tres casos siguientes:



El momento en B tendrá los siguientes valores:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1+2+3
Momento en B	$-0.0667 q l^2$	$-0.0500 q l^2$	$0.0167 q l^2$	$-0.1000 q l^2$

donde  $l$  es la longitud del vano y  $q$  la carga por unidad de longitud.

En vista de lo anterior, caben dos posibilidades:

1. Plantear directamente la hipótesis más desfavorable
2. Realizar todas la combinaciones posibles

La hipótesis más desfavorable, en este sencillo ejemplo es fácil de ver y consiste en:

Considerar como  $Q_l$  a la carga variable de uso (puesto que es la mayor) y considerar los valores desfavorables de  $\gamma_F$  en los vanos primero y segundo y el valor favorable para el tercer vano. Procediendo de esta manera el momento en B será:

$$\begin{aligned}
 M_B &= 1.35 \cdot 13.7 \cdot 6^2 \cdot (-0.0667 - 0.0500) + 1.00 \cdot 13.7 \cdot 6^2 \cdot (0.0167) + \\
 &1.5 \cdot 7.5 \cdot 6^2 \cdot (-0.0667 - 0.0500) + 1.5 \cdot 0.6 \cdot 3.0 \cdot 6^2 \cdot (-0.0667 - 0.0500) \\
 &= -128.07 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

En este sencillo ejemplo es fácil saber cuál es la combinación más desfavorable. No obstante, en la mayoría de los casos la deducción de la combinación más desfavorable no es inmediata siendo necesario plantear las distintas combinaciones posibles, tal y como se resume en la tabla siguiente.

Combinación	Q <sub>1</sub>	Primer vano	Segundo vano	Tercer vano	M <sub>B</sub> (kN·m)
1	Uso	Desfavorable	Desfavorable	Desfavorable	-116,8
2	Uso	Desfavorable	Desfavorable	Favorable	<b>-128,1</b>
3	Uso	Desfavorable	Favorable	Desfavorable	-83,1
4	Uso	Desfavorable	Favorable	Favorable	-94,3
5	Uso	Favorable	Desfavorable	Desfavorable	-71,8
6	Uso	Favorable	Desfavorable	Favorable	-83,1
7	Uso	Favorable	Favorable	Desfavorable	-38,1
8	Uso	Favorable	Favorable	Favorable	-49,3
9	Nieve	Desfavorable	Desfavorable	Desfavorable	-111,1
10	Nieve	Desfavorable	Desfavorable	Favorable	-121,5
11	Nieve	Desfavorable	Favorable	Desfavorable	-80,2
12	Nieve	Desfavorable	Favorable	Favorable	-90,5
13	Nieve	Favorable	Desfavorable	Desfavorable	-69,9
14	Nieve	Favorable	Desfavorable	Favorable	-80,2
15	Nieve	Favorable	Favorable	Desfavorable	-39,0
16	Nieve	Favorable	Favorable	Favorable	-49,3

Como se puede observar la hipótesis inicial era cierta.

### Referencias

EN 1991-1-1:2002 *Eurocode 1*. Actions on structures. General actions. Densities, self-weight, imposed loads for buildings.

EHE. *Instrucción de Hormigón Estructural* (borrador 2007). Secretaría General Técnica. Ministerio de Fomento. Madrid.

Jiménez Montoya P., García Meseguer A. y Morán Cabré F. (1994). *Hormigón Armado*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

**Ejercicios propuestos**

1. Para el ejemplo anterior: estudiar cuál sería la posición más desfavorable de una carga móvil puntual de 100 kN para los siguientes casos:
  - a. máximo momento flector positivo
  - b. máximo momento flector negativo
  - c. cortante.
  
2. En ELS los valores de los coeficiente parciales de mayoración de las cargas y de minoración de los materiales son 1, ¿tiene esto algo que ver con las consecuencias que tiene para la estructura el hecho de que deje de verificarse puntualmente un ELS?





---

CAPÍTULO III

---

**DESCRIPCIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL HORMIGÓN Y DEL ACERO**



Bombeando hormigón.

**Cortesía de HOLCIM (España) S.A. [www.holcim.es](http://www.holcim.es)**

En este capítulo se estudian las características mecánicas de cada uno de los componentes del hormigón estructural: hormigón, armadura pasiva y armadura activa. El planteamiento de este capítulo es fundamentalmente mecanicista, no tratándose los aspectos químicos ni del hormigón ni del acero.

### 3.1. EL HORMIGÓN O CONCRETO

El hormigón (concreto en varios países de Ibero-América) es una mezcla de: cemento, agua y áridos como componentes principales. Además pueden añadirse adiciones (hasta un 35% del peso de cemento, dependiendo del tipo de adición) y aditivos (<5% del peso de cemento). El objetivo de las adiciones y de los aditivos es

mejorar alguna de las propiedades del hormigón aunque en la práctica las adiciones se emplean sobre todo para abaratar el precio final del hormigón. Las adiciones son: puzolanas naturales, cenizas volantes, escoria de alto horno y polvo de sílice. Los aditivos, como los superplastificantes, se utilizan fundamentalmente para mejorar la trabajabilidad temporal del hormigón y permitir relaciones bajas de agua/cemento. En peso, las proporciones aproximadas de cada uno de los componentes de un hormigón típico vienen reflejadas en la figura 3.1:

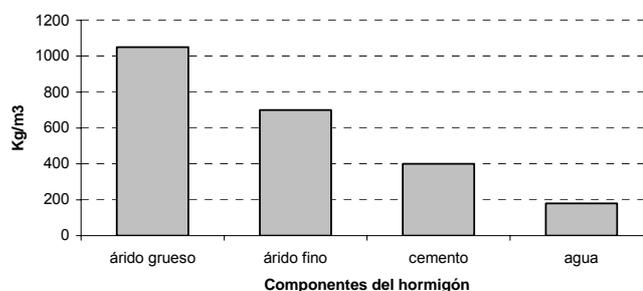


Figura 3.1. Componentes del hormigón en peso

En el instante en que el agua entra en contacto con el cemento se produce una reacción química exotérmica de hidratación y en poco tiempo (unos días) el hormigón se endurece tomando el aspecto de una piedra, ver figura 3.2. Cuando se agrega agua al cemento y a los áridos se forma una pasta gelatinosa que puede tomar cualquier forma. El agua es necesaria para que el hormigón fresco sea manejable y moldeable y por este motivo la cantidad de agua añadida será superior a la estrictamente necesaria para el proceso de hidratación y endurecimiento del hormigón. El agua en exceso no llega a formar parte de la estructura química del hormigón endurecido sino que se evapora con el tiempo y hace que el hormigón adquiera una naturaleza porosa.

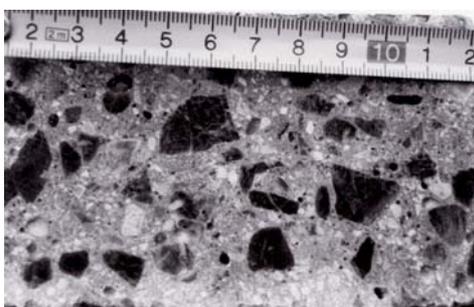


Figura 3.2. Aspecto del hormigón endurecido

La propiedad más importante del hormigón es su resistencia a compresión. La relación agua/cemento de la mezcla es la variable que más afecta a la resistencia a

compresión del hormigón. Un hormigón con gran cantidad de agua será muy poroso, retraerá en exceso y tendrá una resistencia baja.

Para medir la docilidad del hormigón (trabajabilidad) se emplea el ensayo de asiento en el cono de Abrams (figura 3.3). Este ensayo consiste en un molde de acero troncocónico en el que se vierte hormigón y una vez lleno se retira el molde y se mide lo que ha descendido la masa, atribuyéndole su *consistencia* en función de este descenso: *seca* de 0 a 2 cm, *plástica* de 3 a 5 cm, *blanda* de 6 a 9 cm y *fluida* de 10 a 15 cm. Este ensayo es un referente de la calidad del hormigón: cuanto más dócil es un hormigón, más agua contiene y, por tanto, menor será su resistencia.



Figura 3.3. Ensayo de consistencia

El ensayo más importante para medir la resistencia a compresión es el de rotura de probetas cilíndricas<sup>1</sup> de 15×30 cm, medidas en hormigón de 28 días y curado a 20°C con el 90% de humedad (EN 206-1). La norma española EHE define como *resistencia del hormigón a compresión* al resultado obtenido mediante el ensayo en rotura de la probeta cilíndrica en las condiciones anteriormente expuestas. Además hay otros ensayos no destructivos que miden la resistencia a compresión, aunque de forma menos precisa, como son los ensayos de ultrasonidos o los métodos esclerométricos. Antes de usar estos ensayos no destructivos conviene conocer sus limitaciones, que están suficientemente explicadas en la literatura especializada<sup>2</sup>.

La rapidez con la que el hormigón adquiere resistencia depende, entre otros factores, de la temperatura exterior: cuanto mayor es la temperatura más rápido es el proceso de hidratación. Esto provoca que a temperaturas en torno a 0°C sea necesario tomar medidas especiales como calentar los áridos o cubrir el hormigón, en este último caso se trata de aprovechar el calor generado por el proceso exotérmico. Por otro lado, en fábricas de productos prefabricados de hormigón es habitual utilizar técnicas de curado con vapor para acelerar el proceso de endurecimiento.

<sup>1</sup> En otros países se utilizan otro tipo de probetas como probetas prismáticas.

<sup>2</sup> Por ejemplo: en hormigones viejos no es riguroso emplear métodos esclerométricos. Los métodos esclerométricos están basados en un índice de rebote de una masa contra la superficie del hormigón con objeto de medir su módulo de elasticidad y, a partir de éste estimar su resistencia. Puesto que el proceso de carbonatación (comentado en el primer capítulo) lleva asociado un fenómeno de endurecimiento, los hormigones viejos serán más duros en su exterior que en su interior (no carbonatado).

La resistencia del hormigón aumenta con el tiempo. De manera aproximada, se puede decir que la resistencia de un hormigón de un año es un 10% superior a la resistencia que el mismo hormigón tenía a los 28 días.

### 3.2. PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HORMIGÓN

Por separado, el árido y la pasta de cemento tienen un comportamiento que se puede aproximar al lineal, esto no sucede con el hormigón, como se puede observar en la figura 3.4. Esta no linealidad es debida fundamentalmente a microfisuras que aparecen en la interfase roca-pasta de cemento.

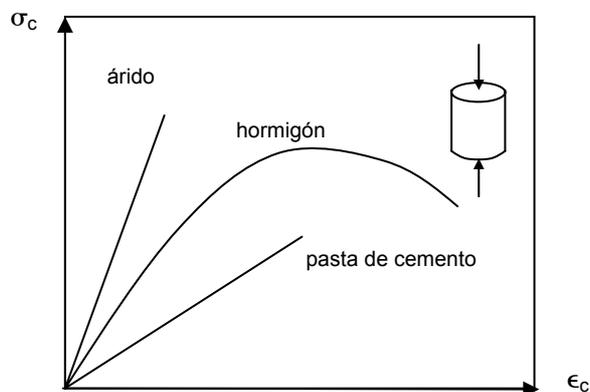


Figura 3.4. Diagrama tensión-deformación del hormigón y de sus componentes

La principal característica mecánica de un hormigón es su resistencia a compresión ( $f_c$ ), que es obtenida a partir del ensayo de rotura en probeta cilíndrica. Siguiendo la nomenclatura de la norma EHE y del Eurocódigo 2, se definen:

$\sigma_c$	tensión normal a la que está sometido el hormigón en un instante determinado.
$f_c$	resistencia media obtenida de ensayar al menos dos probetas a compresión.
$f_{ck}$	resistencia característica a compresión del hormigón en probeta cilíndrica a 28 días. Es el valor que se adopta en el proyecto para la resistencia a compresión del hormigón ( $f_{ck}$ siempre será mayor o igual que la resistencia característica real: cuantil del 5% de la resistencia del hormigón colocado en obra).
$f_{ci}$	resistencia a rotura por tracción indirecta (ensayo brasileño).
$f_{ct}$	resistencia a tracción. Se puede determinar como $0.9f_{ci}$ .
$f_{cm}$	resistencia media a compresión a 28 días, puede calcularse como $f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$ si las condiciones de ejecución son buenas.
$f_{ctm}$	resistencia media a tracción a los 28 días.
$f_{ct,k}$	resistencia característica inferior a tracción (correspondiente al cuantil del 5%), también se denomina $f_{ct,k,0.05}$ . Se puede estimar como $0.7f_{ctm}$ .
$f_{ctk,0.95}$	resistencia característica superior a tracción. Según el EC2 se puede estimar como $1.3f_{ctm}$ .

$f_{ct,fl}$  resistencia a flexo-tracción. Ésta puede obtenerse a partir de la resistencia a tracción mediante la expresión 3.1.

$$f_{ct,fl} = f_{ct} \frac{1 + 1.5 \left( \frac{h}{100} \right)^{0.7}}{1.5 \left( \frac{h}{100} \right)^{0.7}} \quad (3.1)$$

siendo  $h$  el canto del elemento en milímetros.

A falta de resultados experimentales, el valor de la de la resistencia media a tracción se puede estimar mediante la siguiente expresión propuesta por el EC2 (Eurocódigo 2)

$$\begin{aligned} f_{ct,m} &= 0.30 f_{ck}^{2/3} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ct,m} &= 2.12 \ln \left( 1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como hemos dicho antes, la resistencia del hormigón depende de su edad. El EC2 y la norma española plantean las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} f_{cm}(t) &= \beta_{cc}(t) f_{cm} \\ f_{ct,m}(t) &= (\beta_{cc}(t))^\alpha f_{ct,m} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\text{donde } \beta_{cc}(t) = \exp \left[ s \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right) \right]$$

donde  $t$  es la edad del hormigón en días, tomando como origen ( $t=0$ ) el instante en el que se vierte el hormigón en el encofrado,  $\beta_{cc}$  es un coeficiente que depende de la edad del hormigón,  $s$  es un factor que depende del tipo de cemento y toma el valor:  $0.2$  para cementos de alta resistencia y rápido endurecimiento,  $0.25$  para cementos de endurecimiento normal y rápido y  $0.38$  para cementos de endurecimiento lento. Por último  $\alpha$  es un coeficiente que depende de la edad del hormigón y de su resistencia características a los 28 días y cuyo valor es:

$1$	si	$t < 28$ días
$2/3$	si	$t \geq 28$ días y $f_{ck} \leq 50$ MPa
$1/2$	si	$t \geq 28$ días y $f_{ck} > 50$ MPa

La denominación de un hormigón está basada en su resistencia a compresión. De hecho el EC2 los denomina con la letra C (inicial de la palabra inglesa *Concrete*) seguida de la resistencia característica en probeta cilíndrica y seguida de la resistencia característica en probeta cúbica. Así: C25/30, significa hormigón de 25 MPa en probeta

cilíndrica y 30 en cúbica. La EHE define HM, HA o HP según se trate de hormigón en masa, armado o pretensado, seguidos de su resistencia característica en MPa, la primera letra de su consistencia, el tamaño máximo del árido y el ambiente. Así: un hormigón HA-25/P/25/IIIa, corresponde a un hormigón para armar de resistencia característica 25 MPa, con una consistencia plástica, de 25 mm de tamaño máximo de árido y en un ambiente marino aéreo.

### 3.3. DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN

Cuando se realiza un ensayo de rotura a compresión se observa que el resultado obtenido depende de la velocidad con la que se lleva a cabo, tal y como se aprecia en la figura 3.5. Podemos concluir que el diagrama tensión-deformación depende del tiempo de aplicación de la carga. La diferencia entre los diagramas tensión-deformación obtenidos para distintos tiempos de aplicación de la carga es menor si la edad del hormigón es mayor, o sea, el fenómeno observado disminuye a medida que aumenta la edad del hormigón. Existen además otras variables que influyen en la forma del diagrama tensión-deformación, como son la forma de la sección, la humedad, el tipo de árido, ...

Si un hormigón con una edad determinada (por ejemplo: el de la figura 3.5) lo sometemos de forma rápida a una tensión de compresión  $\sigma_1$  inicialmente se produce una deformación  $\epsilon_1$  pero pasados varios días, en los que se mantiene la carga constante, se observa que la deformación ha pasado a ser  $\epsilon'_1$ . De la misma forma, si se carga el mismo hormigón con una tensión de compresión  $\sigma_2$  la deformación inicial es  $\epsilon_2$  pero pasados unos minutos el hormigón rompe, tal y como se aprecia en la figura 3.5. Al fenómeno por el cual el hormigón rompe con una resistencia inferior a  $f_c$  se le conoce como *cansancio del hormigón*.

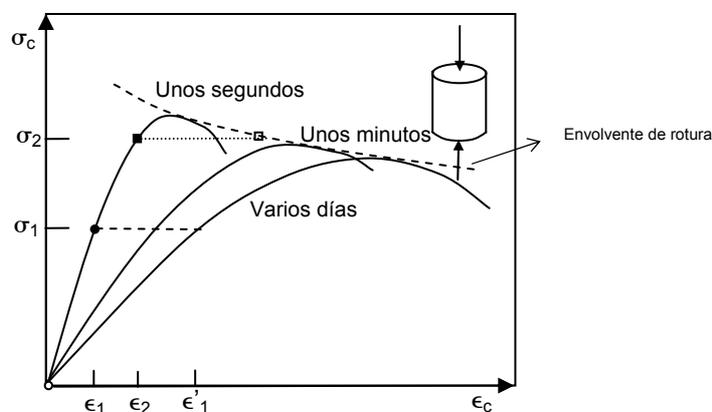


Figura 3.5. Diagramas tensión-deformación en función del tiempo de aplicación de la carga

Evidentemente no se puede obtener *a priori* un diagrama tensión-deformación específico para cada estructura concreta. Tampoco tendría sentido obtener el diagrama tensión-deformación *a posteriori*, puesto que esto implicaría desconocer el nivel de seguridad hasta después de ejecutada la estructura. Por este motivo, las normas proponen diferentes tipos de diagramas. Estos diagramas se dividen en dos grupos en función de su rango de aplicación: diagramas para el cálculo estructural y diagramas para el diseño de secciones en el ELU de agotamiento por tensiones normales.

El origen de esta división está en el hecho de que los diagramas empleados en el cálculo estructural deben de proporcionar valores fiables en el rango de deformación que se pretenda analizar. Por el contrario, para comprobar una sección en ELU, lo que interesa son los valores últimos de las tensiones y de las deformaciones. En el caso del ELU por agotamiento frente a tensiones normales se opta, como veremos después, por diagramas más sencillos, reduciendo su rango de aplicación en aras de conseguir mayor simplicidad. En la figura 3.6 se han esquematizado los distintos modelos tensión-deformación para el hormigón, que se desarrollarán a continuación.

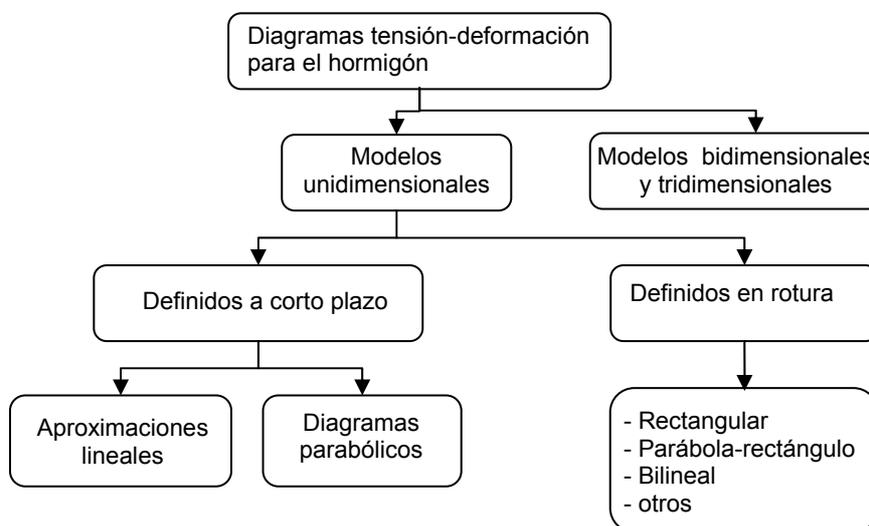


Figura 3.6. Distintos diagramas tensión-deformación para el hormigón.

### 3.3.1 Diagramas para el cálculo estructural

#### Modelo tensión-deformación lineal: deformación elástica

Siguiendo la clasificación de la Figura 3.6, este modelo corresponde a una aproximación lineal del comportamiento unidimensional. Este comportamiento corresponde a probetas cilíndricas de 15×30 ensayadas a compresión en un corto plazo de tiempo: pocos minutos.

Siempre que las tensiones no superen un determinado nivel se puede considerar que el hormigón deforma linealmente. La hipótesis más empleada en el cálculo de estructuras de hormigón es la de comportamiento lineal del material, esto es, se considera que el módulo de deformación longitudinal del hormigón es constante.

Según el EC2, el módulo de deformación longitudinal o módulo de elasticidad para un hormigón de 28 días se puede aproximar por  $E_{cm}$  (pendiente de la secante entre  $\sigma_c=0$  y  $\sigma_c=0.4 f_{cm}$ ). Para áridos de cuarcita el EC2 propone la siguiente expresión:

$$E_{cm} = 22000 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} \text{ MPa} \quad (3.4)$$

donde  $f_{cm}$  se introduce en MPa. Esta formulación es, como ya hemos dicho, para áridos cuarcíticos; para árido calizo y arenisco el valor debe de reducirse en un 10% y 30% respectivamente. En el caso de basalto el valor debe de incrementarse en un 20%.

Además el EC2 propone que la variación en el tiempo de  $E_{cm}$  puede ser estimada como:

$$E_{cm}(t) = \left( \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}} \right)^{0.3} E_{cm} \quad (3.5)$$

donde  $t$  es la edad del hormigón, tomando como origen el instante en que el hormigón se vierte en el encofrado.

La norma española EHE propone dos valores del módulo de deformación longitudinal:  $E_{cm}$  y  $E_c$ .

$E_{cm}$  es el módulo de deformación longitudinal secante a 28 días. Este módulo corresponde a la pendiente de la recta secante a la curva real tensión-deformación. Su valor es:

$$E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{f_{cm}} \text{ MPa} \quad (3.6)$$

La expresión anterior sólo es válida siempre y cuando las tensiones, en condiciones de servicio, no sobrepasen  $0,40f_{cm}$ .

La EHE define además un módulo para cargas instantáneas o rápidamente variables,  $E_c$  o módulo de deformación longitudinal inicial del hormigón a los 28 días (pendiente de la tangente en origen de la curva real tensión-deformación). Su valor viene dado por:

$$E_c = 10000 \sqrt[3]{f_{cm}} \text{ MPa} \quad (3.7)$$

Como ya se ha comentado, el valor de  $f_{cm}$  a 28 días se puede aproximar por  $f_{ck}+8 \text{ MPa}$ . La norma EHE propone además un factor de corrección a aplicar a  $E_{cm}$  y  $E_c$  en función del tipo de árido usado:  $\alpha$ . La EHE también considera el hecho de que el hormigón pueda tener una edad distinta de 28 días, para ello utiliza la misma expresión del EC2: ecuación 3.5.

Ambos módulos  $E_{cm}$  y  $E_c$  son para cargas de corta duración y no tienen en cuenta que cuando las cargas son de larga duración se produce una variación en el valor del módulo de elasticidad (fluencia), tal y como se estudiará más adelante.

#### Modelo tensión-deformación no lineal

Para cálculos no lineales, el EC2 y la EHE proponen un modelo tensión-deformación parabólico definido a corto plazo (ver esquema de la figura 3.6). Este modelo se representa en la figura 3.7.<sup>3</sup>

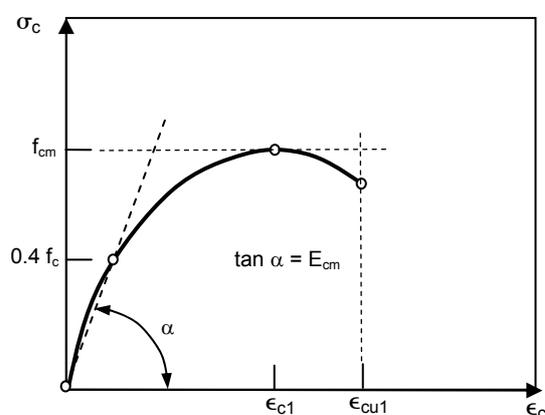


Figura 3.7. Diagrama tensión-deformación propuesto por el EC2 y la EHE para cálculo estructural no lineal con cargas instantáneas

El diagrama de la figura 3.7, que sólo se puede emplear para cargas de corta duración, corresponde a la siguiente formulación:

<sup>3</sup> Se utiliza nomenclatura del EC2, que varía ligeramente respecto de la EHE.

$$\sigma_c = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} f_{cm} \quad \text{para } \epsilon_c \leq \epsilon_{cu1}$$

$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \quad (3.8)$$

$$k = 1.05 E_{cm} \frac{|\epsilon_{c1}|}{f_{cm}}$$

$$\epsilon_{c1} = 0.0007 (f_{cm})^{0.31} < 0.0028$$

siendo:

$\sigma_c$	tensión del hormigón para un valor dado de $\epsilon_c$
$\epsilon_c$	deformación del hormigón
$\epsilon_{c1}$	deformación del hormigón para la tensión máxima
$\epsilon_{cu1}$	deformación máxima del hormigón

$$\epsilon_{cu1} = \begin{cases} 0.0035 & \text{si } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 0.0028 + 0.027 \left( \frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 & \text{si } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

El diagrama tensión-deformación de la figura 3.7 se emplea poco en la práctica debido a la dificultad que conlleva el hecho de que el módulo de deformación longitudinal (pendiente de la curva) depende del nivel de tensión.

El modelo correspondiente a la figura 3.7 (ecuación 3.8) considera la existencia de tensión sólo en una dirección, lo que corresponde al ensayo en probeta cilíndrica. En el caso de que existan tensiones en dos o en tres direcciones existen modelos más sofisticados para representar el comportamiento del hormigón, alguno de ellos queda recogido en el Código Modelo CEB-FIP (1990). Ésta consideración viene recogida en el esquema de la figura 3.6 en lo que se han denominado modelos bidimensionales y tridimensionales.

### 3.3.2. Resistencia de cálculo en el hormigón

Cuando se procede a diseñar y armar una sección de hormigón es necesario aplicar un coeficiente de seguridad a la resistencia del hormigón. Puesto que la resistencia característica se define para hormigones bajo cargas instantáneas, se hace necesario adoptar coeficientes que aseguren que el hormigón no experimentará fenómenos de cansancio. Por este motivo, en el diseño se emplea la resistencia de cálculo (o diseño) del hormigón a compresión,  $f_{cd}$ , que el Eurocódigo 2 define como:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.9)$$

donde:

$\gamma_c$  coeficiente parcial de seguridad del hormigón (tabla 2.1)  
 $\alpha_{cc}$  coeficiente que considera los efectos negativos de la duración de la carga (cansancio) y de la forma de aplicar la carga. Tradicionalmente se ha adoptado un valor de de 0.85.

La norma española EHE desarrolla el caso de que  $\alpha_{cc}=1$ , aunque permite valores entre 0,85 y 1.00<sup>4</sup>.

La resistencia de cálculo (o diseño) del hormigón a tracción,  $f_{ctd}$ , el EC2 la define como:

$$f_{ctd} = \alpha_{ct} \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} \quad (3.10)$$

donde  $\alpha_{ct}$  es un coeficiente que tiene en cuenta los efectos negativos de la duración de la carga y de la forma de aplicar ésta sobre la resistencia a tracción del hormigón.

### 3.3.3. Diagramas para el diseño en rotura de secciones

Como se puede deducir de la figura 3.7, la obtención de un modelo tensión-deformación es complejo y las normas actuales sólo lo proponen para cargas instantáneas. Estos modelos no son suficientes dado que es necesario dimensionar las estructuras para combinaciones de cargas de corta y larga duración. La dilatada investigación sobre el tema ha demostrado que se pueden emplear modelos tensión-deformación sencillos que predigan, con un aceptable margen de error, la resistencia última del hormigón. Los modelos más empleados son: el **rectangular** y el **parábola-rectángulo**. El rango de aplicación de estos modelos se reduce al cálculo de la resistencia última (**rotura**) de secciones de hormigón. Estos modelos corresponden a los modelos unidimensionales “definidos en rotura” del esquema de la figura 3.6. Conviene señalar aquí que estos modelos suponen nula la resistencia del hormigón a tracción.

El diagrama parábola rectángulo, representado en la figura 3.8, consiste en una parábola que nace en el origen y llega con pendiente horizontal al punto de deformación  $\varepsilon_{c2}$  con tensión  $f_{cd}$  (o bien  $f_{ck}$  si se trata de resistencia característica). En el EC2  $\varepsilon_{c2}$  toma el valor constante de 2‰ siempre que la calidad del hormigón verifique que  $f_{ck}$  es menor de 50 MPa (ecuación 3.12). El resto del diagrama es una línea horizontal que une el punto de deformación de  $\varepsilon_{c2}$  con el punto de deformación máxima ( $\varepsilon_{cu2}$ ). El diagrama parábola-rectángulo para valores de cálculo viene dado por la expresión:

<sup>4</sup> Los autores de este libro, por coherencia con la tradición y con lo establecido en otras normas como la ACI-318-05 recomendamos utilizar  $\alpha_{cc}=0.85$ .

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} n &= \begin{cases} 2 & \text{si } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 1.4 + 23.4 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{si } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \\ \varepsilon_{c2} (\text{‰}) &= \begin{cases} 2.0 & \text{si } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2.0 + 0.085 (f_{ck} - 50)^{0.53} & \text{si } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \\ \varepsilon_{cu2} (\text{‰}) &= \begin{cases} 3.5 & \text{si } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ 2.6 + 35 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{si } f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\varepsilon_{c2}$  y  $\varepsilon_{cu2}$  se representan en la figura 3.8.

En el caso de una sección transversal sometida a compresión simple (momento flector nulo) la deformación máxima del hormigón se limita a  $\varepsilon_{c2}$  (tanto por la EHE como por el EC2). Si en la sección hay alguna fibra traccionada el límite de la deformación es  $\varepsilon_{cu2}$ . El origen de esta diferenciación está en el hecho de que en flexión unas fibras están más deformadas que otras y se produce una colaboración entre ellas que permite mayores deformaciones de rotura. Varios autores han obtenido experimentalmente deformaciones superiores al 4‰ en flexión.

Otras normas como la americana ACI-318 o la suiza SIA-162 plantean una deformación máxima del hormigón a compresión única del 3‰, no estableciendo diferencias entre compresión simple y flexión.

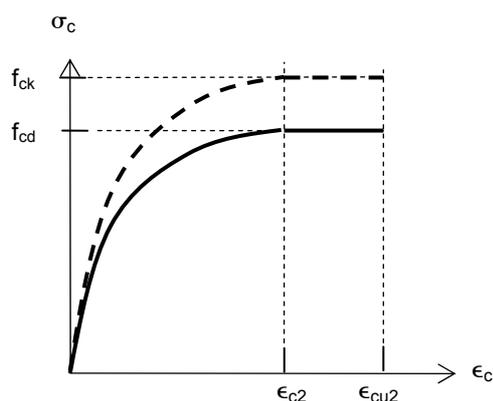


Figura 3.8. Diagrama Parábola-rectángulo del EC-2.

El diagrama rectangular es el diagrama más extendido en rotura. En el EC2, el diagrama rectangular corresponde a un valor constante de la tensión de valor  $\eta f_{cd}$  (resistencia efectiva) en una profundidad efectiva comprimida de valor  $\lambda x$  (siempre que  $\lambda x \leq h$ , si  $\lambda x > h$  la profundidad efectiva vale  $h$ , ver figura 3.10) donde  $x$  es la distancia de la fibra más comprimida a la fibra neutra (profundidad de la fibra neutra) y  $h$  es el canto de la sección. Los valores de  $\lambda$  y  $\eta$  necesarios para definir el diagrama rectangular propuesto por EC2 son:

$$\eta = \begin{cases} 1.0 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.0 - \frac{f_{ck} - 50}{200} & \text{si } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0.8 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} & \text{si } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.14)$$

En el caso de que el ancho de la sección transversal disminuya en la dirección de la fibra más comprimida (lo contrario de lo que sucede en la figura 3.10) el valor de  $\eta f_{cd}$  debe de reducirse en un 10%.

De la ecuación 3.14 se desprende que el EC2 hace depender la profundidad efectiva ( $\lambda x$ ) de la resistencia del hormigón ( $f_{ck}$ ), tal y como se puede ver en la figura 3.9. Esta variación del parámetro  $\lambda$  se debe a que el comportamiento del hormigón es más lineal (menos parabólico) cuanto mayor es su resistencia. La resultante de la zona comprimida en una distribución de tensiones lineal es menor que en una distribución parabólica por lo que el valor de  $\lambda$  del diagrama rectangular equivalente debe disminuir.

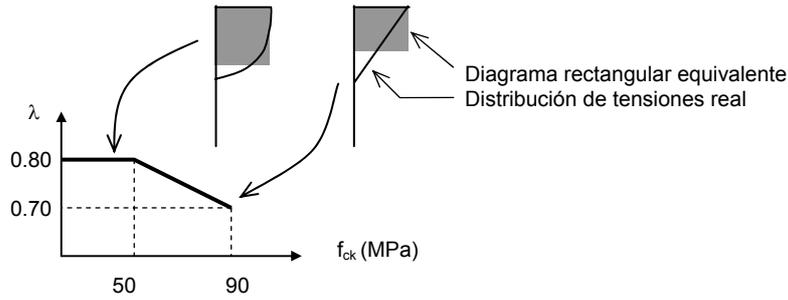


Figura 3.9 Valores de  $\lambda$  según el Eurocódigo 2.

En la figura 3.10 se ha representado la distribución de tensiones en la zona comprimida del hormigón obtenida a partir del diagrama parábola-rectángulo y del diagrama rectangular.

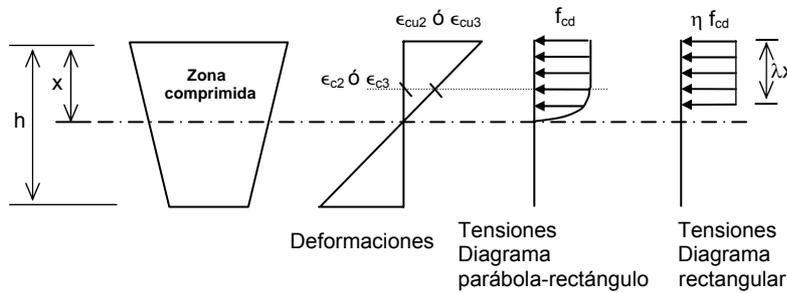


Figura 3.10. Diagramas de tensiones normales en la zona comprimida según los diagramas parábola-rectángulo y rectangular.

La deformación máxima del hormigón en flexo-compresión si se emplea el diagrama rectangular es  $\epsilon_{cu3}$  y la deformación máxima en compresión pura es  $\epsilon_{c3}$ . Estos valores se definen a continuación:

$$\epsilon_{c3}(\text{‰}) = \begin{cases} 1.75 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 1.75 + 0.55 \left( \frac{f_{ck} - 50}{40} \right) & \text{si } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{cu3}(\text{‰}) = \begin{cases} 3.5 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.6 + 35 \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 & \text{si } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

El diagrama bilineal consiste en una línea recta que une el origen con el punto de deformación  $\epsilon_{c3}$ , y a partir de ese instante es una línea recta horizontal hasta el punto de deformación  $\epsilon_{cu3}$ .

## 3.4. FLUENCIA

En la figura 3.5 se puede observar que la deformación obtenida al aplicar una tensión  $\sigma_l$  es diferente según cual sea el tiempo de aplicación de la carga. La deformación en el instante inicial es  $\epsilon_l$  pero basta con dejar pasar varios días (manteniendo la tensión  $\sigma_l$ ) para obtener otra deformación diferente:  $\epsilon'_l$ . Consideremos la figura 3.11 extraída de la figura 3.5. Una vez en el punto  $(\sigma_l, \epsilon_l)$  se puede: bien mantener la tensión  $\sigma_l$  o bien mantener la deformación  $\epsilon_l$ . Si mantenemos la tensión  $\sigma_l$  pasados unos días la deformación habrá aumentado hasta  $\epsilon'_l$ , a ese proceso se le conoce como **fluencia**. Si se mantiene la deformación  $\epsilon_l$  pasados unos días la tensión disminuirá hasta un valor  $\sigma'_l$ , a este proceso se le conoce como **relajación**.

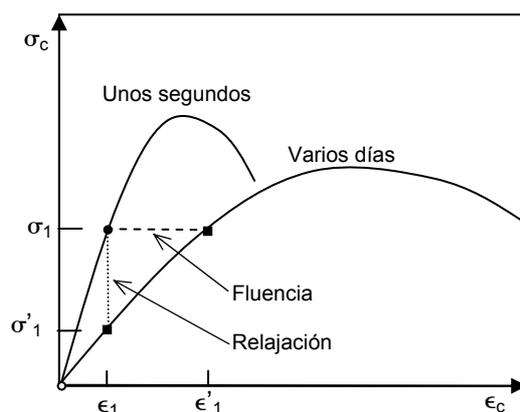


Figura 3.11. Fluencia y relajación

La fluencia se define como la deformación adicional obtenida como consecuencia de aplicar una carga y mantenerla en el tiempo. Estudiemos con detalle la figura 3.12: cuando se aplica una carga constante a una probeta de hormigón de 28 días de edad (punto A) se obtiene una deformación instantánea: AB. Según avanza el tiempo, si se mantiene la carga, se observa que la deformación sigue creciendo. Esa deformación adicional es la **fluencia**. En un instante cualquiera C (p.ej. a los 7 meses) se puede optar por continuar con la carga (línea de trazo continuo) o por retirarla (línea de trazo discontinuo). Si se elige la segunda opción y se retira la carga en el punto C se produce una recuperación instantánea: CD y, con el tiempo, se produce una recuperación diferida: DE. Al final podemos ver que hay una deformación que no se recupera: EF.

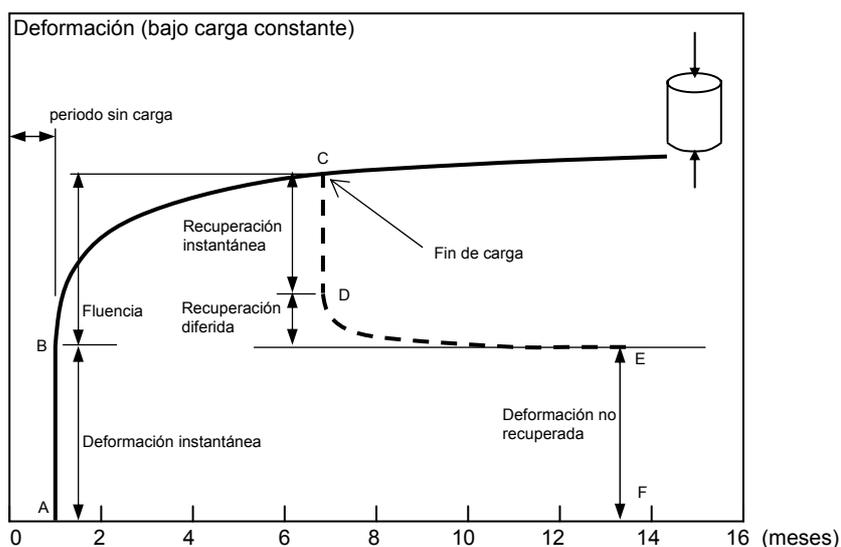


Figura 3.12. Ensayo de fluencia. Tipos de deformaciones

A la diferencia entre la deformación instantánea y la recuperación instantánea (AB-CD) se le denomina deformación remanente. La deformación remanente aparece sólo cuando se carga por primera vez el hormigón (carga noval) y depende del valor de la tensión aplicada. Para nuevas, cargas por debajo de la carga noval, el diagrama tensión-deformación es más lineal, tal y como se representa en la figura 3.13.

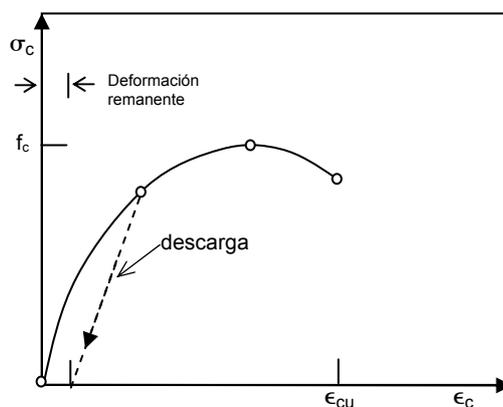


Figura 3.13. Deformación remanente y carga noval

La fluencia del hormigón depende de varios factores, siendo los más importantes: la humedad del ambiente, las dimensiones del elemento y la composición del hormigón. En la fluencia también influye la edad del hormigón a la que se aplica la carga por primera vez y la duración de ésta. Las normas EHE y el EC2 plantean

formulaciones similares para calcular la fluencia. La formulación adoptada por el EC2 es válida siempre que la tensión aplicada sea menor de  $0.45f_{ck}(t_0)$ . La deformación se mide en el instante  $t$  y la carga se aplica en el instante  $t_0$ , todo en valores absolutos del tiempo<sup>5</sup>, tomando como origen el momento en que el hormigón ha sido puesto en obra. Así pues, la deformación dependiente de la tensión: deformación instantánea más deformación diferida se puede calcular como:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{cm}(t_0)} + \varphi(t, t_0) \frac{\sigma(t_0)}{1.05E_{cm}} \quad (3.15)$$

donde el primer sumando es la deformación instantánea y el segundo la fluencia. El coeficiente  $\varphi$  es el coeficiente de fluencia.  $E_{cm}$  y  $E_{cm}(t_0)$  han sido definidos en las ecuaciones 3.4 y 3.5.

El coeficiente de fluencia  $\varphi(t, t_0)$  se calcula a partir de la expresión:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0) \quad (3.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_{HR} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) \\ \varphi_{HR} &= \begin{cases} 1 + \frac{1 - HR/100}{0.1 \sqrt[3]{h_0}} & \text{si } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \\ \left[ 1 + \frac{1 - HR/100}{0.1 \sqrt[3]{h_0}} \alpha_1 \right] \alpha_2 & \text{si } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \end{cases} \\ \beta(f_{cm}) &= \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad ; \quad f_{cm} \text{ en MPa} \\ \beta(t_0) &= \frac{1}{0.1 + t_0^{0.20}} \end{aligned}$$

$HR$  es la humedad relativa del ambiente en %,  $\varphi_0$  es el coeficiente básico de fluencia,  $\varphi_{HR}$  es el coeficiente de influencia de la humedad relativa,  $\beta(f_{cm})$  es el factor que tiene en cuenta el efecto de la resistencia del hormigón y  $\beta(t_0)$  es el coeficiente que tiene en cuenta la edad del hormigón cuando se aplica la carga. El valor  $h_0$  es el tamaño teórico

<sup>5</sup> En todas las expresiones de la normativa, el factor tiempo se mide en días y el origen de tiempos corresponde al momento en el que se coloca el hormigón en el encofrado. Por tanto, no se pueden considerar intervalos de tiempo. En la formulación  $t$  son los días transcurridos desde que se vierte el hormigón hasta el instante de la evaluación y  $t_0$  son los días que transcurren desde que se vierte el hormigón hasta que se aplica la carga.

en milímetros ( $h_0=2A_c/u$ ) donde  $A_c$  es el área de la sección transversal del elemento y  $u$  el perímetro en contacto con la atmósfera.

$\beta_c(t, t_0)$  es el coeficiente que describe la evolución de la fluencia en el tiempo después de la carga:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0.3}$$

$\beta_H$  es un coeficiente que depende de la humedad relativa y del tamaño teórico:

$$\beta_H = 1.5 \left[ 1 + (0.012 HR)^{18} \right] h_0 + 250 \leq 1500 \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$\beta_H = 1.5 \left[ 1 + (0.012 HR)^{18} \right] h_0 + 250 \alpha_3 \leq 1500 \alpha_3 \quad \text{para } f_{cm} \geq 35 \text{ MPa}$$

$\alpha_{1,2,3}$  son coeficientes para tener en cuenta la influencia de la resistencia del hormigón:

$$\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{-0.7} \quad \alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.2} \quad \alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.5}$$

El EC2 propone además dos factores adicionales de corrección de la fluencia: uno por el efecto del curado a una temperatura distinta de 20°C y otro por el efecto del tipo de cemento. Ambas correcciones se realizan variando el tiempo. Por efecto de la temperatura se varía la edad del hormigón cuando se mide la deformación:  $t$ . Por efecto del tipo de cemento se varía la edad en el momento de aplicación de la carga:  $t_0$ .

#### 1. Por efecto de las temperaturas:

$$t_T = \sum_{i=1}^n e^{13.65 \frac{4000}{273+T(\Delta t_i)}} \cdot \Delta t_i \quad (3.17)$$

donde:

- $t_T$  edad del hormigón ajustada por efecto de las temperaturas, esta edad reemplaza a  $t$  en las ecuaciones correspondientes.  
 $T(\Delta t_i)$  temperatura en °C durante el periodo de tiempo  $\Delta t_i$   
 $\Delta t_i$  número de días en los que se mantiene la temperatura  $T$

#### 2. Según el tipo de cemento se tomará $t_0$ como:

$$t_0 = t_{0,T} \left[ 1 + \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1.2}} \right]^\alpha \geq 0.5 \quad (3.18)$$

donde:

$t_{0,T}$	edad del hormigón en días, cuando la carga es aplicada, ajustada por el efecto de las temperaturas
$\alpha$	exponente del tipo de cemento (-1 para cementos de fraguado lento, 0 para cementos de fraguado normal o rápido y 1 para cementos de fraguado rápido y de alta resistencia)

En el caso de que la tensión supere  $0.45f_{ck}(t_0)$  el EC2 propone una expresión exponencial para la fluencia a tiempo infinito:

$$\varphi_k(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \exp \left[ 1.5 \left( \frac{\sigma_c}{f_{cm}(t_0)} - 0.45 \right) \right] \quad (3.19)$$

Si se puede admitir que las tensiones en el hormigón varían poco y que se aplican a los 28 días, se puede deducir un módulo de deformación longitudinal efectivo,  $E_{c,ef}$ , deducible de la ecuación 3.15, a partir del cual es posible calcular las deformaciones para cargas de largas duración.

$$E_{c,ef}(t, t_0) = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (3.20)$$

### 3.5. RETRACCIÓN

Como veíamos al comienzo del capítulo, es necesario amasar el hormigón con exceso de agua. Este exceso de agua, que se añade a la masa de hormigón para que sea manejable durante el hormigonado, no formará parte de la estructura cristalina del hormigón endurecido y saldrá al exterior, a menos que se mantenga el ambiente en un 100% de humedad. Durante ese proceso, denominado **retracción**, el hormigón pierde humedad y retrae.

Si el hormigón esté sumergido en agua experimentará lo que se denomina entumecimiento e incrementará de volumen.

La deformación por retracción se puede descomponer en dos: deformación por **retracción de secado** y deformación por **retracción autogenerada**. La retracción de secado se desarrolla lentamente, puesto que es debido a la migración del agua a través del hormigón endurecido. La retracción autogenerada se produce durante el endurecimiento del hormigón y por ello se desarrolla en su mayor parte en los días posteriores al hormigonado. La retracción autogenerada es una función lineal de la resistencia del hormigón y tiene una importancia especial cuando un hormigón nuevo se vierte sobre un hormigón endurecido. Los valores de la retracción total (retracción de secado más retracción autogenerada) se pueden tomar como:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \quad (3.21)$$

donde:

- $\varepsilon_{cs}$  es la deformación unitaria total por retracción  
(s del inglés *shrinkage*: retracción)
- $\varepsilon_{cd}$  es la deformación unitaria por retracción de secado (d de *dry*)
- $\varepsilon_{ca}$  es la deformación unitaria por retracción autogenerada  
(a de *autogenous*)

El valor final de la deformación unitaria de secado es  $\varepsilon_{cd,\infty} = k_h \cdot \varepsilon_{cd,0}$ . El valor de  $\varepsilon_{cd,0}$  se obtiene de la tabla 3.1 (que corresponde a valores medios, pudiéndose presentar una variación del orden de un 30%)<sup>6</sup>.

Tabla 3.1. Valor nominal de la retracción de secado libre  $\varepsilon_{cd,0}$  (en ‰). Para hormigones de fraguado normal o rápido.

$f_{ck}$ (MPa)	Humedad relativa (en ‰)					
	20	40	60	80	90	100
20	0.62	0.58	0.49	0.30	0.17	0
40	0.48	0.46	0.38	0.24	0.13	0
60	0.38	0.36	0.30	0.19	0.10	0
80	0.30	0.28	0.24	0.15	0.08	0
90	0.27	0.25	0.21	0.13	0.07	0

El valor de la deformación unitaria de secado en función del tiempo viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0}$$

<sup>6</sup> El EC2 plantea también una formulación para el cálculo de  $\varepsilon_{cd,0}$ , que considera distintos tipos de cemento.

$$\varepsilon_{cd,0} = 0.85 \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{10}\right) \right] 10^{-6} \cdot \beta_{RH}$$

$$\beta_{RH} = 1.55 \left[ 1 - \left(\frac{HR}{100}\right)^3 \right]$$

donde  $HR$  es la humedad relativa en ‰,  $\alpha_{ds1}$  y  $\alpha_{ds2}$  son coeficientes que dependen del tipo de cemento:

Tipos de cemento	$\alpha_{ds1}$	$\alpha_{ds2}$
Fraguado lento	3	0.13
Fraguado normal o rápido	4	0.12
Fraguado rápido y alta resistencia	6	0.11

donde:

$k_h$  es un coeficiente que depende del tamaño teórico ( $h_0$ ) y que se recoge en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Valores de  $k_h$

$h_0$	$k_h$
100	1.0
200	0.85
300	0.75
$\geq 500$	0.70

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{t - t_s + 0.04\sqrt{h_0^3}}$$

donde

- $t$  edad del hormigón en el instante de evaluación, en días, tomando como origen cuando el hormigón ha sido colocado en el encofrado o molde.
- $t_s$  edad del hormigón en el comienzo del entumecimiento o de la retracción, en días, tomando el mismo origen que antes. La fase de retracción comienza al final de la fase de curado.
- $h_0$  es el tamaño teórico en milímetros de la sección transversal ( $h_0=2A_c/u$ ), donde  $A_c$  es el área de la sección transversal del elemento y  $u$  el perímetro en contacto con la atmósfera.

La deformación unitaria de retracción autogenerada se calcula a partir de la expresión:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ca}(t) &= \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \\ \varepsilon_{ca}(\infty) &= 2.5(f_{ck} - 10)10^{-6} \\ \beta_{as}(t) &= 1 - \exp(-0.2\sqrt{t})\end{aligned}$$

donde  $t$  está expresado en días.

**Ejemplo de fluencia y retracción**

Consideremos una probeta de  $20 \times 20 \times 40$  cm fabricada con hormigón HA-35 sobre la que actúa una carga de  $500$  kN colocada a los 28 días. El valor de la carga pasa de  $500$  kN a  $300$  kN, a los 100 días. La humedad ambiental es del 70%. La probeta ha sido curada al vapor durante un día. Calcular la retracción, la deformación inicial y la deformación a los 100 días y a los 2 años.

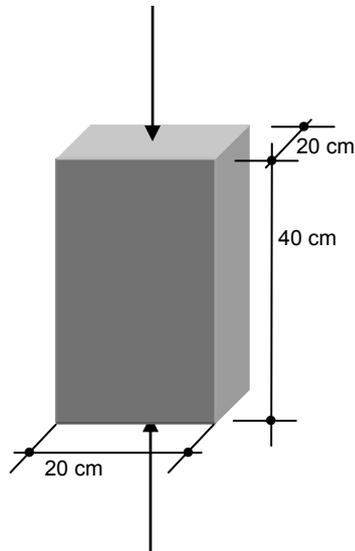
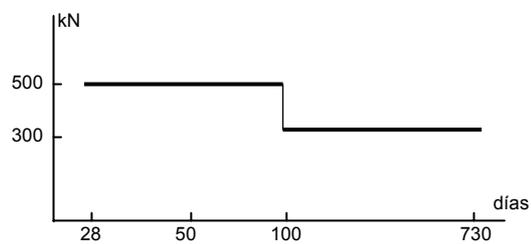


Figura 3.14. Probeta sometida a compresión

El diagrama de acciones en función del tiempo es:



Para el cálculo de la retracción basta con aplicar la expresión 3.21 extraída del EC2:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca}$$

El tamaño teórico  $h_0$  toma el valor de 100 mm, los valores de  $t$  que vamos a considerar son  $t=50$ ,  $100$  y  $730$  días y  $t_s$  vale 1.

El resultando de la retracción se resume en la tabla inferior, en la que se ha diferenciado entre retracción seca y autogenerada:

Tiempo t (días)	50	100	730
$\varepsilon_{cd}$ (‰)	0.19	0.24	0.32
$\varepsilon_{ca}$ (‰)	0.047	0.054	0.062
$\varepsilon_{cs}$ (‰)	0.24	0.30	0.38

La deformación instantánea se calcula a partir del módulo de deformación longitudinal mediante aproximación lineal. Puesto que la carga se aplica a los 28 días:  $E_{cm}(t_0)=E_{cm}=34077 \text{ N/mm}^2$  y  $\sigma_c(28 \text{ días})=12.5 \text{ N/mm}^2$  (menor que  $0.45f_{cm}$ ). Por tanto, la deformación instantánea es  $\sigma_c/E_{cm}=-0.0003668$  y la probeta encogerá  $0.15 \text{ mm}$ .

$$\Delta L = \frac{\sigma_c}{E_{cm}} L = \frac{12.5}{34077} 400 = 0.15 \text{ mm}$$

A los 100 días hay que considerar dos situaciones: antes y después de reducir la carga. Antes de reducir la carga, tenemos la deformación inicial a los 28 días más la fluencia que ésta haya producido. La carga comenzó a actuar a los 28 días:  $t_0=28 \text{ días}$ . Aplicando las fórmulas correspondientes (ecuaciones 3.15 y 3.16) se obtiene el valor del coeficiente de fluencia  $\varphi=1.08$ .

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{cm}(t_0)} + \varphi(t, t_0) \frac{\sigma(t_0)}{1.05E_{cm}} = -0.000368 - 1.08 \frac{12.5}{1.05 \cdot 34077} = -0.00074$$

Lo que provoca una disminución de longitud en la probeta de  $0.30 \text{ mm}$ .

A partir de este momento se reduce la carga, pasando de  $500$  a  $300 \text{ kN}$ . Puesto que hay una disminución de tensión de  $5 \text{ N/mm}^2$  se produce un alargamiento que se puede obtener a partir del módulo de deformación longitudinal para el hormigón con 100 días  $E_{cm}(100)$ , calculado a partir de las ecuaciones 3.3 y 3.5:  $E_{cm}(100)=35302 \text{ MPa}$ . Para este caso la deformación instantánea es  $\sigma_c/E_{cm}(100)=0.00014$  y la probeta alargará  $0.056 \text{ mm}$ .

$$\Delta L = \frac{\sigma_c}{E_{cm}(100)} L = \frac{5}{35302} 400 = 0.056 \text{ mm}$$

¿Qué pasará a los dos años?. Aplicaremos el principio de superposición de la siguiente forma: la fluencia de la carga de  $500 \text{ kN}$  se considera hasta los 2 años y la fluencia de la carga de  $200 \text{ kN}$  de tracción se considera desde los 100 días hasta los 2 años. El efecto total será la suma de ambos.

Para la carga de 500 kN el coeficiente de fluencia vale  $\varphi=1.64$ ; Para la segunda carga el coeficiente de fluencia es  $\varphi=1.27$ . Las correspondientes deformaciones son las siguientes:

$$\varepsilon_{c\sigma}(730;28) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{cm}(t_0)} + \varphi(t, t_0) \frac{\sigma(t_0)}{1.05E_{cm}} = -\frac{12.5}{34077} - 1.64 \frac{12.5}{1.05 \cdot 34077} = -0.00094$$

$$\varepsilon_{c\sigma}(730;100) = \frac{\sigma(t_0)}{E_{cm}(t_0)} + \varphi(t, t_0) \frac{\sigma(t_0)}{1.05E_{cm}} = \frac{5}{35302} + 1.27 \frac{5}{1.05 \cdot 34077} = 0.00032$$

La deformación total a los 730 días será de  $-0.00062$ , o sea, la probeta habrá encogido  $0.248 \text{ mm}$ , que sumados a la retracción, supone un acortamiento total de  $0.4 \text{ mm}$  a los 730 días.

La deformación tensional (instantánea + fluencia) se ha representado en la figura 3.15.

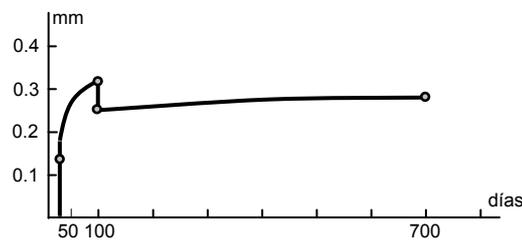


Figura 3.15. Deformación tensional

### 3.6. OTRAS PROPIEDADES DEL HORMIGÓN

El hormigón presenta otras características mecánicas que es necesario resaltar.

#### Densidad

La densidad aproximada del hormigón es de  $2300 \text{ kg/m}^3$  para hormigón en masa y de  $2500 \text{ kg/m}^3$  para hormigón armado y pretensado.

Existen hormigones ligeros fabricados con productos como la piedra pómez o la escoria expandida de alto horno. Sus densidades van desde  $1300$  a  $2000 \text{ kg/m}^3$ . La resistencia característica de estos hormigones es muy variable dependiendo del producto empleado y oscila entre  $1$  y  $50 \text{ N/mm}^2$ . Su módulo de elasticidad está comprendido entre un 50 a un 70% de los hormigones normales y la fluencia y retracción son mayores que en los hormigones normales.

El **coeficiente de Poisson** del hormigón no fisurado es de  $0.2$  y  $0$  para el hormigón fisurado.

El **coeficiente lineal de dilatación térmica**, que mide el aumento de volumen experimentado por el hormigón cuando incrementa su temperatura, es igual a  $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Por tanto, la deformación por dilatación térmica del hormigón es:

$$\varepsilon_{\Delta T} = 10^{-5} \cdot \Delta T \quad (3.22)$$

donde  $\Delta T$  viene expresado en grados centígrados.

Para tener en cuenta el comportamiento del hormigón a grandes temperaturas, se puede suponer que hasta los  $400^\circ\text{C}$  el módulo de deformación longitudinal disminuye pero no pierde resistencia última  $f_c$ . A  $600^\circ\text{C}$  ha perdido un tercio de su resistencia última y a  $800^\circ\text{C}$  sólo le queda un sexto de la resistencia inicial.

### Confinamiento del hormigón

Una aplicación muy interesante en construcción, que permite entender el comportamiento del hormigón estructural, es el efecto del confinamiento del hormigón. El hormigón tiene la capacidad de incrementar su carga a compresión si se le somete a una presión lateral de confinamiento, ver figura 3.16. La resistencia última a compresión del hormigón confinado responde a la conocida expresión experimental obtenida en Illinois en los años 20 del siglo XX:

$$f_{ck,conf} = f_{ck} + 4.1\sigma_{conf} \quad (3.23)$$

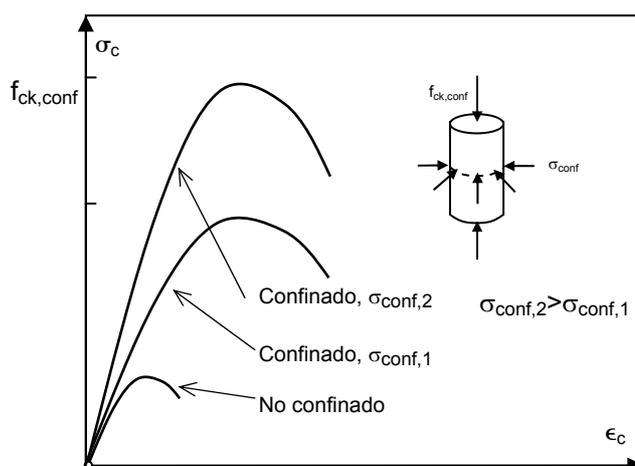


Figura 3.16. Efectos del confinamiento sobre el diagrama tensión-deformación

*Hernández-Gil*

La formula anterior no es de aplicación inmediata puesto que el confinamiento en hormigón generalmente lo produce la armadura y ésta se encuentra en posiciones localizadas y no en un continuo. En las piezas de hormigón la armadura transversal, compuesta por cercos o espirales, es la que proporciona el confinamiento ayudada por la armadura longitudinal. Por tanto, la tensión de confinamiento dependerá de: la cuantía de armadura, la posición del hormigón y de la carga axial.

En la figura 3.17 se representa la sección transversal de un pilar circular con cercos separados una distancia  $s$ . En esta figura se aprecia la zona del centro de la sección que está eficazmente confinada así como la zona exterior y la zona de confinamiento no eficaz.

Se han desarrollado varios modelos para el hormigón confinado con resultados cercanos a la experimentación. Entre ellos cabe citar los modelos de hormigón de Kent-Park (Park et al. 1982) de San Diego, válidos tanto para hormigón confinado como para hormigón no confinado. Como se puede apreciar en la figura 3.17 estos modelos suponen la existencia de una serie de arcos internos apoyados en la armadura transversal (arcos de descarga) que permiten el confinamiento. Se ha incluido un anejo a este capítulo donde se desarrolla uno de los modelos más extendidos de hormigón confinado: el modelo de Mander-Richart.

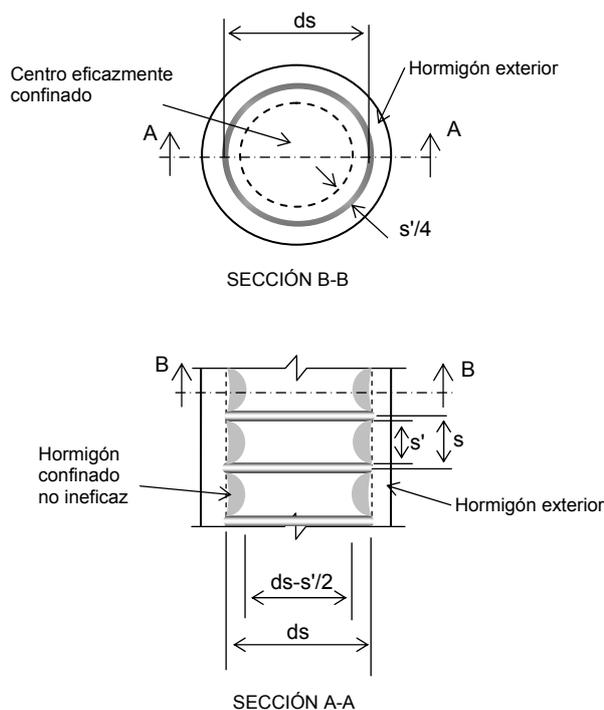


Figura 3.17. Modelo de hormigón confinado para pilares circulares

### 3.7. ARMADURA PASIVA

En la mayoría de elementos estructurales como vigas, láminas, etc. hay zonas que se encuentran a tracción. El hormigón por si solo es un material que tiene una baja resistencia a tracción. Para solucionar este problema se introducen en la masa de hormigón barras de acero que resisten la tracción que el hormigón no puede soportar. Si las barras son colocadas sin tensión se les denomina *armadura pasiva*. También se puede introducir armadura pasiva en zonas comprimidas, en este caso la armadura trabaja junto con el hormigón a compresión.

Existe la posibilidad de colocar armadura tensada, que transmite su tensión a la masa de hormigón, denominándose en ese caso *armadura activa*. La armadura activa altera las zonas de tracción o compresión que se presentarían si dicha armadura no existiese, ver figuras 1.3 y 1.4. Otros materiales como fibras de vidrio, lañas de acero, fibras de carbono, etc. pueden emplearse para mejorar la resistencia a tracción del hormigón, si bien su empleo es poco común.

Como ya hemos comentado, la función de la armadura pasiva es la de absorber las tracciones que el hormigón no puede. Para garantizar su funcionalidad, la barra que trabaja en tracción debe de estar anclada en zonas en las que no se requiera su colaboración, a ser posible en zonas comprimidas.

Con objeto de mejorar la adherencia entre el acero y el hormigón, la armadura pasiva se presenta generalmente corrugada (figura 3.18). La armadura pasiva se puede presentar como: barras corrugadas, mallas electrosoldadas o armaduras básicas electrosoldadas en celosía.

Los diámetros nominales<sup>7</sup> bajo los que se presentan las barras corrugadas son: 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 20 – 25 – 32 y 40 mm.

Las mallas electrosoldadas tienen los siguientes diámetros nominales: 5 - 5.5 – 6 - 6.5 – 7 - 7.5 – 8 - 8.5 – 9 - 9.5 – 10 - 10.5 – 11 - 11.5 - 12 y 14 mm

Las armaduras básicas electrosoldadas en celosía, tanto lisas como corrugadas, tienen los siguientes diámetros nominales: 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 y 12 mm.

---

<sup>7</sup> Se denomina área nominal a la obtenida mediante el diámetro nominal. Y se denomina área equivalente a la obtenida de considerar una barra lisa ideal con el mismo peso por unidad de longitud que la barra corrugada correspondiente. Según la EHE el área equivalente no será inferior al 95.5% del área nominal.

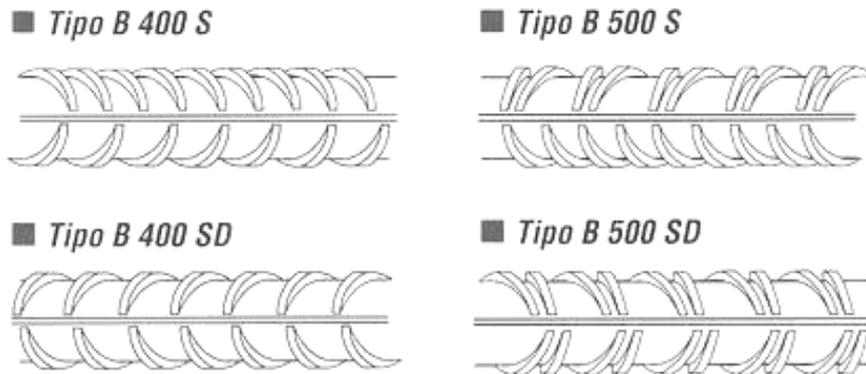


Figura 3.18. Armaduras según la EHE.

Tipo B 400 S:

Todas las corrugas tienen la misma inclinación, pero presentan separaciones diferentes en cada uno de los sectores de la barra.

Tipo B 500 S:

Las corrugas de uno de los sectores tienen la misma inclinación y están uniformemente separadas. Las del otro sector están agrupadas en dos series de la misma separación pero distinta inclinación.

Tipo B 400 SD:

Todas las corrugas tienen la misma separación y la misma inclinación

Tipo B 500 SD:

Las corrugas están agrupadas en dos series de la misma separación pero distinta inclinación, igual en ambos sectores.

El acero de las barras corrugadas se designa con la letra B seguido de su límite elástico  $f_y$  (correspondiente a una deformación remanente del 0.2%) y de la letra S si es soldable o de las letras SD si tiene especiales características de ductilidad. Éstos últimos aceros, los terminados en SD, son para zonas sísmicas. En la figura 3.17 y en la Tabla 3.3 podemos ver los distintos tipos de aceros de barras corrugadas considerados por la EHE.

Tabla 3.3. Tipos de acero

Designación	Clase de acero	Límite elástico $f_y$ en N/mm <sup>2</sup>	Carga unitaria de rotura $f_s$ en N/mm <sup>2</sup>	Alargamiento en rotura en % sobre base de 5 diámetros	Relación $f_s/f_y$ en ensayo	$\epsilon_{m\acute{a}x}$
		$\geq$	$\geq$	$\geq$		
B 400 S	Soldable	400	440	14	$\geq 1.05$	
B 500 S	Soldable	500	550	12	$\geq 1.05$	
B 400 SD	Soldable con características de ductilidad	400	480	20	$\geq 1.20$	$\geq 9\%$
B 500 SD	Soldable con características especiales de ductilidad	500	600		$\leq 1.35$	

El acero de las mallas electrosoldadas se designa por B500T. Estas mallas están constituidas por barras corrugadas soldadas formando cuadrículas. Este tipo de armadura es muy interesante por su fácil colocación en obra.

Para el cálculo de elementos de hormigón se puede emplear el diagrama tensión-deformación del acero de armaduras pasivas obtenido a partir de datos experimentales (siempre que los ensayos cumplan con las características exigidas por la normativa vigente) o bien el diagrama representado en la figura 3.19 (extraído del EC2). El diagrama representado en la figura 3.19 es válido en compresión y en tracción. En dicho diagrama  $f_{yk}$  es el límite elástico o tensión de cedencia,  $k$  es la relación entre la tensión máxima y el límite elástico (su valor está comprendido entre 1.05 y 1.35, según el EC2),  $\epsilon_{uk}$  es la deformación correspondiente a la tensión máxima y para  $\epsilon_{ud}$  la EHE adopta el valor de 0.01 permitiendo llegar a 0.02 para aceros del tipo SD. En el caso de adoptar como diagrama de diseño el correspondiente a la línea superior horizontal del EC2 (al igual que la ACI-318) no limita la deformación del acero.

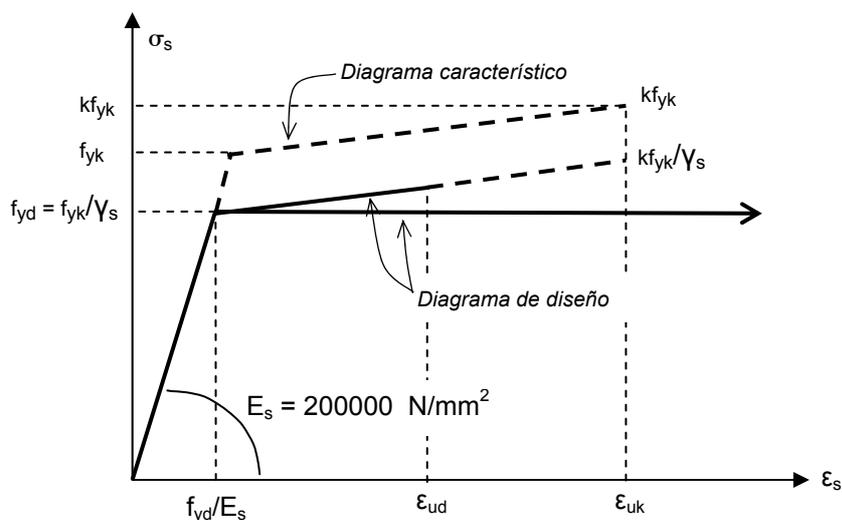


Figura 3.19. Diagrama característico y de cálculo tensión-deformación para acero de armar

El valor  $f_{yk}$  es el límite elástico o límite elástico característico y  $f_{yd}$  es la resistencia de cálculo del acero ( $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ ).

El acero de la armadura pasiva (EHE y EC2) tiene un módulo de elasticidad o módulo de deformación longitudinal de valor  $E_s = 200000 \text{ MPa}$ , la densidad es de  $7850 \text{ kg/m}^3$  y el coeficiente lineal de dilatación térmica es de  $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .<sup>8</sup>

<sup>8</sup> El hecho de que el hormigón y el acero tengan el mismo coeficiente de dilatación térmica es una condición sin la cual no serían compatibles.

### 3.8. ANCLAJE

Como se ha adelantado anteriormente, las barras de armadura pasiva deben estar ancladas en el hormigón en zonas alejadas de donde se requiera su colaboración a tracción, permitiendo así transmitir las tensiones a la masa de hormigón. Al menos estas barras deberán estar ancladas en los extremos para llevar hasta ellos las tracciones. Una parte esencial en el funcionamiento del anclaje es la adherencia entre la armadura pasiva y el hormigón.

Como ya vimos en capítulo I, la adherencia barra-hormigón se consigue por tres mecanismos: reacción química en la interfase hormigón-acero, retracción del hormigón y corrugas. Años atrás bastaba sólo con los dos primeros procesos para asegurar la adherencia y por eso se empleaban barras lisas. Debido a la mejor calidad de los aceros (que pueden resistir mayores tracciones) fue necesario mejorar la adherencia introduciendo las corrugas.

Si se introduce una barra de acero en un bloque de hormigón y se intenta extraerla una vez que el hormigón ha endurecido se puede observar que el esfuerzo de extracción ( $P$ ) es tanto mayor cuanto más se haya introducido la barra en el hormigón (figura 3.20a). Ese esfuerzo  $P$  tiene un valor límite correspondiente a la resistencia a tracción de la barra ( $P_{max}=A_s f_y$ ). A la longitud mínima necesaria para que el esfuerzo  $P$  sea igual a  $A_s f_y$ , se le denomina longitud de anclaje (figura 3.20).

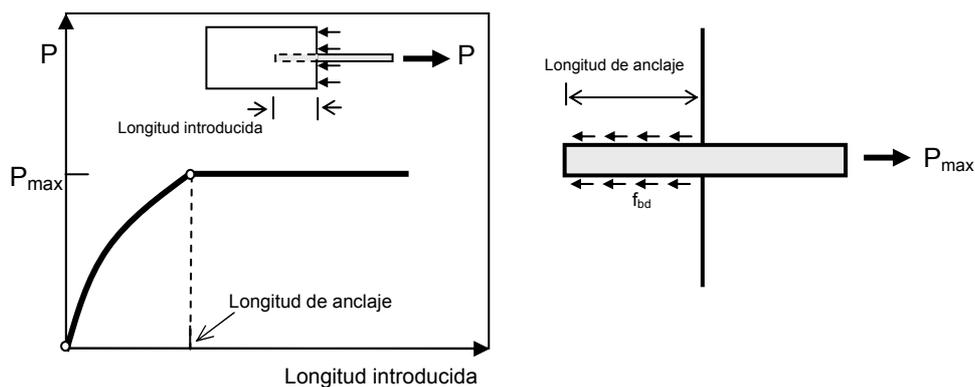


Figura 3.20a. Longitud de anclaje Figura 3.20b. Tensión última de adherencia

En la longitud de anclaje influyen varios factores: las calidades del acero y del hormigón, el tipo de anclaje utilizado y la zona del hormigón que se esté considerando.

La influencia de las calidades del hormigón y del acero en la longitud de anclaje es fácil de entender: cuanto mejor sea el hormigón menor longitud de anclaje será necesaria, mientras que cuanto mejor sea el acero mayor habrá de ser la longitud de anclaje.

Respecto a la influencia de la zona del hormigón donde se efectúa el anclaje es necesario diferenciar entre zonas de buena adherencia y zonas de adherencia deficiente. El origen de esta diferenciación está en la posibilidad de segregación durante el proceso de hormigonado, con la consiguiente influencia en el mecanismo de adherencia. Se consideran condiciones de buena adherencia si:

- La barra tiene una inclinación de 45° a 90° con la horizontal. Horizontal establecida durante el hormigonado.
- En caso de que la barra tenga una inclinación de 0 a 45° se considera de buena adherencia si: la pieza tiene menos de 250 mm de espesor en la dirección del hormigonado, la barra está en la mitad inferior de la pieza o a más de 300 mm de la superficie superior.

Si la barra no se encuentra en posición de presentar buena adherencia, entonces se considera que tiene adherencia deficiente.

Los tipos de anclaje son: por prolongación recta, por patilla, por gancho, por gancho en U y mediante barra transversal soldada (figura 3.21). Estos tipos de anclaje están ideados para trabajar a tracción. Los diámetros interiores de los ganchos y patillas deben de cumplir unos valores mínimos para evitar la degradación del hormigón y del acero durante su funcionamiento:  $4\phi$  para barras con  $\phi \leq 16 \text{ mm}$  y  $7\phi$  para  $\phi > 16 \text{ mm}$ , según el EC2 (para mayor detalle ver EC2).

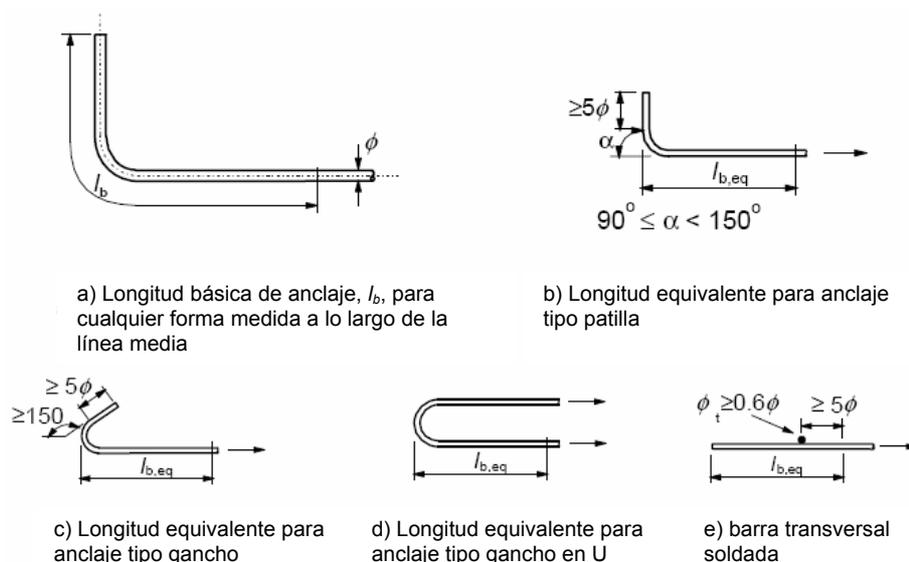


Figura 3.21. Tipos de anclajes

La norma EHE plantea dos formas diferentes de calcular la longitud de anclaje. La primera es idéntica a la del EC2. La segunda forma es un proceso simplificado donde la longitud básica de anclaje  $l_b$  vale:  $m\phi^2$  centímetros para zonas de buena adherencia y  $1.4m\phi^2$  para zonas de adherencia deficiente. El parámetro  $m$  depende de la

resistencia característica  $f_{ck}$  del hormigón y del tipo de acero (artículo 69 de la EHE-2007) y  $\varnothing$  es el diámetro de la barra en centímetros.

El primer enfoque de la EHE en relación al cálculo de la longitud de anclaje es más amplio. Cuando se intenta extraer la barra de la masa de hormigón (figura 3.20b) se produce una tensión tangencial en la zona de contacto hormigón-acero. Para  $P=P_{max}$  y si la longitud introducida coincide con la longitud de anclaje, al valor de la tensión tangencial se le denomina tensión última de adherencia  $f_{bd}$ . Para barras corrugadas el valor de la tensión última de adherencia es:

$$f_{bd} = 2.25\eta_1\eta_2f_{ctd} \quad (3.24)$$

donde:

$f_{ctd}$  viene dado por la expresión 3.10  
 $\eta_1$  es un coeficiente que depende de la zona de adherencia (1.0 si el barra está en zona de buena adherencia y 0.7 si es de adherencia deficiente)  
 $\eta_1$  1.0 si el diámetro de la barra  $\varnothing \leq 32 \text{ mm}$  y  $(132 - \varnothing)/100$  si  $\varnothing > 32 \text{ mm}$ .

A partir de la ecuación anterior se obtiene lo que se denomina longitud básica de anclaje  $l_b$ .

$$\pi \phi l_b f_{bd} = f_{yd} \pi \frac{\phi^2}{4} \rightarrow l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4 f_{bd}} \quad (3.25)$$

La longitud de anclaje necesaria ( $l_{b,net}$ ) se calcula a partir de la expresión:

$$l_{b,net} = a_a l_b \frac{A_{s,req}}{A_{s,prov}} \geq l_{b,min} \quad (3.26)$$

donde:

$A_{s,req}$  y  $A_{s,prov}$  son las armaduras necesaria por cálculo y la dispuesta  
 $l_{b,min}$  es la longitud mínima de anclaje, para anclajes en tracción es el mayor de los valores ( $0.3 l_{b,net}$ ,  $0.3 l_b$  y  $10 \varnothing$ ) y para anclajes en compresión es el valor mayor de ( $0.6 l_{b,net}$ ,  $0.6 l_b$  y  $100 \text{ mm}$ ).

$a_a$  es un coeficiente que depende del tipo de anclaje. En tracción vale: 1 para prolongación recta, 0.7 para barras en tracción ancladas dobladas (si el recubrimiento de hormigón perpendicular al plano de doblado es al menos  $3\varnothing$  en la zona del gancho, patilla o anclaje en U). En compresión toma el valor 1.

## 3.9. ARMADURA ACTIVA

Como veíamos al principio del texto, el hormigón resiste poco a tracción. Para paliar este problema se colocan barras de acero en las zonas traccionadas del elemento (armadura pasiva). Otra forma de solucionar el inconveniente de la baja resistencia a tracción del hormigón consiste en forzar a que todo el hormigón trabaje a compresión, lo que se logra introduciendo fuerzas de pretensado (figura 1.3). Las fuerzas de pretensado se introducen mediante armaduras activas. Estas armaduras se presentan bajo 3 tipos:

Alambre:	Producto de sección maciza, procedente de un estirado en frío o trefilado de alambón que normalmente se suministra en rollo. Los alambres se suministran en bobinas.
Barra:	Producto de sección maciza, se suministra en elementos rectilíneos.
Cordón:	Formado por varios alambres arrollados helicoidalmente.

Se denomina **tendón** al conjunto de varias armaduras de pretensado paralelas alojadas dentro de un mismo conducto.

Los alambres se presentan bajo los siguientes diámetros: 3-4-5-6-7-7.5-8-9.4-10 mm y están constituidos por acero de alto porcentaje de carbono (0.7 a 0.85%). La materia prima del cable es un alambón obtenido mediante laminado. Antes de procesar el alambón éste es calentado hasta unos 900°C y enfriado lentamente para que el acero sea más homogéneo. Posteriormente el alambón es sometido a un proceso de trefilado en frío. El trefilado se realiza en varias fases reduciendo paulatinamente el diámetro del alambre y mejorando así su resistencia. La EHE designa los alambres en relación a su carga unitaria máxima  $f_{máx}$ , ver tabla 3.4.

Tabla 3.4. Tipos de alambres

Designación	Serie de diámetros nominales, en mm	Carga unitaria máxima $f_{máx}$ en $N/mm^2 \geq$
Y 1570 C	9.4 – 10.0	1570
Y 1670 C	7.0 – 7.5 – 8.0	1670
Y 1770 C	3.0 – 4.0 – 5.0 – 6.0	1770
Y 1860 C	4.0 – 5.0	1860

El límite elástico  $f_y$  (aquel que produce una deformación remanente del 0,2 %) estará comprendido entre el 0.85 y el 0.95 de la carga unitaria máxima  $f_{máx}$ .

En elementos pretesos los alambres transmiten la fuerza de pretensado al hormigón a través de la superficie de contacto. Los alambres (al no fabricarse mediante procesos de laminado, como la armadura pasiva) son lisos y no presentan corrugas. Si fuese necesario se le pueden practicar muescas, estando este uso reservado para alambres y cordones en elementos pretesos de corta longitud tales como traviesas de ferrocarril. Para mejorar aún más la adherencia el alambre se suele presentar rizado.

Muestras y rizado junto con el efecto Poisson (incremento de volumen a menor tensión) y los demás mecanismos descritos anteriormente (retracción del hormigón y reacción química en la interfase acero-hormigón) aseguran la adherencia de los alambres en los elementos pretesos.

Los cordones están compuestos por varios alambres arrollados helicoidalmente. Los más empleados son los cordones de 7 alambres. Una vez arrollados se puede optar por dos procesos: calentar hasta unos 350°C y luego enfriar lentamente, produciendo cordones de **relajación normal**, o bien calentar hasta 350°C estando el cordón en tensión, dando lugar a cordones de **baja relajación**. La norma EHE designa los cordones por su carga unitaria máxima  $f_{m\acute{a}x}$ , ver tabla 3.5.

Tabla 3.5. Tipos de cordones

Designación Cordones de 2 o 3 alambres	Serie de diámetros nominales en mm (área mm <sup>2</sup> )	Carga unitaria máxima $f_{m\acute{a}x}$ en N/mm <sup>2</sup> ≥
Y 1770 S2	5.6 – 6.0	1770
Y 1860 S3	6.5 – 6.8 – 7.5	1860
Y 1960 S3	5.2	1960
Y 2060 S3	5.2	2060
Y 1770 S7	16.0	1770
Y 1860 S7	9.3 – 13.0(99) – 15.2(140) – 16.0(150)	1860

Las barras se fabrican mediante estirado en frío. Su diámetro varía entre 20 y 40 mm. La carga unitaria máxima no será inferior a 980 MPa. Las barras pueden ser roscadas o lisas, pero las barras lisas deben de tener los extremos roscados ya que su sistema de pretensado es mediante rosca: se tensa la barra y se aprieta la tuerca. En la figura 3.22 se representa una barra de pretensado.



Figura 3.22. Barras de pretensado

Alambres y cordones se suministran en bobinas, mientras que las barras lo hacen en tramos rectos igual que la armadura pasiva; figura 3.23.



Figura 3.23. Bobina de cable S7.

El diagrama característico tensión-deformación para la armadura activa (alambres, barras y cordones) puede ser suministrado por el fabricante (con las debidas garantías) o, en su defecto, el representado en la figura 3.24 (artículo 38 de la EHE). Este diagrama consta de un primer tramo recto de pendiente  $E_p$  y un segundo tramo que responde a la ecuación 3.27 a partir del punto  $0.7f_{pk}$  de tensión.

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 0.823 \left( \frac{\sigma_p}{f_{pk}} - 0.7 \right)^5 \quad \text{para } \sigma_p \geq 0.7f_{pk} \quad (3.27)$$

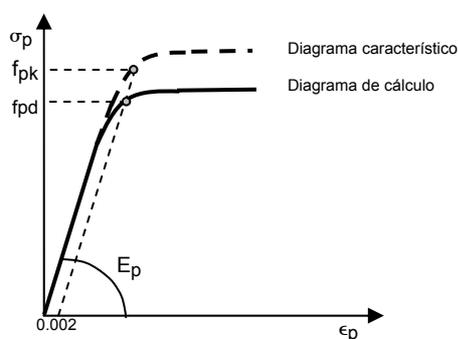


Figura 3.24. Diagrama tensión-deformación para armaduras activas

Como módulo de elasticidad o de deformación longitudinal se pueden adoptar los valores de  $E_p=200000 \text{ MPa}$  para alambres y barras y de  $E_p=190000 \text{ MPa}$  para cordones.

El término  $f_{pk}$  tiene significados distintos en la EHE y en el EC2. En la norma europea  $f_{pk}$  corresponde a la resistencia a tracción y  $f_{p0.1k}$  es la tensión que produce una deformación remanente del 0.1 %, como se puede ver en la figura 3.25. Se denomina  $\epsilon_{uk}$  a la elongación unitaria para la carga máxima. Los tendones de pretensado deben presentar una ductilidad adecuada, para lo cual se ha de verificar que;  $f_{pk} / f_{p0.1k} \geq 1.1$ .

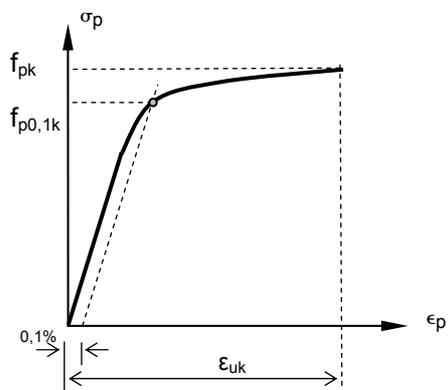


Figura 3.25 Diagrama tensión-deformación típico del acero pretensado (valores de tracción)

El EC2 propone como diagramas característico y de diseño los representados en la figura 3.26 y recomienda como valor de la deformación unitaria límite  $\epsilon_{ud} = 0.9 \epsilon_{uk}$ .

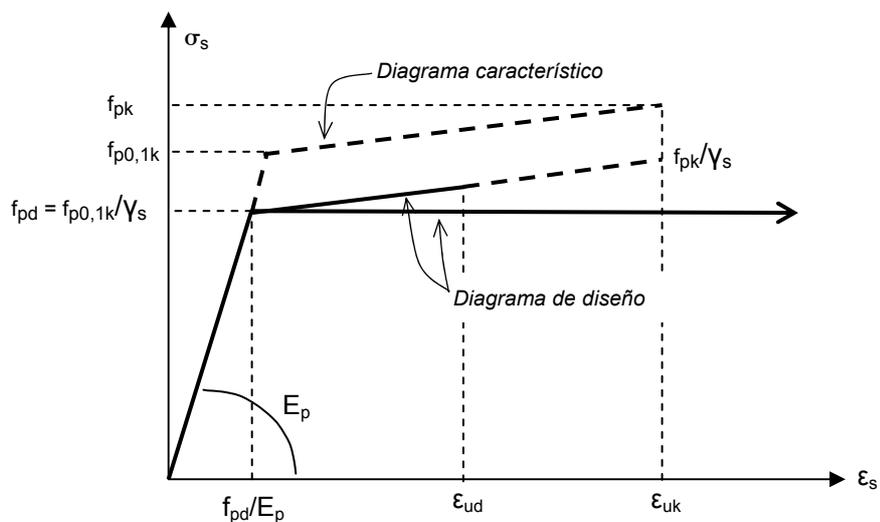


Figura 3.26 Diagramas tensión-deformación característico y de diseño del acero pretensado (valores de tracción)

En el apartado 3.8 se ha definido el concepto de longitud de anclaje en relación con la armadura pasiva. En el caso de la armadura activa el anclaje se puede concentrar en una longitud muy reducida (mediante cuñas o tuercas) o bien extenderse a lo largo de una longitud mayor, como en el caso de la armadura pasiva. El anclaje localizado suele ser típico de la armadura activa postesa mientras que el anclaje en longitud lo es de la armadura activa pretesa.

El efecto *Poisson* es el mecanismo más importante para que se produzca el anclaje a lo largo de una determinada longitud sin que exista ningún elemento mecánico adicional (la corruga). Esto es debido a que la armadura bajo tensión experimenta una reducción de su sección transversal. Cuando el alambre o cordón de pretensado se corta (proceso de destesado en bancada) la tensión en los extremos se anula lo que implica un aumento de su sección transversal, que ayuda a mejorar el anclaje (ver figura 3.27).



Figura 3.27. Longitud de transmisión

En el proceso de destesado, descrito en el párrafo anterior, el alambre o cordón pasa de una tensión 0, en el extremo del elemento, a la tensión inicial de pretensado  $P_0/A_p$ , a una determinada distancia del extremo. La longitud necesaria para alcanzar el valor  $P_0$  se conoce como **longitud de transmisión**. La longitud de transmisión se puede calcular a partir de la EHE (artículo 70) o del EC2 o bien suponer que es 50 veces el diámetro nominal para cordones ó 100 diámetros para alambres (método ACI).

Tanto la EHE como el EC2 suponen una tensión constante ( $f_{bpt}$ ) a lo largo de la longitud de transmisión ( $l_{pt}$ ).

Cuando hay que pretensar una pieza de corta longitud, como una traviesa de ferrocarril, la longitud de transmisión puede resultar excesiva. En esos casos se practican unas muescas en frío en la zona de anclaje, reduciéndose así la longitud de transmisión.

3.10. RELAJACIÓN

En la figura 3.11 se representaban los fenómenos de fluencia y relajación. Como ya vimos, la relajación es la pérdida de tensión bajo deformación constante (figura 3.28) siendo este fenómeno especialmente importante en el acero de pretensado. La relajación depende del tiempo, de la temperatura y del nivel de tensión. Para valores de tensión inferiores a  $0.5f_{pk}$  la relajación se puede considerar despreciable.

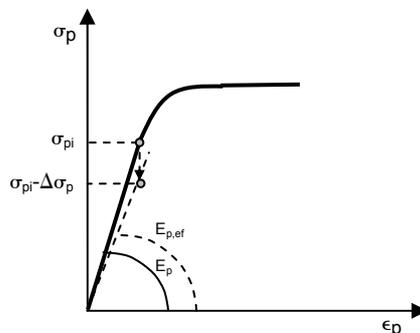


Figura 3.28. Relajación del acero de las armaduras activas

Por efecto de la relajación el valor del módulo de deformación longitudinal  $E_p$  varía. El nuevo valor  $E_{p,ef}$  (figura 3.28) se puede deducir a partir de los valores de la relajación.

La relajación  $\rho$  ( $\rho = \Delta\sigma_p / \sigma_{pi}$ ) para una tensión inicial  $\sigma_{pi}$  comprendida entre 0.5 y 0.8 de  $f_{m\acute{a}x}$  y para un tiempo  $t$  se puede estimar a partir de la ecuación 3.28:

$$\log(\rho) = \log\left(\frac{\Delta\sigma_p}{\sigma_{pi}}\right) = K_1 + K_2 \log(t) \quad (3.28)$$

donde  $\Delta\sigma_p$  es la pérdida de tensión por relajación y  $K_1$  y  $K_2$  son coeficientes que dependen del tipo de acero y de la tensión inicial. La ecuación anterior es una recta si los ejes de referencia se presentan en escala logarítmica:

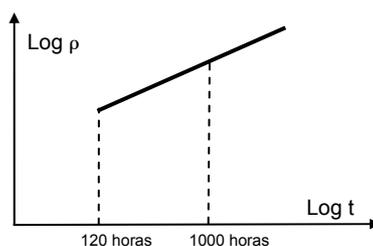


Figura 3.29. Relajación en función del tiempo

Bastará con que el fabricante suministre datos de la relajación a 120 y 1000 horas para obtener los valores de  $K_1$  y  $K_2$  en cada nivel de tensión.

Se denomina valor final de la relajación  $\rho_f$  al correspondiente a la vida estimada de la obra en horas o a  $10^6$  de horas.

A falta de datos experimentales la norma EHE propone valores de la relajación a 1000 horas ( $\rho_{1000}$ ) para tensiones iniciales de 0.6, 0.7 y 0.8 de  $f_{m\acute{a}x}$ .

Tabla 3.6. Valores de relajación a 1000 horas. En %

	0.6 $f_{m\acute{a}x}$	0.7 $f_{m\acute{a}x}$	0.8 $f_{m\acute{a}x}$
Alambres y cordones	1.0	2.0	5.5
Barras	2.0	3.0	7.0

La EHE proporciona además la variación en la relajación desde tiempo 0 hasta las 1000 horas en porcentajes:

Tabla 3.7. Variación porcentual de la relajación de 0 a 1000 horas

	1	5	20	100	200	500	1000
% de pérdidas hasta 1000 horas	25	45	55	70	80	90	100

Asimismo para estimar la relajación a partir de las 1000 horas la EHE propone la siguiente fórmula:

$$\rho(t) = \rho_{1000} \left( \frac{t}{1000} \right)^k \quad (3.29)$$

donde:  $k = \log \left( \frac{\rho_{1000}}{\rho_{100}} \right)$

### 3.10. FATIGA

Se define como fatiga a la relación entre la diferencia de tensiones máxima y mínima ( $\sigma_{s,máx} - \sigma_{s,min}$ ) y el número de ciclos que dicha carga es repetida hasta causar el agotamiento del material. En hormigón armado y pretensado la fatiga del acero es anterior a la de hormigón. En la figura 3.30 se ha representado la relación entre rango de tensiones y ciclos de carga necesarios hasta la rotura:

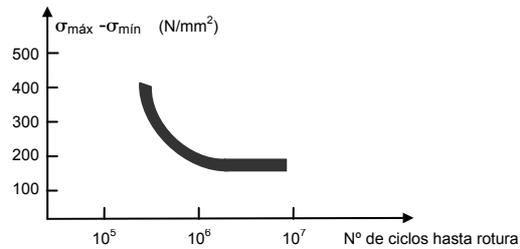


Figura 3.30. Curva de fatiga

La norma EHE propone límites a la diferencia de tensiones ( $\sigma_{s,máx} - \sigma_{s,min}$ ) tanto para armadura pasiva como activa por debajo de los cuales no se presentan problemas de fatiga.

**Ejercicios propuestos**

- 3.1. Para estimar las flechas en hormigón es necesario obtener con gran precisión el valor del módulo de deformación longitudinal  $E_{cm}$ . El rango de deformaciones ( $\varepsilon$ ) a considerar va desde 0 hasta 0.001. ¿Se pueden emplear los valores de  $E_{cm}$  obtenidos a partir del gráfico de la figura 3.8? ¿Qué inconvenientes tendría el usarlo?
- 3.2. La norma EHE propone dos factores de corrección,  $\alpha$  y  $\beta$ , en función del tipo de árido y en función de la edad del hormigón. Explica brevemente en qué consisten.
- 3.3. En el problema de fluencia y retracción, calcular el efecto de deformación por temperatura si a los 50 días pasa de 20°C a 40°C. Rehacer la figura 3.15.
- 3.4. Explica brevemente el efecto beneficioso del confinamiento del hormigón. Intenta explicar por qué las distintas normativas son reticentes al empleo de la mejora de resistencia en el dimensionamiento de pilares de hormigón, y que tiene que ver esto con la deformación del pilar.
- 3.5. Busca en la norma EHE la solución al siguiente problema: se ha dejado a la intemperie la armadura pasiva y ha aparecido gran cantidad de óxido, que se ha eliminado mediante cepillado con cerdas de acero. ¿Se puede colocar o es preciso realizar algún tipo de comprobación?
- 3.6. Normas antiguas daban un valor mínimo a la resistencia del hormigón  $f_{ck}$  en función de la resistencia del acero (B-400-S o B-500-S). ¿Qué sentido puede tener esto en relación con el anclaje?
- 3.7. La relajación depende del tiempo y del nivel de tensión, sin embargo en la ecuación 3.29 sólo aparece como variable el tiempo. ¿Dónde interviene el nivel de tensión?

**Referencias**

ACI 318-05 (2005). Building Code Requirements for Structural Concrete, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan.

EHE. Instrucción de Hormigón Estructural (borrador 2007). Secretaría General Técnica. Ministerio de Fomento. Madrid.

Eurocode 2 (2002): Design of concrete structures- Part 1: General rules and rules for buildings prEN 1992-1-1. European Committee for Standardization. Brussels.

Nawy (2003). *Reinforced Concrete. A Fundamental Approach*. 5th edition. Prentice-Hall. New Jersey.

Park, R., and Paulay, T. *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley & Sons, New York. (1975).

SIA 162 (1989), Norme SIA 162: Ouvrages en béton, Société suisse des ingénieurs et des architectes, Zurich, Suiza.

Walther, R, and Miehlabradt, M. (1990), *Dimensionnement des Structures en Béton*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suiza.



Pilar confinado mediante empresillado metálico  
Cortesía de DETECSA [www.detecea.es](http://www.detecea.es)

**ANEJO. Modelo de arcos de descarga de hormigón confinado (o de Mander-Richart)**

Como hemos visto, la resistencia máxima del hormigón aumenta si éste se encuentra confinado. Los valores de resistencia máxima ( $f_{cc}$ ) y la deformación unitaria correspondiente ( $\epsilon_{cc}$ ) en función de la tensión de confinamiento ( $\sigma_{conf}$ ) se pueden tomar como:

$$\begin{aligned} f_{cc} &= f_c + k_1 \sigma_{conf} \\ \epsilon_{cc} &= \epsilon_{c0} \left( 1 + k_2 \frac{\sigma_{conf}}{f_c} \right) \end{aligned} \quad \text{A3.1}$$

Las expresiones A3.1 fueron fruto de las primeras investigaciones sobre hormigón confinado.

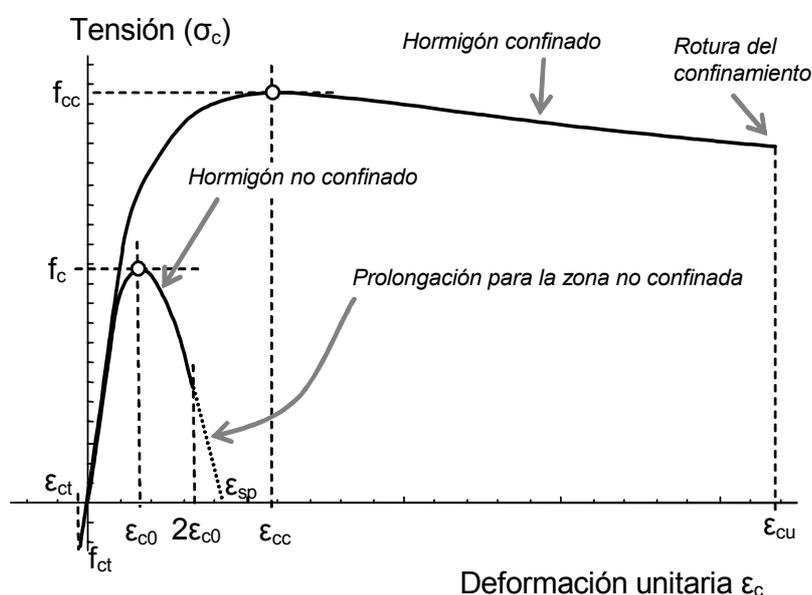


Figura A3.1 Modelo tensión – deformación de hormigón confinado y no confinado para carga monótona.

En la figura A3.1, la resistencia (o tensión máxima) y la deformación correspondiente, para el caso de hormigón no confinado, son  $f_c$  y  $\epsilon_{c0}$ , respectivamente. Los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  de las expresiones A3.1 dependen de la presión lateral y del tipo de hormigón. Richart (1928) obtuvo experimentalmente  $k_1=4.1$  y  $k_2=5k_1$ . En investigaciones recientes (Pantazopoulou S.J.) se han

obtenido valores similares aunque se ha encontrado alguna variación para hormigones de alta resistencia.

El Eurocódigo 2 propone también valores de las tensiones máximas para hormigones confinados. No obstante, estas expresiones no son aplicables directamente puesto que es necesario conocer el valor de la tensión de confinamiento. Hay que tener en cuenta que el confinamiento se logra principalmente por la armadura transversal y por la manera en la que ésta está colocada y que, por tanto, interesa que los modelos tensión-deformación sean función tanto de la armadura existente como de su disposición.

El modelo básico tensión-deformación ( $\sigma_c$ - $\varepsilon_c$ ) propuesto por Popovics (1973) para hormigón confinado bajo carga cuasi-estática y monótona es:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{f_{cc} \chi^r}{r - 1 + \chi^r} \\ \chi &= \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \\ \varepsilon_{cc} &= \varepsilon_{c0} \left[ 1 + 5 \left( \frac{f_{cc}}{f_c} - 1 \right) \right] \\ r &= \frac{E_c}{E_c - E_{\text{sec}}} \\ E_{\text{sec}} &= \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}}\end{aligned}\tag{A3.2}$$

donde  $E_c$  es el módulo tangente de deformación longitudinal (los autores de este modelo emplearon  $E_c = 5000 \sqrt{f_c}$  MPa).

Para definir el comportamiento del hormigón en la zona no confinada este modelo supone que a partir de una deformación  $2\varepsilon_{c0}$  ( $\varepsilon_c > 2\varepsilon_{c0}$ ) existe una prolongación recta de la curva hasta la intersección con el eje de abscisas ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{sp}$ ), como se puede ver en la figura A3.1.

### Modelo de arcos de descarga

En la práctica, el confinamiento lo ejercen las armaduras transversal y longitudinal sobre el núcleo de la sección. Por efecto Poisson el hormigón comprimido longitudinalmente tiende a dilatar transversalmente pero la armadura transversal se lo impide, formándose unos arcos de descarga internos apoyados en los puntos de la armadura más inmovilizada. Se entiende así que en la figura A3.2,

para un mismo diámetro de armaduras y una misma separación de la armadura transversal, la sección *a* presente un confinado menos eficaz que las secciones *b* y *c*.

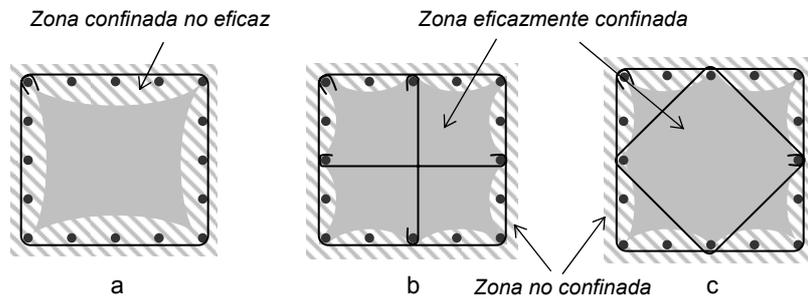


Figura A3.2 Arcos de descarga y zona no confinada, confinada no eficaz y confinada eficaz.

Se define *núcleo de la sección* ( $A_c$ ) al área situada entre la línea media de la armadura transversal (cercos o espiras). Esta definición es necesaria para poder operar cómodamente con el modelo de hormigón confinado ( $\sigma_c-\epsilon_c$ ) dada la dificultad que tendría operar con el *área eficazmente confinada* ( $A_c$ ) debido a que ésta varía tanto a lo largo de la pieza como en la propia sección transversal.

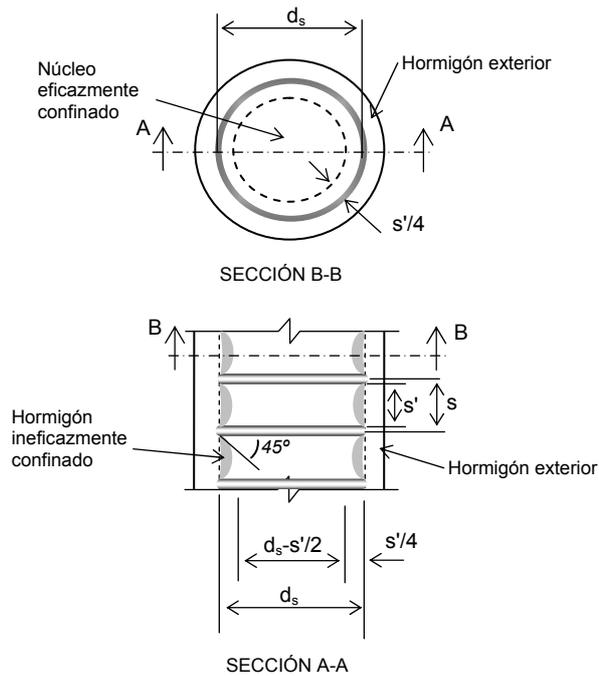


Figura A3.3 Núcleo de hormigón eficazmente confinado para armadura transversal circular.

En la figura A3.3 se observa la variación (en dirección longitudinal) del núcleo eficazmente confinado para una columna circular con cercos circulares separados a una distancia  $s$ .

Sea  $\sigma_{conf}$  la presión lateral ejercida por la armadura uniformemente repartida sobre la superficie del núcleo de la sección,  $A_c$ . En realidad, esta presión se ejerce sobre el exterior de  $A_c$  (zona eficazmente confinada) que, como ya se ha comentado, no tiene un valor constante y que es menor que  $A_c$  (núcleo de la sección). Para poder operar con el núcleo de la sección se define una presión lateral eficaz ( $\sigma_{e,conf}$ ) que actúa en el exterior del núcleo de la sección ( $A_c$ ) y produce el mismo efecto. Lógicamente, al aumentar el área de actuación, la presión lateral eficaz será menor que la presión lateral de confinamiento ( $\sigma_{e,conf} < \sigma_{conf}$ ):

$$\begin{aligned}\sigma_{e,conf} &= \sigma_{conf} k_e \\ k_e &= \frac{A_e}{A_{cc}} \\ A_{cc} &= A_c(1 - \rho_{cc})\end{aligned}\tag{A3.3}$$

$A_{cc}$  es el área de hormigón dentro del núcleo de la sección,  $\rho_{cc}$  es la relación de la armadura longitudinal respecto al área del núcleo de la sección ( $A_s/A_c$ ). El parámetro  $k_e$  se denomina coeficiente de confinamiento eficaz.

### Confinamiento eficaz en pilares circulares

Consideremos la columna circular de la figura A3.3 con cercos circulares de área  $A_{s,90}$  separados una distancia  $s$  (distancia libre  $s'$ ). El diámetro de la línea media de los cercos es  $d_s$ . Se supone que el arco de descarga forma una parábola con una inclinación de salida de 45 grados. El área confinada eficaz (a media distancia entre los cercos) y el área de hormigón dentro del núcleo de la sección son, respectivamente:

$$\begin{aligned}A_e &= \frac{\pi}{4} \left( d_s - \frac{s'}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} d_s^2 \left( 1 - \frac{s'}{2d_s} \right)^2 \\ A_{cc} &= A_c(1 - \rho_{cc}) = \frac{\pi}{4} d_s^2 (1 - \rho_{cc})\end{aligned}\tag{A3.4}$$

y, en este caso, el coeficiente de confinamiento eficaz,  $k_e$  es:

$$k_e = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1 - \rho_{cc}} \quad A3.5$$

Para deducir la expresión de la presión lateral de confinamiento se plantea el equilibrio de medio cerco circular, figura A3.4:

$$2A_{s,90}f_{y,90} = \sigma_{conf}sd_s \quad A3.6$$

siendo  $f_{y,90}$  la tensión máxima de la armadura del cerco. Si se define  $\rho_s$  como la cuantía geométrica de la armadura transversal respecto del núcleo de la sección:

$$\rho_s = \frac{A_{s,90}\pi d_s}{\frac{\pi}{4}d_s^2s} = \frac{4A_{s,90}}{d_s s} \quad A3.7$$

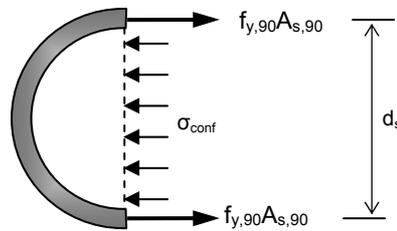


Figura A3.4 Presión de confinamiento.

los valores de la presión lateral de confinamiento y de la presión lateral eficaz de confinamiento se pueden obtener a partir de las expresiones A3.3, A3.6 y A3.7:

$$\sigma_{conf} = \frac{1}{2}\rho_s f_{y,90} \quad A3.8$$

$$\sigma_{e,conf} = \frac{1}{2}k_e \rho_s f_{y,90}$$

Una vez conocida la tensión eficaz de confinamiento se pueden calcular los valores de resistencia máxima del hormigón confinado ( $f_{cc}$ ) y la deformación

unitaria correspondiente ( $\varepsilon_{cc}$ ) empleando la expresión A3.1<sup>1</sup>. Estos valores de  $f_{cc}$  y  $\varepsilon_{cc}$  se pueden introducir en la expresión A3.2 y obtener el modelo tensión-deformación para hormigón confinado.

### Confinamiento eficaz en secciones rectangulares

En secciones rectangulares, como en el caso anterior, se supone que las parábolas (arcos de descarga) forman una tangente inicial de 45°. En este tipo de secciones las parábolas serán tanto verticales como horizontales. Geométricamente, se puede determinar que la altura de una parábola con una cuerda de valor  $w'$  (ver figura A3.5) y tangente inicial de 45° es de  $w'/4$  y que su área es igual a  $(w')^2/6$ . Teniendo en cuenta lo anterior, el área ineficazmente confinada a nivel del cerco para  $n$  parábolas formadas entre  $n$  barras longitudinales inmovilizadas es:

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{(w_i')^2}{6} \quad A3.9$$

donde  $w_i$  es el arco de cada una de las parábolas de descarga. Si se tiene en cuenta además la existencia de parábolas verticales entre los distintos niveles de cercos, se puede calcular el área eficazmente confinada a media distancia entre los cercos como:

$$A_e = \left( b_c d_c - \sum_{i=1}^n \frac{(w_i')^2}{6} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad A3.10$$

donde  $b_c$  y  $d_c$  son las dimensiones del núcleo de la sección, o sea, el área encerrada por la línea media de los cercos exteriores siendo además  $b_c \geq d_c$ .

A partir de las definiciones dadas en las expresiones A3.3 se puede formular la siguiente expresión del coeficiente de confinamiento  $k_e$ .

$$k_e = \frac{\left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(w_i')^2}{6b_c d_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left( 1 - \frac{s'}{2d_c} \right)}{1 - \rho_{cc}} \quad A3.11$$

Imponiendo el equilibrio de fuerzas en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, se obtiene que:

---

<sup>1</sup> Se pueden emplear modelos más sofisticados para este mismo fin.

$$A_{sx,90} f_{y,90} = \sigma_{conf,x} s d_c$$

$$A_{sy,90} f_{y,90} = \sigma_{conf,y} s b_c$$

A3.12

donde:

$A_{sx,90}$  y  $A_{sy,90}$  son las áreas de las armaduras transversales según las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente  
 $\sigma_{conf,x}$  y  $\sigma_{conf,y}$  son las presiones laterales de confinamiento según  $x$  e  $y$ , respectivamente.

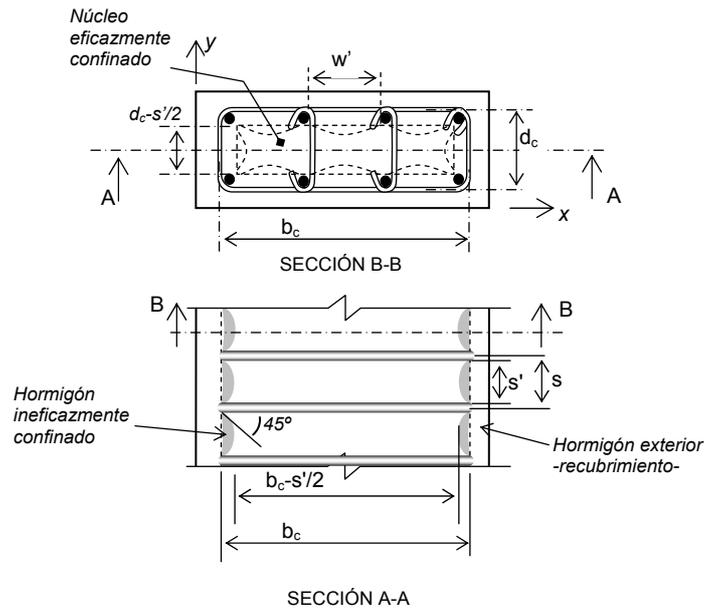


Figura A3.5 Núcleo de hormigón eficazmente confinado para armadura transversal rectangular.

De la expresión anterior se pueden deducir la presión lateral de confinamiento y la presión lateral eficaz de confinamiento en las direcciones  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{conf,x} &= \frac{A_{sx,90} f_{y,90}}{sd_c} = \rho_x f_{y,90} \\
 \sigma_{e,conf,x} &= k_e \rho_x f_{y,90} \\
 \sigma_{conf,y} &= \frac{A_{sy,90} f_{y,90}}{sd_c} = \rho_y f_{y,90} \\
 \sigma_{e,conf,y} &= k_e \rho_y f_{y,90}
 \end{aligned}
 \tag{A3.13}$$

donde  $k_e$  viene dado por la expresión A3.11.

Conocidos los valores de las tensiones eficaces de confinamiento en ambas direcciones se puede recurrir a un modelo tridimensional de rotura y obtener una expresión para  $f_{cc}$ . Mander (1988) propuso el gráfico de la figura A3.6 para el cálculo de  $f_{cc}$ . Con este valor de  $f_{cc}$  se puede emplear el modelo tensión-deformación para hormigón confinado dado por la expresión A.3.2.

Para el caso de confinamiento circular o rectangular igual en las direcciones  $x$  e  $y$ , se puede emplear la siguiente expresión (Mander 1988):

$$f_{cc} = f_c \left( -1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 \sigma_{e,conf}}{f_c} - 2 \frac{\sigma_{e,conf}}{f_c}} \right)
 \tag{A3.14}$$

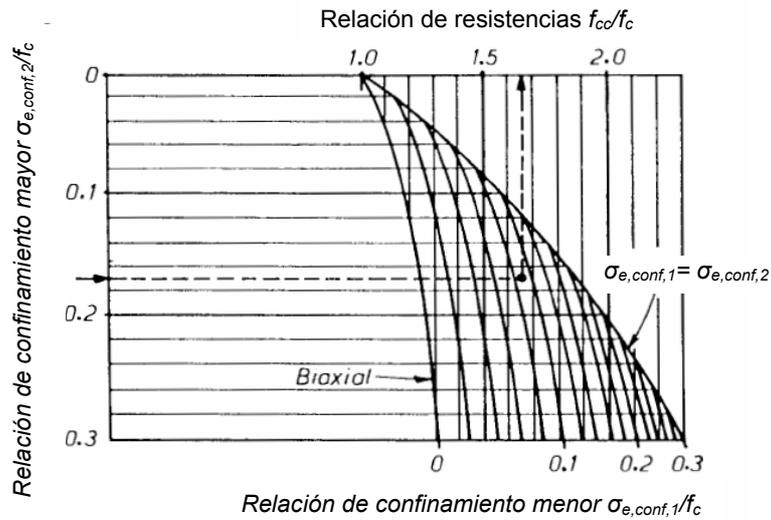


Figura A3.6 Incremento de la resistencia a compresión en secciones rectangulares confinadas por tensiones ortogonales.

La deformación unitaria última del hormigón ( $\varepsilon_{cu}$ ), ver figura A3.1, se debe a la rotura del confinamiento y puede aproximarse por (Paulay 1992):

$$\varepsilon_{cu} = 0.004 + 1.4 \rho_s \frac{f_{y,90} \varepsilon_{sm}}{f_{cc}} \quad \text{A3.15}$$

donde  $\varepsilon_{sm}$  es la deformación del acero correspondiente a la máxima tensión de tracción y  $\rho_s$  es la cuantía volumétrica de la armadura transversal. Para secciones rectangulares  $\rho_s = \rho_x + \rho_y$ , donde  $\rho_x$  y  $\rho_y$  vienen definidos en la expresión A3.13. Los valores de  $\varepsilon_{cu}$  están comprendidos entre 0.012 y 0.05.

**Referencias**

Blume, J. A., Newmark, N. M., and Corning, L. H. (1961). *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Portland Cement Association, Skokie, Illinois.

Hernández-Montes, E., Aschheim, M and Gil-Martín, L.M. (2004). "The impact of optimal longitudinal reinforcement on the curvature ductility capacity of reinforced concrete column sections". *Magazine of Concrete Research*, 56, No. 9, Noviembre, 499-512.

Mander J. B., M.J.N. Priestley and R. Park (1988). "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete". *Journal of Structural Engineering*. Vol 114, N° 8, Agosto 1988. ASCE.

Paulay T., Priestley M.J.N. *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*. John Wiley & Sons. 1992.

Sheikh S.S., Yeh C.C. (1992). "Analytical Moment-Curvature Relations for Tied Concrete Columns". *Journal of Structural Engineering*. Vol. 118, No.2, Febrero, 1992. ASCE.

**Ejemplo<sup>2</sup>**

En la figura A3.7a se representa una sección cuadrada de 0.5 m de lado. El hormigón es HA-25 y el acero B-400-S. La armadura longitudinal está compuesta por 5 Ø20 en cada cara con un total de 16 Ø20. Se han dispuesto cercos y cruces de Ø12 cada 8 centímetros (confinamiento propuesto para esta sección por la ACI-318-05 para zonas de alto riesgo sísmico). En la figura A3.7b se ha representado el diagrama momento-curvatura correspondiente a esta sección solicitada por un axil de compresión constante de 1500 kN. Para el núcleo de la sección se ha considerado el modelo de arcos de descarga y para el exterior de la sección un modelo de hormigón no confinado. El punto 1 corresponde a la rotura de la zona exterior: desprendimiento del recubrimiento. El punto 2 corresponde a la rotura del confinamiento.

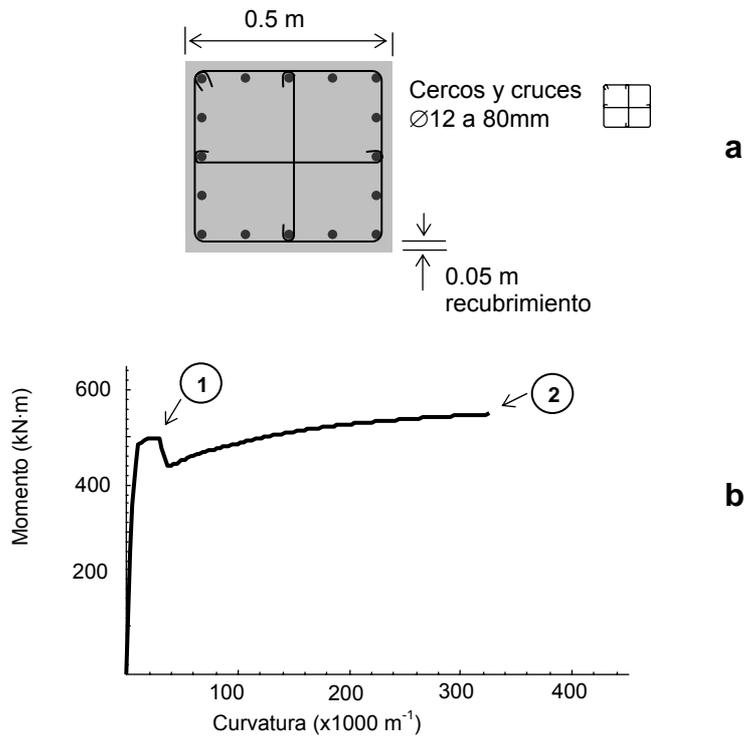


Figura A3.7. Análisis momento-curvatura mediante modelo de arcos de descarga.

<sup>2</sup> Para poder entender este ejercicio es necesario haber estudiado el capítulo de flexión.



---

CAPÍTULO IV

---

**LA FUERZA DE PRETENSADO**



Viga pretensada tipo artesa, antes de destesar.

La fuerza de pretensado es de tal importancia en hormigón estructural que requiere un capítulo especial en el que se estudiará cómo se introduce y cómo varía su valor a lo largo del trazado del tendón de pretensado. Dependiendo de que el pretensado sea posteso o preteso, la fuerza de pretensado tendrá características muy diferentes, tanto en la forma de ser introducida como en el valor que tenga a lo largo de la viga del elemento estructural. En la figura 4.1.a podemos ver una bancada de fabricación de dos vigas mediante pretensado preteso: primero se tesa el tendón y posteriormente se hormigona. Este proceso se puede ver en la figura 4.2. La figura 4.1.b corresponde a una viga simplemente apoyada fabricada mediante pretensado posteso, en este caso la viga se ha hormigonado con la vaina y cuando el hormigón ha endurecido se procede a tesar la armadura activa.

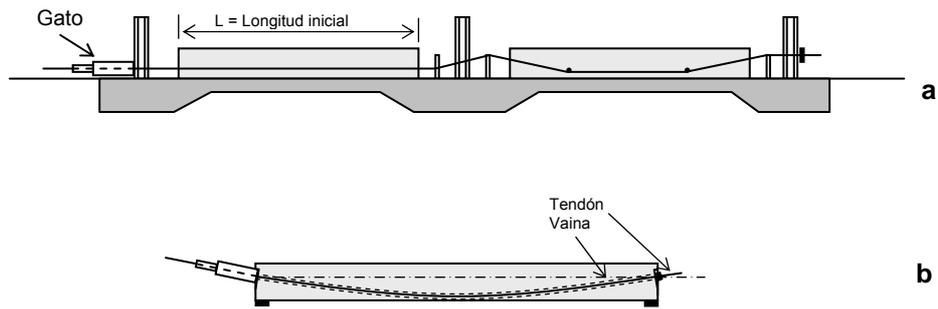


Figura 4.1. Vigas pretensas y postesas, a y b respectivamente.

Inicialmente, el gato introduce una fuerza de tesado  $P_0$  (tanto en pretensado como en postesado) que proporcionará una tensión  $\sigma_{p0}$  a la armadura activa. Esta tensión, según la EHE, deberá ser menor de 0.75 de la carga unitaria máxima característica ( $f_{pmax,k}$ ) y menor de 0.90 del límite elástico característico ( $f_{pk}$ ) aunque momentáneamente puede alcanzar el 0.85 y 0.95 respectivamente.

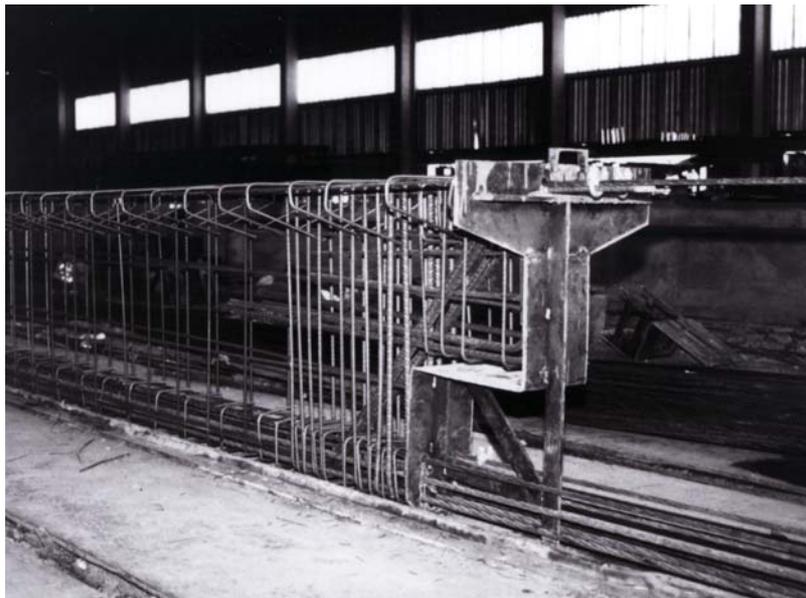


Figura 4.2. Viga pretensa con la armadura activa tesada antes de hormigonar

#### 4.1. LAS PÉRDIDAS DE PRETENSADO

El valor de  $P_0$ , transmitido por el gato a los tendones, disminuye desde el primer instante debido a varios factores (pérdidas). Estas pérdidas se pueden dividir en pérdidas instantáneas y pérdidas diferidas, tabla 4.1.

Tabla 4.1. Pérdidas en la fuerza de pretensado, según la EHE

Pérdidas instantáneas	Nombre EHE	Pérdidas diferidas	Nombre EHE
Rozamiento	$\Delta P_1$	Retracción del hormigón	
Penetración de cuñas	$\Delta P_2$	Fluencia del hormigón	$\Delta P_{dif}$
Acortamiento elástico	$\Delta P_3$	Relajación del acero	

#### 4.2. PÉRDIDAS POR ROZAMIENTO

Las pérdidas por rozamiento a lo largo del tendón sólo afectan a las armaduras postesas. Como podemos intuir de la figura 4.1.a la fuerza  $P_0$  introducida antes de hormigonar tiene el mismo valor a lo largo de todo el tendón. En la figura 4.1.b se tensa desde el extremo izquierdo y, como consecuencia del rozamiento a lo largo de la vaina, la fuerza de pretensado en el extremo derecho será menor.

En la figura 4.4. se representa un trozo de tendón de longitud  $dx$  cuyo trazado, en esa longitud, varía un ángulo  $d\alpha$ . El tendón está sometido en sus extremos a unas fuerzas de pretensado  $P$  y  $P-dP$  lo que produce una acción normal de valor  $2 \cdot P \cdot \text{sen}(d\alpha/2)$ . A su vez la vaina ejerce sobre el tendón una fuerza vertical igual y de sentido contrario,  $N$ . Si el coeficiente de rozamiento entre el tendón y la vaina que lo aloja es  $\mu$ , la pérdida por rozamiento será  $\mu N$ . Si el ángulo  $\alpha$  es pequeño se puede tomar la aproximación  $\text{sen}(d\alpha/2) \approx d\alpha/2$  y la pérdida por rozamiento debido a la variación de ángulo será  $\mu P d\alpha$ , siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento en ángulo.

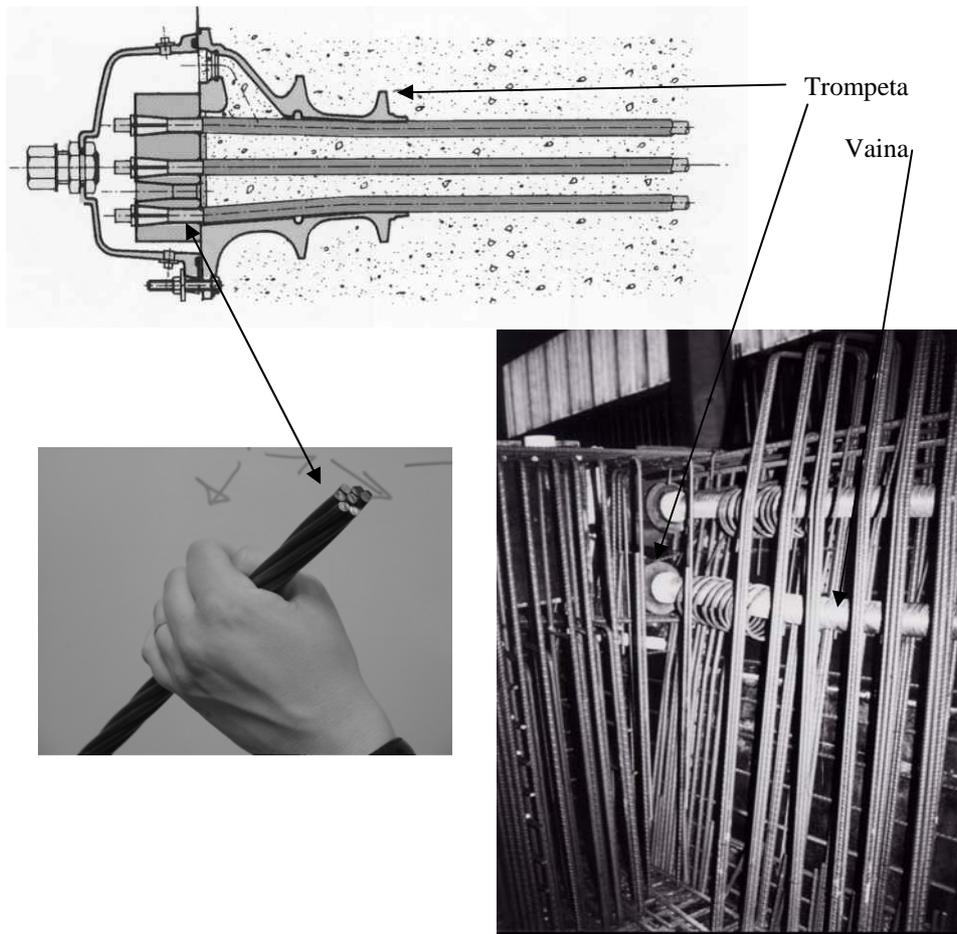


Figura 4.3. Viga postesa. Se aprecia la vaina y la trompeta colocadas antes de hormigonar. En el croquis ya está hormigonada.

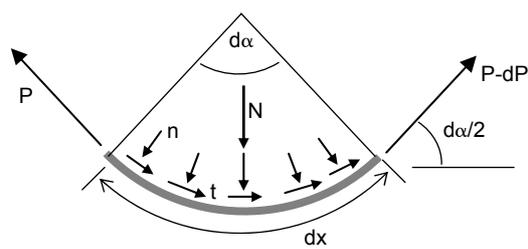


Figura 4.4. Pérdidas de rozamiento en ángulo.

Además del rozamiento en ángulo existe otro rozamiento a lo largo del tendón que es independiente del ángulo del trazado y que depende del diámetro del conducto o vaina que aloje al tendón, del tipo de tendón y de la forma en que se aloje en el interior del conducto. Las pérdidas asociadas este tipo de rozamiento en un  $dx$  de longitud serán  $K \cdot P \cdot dx$ , donde  $K$  es el coeficiente de rozamiento en recta o parásito y  $P$  la fuerza de pretensado. El origen de este rozamiento parásito está en la ondulación relativa existente entre la vaina y el tendón, figura 4.5.

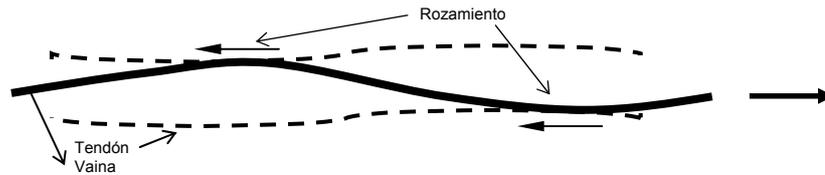


Figura 4.5. Efecto parásito en tramos rectos

Sumando los dos tipos de rozamiento:

$$dP = \mu P d\alpha + K P dx$$

e integrando:

$$\int_{P_x}^{P_0} \frac{dP}{P} = \mu \int_0^\alpha d\alpha + K \int_0^x dx \quad \xrightarrow{\text{resolviendo}} \quad P_x = P_0 e^{-(\mu\alpha + Kx)} \quad (4.1)$$

$\xrightarrow{\text{o bien}} \Delta P_1 = P_0 [1 - e^{-(\mu\alpha + Kx)}]$

donde  $P_0$  es la fuerza de tesado,  $P_x$  es la fuerza de pretensado a una distancia en horizontal igual a  $x$  y  $\alpha$  es la variación acumulada del ángulo del trazado en la longitud  $x$ .

El valor del coeficiente  $\mu$  depende de las características del tendón y de la vaina y varía de 0.05 a 0.5. El coeficiente de rozamiento parásito  $K$ , depende de  $\mu$  y de la sinuosidad de la vaina y varía de 0.0003 a 0.0066 por metro. La EHE da los valores para ambos coeficientes de rozamiento para tendones cuyos elementos se tesen simultáneamente y para pérdidas concentradas en desviadores.

4.3. GEOMETRÍA DEL POSTESADO

En estructuras postesadas el trazado habitual es el parabólico. Para vigas simplemente apoyadas el trazado corresponde a una parábola simple, tal y como podemos ver en la figura 4.1.b. En el caso de vigas continuas se disponen parábolas encadenadas que serán convexas en los apoyos y cóncavas lejos de ellos, figura 4.6.

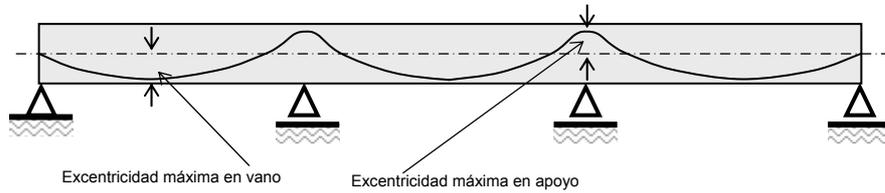


Figura 4.6. Viga continua de tres vanos

Antes de evaluar las pérdidas por rozamiento vamos a recapitular sobre la geometría de la parábola.

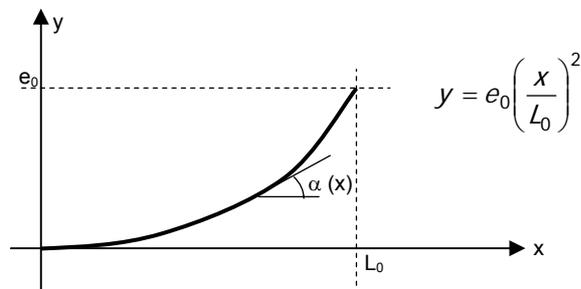


Figura 4.7. Parábola simple

Sea la parábola de la figura 4.7, que pasa por el origen y tiene pendiente horizontal en éste. Las ecuaciones del radio de curvatura  $R$  y de la variación del ángulo  $\alpha$ , ambas en función de  $x$ , son:

$$\frac{1}{R} = k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad R(x=0) = \frac{L_0^2}{2e_0} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha(x)) = \frac{2e_0}{L_0^2} x \quad \Rightarrow \quad \alpha(x=L_0) \approx \frac{2e_0}{L_0}$$

En el caso de parábolas encadenadas, como las de la figura 4.8, el planteamiento es similar. Denominemos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  a las longitudes (en horizontal) de cada parábola dentro del primer vano.

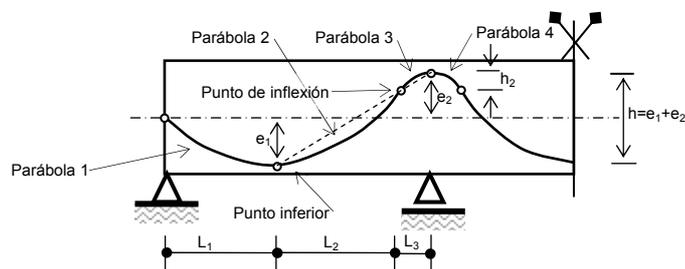


Figura 4.8. Parábolas encadenadas

En el punto inferior las parábolas 1 y 2 ambas parábolas tienen pendiente horizontal. Conocidos  $L_1$  y  $e_1$  es posible determinar, a partir de las fórmulas de la parábola (ecuaciones 4.2), el radio de curvatura en el punto inferior y la variación de ángulo.

Siguiendo con la notación empleada en la ecuación 4.2 y en la figura 4.8, para la parábola 2 se tiene que:  $e_0 = h - h_2$  y  $L_0 = L_2$ . Conocidos estos datos se pueden calcular el radio de curvatura en el punto inferior y la variación de ángulo (ecuaciones 4.2). Análogamente se procede con la parábola 3, para la que  $L_0 = L_3$  y  $e_0 = h_2$ .

Es interesante observar que en el punto de inflexión se unen las parábolas 2 y 3 y, por tanto, en este punto ambas parábolas tendrán la misma pendiente:

$$\frac{2(h - h_2)}{L_2} = \frac{2h_2}{L_3} \quad (4.3)$$

despejando  $h_2$ :

$$h_2 = h \frac{L_3}{L_2 + L_3} \quad \text{o bien} \quad \frac{h_2}{L_3} = \frac{h}{L_2 + L_3}$$

en la ecuación anterior, el primer miembro corresponde a la pendiente de la recta que une el punto de inflexión con el punto superior de la parábola 3 mientras que el segundo miembro es la pendiente de la recta que une el punto superior de la parábola 3 con el punto inferior de la parábola 2. De lo anterior se deduce que los siguientes puntos están alineados: inferior de la parábola 2, punto de inflexión y superior de la parábola 3. Por tanto, conocido el punto inferior de la parábola 2, el punto superior de la parábola 3 y  $L_3$  queda determinado el punto de inflexión.

El punto superior de la parábola 3 tiene pendiente horizontal y coincide con el punto superior de la parábola 4. Con una construcción similar a la efectuada entre las

parábolas 2 y 3 podemos hallar la variación de ángulo a lo largo de todo el trazado del tendón de pretensado.

Las parábolas encadenadas convexas (parábolas 3 y 4), cuya misión fundamental es dar continuidad al trazado, suelen ser ajustadas con radios mínimos. En la tabla 4.2 se recogen los radios mínimos recomendados en función del diámetro interior de la vaina.

Tabla 4.2. Valores mínimos de radios de curvatura

Diámetro de la vaina (mm)	45-55	65-80	85-95	100-110
Radio mínimo de curvatura (m)	3.5	4.5	5.0	7.0

Otro factor a tener en cuenta es la excentricidad existente entre el c.d.g. del tendón y el centro de la vaina (figura 4.9). En la tabla 4.3 se indican valores aproximados de esta excentricidad, que han sido extraídos de catálogos técnicos.

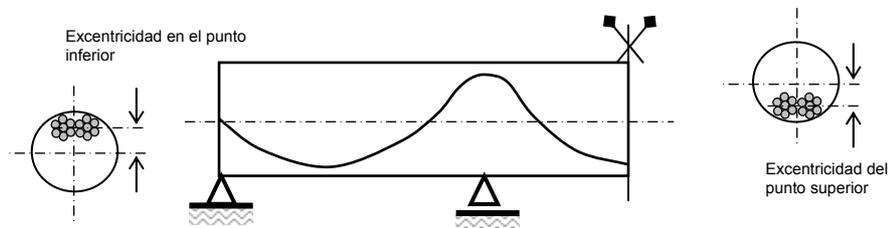


Figura 4.9. Excentricidades en los puntos extremos

Tabla 4.3. Valores de excentricidades. Extraídos de varios catálogos comerciales.

Nº de cordones S7 de 13.0 mm	Diámetro de la vaina (mm)	Excentricidad (mm)
3	32	7
4	41	7
7	51	8
12	64	11
19	80	13
22	86	12
31	102	14
55	140	23
Nº de cordones S7 de 15.2 mm		
3	38	5
4	51	5
7	57	10
12	76	13
19	100	19
31	125	22
55	165	30



Figura 4.10. Gato empleado en armadura pretesa para tesar un solo cordón.

4.4. PÉRDIDAS POR PENETRACIÓN EN CUÑA

En armadura postesa se suele emplear anclaje mediante cuñas<sup>1</sup> (figura 4.12). En este tipo de armaduras, una vez que el gato ha aplicado la fuerza de tesado al tendón, hay que proceder a anclar el tendón y extraer el gato. Éste proceso conlleva una nueva pérdida en la fuerza de pretensado.

La pérdida en la fuerza de pretensado por penetración en cuña ( $\Delta P_2$ ) afecta sólo a una longitud del tendón denominada longitud de influencia ( $X$ ), ver figuras 4.11.a y 4.11.b. El valor de  $X$  depende del rozamiento ( $p$ ) entre el tendón y la vaina, que se supone de valor constante por unidad de longitud<sup>2</sup>. El valor de  $p$  no depende de hacia donde se mueva el cable en la vaina (hacia dentro o hacia afuera) de ahí que la línea continua AB y la discontinua CB tengan pendientes iguales y opuestas (figura 4.11.a). En la figura 4.11.b se aprecia que el valor inicial de la fuerza en el anclaje es  $P_0$ , pasando a  $P_0 - \Delta P_2$  cuando se produce una penetración de cuña de valor  $a$ . A una distancia  $X$  la fuerza de pretensado tendrá un valor  $P'$  que, por definición de  $X$ , será el mismo antes y después de producirse la pérdida por penetración de la cuña,  $\Delta P_2$ .

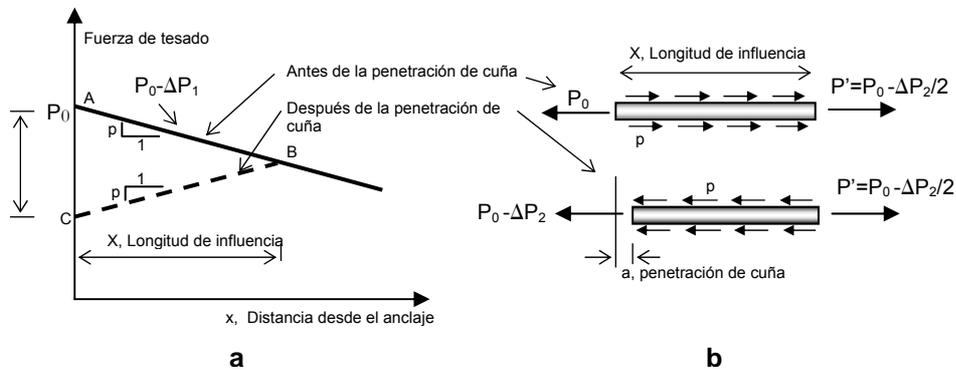


Figura 4.11. (a) Distribución de la fuerza de pretensado.  
(b) Equilibrio en la longitud de influencia.

Estableciendo el equilibrio en las dos situaciones representadas en la figura 4.11.b (antes y después de la penetración de cuña) se obtiene:

<sup>1</sup> Para lograr que éstas queden encajadas se necesitan del orden de 5 mm de penetración.  
<sup>2</sup> Si el tendón está engrasado la longitud de influencia será mucho mayor.

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = P' + p \cdot X \\ P_0 - \Delta P_2 + p \cdot X = P' \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} P' = P_0 - \frac{\Delta P_2}{2} \\ \frac{\Delta P_2}{2} = p \cdot X \end{array} \quad (4.4)$$

El rozamiento que se desarrolla en la longitud de influencia  $X$  cambia de signo al pasar del estado inicial (sin penetración de cuña) al estado final (penetración de cuña), tal y como se aprecia en la figura 4.11.b.

Al final de la fase de penetración de cuña, la variación del valor de la fuerza de pretensado será máxima en el extremo izquierdo, donde valdrá  $\Delta P_2$ , siendo nula a una distancia  $X$ . Así pues, la variación media de la fuerza de pretensado a lo largo de  $X$  será  $\Delta P_2/2$ . La pérdida de tensión se puede obtener dividiendo la pérdida de fuerza de pretensado entre el área, por lo que la pérdida de tensión media será  $\Delta\sigma_{med} = \Delta P_2/2A_p$ , donde  $A_p$  es el área del tendón.

Puesto que la variación de la tensión en el cable a lo largo de  $X$  pasa de un valor máximo a 0 (con un variación que se supone lineal), la deformación correspondiente a la penetración de la cuña ( $a$ ) es la misma que si se considera que toda la longitud  $X$  está sometida a una pérdida de tensión media y, por tanto:

$$a = \frac{\Delta\sigma_{med} X}{E_p} \quad (4.5)$$

donde  $E_p$  es el módulo de deformación longitudinal del tendón.

Sustituyendo  $\Delta\sigma_{med} = \Delta P_2/2A_p$  y la segunda ecuación 4.4. en la ecuación anterior se puede despejar el valor de  $X$ .

$$X = \sqrt{\frac{a E_p A_p}{p}} \quad (4.6)$$

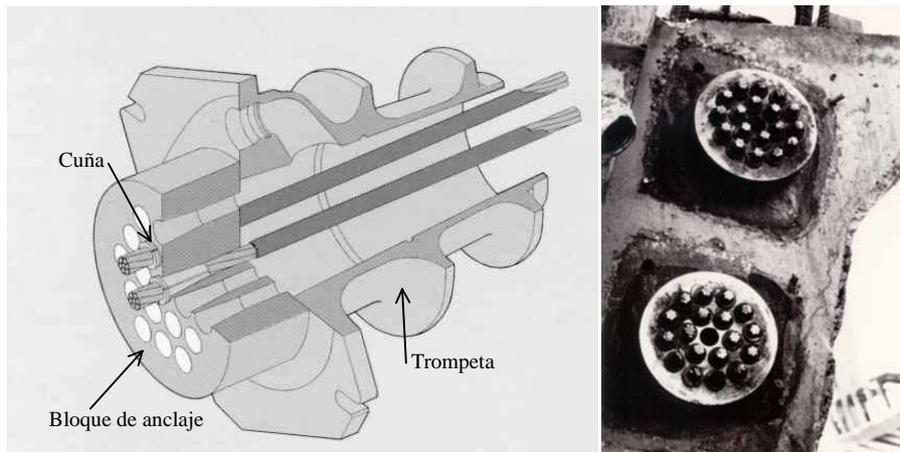


Figura 4.12. Detalle de anclaje de armadura activa. Cabeza de viga postesada

### Ejemplo de pérdidas de rozamiento

Sea una viga postesada de 4 vanos, de 25 m de luz cada uno, representada en la figura 4.13. La excentricidad del trazado del tendón respecto a la línea media de la viga es de 0.6 m en la mitad del vano y de 0.5 m en los apoyos. La armadura postesa está compuesta por un tendón de 19 cordones Y-1860-S7 de 15.2 mm de diámetro nominal. Todo el tendón se tesa simultáneamente. El tendón está anclado en el eje de simetría y su tesado se lleva a cabo desde cada uno de los extremos.

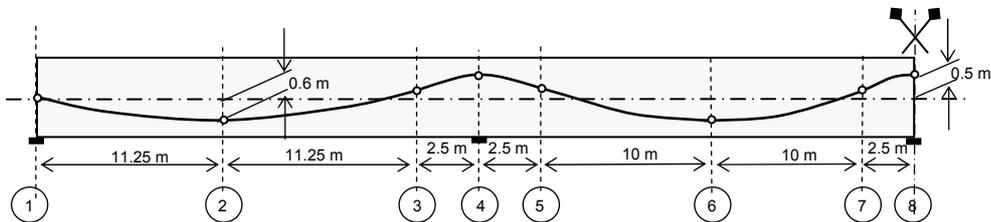


Figura 4.13. Viga de 4 vanos de 25 m cada uno

A partir de la norma EHE, y teniendo en cuenta que se tesa simultáneamente, adoptamos como coeficiente de rozamiento en curva el valor  $\mu=0.21^3$ . La vaina para incluir los 19 cordones (según catálogos técnicos) está en torno a 100 mm de diámetro. Para el caso de diámetro interior de conducto mayor de 60 mm la EHE establece que la

<sup>3</sup> Alambres o cordones trefilados sin lubricar y tendón formado por varios elementos agrupados en una misma vaina de acero sin tratamiento superficial.

Hernández-Gil

relación ( $k/\mu$ ) toma el valor de 0.006 y, por tanto, el coeficiente de rozamiento parásito por metro lineal ( $k$ ) es:  $k = 0.006 \cdot 0.21 = 0.00126$ .

$$A_p = 140 \cdot 19 = 2660 \text{ mm}^2$$

$$E_p = 190000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Penetración de cuña } (a) = 5 \text{ mm}$$

Al existir penetración en cuña se va a optar por tesar hasta un 85% de  $f_{pmax,k}$ , lo que supone  $P_0 = 0.85 \cdot 1860 \cdot 2660 / 1000 = 4205 \text{ kN}$ .

Las pérdidas por rozamiento se calculan aplicando la formulación 4.1 y 4.2. Para la sección 2:

$$\alpha_2 = \frac{2 \cdot 0.6}{11.25} = 0.107 \text{ rad}$$

$$\mu\alpha + kx = 0.21 \cdot 0.107 + 0.00126 \cdot 11.25 = 0.03658$$

$$\Delta P_1 = P_0 \left[ 1 - e^{-(\mu\alpha + kx)} \right] = 151.02 \text{ kN}$$

Para localizar las siguientes secciones se tiene en cuenta que los puntos de inflexión (secciones 3, 5 y 7) están alineados con los puntos de las secciones adyacentes (ecuación 4.3). Para las 8 secciones señaladas en la figura 4.13 se puede confeccionar la siguiente tabla:

Tabla 4.4. Pérdidas de rozamiento. Valores acumulados.

SECCIONES	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0.0	0.107	0.267	0.667	0.843	1.019	1.195	1.371
$\mu\alpha + kx$	0	0.03658	0.08435	0.17150	0.21161	0.26117	0.31073	0.35084
$\Delta P_1$	0	151.02	340.14	662.71	801.98	966.52	1123.11	1244.27

El valor de  $P_0 - \Delta P_1$  se ha representado en la figura 4.14.

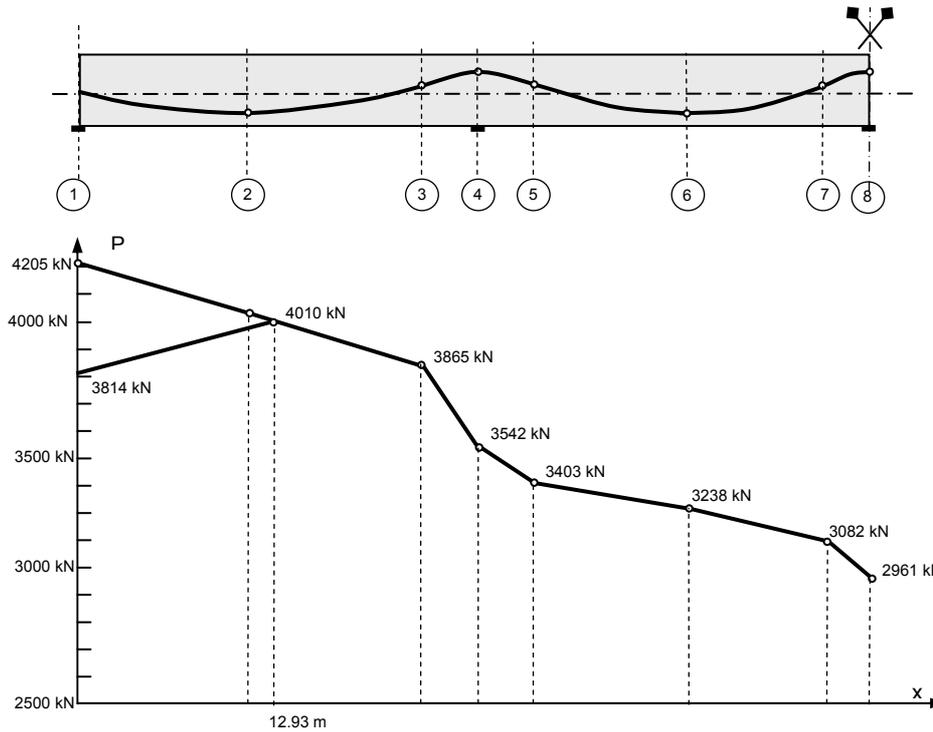


Figura 4.14. Variación de la fuerza de pretensado

Para determinar la longitud de influencia de la pérdida por penetración de cuña (a partir de la ecuación 4.6) es necesario conocer el valor de  $p$  (rozamiento por unidad de longitud), que se puede obtener entre las secciones 1 y 3 como:

$$p = \frac{340140}{2 \cdot 11250} = 15.12 \text{ N/mm}$$

y, por lo tanto, el valor de  $X$  será:

$$X = \sqrt{\frac{a E_p A_p}{p}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 190000 \cdot 2660}{15.12}} = 12928 \text{ mm} = 12.93 \text{ m}$$

A partir de la segunda ecuación 4.4 se puede determinar el valor de la pérdida por penetración de cuña:

$$\Delta P_2 = 2 \cdot p \cdot X = 2 \cdot 15.12 \cdot 12928 = 390943 \text{ N} = 390.94 \text{ kN}$$

*Hernández-Gil*

Calcular el alargamiento que va a experimentar el tendón durante la fase de tesado es una buena manera de comprobar si el proceso de tesado ha sido tal y como había sido planteado. Suponiendo que la fuerza de pretensado varía linealmente entre los extremos de cada parábola y que se mide después de la penetración en cuña, el valor de la fuerza media de pretensado será:

$$P_{media} = \frac{1}{50} \left[ \frac{4010 + 3814}{2} \cdot 12.93 + \frac{4010 + 3865}{2} \cdot (2 \cdot 11.25 - 12.93) + \frac{3865 + 3542}{2} \cdot 2.5 + \frac{3542 + 3403}{2} \cdot 2.5 + \frac{3403 + 3238}{2} \cdot 10 + \frac{3238 + 3082}{2} \cdot 10 + \frac{3082 + 2961}{2} \cdot 2.5 \right] = 3571.3 \text{ kN}$$

y, por tanto, el alargamiento experimentado por el tendón durante el tesado debe de ser de:

$$\Delta L = \frac{50000 \cdot 3571300}{190000 \cdot 2660} = 353.3 \text{ mm}$$

## 4.5. PÉRDIDAS POR ACORTAMIENTO ELÁSTICO

En elementos pretesos se procede a la fase de destesado cuando el cable está tesado y el hormigón endurecido y carente de tensiones. En esta fase se transmiten las tensiones al hormigón. Estas tensiones provocan un acortamiento del elemento estructural debido a que la fuerza de tesado comprime el hormigón (figuras 4.15 y 4.16). A su vez, el acortamiento de la viga de hormigón afecta al tendón ya que éste experimenta una disminución de su longitud, lo que produce una nueva pérdida en la fuerza de tesado,  $\Delta P_3$ , denominada pérdida por acortamiento elástico.

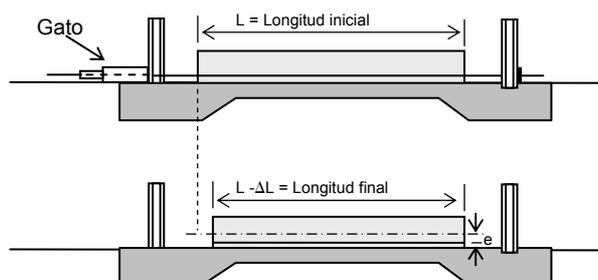


Figura 4.15. Pérdida por acortamiento elástico

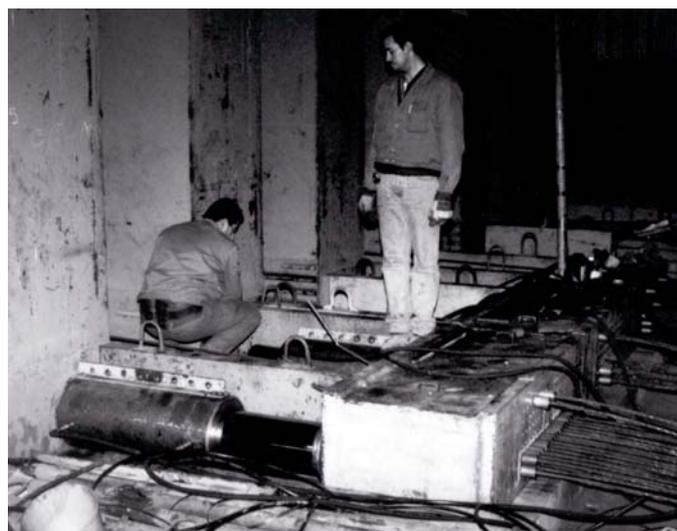


Figura 4.16. Proceso de destesado de la armadura activa en vigas pretensas

Como hipótesis se admite que la deformación a la altura del tendón es la misma en el hormigón que en el acero ya que ambos se encuentran en la misma fibra y, por la hipótesis de las secciones planas, ambos tienen la misma deformación. Si la tensión en

el hormigón a la altura del c.d.g. de la armadura activa es  $\sigma_{cp}$ , para que ambas deformaciones sean iguales se ha de verificar que:

$$\frac{\sigma_{cp}}{E_{cm}} = \frac{\Delta\sigma_p}{E_p} \Rightarrow \Delta\sigma_p = m \sigma_{cp} \quad \text{con} \quad m = \frac{E_p}{E_{cm}} \quad (4.7)$$

En el caso de pretensado posteso, si la tensión se transmite a la vez en todos los tendones no se produce pérdida por acortamiento elástico. En este tipo de pretensado la pérdida por acortamiento elástico aparece en el caso de que se tensen los tendones sucesivamente. Si hubiera  $n$  tesadas de  $n$  tendones de la misma sección, en la última tesada (que introduce una tensión en el hormigón de valor  $\sigma_{cp}/n$ ) la pérdida en el tendón tesado sería nula pero en las otras  $(n-1)$  tesadas anteriores provocaría una pérdida de valor

$$m \frac{\sigma_{cp}}{n} \frac{A_p}{n}$$

en cada uno de los tendones, donde  $A_p$  es el área de toda la armadura activa.

Sumadas las pérdidas acumuladas en cada tesada sobre los tendones anteriores, tenemos que la pérdida total es:

$$\Delta P_3 = m \sigma_{cp} \frac{A_p}{2n} (n-1) \quad (4.8)$$

Cuando se procede a la fase de destesado de la armadura activa la viga se ve sometida a un momento de valor  $P \cdot e$ , siendo  $P$  la fuerza de pretensado y  $e$  la excentricidad. Este momento es negativo y tiende a provocar una contraflecha que se ve compensada por el peso propio de la viga.

La ecuación 4.7 relaciona la pérdida de la tensión de pretensado con la tensión en el hormigón, ésta última será distinta según el valor del momento compensado del peso propio. En la práctica se considera como pérdida de acortamiento elástico al valor medio entre los valores máximos y mínimos, si bien puede haber casos en que esto no sea aceptable.

### Ejemplo de acortamiento elástico en una viga simplemente apoyada pretesa

Consideremos la viga pretensada pretesa de la figura 4.17 de  $20 \text{ m}$  de longitud, fabricada con hormigón *HP-45* y acero *Y-1860-S7*. En bancada se le ha transmitido una tensión inicial de pretensado del 75% de  $f_{m\acute{a}x}$ . Las características mecánicas son:  $A_c = 4.5 \times 10^5 \text{ mm}^2$ ;  $A_p = 2850 \text{ mm}^2$ ;  $I_c = 9.4 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ . El peso propio por unidad de longitud es de  $10 \text{ kN/m}$ .

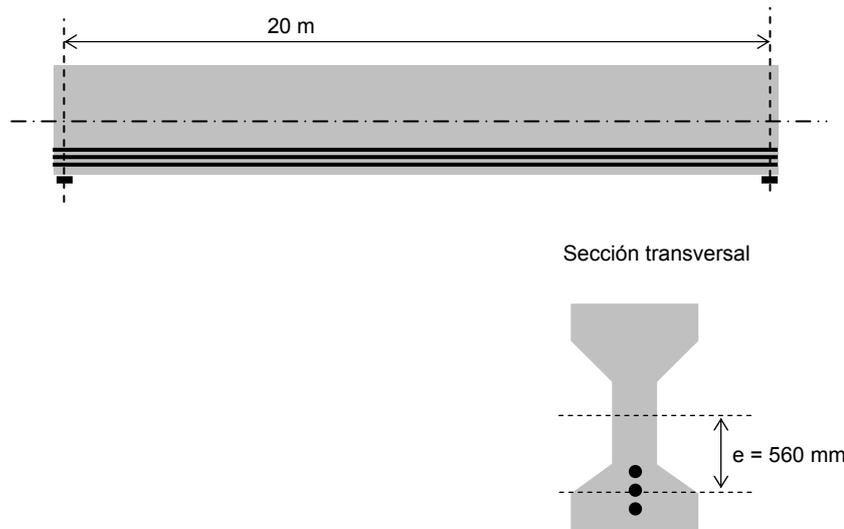


Figura 4.17. Viga pretesa de 20 m de luz

Para calcular su acortamiento elástico se va a tener en cuenta que:

- Lo que acorta el acero es igual que lo que acorta el hormigón en la misma fibra. Debido a ese acortamiento la fuerza de pretensado, que inicialmente era  $P_0$ , pasa a ser  $P_e = A_p(\sigma_p - \Delta\sigma_p)$ .
- Cuando se liberan los cables y la viga se somete a la fuerza de pretensado, ésta tiende a levantarse y a vencer su peso propio.

Vamos a suponer que todos los tendones están situados a  $e = 560 \text{ mm}$  (en el caso que éstos estuvieran muy separados entre sí esta hipótesis no sería válida).

El valor del momento máximo debido al peso propio es  $M_0$

$$M_0 = \frac{10 \cdot 20^2}{8} = 500 \text{ kN} \cdot \text{m} = 5 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

y la tensión del hormigón a la altura del c.d.g. de la armadura activa, en la sección situada en el centro de luz es<sup>4</sup>:

<sup>4</sup> En la expresión de la tensión  $\sigma_{cp}$  se ha considerado el momento del peso propio sobre la sección bruta. Esto no sería real puesto que el peso propio que actúa al descimbrar lo hace sobre la sección homogeneizada, no obstante la diferencia es pequeña.

$$\sigma_{cp} = \frac{P_e}{A_c} + \frac{P_e \cdot e \cdot e}{I_c} - \frac{M_0 \cdot e}{I_c}$$

Introduciendo la ecuación 4.7 en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que  $P_e = A_p(\sigma_{p0} - \Delta\sigma_p)$ , se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\sigma_p}{m} = \frac{P_e}{A_c} + \frac{P_e \cdot e \cdot e}{I_c} - \frac{M_0 \cdot e}{I_c} \\ P_e = A_p \cdot (\sigma_{p0} - \Delta\sigma_p) \end{cases}$$

donde  $m = \frac{190000}{10000 \sqrt[3]{45 + 8}} = 5.058$  y  $\sigma_{p0} = 0.75 \cdot 1860 = 1395 \text{ N/mm}^2$ .

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene que  $\Delta\sigma_p = 89.54 \text{ N/mm}^2$  y  $P_e = 3.72 \times 10^6 \text{ N}$ .

En los extremos el momento debido al peso propio es cero y el valor de  $\Delta\sigma_p$  es  $103.49 \text{ N/mm}^2$ . Por tanto, la pérdida media en la armadura activa será:

$$\Delta\sigma_p = \frac{89.54 + 103.49}{2} = 96.52 \text{ N/mm}^2$$

lo que supone una pérdida del 6.92%.

Consideremos ahora que el trazado en lugar de ser recto es parabólico. Se ha empleado la técnica de postesado y la viga ha sido tesada en 3 veces.

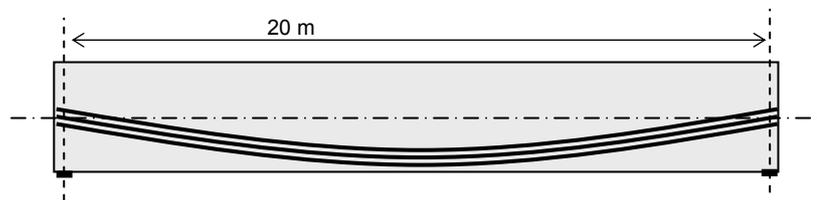


Figura 4.18. Viga postesada

La expresión de la tensión del hormigón a la altura del c.d.g. de la armadura activa, junto con la ecuación 4.8 forman el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sigma_{cp} = \frac{P_0 - \Delta P_3}{A_c} + \frac{(P_0 - \Delta P_3) \cdot e \cdot e}{I_c} - \frac{M_0 \cdot e}{I_c} \\ \Delta P_3 = m \cdot \sigma_{cp} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot A_p \end{cases}$$

Puesto que  $n=3$ , del sistema de ecuaciones anteriores se obtiene que  $\sigma_{cp}=18.62$   $N/mm^2$ . Si  $M_0=0$  y  $e=0$  (extremo de la viga) la tensión correspondiente sería:  $\sigma_{cp}=21.52$   $N/mm^2$ .

La pérdida de tensión media en la armadura de pretensado se puede obtener como:

$$\Delta \sigma_p = m \sigma_{cp} \frac{n-1}{2n} = 5.058 \cdot \frac{18.62 + 21.52}{2} \cdot \frac{2}{6} = 33.83 \text{ N/mm}^2$$

lo que representa una pérdida del 2.42%.

#### 4.6. PÉRDIDAS DIFERIDAS

Una vez anclada la armadura activa y después de haberse producido las pérdidas instantáneas, aparecen unas nuevas pérdidas a lo largo del tiempo. Estas pérdidas se deben esencialmente al acortamiento de hormigón (retracción y fluencia) y a la relajación del acero de las armaduras activas.

Los fenómenos de fluencia y de relajación dependen a su vez del valor de las pérdidas diferidas, por lo que sería necesario realizar un proceso iterativo. De forma aproximada, las pérdidas diferidas se pueden calcular mediante la expresión<sup>5</sup>:

$$\Delta P_{dif} = \frac{m\varphi(t, t_0)\sigma_{cp} + E_p \varepsilon_{cs}(t, t_0) + 0.80\Delta\sigma_{pr}}{1 + m \frac{A_p}{A_c} \left(1 + \frac{A_c y_p^2}{I_c}\right) (1 + \chi\varphi(t, t_0))} A_p$$

donde:

$y_p$	Distancia del centro de gravedad de las armaduras activas al centro de gravedad de la sección.
$m$	Coefficiente de equivalencia = $E_p/E_c$ .
$\varphi(t, t_0)$	Coefficiente de fluencia para $t_0$ como edad de puesta en carga.
$\varepsilon_{cs}$	Retracción tras la operación de tesado.
$\sigma_{cp}$	Tensión en el hormigón en la fibra correspondiente al c.d.g. de las armaduras activas debida a la acción de pretensado, al peso propio y a la carga muerta.

<sup>5</sup> Propuesta por la EHE.

*Hernández-Gil*

$\Delta\sigma_{pr}$	Pérdida por relajación a longitud constante = $\rho_f P_{ki}/A_p$ .
$\chi$	Coefficiente de envejecimiento. Para evaluaciones a tiempo infinito se puede tomar 0.8.
$A_c, I_c$	Área y momento de inercia de la sección de hormigón, respectivamente

**Ejercicios propuestos**

- 4.1. Justificar razonadamente (sin recurrir a extender al límite ningún tipo de formulación) que la pérdida de tensión por acortamiento elástico puede considerarse como  $m\sigma_{cp}/2$ .
- 4.2. Explicar qué ventajas tiene el planteamiento seguido en este capítulo para desarrollar las parábolas encadenadas frente al expuesto por la EHE. ¿Cuál crees que es más general?
- 4.3. Calcula las pérdidas diferidas en el problema de pérdidas por rozamiento. Elabora un gráfico similar al de la figura 4.14 considerando ambos tipos de pérdidas.

**Referencias**

EHE. Instrucción de Hormigón Estructural (borrador 2007). Secretaría General Técnica. Ministerio de Fomento. Madrid.

Eurocode 2 (2002): Design of concrete structures- Part 1: General rules and rules for buildings prEN 1992-1-1. European Committee for Standardization. Brussels.

Collins M.P. y Mitchell D. (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice-Hall. New Jersey.

Hurst M.K. (1998). *Prestressed Concrete Design*. 2ª edición. E & FN Spon. Londres y Nueva York.

Leet K. y Bernal D. (1997). *Reinforced Concrete Design*. McGraw-Hill.



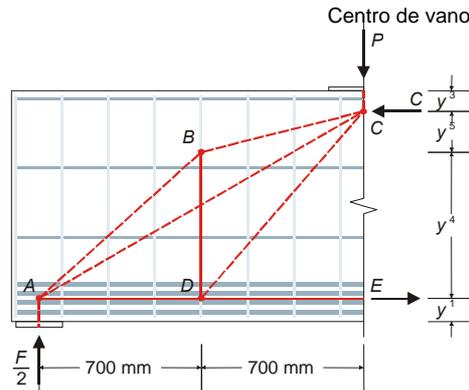


---

CAPÍTULO V

---

MÉTODO DE LAS BIELAS Y TIRANTES



Modelo de bielas y tirantes.

5.1. REGIONES B Y D

La *hipótesis de las secciones planas*, o hipótesis de Bernoulli, establece que las secciones planas antes de la deformación permanecen planas después de ésta. Esta hipótesis es fundamental en el estudio de los elementos de una estructura ya que conocida la deformación en dos puntos de la sección transversal se puede calcular la deformación en todos los puntos de ésta –en el caso de trabajar en tres dimensiones sería necesario conocer la deformación en tres puntos-. Estos dos puntos de la sección transversal pueden ser los correspondientes a las deformaciones máxima y mínima, respectivamente. Ver Figura 5.1.

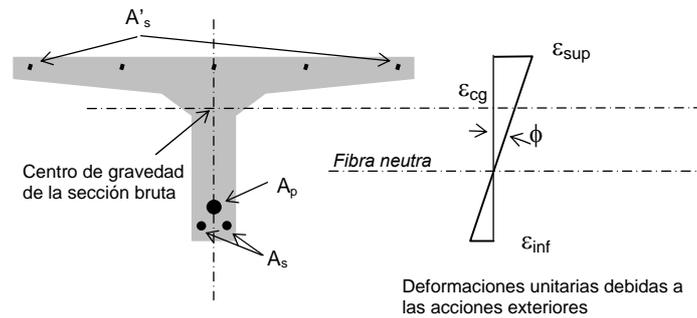


Figura 5.1. Deformaciones unitarias en la sección transversal según la hipótesis de las secciones planas

Sin embargo, no siempre es posible aplicar la hipótesis de las secciones planas, ya que existen zonas en las que, bien por cambios bruscos de geometría o bien por la existencia de cargas concentradas, ninguna sección plana permanece plana después de la deformación.

En estructuras de hormigón es necesario distinguir entre regiones B (de Bernoulli) y regiones D (de discontinuidad). Las regiones B son partes de la estructura en las que se puede aplicar la hipótesis de las secciones planas. Las regiones D son aquellas en las que no es válida dicha hipótesis debido a la existencia de una distribución de deformaciones compleja y claramente no lineal.

Las figuras 5.2 y 5.3 son ejemplos de la división entre regiones B y D en estructuras de edificación y civiles, respectivamente. Las regiones D aparecen dibujadas en tono oscuro y las regiones B en tono claro. Los valores  $h_1$ ,  $h_2$ , ... corresponden a los cantos de los elementos estructurales y  $b_1$  y  $b_2$  a los anchos de alas.

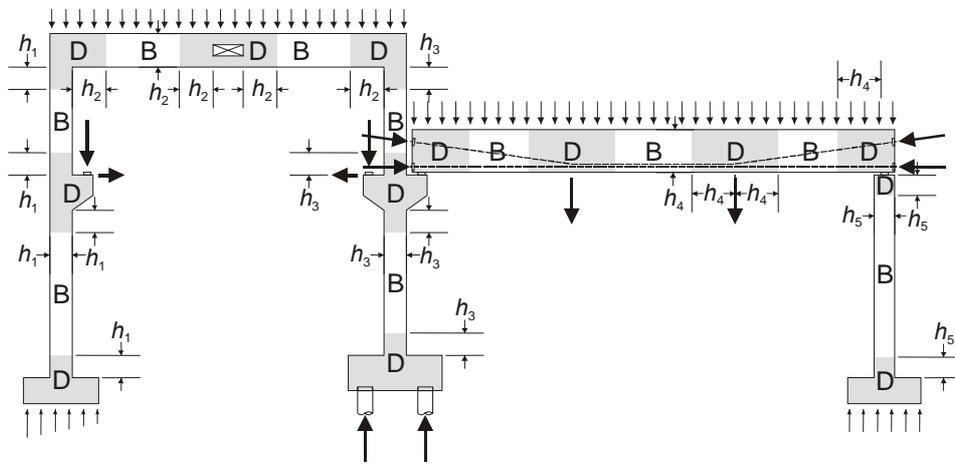


Figura 5.2. División entre zonas B y D en una estructura de edificación

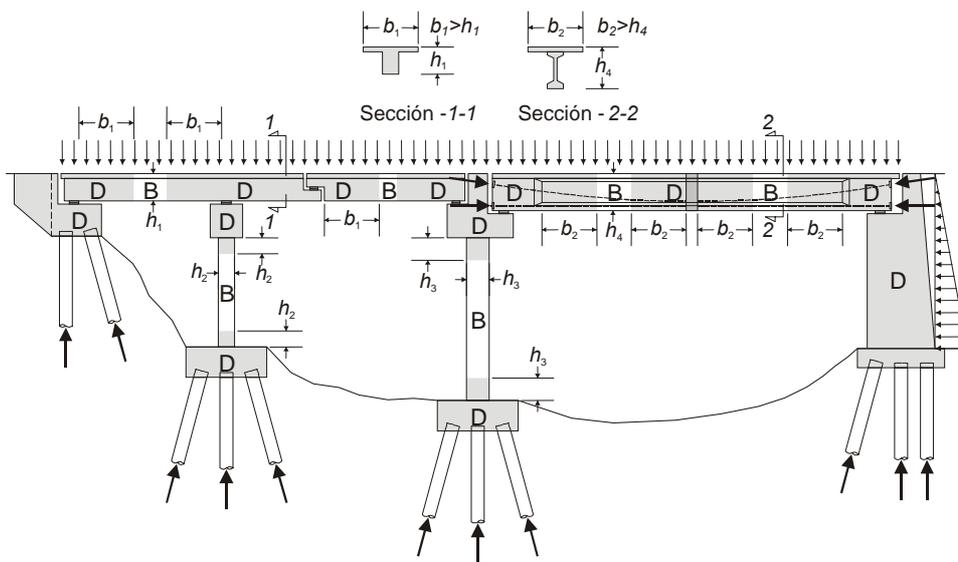


Figura 5.3. División entre zonas B y D en una estructura de puente

El diseño de las regiones B se fundamenta en la analogía de la viga para el cálculo de la armadura longitudinal y en la analogía de la celosía para el diseño a cortante. Estas teorías se tratarán en capítulos siguientes. Las regiones D, que se presentan en elementos tales como las vigas de gran canto, apoyos, uniones viga-columna, encepados, zapatas, etc., se diseñan mediante los métodos de bielas y tirantes.

## 5.2. MODELOS DE BIELAS Y TIRANTES

El método de bielas y tirantes consiste en la modelización de la región D mediante una estructura de barras articuladas –plana o espacial-. Esta estructura articulada estará compuesta por nudos, barras a compresión o *bielas* y barras a tracción o *tirantes*. Las bielas están constituidas por el hormigón existente en la región D y los tirantes por la armadura de aportación.

Las zonas discontinuas se pueden estudiar también mediante métodos de análisis elásticos, especialmente mediante técnicas con elementos finitos, a partir de los cuales se puede calcular la distribución de tensiones generada por las cargas concentradas. Estos modelos tratan al hormigón como un medio continuo y, a partir del estado de tensiones, se decide la posición de la armadura. El objeto de la armadura es absorber las tensiones de tracción –que no pueden ser resistidas por el hormigón-. Son numerosos los estudios existentes en relación a la distribución de tensiones bajo cargas concentradas. Hay que tener en cuenta que esta forma de proceder es precisa siempre que nos mantengamos en la fase de pre-fisuración. Por el contrario, en las fases de post-fisuración y cedencia los modelos de bielas y tirantes son más fiables. De hecho, cuando la fisuración es importante las direcciones principales de compresión tienden a convertirse en líneas rectas, lo que hace que el modelo de bielas y tirantes sea el más adecuado.

En la figura 5.4 se muestran algunos modelos de bielas y tirantes para regiones D en dos dimensiones. La figura 5.5 corresponde a un modelo espacial. Las líneas discontinuas constituyen los elementos a compresión (bielas) y las líneas continuas representan los elementos a tracción (tirantes).

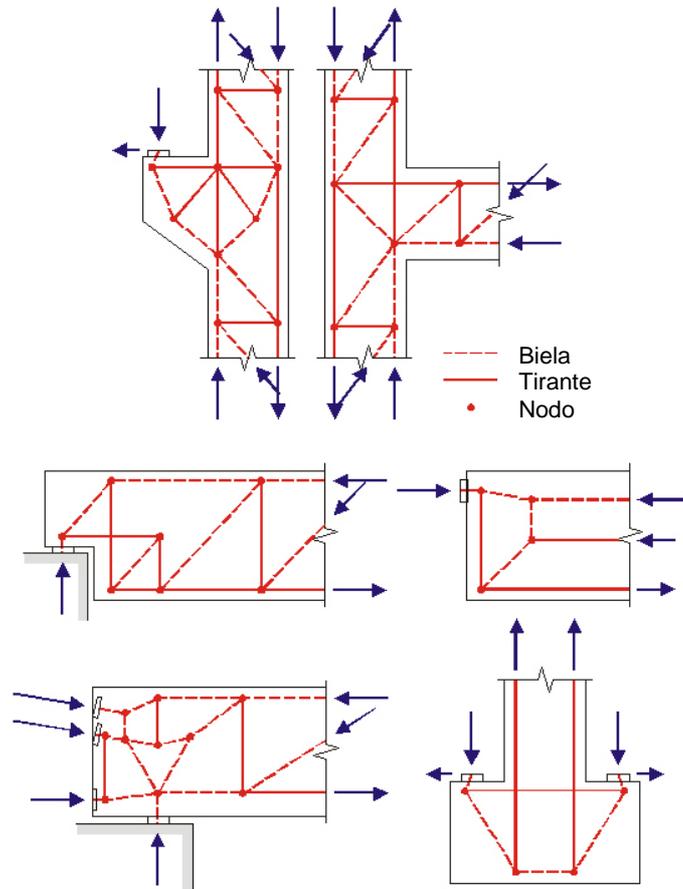


Figura 5.4. Modelos planos de bielas y tirantes

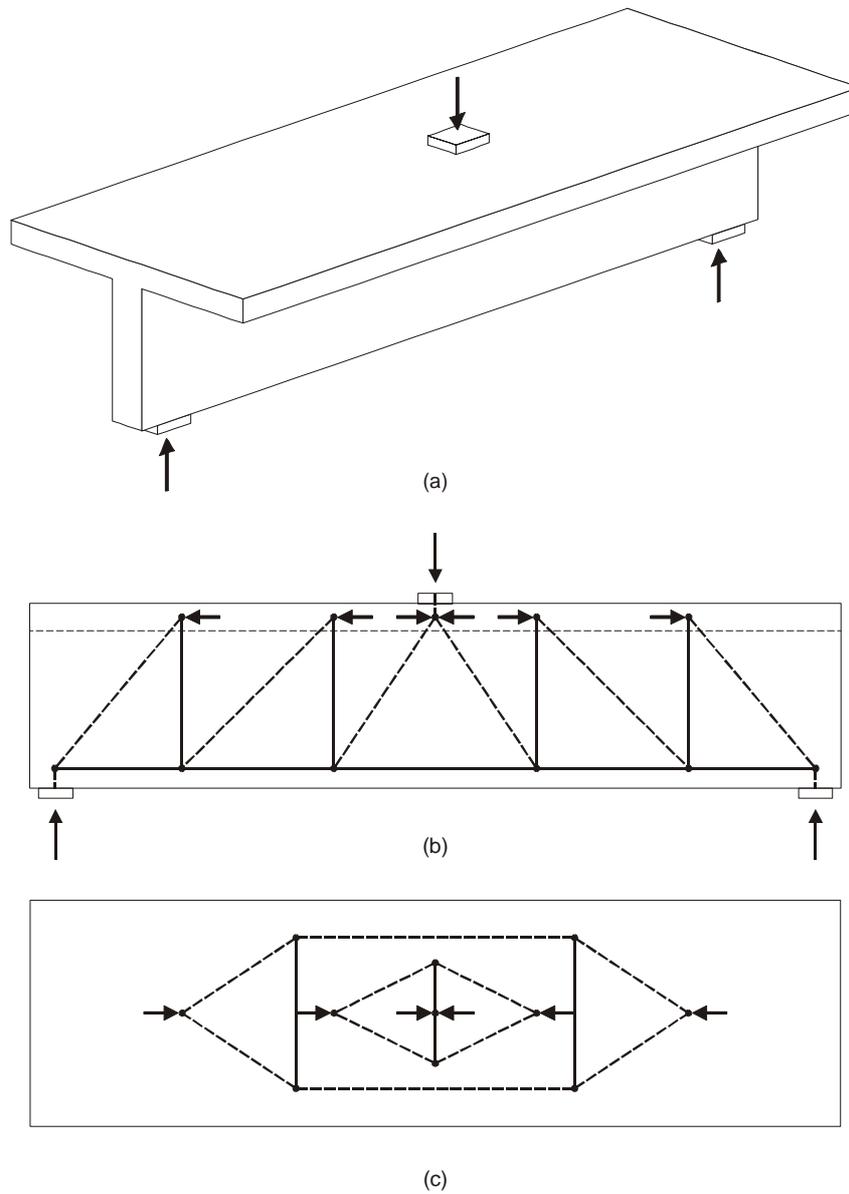


Figura 5.5. Ejemplo de modelo espacial de bielas y tirantes. a) perspectiva de la viga b) modelo de bielas y tirantes en el alma de la viga c) modelo de bielas y tirantes en el ala de la viga.

5.3. BIELAS Y TIRANTES

Las bielas son elementos a compresión y representan campos de tensiones en el hormigón de la región D. La tensión principal de compresión está situada en la biela del modelo. La forma del campo de compresiones en la biela, siguiendo un modelo en dos dimensiones, puede ser prismático, en forma de uso o en forma de abanico tal y como se puede ver en las figuras 5.6a, 5.6b y 5.6c respectivamente. Las bielas también pueden ser reforzadas mediante armadura, denominándose en este caso bielas armadas. En la figura 5.7 se representan distintos tipos de bielas en una región D típica.

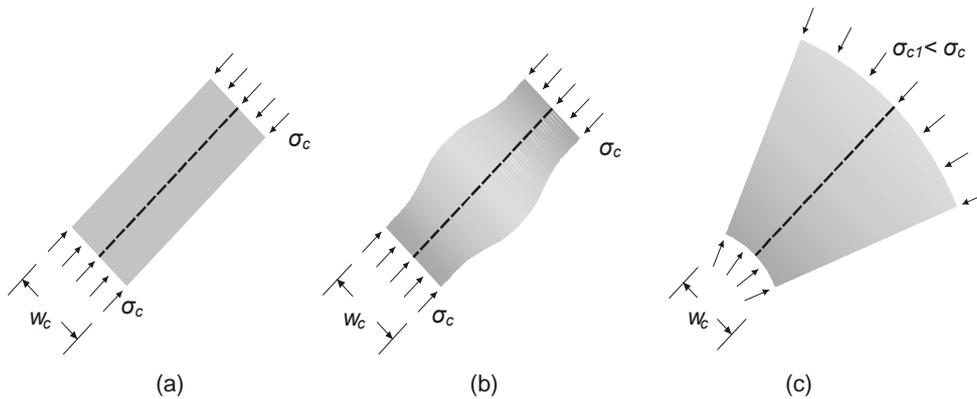


Figura 5.6. Tipos básicos de bielas en dos dimensiones. a) Prismático, b) En forma de uso, c) En abanico.

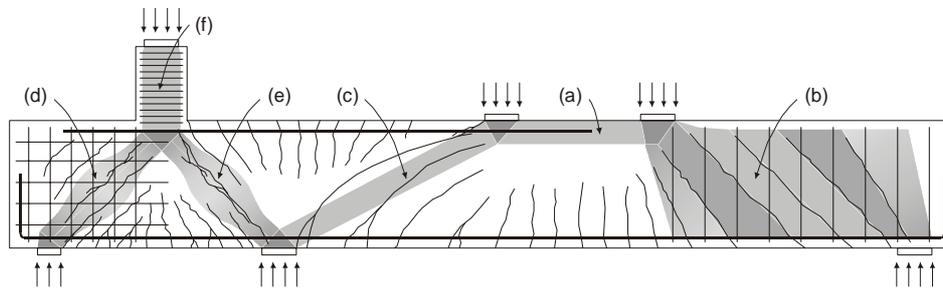


Figura 5.7. Tipos de biela en una región D: a) Biela prismática en zona no fisurada b) Biela prismática en zona fisurada y paralela a las fisuras c) Biela prismática en zona fisurada y no paralela a las fisuras d) Bielas en forma de uso con armadura para control de fisuración e) Biela en forma de uso sin armadura de fisuración f) Biela de hormigón confinado.

Los tirantes son los elementos traccionados del modelo de bielas y tirantes. Los tirantes representan generalmente a barras de armadura pasiva aunque ocasionalmente pueden estar compuestos de armadura activa o campos de compresiones de hormigón cuya dirección principal de tracción vaya en la dirección del tirante.

Los nodos representan las zonas de la región D donde las fuerzas entre bielas y tirantes se equilibran y, por tanto, los nodos están sometidos a fuerzas multidireccionales. Los nodos se clasifican atendiendo a los tipos de fuerzas que conectan. En la figura 5.8 se representan los tipos de nodos más comunes en dos dimensiones, C representa compresión y T tracción.

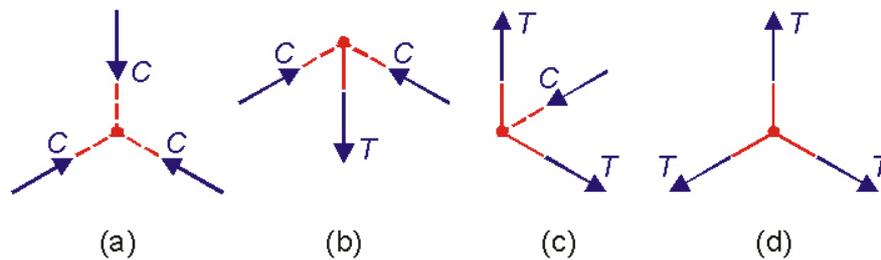


Figura 5.8. Nodos básicos. a) CCC, b) CCT, c) CTT y d) TTT

#### 5.4. UNICIDAD DE LOS MODELOS DE BIELAS Y TIRANTES

El modelo de bielas y tirantes debe de estar en equilibrio tanto externo (fuerzas aplicadas y reacciones) como interno (en cada uno de los nodos de la celosía que compone el modelo). Para conseguir este equilibrio los tirantes se dimensionarán mediante armadura pasiva o activa, también se dimensionará el ancho efectivo de cada biela y el nudo deberá dimensionarse para garantizar una resistencia suficiente. Es interesante que el modelo interno de barras del método de bielas corresponda a una estructura isostática, de tal forma que sólo sea necesario verificar el equilibrio entre los elementos de la celosía y criterios de resistencia última, no siendo necesario el cálculo de deformaciones.

El método de las bielas permite resolver la región D mediante distintos modelos, todos ellos admisibles, un ejemplo de esto se puede ver en la figura 5.9. En el ejemplo de la figura 5.9 se observa que existe una solución preferente: debido a la carga aplicada, la parte superior de la viga es probable que desarrolle tensiones de tracción y, por ello, el modelo con un tirante horizontal (figura 5.9a) es preferible al modelo de la figura 5.9b ya que éste último sólo resiste la tracción mediante barras inclinadas y, por tanto, desarrollará mayores deformaciones.

Es aconsejable optar por modelos que tengan tirantes de mínima longitud ya que en éstos las deformaciones serán menores. Además, con objeto de evitar grandes deformaciones, cuando se emplee el modelo de bielas y tirantes la deformación de éstos últimos se limitará al 2%, lo que para el acero supone una  $f_{yd}$  máxima de 400 MPa. Una forma de obtener un modelo consiste en encajar las bielas y tirantes una vez conocida la distribución de tensiones a partir de un análisis lineal. No obstante es bueno darse cuenta que al poner nosotros los tirantes obligamos a la pieza a trabajar de una forma determinada, y posiblemente no coincidente con la distribución de tensiones obtenida mediante un análisis lineal.

Es conveniente que el ángulo que forman las bielas y los tirantes que confluyen en un nudo sea lo suficientemente grande como para que no se produzca incompatibilidad de deformaciones. Por tanto, se evitarán los ángulos pequeños.

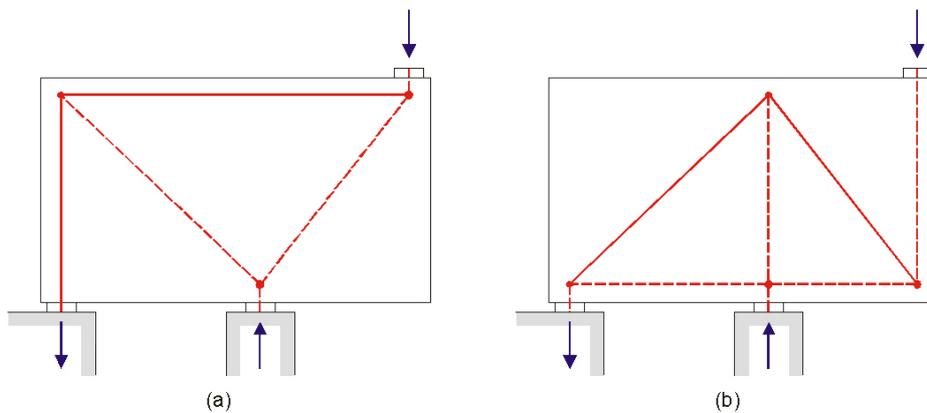


Figura 5.9. Dos modelos biela-tirante estáticamente admisibles para una viga de gran canto en voladizo bajo una carga vertical. a) modelo con menor deformación, b) modelo con mayor deformación.

### 5.5. PROCESO DE DISEÑO

El proceso de diseño para aplicar el método de bielas y tirantes conlleva cinco pasos, que se describen a continuación. Estos pasos se muestran en la figura 5.10, que corresponde a un ejemplo de diseño de una viga con apoyo a media madera.

- PASO 1. Definir las fronteras de la región D y determinar las fuerzas del contorno (fuerzas de diseño) que provienen de las acciones exteriores y de las fuerzas internas que actúan en las secciones del contorno de la región D.

- PASO 2. Insertar un modelo de celosía para la región D, determinando las fuerzas equivalentes del contorno y resolviendo la celosía.
- PASO 3. Seleccionar la armadura activa o pasiva necesaria en los tirantes y comprobar que esta armadura está convenientemente anclada en los nodos.
- PASO 4. Evaluar las dimensiones de las bielas y de los nodos de tal forma que la capacidad de todos ellos (tanto bielas como nodos) sea suficiente para soportar la fuerza de la celosía.
- PASO 5. Proporcionar suficiente armadura para asegurar el comportamiento dúctil de la región D.

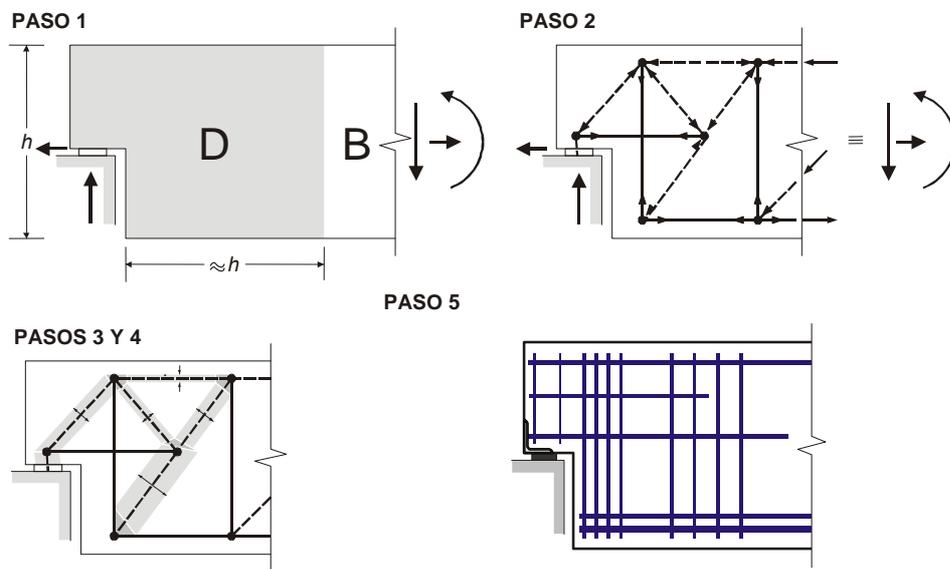


Figura 5.10. Pasos a seguir en el proceso de diseño.

**Ejemplo en hormigón armado**

La figura 5.11 corresponde a un apoyo a “media madera” de una viga de  $0.75 \times 0.40$  m. Este apoyo debe de transmitir una reacción vertical de  $250$  kN y reacción horizontal de  $50$  kN, ambas mayoradas. La reacción se supone que actúa a  $50$  mm del final de la viga. El hormigón de la viga es del tipo HA-35 y el acero B-400-S. Para la resolución se aplicará la norma española EHE.

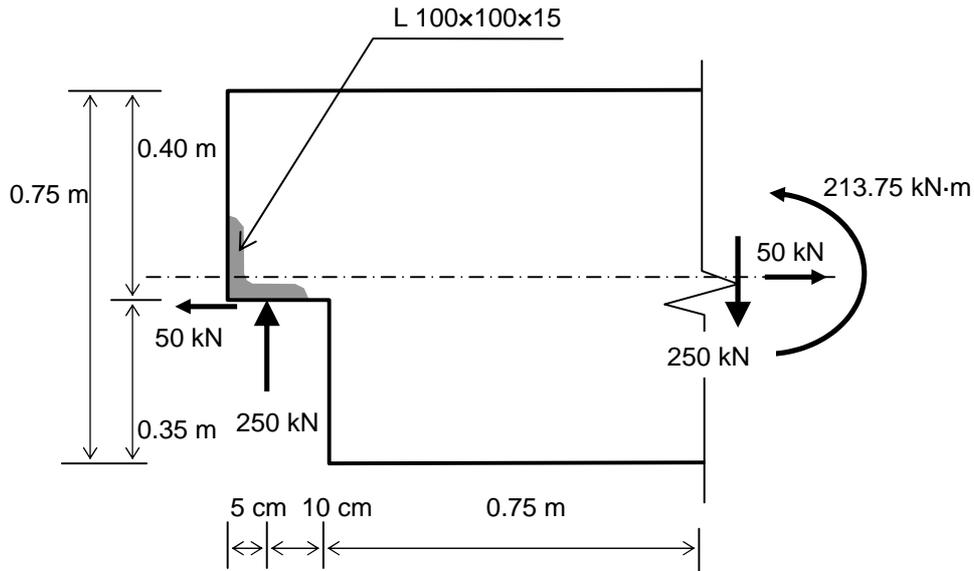


Figura 5.11. Apoyo a media madera.

1. Definir la región D y calcular los esfuerzos de continuidad

La región D se extiende un canto a partir de la discontinuidad así que tendrá  $(15+75)=90$  cm. Las fuerzas de la derecha corresponden a un momento de  $250(0.90-0.05)+50(0.40-0.75/2)=213.75$  kN·m, a una fuerza horizontal de tracción de  $50$  kN y a un cortante de  $250$  kN. Todos ellos representados en la figura 5.11.

2. Dimensiones del apoyo

Se ha elegido para el apoyo un angular de  $100 \times 100 \times 15$ . La superficie del apoyo será de  $400 \times 100 = 40000$  mm<sup>2</sup> y, por tanto, la tensión transmitida al hormigón es de:

$$\frac{V_d}{A_c} = \frac{250000}{40000} = 6.25 \text{ N/mm}^2$$

menor que  $0.85f_{cd}=0.85 \cdot 35/1.5=19.83 \text{ N/mm}^2$ , luego la elección de las dimensiones del apoyo han sido adecuadas.

### 3. Elección del modelo

La geometría del modelo ha sido representada en la figura 5.12. La altura a la que han de colocarse las barras BE y CF está relacionada con la situación del centro de gravedad de la zona de compresiones, en el caso de la barra BE, y con el centro de gravedad de la armadura de tracción, en el caso de la barra CF. Tomaremos 8 cm a partir de la parte superior de la viga para la barra BE y 8 cm a partir de la parte inferior de la viga para la barra CF. Se ha tomado 45° como el ángulo de las barras CD y DE con la horizontal. La barra BC se ha separado 15 cm respecto a la media madera.

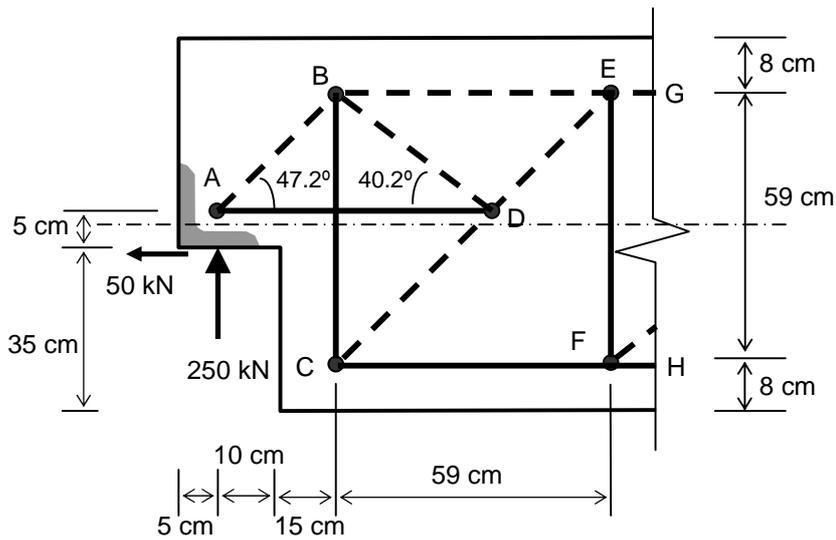


Figura 5.12. Modelo de bielas y tirantes

4. Cálculo de la estructura de barras articuladas

En la tabla siguiente se muestran los resultados de la resolución de la estructura articulada. Positivo corresponde a compresión y negativo a tracción.

Barra	AB	AD	BC	BD	BE	CD	CF	DE	EF
Axil (kN)	340.7	-281.5	-378.9	199.8	78.9	535.8	-378.9	353.4	-250

5. Comprobación de las bielas

Para comprobar las bielas se calculará el ancho de éstas y se comprobará si caben en el espacio disponible. En el caso de almas de vigas sometidas a cortante, las bielas tienen una resistencia de  $f_{1cd}=0.60f_{cd}=0.6\cdot35/1.5=14\text{ N/mm}^2$ . Si el ancho de la viga es de 400 mm, el ancho de cada biela viene dado en la tabla siguiente:

Barra	AB	BD	BE	CD	DE
Axil (kN)	340.7	199.8	78.9	535.8	353.4
Anchura (mm)	61	36	14	96	63

Representadas las bielas y sus anchos correspondientes en la viga (figura 5.13) se puede concluir que éstos son aceptables.

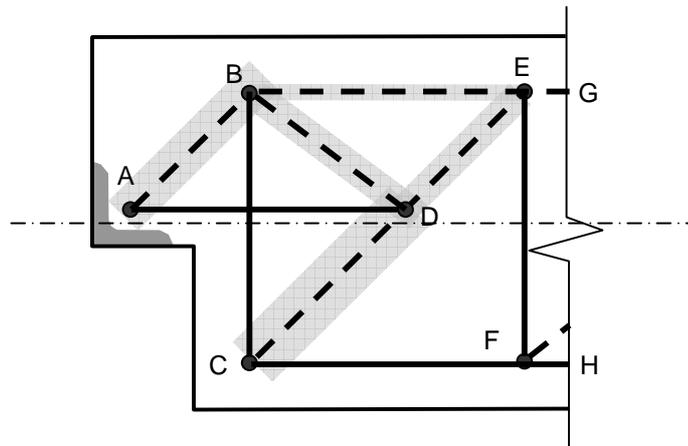


Figura. 5.13. Dimensión de las bielas

6. Diseño de los tirantes

La armadura necesaria en los tirantes se dimensiona a tracción  $A_{s,necesaria} = N_d / f_{yd}$ . Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

Barra	AD	BC	CF	EF
Axil (kN)	-281.5	-378.9	-378.9	-250
Armadura (mm <sup>2</sup> )	810	1089	1089	719
Armadura (mm <sup>2</sup> )	3Ø20 (942)	5cØ12 (1130)	4Ø20 (1257)	4cØ12 (905)

7. Capacidad resistente de los nudos y anclajes

Todos los nudos tienen tirantes anclados y, por tanto, realizada la comprobación de bielas sólo es necesario dimensionar el anclado de los tirantes. El tirante soldado al angular, nudo A, requerirá un ancho efectivo de:

$$\frac{N_{AD}}{0.85f_{cd}b} = \frac{281500}{0.85 \cdot 35 / 1.5 \cdot 400} = 35 \text{ mm}$$

y puesto que el ancho de placa disponible es de  $100 \text{ mm}$ , resulta suficiente. Para el nudo D será necesario disponer de una longitud de anclaje de  $32 \text{ cm}$ .

$$L_{b,neta} = L_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = m \cdot \phi^2 \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = 9 \cdot 2^2 \frac{810}{942} = 31.4 \text{ cm.}$$

En el tirante CF, el nudo C necesita una longitud de anclaje de

$$L_{b,neta} = L_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = m \cdot \phi^2 \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = 9 \cdot 2^2 \frac{1089}{1257} = 31.19 \text{ cm}$$

Puesto que sólo hay disponible  $15 + \frac{9.6}{2} \sqrt{2} = 21.79 \text{ cm}$  será necesario añadir barras que absorban la diferencia y la transmitan a la armadura del tirante CF. La diferencia es de  $378.9 \text{ kN} - 378.9 \frac{21.79}{31.19} = 114.2 \text{ kN}$  por lo que el área necesaria será de  $114200 / (400 / 1.15) = 328 \text{ mm}^2$  que habrá de ser suministrada en armaduras cuya

longitud de anclaje sea menor de los  $21.79 \text{ cm}$  disponibles. Se dispondrán  $2\text{Ø}16$  en forma de  $U$  (cuya longitud de anclaje en  $U$  es de  $13 \text{ cm}$ ).

Los nudos B y D del tirante BD necesitan una longitud de anclaje de

$$L_{b, \text{neta}} = L_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s, \text{real}}} = m \cdot \phi^2 \cdot \frac{A_s}{A_{s, \text{real}}} = 9.1 \cdot 2^2 \frac{1089}{1130} = 8.74 \text{ cm}$$

dispone.

### 8. Otras consideraciones

Si el apoyo es tratado como ménsula corta, la EHE establece que además habrá que disponer armadura  $A_{se}$  con objeto de mejorar la fisuración y la ductilidad. Esta armadura estará compuesta por cercos horizontales que verifiquen:

$$A_{se} = \frac{0.20 \cdot F_{vd}}{f_{yd}} = \frac{0.2 \cdot 250000}{400 / 1.15} = 143.73 \text{ mm}^2$$

Se puede disponer  $1\text{cØ}10$  ó  $2\text{Ø}10$  en forma de  $U$ .

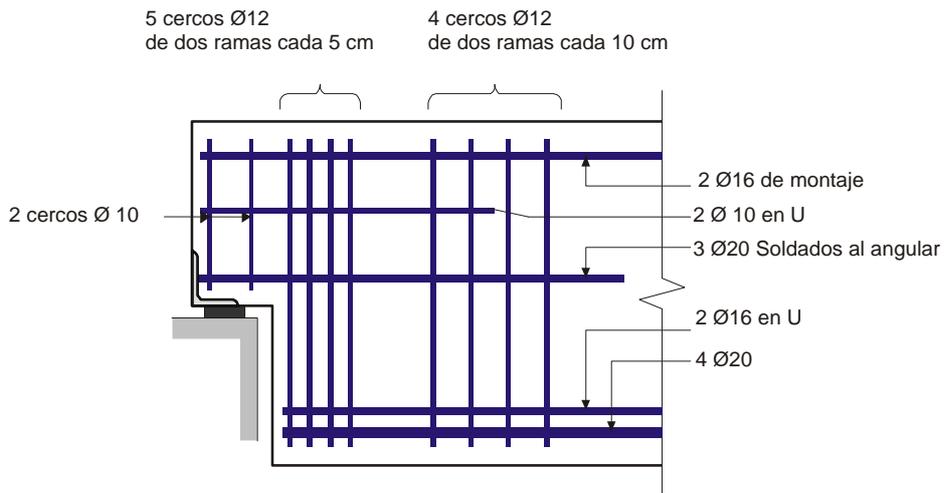


Figura 5.14. Armadura

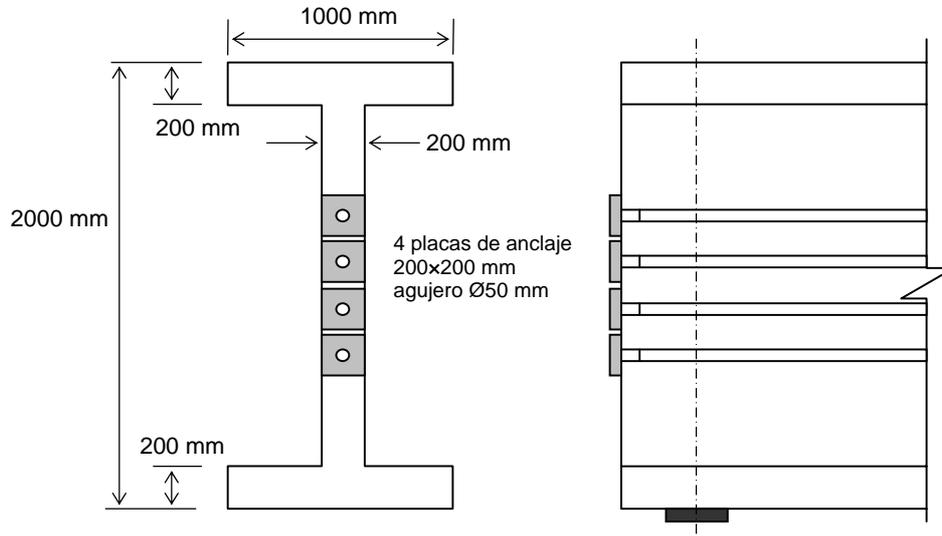
**Ejemplo en hormigón pretensado**

Figura 5.15. Zona de anclaje de una viga postesada.

En la figura 5.15 se ha representado la zona de anclaje de una viga postesada en doble T. Cada tendón contiene 4 cordones de 13mm de diámetro (área de 99 mm<sup>2</sup> cada uno) del tipo Y1860-S7 cuya tensión máxima es de 1860 MPa. Durante el tesado se ha alcanzado el 75% de su tensión máxima. La resistencia del hormigón durante el tesado es de 34 MPa. En este ejemplo se va a diseñar la armadura de la zona discontinua.

Calcularemos el armado de la zona como si pudiera desarrollarse toda la fuerza de los tendones.  $P_d = 4 \cdot 1860 \cdot 99 / 1000 = 737 \text{ kN}$ .

1. Definir la región D y calcular los esfuerzos de continuidad

Al final de la zona de discontinuidad la tensión en toda la viga será constante siendo el valor de la resultante sobre las alas y el alma de la viga:

$$R_{\text{alas}} = \frac{4 \cdot 737000}{2 \cdot 200 \cdot 1000 + 200 \cdot 1600} 200 \cdot 1000 = 819 \text{ kN}$$

$$R_{\text{alma}} = \frac{4 \cdot 737000}{2 \cdot 200 \cdot 1000 + 200 \cdot 1600} 200 \cdot 1600 = 2 \cdot 655 \text{ kN} = 1310 \text{ kN}$$

La resultante correspondiente a la acción de los tirantes en el lado izquierdo de la viga se puede representar mediante diversos sistemas de fuerzas, siempre que se verifique que son estáticamente equivalentes. De entre todos los posibles sistemas de fuerzas conviene adoptar el representado en la figura 5.16, para el cual las distancias al eje de las fuerzas son  $200\text{ mm}$  y  $89\text{ mm}$ , como se puede ver en la figura 5.16.

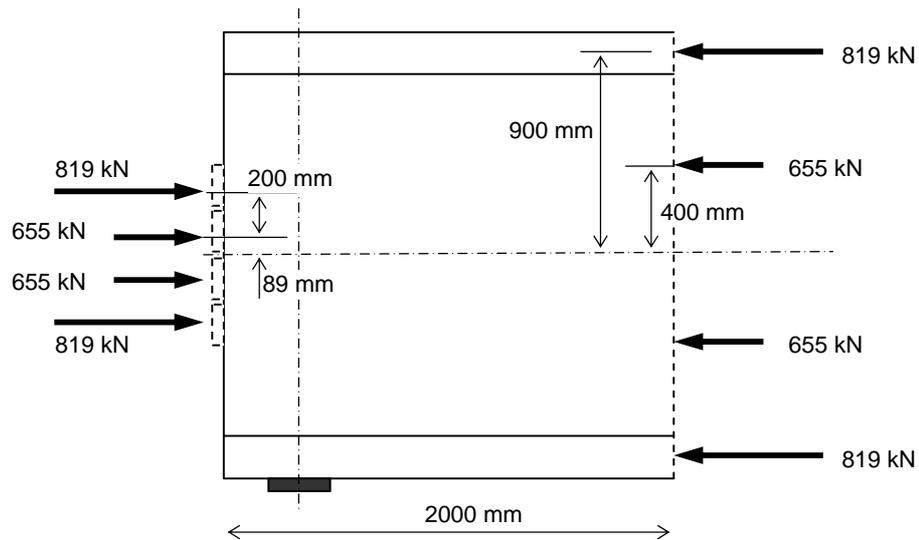


Figura 5.16. Equilibrio externo.

El apoyo es de neopreno y no forma parte de la viga por lo que no se calculará en este problema (en la práctica habría que calcularlo).

## 2. Elección del modelo y cálculo de esfuerzos en bielas y tirantes

Para la división de fuerzas efectuada es fácil plantear un modelo de bielas y tirantes espacial.

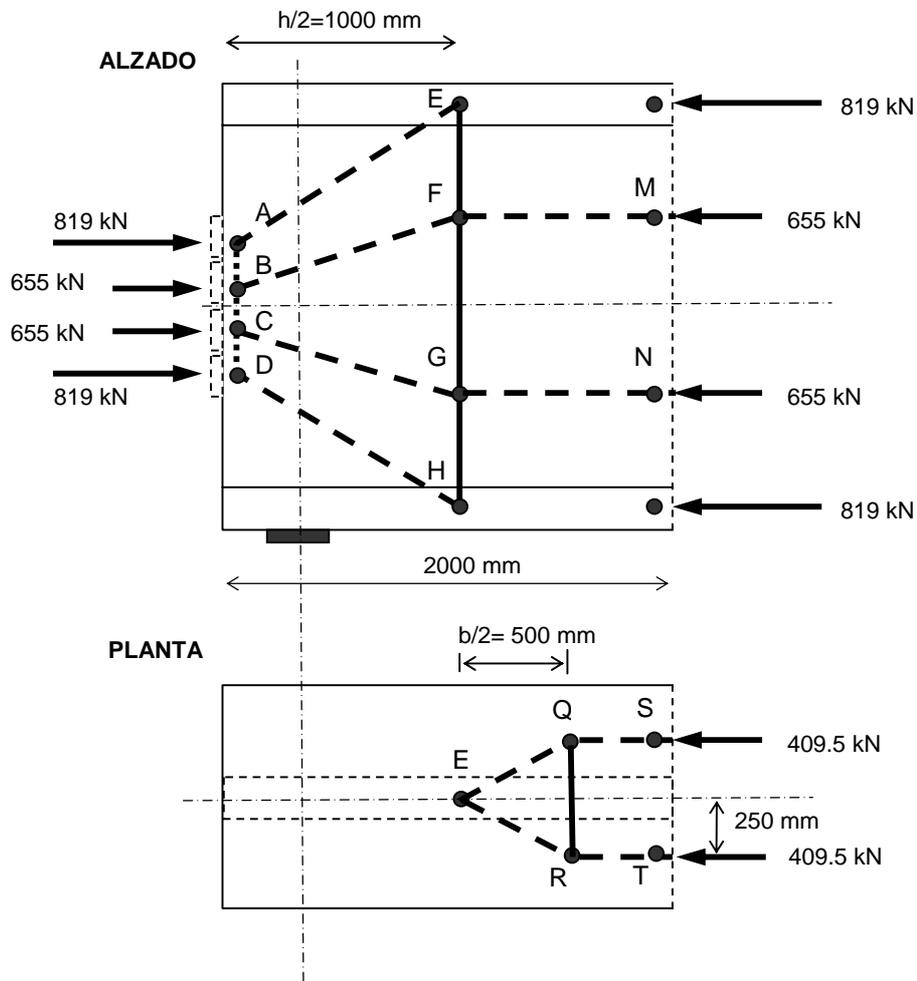


Figura 5.17. Modelo de bielas y tirantes

Los nudos A, B, C y D constituyen un único nudo y, por tanto, no se consideran las barras que los unen entre sí.

En la tabla siguiente se resumen los resultados de la resolución de la estructura articulada. Positivo es compresión y negativo tracción.

Barra	AE	BF	EF	FG	FM	EQ	QR	QS
Axil (kN)	960	686	-500	-704	655	458	-205	409.5

### 3. Comprobación de las bielas

La comprobación de las bielas consiste en el cálculo del ancho y verificar si caben en el espacio disponible. En el caso de almas de vigas sometidas a cortante, las bielas tienen una resistencia de  $f_{1cd} = 0.60f_{cd} = 0.6 \cdot 34 / 1.5 = 13.6 \text{ N/mm}^2$ . Si los anchos del alma y del ala son de  $200 \text{ mm}$ , los valores del ancho de cada biela se resumen en la tabla siguiente:

Barra	AE	BF	FM	EQ	QS
Axil (kN)	960	686	655	458	409.5
Anchura (mm)	353	252	241	168	151

Representadas las bielas y sus anchos en la viga se puede concluir que son aceptables, ver figura 5.18.

### 4. Diseño de los tirantes

La armadura necesaria en los tirantes se dimensiona a tracción  $A_{s,necesaria} = N_d / f_{yd}$ . En este caso armamos con acero B-500-S pero como se está aplicando la teoría de bielas y tirantes la tensión máxima será de  $400 \text{ MPa}$ .

Las bielas EF y FG se armarán igual (no tendría sentido utilizar distinta armadura).

Barra	EF	FG	QR
Axil (kN)	-500	-704	-205
Armadura ( $\text{mm}^2$ )	1250	1760	512.5
Armadura ( $\text{mm}^2$ )	8cØ12 (1808)	8cØ12 (1808)	3cØ12 (679)

### 5. Capacidad resistente de los nudos y anclajes

El nudo bajo el anclaje es un nudo multicomprimido con un estado biaxial y su tensión máxima admisible será  $f_{cd} = 34 / 1.5 = 22.7 \text{ MPa}$ . En este ejemplo la tensión existente en el plano más desfavorable del nudo es:

$$\frac{4 \cdot P_d}{4 \cdot 200 \cdot 200} = 18.43 \text{ MPa} < f_{cd} = 22.70 \text{ MPa}$$

El resto de los nudos son nudos con tirantes anclados y, por tanto, realizada la comprobación de bielas sólo es necesario dimensionar el anclado de los tirantes. Para el nudo E será necesario disponer de una longitud de anclaje de  $8.4\text{cm}$ , que en la configuración existente ya está disponible.

$$L_{b,neto} = L_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = m \cdot \phi^2 \cdot 0.7 \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}} = 12 \cdot 1.2^2 \cdot 0.7 \cdot \frac{1250}{1808} = 8.36 \text{ cm.}$$

En los anclajes de piezas postesadas se suele tener en cuenta el efecto del confinamiento del hormigón (el hormigón resiste tensiones mayores que si no estuviera confinado). El confinamiento se puede proporcionar mediante armadura transversal o por el hormigón circundante no cargado. Una manera de evaluar el efecto del confinamiento del hormigón circundante es aplicando la EHE, según la cual la resistencia del hormigón en estado triaxial es:

$$f_{3cd} = \sqrt{\frac{A_c}{A_{c1}}} f_{cd} \leq 3.3 f_{cd}$$

donde  $A_{c1}$  es el área neta donde actúa la carga puntual y  $A_c$  es el área máxima no cargada, concéntrica y homotética donde puede situarse  $A_{c1}$ . En este caso esto no es aplicable puesto que  $A_{c1}$  coincide con  $A_c$ .

La mayor parte de los sistemas de postesado utilizan espirales debajo de la carga para conseguir el efecto del confinamiento, logrando mayor capacidad que con el sistema anterior. En nuestro caso se pueden colocar espirales.

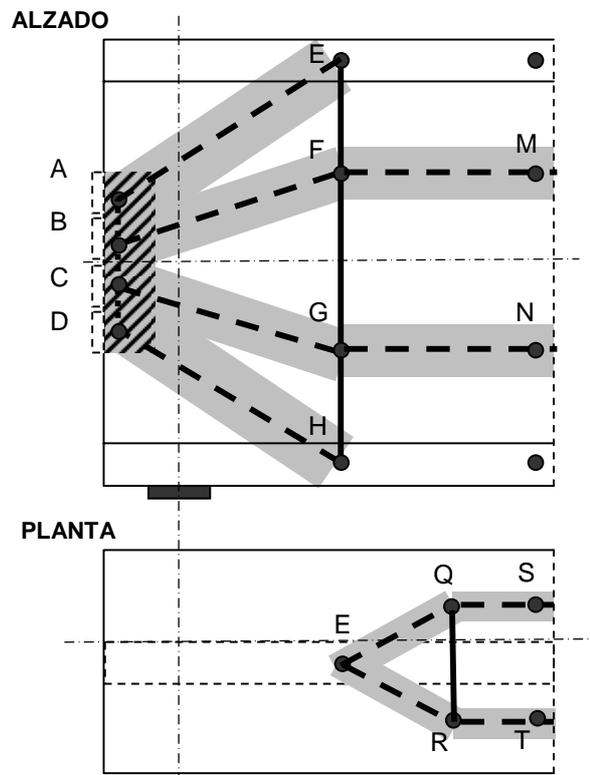


Figura 5.18. Ancho de bielas.

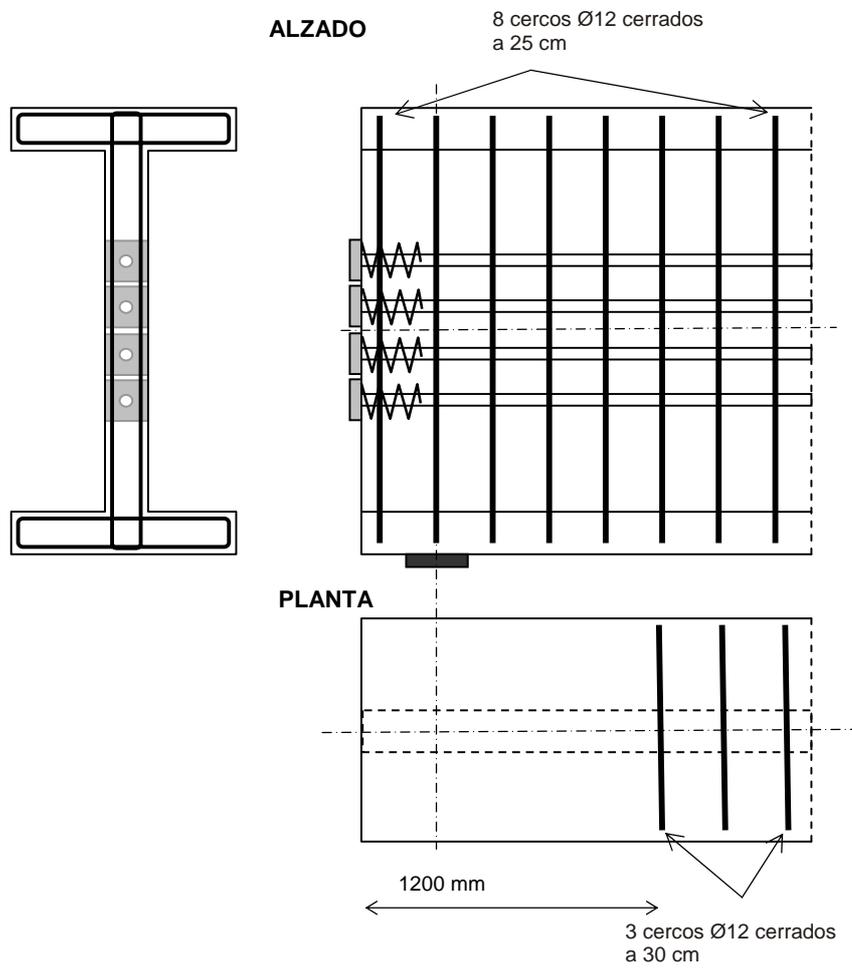


Figura 5.19. Armadura.

**Ejemplo**

La norma española EHE diferencia entre zapatas rígidas y flexibles. Zapatas flexibles son aquellas en las que se puede aplicar la teoría de flexión de la viga (hipótesis de las secciones planas) y zapatas rígidas son aquellas que constituyen una región D y donde se puede aplicar la teoría de las bielas. Calculemos la zapata cuadrada de la figura 5.20. En primer lugar se calculan las dimensiones de la zapata para un  $N_d=500\text{ kN}$  y un  $M_d=50\text{ kN}\cdot\text{m}$ , considerando que la tensión máxima que admite el terreno es de  $0.2\text{ N/mm}^2$ , que la densidad del hormigón armado es de  $2400\text{ kg/m}^3$  y que el espesor de zapata elegido ha sido de  $1\text{ m}$ . Se va a armar con acero B-400-S.

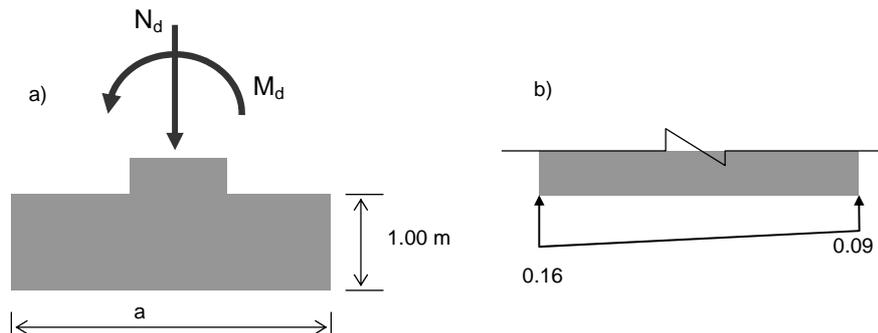


Figura 5.20. Zapata cuadrada a) Tensiones sobre el terreno. b) Tensiones para el cálculo de armaduras

Imponiendo que la tensión máxima sea inferior a  $0.2\text{ N/mm}^2$  se obtendrá el valor de  $a$ . Hay que hacer notar que en esta ecuación hay que añadir el peso de la zapata, dado que este peso carga sobre el terreno. Sin embargo, cuando se procede a armar la zapata no hay que considerar el peso ésta. Esto es así puesto que al colocar el hormigón fresco el suelo soporta su peso pero dicho hormigón no genera esfuerzos en las barras de la armadura, La ecuación para obtener el valor de  $a$  es:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 0.2 = \frac{500000 + 1000 \cdot a^2 \cdot 24 \cdot 10^{-9}}{a^2} + \frac{50 \cdot 10^6 \cdot \frac{a}{2}}{\frac{1}{12} a^4} \rightarrow a \approx 1823\text{ mm}$$

Se adoptará  $a=2000\text{ mm}$ . Las tensiones máximas y mínimas de compresión serán  $0.16$  y  $0.09\text{ N/mm}^2$ , respectivamente. Como hemos dicho antes, estas tensiones no son las que se emplearán para el cálculo de la armadura ya que para esto no se considerará el peso

de la zapata. Sin embargo, en este caso ambas tensiones son prácticamente iguales:  $0.16$  y  $0.09 \text{ N/mm}^2$ .

Antes de proceder al cálculo de la armadura por el método de las bielas, veamos qué ocurriría si las acciones sobre la zapata fuesen  $N_d=200 \text{ kN}$  y un  $M_d=120 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Planteando la ecuación de la flexión compuesta tenemos:

$$\sigma_{\text{máx}} = 0.2 = \frac{200000 + 1000 \cdot a^2 \cdot 24 \cdot 10^{-9}}{a^2} + \frac{120 \cdot 10^6 \cdot \frac{a}{2}}{\frac{1}{12} a^4} \rightarrow a \approx 1750 \text{ mm}$$

lo que da una tensiones máximas y mínimas de  $0.200$  y  $-0.069 \text{ N/mm}^2$ . Puesto que la zapata no transmite tensiones de tracción al terreno, el planteamiento de la ecuación anterior no es válido siendo necesario plantear el siguiente sistema, en el que las incógnitas son  $x$  y  $a$ . (Figura 5.21)

$$\begin{cases} 0.2 \cdot a \cdot x/2 = 200000 + a^2 \cdot 1000 \cdot 24 \cdot 10^{-9} \\ 0.2 \cdot a \cdot x/2 \cdot (a/2 - x/3) = 120 \cdot 10^6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1052 \text{ mm} \\ a = 1901 \text{ mm} \end{cases}$$

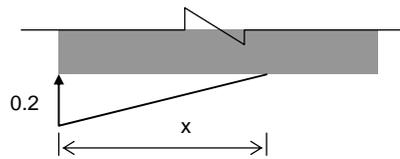


Figura 5.21. Incógnita  $x$

Volvamos al caso inicial correspondiente a la la zapata sometidas a unas acciones exteriores de  $N_d=500 \text{ kN}$  y  $M_d=50 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . En la figura 5.20b se representan las tensiones existentes cuando no se tiene en cuenta el peso de la zapata.. La norma EHE considera zapata rígida siempre que el vuelo de la zapata sea menor de dos veces el canto de la zapata, lo que en nuestro caso se cumple (se supone un pilar de  $30 \times 30 \text{ cm}$ ). El modelo biela-tirante considerado es el siguiente:

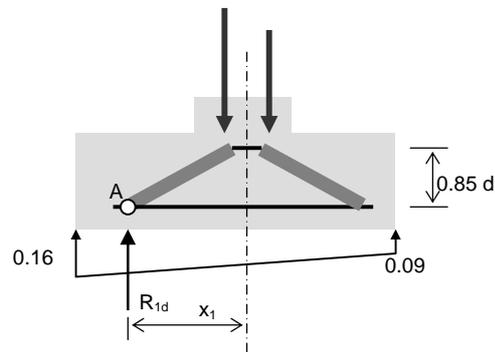


Figura 5.22. Esquema de bielas y tirantes sobre una zapata

Los valores de  $R_{1d}$  y  $x_1$  se obtienen planteando equivalencia de fuerzas y de momentos de la mitad izquierda de la zapata. Con esos valores se plantea el equilibrio en el nudo A para obtener la armadura necesaria de tracción.

$$R_{1d} = \frac{0.16+0.09}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(0.16 - \frac{0.16+0.09}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot a \rightarrow R_{1d} = 285 \text{ kN}$$

$$R_{1d} \cdot x_1 = \frac{0.16+0.09}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(0.16 - \frac{0.16+0.09}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3 \cdot 2} \rightarrow x_1 = 520 \text{ mm}$$

$$A_s \cdot f_{yd} \cdot 0.85d = R_{1d} \cdot x_1 \rightarrow A_s = 557 \text{ mm}^2$$

Se colocarán 8Ø10.

## Referencias

Collins M.P. y Mitchell D. (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice-Hall. New Jersey.

Página Personal del Prof. Daniel Kuchma (Universidad de Illinois en Urbana-Champaign)



---

## CAPÍTULO VI

---

### ANÁLISIS DE LA SECCIÓN EN FLEXIÓN



Autopista EX - A2. Badajoz.  
**Cortesía de JOCA. [www.joca.es](http://www.joca.es)**

#### 6.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se han estudiado las propiedades de los materiales que forman el hormigón armado y pretensado: hormigón y acero. En los primeros capítulos se han estudiado los materiales, hormigón y acero, desde el punto de vista de sus propiedades mecánicas. En este capítulo se estudiará el comportamiento conjunto hormigón-acero a nivel sección transversal.

El primer paso en el cálculo de una estructura es modelizarla, para lo cual se establece un sistema de referencia en el que la estructura queda definida geoméricamente por nodos y elementos. Algunos de esos nodos serán el vínculo de la estructura al exterior. Cada elemento debe de estar definido por sus propiedades mecánicas: áreas, inercias, momentos estáticos, cantos, anchos... Además es necesario fijar las propiedades mecánicas de cada material (acero y hormigón): módulo de deformación, módulo de Poisson, coeficiente de dilatación térmica, fluencia, relajación....

Con el modelo de la estructura y con las cargas exteriores se puede realizar el cálculo de la misma. A partir del cálculo estructural se obtendrán los desplazamientos en todos los nodos de la estructura y, a partir de éstos, las deformaciones, tensiones y esfuerzos en todas las secciones transversales de cada elemento.

Con los resultados obtenidos del cálculo de la estructura (esfuerzos y deformaciones) se procederá a dimensionar<sup>1</sup> los elementos de hormigón armado y pretensado de tal forma que resistan los esfuerzos flectores, axiales, cortantes y de torsión que haya en cada una de las secciones y que cumplan las limitaciones de deformaciones (flechas y fisuras).

Como ejemplo del comportamiento de un elemento estructural se analiza la viga de la figura 6.1 en la que el momento flector es el esfuerzo predominante. A continuación se estudiarán las distintas fases por las que pasa esta viga hasta alcanzar la rotura.

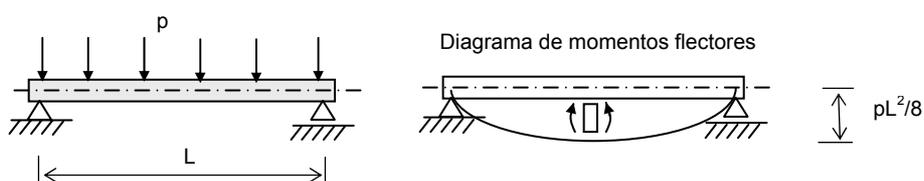


Figura 6.1. Viga sometida a flexión

Para una viga simplemente apoyada y sometida a una carga de valor constante por unidad de longitud  $p$  (figura 6.1), el máximo momento se produce en el centro de luz ( $pL^2/8$ ). A medida que aumenta la carga  $p$  la viga pasará por varias fases hasta su rotura (figura 6.2):

- **Fase de pre-fisuración:** comprende desde que  $p$  vale 0 hasta el valor de  $p$  para el cual la fibra más traccionada alcanza el valor de la resistencia a tracción del hormigón  $f_{ct,m}$ . Al momento flector que provoca esta tracción se le conoce como *momento de fisuración*.

$$M_{fis} = f_{ct,m} \cdot W$$

$$f_{ct,m} = 0.30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (6.1)$$

<sup>1</sup> Para iniciar el cálculo es necesario suponer unos valores iniciales en las dimensiones de los elementos, es lo que se denomina predimensionado. La práctica es la mejor herramienta para predimensionar. El cálculo de una estructura suele hacerse con las propiedades mecánicas de las secciones brutas. El apartado 9.2 de este libro está dedicado al análisis estructural.

donde  $W$  es el módulo resistente a tracción de la sección ( $W =$  momento de inercia/distancia máxima a la fibra neutra en la zona de tracción). En este estado las tensiones son tan pequeñas que se puede considerar que se está en régimen lineal. El módulo de deformación longitudinal del hormigón en esta fase es  $E_{cm}$  (ecuaciones 3.4 y 3.5). El momento de inercia, en esta fase, será el de la sección compuesta por hormigón y acero (aunque en algunos casos basta con emplear el momento de inercia de la sección bruta).

- **Fase de fisuración lineal:** en esta fase el hormigón a tracción se ha fisurado. El momento de inercia en las secciones fisuradas ha cambiado respecto al de la fase anterior. El hormigón fisurado no trabaja a tracción en las secciones fisuradas y hay que ignorarlo en el cálculo de la inercia. Si la máxima tensión de compresión en el hormigón es suficientemente pequeña, menor de  $0.45f_{cj}$ , la ley de distribución de tensiones se puede considerar lineal, esto es, se cumplirá la ley de Navier ( $\sigma=My/I$ ). El módulo de deformación longitudinal del hormigón en esta fase coincide con el de la fase anterior.
- **Fase de prerrotura:** se produce cuando las tensiones del hormigón se aproximan a  $0.85f_{cj}$ . La distribución de tensiones ya no es lineal sino que el diagrama de tensiones se curva (ver figura 6.2).
- **Fase de rotura:** este estado se produce cuando la sección de hormigón se ha agotado completamente y se produce la rotura a compresión del hormigón y/o a la rotura a tracción del acero. En esta fase, como en la fase anterior, se pueden emplear diagramas simplificados para el comportamiento del hormigón como el diagrama parábola-rectángulo o el diagrama rectangular del hormigón.

Puede que la viga no pase por todas estas fases. En una viga poco armada el acero puede romper antes de que el hormigón alcance tensiones elevadas, en este caso la rotura se produciría entre las fases de fisuración lineal y de prerrotura. Si la cantidad de acero fuese muy reducida, la viga podría romper entre las fases de prefisuración y fisuración lineal lo que significa que el acero no sería capaz de resistir ni siquiera la resultante de las tracciones que el hormigón deja de resistir cuando fisura. Esta última posibilidad viene limitada por todas las normas debido al peligro que esta situación conlleva por ser una rotura sin aviso previo (limitación de cuantía mínima mecánica). En el caso de una viga excesivamente armada, se produciría una rotura frágil del hormigón, sin ningún tipo de aviso previo, presentándose sólo las fases de prefisuración y de rotura. Por tanto, para que se presenten todas las fases descritas anteriormente debe de existir un armado determinado.

Para calcular una viga se ha de comprobar que no se rebasarán los Estados Límite Últimos ni los Estados Límite de Servicio, vistos en el capítulo 2. En la viga de la figura 6.1 se debe comprobar el ELU de agotamiento frente a esfuerzos normales y cortantes, y los ELS de fisuración y de deformación.

El agotamiento frente a esfuerzos normales se debe de comprobar en todas y cada una de las secciones transversales de cada elemento, de forma independiente. Cada sección deberá resistir los esfuerzos a los que se encuentra solicitada, siendo necesario comprobar que no se llega a agotar en rotura. Por el contrario, el estudio de

deformaciones y de fisuración se realiza a nivel de todo el elemento, siendo necesario comprobar que no se superan unas determinadas flechas o un determinado ancho de fisura. Un ejemplo de la diferencia entre estudio a nivel seccional (agotamiento) y estudio a nivel global (deformación) se puede ver en una cadena: una cadena romperá por el eslabón más débil (habrá que comprobar aisladamente eslabón por eslabón) pero para estudiar su deformación hay que sumar lo que deforman todos los eslabones.

En este capítulo nos centraremos en el estudio de secciones sometidas a tensiones normales, o sea, dados unos esfuerzos normales (axil y momento) se comprobará cómo se comporta una sección transversal: su deformación unitaria, su resistencia y dimensionamiento.

## 6.2. HIPÓTESIS FUNDAMENTALES A NIVEL SECCIÓN

Las hipótesis fundamentales para el estudio del hormigón a nivel sección son:

1. **Distribución lineal de deformaciones.** Para regiones B (definidas en el capítulo anterior) esta hipótesis, también conocida como hipótesis de las secciones planas o de Bernoulli, está suficientemente contrastada incluso hasta la fase de rotura. La deformación del acero pasivo y del activo adherente (preteso y postesado) se considera que es la misma que la del hormigón situado en su misma fibra. Si bien, como veremos, el acero de pretensado tiene una predeformación.
2. **Curvas de comportamiento de los materiales,** ya estudiadas en el capítulo 3.
3. Para cualquier sección, tanto en elementos de hormigón armado como de hormigón pretensado, debe de haber **equilibrio** entre las resultantes de las tensiones de hormigón y acero y los esfuerzos exteriores. Este tercer punto no es una hipótesis; no obstante, junto con los dos puntos anteriores, constituyen las herramientas básicas para el estudio de la sección.

### Distribución lineal de deformaciones

Esta hipótesis es conocida como hipótesis de las “secciones planas” o de Bernoulli. Como ya hemos dicho, conocidas las deformaciones de dos puntos<sup>2</sup> queda definida la distribución de deformaciones en toda la sección. Las dos deformaciones de referencia pueden ser o bien las deformaciones en las caras superior e inferior ( $\varepsilon_{sup}$  y  $\varepsilon_{inf}$  respectivamente) o bien la deformación en el centro de gravedad  $\varepsilon_{cdg}$  y la curvatura  $\phi$ , ver figura 6.3.

La curvatura es la rotación experimentada por la sección por unidad de longitud. Si se representa la deformación en términos de deformación por unidad de longitud ( $\varepsilon$ ), el gradiente de  $\varepsilon$  en una sección será la curvatura ( $\phi$ ), como se puede apreciar en la figura 6.3.

---

<sup>2</sup> Dos puntos en modelos en 2D y tres puntos para modelos en 3D.

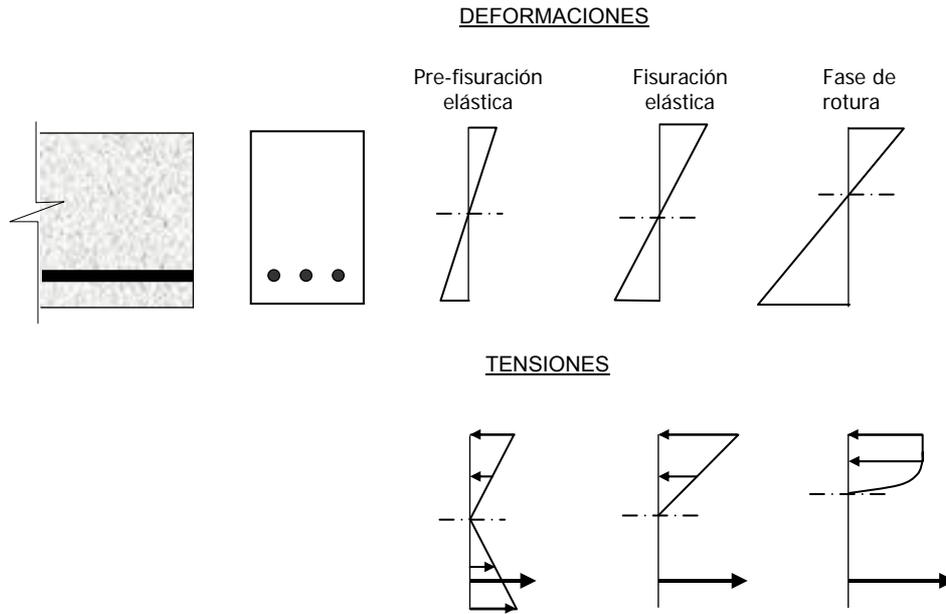


Figura 6.2. Hipótesis de las secciones planas

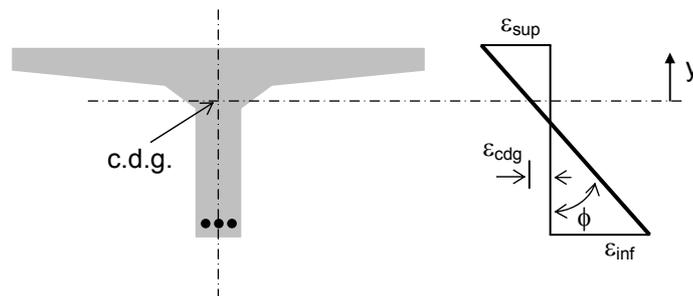


Figura 6.3. Distribución de deformaciones

La deformación del hormigón en una fibra situada a una distancia  $y$  del c.d.g. es (ver figura 6.3):

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cdg} + \phi y \quad (6.2)$$

la deformación del acero pasivo es:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cdg} + \phi y \quad (6.3)$$

y la del acero activo:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta\varepsilon_p \quad (6.4)$$

donde  $\Delta\varepsilon_p$  es la diferencia de deformación del acero de pretensado, que debe de ser determinada en función del proceso de pretensado que se realice. En la formulación anterior se ha considerado deformación positiva la de compresión y curvatura positiva la que produce tracciones en la parte inferior de la sección transversal.

### Ecuaciones de equilibrio

El estado de tensiones existente en cualquier sección debe de generar los esfuerzos que la solicitan, ya sean de diseño (en ELU) o característicos (en ELS). En el caso de flexión compuesta se ha de verificar que:

$$\begin{aligned} N = \Sigma N &= \int_{A_c} \sigma_c dA_c + \int_{A'_s} \sigma'_s dA'_s - \int_{A_s} \sigma_s dA_s - \int_{A_p} \sigma_p dA_p \\ M = \Sigma M &= \int_{A_c} \sigma_c y dA_c + \int_{A'_s} \sigma'_s y dA'_s + \int_{A_s} \sigma_s y dA_s + \int_{A_p} \sigma_p y dA_p \end{aligned} \quad (6.5)$$

En las ecuaciones anteriores se ha considerado positivo el esfuerzo axial de compresión y el momento que introduce compresiones en la parte superior (ver figura 6.4).

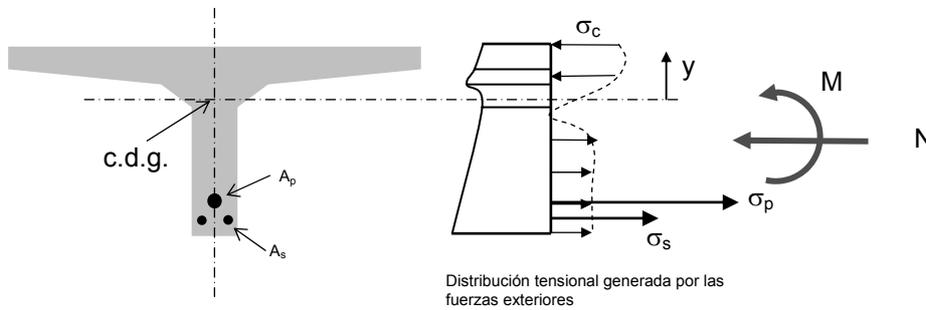


Figura 6.4. Distribución de tensiones

### 6.3. COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN A TRACCIÓN

Como se ha comentado anteriormente, el hormigón es un material que resiste muy poco a tracción y que, por tanto, rompe bajo tensiones de tracción pequeñas ( $f_{ct}$ ). Sin embargo, para deformaciones de tracción superiores a la correspondiente a la tensión de tracción  $f_{ct}$  la contribución del hormigón no es despreciable: veamos lo que esto último significa.

Consideremos la barra de la figura 6.5 cuya sección transversal está constituida por un cuadrado de hormigón con una barra de acero situada en el centro de la sección. Si sometemos al conjunto a una sollicitación de tracción se obtiene la gráfica *axil-deformación longitudinal unitaria* de la figura 6.5.a. En línea discontinua se ha representado la contribución del acero en la deformación media experimentada por la barra (conjunto hormigón-acero).

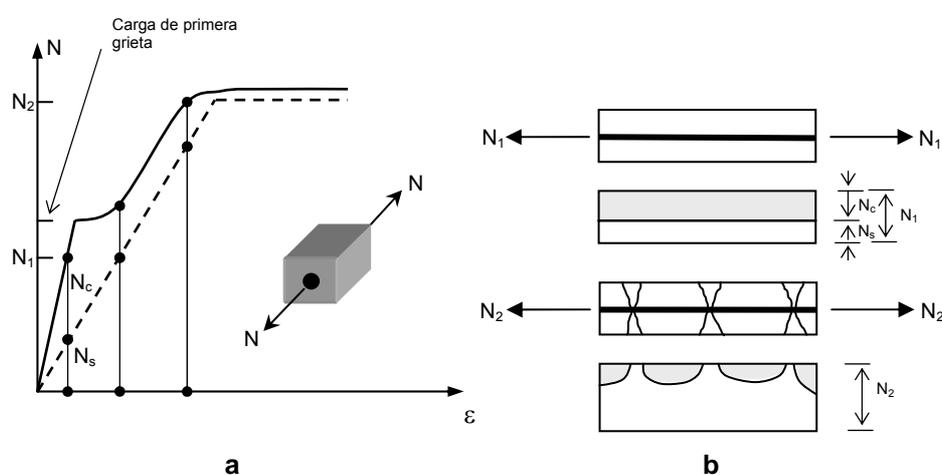


Figura 6.5. Contribución del hormigón a tracción

Una vez que aparece la primera grieta el hormigón deja de contribuir en la zona de la grieta pero continúa contribuyendo en las zonas entre grietas. La figura 6.5.a representa la contribución media del acero (línea discontinua) y del conjunto hormigón-acero (línea continua). La figura 6.5.b representa el reparto de la acción exterior, pero a lo largo de toda la barra, para los valores del esfuerzo axial de tracción  $N_1$  y  $N_2$  indicados en la figura 6.5.a. La deformación total experimentada por la barra, aún cuando existan numerosas grietas, es menor que la que experimentaría la barra de acero aislada.

Justo antes de que se forme la primera grieta, la tensión del hormigón era de  $f_{ct}$  y la deformación  $\epsilon_{ct}$ . Cuando se forma la primera grieta la tensión media de tracción en el hormigón disminuye y decrecerá tanto más cuanto más grietas haya, o sea cuando  $\epsilon_c$

aumente ( $\varepsilon_c$  calculada como valor medio en toda la barra). Se puede adoptar la siguiente expresión como valor de la resistencia media del hormigón a tracción<sup>3</sup>:

$$\sigma_{ct} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{ct}}} \quad (6.6)$$

$\alpha_1$  Coeficiente en función de la adherencia acero-hormigón

1 para barras corrugadas  
 0.7 para barras lisas, cables y cordones con muescas  
 0 para barras sin adherencia

$\alpha_2$  Coeficiente en función del tipo de carga

1.0 para carga no cíclica rápida  
 0.7 para carga de duración o repetitivas

al fenómeno de la contribución a tracción del hormigón se le denomina *tensorrigidez*.

La tensorrigidez no afecta a toda el área de la sección transversal sometida a tracción sino sólo a una parte situada en el entorno de la barra de acero. Al área afectada se le denomina área eficaz. Se considera que el área eficaz ( $A_{c,eficaz}$ ) es la zona rectangular en torno a la barra a una distancia no superior a  $7.5\varnothing$ .

Para cargas de corta duración el modelo planteado por el EC2 (ecuación 3.8) o por la norma EHE puede ser complementando por la ecuación 6.6. Veamos un ejemplo.

---

<sup>3</sup> El Código Modelo CEB-FIP (1990) propone una expresión distinta para el mismo fenómeno. Por simplicidad, hemos optado por adoptar el modelo de Vechhio y Collins (1986).

En el anejo al capítulo 7 de este libro se han presentado otras expresiones de la tensorrigidez más actuales.

6.4. EJEMPLO DE RESPUESTA A CORTO Y LARGO PLAZO

La figura 6.6 corresponde a una viga pretensada pretesa de sección rectangular de  $200 \times 100 \text{ mm}$ , fabricada con hormigón HP-45 y con dos alambres de acero Y1670C de  $\varnothing 7$ .

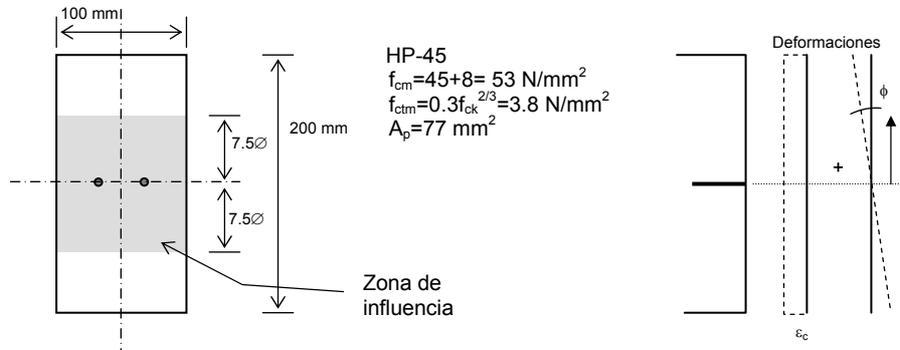


Figura 6.6. Viga pretesa. Deformaciones

Optamos por una tensión de pretensado de  $1200 \text{ N/mm}^2$ , lo que provoca una deformación  $\Delta\epsilon_p$  de  $0.006$ . Como diagrama tensión-deformación para el hormigón se empleará el siguiente modelo combinado:

- ecuación 3.8 para cargas instantáneas que generen tensiones de compresión, o bien que generen tensiones de tracción cuya deformación sea menor de  $f_{ctm}/E_c$ .
- y ecuación 6.6 para cargas instantáneas que generen deformaciones en tracción mayores que la de rotura ( $f_{ctm}/E_c$ ):

Así pues, el diagrama tensión-deformación del hormigón para este ejemplo queda de la siguiente forma:

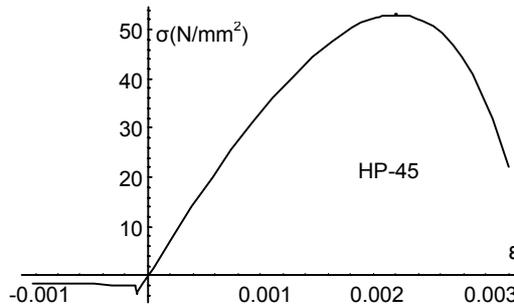


Figura 6.7. Diagrama tensión-deformación del HP-45 para cargas de corta duración

El diagrama de cálculo correspondiente al acero de pretensado es el propuesto por el Eurocódigo 2 (figura 3.26 del capítulo 3).

Las deformaciones unitarias en la sección se plantean como  $\varepsilon = \varepsilon_{cdg} + \phi y$ , siendo  $\varepsilon$  la deformación a una altura  $y$ ,  $\varepsilon_{cdg}$  la deformación en el c.d.g. de la sección y  $\phi$  la curvatura. Las ecuaciones de equilibrio para este ejemplo son muy sencillas:  $N_c + N_p = 0$  y  $M_c = M$ . Siendo  $N_c$  el esfuerzo axial existente en el hormigón,  $N_p$  el esfuerzo axial provocado por los alambres de pretensado y  $M_c$  el momento producido por las tensiones existentes en el hormigón.  $M$  es el momento exterior que solicita la sección.

La resolución del problema se ha efectuado con ayuda del programa Mathematica® y se ha operado de la siguiente forma: se fija un valor de  $\varepsilon_{cdg}$  inicial y vamos variando  $\phi$  hasta hacer verificar la primera ecuación de equilibrio (equilibrio de axiles), de la segunda ecuación de equilibrio obtenemos el momento exterior  $M$ , y así con varios  $\varepsilon_{cdg}$ <sup>4</sup>. Los resultados se recogen en la tabla 6.1 y el diagrama Momento-curvatura es el representado en la figura 6.8.

En la tabla 6.1 se indican los valores de la deformación unitaria en el centro de gravedad de la sección ( $\varepsilon_{cdg}$ ), las tensiones en las fibras superior e inferior, la curvatura y el momento resultante.

Tabla 6.1. Valores de deformación y momentos

$\varepsilon_{cdg}$ $\times 10^3$	$\sigma_{sup}$ MPa	$\sigma_{inf}$ MPa	$\phi \times 10^3$ (rad/m)	$M$ kN·m
0.10	15.50	-2.00	3.15	6.75
0	21.50	-1.70	5.95	8.30
-1	39.90	-1.17	22.68	10.29
-2	47.10	-0.99	36.52	10.51
-3	51.07	-0.89	49.77	10.60
-3.4	52.02	-0.85	55.00	10.63
-4.0	52.84	-0.81	62.79	10.65
-4.4	53.00	-0.79	67.98	10.67
-4.8	52.83	-0.77	73.16	10.68
-5.0	52.62	-0.76	75.76	10.68
-5.4	51.93	-0.74	80.97	10.69
-6.0	50.13	-0.71	88.85	10.69
-6.4	48.81	-0.70	94.16	10.68
-6.8	45.84	-0.68	99.56	10.67

<sup>4</sup> Se podría haber empleado otro método (Newton-Rapson, bisección, ...)

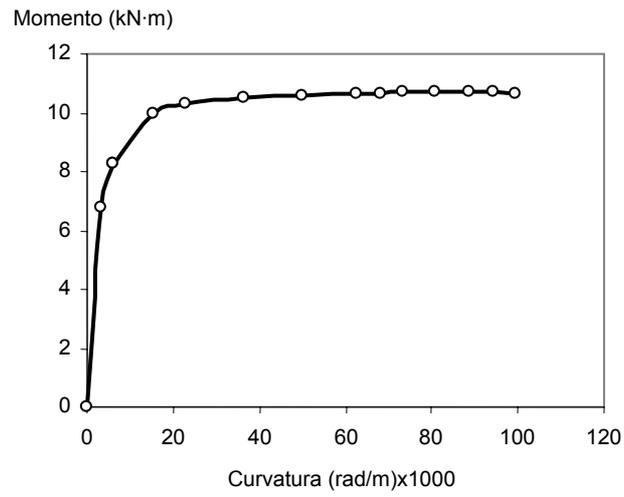


Figura 6.8. Diagrama Momento-curvatura

Listado de entrada para Mathematica®

```
(* MODELIZACIÓN DE LOS MATERIALES*)
fck = 45;
fctm = 0.3  $\sqrt[3]{fck^2}$ ;
fcm = fck + 8;
ec1 = If[0.0007 fcm0.31 < 0.0028, 0.0007 fcm0.31, 0.0028];
ecu = 0.0035;
η[ε_] := ε / ec1;
Ecm = 22000  $\left(\frac{fcm}{10}\right)^{0.3}$ ;
κ = 1.1 Ecm  $\frac{ec1}{fcm}$ ;
fpk = 1670;
eud = 0.02;
euk = eud / 0.9;
γs = 1.15;
fpd = 0.9 fpk / γs;
Ep = 200000;
Δεp = 0.006;

Interseccion = Flatten[FindRoot[ $\frac{\kappa \eta[x] - \eta[x]^2}{1 + (\kappa - 2) \eta[x]} fcm == -fctm$ , {x, 0, -0.001}]];
Interseccion = {x /. Interseccion[[1]]};
ect = Interseccion[[1]];

σc[x_] := Piecewise[{{ $-\frac{0.7 fctm}{1 + \sqrt{-500 x}}$ , x < ect}, { $\frac{\kappa \eta[x] - \eta[x]^2}{1 + (\kappa - 2) \eta[x]} fcm$ , ect < x < ecu}, {0, x > ecu}}]

σp[x_] := Piecewise[{{(Ep x, 0 ≤ x ≤ fpd / Ep), {fpd +  $\frac{0.1 \frac{fpk}{\gamma s} \left(x - \frac{fpd}{Ep}\right)}{euk - \frac{fpd}{Ep}}$ , fpd / Ep < x ≤ eud}, {0, x > eud}}]

Plot[σc[x], {x, -0.001, 0.004}];
Plot[σp[x], {x, 0, 0.02}, PlotRange → {0, fpk}];

(*EQUILIBRIO*)
εcdg = -0.0068
φ = 0.00009956
εp = Δεp - εcdg
Np = 77 σp[εp]
 $\int_{-100}^{100} 100 \sigma[\epsilon cdg + \phi y] dy - Np$ 
 $\int_{-100}^{100} 100 y \sigma[\epsilon cdg + \phi y] dy$ 
```

El interés que pueda suscitar el hecho de resolver este mismo problema para esfuerzos de carácter permanente es relativo debido a que los esfuerzos máximos aparecen sólo en espacios de tiempo muy reducidos.

Para cargas de larga duración los fenómenos de fluencia y retracción en el hormigón (y de relajación en el acero) hacen que las gráficas momento-curvatura sean diferentes de las obtenidas para cargas instantáneas (figura 6.8). Continuemos con el ejemplo para entender esto último.

Se supone que el hormigón se carga a los 28 días y que la evaluación de la tensión se realiza a los 10000 días. Durante todo el proceso (desde los 28 días hasta los 10000 días) la carga se ha mantenido constante, con una humedad relativa del 60%. Aplicando la fórmula de la fluencia (apartado 3.4) se deduce que el coeficiente de fluencia ( $\varphi$ ) es de 2.52. Para este caso el módulo de deformación longitudinal inicial del hormigón es de  $37500 \text{ N/mm}^2$ , valor que se ve afectado a largo plazo por el efecto de la fluencia. Aplicando la fórmula de la fluencia se obtiene el valor del módulo de deformación longitudinal inicial del hormigón a 10000 días.

$$E_{c,ef} = \frac{E_c}{1 + \varphi} = \frac{37500}{1 + 2.52} = 10653 \text{ N/mm}^2$$

Las fórmulas de la fluencia de la EHE pueden ser empleadas sólo cuando la tensión del hormigón es menor de  $0.45f_{cm}$  (en nuestro caso  $0.45f_{cm} = 23.85 \text{ MPa}$ ). Teniendo en cuenta esta limitación, sólo se podrá utilizar el módulo de deformación longitudinal inicial antes deducido ( $10653 \text{ N/mm}^2$ ) cuando las tensiones sean inferiores a  $0.45f_{cm}$ . Para el cálculo del diagrama tensión-deformación a largo plazo se necesita conocer el valor de la resistencia media afectada por el cansancio del hormigón:  $0.85f_{cm} = 45.05 \text{ MPa}$  y  $0.85f_{cm} = 3.23 \text{ MPa}$ . Con estos datos se puede calcular el diagrama tensión-deformación del hormigón hasta una tensión de  $0.45f_{cm}$ : línea continua de trazo grueso en la figura 6.9. Para el cálculo de la fluencia con valores de tensión de compresión superiores a  $0.45f_{cm}$  se puede emplear la expresión exponencial del Eurocódigo 2 (ecuación 3.19): línea punteada en la figura 6.9.

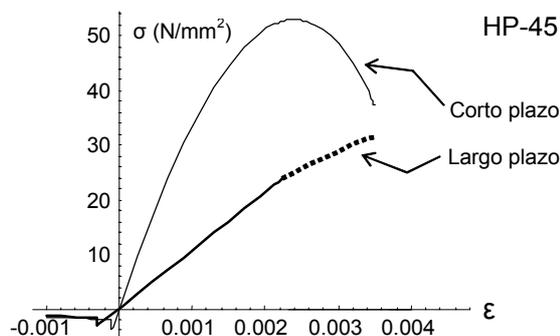


Figura 6.9. Diagramas para el hormigón HP-45 a corto y largo plazo

Otro factor a considerar para evaluaciones a largo plazo del hormigón es la retracción. Aplicando el apartado 3.5, el valor de la retracción ( $\varepsilon_{cs}$ ) en este problema es  $0.42 \times 10^{-3}$ . La retracción se tiene en cuenta en la ecuación de compatibilidad de deformaciones. Si suponemos que la retracción es constante en toda la sección se obtiene la siguiente ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cdg} + \varepsilon_{cs} + \phi y$$

Se admite que la pérdida por relajación para el acero de pretensado es del 3%, (que es la obtenida de aplicar la formulación del apartado 3.10 para 10000 días). El nuevo módulo de deformación longitudinal del acero,  $E_{p,ef}$ , será  $0.97 \cdot 200000 = 194000$  hasta  $0.7 \cdot f_{pk}$  (según el modelo de la EHE). Para tensiones mayores que  $0.7 \cdot f_{pk}$  se emplea la ecuación 3.27, sustituyendo el valor de  $E_p$  por  $E_{p,ef}$  (modelo de la EHE para el acero de pretensado).

Como en la resolución a corto plazo, el problema se puede resolver por iteraciones. La respuesta a largo plazo se puede ver en la figura 6.10, en la que también se ha representado el resultado obtenido a corto plazo (en este caso se ha resuelto empleando el modelo de acero de la EHE). En esta figura se observa que el diagrama a largo plazo no presenta valores para curvaturas mayores de  $0.02 \text{ rad/m}$  debido a que estas curvaturas corresponden a tensiones en la sección superiores a  $0.45 f_{cm}$  (límite de validez de las fórmulas de la fluencia empleadas por la normativa española).

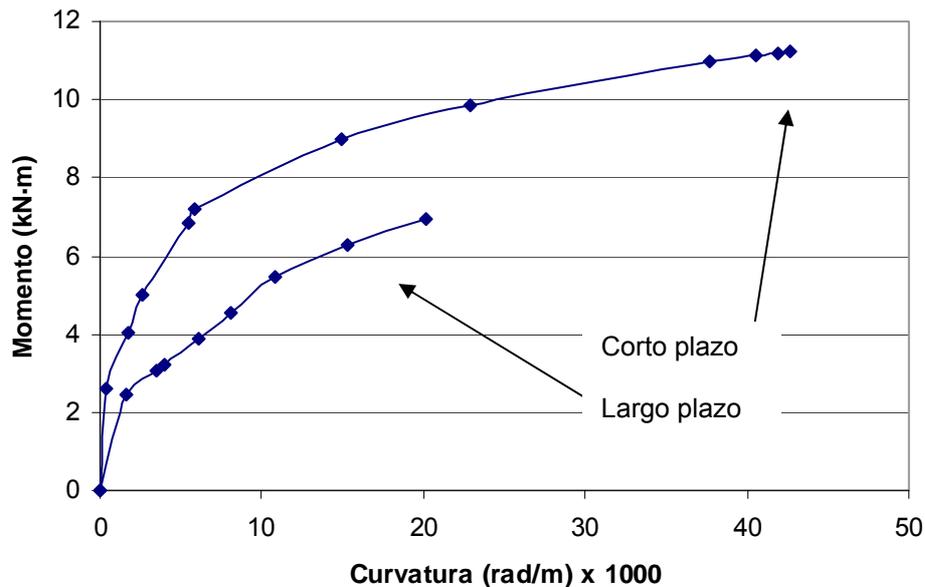


Figura 6.10. Diagramas Momento-curvatura a corto y a largo plazo.

Conocido el diagrama momento-curvatura puede obtenerse el giro entre dos secciones cualesquiera:

$$\theta_A^B = \int_{x_A}^{x_B} \phi \, dx$$

Aplicando el segundo teorema de Mohr, o integrando la ecuación de la elástica, se puede deducir la deformación en cualquier punto de la viga tal y como se verá más adelante en el capítulo X.

### 6.5. APROXIMACIÓN LINEAL EN FASE DE PREFISURACIÓN

En fase de prefisuración (antes de que el hormigón fisure) la relación tensión-deformación se puede considerar lineal y, por tanto, las ecuaciones resultan mucho más simples que las del apartado anterior.

Las deformaciones, como hasta ahora, tienen una distribución lineal tal y como se deduce de la figura 6.3 y de las ecuaciones 6.2, 6.3 y 6.4, que volvemos a plasmar aquí:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \varepsilon_{cdg} + \phi y \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_{cdg} + \phi y \\ \varepsilon_p &= \varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta\varepsilon_p\end{aligned}\tag{6.7}$$

La deformación puede ser tensional o atensional. La deformación de retracción ( $\varepsilon_{cs}$ ) y la deformación térmica son atensionales. En el caso de que sólo consideremos estas deformaciones atensionales se tiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \varepsilon_{cs} + \varepsilon_{c\Delta T} + \frac{\sigma_c}{E_c} \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_{s\Delta T} + \frac{\sigma_s}{E_s} \\ \varepsilon_p &= \varepsilon_{p\Delta T} + \frac{\sigma_p}{E_p}\end{aligned}\tag{6.8}$$

Las relaciones tensión-deformación de los materiales (hormigón, acero pasivo y acero de la armadura activa) se representan gráficamente en la figura 6.11.

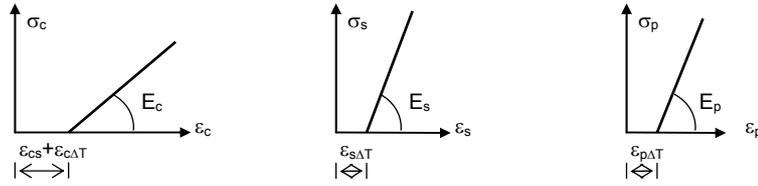


Figura 6.11. Relaciones tensión-deformación

La ecuación de equilibrio de axiles, tal y como se hizo en las ecuaciones 6.5, se plantea integrando sobre la sección transversal. Si se emplean las aproximaciones lineales de la figura 6.11 y se tienen en cuenta las ecuaciones 6.7 y 6.8, la ecuación de equilibrio de axiles será:

$$\begin{aligned}
 N = \Sigma N &= \int_{A_c} E_c (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \varepsilon_{cs} - \varepsilon_{c\Delta T}) dA_c + \int_{A_s} E_s (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \varepsilon_{s\Delta T}) dA_s + \\
 &+ \int_{A_p} E_p (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta\varepsilon_p - \varepsilon_{p\Delta T}) dA_p = \\
 &= E_c \varepsilon_{cdg} \left[ A_c + \frac{E_s}{E_c} A_s + \frac{E_p}{E_c} A_p \right] + E_c \phi \left[ \int_{A_c} y dA_c + \frac{E_s}{E_c} \int_{A_s} y dA_s + \frac{E_p}{E_c} \int_{A_p} y dA_p \right] - \\
 &- \left[ \int_{A_c} E_c (\varepsilon_{cs} + \varepsilon_{c\Delta T}) dA_c + \int_{A_s} E_s (\varepsilon_{s\Delta T}) dA_s + \int_{A_p} E_p (\Delta\varepsilon_p + \varepsilon_{p\Delta T}) dA_p \right]
 \end{aligned}$$

El primer corchete de la última igualdad de la ecuación anterior es el valor del área homogeneizada de la sección (homogeneizada en hormigón). Si se toma el origen de la variable  $y$  en el c.d.g. de la sección homogeneizada el segundo corchete se anula, puesto que es el valor del momento estático de toda la sección. Teniendo esto en cuenta, la ecuación anterior queda:

$$\varepsilon_{cdg} = \frac{N - N_0}{E_c A_{\text{hom}}} \quad (6.9)$$

siendo:

$$N_0 = - \left[ \int_{A_c} E_c (\varepsilon_{cs} + \varepsilon_{c\Delta T}) dA_c + \int_{A_s} E_s (\varepsilon_{s\Delta T}) dA_s + \int_{A_p} E_p (\Delta\varepsilon_p + \varepsilon_{p\Delta T}) dA_p \right]$$

La ecuación de equilibrio de momentos toma la forma:

$$M = \Sigma M = \int_{A_c} E_c y (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \varepsilon_{cs} - \varepsilon_{c\Delta T}) dA_c + \int_{A_s} E_s y (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \varepsilon_{s\Delta T}) dA_s + \int_{A_p} E_p y (\varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta\varepsilon_p - \varepsilon_{p\Delta T}) dA_p$$

que se puede expresar como:

$$\phi = \frac{M - M_0}{E_c I_{hom}} \tag{6.10}$$

donde  $M_0$  es:

$$M_0 = - \left[ \int_{A_c} E_c y (\varepsilon_{cs} + \varepsilon_{c\Delta T}) dA_c + \int_{A_s} E_s y (\varepsilon_{s\Delta T}) dA_s + \int_{A_p} E_p y (\Delta\varepsilon_p + \varepsilon_{p\Delta T}) dA_p \right]$$

De las ecuaciones 6.9 y 6.10 deducimos que los valores  $N_0$  y  $M_0$  son los valores de axil y momento al que debe someterse la sección para que la deformación y la curvatura sean nulas. Ambas ecuaciones dan lugar a gráficas momento-curvatura y axil-deformación lineales, como se puede ver en la figura 6.12:

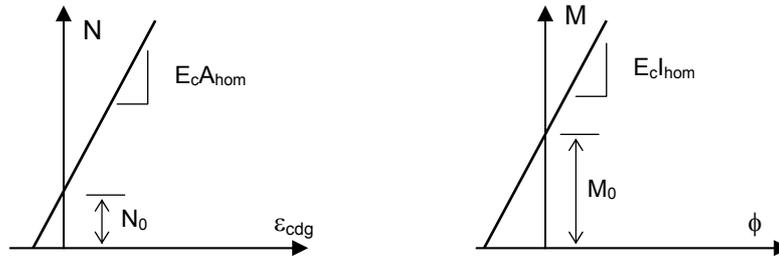


Figura 6.12. Gráficas axil-deformación del cdg y momento-curvatura

**Ejemplo –respuesta a corto plazo–**

**Consideremos** la sección transversal de una viga de hormigón pretensado representada en la figura 6.13.

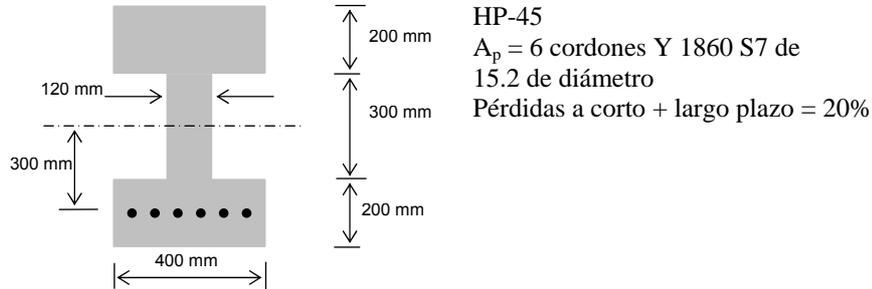


Figura 6.13. Sección transversal del ejemplo

El área de la armadura pretesa es  $A_p = 6 \cdot 140 = 840 \text{ mm}^2$ . La viga está inicialmente tesada al 70% de  $f_{pk}$ :  $P_0 = 0.7 \cdot 1860 \cdot 840 = 1093680 \text{ N}$ . La viga está sometida inicialmente a su peso propio más el hormigón fresco de una losa de 25 cm de espesor. Ambas cargas producen un momento en la mitad del vano de  $245 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Inicialmente vamos a suponer que no hay deformaciones atensionales (esto es, ni fluencia, ni relajación, ni retracción, ni cargas térmicas).

En primer lugar procedemos a calcular las características de la sección homogeneizada:

$$n = \frac{E_p}{E_c} = \frac{190000}{10000 \sqrt[3]{45+8}} = 5.06 \rightarrow n-1 = 4.06$$

$$A_{\text{hom}} = 2 \cdot 400 \cdot 200 + 120 \cdot 300 + 4.06 \cdot 840 = 199410 \text{ mm}^2$$

$$y_{\text{cdg}} = \frac{400 \cdot 200 \cdot 600 + 120 \cdot 300 \cdot 350 + 400 \cdot 200 \cdot 100 + 4.06 \cdot 840 \cdot 50}{199410} = 345 \text{ mm}$$

$$I_{\text{hom}} = \frac{1}{12} 400 \cdot 700^3 - \frac{1}{12} 280 \cdot 300^3 + 4.06 \cdot 840 \cdot 300^2 - 199410 \cdot (350 - 345)^2 = 1111 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

El siguiente paso consiste en calcular los valores de  $N_0$  y  $M_0$ . En el cálculo de  $N_0$ , puesto que todas las deformaciones atensionales son nulas, la única deformación que interviene es  $\Delta \varepsilon_p$ . El valor de  $N_0$  queda:

$$N_0 = - \int_{A_p} E_p \Delta \varepsilon_p dA_p = -E_p \Delta \varepsilon_p A_p = -190000 \cdot \frac{0.7 \cdot 1860}{190000} \cdot 840 = -1093.7 \text{ kN}$$

Como era de esperar, dado que no existen deformaciones atensionales,  $-N_0$  coincide con la fuerza de pretensado.

El valor de  $M_0$  es:

$$M_0 = - \int_{A_p} E_p y \Delta \varepsilon_p dA_p = E_p \Delta \varepsilon_p A_p (y_{cdg} - y_p) = 190000 \cdot \frac{0.7 \cdot 1860}{190000} \cdot 840 \cdot (345 - 50) = 322.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El siguiente paso consiste en calcular, para las acciones exteriores consideradas, el valor de las deformaciones y de las tensiones:

$$\varepsilon_{cdg} = \frac{N - N_0}{E_c A_{hom}} = \frac{1093680}{10000 \sqrt[3]{45 + 8 \cdot 199410}} = 1.46 \cdot 10^{-4}$$

$$\phi = \frac{M - M_0}{E_c I_{hom}} = \frac{(245 - 322.6) \cdot 10^6}{10000 \sqrt[3]{45 + 8 \cdot 1111 \cdot 10^7}} = -1.86 \cdot 10^{-7} \text{ rad / mm}$$

Los diagramas de deformaciones y de tensiones en la sección de momento máximo son los siguientes:



Figura 6.14. Deformaciones y tensiones en el hormigón

El momento máximo a corto plazo ( $M_{cr}$ ) que origina la tensión de tracción que agota el hormigón ( $f_{ctm} = 3.80 \text{ N/mm}^2$ ) se deduce de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cdg} + \phi y_{inf} &= \frac{f_{ctm}}{E_c} \rightarrow \phi = 7.165 \cdot 10^{-7} \text{ rad / mm} \rightarrow \\ &\rightarrow M_{cr} = M_0 + \phi E_c I_{hom} = 621.6 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Por último, veamos cómo queda la armadura de pretensado en el proceso a corto plazo cuando el momento máximo es de  $245 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta \varepsilon_p = 1.46 \cdot 10^{-4} - 295 \cdot (-1.86 \cdot 10^{-7}) - \frac{0.7 \cdot 1860}{190000} = -6.65 \cdot 10^{-3}$$

La tensión correspondiente es de  $1264 \text{ N/mm}^2$ , lo que supone una pérdida respecto a la tensión inicial de pretensado de un 3%..

### Ejemplo –respuesta a largo plazo-

A continuación procedemos a calcular la respuesta lineal a largo plazo, para lo cual se considerarán los fenómenos de retracción ( $\varepsilon_{cs}=0.42 \times 10^{-3}$ ) y fluencia ( $\varphi=2.5$ ) en el hormigón y el fenómeno de relajación en el acero (3%). El momento exterior es  $245 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

En primer lugar se han de calcular las nuevas propiedades de la sección homogeneizada. Como veíamos en el apartado anterior el módulo de deformación longitudinal del hormigón varía debido al fenómeno de fluencia y el nuevo módulo  $E_{c,ef}$  tiene un valor de:

$$E_{c,ef} = \frac{E_c}{1 + \varphi} = 10732 \text{ N/mm}^2$$

Debido a la relajación se produce una variación en el módulo de deformación longitudinal del acero (apartado 3.10) cuyo valor es  $E_{p,ef} = 0.97 \cdot 190000 = 184300 \text{ N/mm}^2$ . Con estos datos procedemos a calcular las características de la sección homogeneizada:

$$n = \frac{E_{p,ef}}{E_{c,ef}} = \frac{184300}{10732} = 17.17 \rightarrow n - 1 = 16.17$$

$$A_{\text{hom}} = 2 \cdot 400 \cdot 200 + 120 \cdot 300 + 16.17 \cdot 840 = 209583 \text{ mm}^2$$

$$y_{cdg} = \frac{400 \cdot 200 \cdot 600 + 120 \cdot 300 \cdot 350 + 400 \cdot 200 \cdot 100 + 16.17 \cdot 840 \cdot 50}{209583} = 331 \text{ mm}$$

$$I_{\text{hom}} = \frac{1}{12} 400 \cdot 700^3 - \frac{1}{12} 280 \cdot 300^3 + 16.17 \cdot 840 \cdot 300^2 - 209583 \cdot (350 - 331)^2 = 1195 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

El siguiente paso consiste en calcular los valores de  $N_0$  y  $M_0$ . Si no se consideran las deformaciones por temperatura (las deformaciones que intervienen son la de retracción y  $\Delta\varepsilon_p$ ) el valor de  $N_0$  queda:

$$N_0 = -\int_{A_c} E_{c,ef} \varepsilon_{cs} dA_c - \int_{A_p} E_{p,ef} \Delta \varepsilon_p dA_p = -E_{c,ef} \varepsilon_{cs} A_c - E_{p,ef} \Delta \varepsilon_p A_p = -1940.5 \text{ kN}$$

$$M_0 = -\int_{A_c} E_{c,ef} y \varepsilon_{cs} dA_c - \int_{A_p} E_{p,ef} y \Delta \varepsilon_p dA_p = -E_{c,ef} \varepsilon_{cs} A_c (350 - 331) +$$

$$+ E_{p,ef} \Delta \varepsilon_p A_p (y_{cdg} - y_p) = 281.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El siguiente paso consiste en calcular, para la acción exterior considerada, momento de  $245 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , el valor de las deformaciones y de las tensiones:

$$\varepsilon_{cdg} = \frac{N - N_0}{E_{c,ef} A_{hom}} = \frac{1940500}{10732 \cdot 209583} = 8.63 \cdot 10^{-4}$$

$$\phi = \frac{M - M_0}{E_{c,ef} I_{hom}} = \frac{(245 - 281.2) \cdot 10^6}{10732 \cdot 1195 \cdot 10^7} = -2.82 \cdot 10^{-7} \text{ rad / mm}$$

Los diagramas de deformaciones y de tensiones correspondientes a la sección de momento máximo son los indicados en la figura 6.15:



Figura 6.15. Deformaciones y tensiones en el hormigón a largo plazo

La deformación a largo plazo en el tendón es:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cdg} + \phi y - \Delta \varepsilon_p = 8.63 \cdot 10^{-4} - 281 \cdot (-2.82 \cdot 10^{-7}) - \frac{0.7 \cdot 1860}{190000} = -5.91 \cdot 10^{-3}$$

Esta deformación ocasiona una tensión en el tendón de  $1089 \text{ N/mm}^2$ , lo que representa una pérdida del  $11.4\%$  respecto al pretensado inicial.

## 6.6. AGOTAMIENTO FRENTE A SOLICITACIONES NORMALES

Comprobar una viga o un pilar a E.L.U. de agotamiento frente a solicitaciones normales mediante el planteamiento del apartado anterior no es práctico ya que, como se ha visto, la obtención de la respuesta a largo plazo ha resultado excesivamente compleja.

Tal y como se ha apuntado al principio del capítulo, el estudio del agotamiento frente a esfuerzos normales y flectores se realiza a nivel de la sección. Las hipótesis adoptadas para el estudio del comportamiento a nivel sección han sido: linealidad de deformaciones, comportamiento del material según modelos de agotamiento (capítulo 3) y equilibrio en la sección.

En agotamiento existe la posibilidad de emplear diagramas de cálculo tensión-deformación para el hormigón diferentes al empleado en el apartado anterior. En el capítulo 3 se presentaron el diagrama rectangular, parábola-rectángulo y bilineal como diagramas apropiados para el estudio de la sección en agotamiento. Estos diagramas tienen la ventaja fundamental de la facilidad de uso y de que consideran el fenómeno del cansancio del hormigón, si bien sólo se pueden aplicar en estados de rotura.

Para el acero se emplearán los diagramas especificados en el capítulo 3. Estos diagramas tensión-deformación son los mismos que los considerados en el apartado anterior.

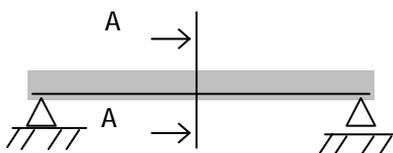
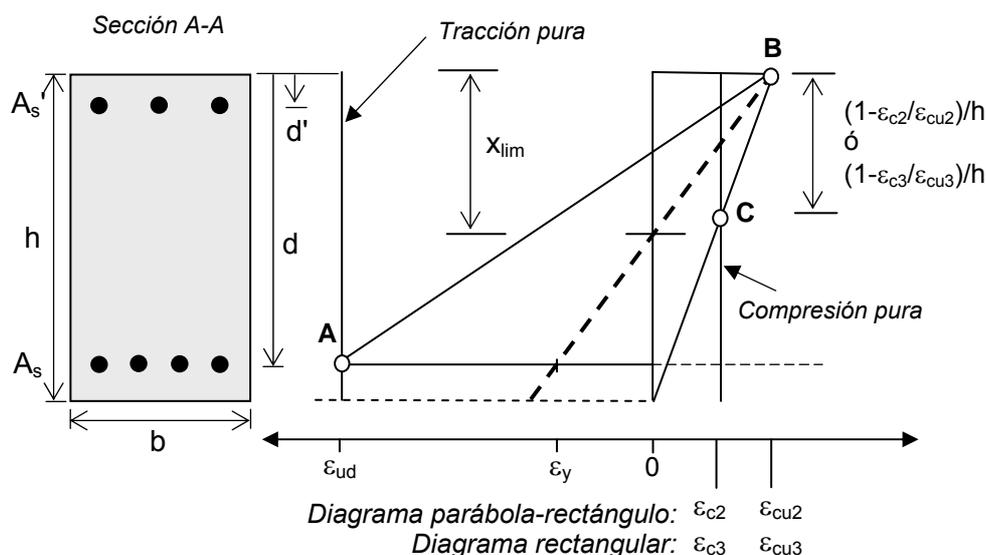


Figura 6.16. Sección transversal

Para el estudio de la sección transversal A-A de las figuras 6.16 y 6.17 se empleará la siguiente nomenclatura:  $d$  es el canto útil o distancia de la fibra superior al centro de gravedad de la armadura traccionada,  $d'$  es la distancia de la fibra superior al centro de gravedad de la armadura comprimida,  $h$  es la altura de la sección y  $b$  es el ancho.

La sección A-A de la figura 6.16 puede agotar por solicitaciones normales siguiendo distintos planos de deformación que van desde la tracción pura a la compresión pura, ver figura 6.17. La norma española y el Eurocódigo 2 describen toda una serie continua de planos de deformación que producen el agotamiento de la sección, divididos en lo que se denominan dominios de rotura, que a su vez se encuentran limitados por los siguientes planos de deformación:



- A Deformación última del acero en tracción
- B Deformación última del hormigón en compresión con flexión
- C Deformación última del hormigón en compresión pura

Figura 6.17. Dominios de rotura

**Plano 1:** toda la sección a tracción con una deformación de  $\epsilon_{ud}$  (10‰ según la EHE) lo que agota el acero a tracción. El hormigón obviamente ya se ha agotado antes a tracción. Este plano corresponde a la “tracción pura”, ver figura 6.17.

**Plano 2:** el acero inferior está traccionado con una deformación  $\epsilon_{ud}$  (10‰ según la EHE) y la zona superior de la viga no presenta deformación. En este plano también agota al acero a tracción. Este plano no está representado en la Figura 6.17<sup>5</sup>.

**Plano 3:** el acero inferior está traccionado con una deformación  $\epsilon_{ud}$  (10‰ según la EHE) y la zona superior de la viga está a compresión con una deformación de  $\epsilon_{cu2}$  ó  $\epsilon_{cu3}$ <sup>6</sup> (ambas iguales al 3.5‰ según la EHE para hormigones con resistencia inferior a 50 MPa). En este plano de deformación el acero agota a tracción y el hormigón agota a compresión.

<sup>5</sup> El lector puede dibujarlo e ir numerando sobre el dibujo los distintos planos y dominios de rotura.

<sup>6</sup> La deformación máxima del hormigón a compresión se tomará  $\epsilon_{cu2}$  ó  $\epsilon_{cu3}$  según se emplee el diagrama parábola-rectángulo o el diagrama rectangular respectivamente.

Los planos 1, 2 y 3 pasan por el punto A de la figura 6.17. Todos los infinitos planos de rotura comprendidos entre el plano 1 y 3 pivotan en torno al punto A y tienen en común que en ellos el acero inferior agota a tracción.

**Plano 4:** el acero inferior está a tracción, con una deformación  $\varepsilon_y = f_{yd}/E_s$  y la fibra superior de la viga está a compresión con una deformación de  $\varepsilon_{cu2}$  ó  $\varepsilon_{cu3}$  (ambas iguales al 3.5‰ según la EHE para hormigones de resistencia inferior a 50 MPa). El hormigón agota a compresión. En este plano de rotura la profundidad de la fibra neutra se denomina *profundidad límite* ( $x_{lim}$ ). Es muy interesante observar que este plano de deformación produce mayor momento flector que el plano anterior. Esto se debe a que el acero inferior tanto en el plano 3 como en éste trabaja a  $f_{yd}$ , no obstante, en este plano la zona comprimida del hormigón es mayor que la correspondiente al plano 3. Este plano está representado en la figura 6.17 por una línea discontinua de trazo grueso.

**Plano 5:** el acero inferior tiene tensión nula y la zona superior de la viga está a compresión con una deformación de  $\varepsilon_{cu2}$  ó  $\varepsilon_{cu3}$ . La fibra neutra en este plano se sitúa al nivel del acero inferior. Este plano no está representado en la Figura 6.17.

**Plano 6:** la fibra inferior tiene tensión nula y la zona superior de la viga está a compresión con una deformación de  $\varepsilon_{cu2}$  ó  $\varepsilon_{cu3}$ . La fibra neutra en este plano se sitúa en la fibra inferior de la viga.

Los planos 3, 4, 5 y 6 pasan por el punto B de la figura 6.17. Todos los infinitos planos de rotura comprendidos entre el plano 3 y el plano 6 pivotan en torno al punto B y agotan el hormigón a compresión.

**Plano 7:** agota la viga a compresión pura, con una deformación de  $\varepsilon_{c2}$  ó  $\varepsilon_{c3}$ <sup>7</sup> (ambas iguales al 2.0‰ según la EHE para hormigones de resistencia inferior a 50 MPa).

El dominio 1 está comprendido entre los planos 1 y 2; el dominio 2 entre los planos 2 y 3; el dominio 3 está comprendido entre los planos 3 y 4; El dominio 4 entre los planos 4 y 6; y el dominio 5 entre los planos 6 y 7.

Como hemos dicho antes, del plano 1 al plano 3 se puede pasar de forma continua pivotando entorno al punto A; del plano 3 al plano 6 se puede pasar pivotando en torno al punto B; y del plano 6 al 7 entorno al punto C. En el caso de utilizar el modelo bilineal del acero sin endurecimiento<sup>8</sup>, el EC2 no limita la deformación en tracción y como consecuencia el pivote A desaparece y los planos de rotura se configuran exclusivamente con dos pivotes B y C<sup>9</sup>.

<sup>7</sup> La deformación máxima del hormigón a compresión pura se tomará  $\varepsilon_{c2}$  ó  $\varepsilon_{c3}$  según se emplee el diagrama parábola-rectángulo o el diagrama rectangular, respectivamente.

<sup>8</sup> Se denomina endurecimiento nulo cuando no se producen aumentos de tensiones para deformaciones superiores a la correspondiente al límite elástico  $f_y/E_s$  (ver figura 3.19).

<sup>9</sup> Estos dominios de rotura además pueden variar dependiendo de la normativa empleada. La norma suiza SIA-165 o la americana ACI-318 no emplean el punto C y no

Cada uno de estos planos de deformación son planos de agotamiento por rotura y para producir la deformación asociada a cada plano se necesitarán unos esfuerzos exteriores (axil y momento flector) que, obviamente, serán distintos para cada plano de deformación.

Como se veía en el apartado 6.2 en 2-D un plano de deformación queda definido sólo con dos variables, generalmente la deformación en el centro de gravedad ( $\varepsilon_{cdg}$ ) y la curvatura ( $\phi$ ), ver figura 6.3. Es interesante observar que un plano de rotura queda definido exclusivamente con una variable, que puede ser la profundidad de la fibra neutra,  $x$ . O sea, a cada valor de la profundidad de la fibra neutra le corresponde un único valor de plano de rotura y viceversa. Como hemos dicho anteriormente, para el modelo bilineal del acero sin endurecimiento el EC2 no limita la deformación en tracción y como consecuencia el pivote A desaparece, no existiendo en este caso valores negativos de la profundidad de la fibra neutra:  $x$  variará de  $0$  a  $+\infty$ .

La figura 6.17 representa los dominios de rotura o dominios de deformación para flexión positiva, esto es, la zona comprimida está en la parte superior y la zona traccionada en la parte inferior de la sección transversal. Se pueden obtener dominios de deformación, similares a los de la figura 6.17, para flexión negativa (ver figura 6.28). Esto se verá al final del ejemplo siguiente.

Se denomina *diagrama de interacción*<sup>10</sup> a un gráfico M-N donde están representados todos los pares ( $M,N$ ) que producen planos de rotura. El diagrama de interacción es un grafo cerrado donde los pares ( $M,N$ ) que quedan fuera de él no podrán ser resistidos por la sección considerada (cada sección tiene un diagrama de interacción propio) mientras que los pares del interior sí podrán ser resistidos por la sección.

---

plantean diferencia entre agotamiento a compresión con flexión y agotamiento a compresión pura. La norma Americana ACI-318 tampoco limita la deformación del acero a tracción y todos sus dominios de rotura se pueden deducir pivotando en un solo punto (equivalente al punto B de la figura 6.17).

<sup>10</sup> Los diagramas de interacción axil-flector fueron introducidos por Whitney en 1956.

**Ejemplo resuelto**

La figura 6.18 corresponde a la sección transversal de una viga de hormigón armado. Se pretende calcular el diagrama de interacción de la sección aplicando el diagrama rectangular del hormigón y el parábola-rectángulo. Se aplicará la norma española EHE. El hormigón es del tipo HA-30 y el acero es B-500-S. La armadura superior está compuesta por 6 redondos  $\varnothing 12$  y la armadura inferior por 6 redondos  $\varnothing 20$ . El ambiente considerado es del tipo IIb, por lo que el recubrimiento mínimo será:  $30 \text{ mm}$  (recubrimiento nominal) +  $10 \text{ mm}$  de margen =  $40 \text{ mm}$ , que es mayor que el diámetro de las armaduras principales y mayor de 1.25 el tamaño máximo de árido. Si al recubrimiento de  $40 \text{ mm}$  le sumamos  $10 \text{ mm}$  por el cerco +  $10 \text{ mm}$  correspondientes al radio de un redondo de  $\varnothing 20$ , se obtiene  $60 \text{ mm}$ . A estos  $60 \text{ mm}$  se les suele denominar recubrimiento mecánico. La distancia del c.d.g. de las armaduras inferiores hasta el paramento inferior es de  $60 \text{ mm}$ . Tomaremos también  $60 \text{ mm}$  como recubrimiento mecánico en el paramento superior (con esta hipótesis estamos del lado de la seguridad).

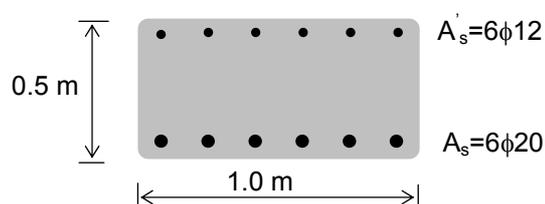


Figura 6.18. Sección transversal

Las resistencias de cálculo del hormigón y del acero son, respectivamente:

$$f_{cd} = \frac{30}{1.5} = 20.0 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{500}{1.15} = 434.78 \text{ N/mm}^2$$

Los valores de las áreas de acero son  $A'_s = 6\varnothing 12 = 679 \text{ mm}^2$  y  $A_s = 6\varnothing 20 = 1884 \text{ mm}^2$ .

**Plano 1**

Todos los pares M, N que se van a calcular están referenciados a c.d.g. de la sección bruta. Vamos a calcular el valor de M y N necesario para inducir a la sección de la figura 6.18 una deformación como la representada en el plano 1 de la figura 6.17. La resistencia a tracción del hormigón es nula puesto que estamos en rotura y planteando equilibrio de axiles y momentos en el c.d.g. de la sección bruta (figura 6.19) se tiene:

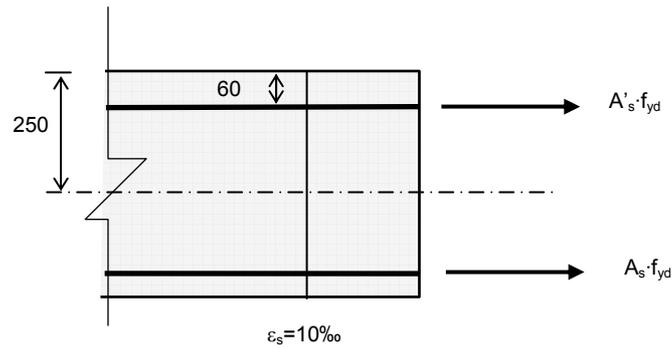


Figura 6.19. Plano 1

$$N_d = \sum N = -f_{yd} (A_s + A'_s) = -1114.34 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} (A_s - A'_s) \cdot (250 - 60) = 99.54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El par  $(N, M)$  para el plano 1 es  $(-1114.34; 99.54)$ .

### Plano 2

Antes de calcular el par  $(N, M)$  para el plano de rotura número 2 es preciso calcular la deformación a nivel de la armadura superior ( $\varepsilon'_s$ ). Para ello tendremos en cuenta la hipótesis de linealidad de la deformación:

$$\frac{0.01}{500 - 60} = \frac{\varepsilon'_s}{60} \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.00136$$

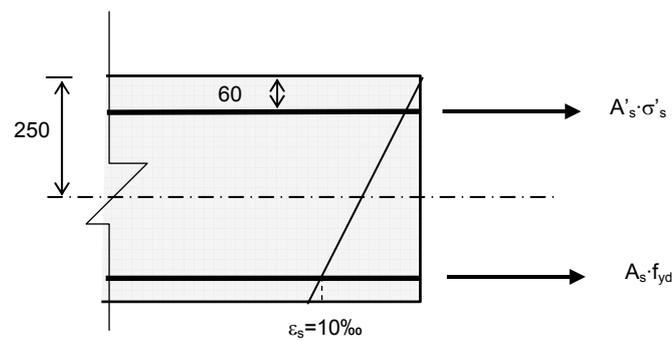


Figura 6.20. Plano 2

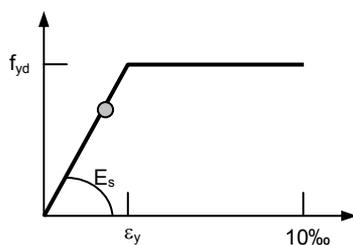


Figura 6.21. Diagrama de cálculo del acero

Puesto que la deformación  $\varepsilon'_s$  es menor que  $\varepsilon_y = f_{yd}/E_s = 0.00217$  el valor de la tensión en la armadura se puede obtener a partir del diagrama de la figura 6.21 como:

$$\sigma'_s = 200000 \cdot 0.00136 = 272 \text{ N/mm}^2 \leq f_{yd}$$

Estableciendo el equilibrio de axiles y de momentos en el c.d.g. de la sección bruta, se obtiene que:

$$N_d = \sum N = -f_{yd} \cdot A_s - \sigma'_s \cdot A'_s = -1003.81 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 - \sigma'_s \cdot A'_s \cdot 190 = 120.54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y, por tanto, el par  $(N, M)$ , para el plano 2 es  $(-1003.81; 120.54)$ .

**Plano 3**

El plano 3 queda definido por una deformación del 3.5‰ en la fibra extrema superior (a compresión) y una deformación del 10‰ en el acero de la zona inferior (a tracción).

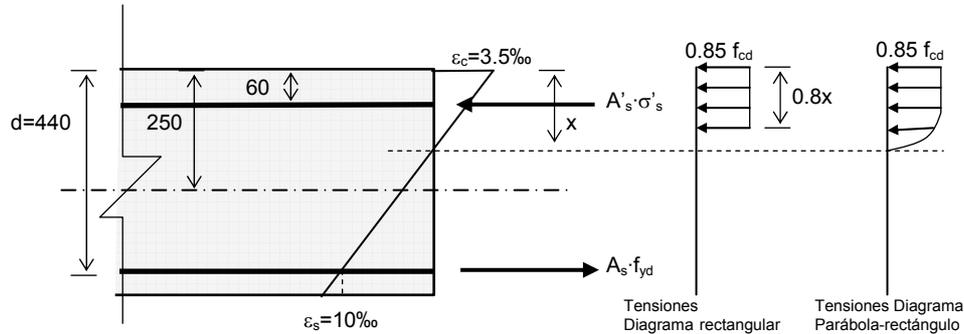


Figura 6.22. Plano de rotura nº3. Diagrama de tensiones

El cálculo de las fuerzas generadas en las armaduras superior e inferior se realiza de la misma forma que en los planos anteriores. En el caso de la armadura superior habrá que calcular la deformación para comprobar si es superior o inferior a  $\varepsilon_y$ .

En este caso la fibra neutra está situada a una distancia  $x$  respecto al extremo superior (profundidad de la fibra neutra):

$$\frac{d}{10 + 3.5} = \frac{x}{3.5} \Rightarrow x = 114 \text{ mm}$$

Conocida la profundidad de la fibra neutra se procede a calcular la deformación de la armadura superior:

$$\frac{0.035}{114} = \frac{\varepsilon'_s}{114 - 60} \Rightarrow \varepsilon'_s = 0.001658 < \varepsilon_y \Rightarrow \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon_y = 331.6 \text{ N/mm}^2$$

Para calcular la contribución de la zona de compresión del hormigón se van a considerar dos hipótesis distintas respecto al comportamiento mecánico del hormigón: el diagrama rectangular y el diagrama parábola-rectángulo.

Aplicando el diagrama rectangular la resultante de las compresiones sobre el hormigón toma el valor  $N_c = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot 0.8x \cdot b = 0.85 \cdot 20 \cdot 0.8 \cdot 114 \cdot 1000 = 1550 \text{ kN}$ .

Para aplicar el diagrama parábola-rectángulo hemos de tener en cuenta que el valor de la tensión  $\sigma_c$  varía en función de  $y$ , o sea, según la fibra que se esté considerando, tal y como podemos ver en las figuras 3.8 y 6.22. Se toman los valores:

$$\sigma_c = 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot f_c \cdot (1 - 250\varepsilon_c) \quad \text{para } \varepsilon_c \leq 0.002$$

$$\sigma_c = f_c = 0.85 \cdot f_{cd} \quad \text{para } 0.002 \leq \varepsilon_c \leq 0.0035$$

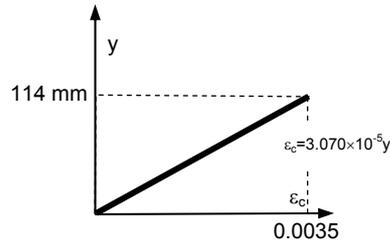


Figura 6.23. Ley de deformaciones del hormigón

Si se adopta un sistema de referencia con origen en la fibra neutra (figura 6.23) la deformación del hormigón  $\varepsilon_c$  obedece a la expresión  $\varepsilon_c = 3.071 \cdot 10^{-5} \cdot y$ . La deformación de 0.002 corresponde a un  $y = 65 \text{ mm}$  y el valor de  $N_c$  es:

$$N_c = \int_0^{114} \sigma_c \cdot dA = \int_0^{114} \sigma_c \cdot b \cdot dy =$$

$$= \int_0^{65} 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot 0.85 f_{cd} \cdot (1 - 250 \cdot \varepsilon_c) \cdot b \cdot dy + \int_{65}^{114} 0.85 f_{cd} \cdot b \cdot dy = 1569 \text{ kN}$$

De la misma forma, el momento producido por las compresiones en el hormigón respecto al c.d.g. de la sección bruta, según el método del diagrama rectangular es:

$$M_c = N_c \cdot (250 - 0.4 \cdot x) = 1550000(250 - 0.4 \cdot 114) = 316.82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y según el diagrama parábola-rectángulo:

$$M_c = \int_0^{114} (y + (250 - 113.96)) \cdot \sigma_c \cdot b \cdot dy =$$

$$= \int_0^{65} (y + (250 - 113.96)) \cdot 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot f_c \cdot (1 - 250\varepsilon_c) \cdot b \cdot dy +$$

$$+ \int_{65}^{114} (y + (250 - 113.96)) \cdot 0.85 f_{cd} \cdot b \cdot dy = 317.88 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Planteando la resultante de axiles y de momentos en el c.d.g. de la sección bruta según el diagrama rectangular:

$$N_d = \sum N = -f_{yd} \cdot A_s + \sigma'_s \cdot A'_s + N_c = 956 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot 190 + 316.84 = 515.23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y mediante el diagrama parábola-rectángulo:

$$N_d = \sum N = -f_{yd} \cdot A_s + \sigma'_s \cdot A'_s + N_c = 975.03 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot 190 + 317.71 = 516.29 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Los pares  $(N, M)$  para el plano 3 son: para el diagrama rectangular  $(956.00; 515.23)$  y para el diagrama parábola rectángulo  $(975.03; 516.29)$ .

**Plano 4**

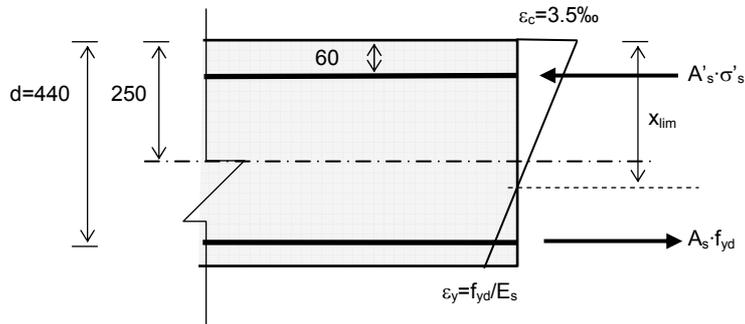


Figura 6.24. Plano de rotura n°4

Establecemos la compatibilidad de deformaciones para calcular el valor de  $x_{lim}$ :

$$\frac{0.0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{d} = \frac{0.0035}{x_{lim}} \Rightarrow x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{f_{yd}}{0.0035 \cdot E_s}} = 271 \text{ mm}$$

La deformación por unidad de longitud de la armadura superior ( $\epsilon'_s$ ) es:

$$\frac{0.0035}{x_{lim}} = \frac{\epsilon'_s}{x_{lim} - 60} \Rightarrow \epsilon'_s = 0.00273$$

Esta deformación es mayor que  $\epsilon_y = f_{yd}/E_s = 0.00217$  y, por tanto, el acero de la armadura superior trabaja a  $f_{yd}$ .

Estableciendo el equilibrio de axiles y momentos en el c.d.g. de la sección bruta tenemos:

- Según el diagrama rectangular del hormigón:

$$N_d = \sum N = -f_{yd} \cdot A_s + f_{yd} \cdot A'_s + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8x_{lim} = 3161.69 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 + f_{yd} \cdot A'_s \cdot 190 + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8x_{lim} \cdot (h/2 - 0.4x_{lim}) = 733.61 \text{ kN} \cdot m$$

- Según el diagrama parábola-rectángulo del hormigón:

La deformación del hormigón responde a la ley que  $\varepsilon_c = 1.29 \cdot 10^{-5} \cdot y$ , luego la deformación de  $0.002$  corresponde a  $y = 155 \text{ mm}$ , y los valores de  $N_d$  y  $M_d$  son:

$$N_d = \sum N = -f_{yd} \cdot A_s + f_{yd} \cdot A'_s + \int_0^{155} 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot 0.85f_{cd} \cdot (1 - 250 \cdot \varepsilon_c) \cdot b \cdot dy + \int_{155}^{271} 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot dy = 3204.54 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 + f_{yd} \cdot A'_s \cdot 190 + \int_0^{271} \sigma_c \cdot b \cdot (y - (x - h/2)) \cdot dy =$$

$$= f_{yd} \cdot A_s \cdot 190 + f_{yd} \cdot A'_s \cdot 190 +$$

$$+ \int_0^{155} 1000 \cdot \varepsilon_c \cdot 0.85f_{cd} \cdot (1 - 250 \cdot \varepsilon_c) \cdot b \cdot (y - (x - h/2)) \cdot dy +$$

$$+ \int_{155}^{271} 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (y - (x - h/2)) \cdot dy = 722.06 \text{ kN} \cdot m$$

Los pares  $(N, M)$  para el plano 4 son:  $(3161.69; 733.61)$  para el diagrama rectangular y  $(3204.54; 722.06)$  para el parábola-rectángulo.

**Plano 5**

En este plano, la armadura superior trabaja a  $f_{yd}$  (dado que en el plano anterior ya trabajaba a esa tensión) y la deformación ahora será ligeramente superior. La armadura inferior no trabaja puesto que la fibra neutra coincide con el canto útil.

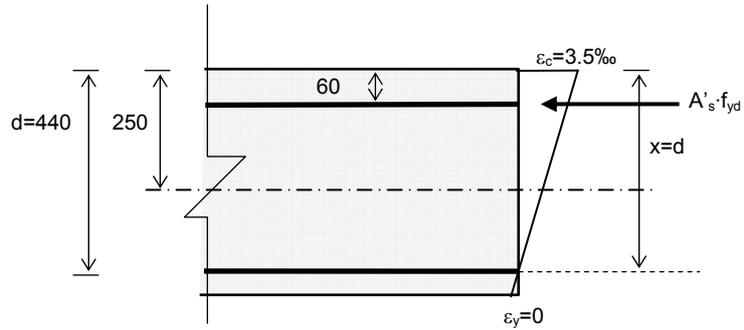


Figura 6.25. Plano de rotura n°5

Las ecuaciones de equilibrio según el diagrama rectangular del hormigón son:

$$N_d = \sum N = f_{yd} \cdot A'_s + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot d = 6279.20 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A'_s \cdot 190 + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot d \cdot (h/2 - 0.4 \cdot d) = 498.91 \text{ kN} \cdot m$$

**Plano 6**

En este plano la armadura superior trabaja a  $f_{yd}$ , la inferior trabaja a la tensión correspondiente a su deformación y la fibra neutra coincide con la fibra inferior.

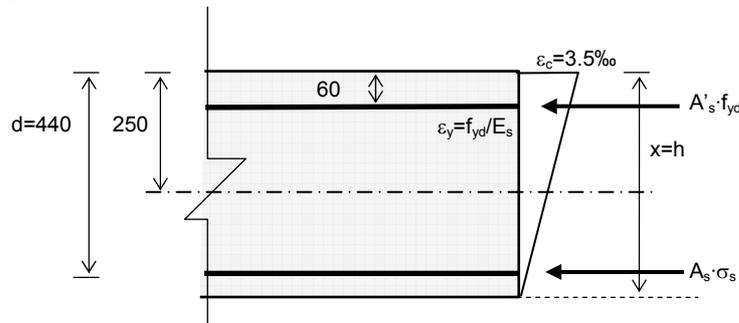


Figura 6.26. Plano de rotura n°6

Establecemos compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{\varepsilon_s}{60} = \frac{0.0035}{500} \Rightarrow \varepsilon_s = 0.00042 \Rightarrow \sigma_s = 84 \text{ N/mm}^2$$

Las ecuaciones de equilibrio para el diagrama rectangular del hormigón dan los siguientes resultados:

$$N_d = \sum N = f_{yd} \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot h = 7253.50 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A'_s \cdot 190 - \sigma_s \cdot A_s \cdot 190 + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot h \cdot (h/2 - 0.4 \cdot h) = 366.02 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### Plano 7

En este plano la deformación es constante a compresión y de valor  $0.002$ .

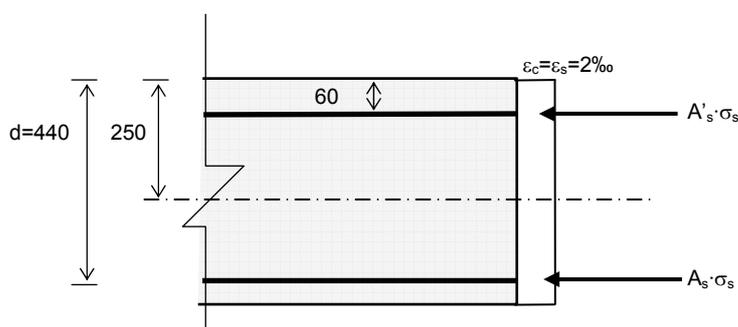


Figura 6.27. Plano de rotura n°7

Estableciendo el equilibrio, tenemos:

$$N_d = \sum N = 400 \cdot A'_s + 400 \cdot A_s + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h = 9525.20 \text{ kN}$$

$$M_d = \sum M = 400 \cdot A'_s \cdot 190 - 400 \cdot A_s \cdot 190 = -91.58 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Hasta aquí hemos analizado la sección cuando la parte superior de la sección transversal está comprimida, lo que se conoce como flexión positiva. En el caso de que la compresión esté situada en la parte inferior aparecen otros 7 planos de deformación, que corresponderían a la flexión negativa. El primero y el último de estos planos coinciden con los de la flexión positiva. El esquema de estos nuevos 7 planos está representado en la figura 6.28.

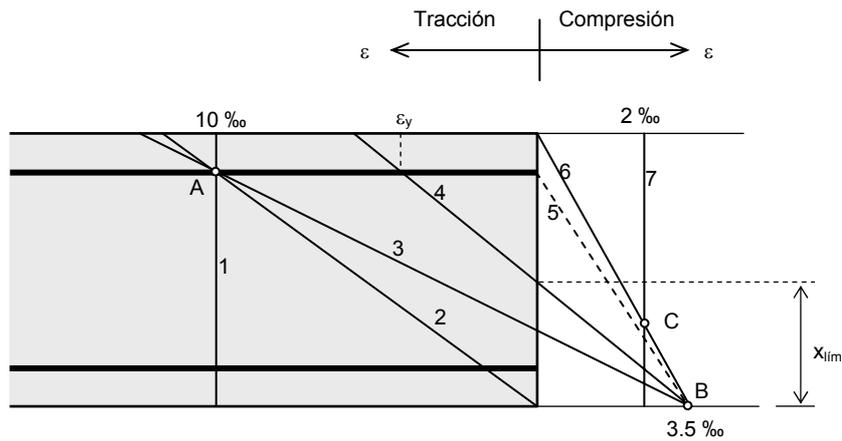


Figura 6.28. Planos de deformación en flexión negativa

Los resultados, tanto para flexión positiva como negativa, de los pares  $N_d$  y  $M_d$  vienen reflejados en la tabla 6.2 y se representan en la figura 6.29.

Para la confección del diagrama de interacción  $N$ - $M$  se deberían tomar los infinitos planos de rotura que pivotan entorno a los puntos A, B y C de las figuras 6.17 y 6.28. La figura 6.29 está confeccionada con planos de rotura espaciados entre sí  $1 \text{ mm}$ , variando  $x$  desde  $-h$  hasta  $2h$ , tanto para flexión positiva como para flexión negativa.

Tabla 6.2. Planos de deformación en rotura

Plano	$N_d$ (kN)	$M_d$ (kN·m)
Flexión positiva		
1	-1114.34	99.54
2	-1003.81	120.54
3	956.00	515.23
4	3161.69	733.61
5	6279.20	498.91
6	7253.50	366.02
7	9525.20	-91.58
Flexión negativa		
2	-808.00	41.27
3	1879.22	-491.69
4	4209.51	-733.61
5	6803.13	-598.45
6	7676.16	-484.80

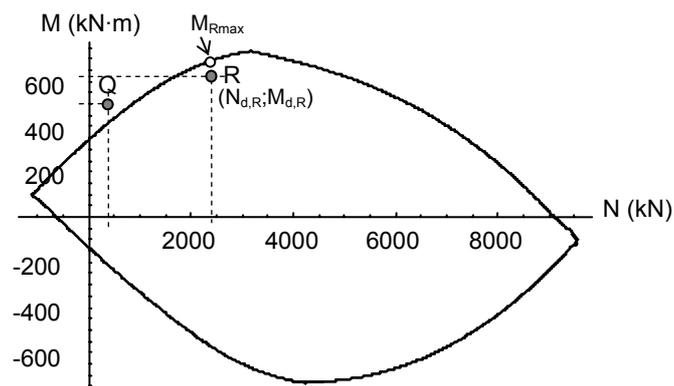


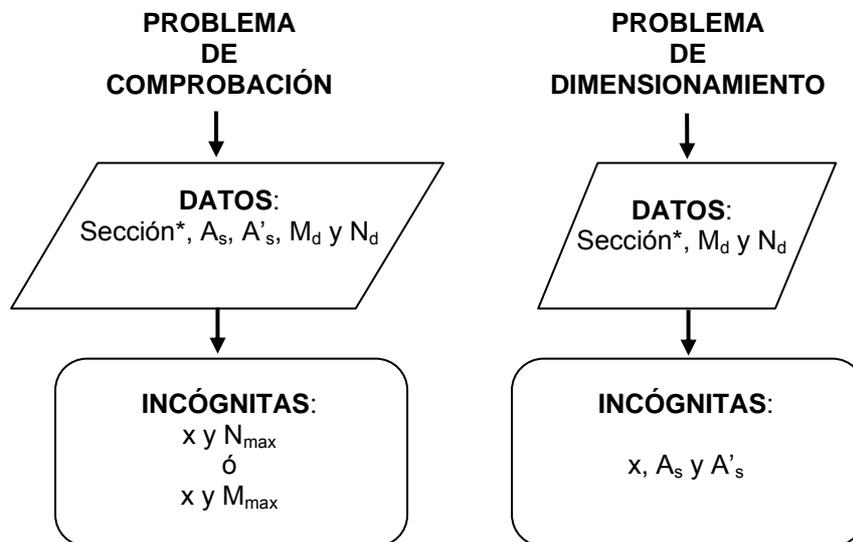
Figura 6.29. Diagrama de interacción

Los diagramas de interacción Axil-Flector permiten comprobar de manera inmediata si una determinada sección transversal (definidas geoméricamente la parte de hormigón y la de acero) resiste o no una sollicitación dada por el par  $(N-M)$ . Un ejemplo de esto se ha indicado en la figura 6.29: el par que define el punto  $R$   $(N_{d,R}; M_{d,R})$  es resistido por la sección (no provoca la rotura de la misma) mientras que el par definido por el punto  $Q$   $(N_{d,Q}; M_{d,Q})$  agota a la sección.

## 6.7. FLEXIÓN SIMPLE Y FLEXIÓN COMPUESTA UNIAXIAL

Se dice que una sección está sometida a *flexión pura* cuando la única sollicitación a la que está sometida es un momento flector aplicado en un eje principal de inercia. Se define *flexión simple* cuando la sección está sollicitada por un momento flector en un eje principal de inercia más un cortante. *Flexión compuesta* o *flexión compuesta uniaxial* se presenta cuando la sección está sollicitada a flexión pura o simple más un esfuerzo axial. En el caso de que el momento flector no actúe sobre un eje principal de inercia, o bien, si actúan dos momentos flectores sobre la sección, se habla de *flexión esviada* o *flexión biaxial*.

El estudio del agotamiento de una sección sometida a flexión simple o compuesta uniaxial se puede plantear desde dos puntos de vista: *el problema de comprobación* y *el problema de dimensionamiento*, esquematizados de la siguiente forma:



\*Por sección nos referimos a la geometría del hormigón de la sección transversal.

Figura 6.30. Los problemas de comprobación y dimensionamiento en flexión uniaxial

El equilibrio a nivel sección se plantea en las ecuaciones 6.5, que por comodidad se vuelven a escribir a continuación<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> No se considera el acero de pretensado.

$$\begin{aligned}
 N_d &= \Sigma N = \int_{A_c} \sigma_c dA_c + \int_{A'_s} \sigma'_s dA'_s - \int_{A_s} \sigma_s dA_s \\
 M_d &= \Sigma M = \int_{A_c} \sigma_c y dA_c + \int_{A'_s} \sigma'_s y dA'_s + \int_{A_s} \sigma_s y dA_s
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Si se disponen dos niveles de armadura, situados a una distancia  $d'$  y  $d$  de la fibra superior (ver Figura 6.17), las ecuaciones de equilibrio anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 N_d &= \Sigma N = -\sigma_s \cdot A_s + \sigma'_s \cdot A'_s + N_c \\
 M_d &= \Sigma M = \sigma_s \cdot A_s \left(d - \frac{h}{2}\right) + \sigma'_s \cdot A'_s \left(\frac{h}{2} - d'\right) + N_c \cdot y_{Nc}
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

donde  $N_c$  es la resultante de las compresiones en el hormigón, que depende de  $x$  (profundidad de la fibra neutra);  $y_{Nc}$  es la distancia al centro de gravedad de la sección bruta de la fuerza resultante de las compresiones en el hormigón, que también depende de  $x$ .

### 6.7.1. El problema de comprobación

El problema de comprobación consiste en determinar si una sección totalmente definida es capaz de resistir un determinado par axil-flector que la solicita  $N_d$ - $M_d$ .

En un problema de comprobación, en las ecuaciones 6.11 y 6.12 se conocen los siguientes parámetros: la sección (su forma geométrica), el área de la armadura ( $A_s$  y  $A'_s$ ) y también las acciones que actúan sobre la sección ( $N_d$  y  $M_d$ ). Las incógnitas en el problema de comprobación son  $x$  y  $M_{max}$  (o bien  $x$  y  $N_{max}$ ), tal y como se ha indicado en el esquema de la figura 6.30. Para entender lo que esto significa, volvamos al ejemplo resuelto del apartado 6.6, en el que la sección y las armaduras eran conocidas y, por tanto, era posible realizar el correspondiente diagrama de interacción N-M: figura 6.29. Basta con comprobar que un determinado par ( $N_d, M_d$ ) queda dentro del diagrama para asegurar que la sección no agota. Este planteamiento, obviamente, es demasiado costoso no siendo necesario realizar el diagrama de interacción N-M para comprobar si una determinada sección resiste un par de esfuerzos ( $N_d, M_d$ ). Un planteamiento más directo y menos costoso es el siguiente: sea el punto R ( $N_{d,R}, M_{d,R}$ ) representado en la figura 6.29, de la primera de las ecuaciones 6.12 imponemos  $N_d = N_{d,R}$  y despejamos el valor de  $x$ <sup>2</sup>; de la segunda de las ecuaciones 6.12 imponiendo el valor de  $x$  anterior obtenemos un momento que denominamos  $M_{Rmax}$  (figura 6.29). Si  $M_{d,R} > M_{Rmax}$  la sección no soportará el par ( $N_{d,R}, M_{d,R}$ ) mientras que si, por el contrario, es menor la sección podrá soportar este par.

<sup>2</sup> Obsérvese que el valor de la tensión de las armaduras no es incógnita sino que se puede expresar en función de la profundidad de la fibra neutra ( $x$ ). Téngase en cuenta que a cada valor de  $x$  le corresponde un único plano de deformación de agotamiento.

De la misma forma se podía haber optado por imponer en la segunda de las ecuaciones de equilibrio 6.12 que  $M_d = M_{d,R}$  y despejar  $x$ , introducir  $x$  en la primera de las ecuaciones de equilibrio y obtener un  $N_{Rmax}$ <sup>3</sup>.

### 6.7.2 El problema de dimensionamiento

Dimensionar (o armar) una sección transversal consiste en calcular la armadura ( $A_s$  y  $A'_s$ ) necesaria para que la sección resista un determinado par  $(N_d, M_d)$ <sup>4</sup>. En este caso en las ecuaciones 6.12 el número de incógnitas es 3:  $x$ ,  $A_s$  y  $A'_s$  siendo sólo dos las ecuaciones de equilibrio. Luego el problema tiene infinitas soluciones.

A lo largo de la historia del cálculo de hormigón (más de un siglo) la obtención de una solución de  $A_s$  y  $A'_s$  se ha enfocado de distintas formas, no exentas de polémicas en cuanto a su rango de aplicación (Páez 1986). Debido a que la capacidad de cálculo era muy reducida, en comparación con la actual, tradicionalmente el problema se planteaba reduciendo el número de incógnitas mediante hipótesis adicionales, las más habituales son:

- $A_s = A'_s$ , hipótesis típica para pilares
- $A'_s = 0$  hipótesis típica en vigas descolgadas, en las que no sea necesario disponer armadura de compresión.
- Imponer  $x = x_{lim}$ .

Estas hipótesis simplificatorias se siguen utilizando hoy día y, de hecho, es habitual en los programas de cálculo proporcionar directamente la solución de armadura simétrica si el axil es distinto de cero ( $N_d \neq 0$ ).

El problema de dimensionamiento en el caso de dos niveles distintos de armadura tiene infinitas soluciones. Puesto que este infinito es de grado 1 (o sea el número de incógnitas – número de ecuaciones = 1) las infinitas soluciones se pueden representar gráficamente. Los **diagramas de armado a flexión o RSD**<sup>5</sup> (del inglés *Reinforcement Sizing Diagrams*) son una representación de las infinitas soluciones del problema de armado en función de la profundidad de la fibra neutra. En el eje de abscisas se representa la profundidad de la fibra neutra y en el eje de ordenadas se representa área de armadura. Los RSD tienen generalmente tres gráficas ( $A_s$ ,  $A'_s$  y  $A_s + A'_s$ ). Veamos un ejemplo de su aplicación.

<sup>3</sup> ¿Podría el lector situar  $N_{Rmax}$  en la figura 6.29 y deducir la inecuación de resistencia?

<sup>4</sup> Nos centramos en una sección transversal rectangular con armadura sólo en dos capas. En el caso de que hubiera más de dos capas de armadura el problema sería más complejo, pero en síntesis el planteamiento es idéntico.

<sup>5</sup> Introducidos en Hdz-Montes et al. en 2003.

**Ejemplo**

La figura 6.31 corresponde a un ejemplo de la publicación de la ACI SP-17(97). Para una sección transversal de  $(508 \times 406 \text{ mm})$  solicitada por un par axial-momento de  $3560 \text{ kN} - 754 \text{ kN}\cdot\text{m}$  sólo se proporciona la solución simétrica. En nuestro caso se han representado todas las posibles soluciones mediante un diagrama RSD de armado a flexión. El hormigón tiene una resistencia de  $27,6 \text{ MPa}$  ( $4 \text{ ksi}$ ) y el acero de  $414 \text{ MPa}$  ( $60 \text{ ksi}$ ).

En el diagrama RSD de armado a flexión se pueden observar todas las soluciones posibles. En nuestro caso se puede ver como la solución asimétrica puede suponer un ahorro hasta del 40% sobre la solución simétrica. El ejemplo está totalmente desarrollado en Hernández-Montes et al. (2005).

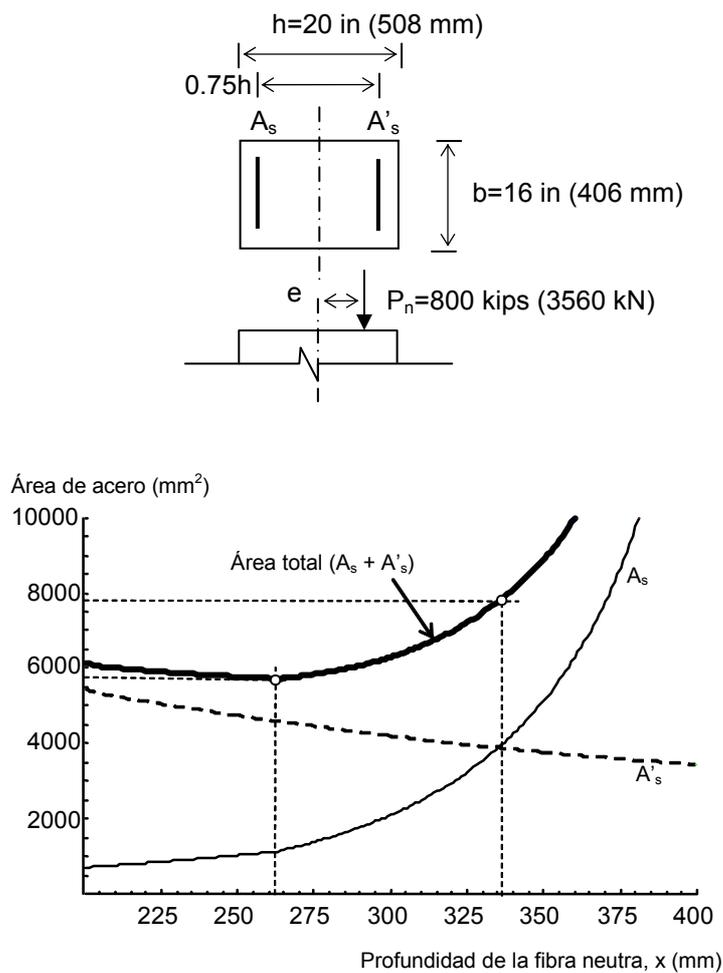


Figura 6.31. Ejemplo tomado de la publicación ACI- SP-17(97)

• Teorema de armado a flexión

En el caso de secciones transversales rectangulares con dos niveles de armadura se verifica que, de entre las infinitas posibilidades de armar la sección de hormigón en rotura, el mínimo de armadura ( $A_s + A'_s$ ) es una de las siguientes soluciones<sup>6</sup>:

- $A_s=0$  y/o  $A'_s=0$
- $x$  igual o ligeramente superior a  $x_{lim}$
- deformación constante en toda la sección transversal igual a  $\varepsilon_{ud}$  (ver figura 6.17)
- deformación constante en toda la sección transversal igual a  $\varepsilon_{c2}$  -ó  $\varepsilon_{c3}$ - (ver figura 6.17).

Como corolario del teorema anterior concluimos que el problema de dimensionamiento puede abordarse de varias formas:

1. Armadura simétrica ( $A_s=A'_s$ ). Esto es muy común cuando el elemento estructural debe resistir distintos tipos de cargas (pares  $N-M$ ) y el conjunto de todos los pares es relativamente simétrico. Un ejemplo de esto son las columnas de edificación, en las que, debido al viento o al sismo, el máximo momento positivo y el mínimo negativo tienen valores absolutos muy parecidos.
2. Obligar a que  $A'_s=0$ . Esto es típico de vigas, siempre que el momento no sea superior a un momento denominado  $M_{lim}$ <sup>7</sup>.
3. Suponer el valor de una de las dos armaduras  $A_s$  o  $A'_s$ , o bien suponer una relación entre ambas (i.e.  $A_s/A'_s=cte$ ).
4. Obligar  $x=x_{lim}$ .
5. Calcular las soluciones en los 5 supuestos del teorema y adoptar la solución de mínima armadura. Puede ser interesante comparar la mínima con la solución simétrica.
6. Realizar un diagrama RSD de armado a flexión y elegir la combinación de armaduras que más interese.

<sup>6</sup> Este teorema está demostrado en Hernández-Montes et al. (2007).

<sup>7</sup> Profundidad límite de la fibra neutra:

Como ya se vió anteriormente (plano de deformación N° 4 del Apdo. 6.6):

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + f_{yd}/0.0035E_s}$$

. Si observamos la figura 6.17, el momento que generan las

tensiones en el hormigón comprimido respecto a la armadura traccionada crece según aumenta la profundidad de la fibra neutra. No obstante, si  $x > x_{lim}$  aunque este momento crezca no resulta interesante puesto que el acero en tracción abandona la zona plástica y comienza a trabajar a una tensión inferior a  $f_{yd}$ . Por tanto, que si  $x > x_{lim}$  el acero está “desaprovechado”. Al momento engendrado por las tensiones internas para el valor  $x=x_{lim}$  se denomina  $M_{lim}$ .

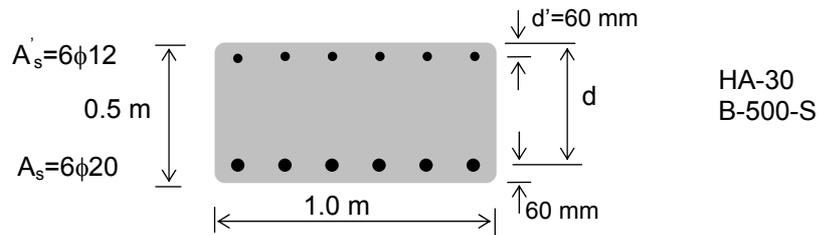
**Ejemplo de comprobación**

Figura 6.32. Sección transversal

Vamos a calcular la capacidad a flexión simple de la sección de la figura 6.18, reproducida nuevamente en la figura superior. Para el acero vamos a emplear el diagrama bilineal sin endurecimiento del EC2<sup>8</sup> (Figura 6.17 y 6.33). Para el hormigón adoptaremos las hipótesis del diagrama rectangular del EC2 con  $\alpha_{cc}=0.85$  (coeficiente de duración de carga, apartado 3.3.2).

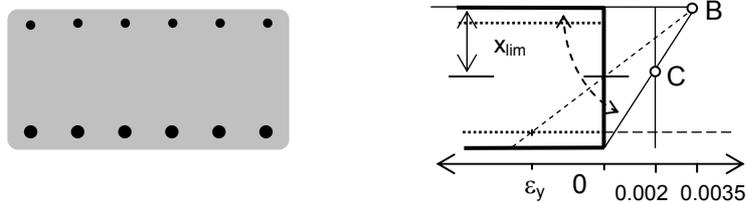


Figura 6.33. Pivotes B y C para modelo del acero bilineal sin endurecimiento

De  $x=0$  hasta  $x=h$ <sup>9</sup> el pivote es el punto B y desde  $x=h$  hasta  $x=+\infty$  el pivote es el punto C. En nuestro caso el valor de  $x$  en C es  $3h/7$  (ver Figura 6.17). Las tensiones en el acero superior e inferior se pueden expresar en función de la profundidad de la fibra neutra  $x$  mediante una función definida a trozos. Para formular dicha función es necesario conocer los valores de la profundidad de la fibra neutra cuando el acero pasa por los puntos de cedencia, tanto en compresión como en tracción (Figura 6.34).

<sup>8</sup> Para este caso el pivote A desaparece

<sup>9</sup> Siendo  $h$  el canto total de la sección.

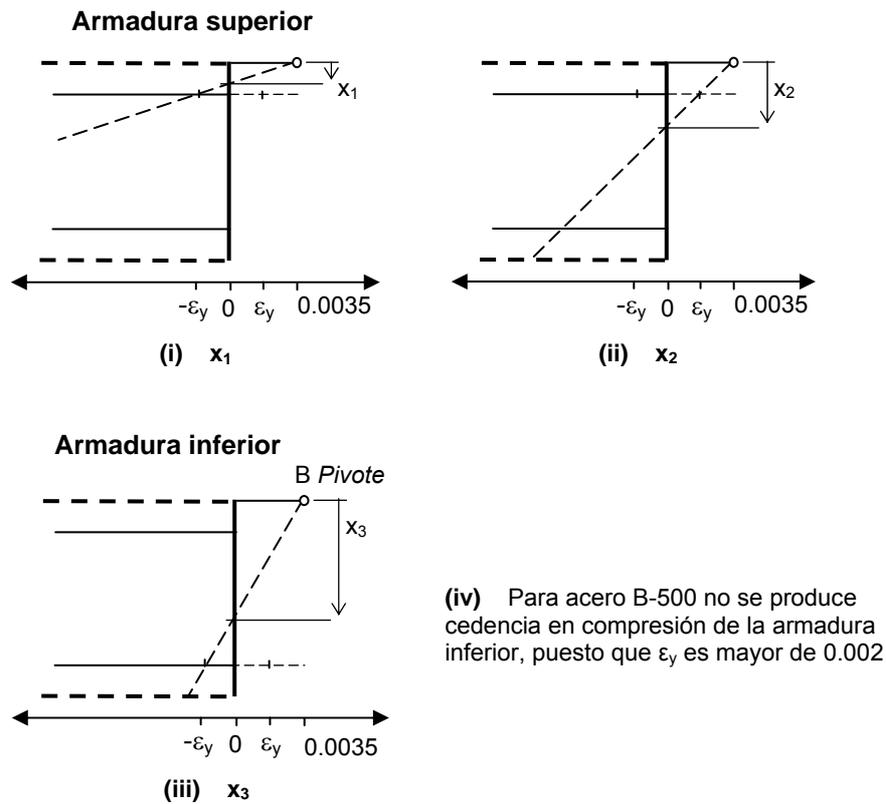


Figura 6.34. Profundidades de la fibra neutra para los puntos de cedencia de la armadura superior e inferior.

Para el acero B-500 y  $\gamma_s=1.15$  se tiene que  $\varepsilon_y=0.00217$ . Los valores de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  indicados en la figura 6.34 y particularizados para la sección de la figura 6.32 son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{0.0035d'}{0.0035 + \varepsilon_y} = 37.01 \text{ mm} \\
 x_2 &= \frac{0.0035d'}{0.0035 - \varepsilon_y} = 158.36 \text{ mm} \\
 x_3 &= \frac{0.0035d}{0.0035 + \varepsilon_y} = 271.42 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

La tensión en la armadura superior viene dada por:

$$\sigma'_s(x) = \begin{cases} -f_y & \text{si } x < x_1 \\ -0.0035E_s \frac{d-x}{x} & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ f_y & \text{si } x > x_2 \end{cases} \quad (6.14)$$

y, para la armadura inferior:

$$\sigma_s(x) = \begin{cases} -f_y & \text{si } x < x_3 \\ -0.0035E_s \frac{d-x}{x} & \text{si } x_3 \leq x \leq h \\ -0.002E_s \frac{d-x}{x-3h/7} & \text{si } x > h \end{cases} \quad (6.15)$$

Debido a que estamos empleando el diagrama rectangular del hormigón del EC2,  $N_c$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$N_c(x) = \begin{cases} 0.85f_{cd}b0.8x & \text{si } 0 \leq x < 1.25h \\ 0.85f_{cd}bh & \text{si } x \geq 1.25h \end{cases} \quad (6.16)$$

En la expresión anterior no se han descontado las áreas ocupadas por las barras de acero. Esto se puede tener en cuenta mediante una modificación de las expresiones en la tensión del acero:

$$\sigma'_{s^*}(x) = \begin{cases} \sigma'_s(x) - 0.85f_{cd} & \text{si } 0.8x \geq d' \\ \sigma'_s(x) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\sigma_{s^*}(x) = \begin{cases} \sigma_s(x) - 0.85f_{cd} & \text{si } 0.8x \geq d \\ \sigma_s(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las ecuaciones de equilibrio toman la forma:

$$N_d = N_c(x) + \sigma'_s(x)A'_s + \sigma_s(x)A_s$$

$$M_d = \begin{cases} N_c(x)\left(\frac{h}{2} - 0.4x\right) + \sigma'_s(x)A'_s\left(\frac{h}{2} - d'\right) - \sigma_s(x)A_s\left(d - \frac{h}{2}\right) & \text{si } 0.8x \leq h \\ \sigma'_s(x)A'_s\left(\frac{h}{2} - d'\right) - \sigma_s(x)A_s\left(d - \frac{h}{2}\right) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.18)$$

Con la ayuda del programa Mathematica® se resuelve el problema de la siguiente forma: imponiendo  $N_d=0$  se obtiene  $x$  de la primera de las ecuaciones 6.18:  $x=137.78 \text{ mm}$ . De la segunda de las ecuaciones 6.18 se obtiene el momento  $M_d$  que, debido a que estamos en rotura, será el máximo momento que la sección puede resistir en flexión simple:  $M_d=320.44 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

Se podría haber obtenido la misma solución de una forma más intuitiva, tal y como se indica a continuación (se empleará la EHE).

Se supone inicialmente que  $A_s$  y  $A'_s$  trabajan a  $f_{yd}$ . Planteando únicamente el equilibrio de axiles:

$$N_d = \sum N = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x + A'_s f_{yd} - A_s f_{yd} = 0 \text{ kN}$$

se obtiene un valor de  $x = 38.5 \text{ mm}$ . Para este valor de  $x$  ambos aceros no trabajan a  $f_{yd}$  por lo que hay que replantear el sistema y ver en qué dominio de rotura estamos. El plano de rotura 3 (figura 6.17) queda determinado por un valor de la profundidad de la fibra neutra  $x=0.259d=114 \text{ mm}$ , luego la  $x$  obtenida de ecuación anterior hace que el plano de rotura pase por el punto A (figura 6.17) y, por tanto, se está en el dominio de rotura 2. Planteando nuevamente el equilibrio junto con una ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$N_d = \sum N = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x + A'_s \sigma_s - A_s f_{yd} = 0 \text{ kN}$$

$$\frac{d-x}{0.01} = \frac{x-60}{\varepsilon_s} \Rightarrow \sigma_s = E_s \varepsilon_s = E_s \frac{0.01(x-60)}{d-x}$$

Resolviendo este sistema obtenemos:  $x=60.18 \text{ mm}$ . Con este valor de  $x$  planteamos la ecuación de equilibrio de momentos. El equilibrio de momentos se realiza en el c.d.g. de la armadura inferior<sup>10</sup>, obteniendo:

<sup>10</sup> En el caso de flexión simple se puede plantear el equilibrio de momentos en cualquier punto de la sección no alterándose el valor del momento, puesto que no hay fuerza axil. En el caso de flexión compuesta si planteamos el equilibrio en un punto diferente al que está referenciado el momento flector, necesariamente se altera el valor de dicho momento debido a la presencia del esfuerzo axil, y hay que tenerlo en cuenta.

$$M_d = \sum M = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (d - 0.4x) + \sigma_s \cdot A'_s \cdot (d - d')$$

el valor de  $M_d$  es  $340.68 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , valor que podíamos haber obtenido en el diagrama de interacción de la figura 6.29 (intersección con la línea de  $N=0$ ).

Consideremos la misma viga de la figura 6.32 pero sin armadura superior (figura 6.35). Si la viga de la figura 6.32 estuviese dimensionada exclusivamente para trabajar a flexión simple, el armado descrito en la figura 6.32 no sería el más adecuado puesto que la armadura superior apenas trabaja.

¿Cuál sería el mayor momento en flexión simple que la viga de la figura 6.35 podría resistir sólo con armadura de tracción?. A este momento se le denomina **momento límite** dado que se produce para una profundidad de la fibra neutra igual  $x_{lim}$ . Planteando la ecuación de compatibilidad de deformaciones, tenemos:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{f_{yd}}{0.0035 \cdot E_s}} = 271 \text{ mm}$$

$$M_{lim} = 0.85 f_{cd} b 0.8 x_{lim} (d - 0.4 x_{lim}) = 1223 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

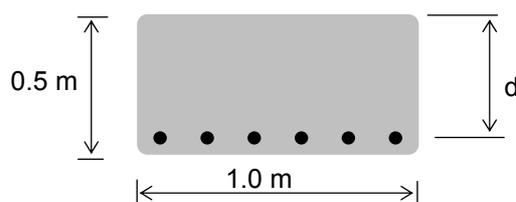


Figura 6.35. Sección transversal, sólo con armadura inferior de tracción.

¿Podríamos obtener un momento superior a éste ( $1223 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ) sólo con armadura de tracción?. La respuesta es que sí, pero esto nos obligaría a bajar la fibra neutra por debajo de  $x_{lim}$ , lo que nos introduciría en el dominio de rotura 4 y, por tanto, las tensiones en el acero serían inferiores a  $f_{yd}$ . Por tanto, la respuesta a la pregunta anterior es que sí aunque sería muy poco práctico. Concluimos que el mayor momento de flexión simple resistido por la sección de la figura 6.35, de una forma económicamente satisfactoria, sería el momento límite (cuyo valor es  $1223 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ). A la armadura de tracción correspondiente se le denomina **cuantía límite** (deducible a partir del equilibrio de axiles). Si necesitaráramos resistir un momento superior al momento

---

En flexión simple es útil considerar el equilibrio de momentos en la armadura inferior porque simplifica las ecuaciones.  $A_s$  no entra en la ecuación de equilibrio de momentos y el sistema queda desacoplado.

límite sólo tenemos dos opciones: aumentar el canto de la sección de tal forma que el nuevo momento límite sea superior o introducir armadura de compresión. En este último caso existirán infinitas soluciones y, en el caso particular de flexión simple y secciones rectangulares, el Teorema de armado a flexión, anteriormente enunciado, garantiza que  $x=x_{lim}$  proporciona el mínimo de la armadura total.

Supongamos ahora que se pretende dimensionar la sección de la figura 6.35 para un momento -en flexión simple- igual a  $1600 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Las ecuaciones de equilibrio de axiles y de momentos son:

$$N_d = \sum N = f_{yd} \cdot A'_s + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x_{lim} - f_{yd} \cdot A_s = 0$$

$$M_d = \sum M = f_{yd} \cdot A'_s \cdot (d - d') + 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x_{lim} \cdot (d - 0.4 \cdot x_{lim}) =$$

$$= 1600 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Si en las ecuaciones anteriores no se hubiera impuesto<sup>11</sup> que  $x=x_{lim}$  existirían tres incógnitas  $A_s$ ,  $A'_s$  y  $x$ , por tanto, el sistema tendría infinitas soluciones. En las ecuaciones anteriores hemos supuesto que ambas armaduras trabajan a  $f_{yd}$ . La armadura de tracción sí trabaja a  $f_{yd}$  puesto que estamos en  $x=x_{lim}$  (ver figura 6.17) y la armadura de compresión también, puesto que  $x_{lim}=271 \text{ mm}$  es mayor que la mitad de  $h$  ( $250 \text{ mm}$ ) y, por tanto, la deformación de la armadura de compresión,  $\varepsilon'_s$ , será mayor que la de tracción. De la resolución del sistema tenemos:  $A_s=10764 \text{ mm}^2$  ( $14\varnothing32$ ) y  $A'_s=2287 \text{ mm}^2$  ( $5\varnothing25$ ).

Imponiendo  $x=x_{lim}$  en las ecuaciones 6.18 se obtiene un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas de cuya resolución se obtiene que:  $A_s=10769 \text{ mm}^2$  ( $14\varnothing32$ ) y  $A'_s=2372 \text{ mm}^2$  ( $5\varnothing25$ ). La pequeña diferencia entre este resultado y el del párrafo anterior está en el hecho de que en las ecuaciones 6.18 se ha descontado al hormigón el volumen ocupado por las barras a compresión mediante las expresiones 6.17.

---

<sup>11</sup> Como se ha visto, considerar  $x=x_{lim}$  para flexión simple es la mejor opción.

**Ejemplo en hormigón pretensado**

Consideremos la siguiente viga de hormigón pretensado posteso.

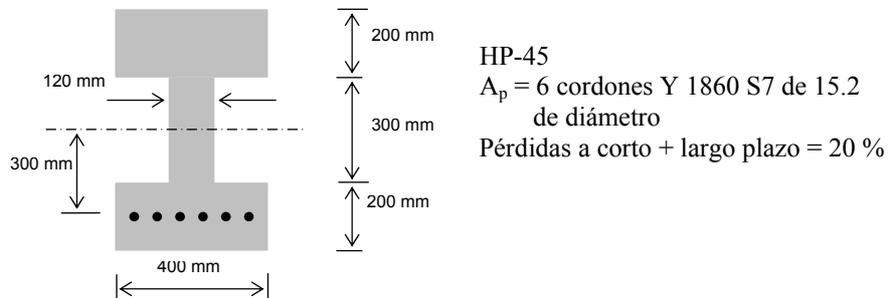


Figura 6.36. Sección transversal de una viga de hormigón pretensado

El área de la armadura activa es  $A_p = 6 \cdot 140 = 840 \text{ mm}^2$ . La viga está inicialmente tesada al 70% de  $f_{max}$ ,  $P_0 = 0.7 \cdot 1860 \cdot 840 = 1093680 \text{ N}$ , y la fuerza de tesado después de las pérdidas es  $P = 0.8 \cdot P_0 = 874944 \text{ N}$ . Utilizando para el acero el modelo bilineal sin endurecimiento propuesto por el EC2 (figura 3.26):

$$f_{pd} = \frac{f_{p0,1k}}{\gamma_s} = \frac{f_{pk}}{1.1 \cdot 1.5} = 1127.27 \text{ MPa}$$

Planteando equilibrio de axiles (figura 6.17):

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b = A_p \cdot 1127.27 \quad \rightarrow \quad x = 116 \text{ mm}$$

Puesto que  $x = 116 \text{ mm} < 200 \text{ mm}$  (espesor del ala), la compresión afecta sólo a una porción de ala y, por tanto, el valor de  $b$  en la ecuación anterior es el ancho del ala (valor único).

De la ecuación de equilibrio de momentos se obtiene el valor del momento máximo:

$$M_d = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b \cdot (d - 0.4x) = 571.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**Planteamiento tradicional.**

Tradicionalmente se ha diferenciado entre flexión simple y flexión compuesta aún cuando las ecuaciones de equilibrio, planteadas de forma genérica (ecuaciones 6.18), no hacen tal diferenciación.

Los problemas de dimensionamiento se han acometido tradicionalmente diferenciando entre pequeña y gran excentricidad. Sea  $e$  la excentricidad de la carga axial  $N_d$  tal que  $e=M_d/N_d$ . Hablamos de gran excentricidad cuando  $e$  se sitúa fuera del núcleo central de la sección y de pequeña excentricidad cuando está dentro de éste. Dicho de otra forma, la gran excentricidad se presenta para los dominios de rotura 2,3 y 4 y la pequeña excentricidad para el resto.

Dentro del dominio 5 conviene operar de la siguiente forma: calcular una nueva excentricidad  $e_2$  respecto de la armadura superior y diferenciar entre los dos siguientes casos:

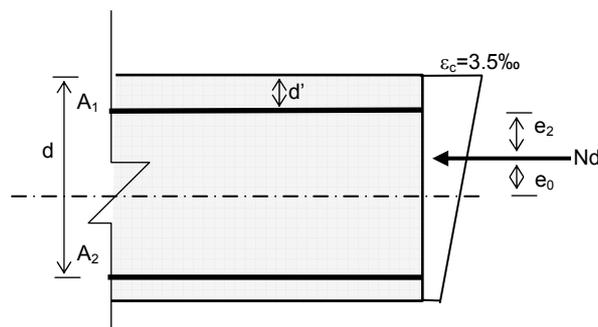


Figura 6.37. Pequeñas excentricidades

1. Que el momento de  $N_d$  respecto a la armadura superior sea inferior que el engendrado por toda la sección comprimida de hormigón respecto a la armadura superior:

$$N_d \cdot e_2 < 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h \cdot (h/2 - d_2)$$

En este caso se puede prescindir de la armadura inferior y las ecuaciones de equilibrio son:

$$N_d = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x + A_1 \cdot f_{yd}$$

$$N_d \cdot e_2 = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (0.4 \cdot x - d')$$

2. En el supuesto de que no se cumpla la inecuación del caso 1, **se obliga** a que toda la armadura de la sección trabaje a  $f_{yd}$ , siendo en este caso ecuaciones de equilibrio:

$$N_d = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h + A_1 \cdot f_{yd} + A_2 f_{yd}$$

$$N_d \cdot e_2 = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h \cdot (0.5 \cdot h - d') + A_2 (d - d') f_{yd}$$

En ambos casos  $f_{yd}$  debe de ser inferior a  $400 \text{ N/mm}^2$  puesto que el acero agotará a compresión junto con el hormigón.

Una práctica habitual es colocar armadura simétrica cuando se producen pequeñas excentricidades.

Hasta ahora se ha acometido el problema de comprobación y dimensionamiento de secciones en flexión uniaxial, tratando fundamentalmente secciones rectangulares con dos niveles de armadura  $A_s$  y  $A'_s$  situadas a una distancia desde la fibra superior  $d$  y  $d'$ , respectivamente. Bastaría con considerar el ancho  $b$  como variable en función de  $x$  -en la función  $N_c(x)$  de la expresión 6.16- para extender el problema a secciones no rectangulares. De la misma manera se pueden considerar posiciones de la armadura distintas de  $d$  y  $d'$  (definidas en la figura 6.17).

## 6.8. FLEXIÓN COMPUESTA BIAxIAL

En el apartado anterior se ha definido *flexión compuesta* o *flexión compuesta uniaxial* cuando la sección estaba solicitada por un momento flector en un eje principal de inercia y un esfuerzo axial. En el caso de que el momento flector no actúe sobre un eje principal de inercia, o bien, si se presentan dos momentos flectores en dos ejes principales de inercia se habla de *flexión esviada* o *flexión compuesta biaxial*, ver la figura 6.38.

Las diferencias fundamentales entre flexión uniaxial y biaxial son:

- En el caso biaxial aparece una nueva ecuación de equilibrio, siendo ahora tres las ecuaciones de equilibrio: 1 de esfuerzos axiales y 2 de equilibrio de momentos:

$$N = \Sigma N = \int_{A_c} \sigma_c dA_c + \int_{A_s} \sigma_s dA_s + \int_{A_p} \sigma_p dA_p$$

$$M_x = \Sigma M = - \int_{A_c} \sigma_c y dA_c - \int_{A_s} \sigma_s y dA_s - \int_{A_p} \sigma_p y dA_p \quad (6.19)$$

$$M_y = \Sigma M = \int_{A_c} \sigma_c x dA_c + \int_{A_s} \sigma_s x dA_s + \int_{A_p} \sigma_p x dA_p$$

donde  $A_s$  es la armadura pasiva (localizada en distintas posiciones, (ver figura 6.39) y  $A_p$  es la armadura activa (localizada también en distintas posiciones).

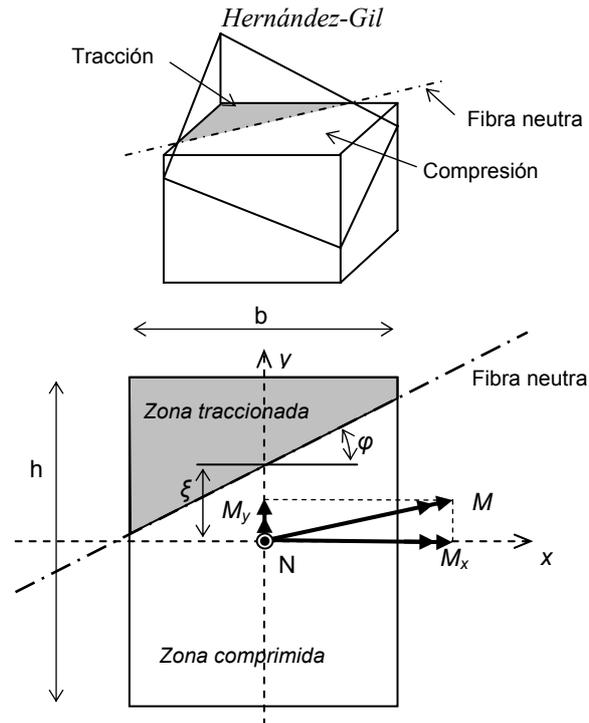


Figura 6.38. Flexión compuesta biaxial en una sección rectangular

- La posición de la fibra neutra en flexión uniaxial se define a partir de una sola variable ( $x$ ) mientras que en flexión biaxial se requieren dos variables para posicionar la fibra neutra:  $\zeta$  y  $\varphi$  (figuras 6.38 y 6.39).
- Generalmente no bastará con disponer dos niveles de armadura y, de hecho, en secciones rectangulares es común dotar de armadura a las 4 caras.

Las demás diferencias están derivadas de la resolución numérica del problema, puesto que los modelos de acero y hormigón no dependen del tipo de flexión (uniaxial o biaxial) que se considere. En la figura 6.39 se representan las distribuciones de deformaciones y tensiones en una sección no rectangular sometida a flexión biaxial. En esta figura se aprecia cómo la fibra neutra puede no ser paralela al momento flector aplicado.

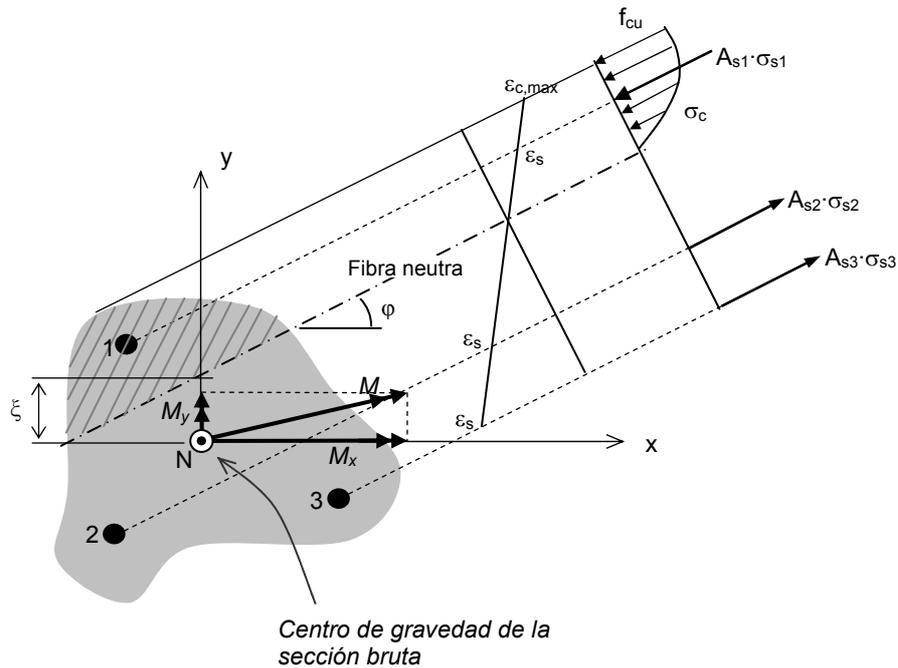


Figura 6.39. Distribución de deformaciones y tensiones en una sección sometida a flexión compuesta biaxial

### 6.8.1. El problema de comprobación

Paralelamente al caso uniaxial, el problema de comprobación en flexión biaxial consiste en determinar si una sección totalmente definida resiste o no una determinada terna axil-flector-flector que la solicita  $N_d-M_{dx}-M_{dy}$ .

En las ecuaciones 6.19, en el caso de un problema de comprobación, se encuentran definidos los siguientes parámetros: la sección (su forma geométrica), el área y la posición de la armadura ( $A_s$ ) y las acciones que actúan sobre la sección ( $N_d$ ,  $M_{xd}$  y  $M_{yd}$ ). El valor de las tensiones en el acero y en el hormigón se pueden deducir en función de la posición de la fibra neutra ( $\xi$  y  $\varphi$ , figura 6.39). Así pues, una forma de abordar el problema de comprobación es la siguiente: tomar dos de los valores de la terna (p.ej.  $N_d$  y  $M_{xd}$ ) e introducirlos en sus ecuaciones de equilibrio correspondientes (2 de las 3 ecuaciones 6.19) y determinar los valores de  $\xi$  y  $\varphi$ . Estos valores de  $\xi$  y  $\varphi$  se introducen en la tercera ecuación de equilibrio (en nuestro caso en el equilibrio de momentos en el eje  $y$ ) y de ahí se obtiene un valor de momento que denominaremos

$M_{y\max}$ . Si  $M_{yd} \geq M_{y\max}$  la sección no resistirá la terna ( $N_d$ ,  $M_{xd}$  y  $M_{yd}$ ) y si lo hará en caso contrario.

Igual que en el caso uniaxial, existen diagramas de interacción  $N-M_x-M_y$  de tal forma que bastará comprobar que la terna ( $N_d$ ,  $M_{xd}$  y  $M_{yd}$ ) queda dentro del diagrama para asegurar que la sección no agota. Obviamente este planteamiento es demasiado costoso, no siendo necesario realizar el diagrama de interacción  $N-M_x-M_y$  para comprobar si una sección determinada resiste.

**Ejemplo**

En la figura 6.40 se representa el diagrama de interacción  $N-M_x-M_y$  de una sección rectangular de  $75 \times 50 \text{ cm}$ , de hormigón HA-25 y acero B-500-S. El recubrimiento mecánico es de  $6 \text{ cm}$  y está armada con  $16\text{Ø}20$  tal y como queda reflejado en la Figura adjunta. Para la confección del diagrama se han empleado las hipótesis de la EHE y el programa informático del Prontuario informático del Hormigón 3.0 de Corres et al. (2001).

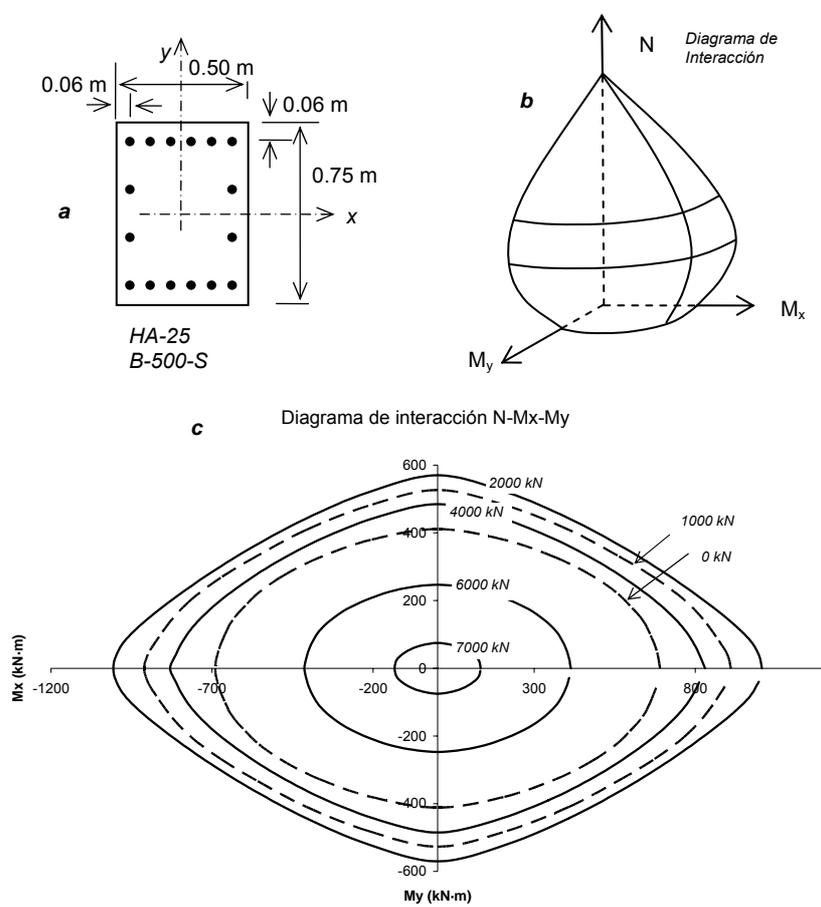


Figura 6.40. Diagrama de Interacción  $N-M_x-M_y$ .

### 6.8.2. El problema de dimensionamiento

En flexión biaxial el problema de dimensionar (o armar) una sección transversal implica muchas variables, fundamentalmente relacionadas con la posición y la sección de las armaduras.

Una forma de obtener el mismo número de variables que de ecuaciones consiste en fijar la posición de las armaduras y emplear un solo diámetro  $\emptyset$ . En ese caso las variables son  $\xi$ ,  $\varphi$  y  $\emptyset$ . El Prontuario informático del Hormigón 3.0 de Corres et al. (2001) utiliza este procedimiento.

Una forma alternativa, aplicable a secciones rectangulares, y que puede llevar a ahorros importantes de armadura es la de considerar dos separaciones distintas e iguales en las caras paralelas ( $s_v$  y  $s_h$ , ver figura 6.41) conservando la simetría de la armadura. Este procedimiento aumenta el número de incógnitas a 4:  $\xi$ ,  $\varphi$ ,  $\emptyset$  y  $s_h/s_v$ . Las ecuaciones de equilibrio son tres:

$$\begin{aligned} N &= \sum N(\xi, \varphi, \emptyset, s_h/s_v) \\ M_x &= \sum M_x(\xi, \varphi, \emptyset, s_h/s_v) \\ M_y &= \sum M_y(\xi, \varphi, \emptyset, s_h/s_v) \end{aligned} \quad (6.20)$$

La solución óptima se puede obtener mediante diagramas RSD-biaxial como se aprecia en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo**

Sea una sección rectangular de 70×40 cm fabricada con hormigón HA-30 y acero B-500-S. Se van a calcular los diagramas RSD-biaxiales para los dos casos de carga indicados en la figura 6.41.

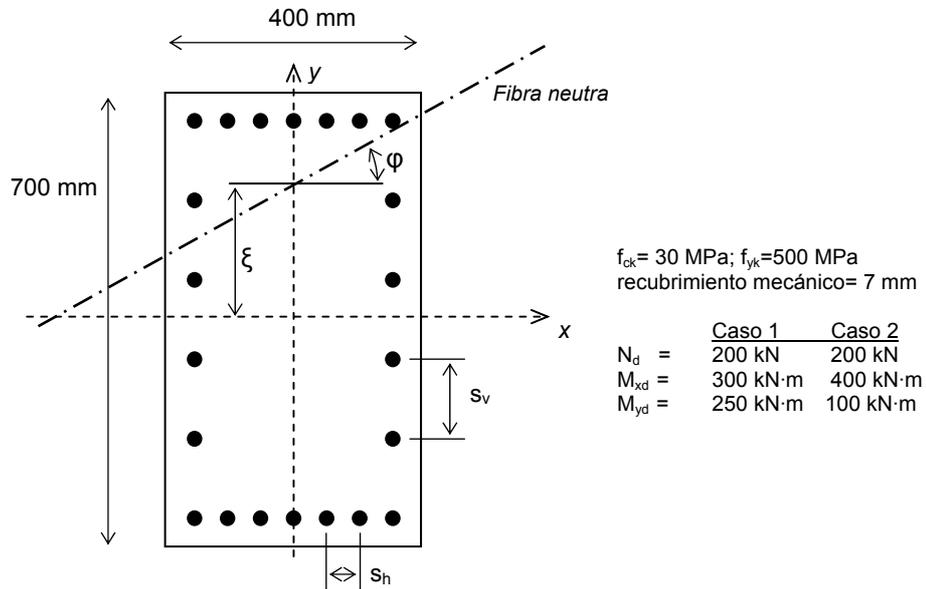


Figura 6.41. Ejemplo de Diagrama RSD-Biaxial.

Diagrama RSD-biaxial –Caso 1-

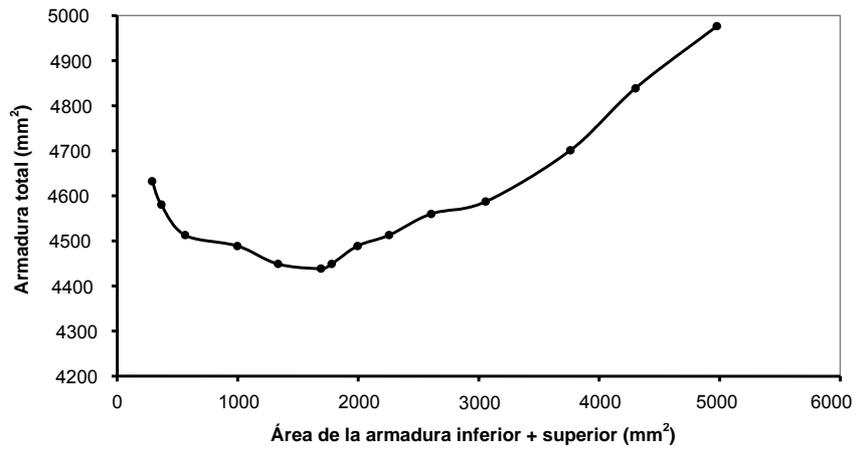


Diagrama RSD-biaxial –Caso 2-

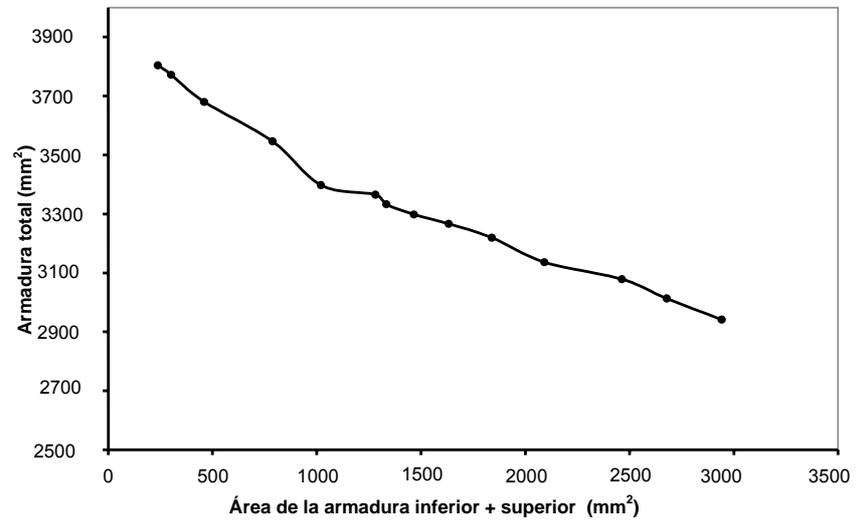


Figura 6.42. Diagramas RSD-biaxiales

## 6.9. DISPOSICIONES GEOMÉTRICAS Y CUANTÍAS MÍNIMAS EN ARMADURAS LONGITUDINALES

El objetivo fundamental de las disposiciones geométricas y las cuantías mínimas es lograr un mejor funcionamiento estructural de los elementos así como dotarlos de buena durabilidad. En este apartado hemos seguido fundamentalmente las especificaciones de la norma española EHE<sup>12</sup>.

**Recubrimiento**

Uno de los factores más importante en la durabilidad<sup>13</sup> del hormigón armado es el recubrimiento de hormigón que tienen las armaduras. Se denomina recubrimiento a la distancia mínima entre la superficie exterior del elemento y la armadura (incluyendo cercos y estribos). Según la EHE, en el caso de armaduras pasivas y activas pretesas se denomina ( $r$ ) y en el caso de armadura postesa se denomina  $C_v$  al recubrimiento en vertical y  $C_h$  al recubrimiento en horizontal, ver figura 6.42.

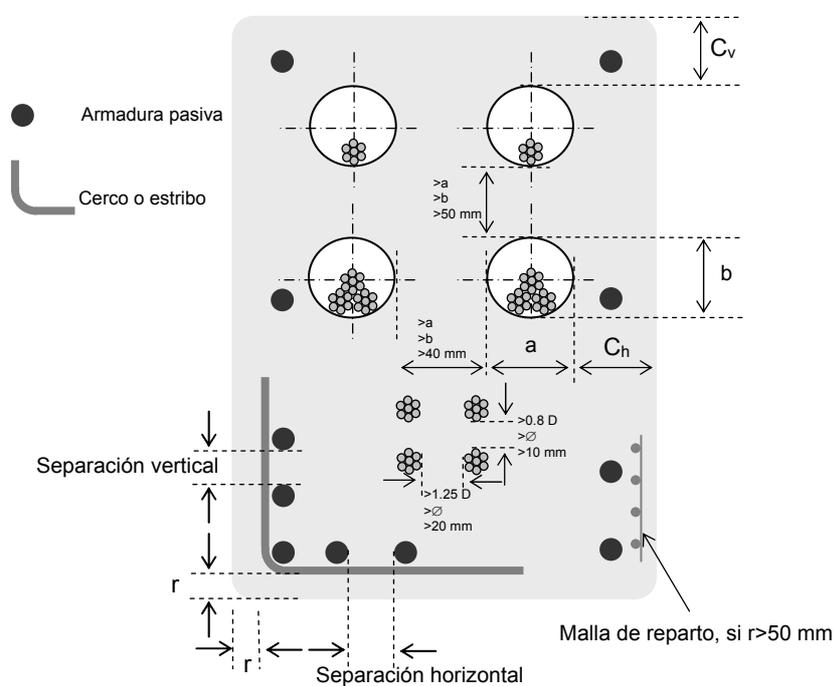


Figura 6.42. Disposiciones geométricas.

<sup>12</sup> Otras normas tienen cuantías y disposiciones geométricas ligeramente distintas.

<sup>13</sup> Otro factor muy importante en la durabilidad es la permeabilidad del hormigón –que está directamente relacionada con la resistencia de éste–.

En armaduras pasivas o activas adherentes el recubrimiento cumplirá:

1. Para armaduras principales: será mayor o igual al diámetro de la barra (ó diámetro equivalente si se trata de un grupo de barras<sup>14</sup>) y a 0.8 veces el tamaño máximo de árido, salvo que la disposición de armaduras respecto a los paramentos dificulte el paso del hormigón, en cuyo caso se tomará 1.25 veces el tamaño máximo de árido.
2. Será igual al recubrimiento nominal  $r_{nom}$  ( $r_{nom}=r_{min}+\Delta r$ ), donde  $\Delta r$  valdrá 0 mm en elementos prefabricados con control intenso de ejecución, 5 mm en caso de elementos in situ con control intenso de ejecución y 10 mm en el resto de los casos. El valor de  $r_{min}$  viene fijado por la norma EHE en función del ambiente, del tipo de elemento y de la resistencia característica del hormigón, estos valores oscilan entre 15 mm y 40 mm. En la siguiente tabla se muestran algunos de los  $r_{min}$  establecidos por la EHE.

Tabla 6.3. Recubrimientos mínimos

Resistencia característica del hormigón (N/mm <sup>2</sup> )	Tipo de elemento	Recubrimiento mínimo (mm) según la clase de exposición							
		I	Ila	Ilb	IIla	IIlb	IIlc	IV	Qa
$25 \leq f_{ck} < 40$	General	20	25	30	35	35	40	35	40
	Elementos prefabricados y láminas	15	20	25	30	30	35	30	35

3. En barras dobladas será siempre mayor de dos diámetros, medidos en dirección perpendicular a la curva.
4. Si el recubrimiento total es mayor de 50 mm se dispondrá de una malla de reparto en medio del espesor.
5.  $r_{min}$  será de 70 mm en piezas hormigonadas contra el terreno, salvo que se haya previsto hormigón de limpieza.

Para armaduras postesas el recubrimiento cumplirá:

1.  $C_v$  será mayor de 4 cm y mayor que la dimensión horizontal de la vaina o grupos de vainas en contacto ( $a$ ), ver figura 6.42.

<sup>14</sup> Se pueden colocar varias barras juntas en contacto (hasta 3 en horizontal y 4 en vertical) formando lo que se denomina *grupo de barras*. Se considera como diámetro del grupo de barras al diámetro de la sección circular equivalente. Este diámetro no será mayor de 50 mm, salvo en piezas comprimidas hormigonadas en vertical, en las que puede ser de 70 mm.

2.  $C_h$  será mayor de:  $4\text{ cm}$ , la mitad de la dimensión vertical de la vaina o grupo de vainas en contacto ( $b/2$ ) y la dimensión horizontal de la vaina o grupo de vainas ( $a$ ), ver figura 6.42.

### **Distancia entre barras**

El origen de esta limitación está en que todas las barras deben quedar bien envueltas en hormigón, permitiendo un vibrado adecuado. Las distintas normas proponen unos valores mínimos para la distancia entre barras.

La EHE establece que la distancia libre para armadura pasiva, horizontal y vertical, entre dos barras aisladas consecutivas, salvo que formen grupos de barras, será igual o superior a:

- $20\text{ mm}$
- $\varnothing_{\text{máx}}$  (el diámetro de la mayor)
- $1.25$  veces el tamaño máximo de árido ( $D$ ).

En armadura pretesa, la separación libre mínima de los tendones individuales (figura 6.42) debe de ser mayor de:

- $20\text{ mm}$  para la separación horizontal y  $10\text{ mm}$  para la vertical
- el diámetro de la mayor:  $\varnothing$
- $1.25$  el tamaño máximo del árido  $D$  para la separación horizontal y  $0.8$  para la vertical.

Para armadura postesa, “se admite colocar en contacto diversas vainas formando grupo, limitándose a dos en horizontal y a no más de cuatro en conjunto. Para ello, las vainas deben ser corrugadas”. Las distancias libres (figura 6.42) son como mínimo:

- En vertical:
- el diámetro de la vaina
  - la dimensión vertical de la vaina o grupo de vainas
  - $5$  centímetros.
- En horizontal:
- el diámetro de la vaina
  - la dimensión horizontal de la vaina
  - $4$  centímetros
  - $1.6$  veces la mayor de las dimensiones de las vainas individuales que formen un grupo de vainas.

**Cuantía mínima de los estribos para que la armadura pasiva trabaje a compresión**

Con objeto de tener en cuenta la contribución de la armadura pasiva a compresión es necesario asegurar que ésta no pandee, tal y como indica la línea punteada de la figura 6.43. Es función de los cercos y estribos mantener la armadura pasiva en su lugar para que ésta colabore a compresión.

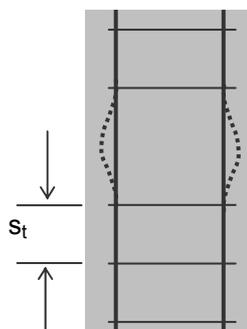


Figura 6.43. Separación de estribos

La separación entre cercos  $s_t$  deberá cumplir:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_t = 15\phi_{\min} \\ \phi_t = \frac{\phi_{\max}}{4} \end{array} \right. \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{l} s_t < 15\phi_{\min} \\ \frac{s_t}{\phi_t^2} = \frac{15\phi_{\min}}{\phi_{\max}^2 / 16} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

donde  $s_t$  y  $\phi_t$  son, respectivamente, la separación y el diámetro de los estribos y  $\phi_{\max}$  y  $\phi_{\min}$  los diámetros máximo y mínimo de la armadura longitudinal comprimida.

Con objeto de garantizar el buen funcionamiento de la armadura a compresión la norma EHE recomienda que, al menos, estén sujetas las barras de las esquinas y una de cada dos de las situadas en las caras, siempre que la distancia entre ellas sea menor de 15 cm. Si la distancia es mayor de 15 cm deben de estar sujetas todas.

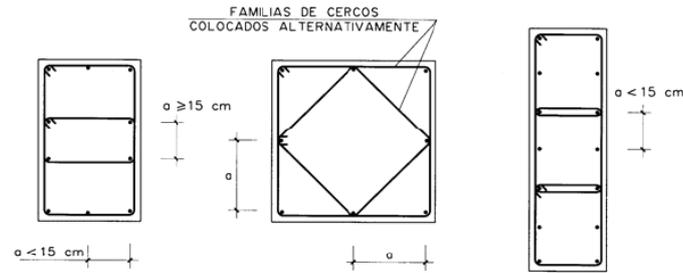


Figura 6.43. Atado de la armadura longitudinal mediante cercos

### Cuantía mínima en flexión simple o compuesta

En flexión simple o compuesta se dispondrá una armadura mínima de origen mecánico. En el instante en que el hormigón se fisura, la tracción que hasta ese momento estaba resistiendo el hormigón pasa al acero. El acero tiene que tener, como mínimo, la capacidad de absorber el esfuerzo que estaba soportando el hormigón a tracción antes de fisurar. A esa cuantía mínima se le denomina cuantía mínima mecánica y se formula a partir de la siguiente expresión:

$$A_p f_{pd} + A_s f_{yd} \geq 0.25 \frac{W_1}{h} f_{cd} \quad (6.22)$$

donde  $W_1$  es el módulo resistente de la sección bruta relativo a la fibra más traccionada y  $h$  el canto total de la sección.

Además la EHE obliga a llevar hasta los apoyos 1/3 de la armadura máxima necesaria a flexión.

### Cuantía mínima en compresión simple o compuesta

La normativa actual impone límites superior e inferior a la cuantía de armadura para elementos a compresión. El límite superior está relacionado con la dificultad que puede presentarse durante el hormigonado si existe demasiada armadura. El límite inferior de armadura está relacionado con la necesidad de que las columnas tengan resistencia a flexión así como para reducir los efectos de fluencia y retracción en el hormigón.

En este caso, las armaduras superior e inferior en compresión  $A'_{s1}$  y  $A'_{s2}$  deberán cumplir:

$$\begin{aligned} A'_{s1} f_{yc,d} &\geq 0.05 N_d & A'_{s1} f_{yc,d} &\leq 0.5 f_{cd} A_c \\ A'_{s2} f_{yc,d} &\geq 0.05 N_d & A'_{s2} f_{yc,d} &\leq 0.5 f_{cd} A_c \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde  $f_{yc,d}$  es la resistencia de cálculo del acero a compresión  $f_{yc,d}=f_{yd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ .

### Cuantía mínima en tracción simple o compuesta

En este caso se deberá cumplir que:

$$A_p f_{pd} + A_s f_{yd} \geq 0.2 A_c f_{cd} \quad (6.24)$$

### Cuantías geométricas mínimas

El origen de las cuantías geométricas mínimas está en controlar de forma simplificada los efectos térmicos y de retracción. Los valores de estas cuantías se establecen en ‰ de la sección total de hormigón.

Tabla 5.5. Cuantía mínima geométrica

Tipo de elemento estructural	Tipo de acero	
	B 400 S	B 500 S
Pilares	4.0	4.0
Losas (*)	2.0	1.8
Vigas (**)	3.3	2.8
Muros		
(***) Armadura horizontal	4.0	3.2
(***) Armadura vertical	1.2	0.9

(\*) Cuantía mínima de cada una de las armaduras, longitudinal y transversal, repartida en las dos caras. Las losas apoyadas sobre el terreno requieren un estudio especial.

(\*\*) Cuantía mínima correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.

(\*\*\*) La cuantía mínima vertical es la correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.

La armadura mínima horizontal deberá repartirse en ambas caras. Para muros vistos por ambas caras debe disponerse el 50% en cada cara. Para muros vistos por una sola cara podrán disponerse hasta 2/3 de la armadura total en la cara vista. En el caso en que se dispongan juntas verticales de contracción a distancias no superiores a 7.5 m, con la armadura horizontal interrumpida, las cuantías geométricas horizontales mínimas pueden reducirse a la mitad.

### **Empalme de las armaduras pasivas**

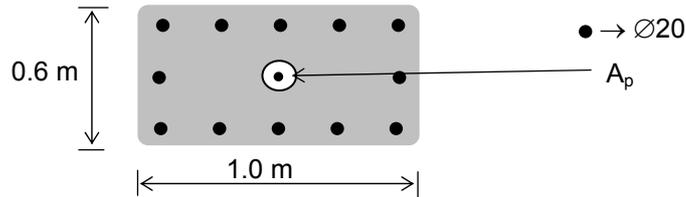
Puesto que las barras de armadura pasiva se suministran en longitudes máximas de *12 m*, a veces es necesario empalmar las barras en obra.

Los tipos de empalme que se pueden realizar son:

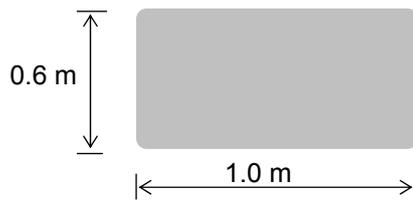
- Empalme por solapo: colocando una barra junto a la otra a una distancia menor de  $4\varnothing$ . La longitud de solapo viene establecida en la EHE en función de la longitud de anclaje.
- Empalme por soldadura: soldando una barra a la otra, bien en ángulo o a tope.
- Empalmes mecánicos: mediante dispositivos mecánicos.

**Ejercicios propuestos**

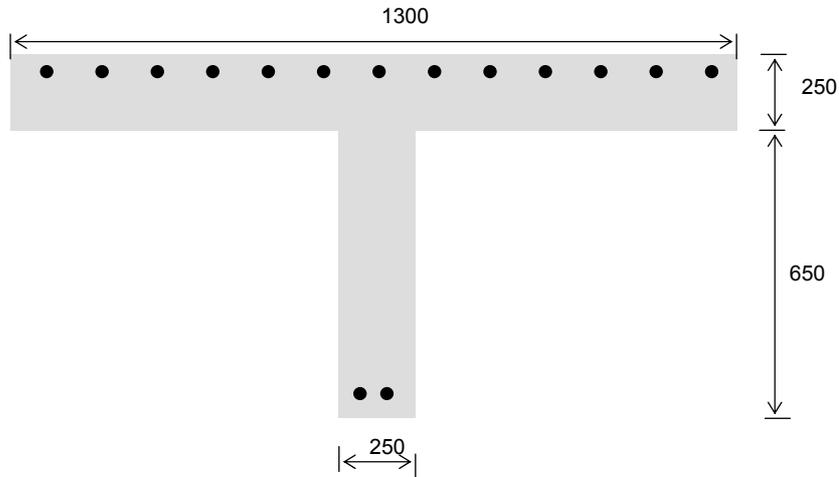
1. La figura inferior corresponde a una viga de  $60 \times 100 \text{ cm}$ , fabricada con hormigón HA-25 y con acero B-400-S. Las armaduras superior e inferior están compuestas por  $5 \varnothing 20$ . Se pide: 1. Realizar el diagrama de interacción y deducir a partir de él el momento máximo en flexión simple que puede soportar la sección, 2. ¿Qué armadura de pretensado centrado habría que introducirle para que resistiera en flexión simple un momento máximo del doble del anterior?



2. La figura inferior corresponde a una viga de  $60 \times 100 \text{ cm}$ , fabricada con hormigón HA-25 y con acero B-400-S. Plantear las ecuaciones de la flexión compuesta para que resista las acciones exteriores de  $N_d = 300 \text{ kN}$  y  $M_d = 500 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Una vez planteadas resolverlas aceptando las siguientes hipótesis: a)  $x = x_{lim}$  y b)  $A_s = A'_s$ .



3. En la figura inferior se presenta una viga en T de un puente. Las armaduras, tanto las de tracción como las de compresión, se colocan de manera que el recubrimiento mínimo al paramento exterior más próximo sea de  $25 \text{ mm}$ . Las distintas barras están separadas entre sí al menos un diámetro. La calidad del hormigón es HA-35 y el acero es B-500-SD. Los coeficientes de seguridad de minoración de materiales son  $1.5$  para el hormigón y  $1.15$  para el acero. Las vigas son de hormigón armado, dado que la luz es de  $10 \text{ m}$ , y se colocan simplemente apoyadas.



Se pide:

- Aplicando la EHE calcular el ancho eficaz de la viga en T.
- Deducir los valores límite:  $x_{lim}$ , momento límite y cuantía límite.
- Fijar  $x=250 \text{ mm}$  y calcular el momento de agotamiento en flexión simple sin armadura de compresión.
- Razona el motivo por el que una viga en T resulta económica desde el punto de vista del ahorro de hormigón.

4. Para el problema de la viga en doble T (ejemplo de hormigón pretensado) plantear todo el sistema como si agotara en el dominio de rotura 3 y establecer las conclusiones correspondientes.

5. En el problema de la zapata del capítulo anterior, bajar el canto hasta que sea una zapata flexible y calcular la armadura resultante. ¿Qué armadura habría que disponer si las acciones sobre la zapata fueran  $N_d=200 \text{ kN}$  y  $M_d=120 \text{ kN}\cdot\text{m}$  y ésta tuviese 1 m de canto?

**Referencias:**

ACI Committee 340 (1997), *ACI Design Handbook: Design of Structural Reinforced Concrete Elements in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-95*, ACI Special Publication SP-17(97), American Concrete Institute, Detroit, Michigan.

ACI 318 (2005), *Building Code Requirements for Structural Concrete*, American Concrete Institute, Detroit, Michigan.

Collins M.P. y Mitchell D. *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall. 1991. New Jersey.

Corres Peiretti H., Martínez Martínez J.L., Pérez Caldentey A. y López Agüí J.C. *Prontuario Informático del Hormigón Estructural 3.0*. IECA. (www.ieca.es).

Hernández-Montes E., Gil-Martín L.M. y López-Aragón J.A. "Diagramas de dimensionamiento en flexión para hormigón". *Hormigón y Acero*, N° 227. Primer trimestre 2003. Pág. 67-74.

Hernández-Montes E., Gil-Martín L.M. y Aschheim M.A. (2005) "The Design of Concrete Members Subjected to Uniaxial Bending and Compression Using Reinforcement Sizing Diagrams". *Structural Journal. ACI*. Volumen 102, N°1, Enero-Febrero 2005. Pág. 150-159.

Hernández-Montes, E., Aschheim, M and Gil-Martín, L.M. (2004). "The impact of optimal longitudinal reinforcement on the curvature ductility capacity of reinforced concrete column sections". *Magazine of Concrete Research*, 56, No. 9, Noviembre, 499-512.

Páez, Alfredo (1986). *Hormigón Armado, tomo I*. Editorial Reberté. Barcelona.

Priestley, M.J.N., Park, R., y Lu, F., "Moment Curvature Relationships for Prestressed Concrete in Constant Moment Zones". *Magazine of Concrete Research*, Vol.23, N0.75-76, Junio-Septiembre. 1971. pp. 69-78.

Vecchio, F.J., y Collins, M.P., "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", *ACI Journal*, Vol. 83. N°2, Marzo-Abril. 1986. pág. 219-231





---

CAPÍTULO VII

---

**CORTANTE**



Agotamiento por cortante.  
Cortesía del Instituto Eduardo Torroja. CSIC

7.1. INTRODUCCIÓN

Vamos a iniciar el capítulo de cortante con un ejemplo. En la figura 7.1 se representan los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes de una viga simplemente apoyada de sección rectangular y fabricada con hormigón armado.

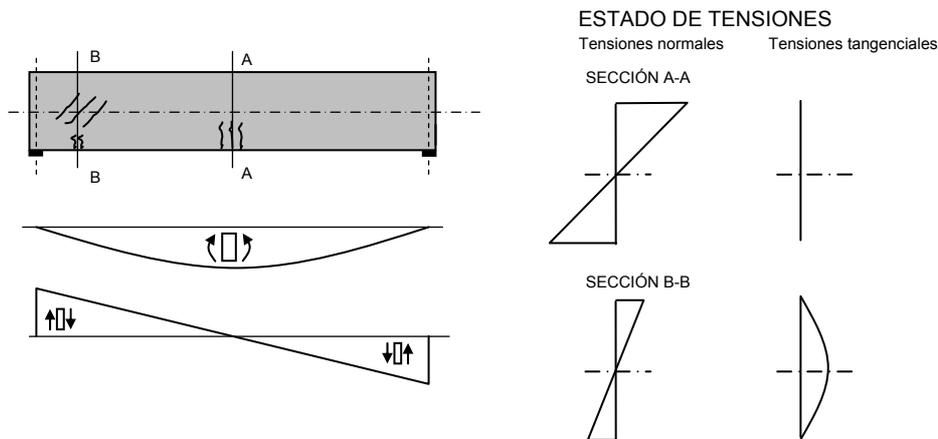


Figura 7.1. Viga simplemente apoyada

En la sección A-A las tensiones normales son máximas y las tensiones tangenciales son nulas. La rotura de tracción que se puede presentar en la sección AA será del tipo grietas verticales dado que las tracciones existentes son horizontales<sup>1</sup>. En la sección BB se presentan tanto tensiones normales como tangenciales: en la parte inferior de la sección BB las tensiones normales son de tracción y las tensiones tangenciales son nulas y, por tanto, el comportamiento en esa zona es similar al de la sección AA, apareciendo grietas de tracción verticales. En la figura 7.2 se ha aislado un diferencial de área de la zona de la fibra neutra de la sección BB<sup>2</sup> y se ha representando el estado de tensiones mediante el círculo de Mohr<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Téngase en cuenta que las grietas son siempre perpendiculares a las direcciones principales de tracción.

<sup>2</sup> Donde las tensiones normales son nulas y máximas las tensiones tangenciales.

<sup>3</sup> En la representación en el círculo de Mohr hemos considerado tracciones positivas y tensiones tangenciales positivas si van en sentido horario. Este criterio es diferente al que estamos usando y sólo lo emplearemos en el círculo de Mohr.

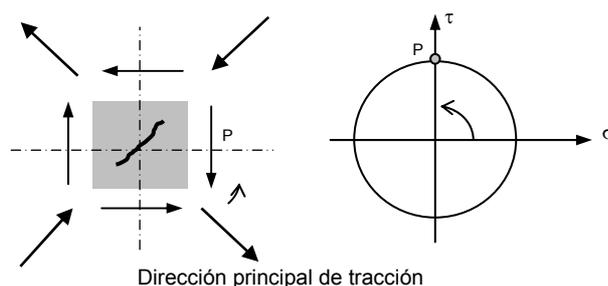


Figura 7.2. Estado de tensiones en el c.d.g. de la sección BB y círculo de Mohr correspondiente.

Como se puede observar, las grietas que aparecen en la zona de la fibra neutra de la sección BB forman  $45^\circ$  con la horizontal, de tal forma que el agotamiento por cortante de la viga de la figura 7.1 se puede producir por extensión de las grietas a  $45^\circ$  en la forma que aparece en la figura 7.3. La manera de impedir el agotamiento por cortante, es decir, que la zona central de la viga descienda, es coser la grieta mediante barras verticales (cercos y estribos) y/o mediante barras horizontales levantadas. El EC2 recomienda que al menos el 50% de la armadura transversal de cortante sea del tipo cerco.

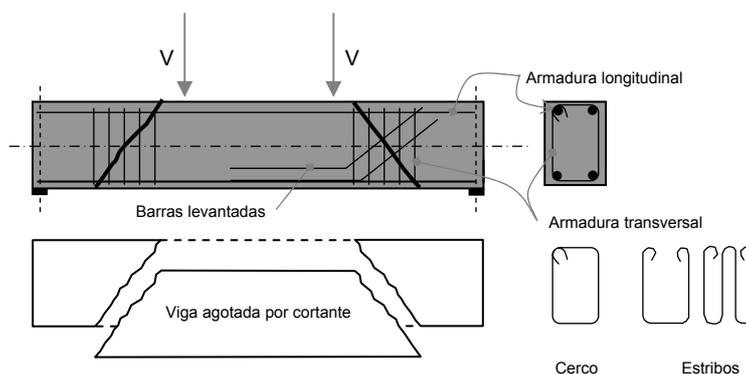


Figura 7.3. Armadura de cortante

Sea una viga de sección rectangular como la representada en la figura 7.3 y  $V$ , el valor del cortante que origina el agotamiento de la sección. La grieta de cortante se supone comprendida entre la armadura longitudinal y el centro de gravedad de la zona de compresiones, ver figura 7.4. En este caso particular la armadura de cortante está compuesta exclusivamente por cercos o estribos a  $90^\circ$  separados una distancia  $s$ . Cosiendo la grieta hay  $z/s$  estribos, que son los encargados de resistir el cortante (además de lo que contribuya el hormigón en la zona de compresión). Tal y como se indica en la figura 7.4,  $z$  es el brazo mecánico: distancia entre los cc.dd.gg. de la zona comprimida y de la zona traccionada -éste último estará centrado en la armadura de tracción-. El valor de  $z$  se puede calcular o bien tomar  $z=0.90d$ , siendo  $d$  el canto útil.

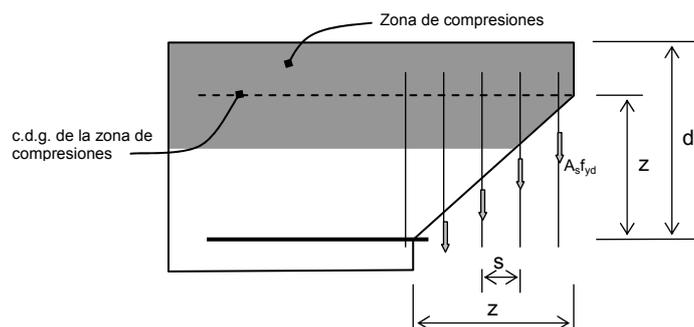


Figura 7.4. Colaboración de los cercos en la resistencia a cortante

La contribución de la armadura en la resistencia a cortante ( $V_{su}$ ) es:

$$V_{su} = A_s f_{y90,d} \frac{0.9d}{s} \quad \text{o bien} \quad V_{su} = A_{90} f_{y90,d} 0.90d \quad (7.1)$$

donde  $A_s$  es el área de la armadura que cada cerco o estribo aporta para la resistencia a cortante y  $A_{90}$  es el área de la armadura de cortante por unidad de longitud. Para entender esto volvamos sobre la figura 7.3, en la que se ha representado un cerco, en el que hay dos ramas que impiden que la parte central de la viga descienda. En la misma figura se representan dos estribos: uno de dos ramas y otro de cuatro ramas. Obviamente el estribo de cuatro ramas tiene el doble de capacidad para resistir el esfuerzo cortante que el estribo de dos ramas. Las fórmulas de este ejemplo son válidas sólo para hormigón armado cuando los cercos están a  $90^\circ$  y con bielas de hormigón a  $45^\circ$  (i.e. grietas a  $45^\circ$ ).

De lo expuesto en esta introducción podemos sacar varias conclusiones:

- 1ª. Para resistir el esfuerzo cortante la armadura debe ser del tipo cercos, estribos o barras levantadas. Puesto que el hormigón en la zona de compresiones también colaborará a resistir el cortante, si este esfuerzo es pequeño podría no ser necesaria armadura de cortante.
- 2ª. El cortante no afecta a una sección transversal determinada sino a una zona de la viga. Esta consideración nos permite desestimar, en cuanto al cálculo de la armadura de cortante se refiere, la zona de la viga situada a menos de  $d$  (canto útil) del apoyo (ver figura 7.7). Esto es debido a que el cortante comprendido entre la cara del pilar y la sección situada a la distancia  $d$  no produce grietas en la viga ya que la biela de compresión generada por el cortante continúa hacia el interior del pilar, sin afectar a la viga.

En la figura 7.5 se aprecia una rotura por cortante típica en las proximidades de un apoyo.



Figura 7.5. Rotura de cortante

## 7.2. ESFUERZO CORTANTE EFECTIVO

El esfuerzo cortante efectivo  $V_{rd}$  es el valor del esfuerzo cortante que debe de considerarse para efectuar la comprobación relativa al Estado Límite de Agotamiento por esfuerzo cortante, o sea, el cortante que “realmente” debe de resistir la sección.

El cortante producido por las acciones exteriores  $V_d$  puede no ser el único cortante que deba de resistir la sección. Se pueden presentar dos cortantes adicionales: el cortante producido por la fuerza de pretensado<sup>4</sup> ( $V_{pd}$ ) y el cortante producido por la variación del canto de la sección transversal ( $V_{cd}$ ). La formulación que propone la EHE es:

$$V_{rd} = V_d + V_{pd} + V_{cd} \quad (7.2)$$

El pretensado produce dos efectos sobre la resistencia a cortante, que se contabilizan por separado:

---

<sup>4</sup> Componente de la fuerza de pretensado paralela a la sección transversal. Esta componente tiene la misma dirección que  $V_d$ , tal y como se aprecia en la figura 7.6.

- El primer efecto se debe al axil que el pretensado introduce sobre el elemento (proyección de la fuerza de pretensado sobre la línea media del elemento). Este axil mejora la resistencia a cortante del hormigón, tal y como se verá más adelante.
- El segundo efecto se debe a la proyección vertical de la fuerza de pretensado y que se resta directamente al esfuerzo cortante. Éste efecto es el que se tratará en este apartado. En el elemento de la figura 7.6, la sección señalada debe de resistir un esfuerzo cortante de valor:  $V_{rd} = V_d - P_0 \text{sen} \alpha$ .

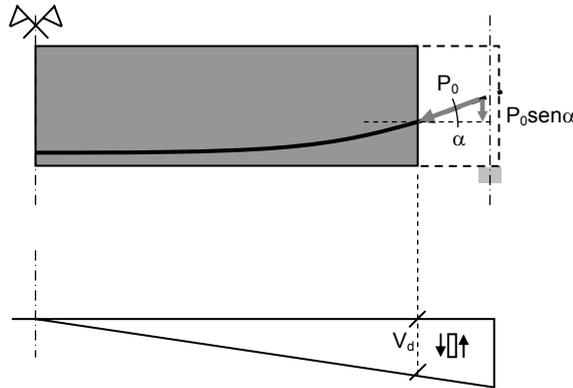


Figura 7.6. Contribución del pretensado para resistir el esfuerzo cortante

Si el elemento es de canto variable los ccddgg de compresiones y de tracciones no son paralelos a la línea media de la sección, lo que hace que las resultantes de las compresiones y de las tracciones tengan componentes paralelas a la sección transversal ( $V_{cd}$ ), tal y como se aprecia en la figura 7.7. El esquema de la derecha, correspondiente a la sección AA, permite apreciar cómo la acción vertical  $V_d$  es suma de tres términos:  $T \text{sen} \alpha$ ,  $C \text{sen} \beta$  y el término que deberá resistir la sección transversal,  $V_{rd}$ .

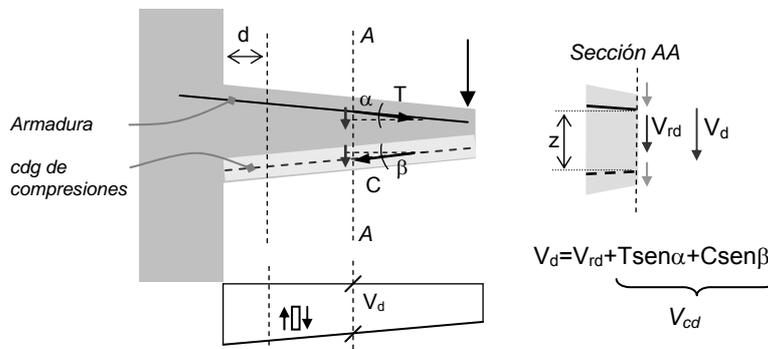


Figura 7.7. Cortante en piezas de canto variable

En el ejemplo de la figura 7.7 ambas componentes son favorables<sup>5</sup> y, por tanto:  $V_{rd} = V_d - (T \operatorname{sen} \alpha + C \operatorname{sen} \beta)$ . Se dice que las componentes son “favorables” cuando el cortante que realmente debe resistir la sección ( $V_{rd}$ ) es menor que el que actúa sobre ella ( $V_d$ ). En el caso de flexión simple (axil nulo) se cumple que:

$$T \cos \alpha = C \cos \beta \Rightarrow M = T \cos \alpha \cdot z = C \cos \beta \cdot z \Rightarrow$$

$$V_{rd} = V_d - \underbrace{\frac{M}{z} \tan \alpha - \frac{M}{z} \tan \beta}_{V_{cd}} \quad (7.3)$$

### 7.3. DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES TANGENCIALES EN EL HORMIGÓN

La distribución de tensiones tangenciales que aparece en la figura 7.1 obedece a la ley de Colignon<sup>6</sup>:

$$\tau = \frac{V \cdot S_z}{b_w \cdot I_z} \quad (7.4)$$

Esta ley podría ser aceptable en prefisuración pero no es aplicable cuando el hormigón está fisurado, como sucede en el caso de que existan tracciones. De hecho, en ELU se desprecia la colaboración del hormigón a tracción, lo que equivale a suponer que éste se encuentra totalmente fisurado.

Existen otras particularidades que llevan a no poder considerar de forma general la distribución de Colignon como es el hecho de que el hormigón estructural es un material compuesto donde uno de los materiales presenta fluencia, con la consiguiente alteración de la distribución de tensiones en función del tiempo.

Por lo anteriormente expuesto se hace necesario considerar una distribución de tensiones tangenciales distinta. Para ello se va a calcular el valor de  $\tau$  en la fibra neutra, siguiendo la notación indicada en la figura 7.8, que representa una rebanada de viga de  $dx$  de longitud. En esta figura cualquier plano  $a-b$  comprendido entre la fibra neutra y la armadura de tracción debe verificar la siguiente ecuación para equilibrar la diferencia de tracciones existentes en la armadura de tracción ( $dT$ ):

$$dT = \tau \cdot b_w \cdot dx$$

<sup>5</sup> Respecto a  $V_{rd}$  se puede decir que la contribución a cortante es siempre favorable si la sección crece en la misma dirección que crece el momento.

<sup>6</sup> Se ha empleado  $b_w$  para designar el ancho del alma (del inglés *web* = alma). El valor  $b_w$  puede ser variable a lo largo del canto de la viga. La EHE emplea un valor de  $b_w$  denominado  $b_0$ , definido como ancho del alma, que corresponde al menor valor de  $b_w$  en los  $\frac{3}{4}d$  contados en vertical a partir de la armadura de tracción.

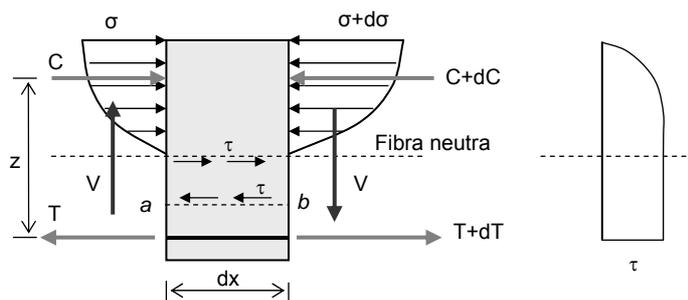


Figura 7.8. Tensiones de cortante en la fibra neutra

El valor de  $\tau b_w$  permanece constante en todos los planos horizontales del tipo  $a-b$ , situados entre la fibra neutra y la armadura de tracción, puesto que no hay esfuerzo exterior que pueda modificarlo, basta con observar las leyes de tensiones normales de la figura 7.8. Estableciendo equilibrio de momentos de las acciones exteriores sobre la rebanada en el punto donde se aplica la resultante de compresiones, tenemos:

$$dT \cdot z = V \cdot dx$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores nos queda que:

$$\tau = \frac{V}{z \cdot b_w} \quad (7.5)$$

El valor de la tensión cortante ( $\tau$ ) dado por la ecuación 7.5 es el valor máximo de la tensión tangencial, en contraposición a la fórmula de Colignon, en la que el valor de la tensión tangencial es función de la posición de la fibra considerada. Para  $b_w$  constante, el valor de  $\tau$  entre la fibra neutra y la armadura de tracción se mantiene constante, ya que se ha supuesto que la resistencia a tracción del hormigón es nula. La expresión anterior ha sido muy cuestionada<sup>7</sup> ya que implica que la tensión de cortante se transmite a través de las grietas de flexión. Sin embargo, tanto la ecuación 7.5 como la figura 7.8 están hoy día suficientemente contrastadas.

<sup>7</sup> Tanto la figura 7.8 como la ecuación 7.5 se han transcrito del libro "Reinforced Concrete Design" de Sutherland y Clifford de 1926.

7.4. GRIETAS DE CORTANTE

En las vigas de hormigón se presentan dos tipos de grietas de cortante: grietas de cortante y grietas de flexión-cortante. Las primeras son las producidas en el alma de las vigas y se deben a la tensión de cortante. Las segundas son las que, iniciadas por la tensión normal, son continuadas por la tensión cortante. Figura 7.9.

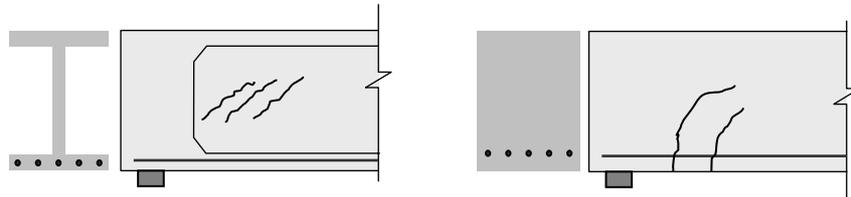


Figura 7.9. Grietas de cortante y grietas de flexión-cortante

Las primeras son típicas de vigas en doble T y se producen porque la tensión principal de tracción supera la resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ct}$ ). Estudiemos el estado de tensiones de un punto situado en el cdg de la sección transversal de la viga en doble T de la figura 7.10.

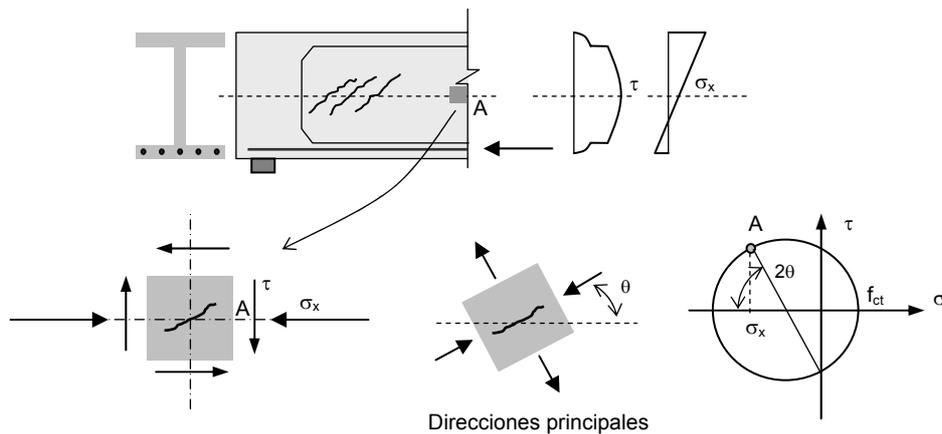


Figura 7.10. Grietas de cortante

Si se estudia el problema aplicando la Teoría de la Elasticidad se puede establecer que la rotura por cortante se producirá cuando la tensión principal de tracción sea igual a la resistencia máxima a tracción del hormigón ( $f_{ct}$ ). Es interesante observar que sólo hasta ese instante se puede aplicar Teoría de Elasticidad puesto a partir de ese momento el hormigón se agrieta y ya no se comporta como un medio continuo. Imponiendo que la tensión principal de tracción sea igual a  $f_{cts}$ , del círculo de Mohr de la figura 7.10 se deduce que:

$$f_{ct} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma_x}{2} \quad (7.6)$$

De la ecuación 7.6 se puede deducir el valor de  $\tau$  que produce fisuración y, por ende, el valor del esfuerzo cortante.

En el momento en que se produce la fisuración, la inclinación de las grietas de cortante ( $\theta$ ) se puede deducir del círculo de Mohr (figura 7.10):

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma_x}$$



Figura 7.11. Inclinación de fisuras cerca de los apoyos

Como se puede observar en la figura 7.11, cerca de los apoyos -donde  $\tau$  es máximo- las grietas de tracción están más inclinadas, tendiendo a formar  $45^\circ$  en la fibra neutra de la viga.

Cuando entre dos grietas verticales contiguas, producidas por tensiones normales, aparece un voladizo empotrado en la zona de compresiones, ver figura 7.12, aparece otro tipo de grietas. La carga sobre el voladizo es la diferencia de tracciones en la armadura inferior entre las dos grietas verticales ( $dT$ ). Esta diferencia de tracciones produce un momento en el empotramiento que puede generar las tracciones necesarias para que evolucione este nuevo tipo de grieta.

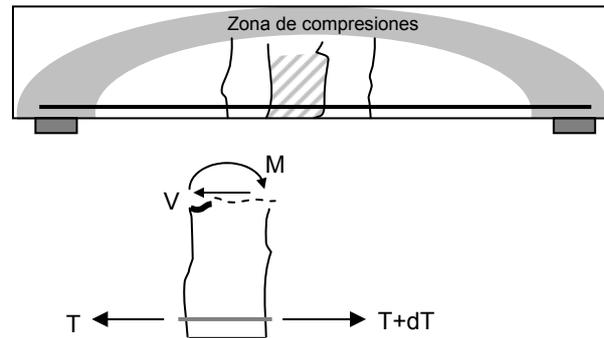


Figura 7.12. Grietas de flexión-cortante

### 7.5. PLANTEAMIENTO EN LA NORMATIVA ACTUAL

El siguiente diagrama de flujo tiene por objeto situar al lector en relación al tratamiento que la normativa actual hace de la resistencia a cortante de piezas de hormigón estructural.

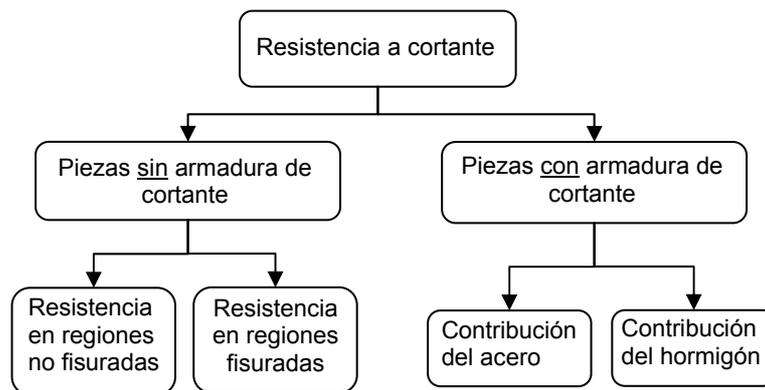


Figura 7.13. Planteamiento general de la resistencia a cortante

La resistencia a cortante en vigas sin armadura de cortante se puede plantear de dos maneras distintas en función de si aparecen o no zonas fisuradas. En el caso de que no aparezcan zonas fisuradas se puede emplear la mecánica del continuo para el hormigón, siendo posible aplicar la teoría de Colignon siempre que las tensiones de compresión no sean muy elevadas y se pueda considerar un módulo de deformación

longitudinal constante ( $E_c$ ). En este caso la resistencia a cortante se puede deducir de la expresión 7.4. El Eurocódigo 2 plantea de la siguiente fórmula para regiones no fisuradas sin armadura de cortante:

$$V_{Rd,c} = \frac{I \cdot b_w}{S} \sqrt{(f_{ctd})^2 + \alpha_l \sigma_{cp} f_{ctd}} \quad (7.7)$$

donde  $I$  es el momento de inercia,  $S$  es el momento estático respecto al cdg,  $f_{ctd} = f_{ctk,0.05} / \gamma_c$ ,  $\alpha_l = l_x / l_{pt2} \leq 1$  para tendones de pretensado y  $\alpha_l = 1$  para otro tipo de pretensado,  $\sigma_{cp}$  es la tensión en el hormigón generada por el esfuerzo de pretensado,  $l_x$  es la distancia de la sección considerada al inicio de la longitud de transmisión y  $l_{pt2}$  es el límite superior de la longitud de transmisión<sup>8</sup>.

Se puede observar que en el caso de no existir pretensado la expresión 7.7 se puede deducir directamente a partir de la ecuación 7.4<sup>9</sup>,

En el caso de vigas fisuradas no es aplicable la teoría de elasticidad. Este problema requiere de un tratamiento experimental que trasciende al planteamiento de este texto. El EC2 formula que la resistencia a cortante de piezas sin armadura de cortante en regiones fisuradas es:

$$V_{Rd,c} = (C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d \geq (v_{\min} + k_1 \sigma_{cp}) b_w d \quad (7.8)$$

donde:

$f_{ck}$  en MPa

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0, \quad d \text{ en mm}$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0.02$$

$A_{sl}$  es el área de la armadura traccionada, que se extiende a una distancia  $\geq (l_{bd} + d)$  más allá de la sección considerada.

$b_w$  es el ancho menor de la sección transversal en la zona de tracción (mm).

$\sigma_{cp} = N_{Ed} / A_c < 0.2 f_{cd}$  (MPa)

$N_{Ed}$  es la fuerza axial sobre la sección transversal debida a carga o al pretensado (expresado en N y positiva en compresión). Se puede ignorar la influencia de las deformaciones impuestas sobre  $N_{Ed}$ .

<sup>8</sup> Según el EC2,  $l_{pt2} = 1.2 l_{pt}$  donde  $l_{pt}$  es el valor básico de la longitud de transmisión. Ver Eurocódigo 2 apartado 8.10.2.2.

<sup>9</sup> Basta con considerar que en el caso del círculo de Mohr centrado en el origen del sistema de referencia  $\sigma$ - $\tau$  el valor de la tracción máxima es el mismo que el del cortante máximo (círculo de Mohr de la figura 7.2).

$A_c$  El área de hormigón de la sección transversal.  
 $V_{Rd,c}$  expresado en N.

El EC2 recomienda  $C_{Rd,c} = 0.18 / \gamma_c$ ,  $v_{min} = 0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$  y  $k_l = 0.15$ .

La norma española EHE establece una serie de limitaciones para la separación entre estribos, que de cumplirse permite suponer que la fisuración debida a esfuerzo cortante se controla adecuadamente.

Si el elemento estructural tiene armadura de cortante su resistencia a cortante viene dada como suma de dos: la resistencia aportada por la armadura de cortante más la resistencia aportada por el hormigón. La resistencia aportada por la armadura se deduce mediante la *analogía de la celosía*, que será tratada en el apartado siguiente.

#### 7.6. COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN AGRIETADO. ANALOGÍA DE LA CELOSÍA

Dada la poca resistencia a tracción del hormigón, bajo pequeñas cargas éste presenta grietas orientadas la dirección perpendicular a la dirección principal de tracción. Una vez que aparecen estas grietas la resistencia del hormigón en la dirección principal de tracción es nula (aunque cese la carga) y dejan de ser aplicables los principios de la Mecánica de los Medios Continuos. Una hipótesis, presentada por Ritter en 1899, consiste en considerar que la viga se comporta internamente como una celosía en la que los elementos a compresión (cordón superior y diagonales) están constituidos por el hormigón presente en la viga, y los elementos a tracción están constituidos por la armadura longitudinal inferior actuando como tirante y la armadura transversal actuando como montante. Figura 7.14.a

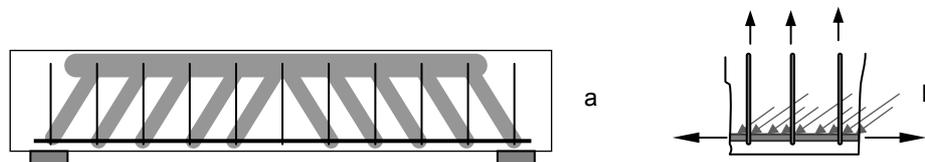


Figura 7.14. Analogía de la celosía

Los montantes están concentrados en la armadura vertical. Por el contrario, las diagonales comprimidas de hormigón no están concentradas sino que forman un continuo a lo largo de toda la masa de hormigón, como se aprecia en la figura 7.14b.

La idea inicial de Ritter fue posteriormente mejorada ya que la aplicación estricta del método de la celosía conducía a valores de tensiones en las armaduras de cortante claramente superiores a los obtenidos en los ensayos. Esto es debido a que existen otros mecanismos, además del mecanismo de celosía, que colaboran en la resistencia a cortante: en el caso de una viga sin armadura de cortante el modelo de Ritter supone que la resistencia a cortante es nula y sin embargo la experiencia ha demostrado que no es así. Por otro lado, si sólo se considera el mecanismo de la celosía

el acero quedará tensado en exceso. Se concluye que el cortante que resiste una viga según el modelo de la celosía es inferior al que en realidad resiste dicha viga. Otro inconveniente era que las bielas comprimidas en el modelo de Ritter formaban  $45^\circ$  con la horizontal y, en general, se comprobó que en hormigón armado este ángulo es ligeramente menor.

A continuación se plantea la analogía de la celosía con una orientación genérica de las bielas de hormigón y de la armadura de cortante. Sea  $\theta$  el ángulo que forman las bielas de hormigón con la horizontal y sea  $\alpha$  es el ángulo de la armadura de cortante con la horizontal. En la figura 7.15 se ha aislado un elemento unidad de longitud de la viga (Figura 7.15). Sea  $A-A$  una sección en la que el valor de la tensión de cortante venga dado por la ecuación 7.5.

Las líneas discontinuas de la figura 7.15 representan los cccddg de las bielas de hormigón y las líneas continuas, que forman un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, representan la armadura de cortante. Estableciendo el equilibrio de fuerzas sobre la cara inferior del plano  $A-A$  de forma vectorial se obtiene el triángulo de fuerzas de la figura 7.15b, donde  $C$  es la resultante de las compresiones de las bielas de hormigón y  $T$  es la resultante de las tracciones de la armadura de cortante. Ambas resultantes ( $C$  y  $T$ ) generan una resultante horizontal  $R$  que origina unas tensiones tangenciales ( $\tau$ ), verificándose que:  $R = I \cdot \tau \cdot b_w$ . Planteando el equilibrio, según las direcciones horizontal y vertical, en la figura 7.15 se obtiene:

$$\begin{aligned} C \cdot \cos \theta + T \cdot \cos \alpha &= R = \tau \cdot b_w \\ C \cdot \operatorname{sen} \theta &= T \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (7.9)$$

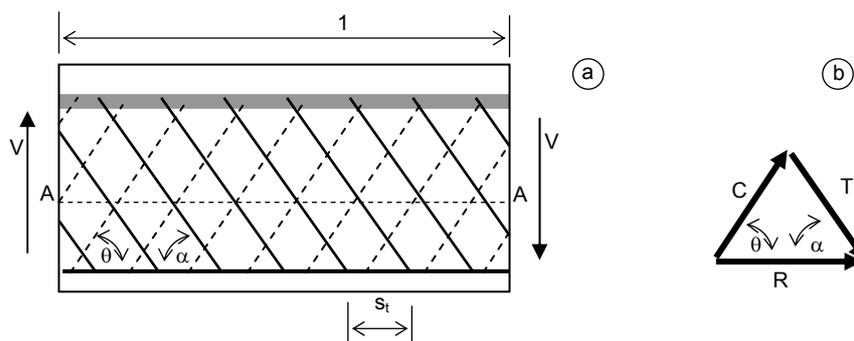


Figura 7.15. Analogía de la Celosía

En las ecuaciones 7.9 se despeja  $C$  de la segunda y se sustituye en la primera. Imponiendo que la tensión del acero sea  $f_{y\alpha,d}$ , o sea, llevando el acero hasta el agotamiento:  $T = A_{\alpha} f_{y\alpha,d}$ , donde  $A_{\alpha}$  es el área de armadura de cortante por unidad de longitud. Se obtiene así que:

$$A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) = \tau \cdot b_w = \frac{V}{z} \quad (7.10)$$

Multiplicando por  $z$  -brazo mecánico- a ambos lados de la ecuación 7.10 y teniendo en cuenta la ecuación 7.5, se obtiene la fórmula propuesta por las normas EHE y EC2:

$$\sum A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) \cdot z = V_{su} \quad (7.11)$$

En el estudio de cortante de piezas de hormigón armado, no sometidas a axiles, se puede utilizar  $z = 0.9d$ .

La interpretación de la ecuación 7.11 es la siguiente: empleando la analogía de la celosía y obligando a que la armadura de cortante  $A_{\alpha}$  (armadura de cortante por unidad de longitud) trabaje a una tensión<sup>10</sup>  $f_{y\alpha,d}$ , el cortante que resiste la viga es  $V_{su}$ . El valor  $V_{su}$  es inferior al cortante que solicita a la viga  $V_{rd}$ , puesto que, como ya se ha apuntado anteriormente, el modelo de Ritter no tiene en cuenta que la viga tiene una capacidad resistente asociada a mecanismos diferentes al del modelo de la celosía. El símbolo  $\Sigma$  contempla la posibilidad de la existencia de distintos grupos de armadura de cortante, con diferentes orientaciones.

Cambemos el punto de vista: despejemos  $T$  de la segunda de las ecuaciones 7.9 y sustituyamos su valor en la primera. Teniendo en cuenta que:  $C = \sigma_c \cdot b_w \cdot \operatorname{sen} \theta$ , donde  $\operatorname{sen} \theta$  es la zona sobre la que actúa la tensión de hormigón cuya proyección es el lado unidad, tal y como se aprecia en la figura 7.16, se obtiene que:

$$\sigma_c \cdot \operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) = \tau = \frac{V}{b_w \cdot z} \quad (7.12)$$

De la ecuación anterior se puede determinar el valor de la tensión en las bielas de hormigón cuando la tensión cortante sobre el plano  $A-A$  es  $\tau$ . Si en la ecuación 7.12 se impone que  $\sigma_c$  sea la resistencia del hormigón en biela y se aplica un coeficiente de reducción, para tener en cuenta la existencia de axiles adicionales, se obtiene la fórmula propuesta por la norma EHE (que coincide con la del EC2):

$$V_{u1} = K \cdot f_{1cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \quad (7.13)$$

El valor de  $V_{u1}$  dado por la ecuación 7.13 es el cortante que habría que aplicar a la sección para agotar el hormigón a compresión. Obviamente  $V_{rd}$  no puede superar este valor.

<sup>10</sup> La norma EHE recomienda que la tensión de la armadura de cortante sea inferior a  $400 \text{ N/mm}^2$  por razones de deformación. Al emplear mecanismos de bielas y tirantes para la demostración es conveniente que no se produzcan excesivas deformaciones.

La resistencia del hormigón comprimido en biela es igual a  $f_{1cd}$ , teniéndose así en cuenta que el hormigón puede presentar fisuración oblicua o paralela a las bielas de compresión, con la consiguiente disminución de la capacidad resistente a compresión.

$$f_{1cd} = 0.60 f_{cd} \quad \text{para } f_{ck} \leq 60 \text{ MPa}$$

$$= (0.90 - f_{ck}/200) f_{cd} \geq 0.5 f_{cd} \quad \text{para } f_{ck} > 60 \text{ MPa}$$

$K$  es un coeficiente que depende del esfuerzo axial y toma los valores:

$K=1.00$  para estructuras sin pretensado o sin esfuerzo axial de compresión.

$$K = 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \quad \text{para } 0 < \sigma'_{cd} \leq 0.25 f_{cd}$$

$$K = 1.25 \quad \text{para } 0.25 f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 0.50 f_{cd}$$

$$K = 2.5 \left( 1 - \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \right) \quad \text{para } 0.50 < \sigma'_{cd} \leq f_{cd}$$

donde  $\sigma'_{cd}$  es la tensión de compresión media (medida positiva) en el hormigón debido a la fuerza axial de diseño, que se debe de calcular teniendo en cuenta la compresión absorbida por las armaduras comprimidas. El valor de  $\sigma'_{cd}$  no necesita ser calculado en una distancia menor de  $0.5 d \cot \theta$ , medida desde el borde del apoyo.

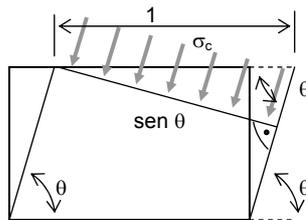


Figura 7.16. Campo de compresiones

### Contribución del hormigón en la resistencia a cortante

Como se ha comentado anteriormente, la ecuación 7.11 corresponde al cortante resistido por la armadura de cortante empleando la analogía de la celosía. Como ya habíamos adelantado, se ha comprobado que el cortante resistido por una viga es mayor que el resistido exclusivamente por el modelo de la celosía. Esto se debe a diversas causas, entre ellas: al fenómeno arco, al efecto pasador de la armadura longitudinal y al efecto de rozamiento en la grieta. En la viga de la figura 7.12, sin armadura de cortante, se forma un arco interno que resiste un cortante adicional al expresado por la ecuación 7.11, aún cuando la viga esté agrietada en la zona de tracción.

Antes de calcular la contribución del hormigón en la resistencia a cortante<sup>11</sup> cuando hay armadura de cortante consideremos algunos ejemplos relativos a la naturaleza del hormigón.

El hormigón es parecido a una piedra y como tal muy deteriorable frente a deformaciones internas. Una estructura de hormigón que haya sufrido un fuerte movimiento (sismo, impacto de guerra, atentado, ...) quedará, por lo general, desmoronada mientras que la estructura metálica (parte del edificio como ascensores, estructuras auxiliares o estructura completa de acero) sólo se deformará. Dicho de otro modo, el hormigón puede resistir grandes cargas pero en cuanto deforma su resistencia se ve tremendamente menguada. En ingeniería estructural se define ductilidad de la estructura o de un elemento estructural ( $\mu$ ) a la relación entre deformación máxima ( $\delta_{max}$ ) y deformación de cedencia ( $\delta_y$ ).

La mayoría de las normas no consideran que la contribución del hormigón a cortante depende de la ductilidad de la estructura. La resistencia a cortante de un elemento de hormigón estructural varía en función de la ductilidad del elemento estructural tal y como se indica en la figura 7.17.

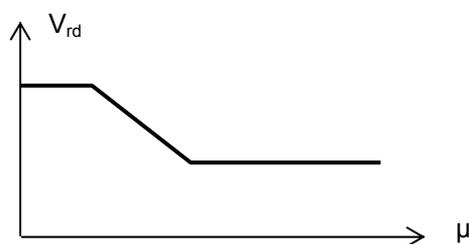


Figura 7.17. Resistencia a cortante del hormigón en función de la ductilidad ( $\mu$ ) del elemento estructural

En la figura 7.17 se aprecia que en el primer tramo (baja ductilidad) la resistencia es mayor puesto que el hormigón no se ha deformado mientras que en el último tramo la resistencia es atribuible sólo a la ayuda de la armadura de cortante puesto que el hormigón ha perdido toda su capacidad resistente frente al cortante. El tramo intermedio corresponde a una degradación progresiva del hormigón.

Los grandes movimientos que puede sufrir una estructura de hormigón son generalmente el sismo y los impactos. Los impactos tales como aviones, bombas, ... son muy difíciles de cuantificar, sin embargo el riesgo sísmico sí está bastante determinado. Alguna norma (recomendaciones para pilas de puente de la Federal Highway Administration, EEUU) vincula la resistencia del hormigón a cortante con el riesgo sísmico.

La normativa actual, entre ella la EHE, establece que el agotamiento a cortante puede venir dado por dos causas: agotamiento a compresión de las bielas, si  $V_{rd}$  supera a

<sup>11</sup> Existen grandes discrepancias entre los valores de la contribución del hormigón que proponen las distintas normas (incluso el EC2 considera nula la contribución del hormigón si existe armadura de cortante).

$V_{u1}$  (ecuación 7.13) y agotamiento a tracción en el alma, si  $V_{rd}$  supera a  $V_{u2}$ , siendo  $V_{u2}$  el cortante resistido por la viga, teniendo en cuenta todos los mecanismos posibles: modelo de la celosía y otros.

Los valores de  $V_{u2}$  son distintos para piezas con y sin armadura de cortante, tal y como se puede ver a continuación:

Para piezas con armadura de cortante, según la EHE tenemos:

$$\begin{aligned}
 V_{rd} &\leq V_{u1} && \text{(ecuación 7.13)} \\
 V_{rd} &\leq V_{u2} && V_{u2} = V_{cu} + V_{su} \\
 &&& V_{cu} = \left[ \frac{0.15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l f_{cv})^{1/3} - 0.15 \cdot \alpha_l \cdot \sigma'_{cd} \right] b_0 \cdot d \cdot \beta \\
 &&& V_{su} = z \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \sum A_a f_{y\alpha,d} \quad \text{(ecuación 7.11)} \\
 &&& (7.14)
 \end{aligned}$$

donde:

- $A_\alpha$  área por unidad de longitud de cada grupo de armaduras que forman un ángulo  $\alpha$  con la directriz de la pieza.
- $f_{y\alpha,d}$  resistencia de cálculo de la armadura  $A_\alpha$ , con la limitación de 400 MPa.
- $z$  brazo mecánico. En flexión simple, y a falta de datos más precisos, puede adoptarse como valor aproximado  $z = 0.9d$ .
- $\theta$  ángulo entre las bielas de compresión de hormigón y el eje de la pieza. Se adopta el mismo valor que en la ecuación 7.13 y debe cumplir  $0.5 \leq \cot \theta \leq 2.0$ .
- $\alpha$  ángulo de las armaduras con el eje de la pieza.
- $\sigma'_{cd}$  tensión de compresión media en el alma de la sección, medida positiva
- $\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}}$ ,  $d$  en mm.
- $f_{cv}$  resistencia efectiva del hormigón a cortante en MPa de valor  $f_{cv} = f_{ck}$ , con  $f_{cv}$  no mayor de 15 MPa en el caso de control reducido del hormigón.
- $\rho_l$  cuantía geométrica de la armadura longitudinal principal de tracción, pasiva y activa adherente, anclada a una distancia igual o mayor de  $d$  a partir de la sección de estudio.
- $$\rho = \frac{A_s + A_p}{b_0 d} \leq 0.02$$
- $\alpha_l$  factor que tiene en cuenta la introducción progresiva de las tensiones transmitidas por el pretensado al hormigón en el caso de piezas pretensadas con anclaje por adherencia (EHE).

$$\beta = \begin{cases} \frac{2 \cdot \cot \theta - 1}{2 \cdot \cot \theta_e - 1} & \text{si } 0.5 \leq \cot \theta < \cot \theta_e \\ \frac{\cot \theta - 2}{\cot \theta_e - 2} & \text{si } \cot \theta_e \leq \cot \theta < 2 \end{cases}$$

$\theta_e$  ángulo de referencia de inclinación de fisuras. Este valor puede calcularse mediante dos criterios: en pre-fisuración ó en post-fisuración. El primero es deducido de la Teoría de Elasticidad y corresponde al ángulo de inclinación de las fisuras en el alma de la pieza en el instante de fisuración, esto es, cuando la tensión principal de tracción alcanza  $f_{ct,m}$ . El segundo criterio está deducido a partir de teorías de campos de compresiones, desarrolladas en el anejo de este capítulo.

Criterio de pre-fisuración:

$$\cot \theta_e = \frac{\sqrt{f_{ct,m}^2 - f_{ct,m}(\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd} \cdot \sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{yd}} \begin{cases} \geq 0.5 \\ \leq 0.2 \end{cases} \quad (7.15)$$

$f_{ct,m}$  es la resistencia media a tracción del hormigón  
 $\sigma_{xd}, \sigma_{yd}$  son las tensiones normales de cálculo, a nivel del centro de gravedad de la sección, paralelas a la directriz de la pieza y al esfuerzo cortante  $V_d$ , respectivamente. Estas tensiones se obtendrán a partir de las acciones de cálculo, incluido el pretensado, de acuerdo con la Teoría de la Elasticidad y en el supuesto de hormigón no fisurado y considerando positivas las tensiones de tracción<sup>12</sup>.

Criterio de campo de compresiones:

Adoptando este criterio se puede tomar  $\theta_e = 29 + 7\varepsilon_x$  ( $\theta_e$  en grados y  $\varepsilon_x$  en ‰), donde  $\varepsilon_x$  es la deformación longitudinal en el alma, obtenida mediante la ecuación:

$$\varepsilon_x \approx \frac{\frac{M_d}{Z} + V_{rd} - 0.5N_d - A_p\sigma_{p0}}{2(E_s A_s + E_p A_p)} 1000 \geq 0 \quad (7.16)$$

donde  $\sigma_{p0}$  es la tensión de los tendones de pretensado cuando la deformación que la envuelve es igual a 0.

<sup>12</sup> Tal y como se hizo en la ecuación 7.6.

Para piezas sin armadura de cortante la norma española EHE propone la siguiente formulación, similar a la propuesta por el EC2 (ecuaciones 7.7 y 7.8):

$$V_{rd} \leq V_{u1}$$

$$V_{rd} \leq V_{u2} \quad \text{Para zonas fisuradas :}$$

$$V_{u2} = \left[ \frac{0.18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l f_{cv})^{1/3} + 0.15 \cdot \alpha_l \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot b_0 \cdot d$$

$$\geq \left[ \frac{0.075}{\gamma_c} \cdot \xi^{3/2} \cdot f_{cv}^{1/2} + 0.15 \cdot \alpha_l \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot b_0 \cdot d$$

Para zonas no fisuradas :

$$V_{u2} = \frac{l \cdot b_0}{S} \sqrt{(f_{ct,d})^2 + \alpha_l \cdot \sigma'_{cd} \cdot f_{ct,d}}$$

(7.17)

donde las variables tienen el mismo significado que en las expresiones 7.14.

### Ángulo de inclinación de las bielas de hormigón.

El ángulo de inclinación de las bielas no tiene un valor determinado, siendo válido cualquier valor que verifique:  $0.5 \leq \cot \theta \leq 2.0$ . Lo habitual es imponer que  $\theta = \theta_e$ , para ello se puede aplicar el criterio de pre-fisuración (que por lo general proporciona ángulos excesivos) o bien el método basado en teorías de campos de compresiones.

Los criterios de pre-fisuración o elásticos consisten en aplicar la teoría de la Elasticidad a la zona del alma, tal y como se hizo en el apartado 7.1 en el que se obtenía  $\theta=45^\circ$  cuando sólo existe tensión de cortante. En la Figura 7.10 la inclinación viene dada por  $\tan(2\theta)=2\tau/\sigma_x$ , cuando existe tensión cortante y una tensión normal en la sección transversal paralela al eje de la pieza. En el caso de que el diferencial de área esté sometido a tensión tangencial  $\tau$  y dos tensiones normales en caras perpendiculares  $\sigma_{xd}$  y  $\sigma_{yd}$ , el ángulo de inclinación de las bielas se obtiene de la ecuación 7.15, en la que se ha supuesto que la tensión en la dirección principal de tracción es  $f_{ct,m}$ .

Existen otros criterios plásticos para determinar el ángulo de inclinación de las bielas. Estos criterios se fundamentan en las ecuaciones 7.10 y 7.12, que plasmamos conjuntamente aquí:

$$A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) = \tau \cdot b_w = \frac{V}{z}$$

$$\sigma_c \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \theta + \cot \alpha) = \tau = \frac{V}{b_w \cdot z}$$

(7.18)

*Hernández-Gil*

Como ya vimos, estas ecuaciones se obtuvieron resolviendo el sistema vectorial de la figura 7.15b, suponiendo que el acero llegaba hasta el agotamiento mientras que al hormigón se le suponía una tensión  $\sigma_c$  (i.e.  $T=A_a f_{y\alpha,d}$  y  $C=\sigma_c \cdot b_w \cdot \text{sen}\theta$ ). Uno de los criterios plásticos consiste en suponer  $\sigma_c = f_{1cd}$ ,  $\sigma_s = f_{yd}$  y obtener  $V$  y  $\theta$  de estas dos ecuaciones. Otro criterio posible es suponer conocidos  $V$  y  $\sigma_c$ , imponer que  $\sigma_c = f_{1cd}$ , y de la segunda de las ecuaciones anteriores deducir el valor de  $\theta$ .

Por primera vez el Código modelo CEB-FIP de 1978 (y actualmente algunas normas, como la EHE) deja al ingeniero calculista el “privilegio” de poder elegir el ángulo  $\theta$  (siempre comprendido entre 27° y 65°).

### Ejemplo en hormigón armado

Consideremos la sección de una viga de  $50 \times 30$  cm de hormigón HA-30/P/20/IIIb con armadura del tipo B-500-S y ejecutada con control intenso. El esfuerzo cortante efectivo ( $V_{rd}$ ) al que está sometida la sección es de  $186$  kN y el momento de diseño ( $M_d$ ) es de  $200$  kN·m. Las comprobaciones que se deben hacer (según EHE) son las correspondientes a las ecuaciones 7.14. Optamos por armar mediante cercos a  $90^\circ$ :  $\alpha=90^\circ$ . Al tratarse de hormigón armado, el ángulo de inclinación de las bielas de hormigón es de  $45^\circ$  ( $\theta=45^\circ$ ), tal y como se comentó en el apartado 7.4. Si aplicamos criterios de las teorías de campos de compresiones, a partir de la ecuación 7.16 se obtiene como ángulo de referencia un valor de  $\theta_e=36.6^\circ$ . Optamos por operar con dos ángulos ( $\theta=45^\circ$  y  $\theta=40^\circ$ ). Los datos correspondientes a  $\theta=40^\circ$  aparecerán entre paréntesis.

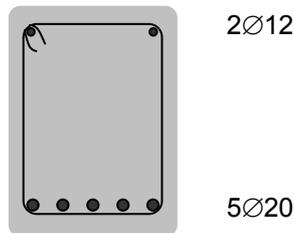


Figura 7.18. Sección transversal de una viga

Aplicando la ecuación 7.13 se obtiene que  $V_{ul}=801$  kN ( $V_{ul}=789$  kN para  $\theta=40^\circ$ ). Este valor no supera  $V_{rd}$  y no se produce agotamiento a compresión en el alma. La contribución del hormigón para resistir el cortante ( $V_{cu}$ ), para  $d=445$  mm ( $\xi=1.67$ ,  $\rho_L=0.0118$ ,  $\sigma'_{cd}=0$ ,  $\beta=1$  para  $\sigma_{xd}=\sigma_{yd}=0$  y  $\theta_e=\theta=45^\circ$ ), es:  $V_{cu}=73.15$  kN (en el caso de  $\theta_e=36.6$  y  $\theta=40^\circ$ :  $\beta=0.82$  y  $V_{cu}=60.00$  kN). La parte que tiene que resistir el acero es la diferencia entre la sollicitación y el cortante resistido por el hormigón:  $V_{su}=V_{rd} - V_{cu}=112.85$  kN ( $126.00$  kN para  $\theta=40^\circ$ ). Aplicando la ecuación 7.14 para dimensionar la armadura de cortante por unidad de longitud, se obtiene que se necesitan  $A_\alpha=0.704$  mm<sup>2</sup>/mm ( $A_\alpha=0.591$  mm<sup>2</sup>/mm para  $\theta=40^\circ$ ). Si tomamos como unidad de longitud el valor  $s_t$  (separación de los cercos) el valor obtenido anteriormente será la armadura necesaria para resistir el cortante cada  $s_t$ .

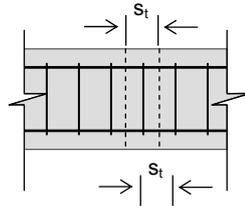


Figura 7.19. Separación entre estribos

$$s_t \cdot A_\alpha = n_{ramas} \cdot A_{redondo} = n_{ramas} \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \rightarrow \begin{cases} s_t = 2.23 \cdot \phi^2 & \text{para } \theta = 45^\circ \\ s_t = 2.65 \cdot \phi^2 & \text{para } \theta = 40^\circ \end{cases}$$

donde  $n_{ramas}$  es el número de ramas del cerco o estribo y  $A_\phi$  es el área del redondo del mismo. En este ejemplo se considera un cerco de dos ramas.

La norma EHE establece algunas limitaciones para la disposición de la armadura de cortante<sup>13</sup>:

- Un valor máximo de  $s_t$  en función de la relación  $V_{ul}/V_{rd}$ , en nuestro caso obliga a que  $s_t \leq 267 \text{ mm}$ .
- La separación transversal entre ramas debe cumplir:  
 $s_{t,trans} \leq 0.75d = 334 \text{ mm} \leq 500 \text{ mm}$   
en nuestro caso se cumple puesto que tendrá un valor ligeramente menor de  $200 \text{ mm}$ .
- En el caso de que la armadura superior a compresión esté considerada en el cálculo se debe de cumplir la limitación que ya se estudió en el tema anterior (ecuación 6.21) y que obliga a que  $s_t \leq 180 \text{ mm}$  en el caso de que los  $\text{Ø}12$  hayan sido considerados en el cálculo.
- Se prolongarán los cercos o estribos calculados en una longitud igual a medio canto de la pieza.
- Además la norma española establece un valor mínimo para  $\Sigma A_\alpha$ :  

$$\Sigma \frac{A_\alpha f_{y\alpha,d}}{\text{sen } \alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{7.5} \cdot b_0 \Rightarrow A_\alpha \geq 0.29 \text{ mm}^2/\text{mm}$$
condición que se verifica puesto que este valor es menor que el necesario por resistencia.

Operando con varios diámetros de cercos para los dos valores del ángulo de bielas de hormigón que se están considerando se obtiene la siguiente tabla:

<sup>13</sup> El objeto de esta limitación es la de asegurar un adecuado confinamiento del hormigón

	$\theta=45^\circ$	$\theta=40^\circ$
$\varnothing$	$s_t$	$s_t$
8	143	169
10	223	265
12	321	381

Optamos por disponer cercos de  $\varnothing 8$  cada  $16 \text{ cm}$ . La tabla inferior resume los resultados obtenidos:

	$\theta=45^\circ$	$\theta=40^\circ$
$V_{u1}$ (kN)	801	789
$V_{cu}$ (kN)	73.15	60
$V_{su}$ (kN)	112.85	126.00
$A_x$ ( $\text{mm}^2/\text{mm}$ )	0.704	0.591
Armadura transversal	c $\varnothing 8$ a 14 cm	c $\varnothing 8$ a 16 cm

**Ejemplo de hormigón pretensado**

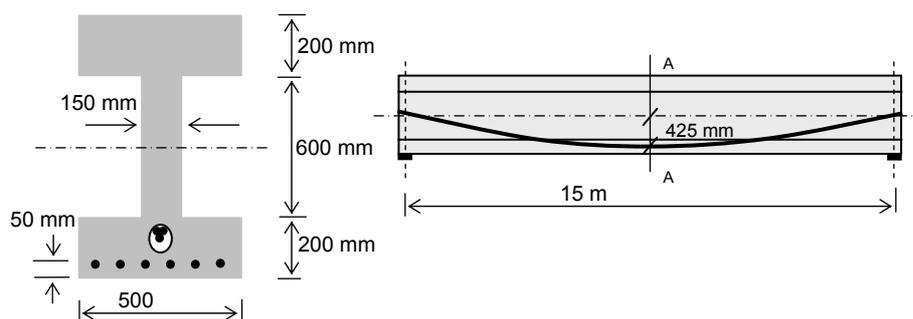


Figura 7.20. Viga pretensada de 15 m de luz

Sea la viga pretensada de la figura 7.20, fabricada con hormigón HP-35 y sometida a una carga ya mayorada de  $90 \text{ kN/m}$ . La armadura de pretensado está compuesta por 14 cordones tipo S7 de  $\varnothing 16$  ( $150 \text{ mm}^2$ ) de acero Y-1860-S7. La fuerza de pretensado se supone de valor constante igual a  $2100 \text{ kN}$ .

Los diagramas de momentos flectores y de cortantes debidos a la acción exterior son los representados en la figura 7.21.:

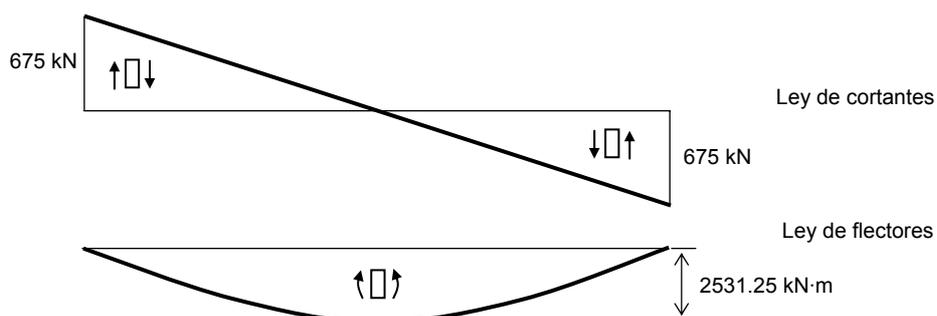


Figura 7.21. Leyes de cortantes y flectores sobre la viga. Valores de cálculo.

Lo primero que debemos calcular es el valor del cortante efectivo, que en nuestro caso dependerá del valor de cálculo  $V_d$  y de la fuerza de pretensado,  $V_{rd} = V_d + V_{pd}$ , dado que, al ser la sección de canto constante,  $V_{cd}$  es cero. Teniendo en cuenta la aproximación  $\text{sen } \alpha \approx \text{tan } \alpha \approx \alpha$  y la ecuación 4.2, tenemos:

$$V_{rd} = V_d + V_{pd} = \frac{675}{7.5} x - P \cdot \frac{2e_0}{L_0^2} x = \frac{675}{7.5} x - 2100 \cdot \frac{2 \cdot 0.475}{7.5^2} x \quad (7.19)$$

La representación gráfica de la ecuación 7.19 se puede ver en la figura 7.22, en la que el cortante efectivo se ha dibujado en trazo continuo y el cortante de cálculo en trazo discontinuo. Sólo se ha representado una parte de la viga: la otra sería igual y de signo contrario. El origen del eje de las x está situado en el centro de luz de la viga, tal y como se indica en la figura 7.22.

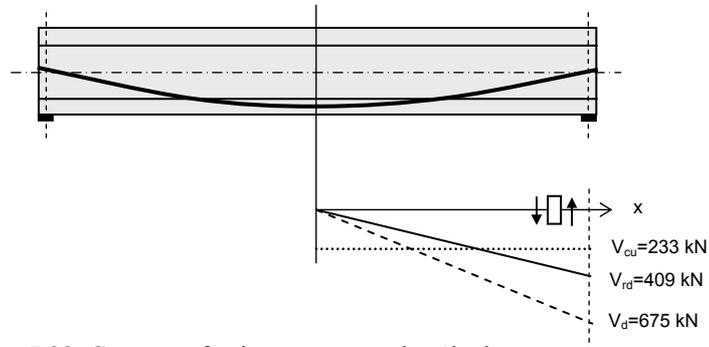


Figura 7.22. Cortante efectivo y cortante de cálculo

Ahora hay que decidir el ángulo que las bielas de compresión de hormigón forman con el eje de la pieza ( $\theta$ ). Por comodidad vamos a emplear el criterio elástico y además consideramos  $\theta \equiv \theta_e$  (ángulo de referencia obtenido aplicando la teoría de la elasticidad, dado por la ecuación 7.15). Como  $\sigma_{yd} = 0$ , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \cot \theta_e &= \sqrt{1 - \frac{\sigma_{xd}}{f_{ct,m}}} \\ \sigma_{xd} &= \frac{N_d}{A_c} = -\frac{2100000}{2.9 \cdot 10^5} = -7.24 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ct,m} &= 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 3.21 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \cot \theta_e = 1.8 \Rightarrow \theta = \theta_e = 29^\circ$$

El primer paso es comprobar que el esfuerzo cortante efectivo no supera al esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua en el alma (ecuación 7.13). La armadura de cortante estará compuesta por cercos a  $90^\circ$ , siendo  $K=1.25$  ( $0.25f_{cd} < \sigma'_{cd} = 7.24 \leq 0.5f_{cd}$ ).

$$V_{rd} \leq V_{u1} = 1.25 \cdot 0.6 \cdot \frac{35}{1.5} \cdot 150 \cdot 950 \cdot \frac{\cot 29 + \cot 90}{1 + \cot^2 29} = 1057410 \text{ N} = 1057 \text{ kN}$$

Como se puede ver en la figura 7.22, este valor no se supera en ningún punto. Si este valor se superase la única solución sería cambiar la geometría de la sección transversal de la viga.

Hernández-Gil

El siguiente paso consiste en comprobar que no se produce el agotamiento a tracción en el alma ( $V_{u2}$ ). Una parte de la tracción en el alma es resistida por el hormigón y otra parte por la armadura de cortante ( $V_{u2}=V_{cu}+V_{su}$ ).

$$V_{cu} = \left[ \frac{0.15}{1.5} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot 35)^{1/3} + 0.15 \cdot \alpha_l \cdot 7.24 \right] \cdot 150 \cdot 950 \cdot 1 = 232.7 \text{ kN}$$

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{950}} = 1.46; \quad \rho_l = \frac{14 \cdot 150}{150 \cdot 950} = 0.015; \quad \alpha_l = 1.0$$

Se ha supuesto que  $\alpha_l$  es igual a 1.0, lo que equivale a no considerar la influencia de la zona de transmisión.

El valor de  $V_{cu}$  está representado en la figura 7.22 por una línea punteada. La armadura de cortante deberá resistir la diferencia entre  $V_{rd}$  y  $V_{cu}$ . En el apoyo necesitamos:

$$V_{su} = V_{rd} - V_{cu} = 409 - 232.7 = 176.3 \text{ kN} = z \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \Sigma A_\alpha f_{y\alpha,d}$$

$$A_\alpha = 0.286 \text{ mm}^2 / \text{mm}$$

Aplicando las limitaciones de la norma EHE, la separación entre cercos,  $s_t$ , debe ser como máximo de 450 mm ( $V_{u1}/V_{rd}=2.6$ ): optamos por 300 mm. Esto supone que  $2 \cdot A_\alpha = 0.286 \cdot 300 = 85.8 \text{ mm}^2$ , siendo suficiente con colocar un cerco  $\varnothing 8$  cada 30 cm. La cuantía mínima de armadura de cortante es de  $A_\alpha = 0.145 \text{ mm}^2/\text{mm}$ , que se cumple con cercos  $\varnothing 6$  cada 30 cm. La forma de proceder es la siguiente: colocamos cercos  $\varnothing 6$  a 30 cm, hasta que  $V_{rd}-V_{cu}$  sea justo la armadura que resisten los cercos del tipo cercos  $\varnothing 6$  a 30 cm, a partir de ahí colocamos cercos  $\varnothing 8$  cada 30 cm hasta el final – ampliado en una cantidad  $h/2$  -.

$$V_{su} \Big|_{\text{para } \varnothing 6} = z \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d} = 58 \text{ kN}$$

Sustituyendo en la ecuación 7.19, tenemos:

$$V_{rd} = \frac{675}{7.5} x - 2100 \cdot \frac{2 \cdot 0.475}{7.5^2} x = 58 + 232.7 \Rightarrow x = 5.33 \text{ m}$$

Luego la disposición ( $5.33-1/2=4.83$ , que se redondea a 4.5 m) es:

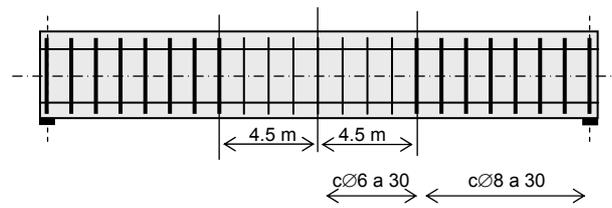


Figura 7.23. Distribución de cercos

Si se opta por un criterio plástico, como puede ser imponer que el hormigón trabaje a  $f_{cd}$  y el acero a  $f_{yd}$ . Las incógnitas en las ecuaciones 7.18 son  $V_{su}$  y  $\theta$ . Resolviendo el sistema se obtiene:  $V_{su} = 574 \text{ kN}$  y  $\theta = 11.28^\circ$  (el valor de  $\theta$  es inferior al permitido por la norma, por lo que adoptamos el límite inferior  $\theta = 27^\circ$ ). Fijando  $\theta = 27^\circ$  el valor de  $V_{su}$  es  $228.8 \text{ kN}$  para cercos  $\text{Ø}8$  cada 30 cm.

7.7. INTERACCIÓN FLEXIÓN CORTANTE

Consideremos una viga como la de la figura 7.24. Las ecuaciones de equilibrio, en una sección transversal cualquiera, se pueden plantear a partir de dos modelos: la analogía de la celosía (figura 7.24 izq.) o la teoría clásica de la viga (figura 7.24 dcha.). Según la teoría clásica de la viga, si la sección está sometida a flexión simple se cumplirá:  $M = T \cdot z = C \cdot z$ , según se tomen momentos respecto del punto O ó respecto del c.d.g. de las compresiones, respectivamente.

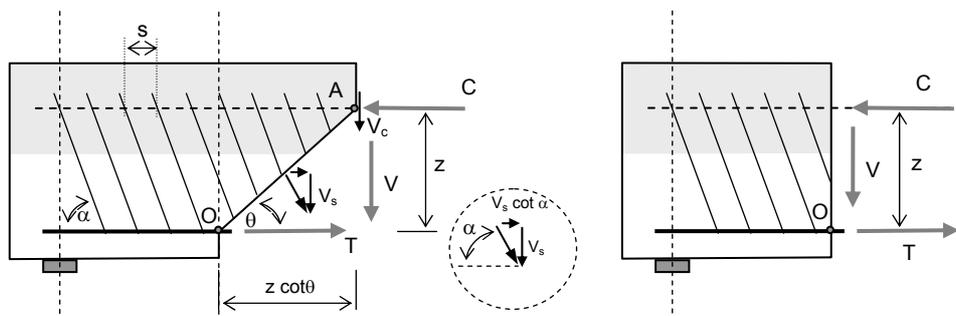


Figura 7.24. Modelos según la analogía de la celosía y según la teoría clásica de la viga.

El planteamiento del equilibrio de la viga a partir de la analogía de la celosía es un poco más complejo. Damos un corte a la viga por una sección siguiendo la inclinación de las bielas de hormigón (figura 7.24 izq.). Las ecuaciones de equilibrio tendrán la forma:

$$\begin{aligned} \sum F_V \rightarrow V &= V_c + V_s \\ \sum F_H \rightarrow C &= T + V_s \cdot \cot \alpha \\ \sum M_o \rightarrow M &= C \cdot z - V_c \cdot z \cdot \cot \theta - V_s \cdot \cot \alpha \cdot \frac{z}{2} - V_s \cdot \frac{z \cot \theta}{2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

En las ecuaciones anteriores se ha supuesto que el cortante  $V$  es resistido por el hormigón en la zona de compresiones ( $V_c$ ) y por la armadura de cortante ( $V_s$ ). Se supone que la resultante de la armadura de cortante (de valor  $V_s / \text{sen } \alpha$ ) está aplicada en la mitad de la línea AO, siendo su proyección vertical  $V_s$  y su proyección horizontal  $V_s \cdot \cot \alpha$ , tal y como se indica en el esquema de la figura 7.24. En las ecuaciones anteriores sustituimos  $V_c$  de la primera en la tercera y  $C$  de la segunda en la tercera, obteniendo:

$$M = z \cdot \left[ T - \left( V - \frac{V_s}{2} \right) \cot \theta + \frac{V_s}{2} \cot \alpha \right] \rightarrow T = \frac{M}{z} + \underbrace{V \cot \theta - \frac{V_s}{2} (\cot \theta + \cot \alpha)}_{\Delta T} \quad (7.21)$$

Como podemos observar en la ecuación anterior, el valor de  $T$  no es  $M/z$  como predecía la teoría clásica de la viga, sino que aparece un  $\Delta T$  adicional, como consecuencia de haber considerado un comportamiento diferente al clásico. Este nuevo comportamiento lo denominamos *analogía de la celosía modificada* (modificación del modelo de la figura 7.14a, considerando  $V_c$ ).

El momento  $M$ , para una sección determinada, es el obtenido del diagrama de momentos flectores para una sección determinada. Con la teoría clásica se cumplía que  $T=M/z$ , sin embargo esto no se cumple con la analogía de la celosía modificada. ¿Qué momento  $M'$  tendremos que tomar para que introducido en la igualdad  $T=M'/z$  se obtenga el valor de  $T$  dado por la ecuación 7.21?, esto es:

$$T = \frac{M'}{z} = \frac{M + \Delta M}{z} \quad (7.22)$$

o dicho de otro modo: ¿en qué punto de la ley de flectores de la viga el momento es  $M'=M+\Delta M$ ? Si este punto está relativamente cerca de la sección considerada se puede realizar la aproximación de la figura 7.25, que consiste en imponer  $M+\Delta M=M'=M+V \cdot s_d$ . Sustituyendo este valor de  $M'$  en la ecuación 7.22 y teniendo en cuenta la ecuación 7.21 se obtiene que:

$$T = \frac{M + V \cdot s_d}{z} = \frac{M}{z} + V \cot \theta - \frac{V_s}{2} (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (7.23)$$

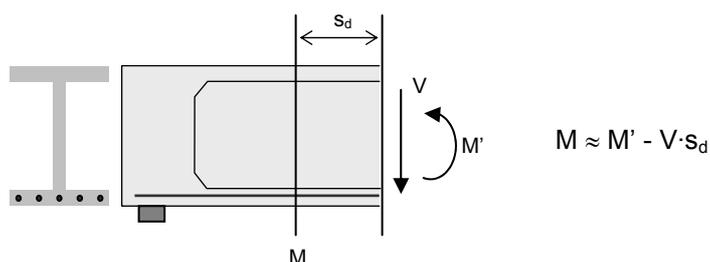


Figura 7.25. Decalaje

despejando  $s_d$  de la expresión anterior – y empleando la notación de la EHE-:

$$s_d = z \cdot \left( \cot \theta - \frac{1}{2} \frac{V_{su}}{V_{rd}} (\cot \theta + \cot \alpha) \right) \quad (7.24)$$

Por tanto, la armadura longitudinal deberá de ser capaz de soportar un incremento de tracción  $\Delta T$ , cuyo valor se puede deducir de la ecuación 7.21 ó 7.23:

$$\Delta T = V_{rd} \cot \theta - \frac{V_{su}}{2} (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (7.25)$$

En la práctica, este incremento de tracción  $\Delta T$  se introduce “decalando” la ley de momentos de cálculo  $M_d$  una magnitud  $s_d$  (dada por la expresión 7.24) en el sentido más desfavorable, lo que equivale a considerar el momento existente a una distancia  $s_d$  de la sección considerada, tal y como se indica en la figura 7.26. A  $s_d$  se le denomina decalaje de la ley de momentos flectores.

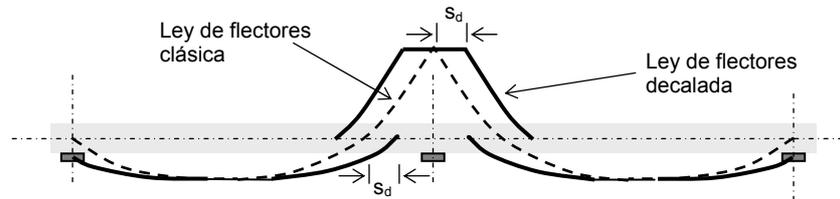


Figura 7.26. Ley de momentos flectores y ley de momentos flectores decalada

Para elementos sin armadura de cortante el decalaje debe de ser igual al canto útil,  $d$  (9.2.1.3 (2) del EC2). La norma EHE permite tomar  $s_d=d$  para  $\theta=45^\circ$ .

## Ejemplo de decalaje

En la figura 7.27 se representa una viga biapoyada, de 10 m de luz y de sección transversal constante de 30×50 cm. Sobre ella actúa una carga de diseño<sup>14</sup> puntual aplicada en el centro de luz de 100 kN. Ésta es la única carga que se va a considerar. Se procederá a armar la viga con armadura pasiva. La viga está fabricada con HA-25 y B-500-S:  $f_{cd}=25/1.5=16.7 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_{yd}=500/1.15=434.8 \text{ N/mm}^2$ .

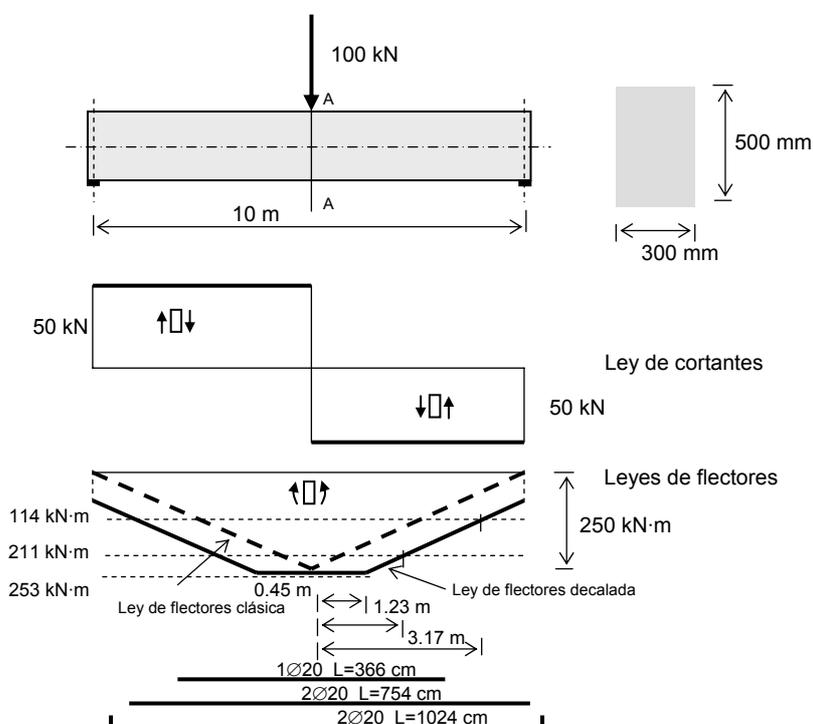


Figura 7.27. Viga biapoyada de 10m de luz

Para armar la viga se emplea cálculo en rotura y se plantean las ecuaciones de equilibrio a nivel sección para el valor del momento máximo  $M_d=250 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Se consideran 50 mm de recubrimiento mecánico, esto es, distancia entre el paramento inferior y el c.d.g. de la armadura de tracción (i.e.:  $d=450 \text{ mm}$ ). Los valores límite son:  $x_{lim}=278 \text{ mm}$  y  $M_{lim}=0.85f_{cd}\cdot0.8\cdot x_{lim}\cdot300\cdot(450-0.4\cdot x_{lim})=320.87 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Como  $M_d < M_{lim}$  no se necesita armadura de compresión para resistir el momento de diseño de 250 kN·m. Las ecuaciones de equilibrio de axiles y momentos son:

<sup>14</sup> Carga de diseño equivale a decir carga mayorada.

Hernández-Gil

$$N_d = \sum N = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x - A_s f_{yd} = 0$$

$$M_d = \sum M = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \cdot (d - 0.4x) = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

del sistema anterior se obtiene:  $x = 198 \text{ mm}$  y  $A_s = 1551 \text{ mm}^2$ , que se resiste con  $5\varnothing 20$  ( $1571 \text{ mm}^2$ ). La EHE obliga a continuar hasta los apoyos al menos  $1/3$  de las armaduras necesarias, en este caso  $2\varnothing 20$ . Optamos por realizar 3 escalones de armado (no tendría sentido utilizar  $5\varnothing 20$  en toda la viga): uno con  $5\varnothing 20$ , otro con  $4\varnothing 20$  y otro con  $2\varnothing 20$ . El siguiente paso es plantearse qué momento resisten dichos armados puesto que a partir de ahí dejan de ser necesarias las barras, luego a partir de ese punto se añade la longitud de anclaje. Así pues, en el sistema de ecuaciones anteriores introducimos  $A_s$  ( $=1571 \text{ mm}^2$  para  $5\varnothing 20$ ,  $1257 \text{ mm}^2$  para  $4\varnothing 20$  y  $628 \text{ mm}^2$  para  $2\varnothing 20$ ) y obtenemos el valor de  $x$  (profundidad de la fibra neutra) y  $M_d$ . Los valores de  $M_d$  obtenidos son,  $252.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$  para  $5\varnothing 20$ ,  $210.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$  para  $4\varnothing 20$  y  $114.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$  para  $2\varnothing 20$ , representados en la figura 7.26 en línea discontinua.

Se toma como  $s_d$  (magnitud del decalaje) la cantidad  $d$ . En este caso la ley de momentos flectores decalada responde a la ecuación siguiente, en la que se ha tomando como origen de  $x$  el punto de centro de luz<sup>15</sup>:

$$\begin{cases} M = 250 & \text{para } 0 < x < 0.450 \text{ m} \\ M = 250 - (x - 0.45) \cdot \frac{250}{5} & \text{para } 0.450 \text{ m} < x < 5 \text{ m} \end{cases}$$

Introduciendo  $M = 210.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$  obtenemos que  $x = 1.23 \text{ m}$ , e igualando  $M = 114.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$  se obtiene  $x = 3.168 \text{ m}$ . Luego entre los puntos  $0$  y  $x = 1.23$  son necesarias las 5 barras  $\varnothing 20$ . A partir de  $x = 1.23$  podemos prescindir de una de las barras. Como hemos optado por realizar tres escalones (5 barras, 4 barras y 2 barras), el punto a partir del cual sólo son necesarias dos barras corresponde a  $x = 3.168 \text{ m}$ . Cuando las barras dejan de ser necesarias hay que prolongar una longitud de anclaje, que según la EHE es  $l_b = 60 \text{ cm}$  –posición I-. Las longitudes finales de las barras se indican en la figura 7.27.

<sup>15</sup> En general se utilizan listados de datos (hojas de cálculo o similares) para operar con las leyes de flectores y sus correspondientes leyes decaladas. En este ejemplo, por pedagogía, hemos optado por una ley sencilla en la que es fácil operar y seguir el procedimiento.

## 7.8. PUNZONAMIENTO

La actuación de una carga concentrada en losas se denomina punzonamiento. La figura 7.28.izq representa una viga sobre la que actúa una carga concentrada. En este caso para realizar la comprobación de agotamiento se calcula la resistencia al esfuerzo cortante en la sección en la que está aplicada la carga puntual. Cuando la carga actúa sobre una losa (figura 7.28.drcha) el planteamiento es similar pero ahora en lugar del ancho de la viga  $b_w$  se considera el perímetro de un cilindro concéntrico al punto de aplicación de la carga ( $u_1$ ), tal y como se indica en la figura 7.28. Al perímetro de la sección transversal del cilindro se denomina  $u_1$  (perímetro crítico) y a la superficie de este cilindro se le denomina área crítica.

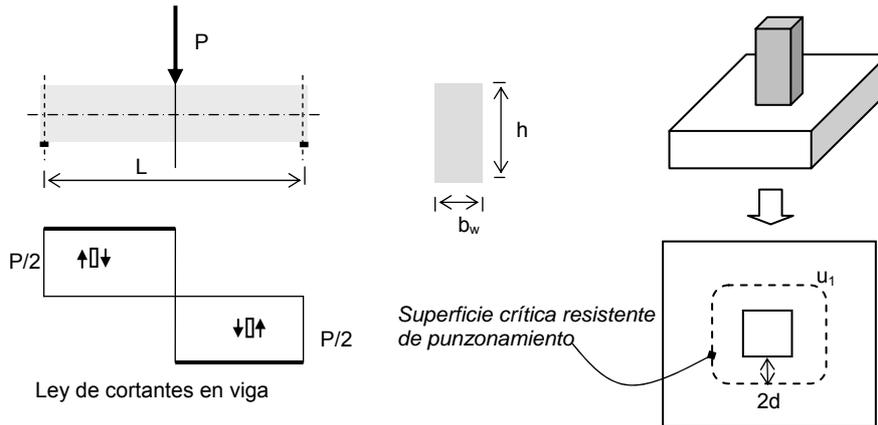


Figura 7.28. Superficie crítica de punzonamiento.

La norma EHE define como área crítica a la superficie de un cilindro de altura la de la placa y de perímetro el correspondiente a una distancia igual a  $2d$  ( $d =$  canto útil) desde el perímetro del área cargada o del soporte. Si la tensión tangencial en la superficie crítica,  $\tau_{sd}$  (denominada tensión tangencial nominal de cálculo en el perímetro crítico), es menor que un valor establecido por la normativa,  $\tau_{rd}$  (denominado tensión máxima resistente en el perímetro crítico), no será necesario disponer armadura de punzonamiento, puesto que el hormigón absorbe toda la tensión de cortante generada por la carga puntual.

En el caso que no se cumpla la condición anterior, i.e.  $\tau_{sd} > \tau_{rd}$ , habrá que disponer armadura de punzonamiento. En este caso, para dimensionar la armadura se aplica la teoría de cortante desarrollada en este capítulo aunque es frecuente redimensionar la sección para que se verifique  $\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$ .

**Ejercicios propuestos**

1. Completar el ejemplo de la figura 7.27 calculando la armadura de cortante a  $90^\circ$  y a  $60^\circ$ .
2. Leer los artículos de punzonamiento de la EHE o del EC2 y descubrir las similitudes con los artículos de cortante.
3. Comentar los artículos de la normativa referentes a rasante (o cortante) entre alas y alma de vigas en T.



Edificio Viapol

**Cortesía de ORTIZ Construcciones y Proyectos S.A.**

**[www.ortiz-construcciones.com](http://www.ortiz-construcciones.com)**

**ANEJO. Teorías del campo de compresiones**

Es muy interesante, desde el punto de vista de la aplicación técnica, que la normativa relativa al cálculo a cortante esté basada en modelos conceptualmente sencillos, con sentido físico, en lugar de en complejas ecuaciones empíricas. Si estos modelos de cálculo a cortante son fáciles de entender, el ingeniero podrá abordar nuevos problemas de diseño de forma racional. Se puede afirmar que todavía se está buscando una teoría que explique el comportamiento del hormigón sometido a esfuerzos cortantes. Dentro de las teorías de cortante existe un grupo, conocido como “teorías del campo de compresiones”, que resultan muy útiles para el estudio del hormigón estructural y que serán tratadas en este anejo. El índice de este anejo es el siguiente:

- Introducción
- Campo de deformaciones
- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de comportamiento de los materiales

**Introducción**

El alma agrietada de una viga de hormigón armado transmite el cortante de forma compleja. Inicialmente aparece una familia de grietas y según se incrementa la carga aparecen nuevas grietas mientras que las iniciales se propagan y cambian de inclinación. Debido a que la sección transversal está solicitada por un momento y un cortante, las deformaciones longitudinales y la inclinación de las grietas variarán con la profundidad de la viga (figura A7.1)

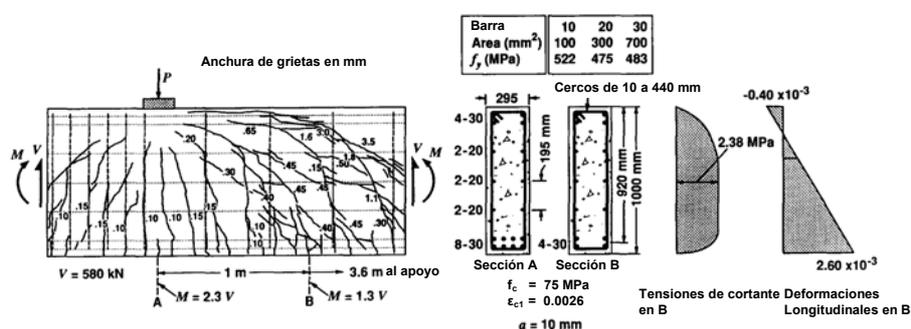


Figura A7.1. Ejemplo de alma agrietada de una viga con rotura por cortante.

Los modelos de Ritter (1899) y de Morsch (1920 y 1922) explicaron el comportamiento frente a cortante suponiendo la existencia de bielas a compresión en el hormigón, inclinadas a 45°. En la dirección perpendicular a estas bielas el

hormigón se encuentra agrietado y como consecuencia de ello deja de resistir a tracción. Según el modelo de bielas a  $45^\circ$  (figura A7.2a), el cortante máximo se alcanzará cuando los cercos alcancen la tensión de cedencia, lo que corresponde a una determinada tensión de cortante cuyo valor se puede deducir a partir de la ecuación de equilibrio de las fuerzas verticales de la figura A7.2a.

$$A_v \cdot f_y \cdot \frac{h}{s} = \tau \cdot b_w \cdot h \Rightarrow \tau = \frac{A_v \cdot f_y}{b_w \cdot s} = \rho_v \cdot f_y \quad (\text{A7.1})$$

donde  $A_v$  es el área de los cercos,  $f_y$  la tensión de cedencia,  $b_w$  el ancho del alma,  $h$  el canto y  $s$  la separación entre estribos. El cociente  $h/s$  es el número de cercos en la figura A7.2a.

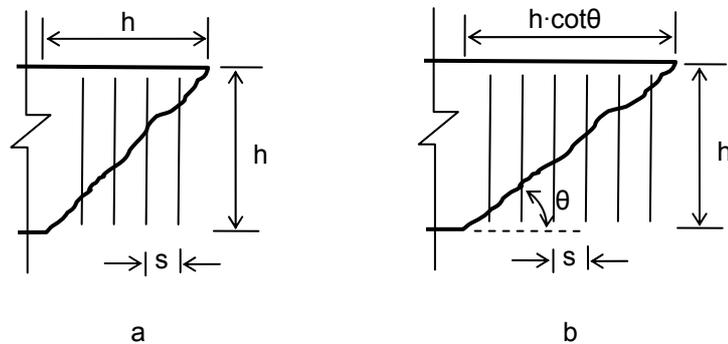


Figura A7.2. a) Estribos a  $90^\circ$  y bielas a  $45^\circ$  b) Estribos a  $90^\circ$  y bielas a  $\theta$ .

Aplicando el criterio anterior a la viga de la figura A7.1 le corresponde una tensión máxima de cortante de  $0.80 \text{ MPa}$ . Sin embargo, la viga resistió  $2.38 \text{ MPa}$  en el laboratorio y, por tanto, la ecuación anterior -basada en la teoría de bielas a  $45^\circ$  - resulta excesivamente conservadora.

Una de las razones por las cuales el método de la analogía de la celosía es muy conservador es porque la inclinación de las bielas medidas respecto a las fibras longitudinales ( $\theta$ ) suele ser menor de  $45^\circ$ . Para una inclinación genérica  $\theta$  del ángulo de las bielas (figura A7.2b) la ecuación anterior tiene la forma:

$$\tau = \rho_v \cdot f_y \cdot \cot \theta \quad (\text{A7.2})$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, para que la resistencia a cortante de la viga de la figura A7.1 fuese igual a  $2.38 \text{ MPa}$  las grietas deberían estar

inclinadas  $18.6^\circ$ . Como se puede apreciar en la figura A7.1, la mayor parte de las grietas tienen inclinaciones mayores a ésta.

### **Campo de deformaciones**

Antes de formular una ecuación basada en los mecanismos de bielas para determinar la resistencia a cortante de una viga o para diseñar los estribos, es necesario conocer el ángulo de inclinación de las bielas,  $\theta$ . Con relación a este problema, Mörsch en 1922 comentó “es absolutamente imposible determinar matemáticamente la pendiente de las grietas secundarias con las que poder diseñar los estribos”. Sin embargo, un problema parecido se resolvió con éxito en perfiles metálicos de alma débil, mediante las teorías denominadas de los campos diagonales de tracción. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la figura A7.3, que muestra el alma de una viga metálica, que ha generado un campo diagonal de tracciones. Este campo está apoyado principalmente en la parte superior e inferior –alas de la viga-, puesto que la parte lateral no ofrece resistencia suficiente y ha cedido.

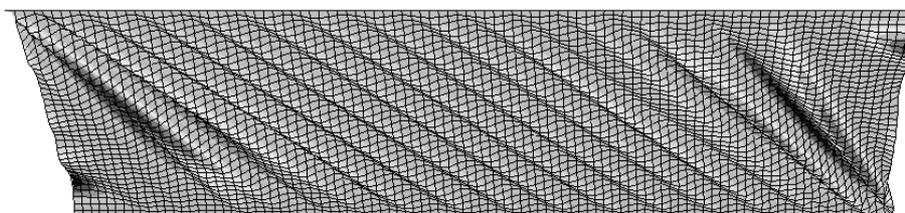


Figura A7.3. Campo diagonal de tracciones apoyado en la parte superior e inferior.

En el campo diagonal de tracciones un mismo material –el acero- se comporta de manera muy diferente según esté solicitado por compresiones o por tracciones. Algo parecido se iba a aplicar en el estudio del hormigón estructural.

Basándose en el planteamiento anterior y trasladándolo al estudio del hormigón se han formulado aproximaciones conocidas como teorías del campo de compresiones. Éstas determinan el ángulo de inclinación de las bielas ( $\theta$ ) considerando las deformaciones de la armadura transversal, de la armadura longitudinal y del hormigón. A partir de las teorías del campo de compresiones se puede estudiar la respuesta carga-deformación de una sección sometida a cortante, para ello se plantean las condiciones de equilibrio, las condiciones de compatibilidad y las relaciones tensión-deformación tanto para la armadura como para el hormigón agrietado.

Las teorías de los campos de deformaciones están formuladas en la mecánica del continuo, considerando deformaciones medias<sup>1</sup>, tal y como se indica en la figura A7.4a. Si la armadura longitudinal sufre un alargamiento medio  $\varepsilon_x$ , la armadura transversal un alargamiento medio  $\varepsilon_t$  y el hormigón en la dirección principal de compresión un acortamiento medio  $\varepsilon_2$  se puede deducir la dirección principal de deformación de compresión, a partir del círculo de deformaciones<sup>2</sup> (figura A7.4b).

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2} \quad (A7.3)$$

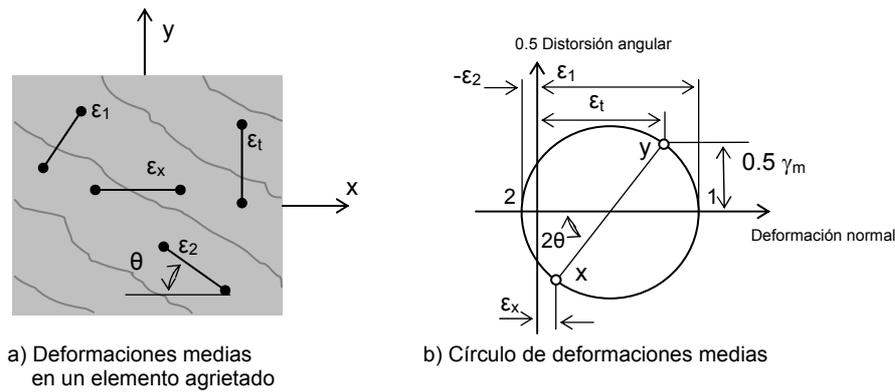


Figura A7.4. Condiciones de compatibilidad para el alma agrietada.

A partir del círculo representado en la figura A7.4b se puede deducir la deformación media principal de tracción ( $\varepsilon_1$ ) en función de otras deformaciones, mediante cualquiera de estas igualdades:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_t - \varepsilon_2 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \cot^2 \theta \quad (A7.4)$$

Si hay armadura activa, se cumplirá además que  $\varepsilon_p = \varepsilon_x + \Delta\varepsilon_p$ , donde  $\varepsilon_p$  es la deformación unitaria de la armadura activa y  $\Delta\varepsilon_p$  la deformación impuesta por el sistema de pretensado.

<sup>1</sup> Comunes a acero y a hormigón.

<sup>2</sup> Al hacerse el planteamiento en deformaciones medias este razonamiento es válido aunque el hormigón esté agrietado,

**Ecuaciones de equilibrio**

La primera de las denominadas teorías de campos de compresiones se conoce como Teoría del Campo de Compresiones (en adelante TCC). La TCC fue posteriormente modificada y surgió la que se conoce como Teoría Modificada del Campo de Compresiones (en adelante TMCC). La diferencia entre ambas se puede ver en la figura A7.5.

La figura A7.5 muestra el alma de una viga de hormigón armado antes y después de la fisuración. Antes de producirse la fisuración el cortante es resistido por tracciones y compresiones diagonales en el hormigón, donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las tensiones principales de tracción y compresión, respectivamente. Una vez que se produce la fisuración el hormigón pierde su capacidad resistente a tracción y la TCC considera que, a partir de ese instante,  $\sigma_1=0$ . Sin embargo, debido al fenómeno de la tensorrigidez, el hormigón sí contribuye -en lo que a la deformación del elemento se refiere- después de fisurado y, en base a esto, la TMCC considera una resistencia media del hormigón a tracción.

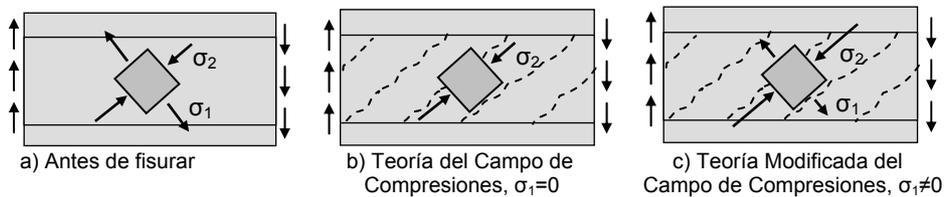


Figura A7.5. Diferencia entre la TCC y la TMCC

El planteamiento de las ecuaciones de equilibrio es distinto según se emplee la TCC o la TMCC. Las ecuaciones de equilibrio se plantean para una viga simétrica de hormigón con armadura pasiva y activa, supuesto que la tensión de cortante viene dada por la siguiente expresión (ecuación 7.5, §7.3):

$$\tau = \frac{V}{b_w \cdot z} \tag{A7.5}$$

Aplicando la TCC e imponiendo el equilibrio de fuerzas verticales se obtiene:

$$\sigma_2 = \frac{V}{b_w \cdot z} \frac{1}{\text{sen} \theta \cos \theta} = \frac{V}{b_w \cdot z} (\tan \theta + \cot \theta) \tag{A7.6}$$

La componente longitudinal de la fuerza de compresión vale:

$$\sigma_2 z b_w \cos^2 \theta = \frac{V}{\tan \theta} \quad (\text{A7.7.a})$$

Esta fuerza debe de ser contrarrestada por una fuerza axial de tracción,  $N_v$ , en la armadura longitudinal:

$$N_v = A_{sx} \sigma_{sx} + A_p \sigma_p = \frac{V}{\tan \theta} \quad (\text{A7.7.b})$$

Planteando equilibrio de fuerzas verticales en el detalle de la figura A7.6 se obtiene que la fuerza de compresión diagonal del hormigón ( $\sigma_2 s \text{ sen} \theta b_w$ ) introduce una componente vertical ( $\sigma_2 s \text{ sen}^2 \theta b_w$ ) que debe de ser contrarrestada por la armadura transversal  $A_{vs} \sigma_{vs}$ :

$$A_{vs} \sigma_{vs} = \sigma_2 \text{ sen}^2 \theta b_w s \quad (\text{A7.8})$$

Las tres ecuaciones A7.6, A7.7.b y A7.8 constituyen las ecuaciones de equilibrio para la Teoría del Campo de Compresiones.

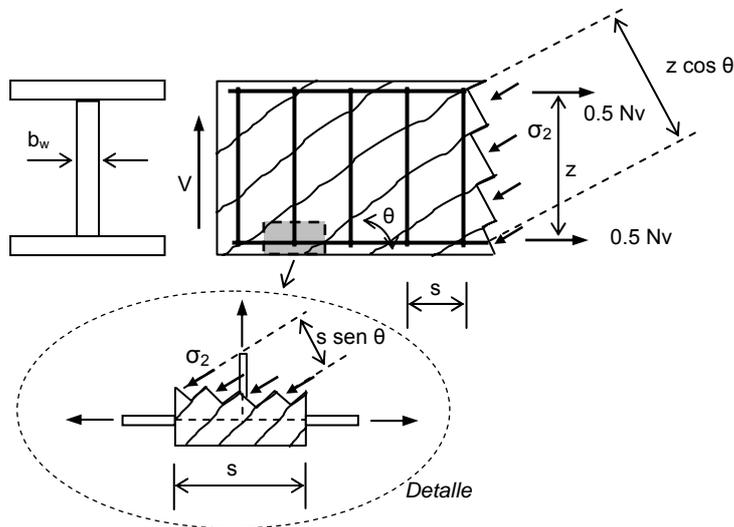


Figura A7.6. Estudio del equilibrio para la Teoría del Campo de Compresiones (TCC).

La figura A7.7 representa el equilibrio para la Teoría Modificada del Campo de Compresiones. Como se aprecia en la figura A7.7, el valor de la tensión del hormigón perpendicular a las grietas  $\sigma_t$  es tenido en cuenta (este valor era cero en la TCC, como ya vimos). De hecho, las ecuaciones de equilibrio en el caso de la TMCC difieren de las ecuaciones de equilibrio de la TCC en el término  $\sigma_t$ .

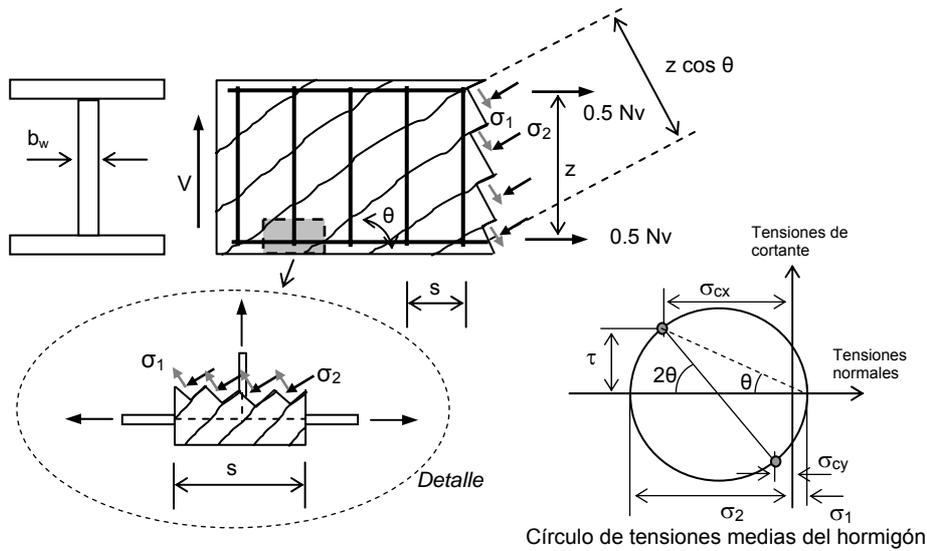


Figura A7.7. Estudio del equilibrio para la Teoría Modificada del Campo de Compresiones (TMCC).

Analicemos la viga en doble T simétrica de la figura A7.7 sometida a cortante. Sea  $A_{px}$  el área total de la armadura longitudinal activa y  $A_{sx}$  el área total de la armadura longitudinal pasiva. El cortante en la sección produce compresiones diagonales,  $\sigma_2$ , y tracciones diagonales,  $\sigma_1$ . Cuando el hormigón se agrieta las tensiones de tracción varían desde  $\theta$  en la grieta hasta valores máximos en la zona entre grietas. Para formular el equilibrio, y haciendo uso de la Mecánica del Continuo, es necesario operar con una tensión de tracción media,  $\sigma_1$ . En este caso, el círculo de Mohr de tensiones medias es el representado en la figura A7.7. Del círculo de tensiones medias en el hormigón se puede deducir la primera de las ecuaciones A7.9.

$$\sigma_2 = (\tan \theta + \cot \theta) \frac{V}{zb_w} - \sigma_1$$

$$A_{sv} \sigma_{sv} = (\sigma_2 \text{sen}^2 \theta - \sigma_1 \text{cos}^2 \theta) b_w s \quad (\text{A7.9})$$

$$A_{sx} \sigma_{sx} + A_p \sigma_p = (\sigma_2 \text{cos}^2 \theta - \sigma_1 \text{sen}^2 \theta) b_w z = \frac{V}{\tan \theta} - \sigma_1 b_w z$$

De la descompensación de la proyección vertical de resultantes de las tensiones principales  $\sigma_2$  y  $\sigma_1$  se deduce la fuerza absorbida por la armadura transversal, que corresponde a la segunda de las ecuaciones A7.9, en la que  $\sigma_{sv}$  es la tensión media de la armadura transversal.

Introduciendo el valor de  $\sigma_2$  de la primera de las ecuaciones A7.9 en la segunda se obtiene el valor del cortante como suma de dos componentes: la absorbida por el hormigón a tracción más la absorbida por los estribos respectivamente:

$$V = \sigma_1 b_w z \cot \theta + \frac{A_{sv} \sigma_{sv}}{s} z \cot \theta \quad (\text{A7.10})$$

Si el esfuerzo axial que solicita la sección es nulo, las tensiones diagonales en el hormigón generan una componente longitudinal no compensada que, como ya vimos en el apartado §7.7, es la responsable del “decalaje de la ley de flectores”. En el caso de elementos con armadura activa esta componente da lugar a la tercera de las ecuaciones A7.9, en la que  $\sigma_x$  y  $\sigma_p$  son las tensiones medias en la armadura longitudinal pasiva y activa respectivamente.

### Ecuaciones de comportamiento de los materiales

Las tensiones y las deformaciones están relacionadas mediante las ecuaciones de comportamiento del material. Las relaciones tensión-deformación se aplican al acero en las direcciones de la armadura y al hormigón en las direcciones principales. Las deformaciones consideradas son deformaciones medias, ya que están medidas en distancias superiores a la separación entre grietas.

#### Ecuaciones de comportamiento de los materiales: *hormigón*

Las deformaciones y las tensiones están relacionadas mediante los modelos tensión-deformación de los materiales. Para el hormigón a compresión los modelos habituales son los presentados en el capítulo 3, figura 3.7 (ver figura 3.6). Como ya vimos, el modelo representado en la figura 3.7 reproduce el comportamiento del hormigón en el ensayo a compresión en probeta cilíndrica. El caso que nos ocupa es bien distinto dado que ahora el hormigón está solicitado a compresión en una dirección principal al mismo tiempo que traccionado según la otra dirección principal y además está agrietado. Como ecuación de comportamiento del hormigón en este caso Vecchio y Collins<sup>3</sup> (1982) proponen:

---

<sup>3</sup> Existen en la literatura numerosos modelos de comportamiento para el hormigón agrietado, aquí se ha optado por uno de ellos.

$$\sigma_2 = f_{2,\max} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right] \quad (\text{A7.11})$$

$$\text{donde } f_{2,\max} = \frac{f_c}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_c$$

La representación gráfica de esta expresión se puede ver en la figura A7.8.

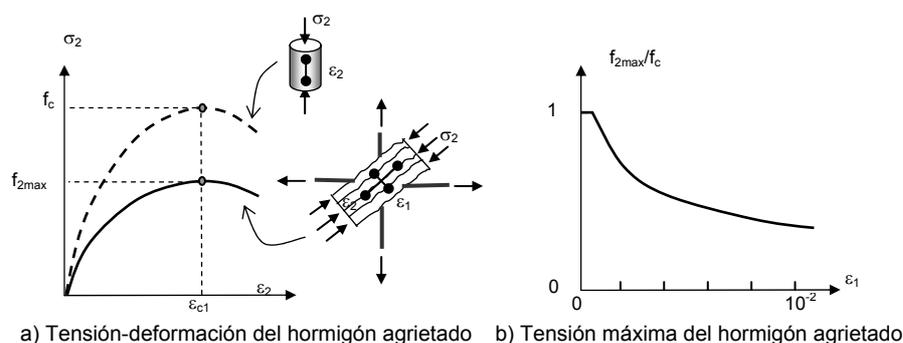


Figura A7.8. Relaciones tensión-deformación para el hormigón agrietado en compresión.

La TMCC considera la relación tensión-deformación del hormigón a tracción que se estudió en el apartado §6.3 y que se transcribe nuevamente aquí<sup>4</sup>:

<sup>4</sup> Esta ecuación puede verse en Collins y Mitchell (1991). Otros autores proponen ecuaciones alternativas existiendo entre ellas diferencias sustanciales. Recientemente Bentz (2005) propone una nueva ecuación para el comportamiento a tracción del hormigón en función del área de hormigón que afecta a la barra (7.5 diámetros en torno a la barra):

$$f_1 = \frac{f_{ctm}}{1 + \sqrt{3.6M\varepsilon_1}} \quad \text{donde} \quad M = \frac{A_c}{\sum d_b \pi} \quad \text{todo en mm} \quad (\text{A7.12bis})$$

donde  $d_b$  es el diámetro de la barra y  $A_c$  es el área de hormigón perpendicular a la barra que la afecta. Esta nueva ecuación se ajusta mejor a los datos experimentales existentes.

Hernández-Gil

$$\sigma_1 = E_c \varepsilon_1 \quad \text{para } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ctm}$$

(A7.12)

$$\sigma_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \quad \text{para } \varepsilon_1 > \varepsilon_{ctm}$$

donde  $\varepsilon_{ctm}$  es la deformación unitaria correspondiente a  $f_{ctm}$ . El resto de parámetros ya se vieron en el apartado 6.3. La representación gráfica de la ecuación anterior se muestra en la figura A7.9.

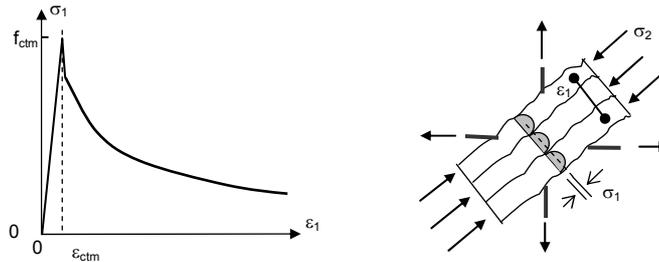


Figura A7.9. Relación tensión-deformación media para el hormigón en tracción.

Ecuaciones de comportamiento de los materiales: **acero**

Ambas teorías, la TCC y la TMCC (Collins y Mitchell 1991) adoptan relaciones bilineales para el acero (figura A7.10 a y b, línea continua)

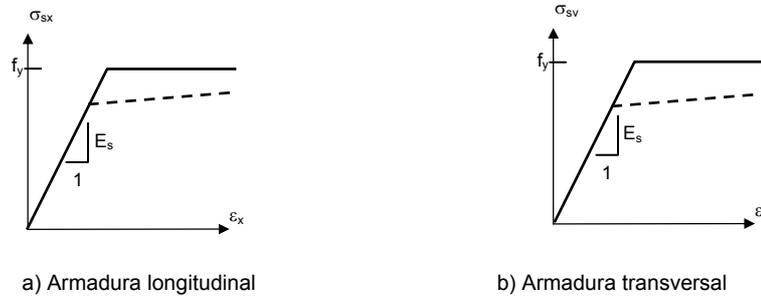


Figura A7.10. Relaciones tensión-deformación del acero

Otras teorías proponen relaciones bilineales con valores inferiores a los anteriores en base a que el comportamiento medio de las barras embebidas debe de ser menor que el de la barra aislada (Belardi y Hsu 1994). Estas relaciones se han representado cualitativamente con línea discontinua en la figura A7.10.

Otras teorías (Hdz-Montes y Gil-Martín 2005) proponen que los modelos de acero y de tensorrigidez de hormigón deben de estar relacionados sin ninguna formulación adicional. Siempre que el acero no entre en cedencia en la grieta (i.e.  $\sigma_s \leq f_y$ ) el módulo de deformación del acero será  $E_s$ . Cuando, en una grieta, el acero alcance su límite elástico el módulo de deformación medio del acero se verá alterado, ver figura A7.11. Si se establece el equilibrio entre la sección de la grieta (cuando se ha producido cedencia en el acero) y una sección que represente el estado medio de tensiones (figura A7.11) se verificará que:

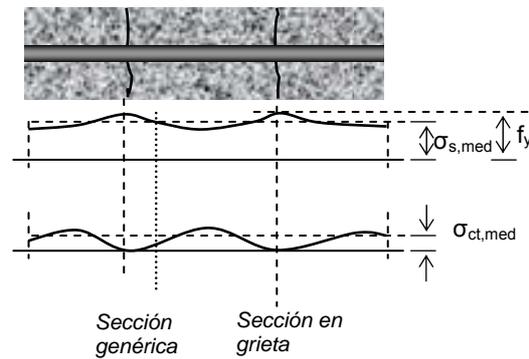


Figura A7.11. Barra sometida a tracción. El acero ha alcanzado la tensión de cedencia  $f_y$ .

$$\underbrace{A_s f_y}_{\text{grieta}} = \underbrace{A_s \sigma_{s,med} + A_{c,ef} \sigma_{ct,med}}_{\text{sección media}} \quad (A7.13)$$

de donde se puede deducir el valor medio de la tensión en la armadura:

$$\sigma_{s,med} = f_y - \frac{A_{c,ef}}{A_s} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500} \varepsilon_1} \quad \text{Si } \varepsilon_{ctm} \geq \varepsilon_{max,l} \quad (A7.14)$$

$$\sigma_{s,med} = E_s \varepsilon_{ct} \quad \text{Si } \varepsilon_{ctm} < \varepsilon_{max,l}$$

El valor de  $\varepsilon_{max,l}$  corresponde a la deformación de la primera cedencia en la grieta y se calcula a partir de la ecuación A7.13.

$$A_s \varepsilon_y E_s = A_s \varepsilon_{\max,l} E_s + A_{c,ef} \frac{\alpha_1 \alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{\max,l}}}$$

### Ejemplo

Si estudiamos el ejemplo de la figura A7.1 aplicando la TCC se obtiene un sistema de 8 ecuaciones no lineales: 3 ecuaciones de equilibrio (A7.6, A7.7.b y A7.8), 2 ecuaciones de compatibilidad (A7.3 y la primera igual de A7.4) y 3 ecuaciones de comportamiento de los materiales: ecuación A7.11 para el hormigón a compresión y las relaciones bilineales para la armadura con  $E_s=200000 \text{ N/mm}^2$ . Las incógnitas son:  $\theta$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_{xx}$ , y  $\sigma_{yy}$ . Se puede comprobar que la tensión de cedencia en la armadura transversal (522 MPa) se alcanza para  $V=458 \text{ kN}$  ( $\theta=25.5^\circ$  y  $\tau=1.69 \text{ MPa}$ ). Para posteriores incrementos de  $V$  la tensión en los cercos permanece constante y el agotamiento del hormigón a compresión se produce para un valor del cortante  $V=736 \text{ kN}$  ( $\theta=16.5^\circ$  y  $\tau=2.71 \text{ MPa}$ ).

### **Estudio a nivel grieta en la TMCC.**

Los resultados obtenidos a partir de la TCC están más cercanos al comportamiento de agotamiento en la grieta que los de la TMCC. Esto es debido a que la TCC considera que la resistencia del hormigón a tracción es nula, lo que es cierto a nivel grieta.

Puesto que el fallo de un elemento de hormigón armado no está gobernado por las tensiones medias sino por las tensiones locales a nivel de las grietas, es preciso adaptar la TMCC para el estudio del agotamiento. Belardi y Hsu (1994) demostraron que las teorías que utilizan modelos de acero embebido (Figura A7.8 línea discontinua o el método de la ecuación A7.14) no necesitan comprobación del estado de tensiones en grieta.

Por ahora sólo se han tratado tensiones y deformaciones medias, teniendo en cuenta que éstas varían de un punto a otro, especialmente entre las grietas y las zonas entre grietas (ver figura A7.12). Obviamente, en grieta la tracción en el hormigón es nula mientras que la tensión en la armadura es máxima.

Para valores pequeños del esfuerzo cortante, la tracción se transmite a través de las grietas mediante aumentos locales en la tensión de las barras de acero. A ciertos niveles de cortante la tensión de la armadura del alma puede alcanzar el valor de fluencia, figura A7.12c. Si el esfuerzo cortante aumenta, para transmitir tracciones a través de la grieta será necesaria la aparición de tensiones de cortante locales,  $\tau_{ci}$ , que actúan tal y como indica la figura A7.12b.

La capacidad de la interfase de la grieta para transmitir estas tensiones tangenciales dependerá del ancho de la grieta ( $w$ ) y del tamaño máximo de árido ( $a$ ). El valor máximo de  $\tau_{ci}$  viene dado por la expresión (Bhede y Collins, 1989):

$$\tau_{ci} \leq \frac{0.18\sqrt{f_c}}{0.3 + \frac{24w}{a+16}} \quad (\text{MPa, mm}) \quad (\text{A7.15})$$

En la expresión anterior no se tienen en cuenta los efectos favorables producidos por compresiones locales en la interfase de la grieta.

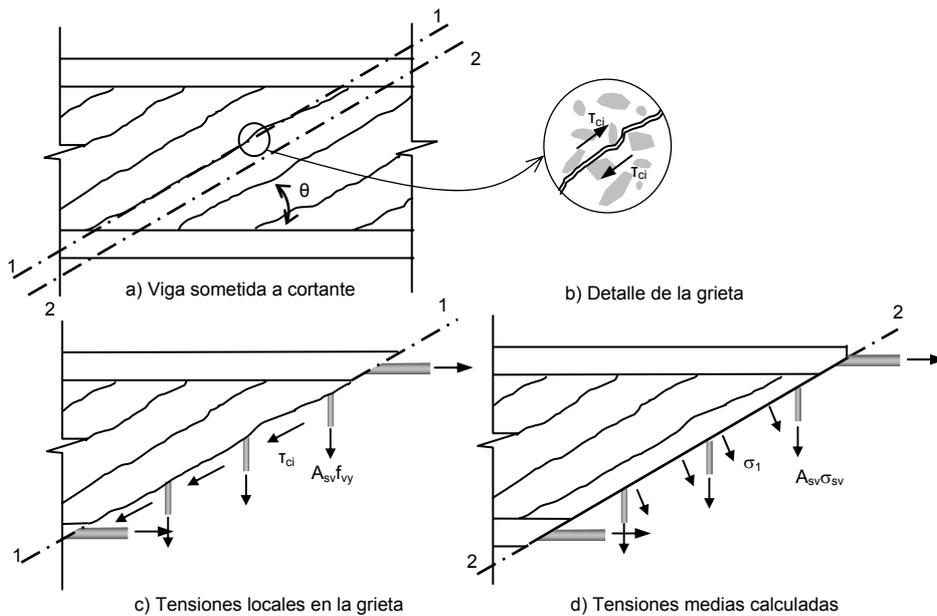


Figura A7.12. Fuerzas a través de la grieta.

Las dos familias de tensiones de las figuras A7.12c y A7.12d deben de ser estáticamente equivalentes. Por eso ambas componentes verticales han de ser iguales:

$$A_{sv}\sigma_{sv}\left(\frac{z}{s \tan \theta}\right) + \sigma_1 \frac{b_w z}{\tan \theta} = A_{sv}f_{vy}\left(\frac{z}{s \tan \theta}\right) + \tau_{ci} b_w z \quad (\text{A7.16})$$

de donde se puede deducir el valor de la tracción transmitida por el hormigón entre grietas,  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1 = \tau_{ci} \tan \theta + \frac{A_{sv}}{sb_w} (f_{vy} - \sigma_{sv}) \quad (\text{A7.17})$$

El ancho de fisura,  $w$ , se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$w = \varepsilon_1 \cdot s_{m\theta}$$

$$\text{siendo: } s_{m\theta} = \frac{1}{\frac{\text{sen} \theta}{s_{mx}} + \frac{\text{cos} \theta}{s_{mv}}} \quad (\text{A7.18})$$

En la expresión anterior  $s_{m\theta}$  es la separación media de las grietas diagonales,  $s_{mx}$  y  $s_{mv}$  son las separaciones entre grietas en las direcciones de la armadura longitudinal y transversal respectivamente,  $\varepsilon_1$  es la deformación longitudinal unitaria en la dirección principal de tracción y  $\theta$  el ángulo de inclinación de las bielas, tal y como se indica en la figura A.7.13.

El código modelo CEB-FIP propone una formulación para estimar las separaciones entre grietas. Esta formulación fue deducida para el ancho de fisura en superficie. Para adaptar esta fórmula, en lugar de  $c$  (recubrimiento) se emplean  $c_x$  y  $c_v$ , que son las distancias del cdg de la sección bruta a la armadura longitudinal y vertical, respectivamente. Ver figura A.7.14.

$$s_{mx} = 2 \left( c_x + \frac{s_x}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{d_{bx}}{\rho_x}$$

$$s_{mv} = 2 \left( c_v + \frac{s}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{d_{bv}}{\rho_v} \quad (\text{A7.19})$$

donde:

$$\rho_v = A_{sv} / (b_w s)$$

$$\rho_x = (A_{sx} + A_{px}) / A_c$$

$$k_2 = 0.25 \text{ y}$$

$$k_1 \begin{cases} = 0.4 & \text{para barras corrugadas} \\ = 0.8 & \text{para barras lisas o tendones} \end{cases}$$

Otro límite del valor de la resistencia a cortante viene dado por la cedencia de la armadura longitudinal. Las componentes horizontales que aparecen en los modelos de las figuras A7.12c y A7.12d deben verificar la siguiente inecuación:

$$A_{sx} \cdot f_y + A_p \cdot f_p \geq A_{sx} \cdot \sigma_{sx} + A_{px} \cdot \sigma_p + \sigma_1 \cdot b_w \cdot z + \left[ \sigma_1 - \frac{A_{sv}}{b_w \cdot s} (f_{vy} - \sigma_{sv}) \right] b_w \cdot z \cot^2 \theta \quad (\text{A7.20})$$

donde  $f_y$  es el límite elástico de la armadura longitudinal pasiva y  $f_p$  el límite elástico del acero de pretensado, que se alcanzan a nivel grieta.

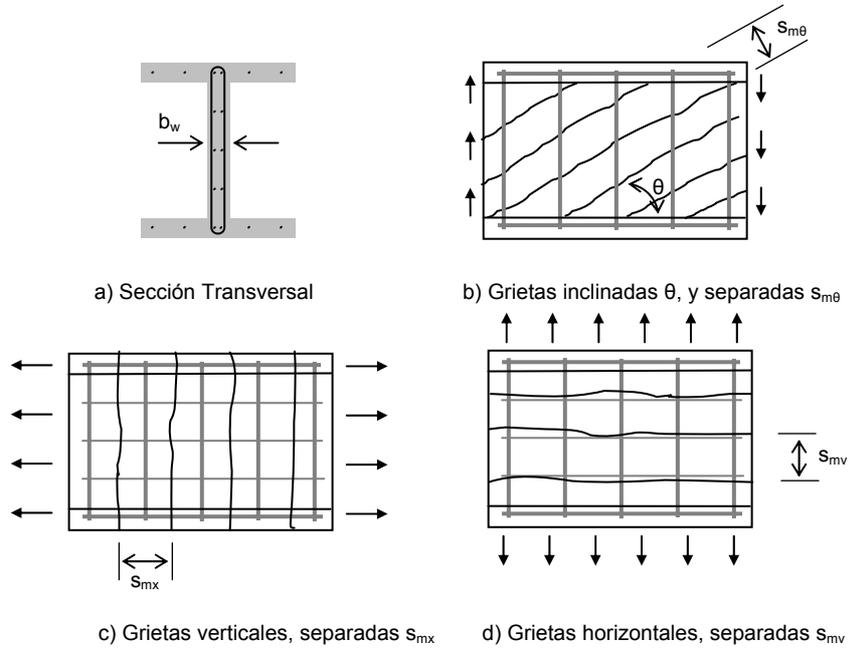


Figura A7.13. Separación entre grietas.

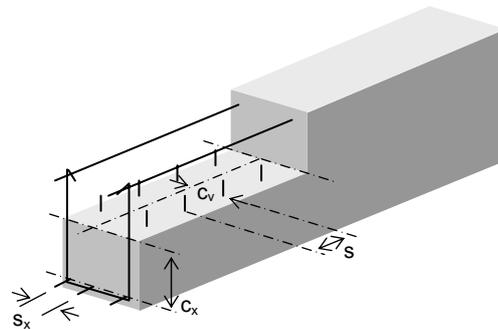


Figura A7.14. Parámetros  $s_x$ ,  $s$ ,  $c_x$  y  $c_v$ .

**Ejemplo**

Un ejemplo clásico en el estudio del cortante es un ensayo realizado por Abersman y Conte (Collins y Mitchell 1991). La figura A7.15 resume la geometría del ensayo y la sección transversal es la representada en la Figura A7.16.

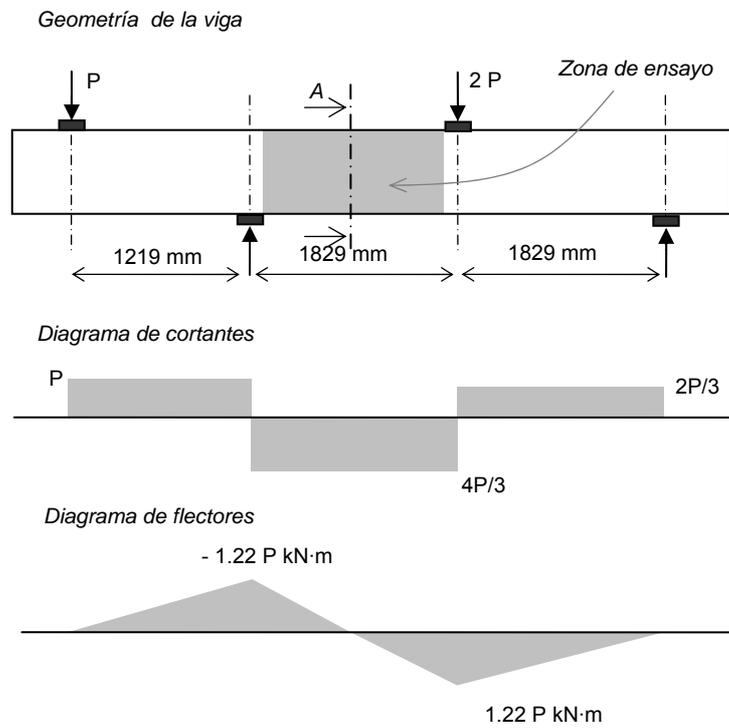


Figura A7.15. Geometría del ensayo.

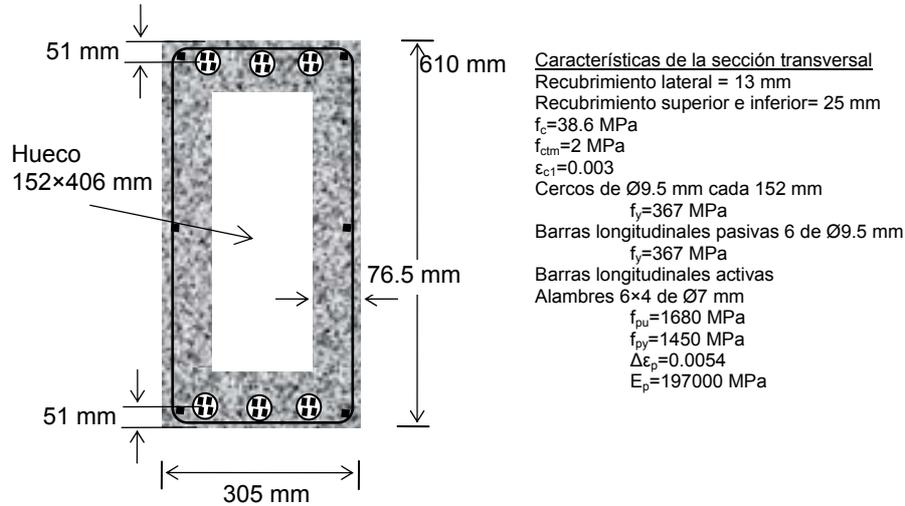


Figura A7.15. Sección transversal A del ejemplo

El problema se ha resuelto para la sección transversal A aplicando la TMCC. Las ecuaciones implicadas son las siguientes:

- 3 ecuaciones de equilibrio, A7.9.
- 2 ecuaciones de compatibilidad, A7.3 y A7.4.
- ecuación de compatibilidad en la deformación del pretensado ( $\epsilon_p = \epsilon_x + \Delta\epsilon_p$ )
- comportamiento del hormigón a tracción ( $\sigma_1$ ), ecuación A7.12.
- comportamiento del hormigón a compresión ( $\sigma_2$ ), ecuación A7.11.
- 2 relaciones tensión-deformación del acero, una para la armadura longitudinal y otra para la armadura transversal, figura A7.10.
- relación tensión-deformación del acero de pretensado, que se ha tomado bilineal.

Además se ha efectuado la comprobación en grieta (Ecuaciones A7.15 a A7.20). Estas ecuaciones sólo modifican el comportamiento a tracción del hormigón, introduciendo tantas incógnitas nuevas como ecuaciones.

En el sistema de 11 ecuaciones no lineales anterior hay 11 incógnitas:  $\theta$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_p$ ,  $V$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_{lx}$ ,  $\sigma_{ly}$  y  $\sigma_p$  si se resuelve para un determinado valor de  $\epsilon_1$ . Para la resolución de este sistema se ha empleado el programa Mathematica®.

Se han considerado dos alteraciones a la TMCC. La primera ha consistido en adoptar la expresión A7.12bis para el comportamiento del hormigón a tracción (tensorrigez). Los resultados así obtenidos se han denominado TCC2.

La segunda modificación consiste en, además de la ecuación A7.12bis, considerar como ecuación del acero a tracción la expresión A7.14. Esta nueva teoría la hemos denominado TCC3. Hay que hacer notar que en la expresión A7.12bis el área de hormigón  $A_c$  es el área rectangular en torno a la barra a una distancia no mayor de  $7.5\phi$  –siendo  $\phi$  el diámetro de la barra- (figura A7.16), área generalmente adoptada en fenómenos de tracción. Para aplicar la ecuación A7.14 se ha considerado un  $A_{c,ef}$  de 0.3 y 0.5 de  $A_c$ . Los resultados obtenidos se han representado en la forma Cortante-deformación vertical en la figura A7.17.

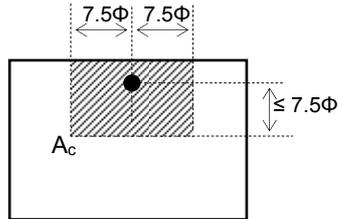


Figura A7.16. Área  $A_c$ .

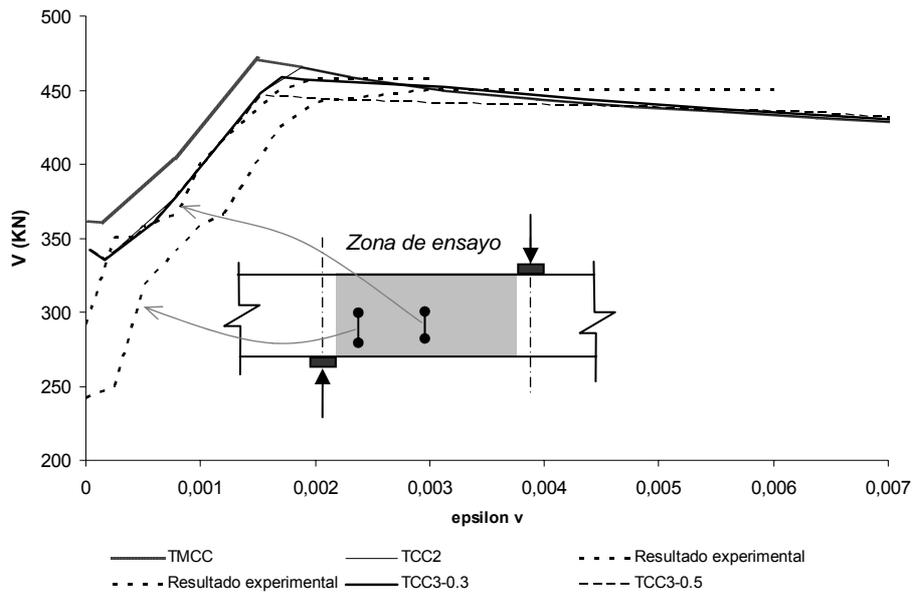


Figura A7.17. Resultados comparativos.

---

**Ejercicios propuestos**

1. Resolver el ejercicio de la figura A7.1 aplicando la TMCC, la TCC2 y la TCC3.

**Referencias:**

ASCE-ACI Committee 445 on Shear and Torsion. "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete". *Journal of Structural Engineering*. December 1998. Páginas 1375- 1417.

Belardi, A., y Hsu, T.T.C. (1994). "Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete". *ACI Struct. J.*, 91(4), 465-474.

Bentz E. (2005). "Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments". *ASCE Journal of Structural Engineering*. September 2005. Vol.131. N°9, 1422-1425.

*Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Comentario (ACI 318R-02)*. American Concrete Institute. Michigan. (Enero 2005).

Collins, M.P. (1978). "Toward a rational theory for RC members in shear". *J. Structural Division.*, ASCE 104(4), 649-666.

Collins M.P., Mitchell D., (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Nueva Jersey.

Hernández Montes, E., y Gil Martín, L.M. (2005). "Hacia una Teoría Unificada del Campo de Compresiones". *Hormigón y Acero*. N° 236. Segundo trimestre 2005. Pág. 109-118.

Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. and Rusch, H. (1969). "Behavior of concrete under biaxial stresses". *J. ACI*. 66(8), 656-666.

Sutherland H. y Clifford W.W. (1926). *Introduction to Reinforced Concrete Design*. Editorial John Wiley & Sons Inc. Nueva York.

Vecchio, F., y Collins, M.P. "The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses". Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, Universidad de Toronto, Mayo 1982, 332 pág.

Vecchio, F.J., y Collins, M.P. (1986). "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear". *J. Am. Concrete Inst.*, 83(2), 219-231.

---

## CAPÍTULO VIII

---

### TORSIÓN



Puente del Dragón sobre el Zacatín. Alcalá de Guadaíra. Sevilla.  
**Cortesía de Brues y Fernández Construcciones S.A. [www.bruesa.com](http://www.bruesa.com)**

#### 8.1. INTRODUCCIÓN

El momento torsor o simplemente torsor ( $T$ ) es un momento cuyo eje de aplicación es paralelo a la directriz de la pieza, ver figura 8.2.

La torsión se presenta en elementos estructurales tales como: puentes curvos, vigas embrochadas, vigas de puente cargadas excéntricamente, etc. El momento torsor puede ser una sollicitación principal o una sollicitación secundaria. Si la sollicitación es principal (figura 8.1.a) la pieza debe de resistir todo el torsor, dado que en caso contrario se originaría la ruina de la pieza. Esto se produce en estructuras isostáticas donde si no se resiste el torsor la estructura se convierte en mecanismo y se produce su ruina. En la figura 8.1.a el voladizo está resistido isostáticamente por la viga principal, la cual debe de resistir todo el momento torsor inducido por el voladizo.

Se habla de sollicitación secundaria (figura 8.1.b), cuando el momento torsor no tiene por qué ser resistido en su totalidad, dándose dos posibilidades:

- si la viga principal de la figura 8.1.b no tiene capacidad para resistir el momento torsor, ésta gira en torno a su eje, y las vigas secundarias se comportan como biapoyadas, con una ley de flectores como la representada en la figura 8.1.c.
- si la viga principal presenta resistencia frente al torsor, a todo o a una parte de éste, las vigas secundarias estarán sometidas a un momento flector en el apoyo, con una ley de flectores como la de la figura 8.1.d.

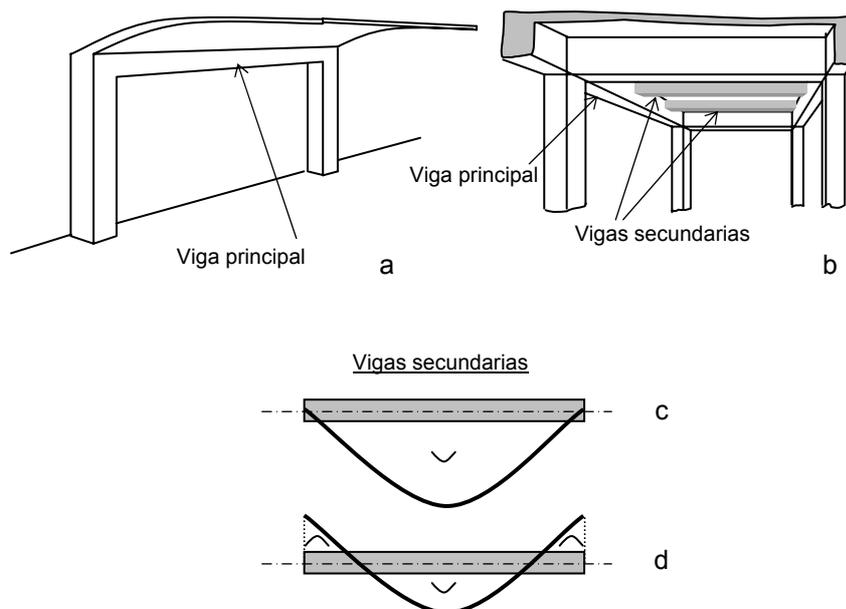


Figura 8.1. Torsor como sollicitación principal y como sollicitación secundaria

## 8.2. TORSIÓN EN PRE-FISURACIÓN

La torsión en elementos de hormigón en pre-fisuración se puede estudiar tal y como se explica en cualquier libro de Resistencia de Materiales: a partir de las teorías de Saint-Venant o de Vlasov. En este capítulo, sin embargo, sólo se tratará la torsión en perfiles delgados cerrados.

La hipótesis fundamental en la teoría de perfiles delgados cerrados consiste en suponer que el torsor origina una tensión cortante constante en cada sección del espesor del tubo delgado (figura 8.2b): en la sección B-B<sub>1</sub> el espesor del perfil delgado es  $t_B$  y la tensión es constante de valor  $\tau_B$ . Para la sección A-A<sub>1</sub> el espesor del perfil y la tensión serán  $t_A$  y  $\tau_A$ , respectivamente.

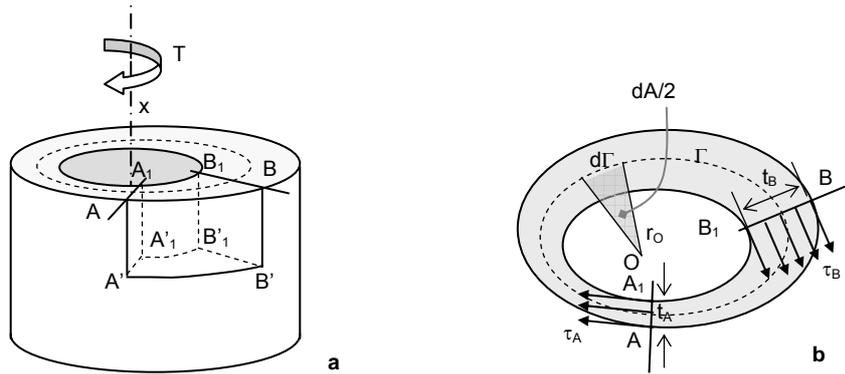


Figura 8.2. Torsión en perfiles delgados cerrados

Aplicando el teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales a la figura 8.2a se deduce que en la cara A-A<sub>1</sub>-A'<sub>1</sub>-A' aparece una tensión tangencial de valor  $\tau_A$ , mientras que en la cara opuesta la tensión tangencial es  $\tau_B$ . Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales en las caras A-A<sub>1</sub>-A'<sub>1</sub>-A' y B-B<sub>1</sub>-B'<sub>1</sub>-B' se obtiene que:

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q$$

A  $q$  se le denomina flujo de cortantes y su valor se mantiene constante a lo largo de la sección transversal.

Sea  $\Gamma$  la línea formada por los puntos medios en cada sección del tipo AA<sub>1</sub> (figura 8.2b). El momento que engendra el flujo de cortantes respecto al eje x es el momento torsor, que se puede obtener integrando a lo largo de  $\Gamma$ :

$$T = \oint_{\Gamma} q r_o d\Gamma = q \oint_{\Gamma} r_o d\Gamma = q 2 A_o$$

además  $r_o d\Gamma = 2 \cdot dA$

donde  $r_o$  es el brazo respecto al punto O (intersección de la sección transversal con el eje x) y  $A_o$  es el área que queda dentro de  $\Gamma$ . De la ecuación anterior se puede despejar el valor de la tensión de cortante  $\tau$  debida al momento torsor T, sabiendo que  $q = \tau t$ .

$$\tau = \frac{T}{2 A_o t} \quad (8.1)$$

Para obtener la rigidez de torsión<sup>1</sup> (relación entre el momento torsor  $T$  y el ángulo de giro por unidad de longitud  $\theta$ ) se aplica el principio de los trabajos virtuales. El trabajo exterior desarrollado por  $T$  en una unidad de longitud tiene que ser igual al trabajo interno desarrollado por las tensiones tangenciales:

$$T\theta = \int_{Vol} \tau \gamma \, dVol = 1 \cdot \int_{Area} \tau \gamma \, dA = \oint_{\Gamma} \frac{T}{2A_0 t} \gamma t \, d\Gamma$$

Si  $t$  permanece constante a lo largo de  $\Gamma$  el valor de  $\tau$  será también constante y puesto que  $\tau = G\gamma$ , también  $\gamma$  permanecerá constante. Por tanto, se puede sacar  $\gamma$  fuera de la integral y se obtiene el siguiente valor para el ángulo girado por unidad de longitud:

$$\theta = \frac{\gamma \Gamma}{2A_0} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{T \Gamma}{4A_0^2 t G} \quad \rightarrow \quad GI_T = \frac{T}{\theta} = G \frac{4A_0^2 t}{\Gamma}$$

#### Momento torsor en piezas de hormigón:

Las normas EHE y el EC2 admiten que el momento torsor es resistido por la parte exterior de la sección transversal de hormigón, en un espesor  $h_e$ -espesor eficaz<sup>2</sup>, tal y como se indica en la figura 8.3. El valor de  $h_e$  será tal que:

$$h_e \leq \frac{A}{u} \begin{cases} < h_0 \\ > 2c \end{cases}$$

donde:

$A$	Área de la sección inscrita en el perímetro exterior incluyendo las áreas huecas interiores
$u$	Perímetro exterior de la sección transversal
$h_0$	Espesor real de la pared en caso de secciones huecas
$c$	Recubrimiento de las armaduras longitudinales

Así pues, el momento torsor será resistido por una pieza ideal cerrada de pared delgada con un espesor de pared  $h_e$  y un perímetro exterior  $u$ . La línea media del espesor  $h_e$  se denomina  $u_e$ , y  $A_e$  es el área encerrada por ésta<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Por analogía con la flexión, donde la rigidez es  $EI$ , se define la rigidez a torsión como  $GI_T$ , siendo  $I_T$  la rigidez de torsión de la pieza.

<sup>2</sup> Esta hipótesis está suficientemente contrastada con la experimentación (Mitchell y Collins 1978).

<sup>3</sup> Los valores  $h_e$ ,  $u_e$  y  $A_e$  han sido denominados anteriormente  $t$ ,  $\Gamma$  y  $A_0$  respectivamente, siguiendo la nomenclatura clásica de Resistencia de Materiales.

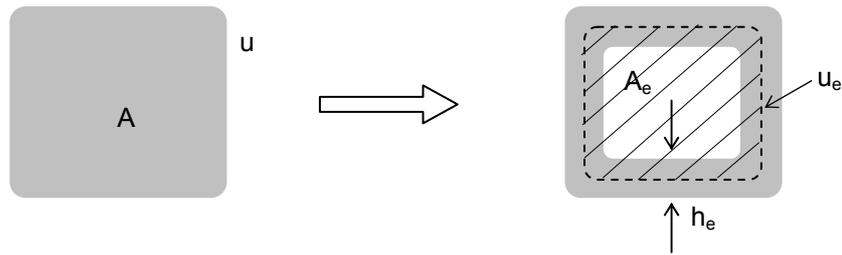


Figura 8.3. Espesor eficaz

El momento torsor sólo origina tensiones tangenciales, contenidas en el plano perpendicular al eje del torsor. El valor de  $T$  que produce fisuración en la pieza de hormigón se denomina torsor de fisuración,  $T_{fis}$ , y se alcanza cuando la tensión principal de tracción es igual a  $f_{ct}$ . El estado de tensiones existente en una de las caras de la pieza torsionada, punto A, cuando alcanza  $T_{fis}$  se deduce de la figura 8.4.

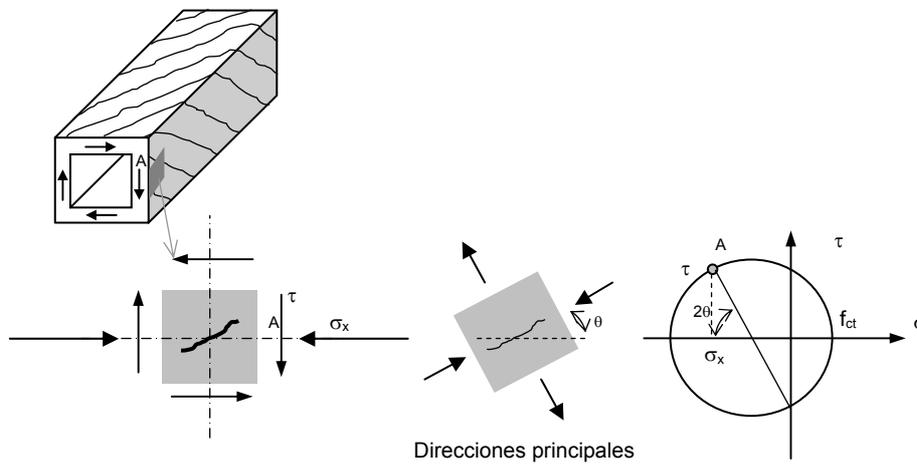


Figura 8.4. Grietas de torsión

En la figura 8.4  $\sigma_x$  es la tensión debida a un axil exterior de compresión y/o a la fuerza de pretensado.

Imponiendo en el círculo de Mohr que la tensión máxima de tracción sea igual a  $f_{ct}$ , se puede obtener el valor correspondiente de la tensión tangencial  $\tau$  :

$$f_{ct} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma_x}{2} \rightarrow \tau = f_{ct} \sqrt{1 + \frac{\sigma_x}{f_{ct}}}$$

Si en la ecuación anterior se sustituye  $\tau$  por su valor dado por la ecuación 8.1,  $t$  por  $h_e$  (nomenclatura de la EHE) y  $f_{ct}=0.3f_{ck}^{2/3}$ , se obtiene el siguiente valor del torsor de fisuración,  $T_{fis}$ :

$$T_{fis} = 2 h_e A_e 0.30^3 \sqrt{f_{ck}^2} \sqrt{1 + \frac{\sigma_x}{0.30^3 \sqrt{f_{ck}^2}}} \text{ en N}\cdot\text{mm}$$

### 8.3. TORSIÓN EN POST-FISURACIÓN Y ROTURA

Como se aprecia en la figura 8.4, cuando se aplica el momento torsor de fisuración se producen grietas que forman un ángulo  $\theta$  con la directriz de la pieza. Al producirse estas grietas en las cuatro caras se forman espirales de bielas comprimidas, figura 8.4.

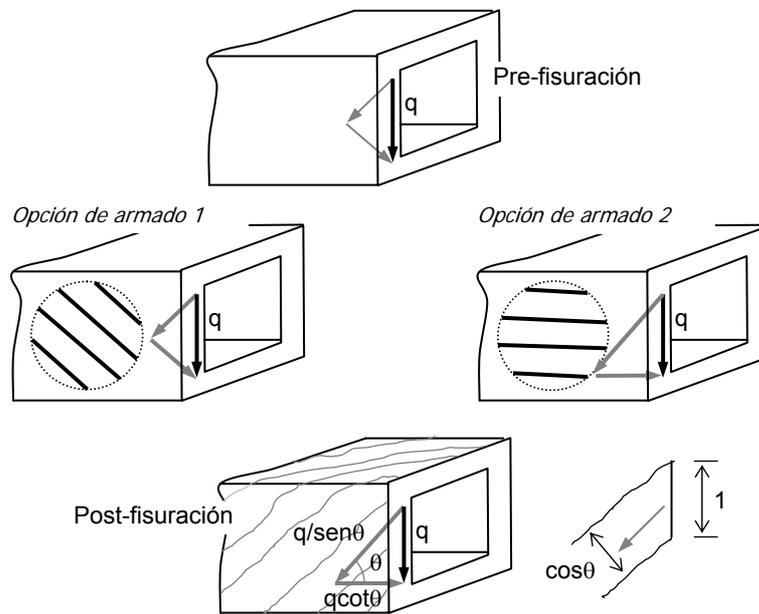


Figura 8.5. Equilibrio en pre-fisuración y rotura

En la figura 8.5 se observa como el flujo de cortantes ( $q=t\tau$ ), en pre-fisuración éste genera internamente compresiones y tracciones en el hormigón. Si se pretende que la pieza fisurada resista la sollicitación de torsión será necesario, para equilibrar el flujo de cortantes, que las tracciones que el hormigón deja de resistir sean resistidas por una

armadura. Como ya vimos, en post-fisuración el hormigón no puede resistir las tracciones y sólo resistirá a compresión siguiendo la dirección que forman las bielas formadas en rotura.

Se puede optar por colocar la armadura paralela a la dirección principal de tracción, o sea siguiendo las tracciones inducidas por el flujo de cortante  $q$ : *opción de armado 1* en la figura 8.5.

Otra posibilidad es colocar la armadura paralela al eje de la pieza, *opción de armado 2* en la figura 8.5. En este caso, cuando el hormigón fisura se produce un cambio brusco en la forma de equilibrar el flujo de cortante ( $q$ ) debido a que las tracciones sólo pueden ser absorbidas en paralelo al eje de la pieza, viéndose las compresiones incrementadas.

En la opción de armado 1, si el flujo de cortante cambia de signo la pieza no resistirá mientras que, por el contrario, la opción de armado 2 no se ve afectada por el cambio de signo. Por tanto, la opción de armado 2 es la más interesante.

Así pues,  $q$  se va a descomponer de tal forma que las tracciones sean paralelas al eje de la pieza (figura 8.5 post-fisuración). Si ya se han formado bielas de compresión<sup>4</sup> con una inclinación  $\theta$ , el valor de las tracciones por unidad de longitud<sup>5</sup> es  $q \cdot \cot \theta$ . Ver figura 8.3.

La resultante de la tracción generada tiene un valor de  $q \cdot \cot \theta \cdot u_e$ , que será resistida por una armadura longitudinal distribuida de forma homogénea a lo largo de  $u_e$ . El valor del área de esta armadura  $A_l$ , se determina a partir de la ecuación de equilibrio:

$$q \cot \theta u_e = A_l f_{y,l,d}$$

Si se introduce el valor de  $q = \tau \cdot t$  dado por la ecuación 8.1 en la expresión anterior se obtiene el siguiente valor del momento torsor:

$$T = \frac{2A_e}{u_e} A_l f_{y,l,d} t g \theta = T_{u3}$$

La Norma EHE denomina  $T_{u3}$  al máximo momento torsor que pueden resistir las armaduras longitudinales  $A_l$ . En la ecuación anterior  $f_{y,l,d}$  es la resistencia característica de la armadura longitudinal. Puesto que para el estudio de la torsión se ha empleado la teoría de las bielas, la deformación del acero no puede ser excesiva y por este motivo  $f_{y,l,d}$  no será mayor de  $400 \text{ N/mm}^2$ .

En la figura 8.5 se observa además que las tensiones de compresión se modifican en post-fisuración, respecto al estado de pre-fisuración. En post-fisuración el

<sup>4</sup> En rotura.

<sup>5</sup> Unidad de longitud medida en la dirección de  $q$ , o sea según  $u_e$ .

flujo de cortantes  $q$  produce un flujo de compresiones  $q/\text{sen}\theta$  por unidad de longitud en  $u_e$ . Así pues,  $q$  origina unas tensiones en biela cuyo valor viene dado por:

$$\sigma_c = \frac{q}{\text{sen}\theta} \frac{1}{h_e \cos\theta} \leq f_{1cd}$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de  $q$  obtenido de la ecuación 8.1 e imponiendo el agotamiento del hormigón a compresión se puede obtener el valor de  $T$ :

$$T = 2f_{1cd} A_e h_e \text{sen}\theta \cos\theta \xrightarrow{\text{Según la EHE}} T_{u1} = \alpha f_{1cd} A_e h_e \frac{\cot\theta}{1 + \cot^2\theta}$$

donde  $f_{1cd}$  es la resistencia a compresión del hormigón en biela (la EHE toma  $f_{1cd}=0.6f_{cd}$ ), el parámetro  $\alpha$  toma el valor de 1.2 si hay estribos únicamente a lo largo del perímetro exterior de la pieza y 1.5 si se colocan estribos cerrados en ambas caras de la pared de la sección hueca equivalente o de la sección hueca real. El valor de  $T_{u1}$  corresponde al máximo momento torsor que pueden resistir las bielas comprimidas de hormigón.

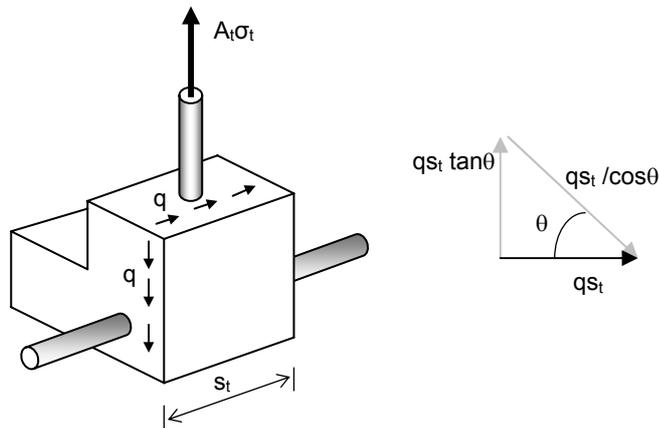


Figura 8.6. Equilibrio para determinar la armadura transversal

Si se aísla la esquina inferior derecha del elemento de la figura 8.4 en una longitud  $s_t$  (figura 8.6) y se establece el equilibrio de esfuerzos sobre la cara superior, se observa que es necesario disponer una armadura transversal para absorber las tracciones. Si esta armadura está constituida por barras de área  $A_t$  separadas  $s_t$ , se habrá de verificar que:

$$A_t \sigma_t = q s_t \tan \theta$$

Es interesante señalar que, a diferencia con el cortante, en la expresión anterior  $A_t$  es el área del redondo. Sustituyendo  $q$  por su valor (ecuación 8.1) e imponiendo que la tensión de la armadura transversal alcance su tensión límite  $\sigma_t=f_{yt,d}$ , obtenemos:

$$T = \frac{2A_e A_t}{s_t} f_{yt,d} \cot \theta = T_{u2}$$

La EHE denomina  $T_{u2}$  al máximo momento torsor que pueden resistir las armaduras transversales.

### Ejemplo

Consideremos la viga ABC como de la figura 8.7, solicitada por una carga puntual de diseño en C de 30 kN. Toda la viga tiene unas dimensiones de 0.6×0.6 m. El hormigón es del tipo HA-25 y el acero B-500-S. Se pide: Calcular la armadura necesaria para resistir el momento torsor generado por la carga puntual.

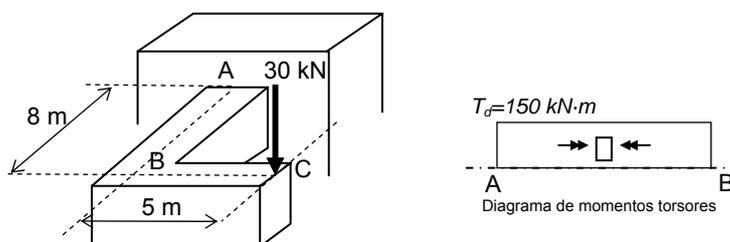


Figura 8.7. Ejemplo de dimensionamiento a momento torsor

Según el artículo 45.2 de la EHE, el torsor de diseño  $T_d$  tiene que ser menor que  $T_{u1}$ ,  $T_{u2}$  y  $T_{u3}$ . O sea, tiene que no agotar a compresión las bielas de hormigón y no superar la resistencia de la armadura transversal ni longitudinal, respectivamente.

En primer lugar se calcularán los parámetros del área efectiva:

$$h_e = \frac{A}{u} = \frac{0.6 \cdot 0.6}{4 \cdot 0.6} = 0.15 \text{ m} = 150 \text{ mm}$$

$$A_e = (0.6 - 0.15)^2 = 0.2025 \text{ m}^2 = 202500 \text{ mm}^2$$

$$u_e = 4 \cdot (0.6 - 0.15) = 1.8 \text{ m} = 1800 \text{ mm}$$

El torsor que pueden resistir las bielas a compresión,  $T_{u1}$ , será:

$$T_{u1} = \alpha f_{1cd} A_e h_e \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} = 1.2 \cdot 0.6 \frac{25}{1.5} \cdot 202500 \cdot 150 \cdot \frac{1}{1+1} = 182.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Puesto que no existen tensiones de compresión se ha adoptado  $\theta=45^\circ$  y, al ser la sección maciza,  $\alpha=1.2$ . Dado que  $T_{u1} > T_d$  el torsor de diseño no provoca rotura a compresión en las bielas.

Antes de calcular  $T_{u2}$ , torsor que resisten las armaduras transversales, vamos a considerar la disposición que establece la norma para estas armaduras transversales (artíc. 45.2.3 de la EHE). La separación  $s_t$  deberá ser  $\leq u_e/8=22.5 \text{ cm}$ . Ya que  $T_d > 2T_{u1}/3$   $s_t$  deberá de ser  $\leq 0.30 \cdot \text{lado}=13.5 \text{ cm}$ . Un valor válido de  $s_t$  es  $12 \text{ cm}$ .

$$T_{u2} = \frac{2A_e A_t}{s_t} f_{yt,d} \cot \theta = \frac{2 \cdot 202500 \cdot A_t}{s_t} \cdot 400 \cdot 1 > T_d$$

De la expresión anterior se puede deducir el valor de  $A_t$ . Dispondremos *cercos*  $\varnothing 12$  cada  $12 \text{ cm}$ .

Por último nos queda dimensionar la armadura longitudinal a partir del torsor  $T_{u3}$ :

$$T_{u3} = \frac{2A_e}{u_e} A_l f_{yl,d} \text{tg} \theta = \frac{2 \cdot 202500}{1800} \cdot A_l \cdot 400 \cdot 1 \geq T_d = 150 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_l \geq 1667 \text{ mm}^2$$

La armadura longitudinal necesaria para resistir el momento torsor se puede dotar con  $16\varnothing 12$  ( $5\varnothing 12$  por cara).

#### 8.4. INTERACCIÓN ENTRE TORSIÓN Y OTROS ESFUERZOS

El estudio de la interacción de la torsión con otros esfuerzos es bastante complejo. La flexión hace que la tensión normal varíe en la sección transversal de un elemento lo que provoca una variación en el ángulo de inclinación de las bielas de compresión,  $\theta$ . Así pues, el ángulo  $\theta$  no permanece constante en la sección, debido a que la variación de la tensión normal hace cambiar la dirección principal de compresión.

La existencia de flexión, cortante y torsor hace que la inclinación de las bielas de compresión sea diferente en cada cara del elemento, (Rabat y Collins 1977), puesto que las tensiones normales y cortantes que aparecen son distintas.

La normativa actual emplea métodos simplificados para tratar la interacción entre la torsión y otros esfuerzos. A continuación se transcribe el artículo 45.3.2 de la EHE.

Torsión combinada con flexión y axil

Las armaduras longitudinales necesarias para torsión y flexocompresión o flexotracción se deben calcular por separado suponiendo la actuación de ambos tipos de esfuerzos de forma independiente. Las armaduras así calculadas se combinarán de acuerdo con las siguientes reglas:

1. En la zona traccionada debida a la flexión compuesta, las armaduras longitudinales por torsión se sumarán a las necesarias por los esfuerzos de flexión y axil.
2. En la zona comprimida debido a la flexión compuesta, si la capacidad mecánica de las armaduras de torsión a disponer es inferior al esfuerzo de compresión del hormigón debido a la flexión compuesta, no será necesario añadir armadura por torsión. En caso contrario se añadirá la diferencia entre ambos valores.

Respecto a las compresiones en el hormigón, deberá comprobarse que la tensión principal de compresión  $\sigma_{cd}$  en el punto crítico de la sección verificará:  $\sigma_{cd} \leq \alpha \cdot f_{1cd}$  donde  $\alpha$  y  $f_{1cd}$  son los valores empleados en la deducción de  $T_{u1}$ . Para calcular  $\sigma_{cd}$  se empleará la tensión normal debida a la flexión compuesta  $\sigma_{md}$  y la tensión tangencial  $\tau_{td}$  ( $td$  significa torsor de diseño) debida al esfuerzo torsor calculada según la ecuación 8.1. Una vez obtenidos  $\sigma_{md}$  y  $\tau_{td}$ , mediante el círculo de Morh se calcula el valor de  $\sigma_{cd}$ , tensión principal de compresión.

Es interesante observar que el planteamiento superior es válido siempre que  $T_d < T_{fis}$ , en el caso que  $T_d \geq T_{fis}$  habría que hacer la comprobación basándose en teoría de bielas y tirantes (Hernández-Montes et al. 2004).

Torsión combinada con cortante.

Los esfuerzos torsores y cortantes de cálculo concomitantes deberán satisfacer la siguiente condición para asegurar que no se producen compresiones excesivas en el hormigón:

$$\left(\frac{T_d}{T_{u1}}\right)^\beta + \left(\frac{V_{rd}}{V_{u1}}\right)^\beta \leq 1$$

$$\text{donde } \beta = 2 \cdot \left(1 - \frac{h_e}{b}\right)$$

$b$  es el ancho del elemento, igual al ancho total para sección maciza y a la suma de los anchos de las almas para sección cajón.

El dimensionamiento de los estribos se realizarán de forma independiente, para la torsión y para el cortante y se sumarán ambos. Se tendrá en cuenta que las armaduras

de la torsión deberán disponerse en el perímetro exterior de la sección, sin embargo en el cortante no es necesario. En ambos dimensionados, de cortante y torsor, se empleará el mismo ángulo de inclinación de las bielas de compresión,  $\theta$ .

**Ejemplo**

Consideremos la viga ABC de la figura 8.8, ya estudiada en el ejemplo anterior. La sollicitación consiste en una carga puntual de diseño en C de 30 kN. Las dimensiones de la sección transversal son de 0.6x0.6 m. El hormigón es del tipo HA-25 y el acero B-500-S. Se pide: calcular la armadura necesaria en el punto A.

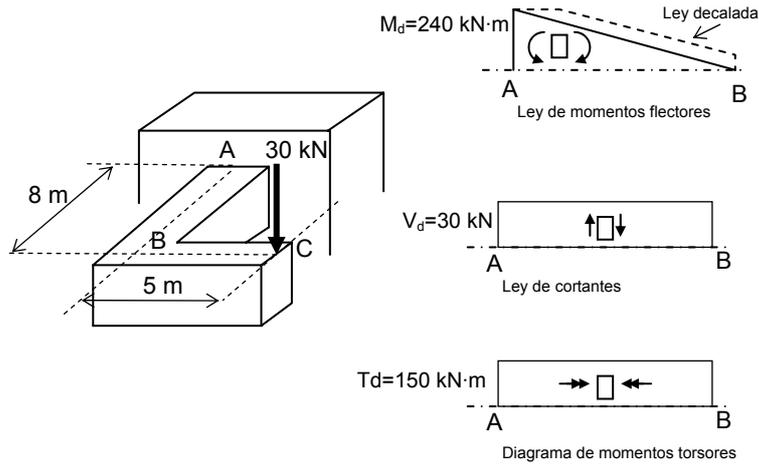


Figura 8.8. Ejemplo de dimensionamiento frente a momento torsor combinado

Del planteamiento del problema de flexión simple empleando el diagrama rectangular del hormigón y con un canto útil de  $d=530 \text{ mm}$ , se obtiene rotura en el dominio 2 y los resultados son:  $x=70.3 \text{ mm}$  (profundidad de la fibra neutra),  $A_s=1100 \text{ mm}^2$ . Esta cuantía es superior al mínimo mecánico (Apdo. 42.3.2 de la EHE) y al mínimo geométrico (Artíc. 42.3.5 de la EHE). La armadura mínima geométrica a compresión, en la cara inferior es:

$$A'_s = 0.3 \frac{2.8}{1000} \cdot 600 \cdot 600 = 302.4 \text{ mm}^2 \rightarrow 3\phi 12$$

Para el cortante se obtiene un valor de  $V_{cu} = 105 \text{ kN}$  superior a  $V_d$ . La armadura mínima de cortante es (Artíc. 44.2.3.4.1 de la EHE):

$$A_{min} = 0.02 \frac{f_{cd}}{f_{y\alpha,d}} b_0 = 0.02 \cdot \frac{16.67}{400} \cdot 600 = 0.5 \text{ mm}^2 / \text{mm}$$

Los cercos deben disponerse a una distancia:  $\leq 30 \text{ cm}$ ,  $\leq 0.8 \cdot d = 424 \text{ mm}$  por ser  $V_{rd} \leq 0.2 \cdot V_{u1}$ . Colocando estribos a 30 cm tenemos:

$$s_t \cdot \sum A_\alpha = n_{ramas} \cdot A_{redondo} \rightarrow 300 \cdot 0.5 = 2 \cdot A_{redondo} \rightarrow c\phi 10 \text{ a } 30 \text{ cm}$$

#### Interacción torsor-flector

En la cara traccionada se coloca la suma de la armadura necesaria a torsión más la necesaria a flexión:

$$A_{s,torsión} + A_{s,tracción} = \frac{1664}{4} + 1100 = 1516.75 \text{ mm}^2 \rightarrow 5\phi 20$$

En la cara comprimida la capacidad mecánica de la armadura de torsión es inferior al esfuerzo de compresión inducido en el hormigón por la flexión<sup>6</sup>, no siendo necesario añadir ninguna armadura de torsión.

En las caras laterales se añadirá la de torsión, o sea  $5\phi 12$  en cada cara.

#### Interacción torsor-cortante

Las armaduras calculadas en este caso se sumarán, teniendo en cuenta que los cercos de torsión deben disponerse en el perímetro exterior mientras que los de cortante no es necesario que cumplan esta prescripción.

A su vez la limitación en bielas de compresión obliga a cumplir:

$$\left( \frac{T_d}{T_{u1}} \right)^\beta + \left( \frac{V_{rd}}{V_{u1}} \right)^\beta \leq 1$$

$$\text{donde } \beta = 2 \cdot \left( 1 - \frac{h_e}{b} \right) = 1.5$$

que en nuestro caso se cumple sobradamente.

La disposición definitiva de armadura será la indicada en la figura 8.8.

<sup>6</sup> En este caso, por tratarse de flexión simple, equivale a la capacidad mecánica de la armadura de tracción calculada.

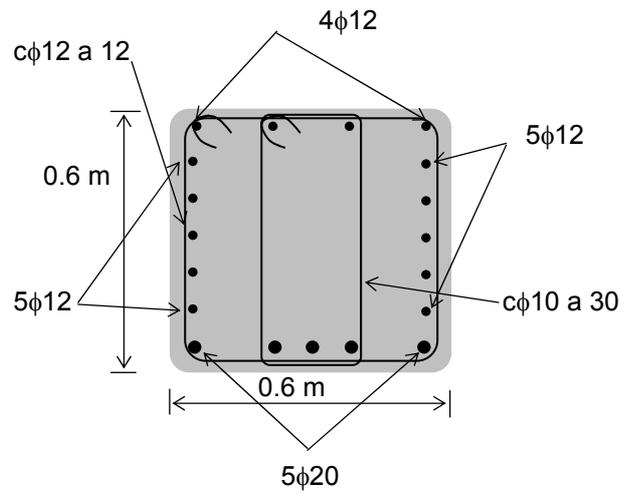


Figura 8.8. Armado final

**Ejercicios propuestos**

1. Consideremos una sección cuadrada de  $0.6 \times 0.6$  m, maciza, fabricada con HA-25. Dicha sección está solicitada por un momento flector aplicado de 28.8 kN·m que actúa junto con un torsor de 180 kN·m.

- Calcular la tensión normal máxima de compresión y de tracción generada por el momento flector, suponiendo distribución lineal.
- Calcular el torsor de fisuración en las caras perpendiculares al eje de aplicación del momento flector, sin tener en cuenta la tensión normal.
- Calcular el torsor de fisuración en las caras paralelas al eje de aplicación del momento flector.
- Aplicar criterios de mecánica del medio continuo o de teoría de bielas, según proceda para estimar la tensión máxima en el hormigón.

**Referencias:**

ASCE-ACI Committe 445 on Shear and Torsion. "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete". *Journal of Structural Engineering*. December 1998. Páginas 1375- 1417.

*Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Comentary (ACI 318R-02)*. American Concrete Institute. Michigan. (Enero 2005).

Collins M.P., Mitchell D., (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Nueva Jersey.

Hernández Montes, E. Gil Martín, L.M. y Albajar Molera L. (2004). "Límites de la teoría de rotura y prerrotura para solicitaciones combinación de momentos torsores y flectores en piezas de hormigón". *Hormigón y Acero*. Nº 231. Primer trimestre 2004. Pág. 97-100.

Mitchell, D., and Collins, M.P., "Influence of Prestressing on Torsional Response of Concrete Beams". *PCI Journal*, Vol.23, Nº3. Mayo-Junio 1978. págs. 54-73.

Rabbat, B., y Collins, M.P. "A Variable Angle Space Truss Model for Structural Members Subjected to Complex Loading". *Douglas McHenry International Symposium on Concrete and Concrete Structures*. SP-55, American Concrete Institute, Detroit, 1977, pp.229-236.





---

## CAPÍTULO IX

---

### ANÁLISIS ESTRUCTURAL



**Edificio Diputación de Granada**  
**Cortesía de GARASA-ESNECO**  
**[www.garasa.com](http://www.garasa.com)**

#### 9.1. INTRODUCCIÓN

El propósito del cálculo de estructuras es determinar la distribución de fuerzas internas (diagramas de axiles, cortantes y momentos) o tensiones, deformaciones y desplazamientos de todos los elementos que componen una estructura.

Para calcular una estructura se deben de dar los siguientes pasos:

1. Realizar un modelo de la estructura mediante nudos y barras.
2. Asignar propiedades a cada barra: áreas, inercias y módulos de rigidez.
3. Optar por un tipo de análisis estructural.

4. Calcular la estructura: obtener los desplazamientos de cada grado de libertad considerado, a partir de los cuales se obtendrán las deformaciones y los esfuerzos existentes en cada sección.
5. Dimensionar la estructura (dotarla de armadura).

Realizar un modelo de nudos y barras es un proceso sencillo donde la práctica juega un papel fundamental. Este proceso se ha abordado en problemas de resistencia de materiales y de cálculo de estructuras.

El siguiente paso consiste en definir las barras de la estructura, esto es, decidir el área, las inercias y el material de las mismas. Este primer paso se denomina tradicionalmente *predimensionamiento*. Existen numerosos procedimientos para predimensionar una estructura de hormigón. Por ejemplo,, para dimensionar un pilar es frecuente optar por una sección bruta rectangular que cumpliera la siguiente condición:

$$A_c = 0.1 \frac{N_d}{f_{cd}}$$

Otra manera de predimensionar consiste en adoptar las secciones de una estructura parecida y modificarlas (aumentándolas o reduciéndolas) analizando el coste total de la estructura y verificando que las modificaciones efectuadas abaratan la estructura final.

Determinados el modelo y las secciones de las barras, es necesario decidir el tipo de análisis estructural a utilizar. En el apartado siguiente se examinan las peculiaridades de cada tipo de análisis estructural. Elegido el tipo de análisis se determinarán los esfuerzos flectores, axiles, cortantes y de torsión que solicitan a los elementos de la estructura así como sus deformaciones. El último paso consiste en dimensionar los elementos de hormigón armado y pretensado de tal forma que resistan los esfuerzos y que cumplan las limitaciones de deformaciones (flechas y fisuras).

Para definir las propiedades mecánicas de cada elemento se pueden considerar los siguientes tipos de secciones:

- Sección bruta: la sección que resulta de tomar las dimensiones reales de la pieza, sin deducir los huecos de las armaduras.
- Sección neta: la obtenida a partir de la sección bruta deduciendo los huecos longitudinales practicados en el hormigón, tales como entubaciones o entalladuras, para el paso de las armaduras activas o sus anclajes.
- Sección homogeneizada: la obtenida a partir de la sección neta considerando la presencia de armadura longitudinal adherente. Esta última se multiplica por el correspondiente coeficiente de equivalencia<sup>1</sup> ( $n$ ).
- Sección fisurada: es la sección formada por la zona comprimida del hormigón y las áreas de las armaduras longitudinales, tanto activas adherentes como pasivas, multiplicadas por el correspondiente coeficiente de equivalencia.

El empleo de una sección u otra va a depender del tipo de análisis estructural por el que se opte, como se verá más adelante.

<sup>1</sup> Coeficiente de equivalencia  $n = E_s / E_c$ .

En estructuras de hormigón la forma más usual de sección transversal para pilares es rectangular o circular, manteniéndose ésta constante en toda la longitud del elemento. Sin embargo, son posibles otras formas de y la sección transversal puede variar a lo largo de la pieza.

Es interesante señalar que en estructuras de hormigón los nudos generalmente transmiten momentos y, por tanto, los pilares trabajarán como vigas-columnas, estando sometidos a todo tipo de sollicitaciones: axiles, flectores, cortantes y torsores.



Figura 9.1. Secciones de pilares, cuadrada y circular

## 9.2 TIPOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El EC2 (Eurocódigo 2) considera las siguientes idealizaciones del comportamiento estructural:

- Comportamiento elástico lineal
- Comportamiento elástico lineal con redistribución limitada (o elasto-plástico)
- Comportamiento plástico
- Comportamiento no-lineal

Estas idealizaciones dan lugar a distintos tipos de análisis, cuyas características generales se pueden ver en la tabla 9.1.

Tabla 9.1. Tipos de Análisis Estructural

	Material	Hipótesis	
		Pequeños desplazamientos (1)	Pequeñas deformaciones (2)
Elástico Lineal	Elástico-lineal	Sí	Sí
Elástico Lineal con redistribución limitada	Elástico-plástico	Sí o No	Sí
Plástico	Elasto-plástico ó Rígido-plástico	Sí o No	Sí
No lineal	No lineal	Sí o No	Sí o No

(1) Pequeños desplazamientos equivale a considerar el equilibrio sobre la estructura no deformada. Esto se conoce como cálculo en primer orden (o no considerar los efectos  $PA$ ). Por el contrario tener en cuenta los desplazamientos equivale a considerar los efectos  $PA$ , también se denomina cálculo en segundo orden, o que se considera la no-linealidad geométrica.

(2) La hipótesis de pequeñas deformaciones permite aproximar, en flexión, la curvatura por la derivada segunda ( $d^2y/dx^2$ ).

### Análisis elástico lineal

El análisis elástico lineal (o análisis en primer orden) está basado en la teoría de elasticidad y se puede aplicar tanto para las comprobaciones de ELU como de ELS. En este tipo de análisis se suele considerar:

- Propiedades de las secciones transversales brutas. O bien unas reducciones de éstas como veremos más adelante.
- Relación tensión-deformación lineal en la curva de comportamiento del material.
- Valores medios de los módulos de elasticidad.

La ventaja principal de este tipo de análisis es que se puede aplicar una formulación matricial lineal. Recordamos de los cursos de cálculo de estructuras que una barra en dos dimensiones tiene 6 grados de libertad (g.d.l.<sup>2</sup>). Por tanto, los desplazamientos en los nodos (figura 9.2 izq), agrupados en el vector  $\delta$ , están relacionados con las fuerzas que actúan sobre los nodos (figura 9.2. derecha), vector  $f$ . La relación entre ambos vectores,  $\delta$  y  $f$ , es la matriz de rigidez de la barra  $k$ . Las componentes de  $k$  son  $k_{ij}$ , donde  $k_{ij}$  es el valor de la componente  $i$  del vector de fuerzas  $f$  cuando se impone un valor unidad al gdl  $j$  en el vector  $\delta$ , permaneciendo el resto de los desplazamientos iguales a cero.

<sup>2</sup> Un gdl (grado de libertad) es cada uno de los componentes ortogonales que caracterizan el movimiento de cada nodo de la estructura. En general -salvo restricciones- una barra (que une dos nodos) en el plano tiene 6 gdl y en el espacio 12 gdl.

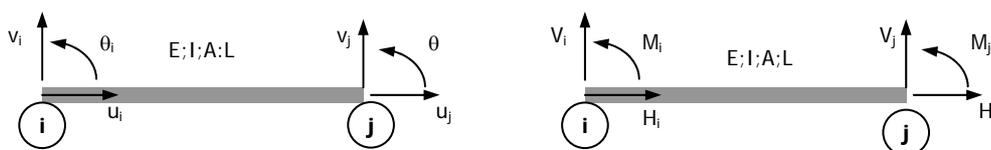


Figura 9.2. Movimientos y esfuerzos en una barra con 6 gdl

En la barra de la figura 9.2 se han considerado 6 gdl y la expresión matricial de relación existente entre  $\mathbf{f}$  y  $\delta$  es  $\mathbf{f}=\mathbf{k}\delta$ , desarrollada a continuación:

$$\begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_j \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{E}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} & 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I & 0 & -\frac{6I}{L} & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} & 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 2I & 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Ensamblando todas las barras de una estructura y realizando los cambios de base necesarios se llega a la expresión típica de cálculo de estructuras

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{D} \quad (9.2)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas exteriores sobre los gdl considerados en la estructura,  $\mathbf{D}$  es el vector desplazamientos de los gdl de la estructura y  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de la estructura.

Puesto que este análisis es lineal, si un vector  $\mathbf{F}$  da lugar a unos desplazamientos  $\mathbf{D}$ , un vector  $\alpha\mathbf{F}$  dará lugar a unos desplazamientos  $\alpha\mathbf{D}$ . En este tipo de análisis el equilibrio se establece sobre la estructura no deformada, siendo posible que la estructura deformada no esté en equilibrio. Consideremos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo

En la figura 9.3 se ha representado una columna de altura  $h$  sometida a un axil  $P$  y a una fuerza horizontal  $V$ . Si aplicamos análisis elástico lineal el momento en el punto A es  $M_A=V \cdot h$ , dado que la carga  $P$  no produce ningún momento en la estructura no deformada. Si la columna se deforma tal y como se indica en la figura (debido a  $V$  y a  $P$ ) se producirá un desplazamiento  $\Delta$  y, como consecuencia de éste, aparecerá un

momento adicional ( $P\Delta$ ) que será necesario considerar. Puesto que en el análisis elástico lineal se considera el equilibrio sobre la estructura no deformada se desprecian los desplazamientos y los esfuerzos adicionales asociados a éstos. A esto se le conoce como hipótesis de pequeños desplazamientos, que equivale a no considerar los efectos  $P\Delta$ , también se dice que no se ha considerado la no linealidad geométrica, ver tabla 9.1.

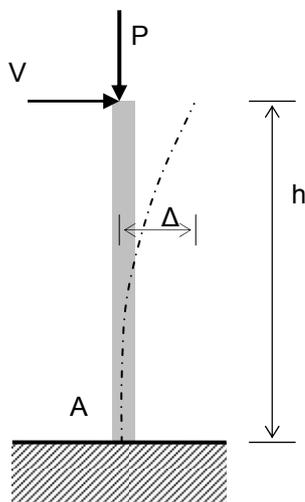


Figura 9.3.

Está bastante extendido y la norma EHE así lo permite realizar un cálculo en primer orden (análisis elástico lineal, EHE artículo 19.2.1) empleando las características de la sección bruta, lo que tiene la ventaja de que no se necesita conocer la armadura de los elementos para realizar el cálculo estructural.

Análisis elástico lineal con redistribución limitada

En algunas ocasiones se permite una redistribución de momentos en vigas. Esto se debe a que la hipótesis de relación lineal tensión-deformación en el material resulta excesiva siendo necesario considerar la plastificación del material. Veamos un ejemplo.

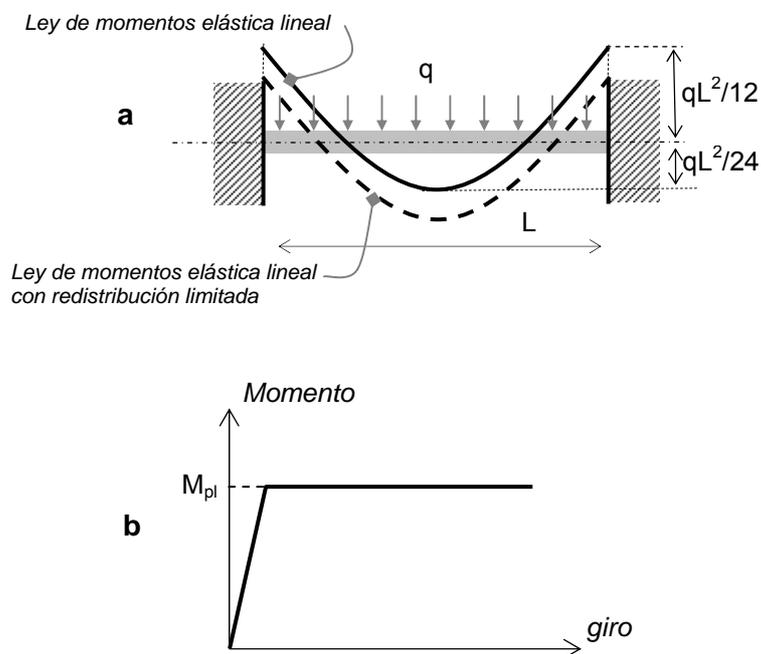


Figura 9.4. Viga biempotrada.

### Ejemplo

La figura 9.4 corresponde a una viga biempotrada de sección transversal constante sometida a una carga uniforme  $q$ . Si se realiza un análisis elástico-lineal el momento en el empotramiento es  $qL^2/12$  mientras que el momento en el centro de vano es de  $qL^2/24$ . Si la sección tiene suficiente capacidad de rotación con momento constante (Figura 9.4.b) se puede permitir la plastificación en los puntos de momento máximo con la consiguiente redistribución de la ley de momentos, tal y como se indica en la figura 9.4a en línea discontinua. Si el momento plástico ( $M_{pl}$  de la figura 9.4b) de la sección transversal de la viga es mayor que  $qL^2/12$  la ley de flectores será la obtenida mediante análisis elástico lineal sin redistribución (línea continua en la figura 9.4a) mientras que en caso contrario –por ejemplo una sección cuyo momento plástico sea  $qL^2/16$ - la viga plastificará en las secciones de apoyo y la ley se desplazará tal y como muestra la línea discontinua en la misma figura.

Análisis plástico

El análisis plástico está basado fundamentalmente en la formación de rótulas<sup>3</sup> o zonas plásticas que permiten el giro manteniendo el momento (relación bilineal momento-giro), o bien estableciendo otro tipo de relaciones (empíricas, poli-lineales, etc), Código Modelo CEB-FIP (1990). Un caso límite es el análisis rígido-plástico en el que la deformación estructural se concentra en las rótulas, como es el caso del análisis de líneas de rotura en placas (Jiménez Montoya (1994)).

Existen distintos tipos de análisis plástico. El más extendido en hormigón es el tipo biela-tirante al que se le ha dedicado el capítulo 5 de este libro.

Análisis no lineal

Se dice que el análisis es no lineal cuando la relación tensión-deformación del material es no lineal, independientemente de que se considere el equilibrio en primer o en segundo orden, Chen y Sohal (1995). Este tipo de análisis puede ser empleado en ELS y en ELU, ver tabla 9.1.

\* \* \*

Además de la clasificación general que aparece en la tabla 9.1 existen diversas hipótesis y simplificaciones que necesitan ser consideradas para delimitar completamente el tipo de análisis estructural.

Deformación de cortante: en la expresión matricial 9.1, los coeficientes  $k_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{k}$  sólo consideran deformaciones axiales y de flexión. Se podría también considerar deformación por cortante (lo que se ha llamado tradicionalmente “viga de Timoshenko”). Añadir el término de deformación de cortante a los coeficientes  $k_{ij}$  de la expresión 9.1 no altera la linealidad del planteamiento, de tal forma que la deformación por cortante se puede considerar también en análisis elástico-lineal. No obstante, en estructuras de hormigón no se suele considerar la deformación de cortante.

Pequeñas deformaciones: tal y como se ha comentado en la tabla 9.1 pequeñas deformaciones equivale a considerar, en flexión, la curvatura como  $d^2y/dx^2$ . En la expresión 9.1 ya se ha considerado la hipótesis de pequeñas deformaciones, puesto que en las regiones B<sup>4</sup> de estructuras de hormigón siempre se adopta esta hipótesis.

Grandes desplazamientos o cálculo en segundo orden (no-linealidad geométrica): Esta hipótesis consiste en plantear el equilibrio sobre la estructura deformada. Adoptando esta hipótesis, en el ejemplo de la figura 9.3 el momento en el punto A es  $M_A = V \cdot h + P \Delta$ . Evidentemente se trata de un problema mucho más complejo puesto que  $\Delta$  no es conocido a priori y el problema ya no es lineal. El apartado siguiente está dedicado al cálculo en segundo orden.

<sup>3</sup> El EC2 admite que una rótula tiene una longitud de 1.2 veces el canto de la sección y propone valores de la rotación admisible para secciones de hormigón.

<sup>4</sup> Región B, de Bernouilli, ya estudiado en el capítulo 5.

**Fluencia:** En la expresión 9.1 el valor de  $E$  corresponde al módulo de deformación longitudinal del hormigón  $E_c$  (ecuación 3.4). Si se consideran los efectos de la fluencia el valor de  $E_c$  variará en función del tiempo y del nivel de carga. En este caso se emplea el módulo efectivo del hormigón, definido como:

$$E_{c,ef}(t, t_0) = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (9.3)$$

donde  $\varphi(t, t_0)$  es el coeficiente de fluencia, ya estudiado en el apartado 3.4.

El efecto de la duración de la carga se puede tener en cuenta de forma simplificada introduciendo el denominador coeficiente efectivo de fluencia ( $\varphi_{ef}$ ). Este coeficiente puede ser empleado para la carga de diseño proporcionaron objeto de obtener la deformación por fluencia correspondiente a la carga cuasi-permanente.

$$\varphi_{ef} = \varphi_{\infty, t_0} \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \quad (9.4)$$

donde:  $\varphi_{\infty, t_0}$  es el coeficiente final de fluencia, según el apartado 3.4  
 $M_{0Eqp}$  es el momento de primer orden obtenido para la combinación de carga cuasi-permanente.  
 $M_{0Ed}$  es el momento de primer orden obtenido para la combinación de diseño

**Variación de la sección transversal:** la sección transversal y sus propiedades mecánicas pueden también cambiar. Esta variación se produce sobre todo debido a los esfuerzos, ya que, la sección transversal y sus propiedades varían en función de la fisuración de la sección. El Eurocódigo 2 y la EHE española permiten el empleo de las características de la sección bruta para análisis elástico lineal (apartado 5.4(2) del EC2). El EC2 también aborda la posibilidad de realizar el cálculo empleando secciones fisuradas (apartado 5.8.7.2(4)). La norma americana ACI-318 especifica que los desplazamientos horizontales se pueden calcular en primer orden empleando las siguientes propiedades en los elementos:

- a) Módulo de elasticidad:  $E_c$
- b) Momentos de inercia
  - En vigas  $I=0.35I_{bruta}$
  - En vigas en T:  $I=2I_{bruta \text{ del alma}}$
  - En columnas  $I=0.7I_{bruta}$
  - En muros:
    - No fisurados  $I=0.70 I_{bruta}$
    - Fisurados  $I=0.35 I_{bruta}$
  - En láminas planas  $I=0.25 I_{bruta}$
- c) Área  $=1.0 A_{bruta}$

Rigidez tensional o tensorrigidez. La influencia del hormigón a tracción en la fase de post-fisuración se realiza mediante modelos de tensorrigidez, tal y como se ha descrito en los capítulos 6 y 7.

### 9.3. ANÁLISIS EN SEGUNDO ORDEN

El análisis en segundo orden tiene especial relevancia cuando los esfuerzos axiales son elevados, como es el caso de los pilares. Un pilar de un edificio o la pila de un puente se diferencian de otros elementos estructurales en que la carga axial es la sollicitación principal. En elementos como vigas, no sometidos a ninguna carga axial, determinar el diagrama de momentos flectores es, en general, un proceso sencillo. Sin embargo en elementos sometidos a cargas axiales este proceso puede resultar más complejo ya que la determinación del momento máximo de segundo orden en una pila esbelta como la de la figura 9.3 requiere conocer cuánto se va a desplazar ésta en horizontal. Una estructura se define como traslacional cuando su desplazamiento horizontal no puede ser despreciado, apareciendo entonces unos efectos adicionales denominados efectos de segundo orden o efectos  $PA^5$ . En el ejemplo de la figura 9.3 el momento en A, obtenido a partir de un análisis elástico lineal (o de primer orden), es  $M_A = V \cdot h$ . En el caso de que se considere el equilibrio en la estructura deformada, si  $\Delta$  es el desplazamiento máximo, el momento en el punto A será  $M_A = V \cdot h + P \cdot \Delta$ .

Según el EC2, los efectos de segundo orden pueden ignorarse cuando éstos constituyan menos del 10% de los correspondientes en primer orden.

Además, según el EC2, en edificios se puede despreciar la influencia de los efectos de segundo orden cuando se cumple:

$$F_{V,Ed} \leq k_1 \frac{n_s}{n_s + 1.6} \frac{\sum E_{cd} I_c}{L^2} \quad (9.5)$$

donde:

$F_{V,Ed}$	es la carga vertical total
$n_s$	es el número de plantas
$L$	es la altura total del edificio por encima del nivel con momentos restringidos
$E_d$	es el valor de diseño del módulo elástico del hormigón
$I_c$	es el segundo momento de área (sección no fisurada) de los elementos que contribuyen a la estabilidad del edificio.

siendo la expresión 9.5 válida siempre que se verifique que:

- la inestabilidad por torsión no sea predominante, o sea: estructura razonablemente simétrica,

<sup>5</sup> Tener en cuenta la no-linealidad geométrica es equivalente a considerar el equilibrio en la estructura deformada.

- las deformaciones globales de cortante sean despreciables
- las rotaciones en base sean despreciables
- la rigidez del sistema de rigidización sea razonablemente constante en altura y
- la carga vertical aportada por cada planta sea aproximadamente constante.

#### Formulación matricial de la no-linealidad geométrica

Para formular matricialmente el cálculo en segundo orden (no-linealidad geométrica) vamos a introducir unas fuerzas denominadas fuerzas de segundo orden<sup>6</sup>. Volvamos al ejemplo de la figura 9.3, representado nuevamente en la figura 9.5. Como se observa en la figura 9.5.derecha junto a la fuerza  $V$  se ha introducido una fuerza  $F_{2,orden}$  de tal forma que operando en primer orden se obtienen los desplazamientos y esfuerzos que se obtendrían en segundo orden<sup>7</sup>:

$$M_{2,orden} = (V + F_{2,orden}) \cdot h = V \cdot h + P \cdot \Delta$$

$$\Rightarrow F_{2,orden} = \frac{P \cdot \Delta}{h} \quad (9.6)$$

$$\text{además } M_{2,orden} = V \cdot h \cdot \left( 1 + \frac{P \cdot \Delta}{V \cdot h} \right)$$

---

<sup>6</sup> Existen otras aproximaciones más exactas para abordar este apartado (Clogh y Penzien 1993 o Cook et al. 1989) pero los autores hemos decidido utilizar ésta por su claridad conceptual.

<sup>7</sup> Tradicionalmente al axil se le ha designado con la letra  $P$ , de ahí que los efectos de segundo orden de naturaleza geométrica se les haya denominado efectos  $P\Delta$ . Las normativas más recientes están utilizando la letra  $N$  para designar a la carga axil. En este volumen emplearemos ambas letras  $N$  o  $P$  indistintamente para designar la carga axil.

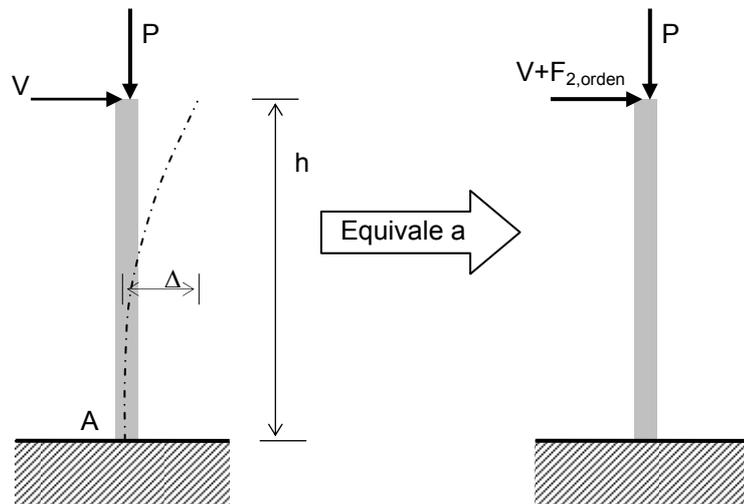


Figura 9.5. Planteamiento del cálculo en segundo orden

Así pues, los principales responsables de los efectos de segundo orden son los axiles. Aunque el desplazamiento de la estructura hará que cortantes y flectores también influyan en los efectos de segundo orden, su influencia será menor que la de los esfuerzos axiles.

Analicemos a continuación la influencia de los esfuerzos axiles sobre una barra perteneciente a una estructura de nudos articulados, figura 9.6. Los desplazamientos de los extremos ( $i$  y  $j$ ), medidos respecto de la posición inicial, en la dirección perpendicular al esfuerzo axial se han denominado  $v_i$  y  $v_j$  en la figura 9.6:

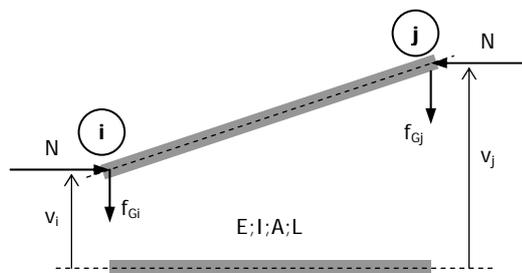


Figura 9.6. Fuerzas de segundo orden

El equilibrio de la barra deformada se logra mediante la introducción de las fuerzas de segundo orden ( $f_g$ ), deducidas de aplicar equilibrio de momentos en los nodos  $i$  y  $j$  –supuestos articulados–:

$$\begin{aligned} f_{Gi} &= \frac{v_i - v_j}{L} N \\ f_{Gj} &= \frac{v_j - v_i}{L} N \end{aligned} \xrightarrow{\text{matricial}} \begin{bmatrix} f_{Gi} \\ f_{Gj} \end{bmatrix} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Es necesario expandir la expresión matricial de las fuerzas de segundo orden para hacerla compatible con la ecuación 9.1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_{Gi} \\ 0 \\ 0 \\ f_{Gj} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{N}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{k_g} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_i \\ 0 \\ 0 \\ v_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

Simbólicamente la ecuación anterior se expresa como  $\mathbf{f}_G = \mathbf{k}_G \delta$ . Esta expresión se puede sumar a la correspondiente al cálculo en primer orden  $\mathbf{f} = \mathbf{k} \delta$  para obtener la siguiente formulación matricial para el cálculo en segundo orden de la barra aislada:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{k} - \mathbf{k}_G] \delta \quad (9.9)$$

En la ecuación 9.9  $\mathbf{k}$  es la matriz de rigidez de la barra y  $\mathbf{k}_g$  se denomina matriz de rigidez geométrica de la barra. Al igual que ocurría con el cálculo en primer orden, se pueden ensamblar las matrices de rigidez y rigidez geométrica de todas las barras, con sus correspondientes cambios de base, obteniéndose la formulación matricial del cálculo en segundo orden:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K} - \mathbf{K}_G] \cdot \mathbf{D} \quad (9.10)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de la estructura,  $\mathbf{K}_G$  es la matriz de rigidez geométrica de la estructura,  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas exteriores sobre los gdl considerados y  $\mathbf{D}$  el vector desplazamientos según esos gdl.

Pandeo global

El planteamiento del problema de la no-linealidad geométrica o cálculo en segundo orden puede enfocarse desde dos puntos de vista. El primero consiste en considerar unos desplazamientos adicionales y emplear la formulación matricial dada por la expresión 9.10. El segundo enfoque consiste en deducir la carga crítica elástica<sup>8</sup> o de pandeo para la cual existan infinitas soluciones del vector  $\mathbf{D}$ , i.e. infinitos desplazamientos.

De la ecuación 9.8 se deduce que  $\mathbf{k}_g$  (y por consiguiente también  $\mathbf{K}_G$ ) depende linealmente de los esfuerzos, o sea que si a un vector  $\mathbf{F}_0$  le corresponde una matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{G0}$ , a un vector  $\kappa\mathbf{F}_0$  le corresponderá  $\kappa\mathbf{K}_{G0}$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0 &= [\mathbf{K} - \mathbf{K}_{G0}] \cdot \mathbf{D} \\ \kappa\mathbf{F}_0 &= [\mathbf{K} - \kappa\mathbf{K}_{G0}] \cdot \mathbf{D}'\end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{D}'$  un vector desplazamientos distinto del vector  $\mathbf{D}$ . Se producirán infinitas soluciones del vector  $\mathbf{D}'$  cuando el problema sea indeterminado. O sea, el problema, pues, consiste en determinar un escalar  $\kappa$  tal que:

$$\det[\mathbf{K} - \kappa\mathbf{K}_{G0}] = 0 \quad (9.11)$$

Esta expresión es conocida como el problema de autovalores de pandeo. A partir de la ecuación 9.11 se obtendrán los valores de vectores de carga  $\kappa\mathbf{F}_0$  que provocan la inestabilidad global de la estructura.

Por definición,  $\kappa\mathbf{F}_0$  es la carga límite que no se puede superar. Aunque el cálculo en segundo orden sí tiene un interés práctico, la determinación de los autovalores (y autovectores asociados) tiene un interés práctico reducido ya que han sido deducidos admitiendo que el material es lineal y elástico mientras que lo normal es que se produzcan plastificaciones antes de alcanzar el pandeo. No obstante, son numerosos los trabajos existentes en relación a la optimización estructural a partir del problema de autovalores de pandeo (Hjelmstad 1991, Hernández-Montes 2004 y Gil-Martín 2006).

Pandeo de barras aisladas

De cursos anteriores se sabe que la máxima carga que una barra biarticulada, como la de la figura 9.7, sometida a una carga de compresión centrada puede soportar es el valor correspondiente a la carga crítica elástica de pandeo o carga de Euler ( $P_E$ ):

$$P_E = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L^2} \quad (9.12)$$

---

<sup>8</sup> Se habla de inestabilidad elástica puesto que se supone que el material no abandona el dominio lineal elástico.

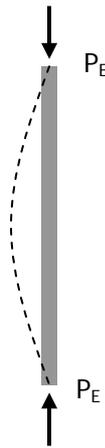


Figura 9.7. Barra aislada biapoyada

### Longitud de pandeo

Se define longitud de pandeo o longitud efectiva  $l_0$  como: “la mayor distancia entre dos puntos de inflexión consecutivos, reales o ficticios, de la deformada de pandeo de la pieza”.

El término longitud de pandeo aparece para extender la expresión de la carga de Euler a una barra con una sustentación cualquiera en sus extremos, en este caso<sup>9</sup>:

$$N_b = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2} \quad (9.13)$$

Siendo  $l_0 = \alpha L$ , donde  $\alpha$  se denomina factor de longitud de pandeo. En el caso de una barra biarticulada como la de la figura 9.7 tenemos que  $\alpha = 1$ . Para otros casos simples el valor de  $\alpha$  es el indicado en la figura 9.8:

---

<sup>9</sup> El subíndice B viene de la palabra inglesa “buckling” (pandeo)

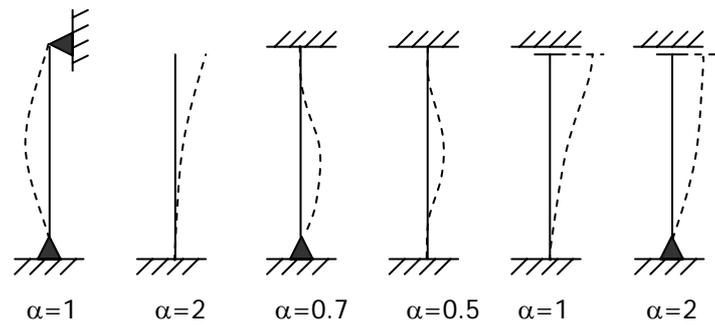


Figura 9.8. Factores de longitud de pandeo

Los casos arriba representados son casos muy simples, se puede decir que son casos extremos. Consideremos una estructura que no experimente traslaciones horizontales, una columna intermedia estará unida en su parte superior e inferior a vigas u a otras columnas. Ninguno de los extremos de la columna en cuestión será ni una articulación (caso 1 de la figura 9.8) ni un empotramiento perfecto (caso 4) estando, por tanto, el factor de longitud de pandeo la columna comprendido entre los valores  $0.5$  y  $1$ .

En edificios donde se desprecia la traslación horizontal (intraslacionales) es una práctica común considerar  $\alpha=1$ , lo que estará del lado de la seguridad y evita el cálculo de  $\alpha$ , que puede ser un tanto tedioso e impreciso, como vamos a ver en el siguiente subapartado. Esta aproximación es adoptada por la norma ACI-318.

La expresión de  $P_E$  de la ecuación 9.13 se puede formular en términos de tensión:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9.14)$$

donde  $\lambda$  es la esbeltez mecánica, ( $\lambda=l_0/i_{min}$ ), siendo  $i_{min}$  el radio de giro ( $i_{min}=(I_{min}/A)^{1/2}$ ),  $I_{min}$  el momento principal de inercia mínimo y  $A$  el área de la sección considerada.

Si representamos la ecuación anterior (hipérbola de Euler) colocando la tensión en el eje de ordenadas y la esbeltez mecánica en el eje de abcisas, se obtiene la denominada hipérbola de Euler (figura 9.9).

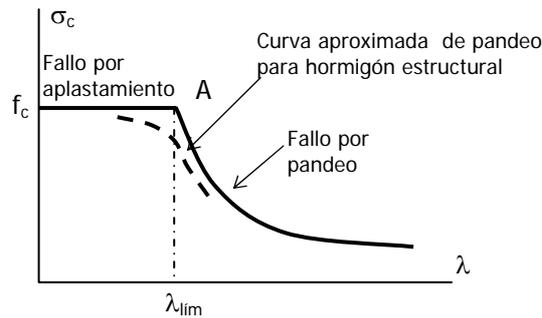


Figura 9.9. Curva de pandeo

El punto *A* de la figura 9.9 es el punto de intersección de la línea horizontal (límite de resistencia a compresión del hormigón,  $\sigma_c=f_c$ ) con la hipérbola de Euler. El punto *A* es el punto teórico que fija un valor de  $\lambda$  denominado  $\lambda_{lim}$ , si  $\lambda < \lambda_{lim}$  el fallo de la columna se producirá por agotamiento a resistencia mientras que si  $\lambda > \lambda_{lim}$  el fallo se producirá por pandeo –estado límite de inestabilidad–.

La EHE fija el valor de  $\lambda_{lim}=35$  y aconseja no superar el límite de  $\lambda=200$ .

#### Longitud de pandeo de una barra perteneciente a una estructura

Para estudiar la longitud de pandeo de una barra perteneciente a una estructura es necesario extraerla y plantear las ecuaciones de equilibrio de forma aislada con objeto de determinar el valor de la carga crítica de pandeo y a partir de la ecuación 9.13 determinar el valor de la longitud de pandeo. Como antes hemos visto, teóricamente los extremos de la barra pueden ser: articulados, empotrados, libres y permitir o no la traslación, figura 9.8. En la práctica estos extremos tendrán una rigidez<sup>10</sup> determinada y estarán en una situación intermedia. La figura 9.10 modeliza una barra con unas condiciones genéricas de apoyo, donde  $k_1$  es la rigidez al giro en el apoyo inferior,  $k_2$  es la rigidez al giro en el apoyo superior y  $k_3$  es la rigidez al desplazamiento transversal relativo entre ambos extremos.

La deducción de la longitud de pandeo de una barra perteneciente a una estructura tradicionalmente se ha llevado a cabo para los dos casos siguientes:

1. Considerando  $k_3=0$ , o bien
2. Considerando  $k_3=\infty$

<sup>10</sup> Rigidez es la relación entre esfuerzo y desplazamiento, o sea: momento/giro o fuerza/desplazamiento.

Cuando  $k_3 = \infty$  se dice que la estructura es intraslacional y su intraslacionalidad se garantiza mediante elementos externos a la estructura inicial: rigidizadores centrados (o cruces de San Andrés), rigidizados excéntricos, muros pantalla, estructuras contiguas, etc.

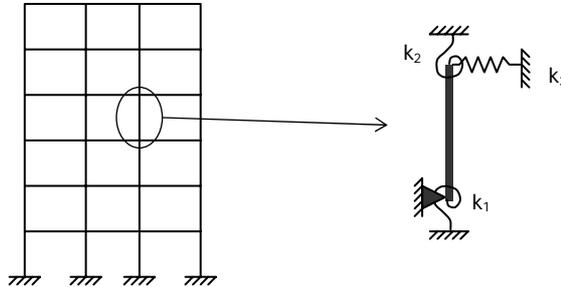


Figura 9.10. Estudio de una barra perteneciente a una estructura

Cuando  $k_3 = 0$  la estructura se clasifica como traslacional, y debe de ser la propia estructura la que garantice que los desplazamientos horizontales son suficientemente pequeños. Cada norma fija unos límites, la EHE propone  $L/250$  como flecha máxima genérica. Para estructuras traslacionales el factor de longitud de pandeo será siempre mayor que 1 ( $\alpha > 1$  (caso 5 de la figura 9.8)).

Un estudio teórico sobre este tema se puede ver en (Hernández-Montes 1996).

Así pues, el valor de  $\alpha$  para una barra perteneciente a una estructura vendrá dado en función de la rigidez de cada una de las barras que confluyen en los extremos del elemento considerado y en función de que la estructura se considere traslacional o intraslacional (o sea, suponiendo  $k_3 = 0$  ó  $k_3 = \infty$ ).

Como simplificación la norma EHE propone las siguientes expresiones aproximadas del coeficiente  $\alpha$  para pilares pertenecientes a estructuras porticadas.

Para pórticos intraslacionales:

$$\alpha = \frac{0.64 + 1.4(\Psi_A + \Psi_B) + 3\Psi_A \Psi_B}{1.28 + 2(\Psi_A + \Psi_B) + 3\Psi_A \Psi_B} \quad (9.15)$$

Para pórticos traslacionales:

$$\alpha = \sqrt{\frac{7.5 + 4(\Psi_A + \Psi_B) + 1.6\Psi_A \Psi_B}{7.5 + (\Psi_A + \Psi_B)}} \quad (9.16)$$

donde  $\Psi$  es la relación entre las rigideces  $\Sigma(EI/L)$  de los soportes y las rigideces  $\Sigma(EI/L)$  de las vigas, en cada extremo A y B del pilar considerado. Como valor de  $I$  la norma EHE toma la inercia bruta de la sección.

En general se considera que una estructura es traslacional si los esfuerzos en los extremos de las columnas obtenidos mediante cálculo en segundo orden varían en más de un 5% respecto de los obtenidos en primer orden.

Además de la inestabilidad de columnas, en hormigón puede darse el fenómeno del pandeo lateral (EC2 -artículo 5.9-), aunque este fenómeno es más común en vigas metálicas.

#### 9.4. MÉTODOS APROXIMADOS DE CÁLCULO EN SEGUNDO ORDEN

El Eurocódigo 2 plantea un método general y dos métodos simplificados para cálculo en segundo orden.

El método general está basado en el cálculo matricial no lineal (expresión 9.10). Se pueden emplear curvas tensión-deformación no-lineales de los materiales, se tendrán en cuenta los efectos de la fluencia (ecuaciones 9.3 ó 9.4) y el efecto de la tensorrigidez, (tratado en los capítulos 6 y 7).

Además del método general el Eurocódigo 2 plantea dos métodos simplificados: el primero es un método basado en la rigidez nominal (también conocido como método de los momentos mayorados) y el segundo método está basado en la curvatura nominal (también conocido como método de la columna modelo). La figura 9.11 sintetiza ambos métodos. Para tener en cuenta la no-linealidad geométrica, el método de los momentos mayorados mayorará los momentos de primer orden mientras que el método de la columna modelo introduce una excentricidad en relación al axil.

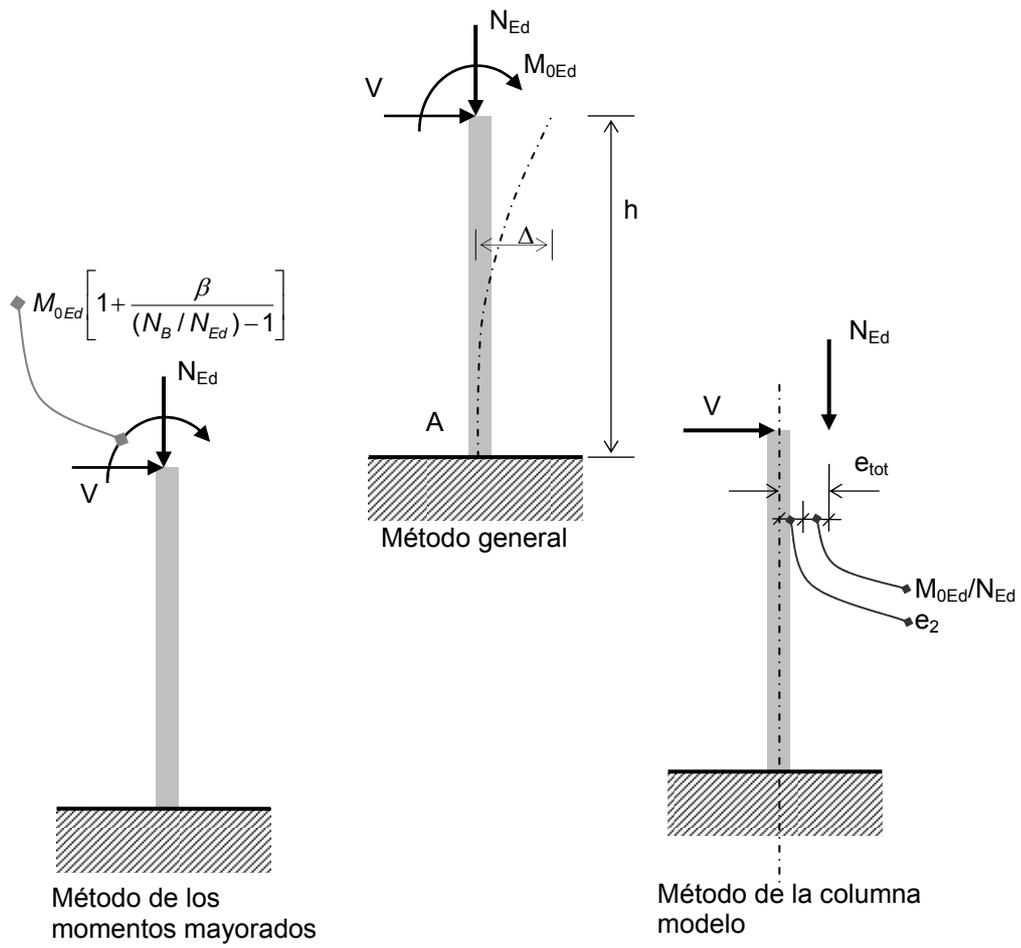


Figura 9.11. Métodos de análisis en segundo orden propuestos por el Eurocódigo 2

9.4.1 Método basado en la rigidez nominal (o Método de los Momentos Mayorados MMM)

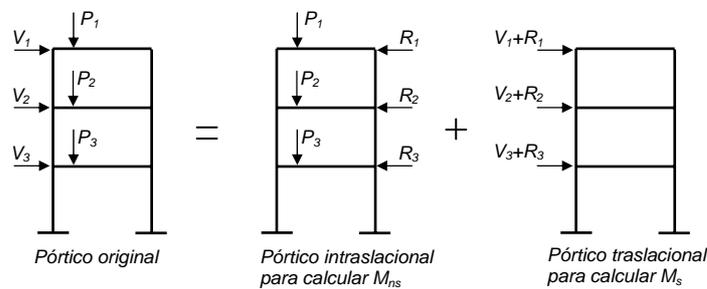
En este método los momentos de diseño se obtienen mayorando los momentos calculados en primer orden<sup>11</sup>:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{(N_b / N_{Ed}) - 1} \right] \quad (9.17)$$

donde  $M_{0Ed}$  es el momento de primer orden  
 $\beta$  factor que depende de la distribución de las leyes de momentos, tanto de primer como de segundo orden, ver EC2 5.8.7.3. Una aproximación razonable es considerar  $\beta=1$   
 $N_{Ed}$  valor de diseño de la carga axial  
 $N_b$  es la carga crítica elástica de pandeo (ecuación 9.13), basada en la rigidez nominal.

En este tipo de método se emplean valores nominales de la rigidez en todos los elementos de la estructura, teniendo en cuenta los efectos de la fisuración, la no-

<sup>11</sup> El MMM que propone el EC2 difiere del planteado por la ACI-318. Mientras que el EC2 mayor los momentos de primer orden, la ACI-318 requiere dividir la estructura en la parte traslacional y la parte no traslacional asociando a éstas momentos traslacionales  $M_s$  y momentos no traslacionales  $M_{ns}$ , con coeficientes de mayoración distintos.



Aunque el MMM del EC2 es más fácil de emplear, el planteamiento de la ACI-318 es más consecuente dado que en la simplificación adoptada para el cálculo de longitudes de pandeo de elementos pertenecientes a estructuras porticadas éstas se han clasificado como traslacionales e intraslacionales.

linealidad del material y la fluencia. Además se tendrá en cuenta la interacción suelo-estructura cuando ésta sea relevante.

El valor de la rigidez nominal de elementos comprimidos se puede estimar a partir de la expresión:

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s \quad (9.18)$$

donde  $E_{cd}$  es el valor de diseño del módulo de elasticidad del hormigón, que se puede tomar como  $E_{cm}/1.2$

$I_c$  es el momento de inercia de la sección de hormigón

$E_s$  es el valor de diseño del módulo de elasticidad de la armadura

$I_s$  es el momento de inercia de la armadura respecto del cdg de la sección de hormigón

$K_c$  factor que tiene en cuenta los efectos de la fisuración, fluencia, etc.

$K_s$  factor que tiene en cuenta la contribución de la armadura

Una simplificación posible, siempre que  $A_s/A_c \geq 0.01$  es considerar  $K_s=0$  y  $K_c=0.3/(1+0.5\varphi_{ef})$ .

El valor de la rigidez nominal de los elementos adyacentes a los elementos comprimidos puede estimarse, de manera simplificada, considerando la inercia fisurada de las secciones y el módulo efectivo del hormigón (expresión 9.3). Si no se recurre a esta simplificación sería necesario tener en cuenta la fisuración parcial de los elementos y el efecto de la tensorsrigidez (EC2 (7.4.3)).

#### 9.4.2 Método basado en la curvatura nominal (o Método de la columna modelo)

El método de la columna modelo es el adoptado por la EHE para el estado límite de inestabilidad o pandeo. Como ya se ha comentado, para esbelteces mecánicas ( $\lambda=l_0/i_{min}$ ) menores de 35 no es necesario verificar el estado límite de inestabilidad.

En compresión simple (axil sin momento flector), la EHE obliga a que el soporte deba resistir un momento flector mínimo, provocado por una excentricidad mínima asociada a la incertidumbre del punto de aplicación del axil. Esta excentricidad mínima será mayor a 2 cm y mayor a  $h/20$ , siendo  $h$  la altura del soporte. La excentricidad estará medida en la dirección principal más desfavorable.

Como ya se vió, el hormigón a compresión ( $f_{ck} \leq 55 \text{ MPa}$ ) agota para una deformación del 2‰. Para este nivel de deformación la tensión del acero será de  $\sigma_s = f_{yd} = 0.002 \cdot E_s = 400 \text{ MPa}$ . Por este motivo, la EHE obliga a que la tensión máxima de cálculo  $f_{yd}$  en los aceros de pilares sea de  $400 \text{ MPa}$ <sup>12</sup>.

<sup>12</sup> Debido a esta premisa los aceros del tipo B-500 son menos rentables en pilares, ya que se aprovecha menos su capacidad mecánica.

Los métodos aproximados basados en la curvatura nominal, tanto el propuesto por el EC2 como el que propone la EHE, calculan una excentricidad total,  $e_{tot}$ . Multiplicando esta excentricidad total por el axil se obtiene un momento de diseño  $M_{Ed}$  que incluye: el momento de primer orden (con el efecto de las imperfecciones) y el efecto de segundo orden (figura 9.11). Éste método está basado en la longitud efectiva (o de pandeo) y en una estimación de la curvatura máxima. El EC2 establece:

$$e_{tot} = e_0 + e_2$$

multiplicando por la carga axil  $N_{Ed}$ :

$$M_{Ed} = N_{Ed} e_{tot} = N_{Ed} e_0 + N_{Ed} e_2 \Rightarrow M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} e_2 \quad (9.19)$$

donde:

$e_0$	es la excentricidad de primer orden incluidas las imperfecciones
$e_2$	la excentricidad debida a los efectos de segundo orden, como veremos a continuación $e_2 = (1/r)l_0^2/c$
$N_{Ed}$	es el valor del esfuerzo axil de diseño
$M_{Ed}$	es el momento de diseño teniendo en cuenta los efectos de segundo orden
$M_{0Ed}$	es el momento de diseño de primer orden incluidas las imperfecciones ( $M_{0Ed} = N_{Ed} e_0$ )
$1/r$	es la curvatura
$l_0$	es la longitud efectiva o longitud de pandeo del elemento
$c$	factor que depende de la distribución de la curvatura

#### Excentricidad de primer orden

Cuando la excentricidad en ambos extremos del pilar es la misma, entonces  $e_0 = M_{0Ed}/N_{Ed}$ . (Figura 9.12, a)

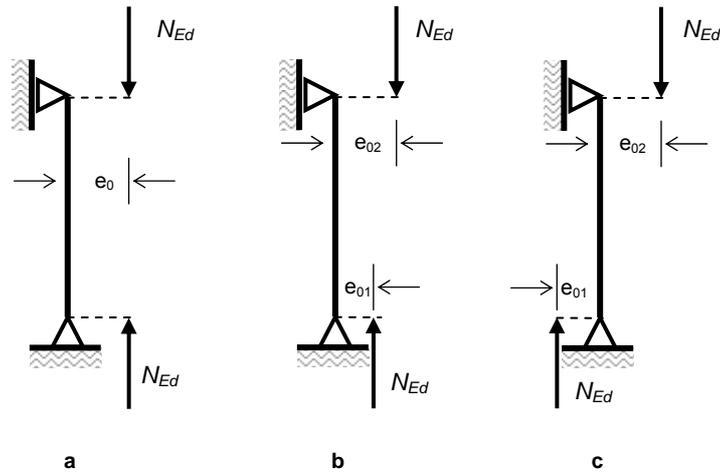


Figura 9.12. Excentricidad de primer orden

Cuando las excentricidades de primer orden son distintas en ambos extremos (figura 9.12 b y c) el EC2 propone emplear un único momento de primer orden,  $M_{0e}$ , cuyo valor es:

$$M_{0e} = 0.6M_{02} + 0.4M_{01} \geq 0.4M_{02} \quad (9.20)$$

Los momentos  $M_{02}$  y  $M_{01}$  tienen el mismo signo si introducen el mismo tipo de tensión (tracción o compresión) en la misma cara del pilar, en caso contrario los signos serán distintos. Además se verificará que  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ , con:  $M_{02} = N_{Ed} e_{02}$  y  $M_{01} = N_{Ed} e_{01}$  donde  $e_{01}$  y  $e_{02}$  representan las excentricidades de primer orden en los dos extremos,  $|e_{02}| \geq |e_{01}|$  (figura 9.12 b y c).

Excentricidad debida a los efectos de segundo orden

Una columna modelo es una columna empotrada en su base y libre en cabeza.

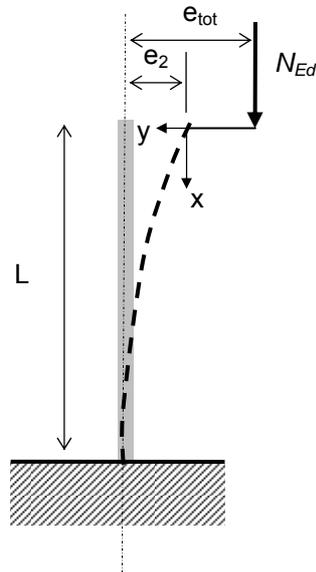


Figura 9.13. Método de la columna modelo

Si se admite que la deformada tiene una forma senoidal, colocando los ejes  $x$  e  $y$  tal y como se indica en la figura 9.13, la ley de la deformada de la pieza será:

$$y(x) = y_{m\acute{a}x} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l_0} \right)$$

donde se cumple que para  $x=0 \Rightarrow y=0$  y que para  $x=l_0/2 \Rightarrow y=y_{m\acute{a}x}$ , siendo  $l_0$  la longitud de pandeo ( $l_0=2L$ ). Derivando dos veces se tiene:

$$y''(x) = \phi(x) = \frac{1}{r(x)} = -y_{m\acute{a}x} \frac{\pi^2}{l_0^2} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l_0} \right) = -\frac{\pi^2}{l_0^2} y(x)$$

Para  $x=l_0/2=L$ , se tiene que  $y(L)=e_2$ , siendo en este punto ( $x=L$ ) máximos el momento y la curvatura. Aproximando  $\pi^2 \approx 10$  se obtiene:

$$e_2 = -\frac{l_0^2}{10} \phi_{m\acute{a}x}$$

El EC2 propone el siguiente valor de  $e_2$ :

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} \quad (9.21)$$

donde:  $l_0$  es la longitud efectiva (o longitud de pandeo)  
 $1/r$  es la curvatura  
 $c$  es un factor que depende de la distribución de la curvatura. Para secciones constantes  $c=10$  ( $\approx \pi^2$ ), siendo 8 un límite inferior.

Para elementos con sección transversal constante y simétrica (incluida la armadura) se puede emplear:

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0}$$

$$K_r = \frac{nu - n}{nu - n_{bal}} \leq 1 \quad (9.22)$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef} \geq 1$$

donde  $K_r$  es un factor de corrección dependiente de la carga axil  
 $K_\varphi$  es un factor que tiene en cuenta la fluencia  
 $1/r_0 = \varepsilon_{yd}/0.45d$   
 $\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s$   
 $d$  es el canto útil  
 $n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$ , fuerza axil relativa  
 $N_{Ed}$  es la fuerza axil de diseño  
 $n_u = 1 + \omega$   
 $n_{bal}$  es el valor de  $n$  en el punto de máximo momento (generalmente se produce para  $x_{lim}$  (ver capítulo 6, figura 6.17)). Se pueden tomar  $n_{bal}=0.4$ .  
 $\omega = A_s f_{yd}/(A_c f_{cd})$   
 $A_s$  es el área total de la armadura  
 $A_c$  es el área de hormigón de la sección transversal  
 $\varphi_{ef}$  es el coeficiente de fluencia efectivo, dado por la expresión 9.4  
 $\beta = 0.35 + f_{ck}/200 - \lambda/150$   
 $\lambda$  es la esbeltez mecánica

Si la armadura no está concentrada en lados opuestos, sino que parte de ella está colocada paralela al plano de flexión,  $d$  se define como

$$d = \frac{h}{2} + i_s$$

donde  $i_s$  es el radio de giro de toda la armadura

**Ejemplo**

Consideremos la pila de un puente de sección anular representada en la figura 9.14, fabricada con hormigón C35. Las cargas de diseño a las que está sometida consisten en una carga axial centrada de 4500 kN, una carga horizontal en cabeza de 275 kN y una carga en fuste de 9.0 kN/m. Se pide: calcular el momento máximo en segundo orden aplicando los dos métodos propuestos por el EC2 (MMM y el método de la columna modelo). La armadura estará formada por acero del tipo B-400-S y el momento cuasipermanente supone el 20% del momento máximo. Se supone que la carga actúa a los 28 días y que la humedad relativa es del 70%.

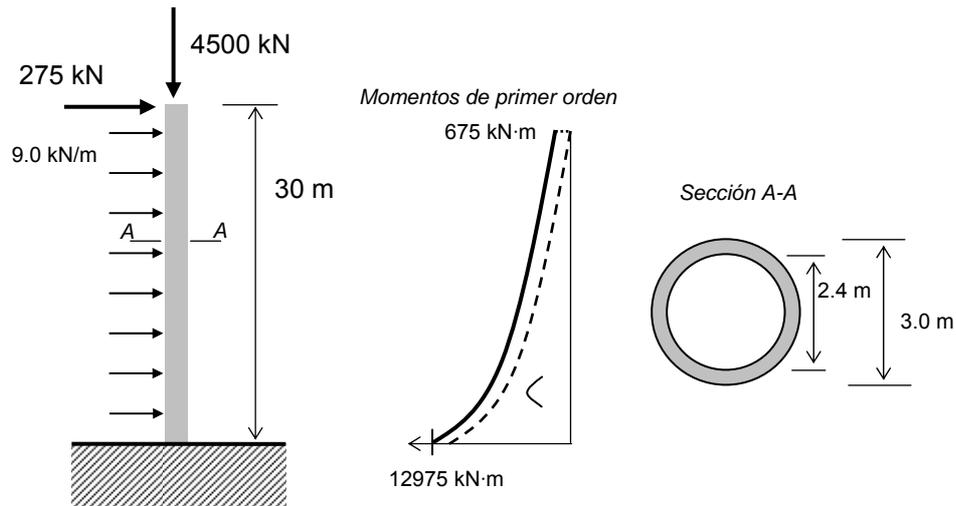


Figura 9.14. Pilar anular para puente

El factor de longitud de pandeo en este caso es de 2, y la longitud de pandeo es  $l_0 = \alpha l = 60 \text{ m}$ . Las características mecánicas de la sección bruta y la esbeltez mecánica de la pila son:

$$A_c = \pi \cdot (r_{ext}^2 - r_{int}^2) = 2.54 \text{ m}^2$$

$$I_c = \frac{\pi}{4} \cdot (r_{ext}^4 - r_{int}^4) = 2.347 \text{ m}^4$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_c} = \frac{l_0}{\sqrt{I_c/A_c}} = 62.42$$

La imperfección geométrica propuesta por el EC2 se puede tomar como excentricidad inicial:

$$e_i = \frac{l_0}{400} = 150 \text{ mm}$$

Con esta excentricidad inicial y para las cargas indicadas en el enunciado se puede calcular la ley de momentos de primer orden, representada en la figura 9.14, cuyo valor máximo, en el empotramiento, toma el valor  $M_{0Ed}=12975 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .

#### Método de los Momentos Mayorados (MMM)

Aplicando la expresión 9.17 se obtiene el momento de diseño:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{(N_b / N_{Ed}) - 1} \right]$$

El coeficiente  $\beta$  puede tomar de manera aproximada igual a 1.0 o adoptar el valor propuesto por el EC2 ( $\beta = \pi^2/c_0=1.03$ , donde  $c_0$  depende de la distribución de la ley de momentos de primer orden y para distribución parabólica  $c_0=9.6$ ).  $N_b$  es la carga de pandeo basada en la rigidez nominal. Se ha supuesto la expresión simplificada de la rigidez nominal  $EI$  ( $K_s=0$  y  $K_c=0.3/(1+0.5\varphi_{ef})$ ) aplicable a cuantías geométricas superiores a 0.01 ( $\rho=A_s/A_c \geq 0.01$ ). Para el cálculo del coeficiente efectivo de fluencia ( $\varphi_{ef}$ ) se ha empleado la expresión 9.4 y el Anejo B del EC2 (esta formulación también se ha recogido en el capítulo 3 de este texto).

$$N_b = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{60^2} = 45685 \text{ kN}$$

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s = 0.25 E_{cd} I_c = 1.67 \cdot 10^7 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5\varphi_{ef}} = 0.25 \quad K_s = 0$$

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} = 1.78 \cdot 0.20 = 0.36$$

$$E_{cd} = \frac{1}{1.2} E_{cm} = \frac{1}{1.2} 22000 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} = \frac{1}{1.2} 34 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 28.4 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Conocida la carga de pandeo  $N_b$  se puede calcular el momento total de diseño en el empotramiento (basados en cálculo aproximado de segundo orden según el MMM):

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{(N_b / N_{Ed}) - 1} \right] = 12975 \left[ 1 + \frac{1.03}{45685/4500 - 1} \right] = 14435 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Método basado en la curvatura nominal o Método de la columna modelo

Como se ha comentado en la parte teórica, este método consiste en añadir una excentricidad para tener en cuenta los efectos de segundo orden:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed}e_2 = 12975 + 4500 \cdot e_2 = 15334 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} = 0.001456 \frac{60^2}{10} = 0.524$$

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} = 1.0 \cdot 1.04 \cdot 0.0014 = 0.001456$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef} = 1 + 0.11 \cdot 0.36 = 1.04 \quad K_r = 1.0$$

$$\beta = 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0.35 + \frac{35}{200} - \frac{62.42}{150} = 0.11$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45d} = \frac{f_{yd}/E_s}{0.45d} = \frac{400/1.15/200000}{0.45 \cdot 2.7} = 0.0014$$

$$c = 10$$

\* \* \*

Los métodos de cálculo aproximado de segundo orden propuestos por el EC2 exigen el cálculo de la longitud de pandeo. Una ventaja muy interesante de la ACI-318 es que no requiere el cálculo de las longitudes de pandeo de tal forma que

$$M_{2orden} = M_{1orden, no\ translacional} + \frac{1}{1 - \frac{\sum N_{Ed} \cdot \Delta}{V \cdot h}} \cdot M_{1orden, translacional}$$

donde  $V$  es el cortante en el pilar o el cortante total por planta,  $\Delta$  es el desplazamiento relativo del pilar o de la planta y  $h$  es la altura del pilar.

Si se tiene en cuenta que para valores pequeños de  $N\Delta/Vh$  se verifica que<sup>13</sup>  $1/(1-N\Delta/Vh) \approx 1 + N\Delta/Vh$ , la expresión anterior se puede reescribir como:

$$M_{2orden} = M_{1orden, no\ translacional} + \left(1 + \frac{N \cdot \Delta}{V \cdot h}\right) \cdot M_{1orden, translacional}$$

<sup>13</sup> Si  $a$  es pequeño frente a la unidad:  $1/(1-a) = (1+a)/((1+a)(1-a)) = (1+a)/(1-a^2) \approx 1+a$

Como podemos ver el segundo sumando de la parte derecha de la igualdad coincide con la última igualdad de la expresión 9.6. Los trabajos de Lai (1983) demostraron que se puede aproximar  $N_b/N_{Ed}$  por  $N_{Ed}\Delta/Vh$  siempre que el factor que mayor los momentos traslacionales sea menor de 1.5 :

$$\frac{\sum N_b}{\sum N_{Ed}} \approx \frac{\sum N_{Ed}\Delta}{V \cdot h} \leq 1.5$$

Para el ejemplo anterior nos queda:

$$M_{2orden} = \left(1 + \frac{N \cdot \Delta}{V \cdot h}\right) M_{0Ed} = \left(1 + \frac{4500 \cdot 0.2}{545 \cdot 30}\right) 12975 = 13689 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\Delta = \frac{275 \cdot h^3}{3EI} + \frac{9.0 \cdot h^4}{8EI} = 0.20 \text{ m}$$

$$V = 9.0 \cdot 30 + 275 = 545 \text{ kN}$$

La ventaja de la norma ACI-318-05 es que emplea exclusivamente datos obtenidos del análisis de primer orden y además no es necesario el cálculo de las longitudes de pandeo de los elementos.

9.5. FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA

Diseñar una pila a flexión compuesta esviada es complicado dado que situar la posición de la fibra neutra en la sección transversal es una tarea difícil, como ya vimos en el capítulo 6, figura 9.15. Además en hormigón se dimensiona generalmente en rotura, lo que contribuye a aumentar la dificultad.

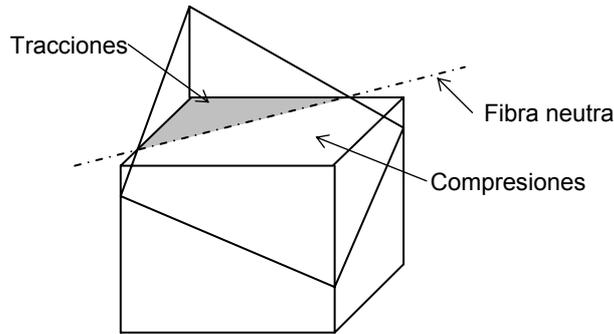


Figura 9.15. Tensiones producidas en una sección transversal debido a una flexión compuesta esviada

Como vimos en el capítulo 6, en flexión compuesta esviada para posicionar la fibra neutra son necesarias dos coordenadas (en lugar de una como ocurría en flexión simple). Estas dos coordenadas son  $\xi$  y  $\varphi$  como se indica en la sección transversal de la figura 9.16. Es interesante señalar que la inclinación de la fibra neutra no tiene porqué coincidir con la inclinación del momento flector ( $M_d$ ).

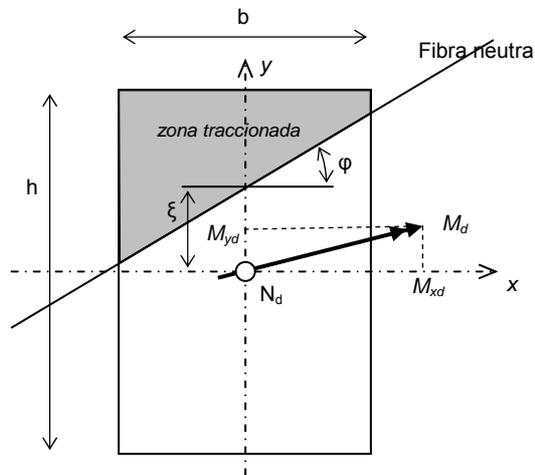


Figura 9.16. Posicionamiento de la fibra neutra en flexión compuesta esviada

Todo el tema de dimensionamiento en flexión esviada se vio en el apartado 6.8. Una práctica común en el caso de secciones con geometría no habitual sometidas a flexión compuesta esviada, consiste en sustituir la sección inicial por otra inscrita en la misma y simétrica<sup>14</sup>.

En cuanto al cálculo en segundo orden se refiere, si éste se ha realizado mediante el método general, no será necesario realizar ninguna comprobación adicional. En el caso de haber empleado los métodos simplificados será necesario tener en cuenta algunas consideraciones adicionales.

La imperfección inicial sólo se tendrá en cuenta en la dirección más desfavorable, no siendo necesario realizar ninguna comprobación adicional si se verifican las dos condiciones siguientes (según EC2):

1.  $\frac{\lambda_y}{\lambda_z} \leq 2 \quad y \quad \frac{\lambda_z}{\lambda_y} \leq 2$
2. Las excentricidades relativas  $e_y/h$  y  $e_z/b$  satisfacen:

$$\frac{e_y/h_{eq}}{e_z/b_{eq}} \leq 0.2 \quad o \quad \frac{e_z/b_{eq}}{e_y/h_{eq}} \leq 0.2$$

Donde:

$b, h$  son el ancho y el canto de la sección

$b_{eq} = i_y \sqrt{12}$  y  $h_{eq} = i_z \sqrt{12}$  son el ancho y el canto de una sección rectangular equivalente

$\lambda_y, \lambda_z$  son la esbeltez geométrica  $l_o/i$  respecto a los ejes  $y$  y  $z$  respectivamente

$i_y, i_z$  son los radios de giro respecto a los ejes  $y$  y  $z$  respectivamente

$e_z = M_{Edy}/N_{Ed}$ ; excentricidad según el eje  $z$  (ver figura 9.17)

$e_y = M_{Edz}/N_{Ed}$ ; excentricidad según el eje  $y$  (ver figura 9.17)

$M_{Edy}$  es el momento de diseño en el eje  $y$ , incluido segundo orden

$M_{Edz}$  es el momento de diseño en el eje  $z$ , incluido segundo orden

$N_{Ed}$  es la fuerza axial de diseño en la combinación de carga considerada

---

<sup>14</sup> De esta forma se queda del lado de la seguridad.

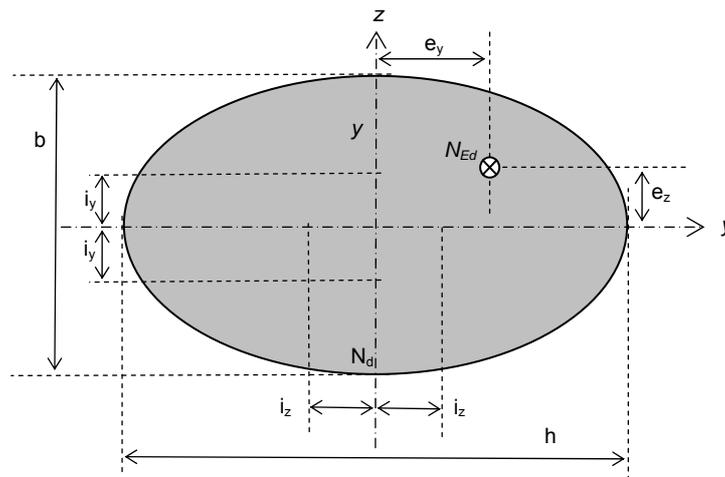


Figura 9.17. Definición de excentricidades  $e_y$  y  $e_z$ .

En el caso de que las dos condiciones anteriores no se cumplieran, se puede emplear la siguiente relación de interpolación, siempre que no se tenga ninguna expresión más precisa:

$$\left( \frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1.0$$

donde:

$M_{Edz/y}$  es el momento de diseño en sus respectivos ejes, incluyendo efectos de segundo orden.

$M_{Rdz/y}$  es el momento último de la sección en su respectivo eje  
 $a$  es un coeficiente de interpolación (la norma EHE toma  $a=1$ ) y el EC2 toma  $a=2$  para secciones circulares o elípticas. Para secciones rectangulares el coeficiente  $a$  se obtiene de la siguiente tabla, en la que se puede interpolar linealmente:

$N_{Ed}/N_{Rd}$	0.1	0.7	1.0
$a$	1.0	1.5	2.0

$N_{Ed}$  es el valor del axil de diseño  
 $N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$

## 9.6. PILARES ZUNCHADOS

En el capítulo 3 se vio que una de las propiedades del hormigón es el efecto del confinamiento (ver anejo del capítulo 3). Este efecto permite aumentar la resistencia a compresión del hormigón de una pieza de hormigón armado.

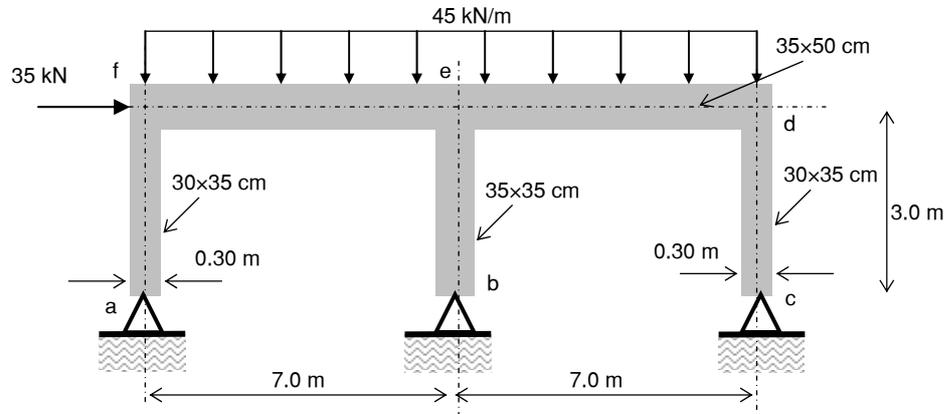
Para confinar el hormigón se dispone de una hélice o una serie de cercos muy próximos de tal forma que coarten las deformaciones transversales del hormigón que se producen por el efecto Poisson. Al coartar la deformación aparecen tensiones radiales de confinamiento.

En este tipo de piezas la compresión máxima permitida es mayor que en las piezas en las que el hormigón no esté confinado. Por este motivo en las piezas de hormigón confinado las deformaciones obtenidas en la dirección de la compresión serán mayores.

Como regla general, los pilares zunchados no se deben usar salvo en piezas muy cortas, sin excentricidades y sin posibilidad de pandeo. En determinadas zonas sísmicas se recomienda zunchar los pilares, dado que proporciona un grado de confianza adicional y representa una seguridad frente al sismo vertical. No obstante en éste último caso el efecto del zuncho no sería tenido en cuenta en el cálculo para acciones distintas del sismo vertical.

**Ejercicios propuestos**

1. El pórtico de la figura inferior soporta una carga mayorada de  $45 \text{ kN/m}$  y una



carga de viento colocada en el nudo  $f$  de  $35 \text{ kN}$ . Aplicando la EHE, determinar el axil y el momento flector para los que debe de ser dimensionada la columna  $a-f$ , considerando sólo la flexión en el plano. Para este ejercicio es necesario emplear un programa de cálculo estructural.

2. Aplicar el método de los momentos mayorados del EC2 y el de la ACI-318-05 para resolver el problema anterior. Hacer el cálculo aplicando el método general (utilizar para ello un programa) y comparar los resultados.

**Referencias**

*Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-02)*. American Concrete Institute. Michigan. (Enero 2005).

Chen W.F., Sohal I. (1995). *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag. Nueva York.

*Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.

Clough R.W. y Penzien J. (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.

Cook R.D., Malkus D.S. y Plesha M.e. (1989). *Concepts and Applications of Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York.

Gil-Martín, L.M. Hernández-Montes, E. y Aschheim M. (2006). Optimal design of planar frames based on stability criterion using first-order analysis. *Engineering Structures*, 28 (13), 1780-1786.

Hernández-Montes E., Gil-Martín L.M.(1996). Análisis comparativo del cálculo de las longitudes de pandeo según el Eurocódigo 3 y la NBE-EA-95. *Hormigón y Acero*. N°201. Septiembre 1996. Páginas 13-26.

Hernández-Montes, E., Gil-Martín, L.M. and Aschheim M. (2004). Optimal Design of Planar Frames Based on approximate second-order analysis. *Engineering Optimization*, 36 (3), 281-290.

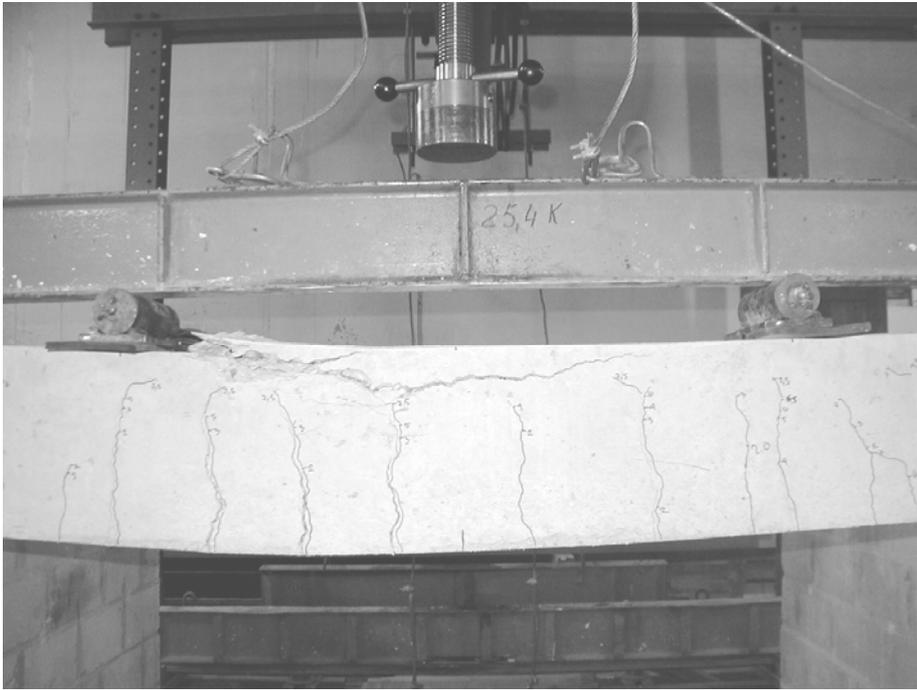
Hjelmstad, K.D. y Pezeshk, S. (1991). Optimal design of frames to resist buckling under multiple load cases. *J.Struct.Engrg., ASCE*, 117(3), 914-935.

Jiménez Montoya P., García Meseguer A. y Morán Cabré F. (1994). *Hormigón Armado*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

Lai, S.M. y MacGregor J.G (1983). Geometric Nonlinearities in Unbraced Multistory Frames. *ASCE Structural Engineering*. V.109. N°11. Nov. 1993. 2528-2545.

Priestley, M.J.N., Park, R., and Lu, F., "Moment Curvature Relationships for Prestressed Concrete in Constant Moment Zones". *Magazine of Concrete Research*, Vol.23, No. 75-76, June-Sept. 1971, pp. 69-78.





Viga flectada y fisurada. Instituto Eduardo Torroja. CSIC.

---

## CAPÍTULO X

---

### ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO



Ensayo de hormigón autocompactante. ETSICCP UGR.

**Cortesía de IECA. [www.ieca.es](http://www.ieca.es)**

#### 10.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se han tratado los ELU (estados límite últimos), que son aquellos que llevan a la ruina total o parcial de la estructura. Los Estados Límite de Servicio (ELS) son los que originan la pérdida de funcionalidad, comodidad, durabilidad o aspecto de la estructura. Los estados límites de servicio comprenden:

- **Deformaciones**, que pueden resultar excesivas a corto o a largo plazo.

- **Fisuración**, producida por grietas que, además de resultar estéticamente inadmisibles, pueden provocar la corrosión prematura de la armadura por dejarla a la intemperie.
- **Vibraciones**, que pueden causar incomodidad a los usuarios o afectar al funcionamiento de máquinas.

Dentro del estado límite de deformaciones se contempla la posibilidad de que flechas excesivas puedan provocar la aparición de zonas de acumulación de agua en puentes y tejados, lo que supondría por un lado un peligro para el tráfico y por otro la introducción de cargas adicionales no consideradas inicialmente en el cálculo. En edificios, las flechas pueden provocar el agrietamiento de tabiquerías, azulejos y desenganche de puertas y ventanas. Por todo lo anteriormente expuesto es necesario realizar un control de las deformaciones.

En la actualidad, el empleo de materiales con valores de tensión de rotura muy altos, tanto en el caso de hormigones como en el de acero, hace que el estudio de los Estados Límite de Servicio sea fundamental. Los nuevos materiales son susceptibles de presentar grandes deformaciones o fisuraciones sin llegar a la rotura. Para entender esto consideremos el caso concreto del acero: los aceros de alto límite elástico tienen una tensión de rotura muy alta pero su módulo de deformación longitudinal es el mismo que el del acero de bajo límite elástico, por lo que las deformaciones que pueden experimentar antes de presentar rotura son mayores.

## 10.2. LIMITACIONES A LA DEFORMACIÓN

La forma de controlar este ELS es imponer unos límites a la deformación del elemento estructural.

La EHE, en los comentarios al artículo 50.1, define dos tipos de flechas:

- *flecha total a tiempo infinito*: aquella debida a la totalidad de las cargas desde que comienzan a actuar, y
- *flecha activa respecto a un elemento dañable*: flecha que se produce en un elemento a partir del instante en que se construye dicho elemento.

En general se puede tomar como límite  $L/250$  para la flecha total, donde  $L$  es la longitud del elemento que se comprueba, y  $L/400$  para la flecha activa. Además, para evitar flechas en tabiquería, la flecha activa debe de ser menor de  $1\text{ cm}$ .

## 10.3. DEFORMACIÓN. MÉTODO GENERAL

Generalmente, el estudio de las deformaciones se lleva a cabo a partir de la teoría elástica lineal, o sea, se considera que la tensión es proporcional a la deformación tanto en el

acero como en el hormigón. La parte traccionada en el hormigón estará fisurada si sobrepasa el momento de fisuración y no lo estará en caso contrario. Debido a que para los ELS los coeficientes de seguridad son menores que para los ELU, es lógico emplear teoría elástica lineal en ELS mientras que se empleará teoría de rotura en ELU.

Un elemento estructural fabricado en hormigón pretensado está sometido a dos tipos de tensiones: unas provocadas por las cargas exteriores y otras por las acciones de pretensado. Si el mismo elemento se fabrica en hormigón armado, las únicas tensiones a las que estará sometido serán las correspondientes a las cargas exteriores. De hecho, la existencia de pretensado hace que el estudio de deformaciones sea uno de los puntos en los que existe mayor diferencia entre el hormigón armado y el hormigón pretensado.

Debido a la excentricidad del pretensado (figura 10.1) las vigas pretensadas presentan una deformación en contraflecha cuando la carga exterior es pequeña. Esta flecha inicial variará dependiendo del valor de la sollicitación exterior y del tiempo. Cuando la carga exterior sea suficientemente grande, la flecha será hacia abajo.

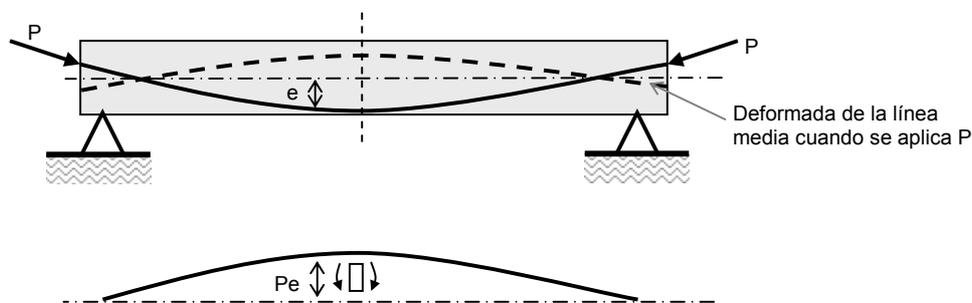


Figura 10.1. Tendón de pretensado y diagrama de momentos flectores del pretensado

En el diseño y dimensionamiento de elementos de hormigón es necesario calcular las flechas finales para comprobar que éstas no exceden los límites admisibles. El procedimiento más general para el cálculo de flechas es a partir de un análisis estructural en segundo orden plástico mediante procedimientos paso a paso en el tiempo. Esto se lleva a cabo integrando los diagramas momento curvatura a lo largo de la pieza. Conocida la ley de momentos flectores es fácil obtener la ley de curvaturas e integrando esta obtener las flechas en el elemento, en la figura 10.2 se ha esquematizado todo el proceso. Si se denomina  $\phi_0$  a la curvatura producida por el pretensado, en el diagrama  $M-\phi$  de la figura 10.2 el momento  $M$  corresponde al momento exterior, supuesto aplicado el pretensado.

El gran inconveniente del método general es que el módulo de deformación longitudinal del hormigón  $E_{cm}$  varía con el tiempo y que el momento de inercia de la sección  $I$  varía con la deformación. Por esto la forma más usual de proceder es determinar  $E_{cm}$  e  $I$  y emplearlos en los diagramas  $M-\phi$ , dado que  $\phi=M/E_{cm}\cdot I$ . Conocido el diagrama  $M-\phi^1$  para una sección determinada es inmediato pasar de la ley de momentos flectores a la ley de curvaturas.

Siguiendo el proceso indicado en la figura 10.2, el cambio de ángulo entre dos puntos de la viga se obtiene integrando la curvatura:

$$\phi = \frac{d\theta}{dx} \longrightarrow \theta_C^D = \int_{x_C}^{x_D} \phi \, dx \quad (10.1)$$

En el caso de la figura 10.2, donde la carga es uniforme en toda la viga, la flecha máxima ( $\delta_{m\acute{a}x}$ ) se produce en el centro de luz:  $CL$ . El cálculo de  $\delta_{m\acute{a}x}$  se puede obtener como la distancia del punto  $B$  a la tangente trazada desde el  $CL$  de la deformada. Este procedimiento es el mismo que el seguido en el planteamiento del segundo teorema de Mohr (Ortiz Berrocal, 1991).

$$\delta_{m\acute{a}x} = \int_{x_{CL}}^{x_B} \phi(x_B - x) \, dx \quad (10.2)$$

---

<sup>1</sup> Como se vio en el capítulo 5, los diagramas  $M-\phi$  pueden ser definidos a corto o a largo plazo.

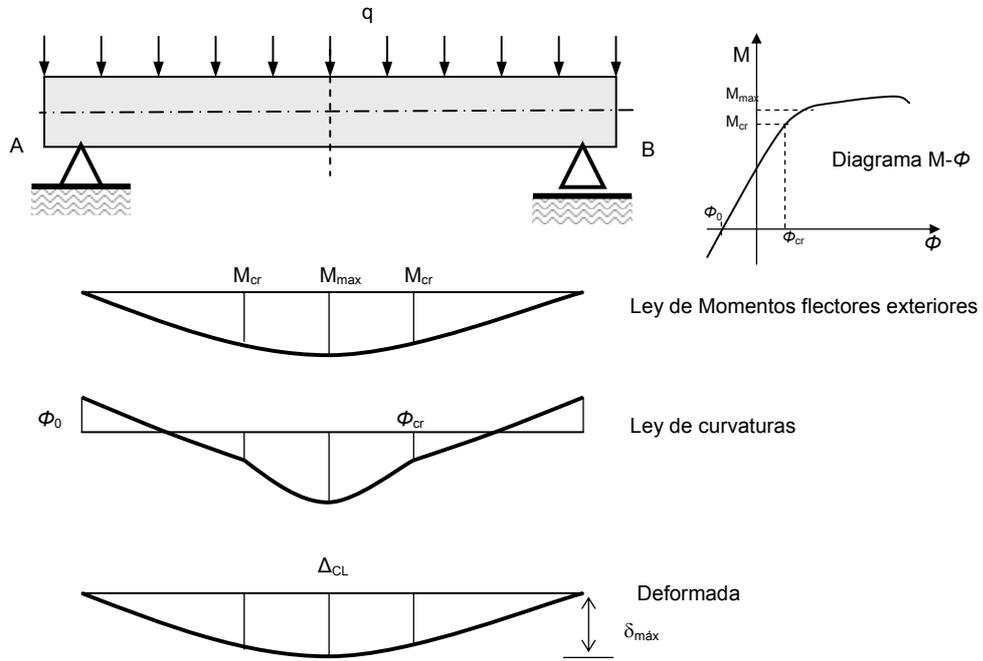


Figura 10.2. Método general de cálculo de deformaciones

Para pequeñas deformaciones  $\theta \approx \tan \theta = dy/dx$  y, por tanto, integrando dos veces la curvatura se obtiene el desplazamiento relativo entre dos puntos.

### Deformaciones a corto plazo en prefisuración

En la situación de prefisuración el método general se puede aplicar directamente, sin tener que realizar mayores simplificaciones. En prefisuración el comportamiento de los materiales está más próximo a la teoría elástica lineal y la relación entre la curvatura y el momento es lineal. Veamos con un ejemplo cómo tratar las deformaciones a corto plazo en situación de prefisuración.

**Ejemplo**

Consideremos la viga biapoyada de la figura 10.3. Se van a determinar las deformaciones en el centro de luz en las siguientes situaciones:

- En bancada, cuando se sueltan los cables de pretensado. La fuerza de pretensado tiene un valor inicial de  $P=6800 \text{ kN}$ .
- Bajo una carga cuasipermanente de  $31 \text{ kN/m}$ . La fuerza de pretensado tiene un valor de  $4500 \text{ kN}$ .

El peso propio de la viga es de  $15.0 \text{ kN/m}$ .

La ley de momentos flectores correspondiente a la carga uniformemente distribuida  $q$  es:

$$M(x) = \frac{q}{2}(L \cdot x - x^2)$$

En bancada actúan el peso propio y la fuerza de pretensado de  $6800 \text{ kN}$ . En esta situación las leyes de momentos flectores, en  $\text{kN}\cdot\text{m}$ , son las siguientes:

$$M_{pp}(x) = \frac{15}{2}(24 \cdot x - x^2)$$

$$M_p(x) = \begin{cases} 1700 \cdot \frac{x}{8} & \text{para } 0 < x \leq 8 \\ 1700 & \text{para } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

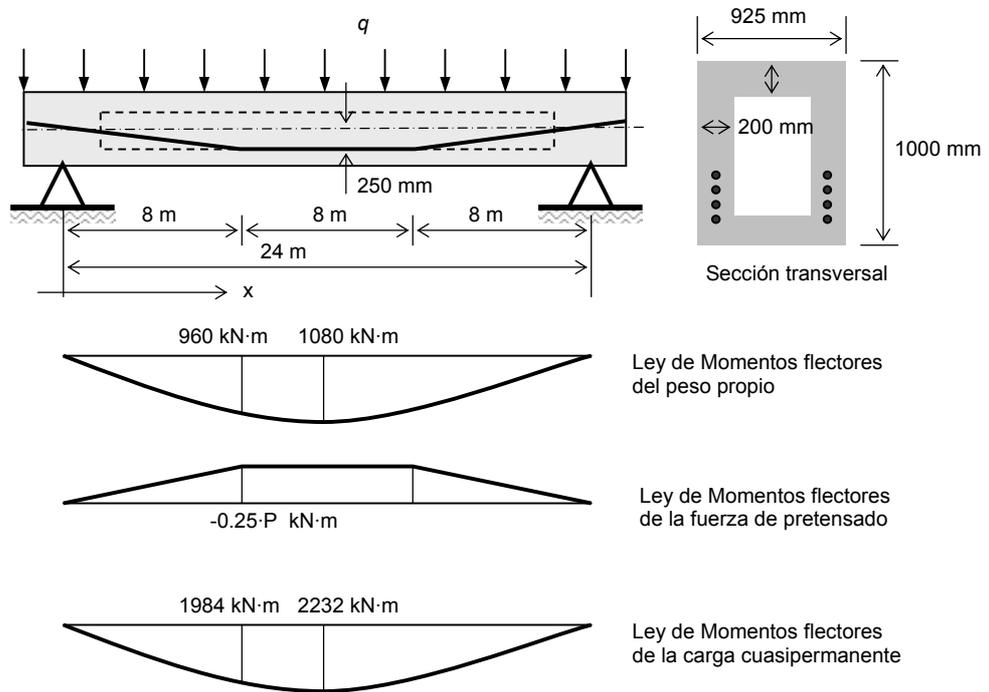


Figura 10.3. Viga pretensada

En todo el tramo la relación entre la curvatura y el momento es lineal:  $\Phi = M/E_{cm} \cdot I$ . Tomamos  $E_{ci} = 28 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ;  $I = 0.0676 \text{ m}^4$ ;  $A = 0.61 \text{ m}^2$ . Aplicando la ecuación 10.2 tenemos:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^8 \left[ \frac{15}{2} (24x - x^2) - 1700 \frac{x}{8} \right] x \, dx + \frac{1}{EI} \int_8^{12} \left[ \frac{15}{2} (24x - x^2) - 1700 \right] x \, dx = -0.02085 \text{ m}$$

Bajo carga cuasipermanente, las ecuaciones correspondientes a las leyes de momentos flectores de la carga y de la fuerza de pretensado, en  $kN \cdot m$ , son las siguientes:

$$M_{qp}(x) = \frac{31}{2}(24 \cdot x - x^2)$$

$$M_p(x) = \begin{cases} 1125 \cdot \frac{x}{8} & \text{para } 0 < x \leq 8 \\ 1125 & \text{para } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

Aplicando la ecuación 10.2, se obtiene que la deformación consiste en una flecha hacia abajo de valor  $\delta=0.0343$  m. Este valor de la flecha supone  $1/700$  de luz, cumpliendo todas las limitaciones que establece la EHE en relación a flechas.

Si se hubiese calculado la flecha a partir de la formulación correspondiente a una viga simplemente apoyada, se habría obtenido:

$$\delta = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} = 0.071 \text{ m}$$

que supone  $1/339$  de la luz, valor que no cumple la limitación de flecha activa de la EHE.

#### Deformaciones a largo plazo en prefisuración

A largo plazo los fenómenos de fluencia y relajación hacen variar los valores de la deformada.

Como ya vimos, los efectos de la fluencia se pueden considerar a partir del módulo de deformación longitudinal efectivo,  $E_{c,eff}$ :

$$E_{c,eff} = \frac{E_c}{1 + \varphi}$$

donde  $E_c$  es el módulo de deformación longitudinal instantáneo para la edad considerada, y  $\varphi$  es el coeficiente de fluencia.

Además de la fluencia también actúa la retracción. Una práctica habitual en hormigón pretensado para tener en cuenta la retracción es de aumentar en un  $20\%$  el término de la flecha debida a la fluencia.

**Deformaciones a largo plazo en fisuración**

Una vez que la sección ha fisurado las propiedades mecánicas cambian -momento de inercia, área, etc.- y la sección pierde rigidez.

La deformación se calcula integrando dos veces la ecuación de la elástica:

$$\phi = \frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Para integrar esta ecuación es necesario establecer el valor del radio de curvatura. En la parte no fisurada de la viga el radio de curvatura corresponde al de la sección no fisurada. Sin embargo, en la zona fisurada el valor del radio de curvatura no corresponde al de la sección fisurada, dado que dentro de la zona fisurada existen secciones no fisuradas (zona entre grietas en la figura 10.10). Por este motivo el radio de curvatura en la zona fisurada es un valor medio entre el correspondiente a la sección fisurada y al de la sección no fisurada. El EC2 proporciona una expresión de interpolación para el cálculo del radio de curvatura medio en la zona fisurada del elemento (ecuación 10.3).

$$\frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right) + \zeta \cdot \left(\frac{1}{r_2}\right) \quad (10.3)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios de curvatura de las secciones no fisurada y fisurada, respectivamente. El factor  $\zeta$  indica la proporción de sección fisurada, teniendo en cuenta las propiedades adherentes del acero y el efecto de la duración de las cargas, siendo su valor:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (10.4)$$

donde  $\beta_1$  vale 0.5 para barras lisas y 1 para barras de alta adherencia;  $\beta_2$  vale 1 para cargas de corta duración y 0.5 para cargas de larga duración o cíclicas;  $\sigma_{sr}$  es la tensión del acero en la sección fisurada para el momento crítico de fisuración y  $\sigma_s$  es la tensión del acero para la carga cuasipermanente.

**Ejemplo**

Sea la viga biapoyada de  $10\text{ m}$  de luz de la figura 10.4, fabricada con hormigón HP-35 y acero Y-1870-S7. La fuerza de pretensado -incluidas las pérdidas- es de  $200\text{ kN}$  y la carga cuasipermanente ( $q_{qp}$ ) tiene un valor de  $40\text{ kN/m}$  -incluido el peso propio-. Las características mecánicas de la sección bruta son las siguientes:  $A_c=5.00\times 10^5\text{ mm}^2$ ,  $I_c=4.167\times 10^{10}\text{ mm}^4$ ,  $W_c=8.333\times 10^7\text{ mm}^3$ ,  $A_p=200\text{ mm}^2$  y  $A_s=982\text{ mm}^2$ . El coeficiente de fluencia toma el valor de 2.2. Se pide: determinar la deformación a largo plazo.

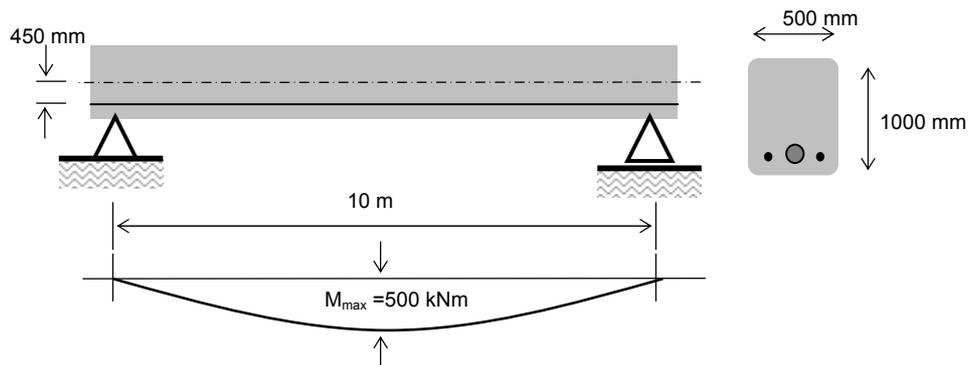


Figura 10.4. Viga biapoyada de 10 m de luz

El diagrama de momentos flectores correspondiente a la carga cuasipermanente, figura 10.4, responde a la siguiente expresión - en  $kN\cdot m$  - :

$$M_{qp}(x) = 200 \cdot x - 40 \frac{x^2}{2}$$

A nivel sección, las deformaciones son las representadas en la figura 10.5. En esta figura  $x$  es la profundidad de la fibra neutra,  $\varepsilon_c$  es la deformación en la fibra superior debido a la flexión,  $\varepsilon_{pe}$  es la deformación en el tendón de pretensado debido a la fuerza de pretensado y  $\varepsilon_{pb}$  es la deformación en el tendón de pretensado debido a la flexión.

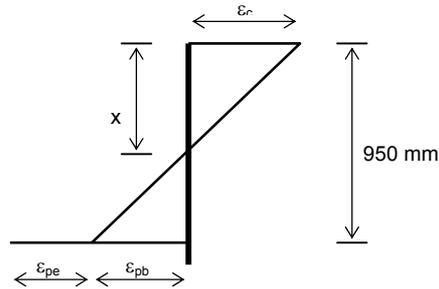


Figura 10.5. Deformación a nivel sección

Antes de abordar el problema es necesario calcular los siguientes datos iniciales:

$$\sigma_{pe} = \frac{200000}{200} = 1000 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{pe} = \frac{1000}{200000} = 0.005$$

$$f_{ctm} = 0.30 \sqrt[3]{f_{ck,j}^2} = 3.21 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{ci}}{1 + \varphi} = \frac{8500 \sqrt[3]{35 + 8}}{1 + 2.2} = 9306 \text{ N/mm}^2$$

Como ya vimos, el momento de fisuración,  $M_{fis}$ , es aquel que produce una tracción máxima igual a la resistencia del hormigón a tracción ( $f_{ct,m}$ ). Así pues,  $M_{fis}$  se puede calcular igualando la tensión en la fibra más traccionada a  $f_{ct,m}$ .

$$-3.21 = \frac{200 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^5} + \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 450}{8.33 \cdot 10^7} - \frac{M_{fis} \cdot 10^6}{8.33 \cdot 10^7} \rightarrow M_{fis} = 390.71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Se comprueba que el momento máximo de flexión ( $500 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ) es superior al momento de fisuración. Del diagrama de momentos de la figura 10.4 se deduce que el momento de fisuración se alcanza en los valores  $x=2.66\text{m}$  y  $x=7.34\text{m}$ . Para  $x$  comprendida entre  $2.66$  y  $7.34$  el momento flector de la carga cuasipermanente es superior a  $M_{fis}$ . Por tanto, para valores de  $x$ , menores de  $2.66\text{m}$  y mayores de  $7.34\text{m}$  la sección no está fisurada. Para los valores intermedios, existirán secciones fisuradas y secciones no fisuradas y para el cálculo del radio de curvatura en esta zona influirá tanto la parte fisurada como no fisurada

(ecuación 10.3). En la ecuación 10.3 intervienen los radios de curvatura de la sección fisurada y no fisurada, así como el nivel de tensión en el acero.

Para determinar el radio de curvatura de la sección fisurada es necesario conocer la deformación a nivel sección en varios puntos y para ello hay que resolver las ecuaciones de equilibrio de axiles y de momentos. Estas dos ecuaciones junto con la ecuación de compatibilidad de deformaciones proporcionan un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, resoluble numéricamente. Las incógnitas son  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_{pb}$  y  $x$ , para valores dados de  $M_{qp}$ :

$$\Sigma N = N_c + N_s = 0 \Rightarrow -E_{c,eff} \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x}{2} \cdot 500 + 200 \cdot E_p \cdot (0.005 + \varepsilon_{pb}) + 982 \cdot E_s \cdot \varepsilon_{pb} = 0$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow E_{c,eff} \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x}{2} \cdot 500 \cdot (950 - \frac{x}{3}) - M_{qp} = 0$$

$$\text{Compatibilidad} \rightarrow \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{pb}}{950 - x}$$

Posteriormente se procede a seleccionar varios puntos de la viga, cada uno de ellos con un  $M_{qp}$  asociado, en los que obtener el radio de curvatura e integrando la curvatura hallar la deformada. Con objeto de calcular el radio de curvatura medio en cada uno de estos puntos se ha confeccionado la tabla 10.1. La fila de abscisas y la de  $M_{qp}$  son datos, las filas  $x$ ,  $\varepsilon_{pb}$  y  $\varepsilon_c$  se obtienen del sistema de ecuaciones anterior, que será necesario plantear para cada una de las secciones consideradas. El valor de  $\zeta$  se obtiene de la ecuación 10.4. Para calcular el radio de curvatura  $r_1$ , basta con tener en cuenta que:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M_{qp} + M_P}{E_{c,eff} \cdot I}$$

siendo  $M_P$  el momento de la fuerza de pretensado.

El radio de curvatura de la sección fisurada ( $r_2$ ), se obtiene geoméricamente analizando la sección deformada, tal y como se puede observar en la figura 10.6.

Desarrollada la tabla 10.1 se obtienen valores de  $r_m$  para cada sección, a partir de los cuales se puede integrar la ecuación diferencial de la deformada  $1/r_m = d^2y/dx^2$ . Como sólo interesan los valores de la deformada en las secciones transversales elegidas, el método más apropiado para resolver la ecuación diferencial es el método de diferencias finitas cuyo planteamiento teórico es el siguiente:

$$y''(x_i) \approx \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}}{\frac{h_i + h_{i+1}}{2}} = y_i'' \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Tabla 10.1. Valores y resultados en varios puntos de la viga

	ZONA NO FISURADA		ZONA FISURADA					ZONA NO FISURADA	
Abcisas (m)	0.00	1.33	2.66	3.83	5.00	6.17	7.34	8.67	10.00
M <sub>qp</sub> (kN·m)	0.0	230.6	390.5	472.6	500	472.6	390.5	230.6	0.0
x (m)	-	407	326	312	309	312	326	407	-
ε <sub>pb</sub> (×10 <sup>-3</sup> )	-	0.40	1.17	1.57	1.71	1.57	1.17	0.40	-
ε <sub>c</sub> (×10 <sup>-3</sup> )	-	0.30	0.61	0.77	0.82	0.77	0.61	0.30	-
σ	-	80	234	314	342	314	234	80	-
ζ	-	0	0	0.44	0.53	0.44	0	0	-
1/r <sub>1</sub> (1/mm×10 <sup>-7</sup> )	-	0.80	3.98	6.80	7.73	6.80	3.98	0.80	-
1/r <sub>2</sub> (1/mm×10 <sup>-7</sup> )	-	-	18.71	24.68	26.54	24.68	18.71	-	-
1/r <sub>m</sub> (1/mm×10 <sup>-7</sup> )	-	0.80	3.98	14.67	17.70	14.67	3.98	0.80	-

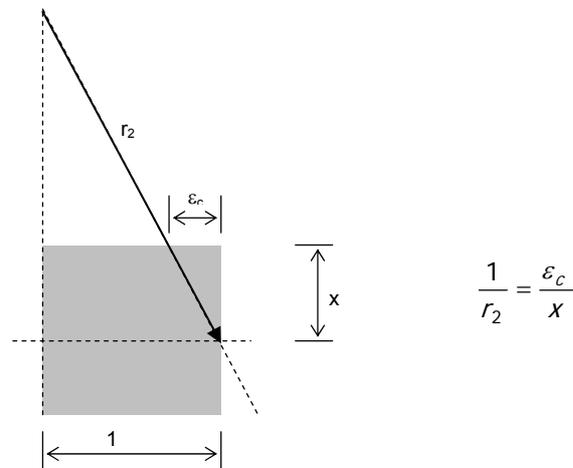


Figura 10.6. Deformación a nivel sección, radio de curvatura de la sección fisurada

Este método conduce a un sistema de 7 ecuaciones donde son conocidos los valores de  $y''_i$  y los valores de  $y_0=0$  y de  $y_8=0$ . Al final se obtiene un sistema lineal de 7 ecuaciones con 7 incógnitas que, en este caso y debido a la simetría del problema, se puede transformar en un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas -bien condicionado-. Los resultados se indican en la tabla 10.2.

Tabla 10.2. Tabla de resultados

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$ (m)	0.00	1.33	2.66	3.83	5.00	6.17	7.34	8.67	10.00
$h_i$ (m)	-	1.33	1.33	1.17	1.17	1.17	1.17	1.33	1.33
$y_i$ (mm)	0	4	9	12	13	12	9	4	0

Lo que supone una flecha máxima de  $L/769$ , cumpliéndose las limitaciones impuestas por la EHE.

#### 10.4. MÉTODO SIMPLIFICADO DE CÁLCULO DE DEFORMACIONES DE LA EHE

La EHE en el artículo 50.2.2 propone un método simplificado aplicable a vigas y a losas de hormigón armado en flexión simple. El método simplificado establece que no será necesaria la comprobación de las flechas cuando la relación canto/luz útil del elemento estudiado sea igual o inferior a los valores de la tabla 10.3, que corresponden a situaciones normales de uso en edificación y para elementos armados con acero B-500.

Tabla 10.3. Relaciones  $L/d$  en elementos estructurales de hormigón armado sometidos a flexión simple

Sistema estructural	Elementos fuertemente armados ( $\rho=A_s/b_0d=0.012$ )	Elementos débilmente armados ( $\rho=A_s/b_0d=0.004$ )
Viga simplemente apoyada. Losa uni o bidireccional simplemente apoyada	14	20
Viga continua <sup>1</sup> en un extremo. Losa unidireccional continua <sup>1,2</sup> en un solo lado	18	24
Viga continua <sup>1</sup> en ambos extremos. Losa unidireccional continua <sup>1,2</sup>	20	30
Recuadros exteriores y de esquina en losa sobre apoyos aislados <sup>3</sup>	16	22
Recuadros interiores en losa sobre apoyos aislados <sup>3</sup>	17	25
Voladizo	6	9

1. Un extremo se considera continuo si el momento correspondiente es igual o superior al 85% del momento de empotramiento perfecto

2. En losas unidireccionales, las esbelteces de la tabla 10.3 se refieren a la luz menor
3. En losas sobre apoyos aislados (pilares) las esbelteces de la tabla 10.3 se refieren siempre a la luz mayor

Por otro lado el método simplificado de la EHE propone que en el caso de que fuera necesario el cálculo de la flecha, ésta se considerará compuesta por la suma de una flecha instantánea y de una flecha diferida, esta última debida a la fluencia y retracción bajo cargas permanentes.

### Cálculo de la flecha instantánea

Para el cálculo de las flechas instantáneas en elementos de sección constante se propone el empleo del momento de inercia equivalente ( $I_e$ ), que consiste en una interpolación entre los momentos de inercia de las secciones fisuradas y no fisuradas en función del momento flector máximo y del momento nominal de fisuración:

$$I_e = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 I_b + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] I_f \leq I_b \quad (10.5)$$

donde:

- $M_a$  Momento flector máximo aplicado a la sección hasta el instante en que se evalúa la flecha.
- $M_f$  Momento nominal de fisuración de la sección, obtenido como:  $M_f = f_{ct,fl} W_b$ .
- $f_{ct,fl}$  Resistencia a flexotracción del hormigón, que puede suponerse igual a  $0.37 f_{ck,j}^{2/3}$ , para  $f_{ct,fl}$  y  $f_{ck,j}$  en  $N/mm^2$ .
- $W_b$  Módulo resistente de la sección bruta respecto a la fibra extrema en tracción.
- $I_b$  Momento de inercia de la sección bruta.
- $I_f$  Momento de inercia de la sección fisurada en flexión simple, que se obtiene despreciando la zona de hormigón en tracción y homogeneizando las áreas de las armaduras activas adherentes y pasivas multiplicándolas por el coeficiente de equivalencia.

La flecha máxima de cada elemento puede obtenerse aplicando las teorías de Resistencia de Materiales o de Análisis de Estructuras, adoptando como módulo de deformación longitudinal del hormigón el definido por la EHE (ecuaciones 3.6 y 3.7) y como momento de inercia -constante para toda la pieza- el valor equivalente correspondiente a la sección de referencia, que se define como:

- a) En elementos simplemente apoyados o tramos continuos: *la sección central*.

b) En elementos en voladizo: *la sección de arranque.*

### Cálculo de la flecha diferida

Las flechas adicionales diferidas, asociadas a cargas de larga duración, son las producidas por las deformaciones de fluencia y retracción. La EHE propone obtener la flecha diferida como el producto de la flecha instantánea por un factor  $\lambda$ , definido como:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'}$$

donde:

$\rho'$  es la cuantía geométrica de la armadura a compresión  $A'_s$ , referida al área de la sección útil  $b_0d$ , en la sección de referencia.

$$\rho' = \frac{A'_s}{b_0d}$$

$\xi$  es un coeficiente que depende de la duración de la carga y cuyos valores son los siguientes:

Tabla 10.4. Valores de  $\xi$

5 o más años	2.0
1 año	1.4
6 meses	1.2
3 meses	1.0
1 mes	0.7
2 semanas	0.5

Es evidente que  $\lambda$  estará influido por la armadura de compresión dado que cuanto mayor sea la armadura de compresión existente en la sección menor será la fluencia de la zona de compresiones y, por tanto, menor será la flecha diferida.

En la formulación anterior el parámetro tiempo siempre es absoluto y se mide desde el momento de colocación del hormigón. Por tanto, para una edad  $j$  de carga y  $t$  de cálculo de la flecha, el valor de  $\xi$  para el cálculo de  $\lambda$  será  $\xi(t) - \xi(j)$ .

### Ejemplo

La figura 10.7 representa el alzado y la sección transversal de una viga biapoyada. La luz de la viga es de  $16\text{ m}$  y la sección transversal es del tipo II con las dimensiones indicadas en el croquis. La armadura de la sección transversal corresponde a la sección central.

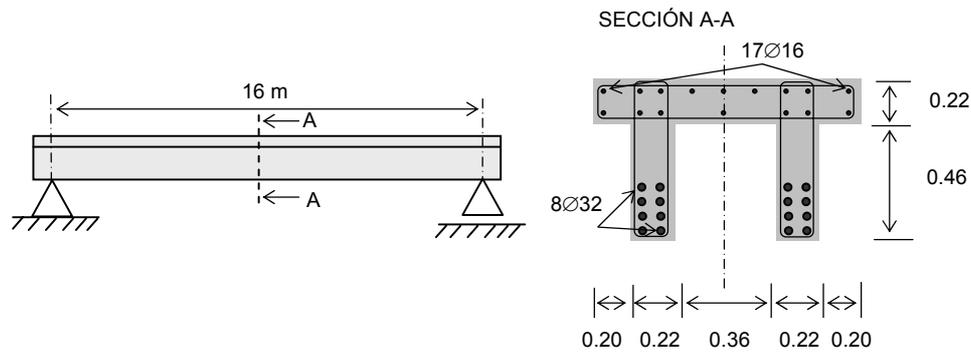


Figura 10.7. Viga biapoyada

Las cargas que soporta la viga son (en servicio):

- El peso propio ( $2500\text{ kg/m}^3$ , artículo 10.2 de la EHE), que comienza a actuar cuando se descimbra la estructura a los 28 días de su hormigonado.
- Carga permanente repartida de  $5\text{ kN/m}$ , actuando sobre toda la viga. Esta carga entra en acción pasados 3 meses desde el hormigonado de la viga.

El hormigón es del tipo  $HA-25/P/25/IIIa$  y el acero es  $B400S$ .

Se pide: estudiar la evolución de la estructura desde que se descimbra hasta la edad de un año.

Para ello se calculará:

- a) La flecha de la viga cuando se descimbra, es decir, a los 28 días del hormigonado.
- b) La flecha de la viga a los tres meses, en el instante inmediatamente anterior a la actuación de la carga permanente.
- c) La flecha instantánea que produce la carga permanente.
- d) La flecha de la viga al cabo de un año.

Las propiedades de la sección bruta son:  $I = 1.79 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ ,  $A_b = 4.66 \times 10^5 \text{ mm}^2$ ,  $y_{cdg} = 275.5 \text{ mm}$ . Otras propiedades mecánicas son  $A_s = 12864 \text{ mm}^2$ ,  $A'_s = 3417 \text{ mm}^2$ ,  $n = E_s/E_c = 7.34$ . El valor de la resistencia a flexotracción del hormigón es de  $f_{ct,\eta} = 3.16 \text{ N/mm}^2$  y, por tanto, el momento nominal de fisuración es de  $M_f = 140 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Nada más descimbrar la viga ésta se ve sometida a su peso propio, cuyo momento máximo es:

$$M_{pp} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{2500 \cdot 9.81 \cdot 0.466 \cdot 16^2}{8} = 365717 \text{ N}\cdot\text{m} = 366 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El momento nominal de fisuración es menor que el momento máximo, por lo que habrá zonas de la viga que estén fisuradas. Para calcular el momento de inercia equivalente hay que aplicar la ecuación 10.5, siendo necesario determinar el momento de inercia de la sección fisurada. Planteando equilibrio de axiles en la sección se obtiene la profundidad de la fibra neutra ( $x$ ) y, a partir de ella, el momento de inercia de la sección fisurada en flexión simple.

Si se admite la hipótesis de distribución lineal de tensiones en el hormigón y en el acero, la ecuación de equilibrio de axiles (con axil nulo) es equivalente a la ecuación del momento estático, ver figura 10.8, siendo posible obtener la profundidad de la fibra neutra de cualquiera de ambas ecuaciones. Se observa que sacando factor común la curvatura de la ecuación del equilibrio de axiles y dividiendo por  $E_c$  ambas ecuaciones son idénticas.

De cualquiera de las ecuaciones de la figura 10.8 se obtiene  $x = 211 \text{ mm}$ , valor que es menor de  $220 \text{ mm}$ , siendo válida la hipótesis de que la fibra neutra no baja de la cabeza de la viga. Para este valor de  $x$  se calcula  $I_f$ ,  $I_f = 1.28 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ . Aplicando la ecuación 10.5 se obtiene el valor del momento de inercia equivalente  $I_e = 1.30 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ .

De Resistencia de Materiales se sabe que la deformación máxima de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniforme es:

$$v_{\max} = \frac{5 \cdot q_{pp} \cdot L^4}{384 \cdot E_{28} \cdot I_e} = 28 \text{ mm}$$

en la ecuación anterior se ha introducido el módulo instantáneo de deformación longitudinal secante del hormigón a los 28 días.

La flecha a los tres meses, en el instante inmediatamente anterior a la colocación de la carga permanente, es:

$$\Delta_t = \lambda \cdot \Delta_i = \lambda \cdot 28.0 = 0.19 \cdot 28 = 5 \text{ mm}$$

$$\Delta_{3\text{meses}} = \Delta_i + \Delta_t = 28 + 5 = 33 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{\xi(90) - \xi(28)}{1 + 50\rho'} = \frac{1 - 0.7}{1 + 50 \cdot 1.15 \times 10^{-2}} = 0.19$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{b_0 \cdot d} = \frac{3417}{440 \cdot 513} = 1.15 \times 10^{-2}$$

Para determinar la flecha instantánea que produce la carga permanente, colocada a los tres meses, hay que calcular la flecha instantánea suma del peso propio y de la carga permanente, y luego restar la flecha instantánea debida al peso propio (28 mm). Se calcula así el incremento de flecha instantánea provocado por la carga permanente. Obsérvese que al depender el momento de inercia equivalente del momento flector el problema es no lineal, siendo necesario operar siguiendo el proceso indicado.

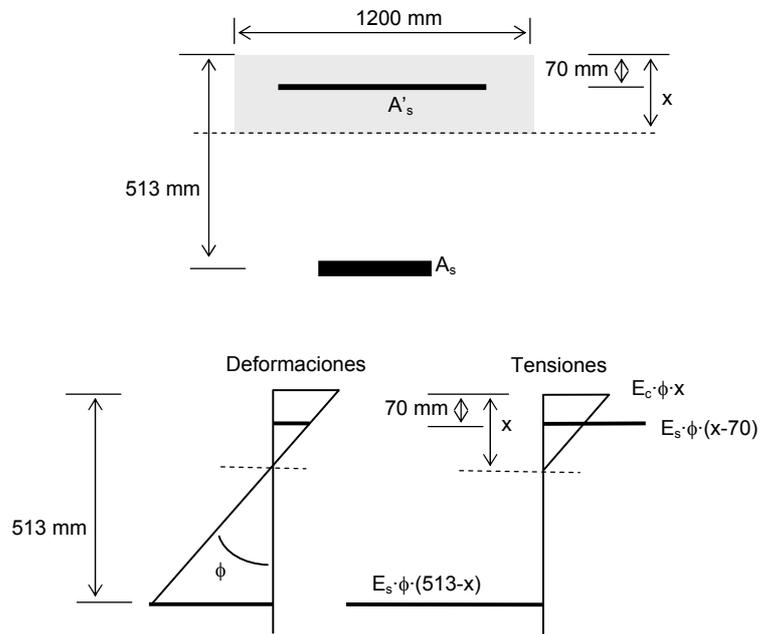
$$M_{pp+cp} = 366 \text{ kN}\cdot\text{m} + \frac{5 \cdot L^2}{8} = 526 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para este valor del momento flector el valor del momento de inercia equivalente es  $I_e = 1.29 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ . Aplicando nociones de Resistencia de Materiales se puede obtener la deformación máxima en una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniforme:

$$v_{\max} = \frac{5 \cdot (q_{pp} + q_{cp}) \cdot L^4}{384 \cdot 1.09 \cdot E_{28} \cdot 1.29 \times 10^{10}} = 36 \text{ mm}$$

en la expresión anterior se ha introducido el módulo instantáneo de deformación longitudinal secante del hormigón a los 3 meses, que según el artículo 39.6 de la EHE puede suponerse igual a  $1.09 \cdot E_{28}$ .

Cuando actúa la carga permanente la viga experimenta una flecha máxima de  $33 + (36 - 28) = 41 \text{ mm}$ .



Momento estático

$$1200 \frac{x^2}{2} - 3417 \cdot (x - 70) + 3417 \cdot 7.34 \cdot (x - 70) - 12864 \cdot 7.34 \cdot (513 - x) = 0$$

Equilibrio de axiles

$$E_c \cdot \phi \cdot x \cdot \frac{x}{2} \cdot 1200 - 3417 \cdot E_c \cdot \phi \cdot (x - 70) + 3417 \cdot E_s \cdot \phi \cdot (x - 70) - 12864 \cdot E_s \cdot \phi \cdot (513 - x) = 0$$

Figura 10.8. Equivalencia entre momento estático y equilibrio de axiles

Al cabo de un año habrá una flecha diferida, que será distinta para cada una de las cargas:

para el peso propio:

$$\lambda = \frac{\xi(1\text{año}) - \xi(1\text{mes})}{1 + 50\rho'} = \frac{1.4 - 0.7}{1 + 50 \cdot 1.15 \times 10^{-2}} = 0.44$$

para la carga permanente:

$$\lambda = \frac{\xi(1\text{año}) - \xi(3\text{meses})}{1 + 50\rho'} = \frac{1.4 - 1}{1 + 50 \cdot 1.15 \times 10^{-2}} = 0.25$$

La flecha total al año será  $28 + 0.44 \cdot 28 + 8 + 0.25 \cdot 8 = 50$  mm. La evolución de la flecha se representa en la figura 10.9.

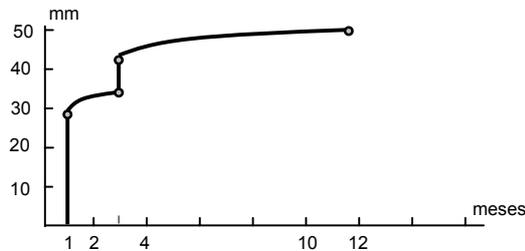


Figura 10.9. Evolución en el tiempo de la flecha máxima de la viga

La flecha en un año equivale a  $L/320$ , admisible como flecha total.

## 10.5. ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN

Las fisuras aparecen de forma inevitable en las zonas traccionadas de elementos estructurales de hormigón. Estas fisuras deben de ser suficientemente finas como para no provocar la corrosión del acero ni resultar estéticamente inadmisibles.

Todas las vigas de hormigón armado están fisuradas, inicialmente por retracción y después por la flexión. La fisuración de flexión en hormigón armado es consecuencia de que

el acero traccionado a  $f_y$  (tensión máxima) experimentará una deformación que el hormigón no puede desarrollar en tracción.

La anchura de fisura aceptada dependerá del ambiente donde esté situada la estructura. La EHE (artíc. 49) propone la siguiente tabla para limitar la abertura máxima de fisura:

**Tabla 10.5. Valores máximos de abertura de fisura**

Clase de exposición	$W_{\text{máx}}$ (mm)	
	Hormigón armado	Hormigón pretensado
I	0.4	0.2
IIa, IIb, H	0.3	0.2 <sup>1</sup>
IIIa, IIIb, IV, F	0.2	Descompresión
IIIc, Qa, Qb, Qc	0.1	

<sup>1</sup> Adicionalmente deberá comprobarse que las armaduras activas se encuentran en la zona comprimida de la sección, bajo la combinación de acciones cuasipermanentes.

Las principales variables que afectan a la abertura de fisura son:

- Tensión en el acero. Tal y como se acaba de ver, esta variable afectará directamente.
- La adherencia hormigón-acero, que influirá tanto en la abertura de fisura como en la homogeneidad en el reparto de las fisuras.
- El recubrimiento y el diámetro de la barra. Para controlar la fisuración es preferible disponer mayor número de barras de menor diámetro ,que menos barras y de mayor diámetro.

Si se desprecia la deformación del hormigón en tracción la anchura de grieta dependerá exclusivamente del alargamiento del acero, siendo la abertura de la grieta la deformación del acero por la separación entre dos grietas (figura 10.10).

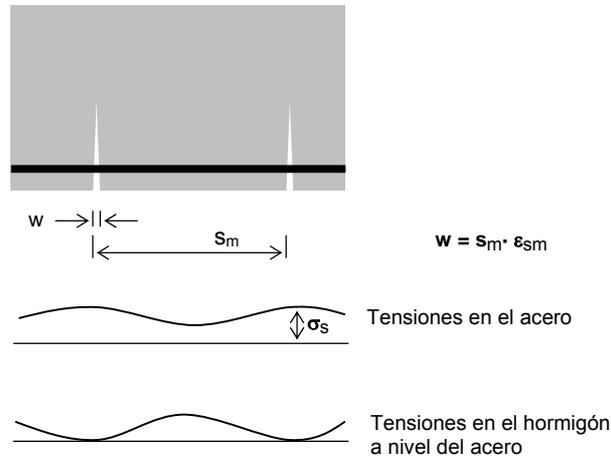


Figura 10.10. Abertura de fisura y separación entre fisuras. Tensiones de tracción en acero y hormigón

Para el cálculo de la abertura característica de fisura, la EHE propone la siguiente expresión:

$$w_k = \beta \cdot s_m \cdot \epsilon_{sm} \quad (10.6)$$

donde:

$\beta$  Es el coeficiente que relaciona la abertura media de fisura con el valor característico y cuyo valor es 1.3 para fisuración producida sólo por acciones indirectas y 1.7 para el resto de los casos.

$s_m$  Separación media de fisuras, expresada en mm.

$$s_m = 2c + 0.2s + 0.4k_1 \frac{\phi A_{c,eficaz}}{A_s}$$

$\epsilon_{sm}$  Alargamiento medio de las armaduras, teniendo en cuenta la colaboración del hormigón entre fisuras. Como se aprecia en el diagrama de tensiones en el acero de la figura 10.10 el alargamiento medio del acero es

ligeramente menor de  $\sigma_s/E_s$ . La EHE propone determinar el alargamiento medio a partir de la expresión:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

- $c$  Recubrimiento de hormigón.  
 $s$  Distancia entre barras longitudinales. Si  $s > 15\varnothing$  se tomará  $s = 15\varnothing$ .  
 En caso de vigas armadas con  $n$  barras, se tomará  $s = b/n$  siendo  $b$  el ancho de la viga.  
 $k_1$  Coeficiente que representa la influencia del diagrama de tracciones en la sección, de valor

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{8\varepsilon_1}$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las deformaciones máxima y mínima respectivamente en la sección fisurada, en los límites de la zona traccionada (ver figura 10.11).

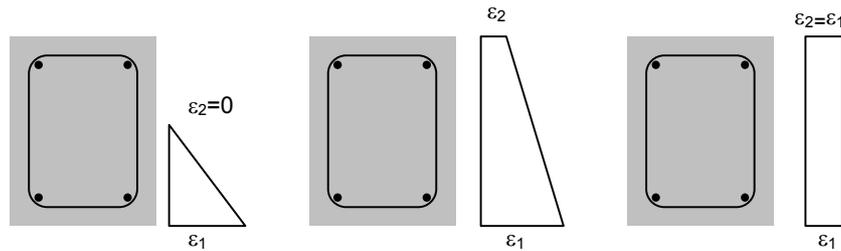


Figura 10.11. Flexión simple  $k_1=0.125$ . Tracción compuesta  $0.125 < k_1 < 0.250$ . Tracción simple  $k_1=0.250$ .

- $\varnothing$  Diámetro de la barra traccionada más gruesa o diámetro equivalente en el caso de grupo de barras.  
 $A_{c,eficaz}$  Área de hormigón de la zona de recubrimiento en donde las barras a tracción influyen de forma efectiva en la abertura de las fisuras. Se define como la zona rectangular limitada a no más de  $7.5\varnothing$  al lado de cada barra, sin superar la mitad del canto en vigas de canto, ni la cuarta parte en vigas planas o losas. (Ver figuras 49.2.5 de la EHE).  
 $A_s$  Sección total de las armaduras situadas en el área  $A_{c,eficaz}$ .

$\sigma_s$	Tensión de servicio de la armadura pasiva en la hipótesis de sección fisurada.
$E_s$	Módulo de deformación longitudinal del acero.
$k_2$	coeficiente de valor 1.0 para los casos de carga instantánea no repetida y 0.5 para los restantes casos.
$\sigma_{sr}$	Tensión de la armadura en la sección fisurada en el instante en que se fisura el hormigón, lo cual supone que ocurre cuando la tensión de tracción en la fibra más traccionada de hormigón alcanza el valor $f_{ct,m}$ .

Para secciones pretensadas con armadura activa adherente y armadura pasiva el cálculo de la abertura de fisura se realiza como si se tratase de una sección de hormigón armado teniendo en cuenta la acción del pretensado como una acción exterior y la armadura pasiva existente en la sección.

Como se ha comentado en capítulos anteriores, en el caso de fisuración provocada por esfuerzo cortante y por torsión, la EHE establece unas limitaciones para la separación entre estribos que de cumplirse se puede suponer que la fisuración está controlada.

### **Ejemplo**

Supongamos que en el ejemplo anterior la viga está situada en un ambiente IIIa. Para comprobar el ELS de fisuración hay que calcular la abertura característica de fisura (ecuación 10.6) y comprobar que no es superior a la abertura máxima admisible ( $w_{max}$ ), que en el caso de un ambiente IIIa en hormigón armado es  $w_{m\acute{a}x}=0.2\text{ mm}$ .

En la figura 10.12 aparece un detalle de una de las almas de la viga, del que se pueden extraer los siguientes valores:

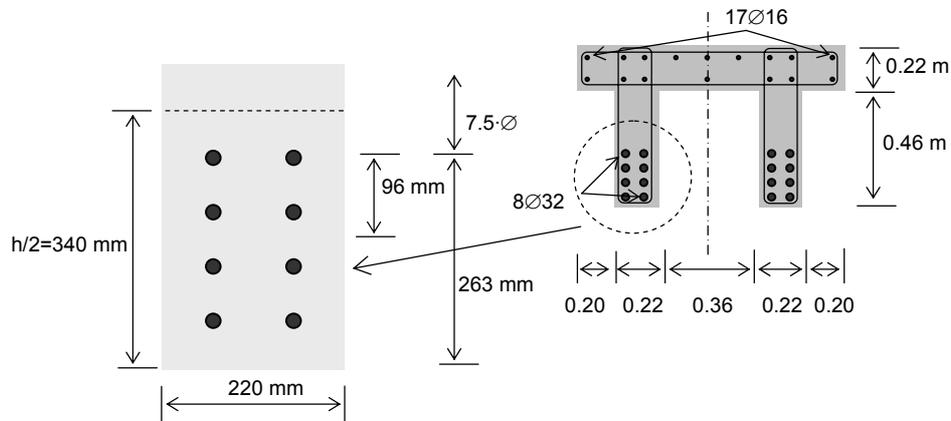


Figura 10.12. Sección transversal y detalle del alma

$$c = 45 \text{ mm}$$

$$s = 46 \text{ mm} < 15\phi$$

$$k_1 = 0.125$$

$$\phi = 32 \text{ mm}$$

$$A_{c,eficaz} = \frac{h}{2} \cdot 220 = 74800 \text{ mm}^2$$

$$s_m = 2c + 0.2s + 0.4k_1 \frac{\phi A_{c,eficaz}}{A_s} = 118 \text{ mm}$$

Una vez calculada la separación media entre fisuras se puede determinar el alargamiento medio entre fisuras. De la figura 10.12 se deduce que  $h=680 \text{ mm}$  y  $d=513 \text{ mm}$ , el valor medio de la resistencia a tracción del hormigón es  $f_{ct,m}=2.56 \text{ N/mm}^2$  y el valor de  $M_{fis}$  se puede despejar de la ecuación de la tensión:

$$2.56 = \frac{M_{fis} \cdot (h - y_{cdg})}{I} = \frac{M_{fis} \cdot (680 - 275.5)}{1.79 \times 10^{10}} \Rightarrow M_{fis} = 113 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Los valores de  $\sigma_{sr}$  y de  $\sigma_s$  así como el valor de  $\varepsilon_{sm}$ , para  $k_2=0.5$ , son:

$$\sigma_{sr} = \frac{113 \times 10^6 \cdot (d - 211)}{I_f} \cdot n = 19.57 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_s = \frac{526 \times 10^6 \cdot (d - 211)}{I_f} \cdot n = 91.09 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] = 4.45 \times 10^{-4} \geq 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s} = 1.8 \times 10^{-4}$$

Con los datos anteriores se puede determinar la abertura de fisura a partir de la ecuación 10.6, cuyo valor es  $w_k=0.1 \text{ mm}$ , menor de  $0.2 \text{ mm}$ .

## 10.6. ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES

Las vibraciones y movimientos rítmicos debidos al movimiento de las personas o al tráfico, maquinaria, viento u oleaje, etc. pueden afectar al comportamiento en servicio de las estructuras. Para evitar tales vibraciones habrá que proyectar las estructuras de forma que sus frecuencias naturales de vibración estén suficientemente alejadas de las frecuencias de las acciones. Las recomendaciones que a este respecto hace la EHE se recogen en la tabla 10.6.

Tabla 10.6. Frecuencias naturales recomendadas

Estructura	Frecuencia natural (Hz)
Gimnasios o palacios de deporte	> 8.0
Salas de fiesta o conciertos sin asientos	> 7.0
Salas de fiesta o conciertos con asientos	> 3.4
Pasarelas peatonales	Quedará fuera de los intervalos (1.6-2.4) y (3.5-4.5)

**Ejercicios propuestos**

1. Calcular  $w_k$  para el segundo ejemplo del apartado 10.3, que corresponde a la viga de la figura 10.4. El cálculo de la abertura característica de fisura se realizará sin considerar la existencia de la armadura pasiva.
2. Rehacer el ejercicio anterior considerando la armadura pasiva que se indica en el enunciado del ejemplo.

**Referencias:**

*Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural.* Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.

Collins M.P., Mitchell D., (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Nueva Jersey.

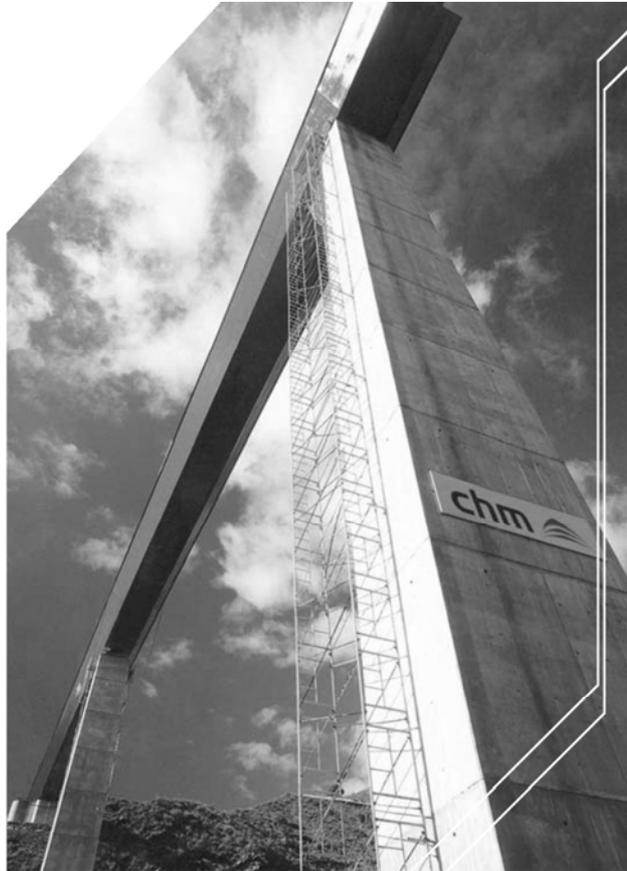
Hurst M.K. (1998). *Prestressed Concrete Design*. E & FN Spon. Nueva York.

---

CAPÍTULO XI

---

**DISEÑO DE ELEMENTOS**



Pilas de puente. N-340. Almería. España.  
**Cortesía de Constructora Hormigones Martínez S.A.**  
**[www.chm.es](http://www.chm.es)**

11.1. INTRODUCCIÓN

El primer problema que se plantea a la hora de resolver una estructura, con luces y cargas determinadas, es determinar el tipo de sección más adecuada y qué tipo de armadura hay que emplear. Además, es necesario saber cuándo usar pretensado y cuales deben de ser el valor de la fuerza de tesado y el trazado del cable.

En hormigón armado el número de parámetros de diseño es menor que en hormigón pretensado y, en general, la elección de los elementos es más simple.

Para vigas rectangulares de hormigón armado y, en general, para elementos de sección rectangular sometidos a flexión simple resulta muy útil el concepto de momento límite (§6.7, máximo momento en flexión simple que puede resistir una viga sin armadura de compresión y con mejor aprovechamiento del acero). En base al momento límite se pueden dimensionar el canto y ancho de estos elementos.

En otro tipo de secciones sometidas a flexión simple, como son las vigas en T y los forjados reticulares, la limitación principal en el dimensionamiento es la cantidad de armadura traccionada que desde el punto de vista constructivo es posible colocar..

En pilares es común disponer el área necesaria para resistir todo el axil centrado contando exclusivamente con la resistencia de hormigón, reservando así la flexión a la armadura.

Una vez elegida una primera sección habrá que comprobar todos los estados límite y modificarla si es necesario.

Como ya se ha comentado, en hormigón pretensado el diseño de elementos suele ser más complejo que en hormigón armado debido al mayor número de variables que intervienen en el proceso.

**Ejemplo**

Determinar las dimensiones de la sección transversal –canto y ancho- de una viga continua de 4 vanos de 13 m de luz cada uno, para una carga de diseño continua de 4 kN/m incluido peso propio. El hormigón es del tipo HA-25 y el acero B-500-S.

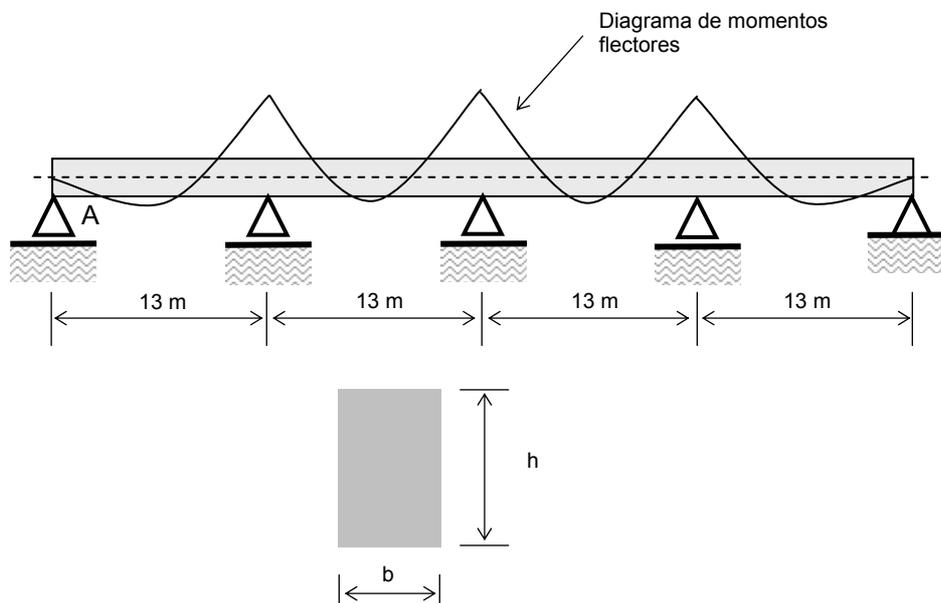


Figura 11.1. Viga continua de 4 vanos

Los momentos flectores determinados a partir de un análisis lineal a 0.4, 0.5, 1.0 y 1.5 de la luz (siendo la luz de 13 metros) son:

Tabla 11.1. Momentos de la viga continua

Momento	Valor
$M_{0.4}$	$0.0771 \cdot q \cdot L^2$
$M_{0.5}$	$0.0714 \cdot q \cdot L^2$
$M_1$	$-0.1071 \cdot q \cdot L^2$
$M_{1.5}$	$0.0357 \cdot q \cdot L^2$

Aprovechando la redistribución plástica se decide bajar el momento máximo negativo en un 10%. Así pues el máximo momento de diseño será:

$$M_d = -0.9 \cdot 0.1071 \cdot 4 \cdot 13^2 = -65 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

En vigas de hormigón armado el criterio óptimo es trabajar en el plano de rotura nº4 (§6.6) puesto que en este plano de deformación el hormigón y acero están aprovechados al máximo. Además el Teorema de Armado a Flexión (§6.7.2) nos

garantiza que dicho plano es un plano de armadura mínima. Este plano de rotura corresponde a la profundidad de la fibra neutra  $x_{lim}$ .

$$x_{lim} = \frac{0.0035 \cdot d}{\varepsilon_{lim} + 0.0035} = 0.617 \cdot d$$

Suponiendo que no existe armadura de compresión, el momento que resiste la sección en el plano nº 4 ( $x = x_{lim}$ ) es:

$$M_{lim} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x_{lim} \cdot b \cdot (d - 0.4 \cdot x_{lim}) = 5.27 \cdot b \cdot d^2$$

Igualando el momento límite al momento máximo de diseño ( $65 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ) se obtiene la relación que tienen que verificar  $b$  y  $d$ . Esta relación se ha representado gráficamente en la figura 11.2.

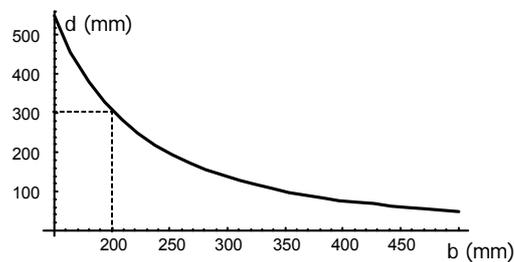


Figura 11.2. Relación canto-ancho

Siguiendo este criterio iniciamos el dimensionamiento de la viga con una sección transversal de  $20 \times 35 \text{ cm}$ , donde se ha adoptado  $5 \text{ cm}$  como la diferencia entre canto total ( $h$ ) y canto útil ( $d$ ).

## 11.2. EL PROCESO DE DISEÑO

Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, el proceso de diseño en hormigón pretensado es más complejo, debido al mayor número de variables que intervienen: tipo de sección, dimensiones, tipo de pretensado, valor de la fuerza de pretensado, trazado del cable, tipo de materiales, etc. El diseño del elemento estructural tiene que garantizar que, tanto los límites de tensión como los límites de deformación no son superados.

### Tipo de sección

El primer paso es optar por un tipo u otro de sección. La figura 11.3 - adaptada de Collins (1991) - puede resultar útil para elegir el tipo de sección más adecuado. En

esta figura se indica el tipo de sección aconsejado para vigas simplemente apoyadas en función de la carga soportada y de la luz libre.

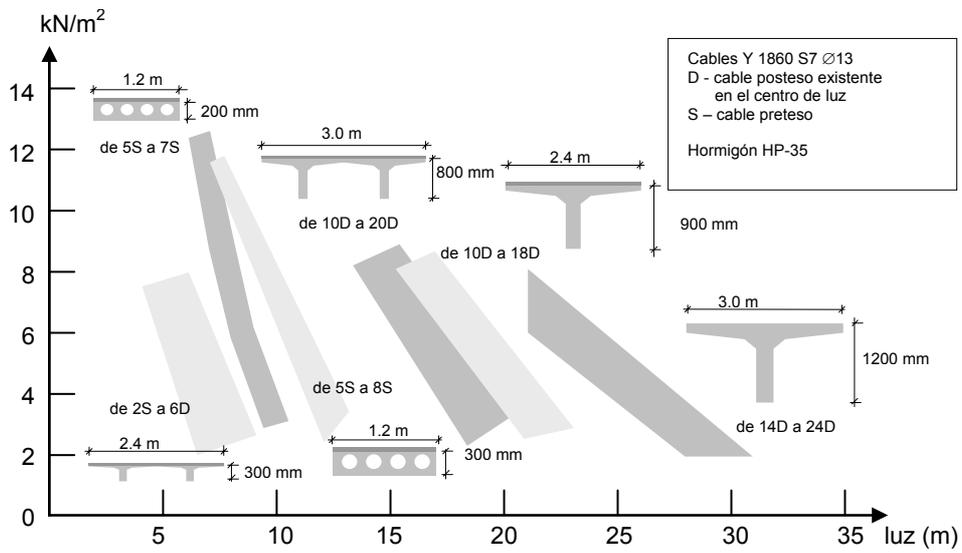


Figura 11.3. Distintos tipos de secciones en función de la luz y de la carga

Una vez elegido el tipo de sección es usual seleccionar el canto de la sección a partir de relaciones luz/canto como las indicadas en la tabla 11.2.

Tabla 11.2. Relaciones luz/canto más usuales para vigas pretensadas simplemente apoyadas

<i>Tipo de elemento</i>	<i>Sobrecarga (kN/m<sup>2</sup>)</i>	<i>Relación luz/canto</i>
	< carga permanente	40
	2.4	40-50
	4.8	32-42
	2.4	20-30
	4.8	18-28
	2.4	23-32
	4.8	19-24
	< carga permanente	20
	< carga permanente	30
	Vigas de carretera	18

Además de la información obtenida a partir de la figura 11.3 y de la tabla 11.2 es frecuente recurrir a catálogos de empresas de prefabricados en los que se especifica el tipo de perfil y el rango de aplicación. En general, entre perfiles de distintas empresas sólo existen pequeñas variaciones. Estos catálogos y manuales resultan elementos muy útiles para la elección del tipo de sección.

### Límites de tensión

La estructura pretensada pasa por diversas fases críticas a lo largo de su vida que es preciso comprobar. El límite de tensión se clasifica como ELS, siendo obligatorio verificar los límites de tensión en las distintas situaciones de proyecto. Las situaciones más críticas suelen ser:

- El instante de transferir la fuerza de tesado al hormigón ó instante inicial. En este estado la fuerza de tesado es máxima, puesto que las pérdidas diferidas aún no se han producido, y el hormigón es joven por lo que tiene una resistencia mínima. En esta fase, el momento exterior es mínimo y debido exclusivamente al peso propio.

*Hernández-Gil*

- A largo plazo se considera la actuación de las combinaciones cuasi-permanente y rara. Para estas combinaciones la fuerza de pretensado será mínima puesto que ya se han producido todas las pérdidas. En esta etapa la resistencia del hormigón es máxima y las acciones exteriores son máximas también.

En las dos situaciones críticas descritas anteriormente, el condicionante más importante suele ser la resistencia a tracción del hormigón. La fibra más traccionada es la fibra superior a corto plazo y la fibra inferior a largo plazo (ver figura 11.4).

Diferenciando a corto y a largo plazo aparecen las siguientes inequaciones, relativas a las limitaciones de tracción (ver estados de tensiones en la figura 11.4):

$$\begin{aligned} \frac{M_{mín}}{Z_{sup}} + \frac{\alpha P_0}{A} - \frac{\alpha P_0 \cdot e}{Z_{sup}} &\geq -f'_{ct} \\ -\frac{M_{máx}}{Z_{inf}} + \frac{\beta P_0}{A} + \frac{\beta P_0 \cdot e}{Z_{inf}} &\geq -f_{ct} \end{aligned} \tag{11.1}$$

donde:

- $M_{mín}$  momento flector mínimo –que se presenta a corto plazo-
- $M_{máx}$  momento flector máximo –que se presenta a largo plazo-
- $Z_{sup}$  y  $Z_{inf}$  módulos resistentes de la sección referidos a la fibra superior e inferior, respectivamente.
- $\alpha P_0$  y  $\beta P_0$  valores de la fuerza de pretensado a corto y a largo plazo (siendo  $\alpha$  y  $\beta$  los coeficientes de pérdida a corto y a largo plazo)
- $f'_{ct}$  resistencia del hormigón a tracción a corto plazo
- $f_{ct}$  resistencia del hormigón a tracción a largo plazo

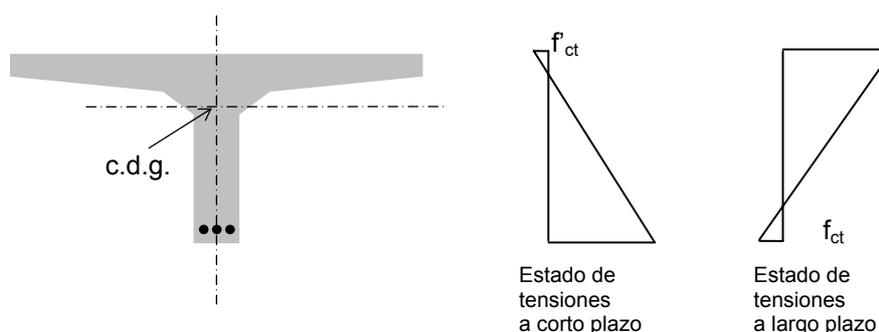


Figura 11.4. Estado de tensiones a corto y largo plazo.

Generalmente, lo más restrictivo en vigas simplemente apoyadas suele ser la limitación de tensión en la fibra inferior a largo plazo para la sección situada en el centro de luz. Desde el punto de vista económico, lo más interesante es disponer la máxima excentricidad permitida en la sección en cuestión (ver limitaciones geométricas en §6.9) y determinar la fuerza de pretensado a partir de la segunda de las ecuaciones 11.1.

Alternativamente, para un valor determinado de la fuerza de pretensado  $P_0$  se puede establecer una zona de cableado despejando de las inecuaciones 11.1 (ver figura 11.5).

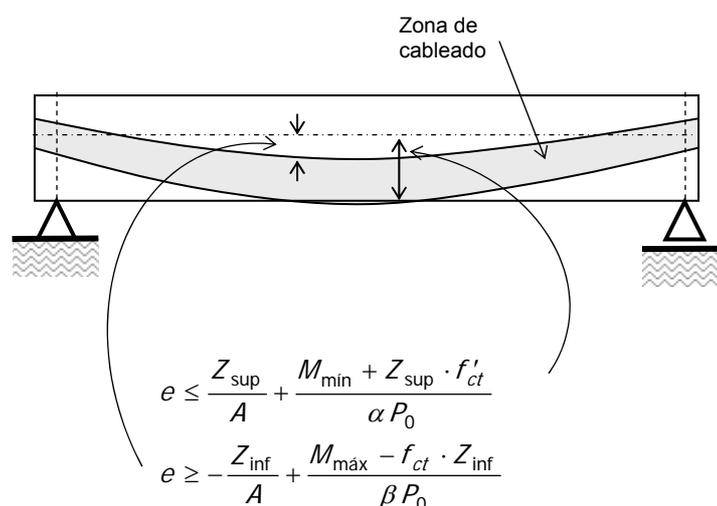


Figura 11.5. Zona de cableado.

Para ELS es frecuente recurrir al estado de descompresión, obligando a que  $f_{ct} = f'_{ct} = 0$ .

En vigas simplemente apoyadas con pretensado lineal puede darse el caso de que los extremos estén sometidos a un momento de pretensado excesivo y a un momento exterior muy pequeño. Con objeto de controlar la fisuración en esta situación se coloca armadura pasiva. Además, se puede optar por una de estas dos soluciones (figura 11.6a):

- Eliminar la adherencia hormigón-armadura de parte de la armadura activa en los primeros y últimos metros de la viga (figura 11.6a), reduciendo de este modo el valor de la fuerza de pretensado, o bien
- Reducir la excentricidad del pretensado para que produzca menor momento de pretensado (ver figura 11.6b).

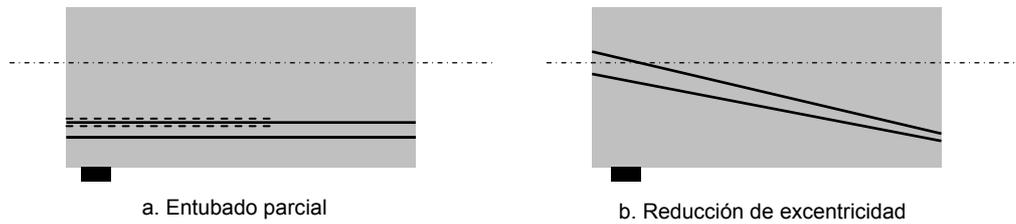


Figura 11.6. Formas de reducir la tensión en los extremos

### Límites a la deflexión

En vigas, el pretensado tiende a producir una contraflecha mientras que las cargas permanentes y las sobrecargas tienden a producir una flecha en sentido contrario. Una práctica muy extendida es de introducir un pretensado que equilibre la flecha generada por la combinación cuasi-permanente de cargas, lo que se consigue ajustando apropiadamente la fuerza de pretensado y la excentricidad. Como consecuencia de esta compensación, para la combinación cuasi-permanente, se produce una tensión uniforme de compresión en toda la sección.

A veces el criterio de compensar las cargas cuasi-permanentes puede llevar a unas contra-flechas excesivas en el instante de transferir la fuerza de pretensado siendo necesario establecer otros criterios.

Las contraflechas producidas por un pretensado lineal y por un pretensado parabólico se especifican en la figura 11.7.

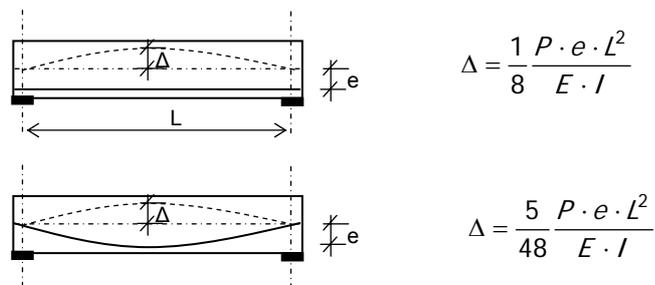


Figura 11.7. Contra-flechas proporcionadas por el pretensado

### Cálculo en rotura

El cálculo en rotura de una sección se realiza tal y como se comentó en el capítulo VI. Para el caso de flexión simple una forma de verificar la condición de rotura es la de realizar equilibrio de momentos en el punto de aplicación de la resultante de compresiones. Aproximando el brazo mecánico  $z$  por  $0.9 \cdot d$ , queda:

$$M_d \leq 0.9 \cdot d \cdot (0.9 \cdot A_p \cdot f_{pd} + A_s \cdot f_{yd})$$

Es usual, en vigas postesas y en trazados con un punto bajo en el centro, que las secciones críticas correspondan a las situadas a  $0.4L$  - en vez de a  $0.5L$  -.

### 11.3. SECCIONES COMPUESTAS

Gran parte de las construcciones en las que se usan técnicas de pretensado, como los tableros de puentes, están constituidos por composición de elementos pretensados junto a una losa de hormigón colocado in situ. En estos casos las vigas pretensadas se diseñan para resistir su peso propio más el peso del hormigón que se debe colocar in situ. Este hormigón in situ se coloca fresco y no tiene ninguna capacidad resistente hasta que endurece. La sección compuesta trabaja como tal cuando endurece el hormigón in situ, o sea, para el resto de cargas permanentes y para las sobrecargas. Un ejemplo típico de este tipo de construcción son los puentes de vigas pretensadas.

En elementos compuestos es necesario diferenciar entre los diferentes tipos de situaciones por las que éste pasa.

#### Situación inicial (al transferir la fuerza de pretensado)

Esta situación inicial es la misma para todos los elementos pretensados: valor máximo de la fuerza de pretensado, valor mínimo de la resistencia del hormigón y la única acción exterior es la debida al peso propio.

La tensión en la fibra superior de la sección transversal es:

$$\sigma_{0,\text{sup}} = \frac{\alpha P_0}{A_v} + \frac{M_0}{Z_{v,\text{sup}}} - \frac{\alpha P_0 \cdot e_v}{Z_{v,\text{sup}}}$$

y en la fibra inferior:

$$\sigma_{0,\text{inf}} = \frac{\alpha P_0}{A_v} - \frac{M_0}{Z_{v,\text{inf}}} + \frac{\alpha P_0 \cdot e_v}{Z_{v,\text{inf}}}$$

donde  $A_v$  es el área neta de la viga,  $M_0$  es el momento del peso propio,  $\alpha$  es el coeficiente de pérdidas a corto plazo de la fuerza de pretensado,  $e_v$  es la excentricidad de la fuerza de pretensado en la viga, y  $Z_{v,sup}$  y  $Z_{v,inf}$  son los módulos resistentes de la sección referidos a la fibra superior y a la fibra inferior, respectivamente. Ver figura 11.8.

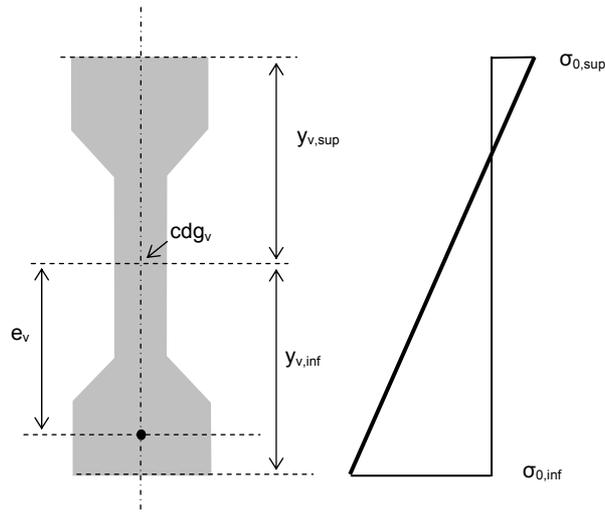


Figura 11.8. Situación inicial

Los valores de  $\sigma_{0,inf}$  y  $\sigma_{0,sup}$  deben de cumplir las limitaciones correspondientes al hormigón, teniendo en cuenta la edad de éste.

### Colocación del hormigón in situ

Generalmente la viga pretensada sirve de cimbra para la losa de hormigón aunque esto no siempre es así. A veces se colocan cimbras para colaborar en la resistencia en esta situación. Cuando se coloca la losa de hormigón la situación es la siguiente: el hormigón de las vigas tendrá una resistencia mayor que la que tenía en la situación inicial, la fuerza de pretensado tendrá mayores pérdidas estando su valor comprendido entre  $\alpha P_0$  y  $\beta P_0$  (valores a corto y largo plazo) y la acción exterior se habrá incrementado debido al peso propio de la losa. Como simplificación se suele emplear el valor a largo plazo de la fuerza de pretensado ( $\beta P_0$ ). En esta situación las tensiones máximas y mínimas son:

$$\sigma_{1,\text{sup}} = \frac{\beta P_0}{A_v} + \frac{M_1}{Z_{v,\text{sup}}} - \frac{\beta P_0 \cdot e_v}{Z_{v,\text{sup}}}$$

$$\sigma_{1,\text{inf}} = \frac{\beta P_0}{A_v} - \frac{M_1}{Z_{v,\text{inf}}} + \frac{\beta P_0 \cdot e_v}{Z_{v,\text{inf}}}$$

donde el subíndice 1 indica que corresponde al estado de colocación del hormigón in situ.

El nuevo estado de tensiones se puede ver en la figura 11.9

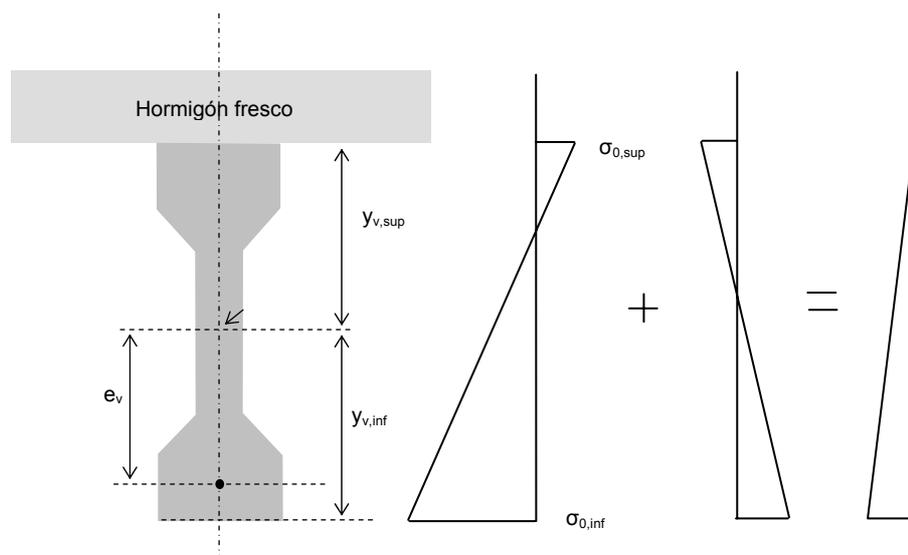


Figura 11.9 Estado de tensiones al colocar el hormigón in situ

### Situación Final

La sección compuesta quedará operativa una vez que el hormigón colocado in situ endurezca. Las cargas aplicadas a partir de este momento serán resistidas conjuntamente por la viga y la losa. Sin embargo, las tensiones a las que estaba sometida la viga aislada – etapa anterior – seguirán estando presentes y por ello siempre existirá una discontinuidad de tensiones entre ambos hormigones.

Además de lo anteriormente comentado, las secciones compuestas están sometidas a una redistribución de tensiones debido a la fluencia y a la retracción.

En las secciones compuestas, una vez que el hormigón ha endurecido, la discontinuidad de deformaciones en la interfase permanece constante a lo largo de la vida del elemento. En la fase de colocación del hormigón in situ se han producido unas

*Hernández-Gil*

deformaciones iniciales en el hormigón,  $\varepsilon_{ci}$  (ver figura 11.10). Cuando el hormigón de la losa ha endurecido y se carga la sección compuesta se producen deformaciones adicionales en el hormigón,  $\Delta\varepsilon_c$  (ver figura 11.10). Como hipótesis de trabajo se supone que ambas deformaciones son lineales y las deformaciones totales en el hormigón se obtienen sumando ambas:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{ci} + \Delta\varepsilon_c$$

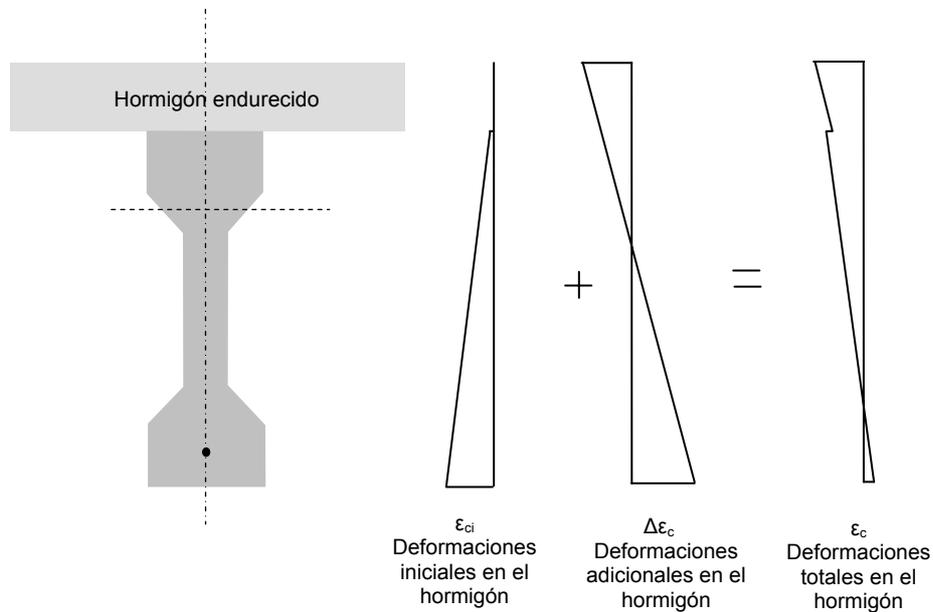


Figura 11.10. Estado de deformaciones

Para el diseño se suele recurrir a una simplificación en relación al razonamiento anterior que consiste en suponer que el estado de tensiones que aparece cuando se coloca el hormigón fresco no cambia, siendo resistidas el resto de cargas permanentes y las sobrecargas adicionales por la sección compuesta. La distribución de tensiones final es la suma de estos dos estados (figura 11.11).

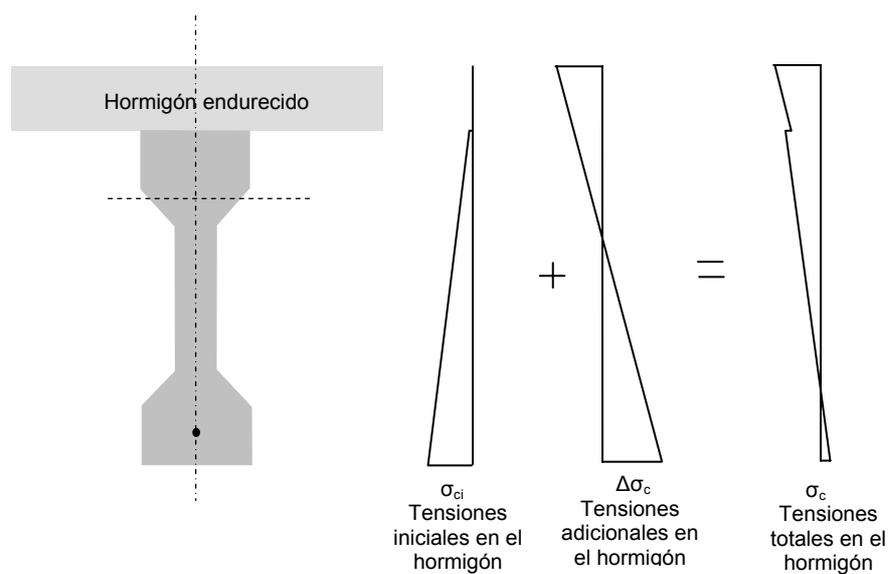


Figura 11.11. Estado de tensiones

### Resistencia a rasante

En las secciones compuestas, la existencia de tensiones horizontales de cortante en la interfase entre el hormigón de la viga y el de la losa juega un papel muy importante. Para resistir este cortante suele ser necesario disponer de conectadores en las vigas. Estos conectadores suelen formarse con la misma armadura de cortante que se alarga hasta introducirla en la losa. La EHE (artíc. 44.2.3.5) propone el uso de métodos plásticos para dimensionar la armadura necesaria aunque también se pueden emplear criterios elásticos.

**Ejemplo**

Consideremos la viga biapoyada de la figura 11.12 que salva 15 m de luz. Esta viga pertenece a una estructura de un aparcamiento, lo que supone una sobrecarga de 4 kN/m<sup>2</sup>. Además, la carga permanente se compone del peso propio más 1 cm de espesor de aglomerado. El hormigón que se va a emplear es del tipo HP-35, que al destesar en bancada presenta una resistencia a corto plazo de 25 N/mm<sup>2</sup>. Se pretende resolver con una sección en  $\Pi$ , como la que aparece en la figura 11.12, con armadura activa del tipo Y-1860-S7 de  $\varnothing 13$ . En bancada la armadura activa se tesará hasta  $0.75 f_{m\acute{a}x}$ .

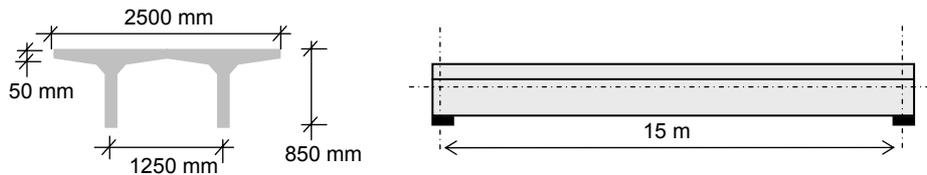


Figura 11.12. Viga en  $\Pi$

**Elección del canto**

El primer paso es la elección del canto, según la tabla 11.2, se puede ir a una relación de 18, lo que supone un canto de 0.83. Optamos por un canto de 850 mm.

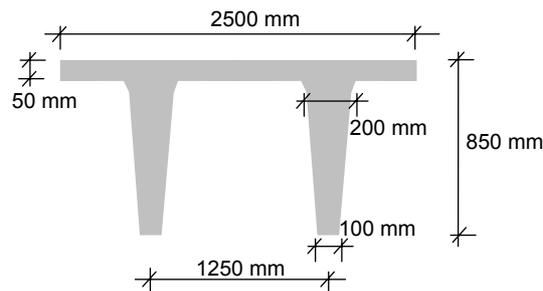


Figura 11.13. Características geométricas de la sección transversal

A la sección transversal de la figura 11.13 le corresponden las siguientes propiedades mecánicas -asociadas a su sección bruta-:

Área	365000 mm <sup>2</sup>
$I$	$2.426 \times 10^{10}$ mm <sup>4</sup>
$y_{cdg}$	275 mm
$Z_{sup}$	$8.813 \times 10^7$ mm <sup>3</sup>
$Z_{inf}$	$4.220 \times 10^7$ mm <sup>3</sup>

Las cargas de servicio (no mayoradas) que actúan sobre la viga son dos cargas permanentes y una sobrecarga, cuyos valores son:

$$\begin{aligned} q_{pp} &= (\text{carga del peso propio}) = 2500 \cdot 0.365 \cdot 9.81 / 1000 = && 8.95 \text{ kN/m} \\ q_{aglomerado} &= 0.01 \cdot 2300 \cdot 9.81 / 1000 \cdot 2.5 = && 0.56 \text{ kN/m} \\ q_{sc} &= (\text{sobrecarga}) = 4 \cdot 2.5 = && 10.00 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

### Elección del pretensado

Tal y como se ha comentado en el apartado 11.2, lo más restrictivo en vigas biapoyadas suele ser la limitación de tensión en la fibra inferior en el centro de luz a largo plazo. Por este motivo se dispondrá la máxima excentricidad permitida.

El momento máximo en el centro de luz es:

$$\begin{aligned} M_{m\acute{a}x} &= \frac{q \cdot L^2}{8} = (8.95 + 0.56 + 10) \frac{15^2}{8} = 548.72 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{m\acute{a}x,d} &= [1.35 \cdot (8.95 + 0.56) + 1.5 \cdot 10] \frac{15^2}{8} = 782.96 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Las resistencias del hormigón a compresión y a tracción, en bancada al destesar y a largo plazo, son:

$$\begin{aligned} \text{- A largo plazo} \quad f_{ck} &= 35 \text{ N/mm}^2 && f_{ct} = 0.21 \cdot f_{ck}^{2/3} = 2.24 \text{ N/mm}^2 \\ \text{- En bancada} \quad f'_{ck} &= 25 \text{ N/mm}^2 && f'_{ct} = 0.21 \cdot f'_{ck}{}^{2/3} = 1.80 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Los coeficientes de pérdidas a corto y largo plazo de la fuerza de pretensado, en vigas pretensas, se pueden tomar de la siguiente tabla:

Tabla 11.3. Valores aproximados de las pérdidas de la fuerza de pretensado

Acero Y-1860	Valor de $P_0$	Pérdidas a corto plazo (%)	Pérdidas a largo plazo (%)
Relajación normal	$0.70 f_{m\acute{a}x}$	10	28
Baja relajación	$0.75 f_{m\acute{a}x}$	8	22

La limitación de tensión a largo plazo en la fibra inferior viene dada por la expresión:

$$-\frac{548.7 \times 10^6}{4.220 \times 10^7} + \frac{\beta \cdot P_0}{365000} + \frac{\beta \cdot P_0 \cdot e}{4.220 \times 10^7} \geq -2.24$$

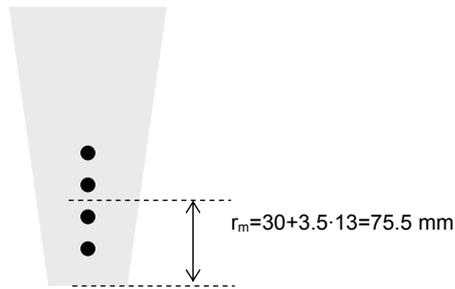


Figura 11.14. Recubrimiento mecánico

Teniendo en cuenta que  $\beta P_0 = 0.72 \cdot 0.75 \cdot 1860 \cdot A_p$  y que  $e = h - y_{cd} - r_m$ , de la fórmula anterior se obtiene que:

$$e = 500 \text{ mm}$$

$$A_p \geq 734.5 \text{ mm}^2 \text{ que se consigue con 8 cordones Y-1860-S7 de 13 mm.}$$

$r_m$  es el recubrimiento mecánico, figura 11.14.

### Rotura

Para la verificación en rotura,  $d = 850 - 75.5 = 775 \text{ mm}$ , se puede recurrir a la aproximación comentada en el apartado 11.2:

$$M_d \leq 0.9 \cdot d \cdot (0.9 \cdot A_p \cdot f_{pd}) \Rightarrow A_p \geq \frac{782.96 \times 10^6}{0.9 \cdot 775 \cdot 0.9 \cdot 1860 / 1.15} = 771 \text{ mm}^2$$

que se satisface con los 8 cordones ( $792 \text{ mm}^2$ ).

### Limitación de tensión a corto plazo

A corto plazo el momento en el centro de luz es  $M_{min} = 8.95 \cdot 15^2 / 8 = 251.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . La limitación de tensión en la fibra superior corresponde a la siguiente expresión:

$$\frac{251.7 \times 10^6}{8.813 \times 10^7} + \frac{\alpha \cdot P_0}{365000} - \frac{\alpha \cdot P_0 \cdot 500}{8.813 \times 10^7} \geq -1.8$$

de la que se deduce que:  $A_p \leq 1264 \text{ mm}^2$ , que obviamente se verifica.

### Elección del trazado

Hasta ahora se ha fijado la excentricidad en el centro. Si este valor de la excentricidad se continuara hasta los extremos en éstos aparecería un momento de pretensado negativo y un momento del peso propio muy pequeño. Esto puede llevar a que las fibras superiores agrieten por tracción. En esta viga se opta por un trazado poligonal con objeto de lograr una tensión nula.

La longitud de transmisión – calculada a partir del artículo 67.4 de la EHE- es de  $707 \text{ mm} \approx 700 \text{ mm}$ , y el momento mínimo a  $700 \text{ mm}$  del apoyo debido exclusivamente al peso propio es  $M_{min} = 45.28 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . El límite de tensión viene dado por:

$$\frac{45.28 \times 10^6}{8.813 \times 10^7} + \frac{0.9 \cdot 0.75 \cdot 1860 \cdot 792}{365000} - \frac{0.9 \cdot 0.75 \cdot 1860 \cdot 792 \cdot e}{8.813 \times 10^7} \geq 0$$

de donde se deduce que  $e \leq 287 \text{ mm}$ .

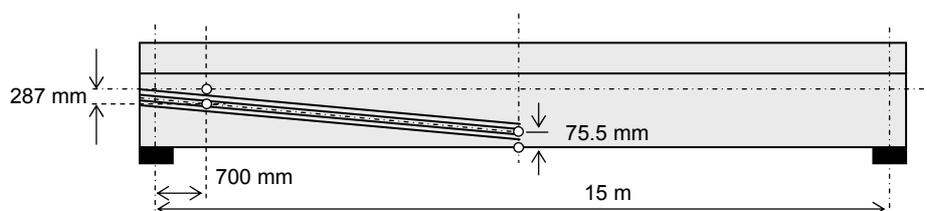


Figura 11.15. Elección del trazado

### Estudio de tensiones

La última parte del problema de diseño consiste en el estudio de las tensiones existentes a  $700\text{ mm}$  del apoyo, a  $0.4L$  y a  $0.5L$ , tanto para la condición inicial como para la condición final. Para ello se han empleado las propiedades brutas de la sección y se ha supuesto que la fuerza de pretensado concentrada en un punto. Las tensiones, en  $MPa$ , se resumen en la tabla inferior.

		a 700 mm		a 0.4 L		a 0.5 L	
		$M_{\min}$	$M_{\max}$	$M_{\min}$	$M_{\max}$	$M_{\min}$	$M_{\max}$
		44.80 kN·m	97.67 kN·m	241.69 kN·m	526.88 kN·m	251.76 kN·m	548.8 kN·m
Cond. Inicial	Fibra sup.	-0,0056	0,5943	0,3555	3,5916	-0,0605	3,3104
	Fibra inf.	8,4252	7,1724	7,6710	0,9129	8,5398	1,5002
Cond. Final	Fibra sup.	0,0972	0,6971	0,8329	4,0690	0,5230	3,8939
	Fibra inf.	6,5278	5,2751	4,9913	-1,7667	5,6386	-1,4010

Se puede observar que en la sección situada a  $0.4L$ , las tensiones a largo plazo en las fibras superior e inferior -para el momento máximo- son mayores que para la sección a  $0.5L$ .

### Ejercicios propuestos

1. Para el segundo ejemplo de este capítulo, correspondiente a la figura 11.12, resolver el problema mediante un trazado horizontal.

Nota: será necesario eliminar parte de los cordones mediante la colocación de un entubado que impida la adherencia. Se disminuye así la fuerza de pretensado manteniendo la excentricidad.

2. En el mismo ejemplo estudiar el Estado Último de agotamiento a flexión.
3. En el mismo ejemplo obtener las deformaciones a corto y largo plazo.

### Referencias

*Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.

Collins M.P., Mitchell D., (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Prentice Hall, Nueva Jersey.

Hurst M.K. (1998). *Prestressed Concrete Design*. E & FN Spon. Nueva York.

Leet K. y Bernal D. (1997). *Reinforced Concrete Design*. McGraw-Hill.

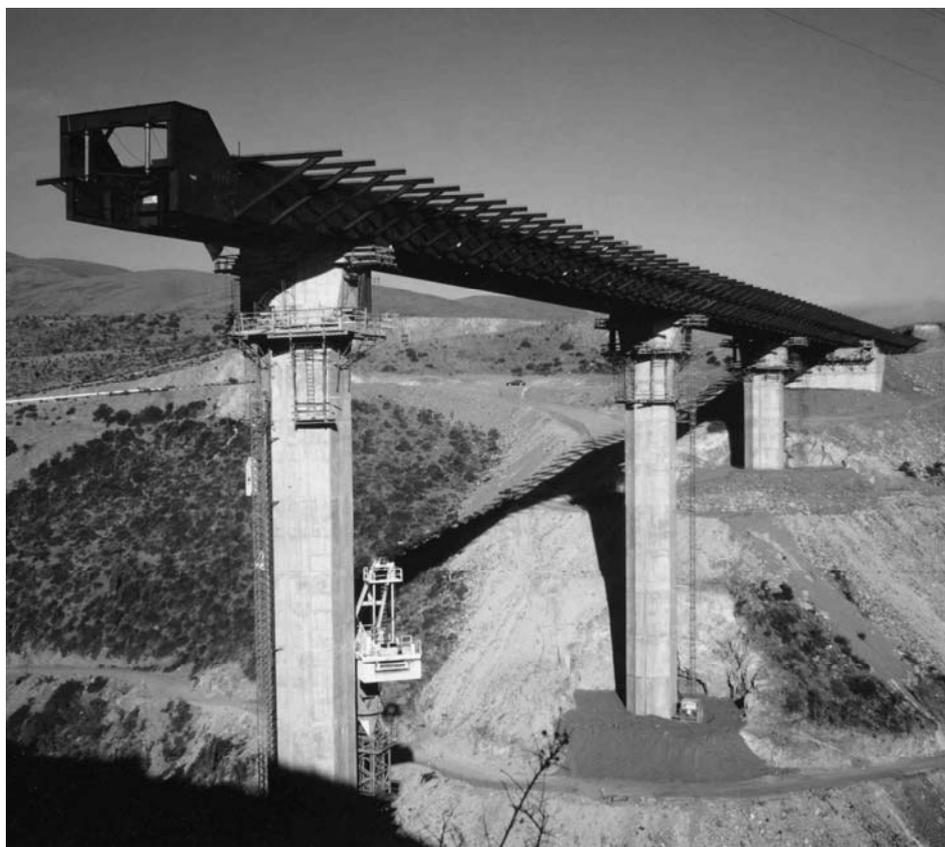
Favre R., Jaccoud JP., Burdet O., y Charif H. (1997). *Dimensionnement des Structures en Béton*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

---

CAPÍTULO XII

---

**ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS**



Los Vilos-La Serena (Chile).  
**Cortesía de SACYR S.A. [www.gruposyv.com](http://www.gruposyv.com)**

12.1. INTRODUCCIÓN

Calcular una estructura hiperestática resulta más complicado que calcular una estructura isostática. En éstas últimas basta con plantear las ecuaciones de equilibrio para obtener los diagramas de esfuerzos (axiles, cortantes, momentos flectores y torsores). Sin embargo, la estructura hiperestática requiere además el planteamiento de las ecuaciones de compatibilidad y de las ecuaciones de comportamiento del material.

De ahí que en el cálculo de estructuras hiperestáticas influyan las rigideces de los elementos y, por ende, las deformaciones que estos experimentan.

En capítulos anteriores se han tratado ampliamente estructuras isostáticas, tales como vigas simplemente apoyadas. Sin embargo, en las estructuras hiperestáticas aparecen dos fenómenos propios de este tipo de estructuras que es necesario considerar:

1. La redistribución de esfuerzos
2. La aparición de momentos secundarios

## 12.2. REDISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS

En la figura 12.1 se han representado una viga simplemente apoyada (isostática) y una viga continua de dos vanos (hiperestática). La sección transversal de ambas vigas es constante y tiene el mismo diagrama momento-curvatura ( $M-\phi$ ). Cuando la viga simplemente apoyada alcanza el  $M_{m\acute{a}x}$  -en el centro de la luz- se convierte en un mecanismo y rompe. Sin embargo, cuando la viga continua de la figura 12.1 alcanza el  $M_{m\acute{a}x}$  -en el apoyo central-, punto 1 del diagrama  $M-\phi$ , no colapsa teniendo la capacidad de absorber incrementos adicionales de giro para  $M_{m\acute{a}x}=cte$  -punto 2 del diagrama  $M-\phi$ . Este fenómeno se traduce en que la viga hiperestática no sólo no se arruina cuando alcanza el  $M_{m\acute{a}x}$  sino que puede soportar un aumento de carga (línea discontinua del diagrama de momentos flectores). Cuando esto ocurre se dice que se ha formado una rótula<sup>1</sup> en el apoyo central de la viga hiperestática.

El fenómeno por el cual se absorben incrementos de carga mediante la formación de rótulas en estructuras hiperestáticas se denomina redistribución de esfuerzos. Este fenómeno se presenta tanto de estructuras de hormigón armado como pretensado (por supuesto en estructuras metálicas y mixtas).

Para la comprobación de los ELU, la EHE (artículo 21.4) permite una redistribución de la ley de flectores de hasta un 15% del máximo momento negativo<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Unos textos hablan de rótula plástica y otros de zona plástica. Ambos conceptos son diferentes (Chen 1995).

<sup>2</sup> Siempre que se trate de dinteles de estructuras sensiblemente intraslacionales, y además la profundidad de la fibra neutra de la sección sobre el soporte, sometida al momento redistribuido, sea inferior a  $0.45d$ .

### 12.3. MOMENTOS PRIMARIOS Y MOMENTOS SECUNDARIOS

Las deformaciones que experimentan las estructuras isostáticas debido a las acciones exteriores no influyen en la distribución de esfuerzos, tal y como se aprecia en la viga isostática de la figura 12.1. Si esta viga isostática estuviera pretensada, los momentos flectores sobre la viga serían los debidos a la carga exterior más los debidos a la fuerza de pretensado. En este caso, a los momentos flectores asociados a la fuerza de pretensado se les denomina momentos flectores primarios de pretensado (ver figura 12.2).

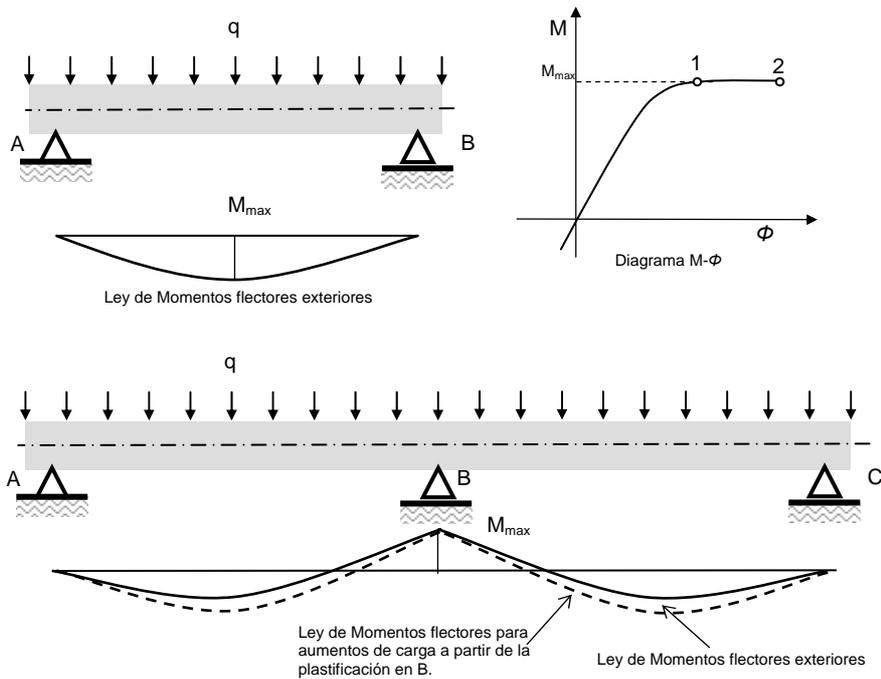


Figura 12.1 Isostatismo e Hiperestatismo

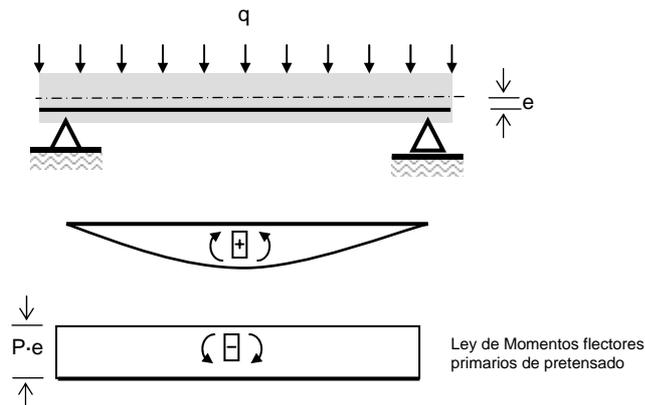


Figura 12.2 Momentos flectores primarios de pretensado

Sin embargo si la estructura es hiperestática el pretensado producirá deformaciones que pueden influir en las leyes de esfuerzos de la estructura. La fuerza de pretensado, con excentricidad constante  $e$ , tenderá a producir una contraflecha en el apoyo central de la viga pretensada de la figura 12.3. Para que la viga no se levante del apoyo intermedio será necesaria la aparición de unas reacciones adicionales en los apoyos, que modificarán las leyes de flectores y de cortantes sobre la viga. Los momentos provocados por estas reacciones adicionales se conocen como **momentos secundarios de pretensado**. Las leyes de momentos flectores secundarios tienen una distribución lineal entre apoyos ya que están asociadas a unas reacciones localizadas en los apoyos, ver figura 12.3.

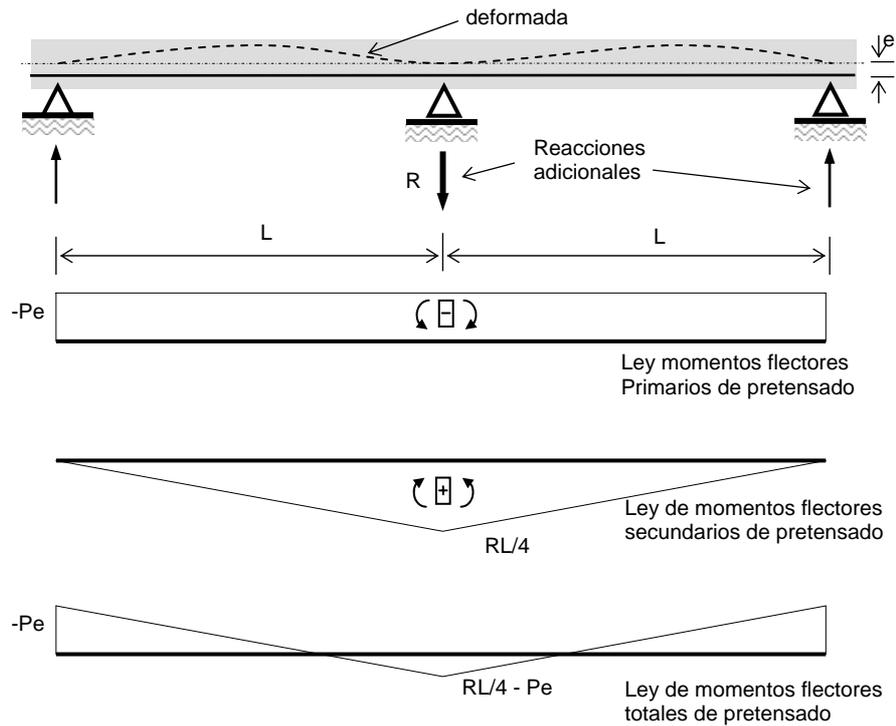


Figura 12.3. Momentos flectores de pretensado

Como consecuencia de la aparición de los esfuerzos secundarios la ley de momentos flectores de pretensado será la suma de los momentos flectores primarios y de los secundarios, tal y como se puede ver en la figura 12.3. La suma de las leyes de momentos primarios y secundarios da lugar a la denominada ley de momentos flectores totales de pretensado.

Se puede definir una nueva variable  $y$  de tal forma que el producto  $P \cdot y$  sea igual al momento flector total de pretensado (primario + secundario). La nueva variable  $y$  define un punto de aplicación de la resultante de compresiones del tendón de pretensado. La nueva excentricidad  $y$  (figura 12.4) se conoce como excentricidad efectiva  $y$ , una vez conocida, es posible operar tal y como se ha hecho en vigas isostáticas en capítulos anteriores.

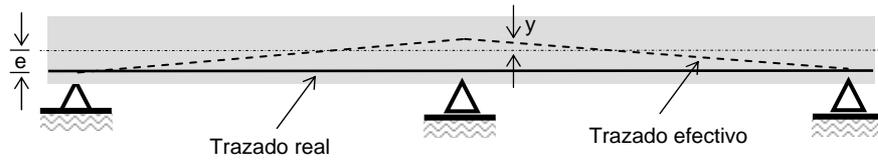


Figura 12.4 Trazado real y trazado efectivo

**Ejemplo**

Consideremos la viga continua de dos vanos pretensada de la figura 12.5. La fuerza de pretensado es constante de valor  $P$ . La excentricidad máxima es  $e$  en el vano de luz  $L$  y de  $2e$  en el vano de luz  $2L$ . Los momentos flectores primarios de pretensado son los representados en la figura 12.5.

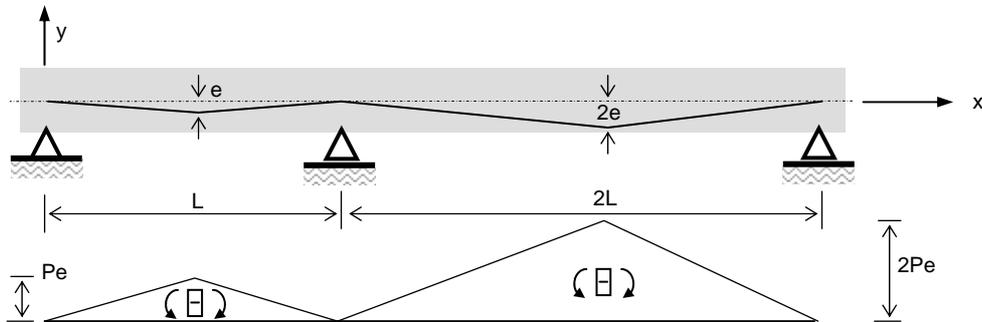


Figura 12.5. Viga pretensada y ley de momentos primarios de pretensado

En primer lugar vamos a deducir qué cargas aplicadas sobre la estructura darían lugar a la misma ley de momentos flectores que la dibujada en la figura 12.5. Para ello se puede operar de la siguiente forma: se libera el apoyo central y se aplican tres cargas puntuales  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , a  $0.5L$ ,  $L$  y  $2L$  respectivamente, tal y como se indica en la figura 12.6.

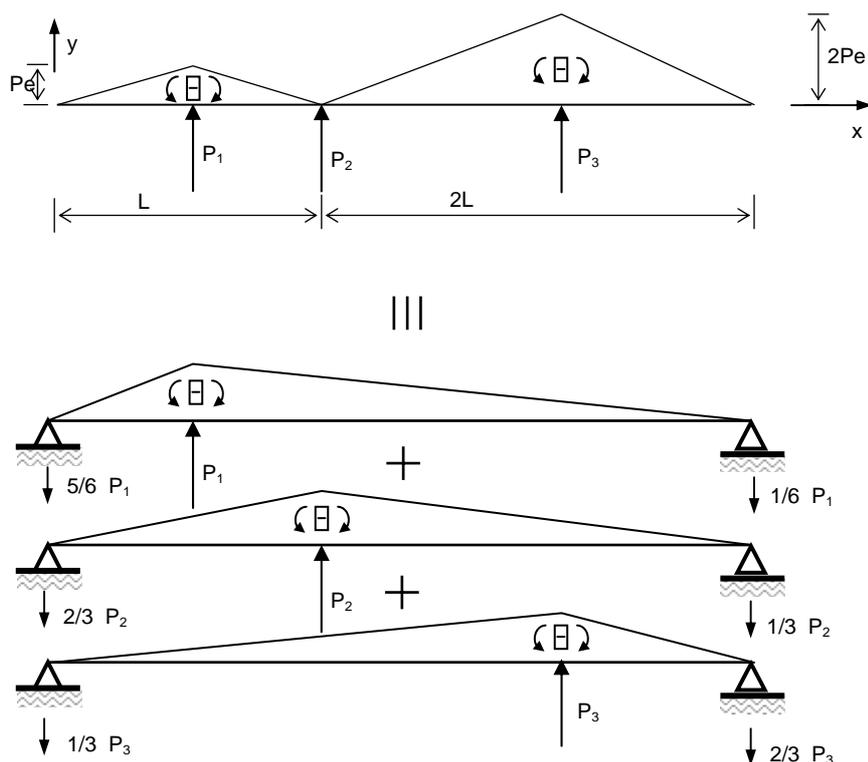


Figura 12.6. Sistema de cargas equivalentes

Para obtener el valor de las fuerzas puntuales aplicadas se impone la condición de igualdad de momentos flectores:

$$\begin{aligned} M &= P \cdot e & \text{para } x &= 0.5L \\ M &= 0 & \text{para } x &= L \\ M &= 2Pe & \text{para } x &= 2L \end{aligned}$$

Estas tres condiciones dan lugar a un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas, de cuya resolución se obtiene:

$$\begin{aligned} P_1 &= 4Pe/L, \\ P_2 &= -4Pe/L \\ P_3 &= 4Pe/L \end{aligned}$$

A continuación se procede de la siguiente manera: se considera la viga solicitada por las cargas  $P_1$  y  $P_3$ , cuyos valores son  $P_1 = P_3 = 4Pe/L$ , y se calcula el valor de la reacción ( $R$ ) en el punto de  $x = L$  para que el desplazamiento vertical de la viga en el apoyo central sea nulo. El valor de  $R$  distinto a  $P_2$  ( $-4Pe/L$ ) debido a que la viga de la figura 12.5 –liberado el apoyo intermedio- experimentará un desplazamiento

provocado por la fuerza de pretensado. La reacción adicional que da lugar a los esfuerzos secundarios será la diferencia entre  $R$  y  $P_2$ .

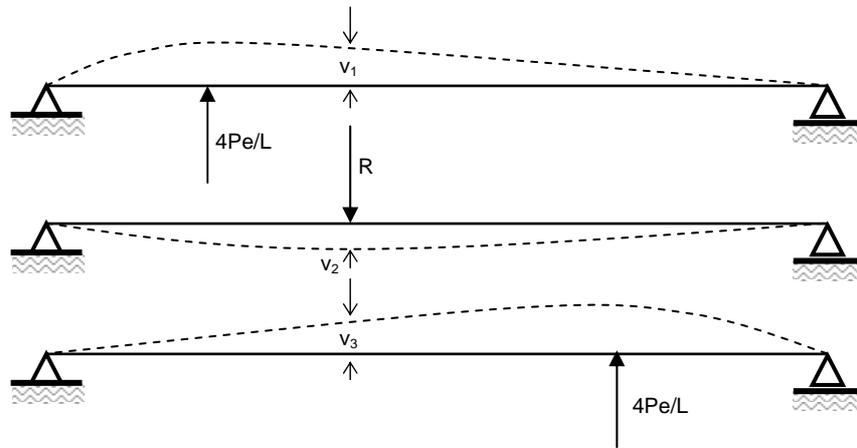


Figura 12.7. Desplazamientos en el apoyo central

En la figura 12.7 se representan los desplazamientos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  del punto situado a  $x=L$  producidos por las fuerzas  $P_1$ ,  $P_3$  y la reacción  $R$ . Este punto corresponde a la situación del apoyo intermedio -que se ha liberado-. Para este problema podemos utilizar cualquier prontuario de Resistencia de Materiales y deducir los valores de los desplazamientos:

$$v_1 = \frac{4 \frac{Pe}{L} \cdot \frac{L}{2} \cdot (3L-L)}{6 \cdot EI \cdot 3L} \left[ (3L)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 - (3L-L)^2 \right] = \frac{19 Pe}{18 EI} L^2$$

$$v_2 = \frac{4 \frac{Pe}{L} \cdot L \cdot L}{6 \cdot EI \cdot 3L} \left[ (3L)^2 - (L)^2 - (L)^2 \right] = \frac{14 Pe}{9 EI} L^2$$

$$v_3 = \frac{R \cdot 2L \cdot L}{6 \cdot EI \cdot 3L} \left[ (3L)^2 - (2L)^2 - (L)^2 \right] = \frac{4 RL}{9 EI} L^2$$

Imponiendo que el desplazamiento en el apoyo sea nulo, (i.e.  $v_1+v_3=v_2$ ), se puede deducir el valor de  $R$ :

$$R = \frac{47 Pe}{8 L}$$

La diferencia entre el valor de  $R$  y  $P_2$  corresponde a la reacción adicional que aparecerá en el apoyo central y que, a su vez, dará lugar a los esfuerzos secundarios de pretensado.

$$R_{\text{secundaria}} = \frac{47 Pe}{8 L} - 4 \frac{Pe}{L} = \frac{15 Pe}{8 L}$$

Las leyes correspondientes a los esfuerzos secundarios de pretensado se representan en la figura 12.8.

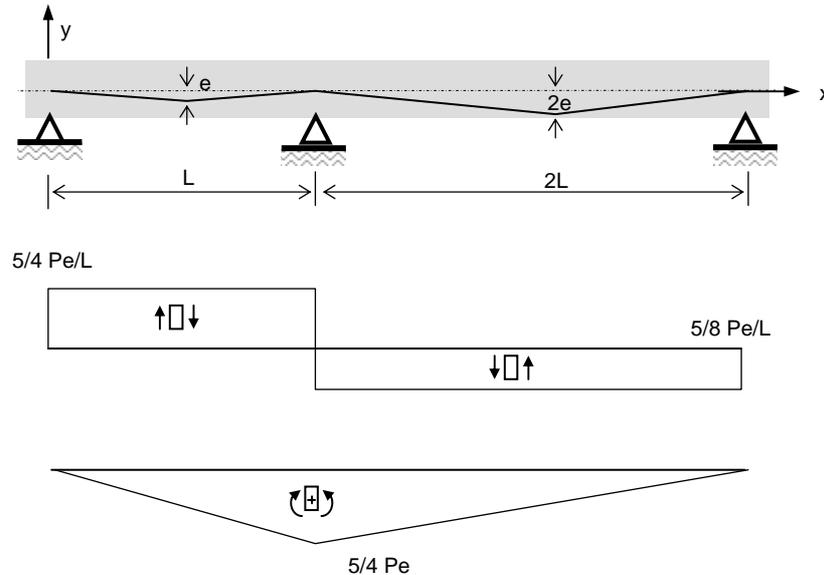


Figura 12.8. Ley de cortantes y momentos flectores secundarios de pretensado

El proceso seguido en este ejemplo ha sido el siguiente:

1. Cálculo de la deformación producida en una viga isostática por la fuerza de pretensado
2. Imposición de las limitaciones de los apoyos y determinación de las reacciones adicionales que generan los esfuerzos secundarios de pretensado.

• • •

Otra forma de calcular  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  es a partir de la proyección vertical de la fuerza de pretensado en los puntos de variación de la pendiente, ver figura 12.9. Los

valores de la proyección vertical de la fuerza de pretensado en el trazado de la viga son los indicados en la figura 12.9<sup>3</sup>:

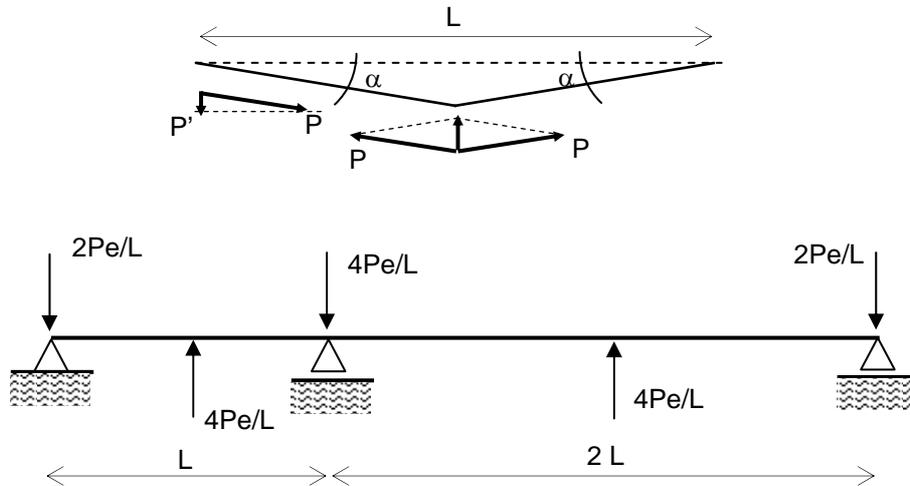


Figura 12.9. Fuerzas verticales producidas por el pretensado poligonal

Por trigonometría se pueden obtener los valores de las cargas indicadas en la figura 12.9:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{L/2} = \frac{2e}{L} \approx \operatorname{sen} \alpha$$

$$P_1 = P \operatorname{sen} \alpha = \frac{2Pe}{L}$$

$$P_2 = 2P \operatorname{sen} \alpha = \frac{4Pe}{L}$$

Resolviendo la estructura supuesta sometida a estas fuerzas verticales –que introduce la fuerza de pretensado– se pueden obtener los momentos totales de pretensado. Una vez obtenidos los momentos totales se pueden obtener los momentos secundarios restando de los totales los momentos primarios. Éste será el razonamiento que seguiremos en el caso de trazado parabólico, que se tratará a continuación.

Es interesante señalar que una viga con un trazado de tendón horizontal estará sometida únicamente a un par de momentos en los extremos y un axil, tal y como se indica en la figura 12.10.

<sup>3</sup> En el primer apoyo:  $P'$  y en el primer cambio de pendiente:  $P_1$ .



Figura 12.10. Momentos flectores ejercidos por el trazado horizontal

Cuando el trazado es parabólico la fuerza vertical que introduce el tendón de pretensado se deduce de la figura 12.11.

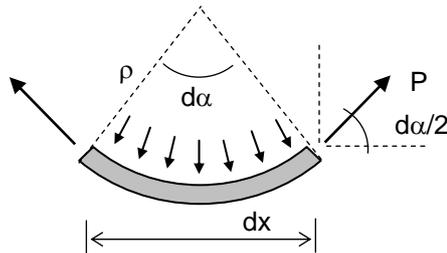


Figura 12.11. Equilibrio de fuerzas verticales sobre el tendón

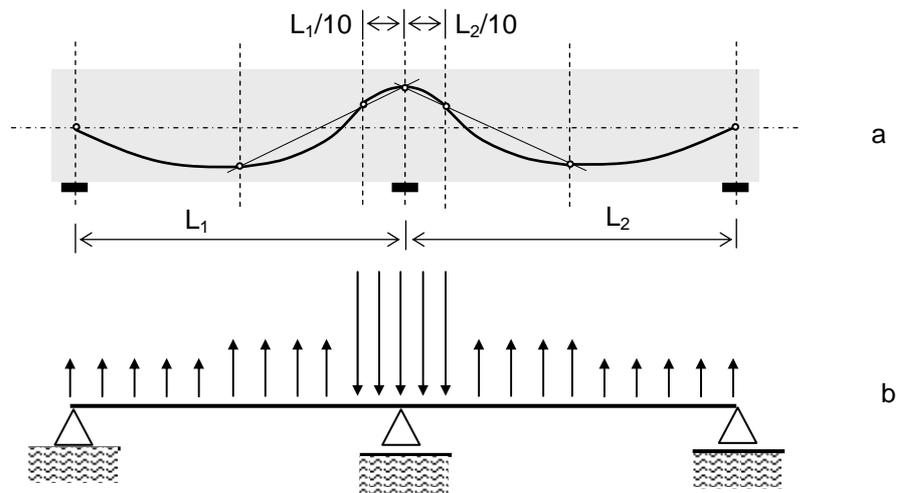
Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} w dx &= 2P \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} \approx 2P \frac{d\alpha}{2} \\ dx &= \rho d\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow w \rho d\alpha = P d\alpha \Rightarrow w = \frac{P}{\rho} \quad (12.1)$$

donde  $w$  es la proyección vertical de la fuerza distribuida,  $\rho$  es el radio de curvatura del trazado y  $P$  es la fuerza de pretensado.

La relación entre el radio de curvatura con la geometría del trazado de pretensado ya se vio en el apartado 4.3.

Para la viga continua de dos vanos cuyo trazado es el indicado en la figura 12.12a, el pretensado dará lugar a las fuerzas verticales que aparecen en la figura 12.12b.



12.12. a) Viga continua de dos vanos. b) Fuerzas verticales producidas por el pretensado

El considerar las fuerzas verticales producidas por el pretensado se debe a que son éstas las que producen la flexión del elemento y las responsables, por tanto, de la deformación de la viga. El efecto de los axiles se ha despreciado en el cálculo de las deformaciones estructurales, siendo a nivel sección -como se ha visto en el capítulo VI- donde la influencia del axil de pretensado es muy importante.

**Ejercicio**

En la viga de la figura 12.13 se va a determinar la distribución de momentos de pretensado, diferenciando entre momentos primarios y secundarios. La fuerza de pretensado considerada es de 1500 kN. Además se determinarán las reacciones en los apoyos producidas por el pretensado.

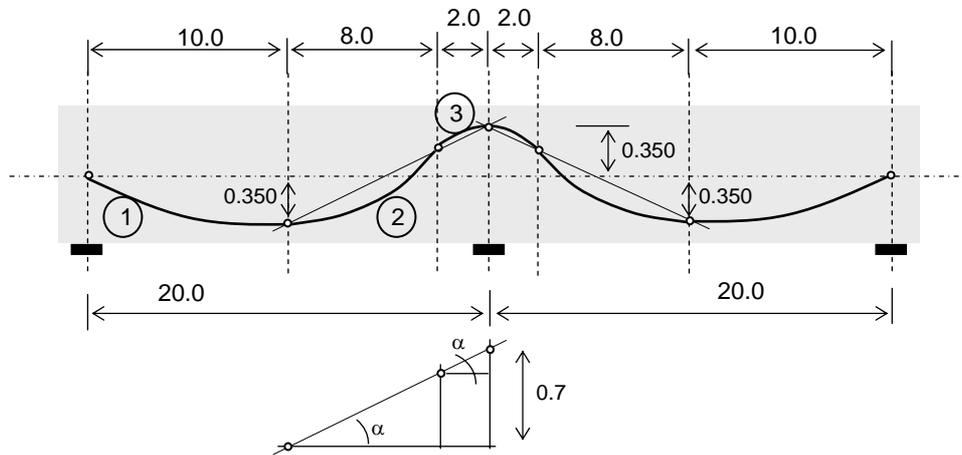


Figura 12.13. Viga continua de dos vanos

En cada vano hay tres parábolas. Mediante semejanza de triángulos se puede calcular la ordenada máxima de cada una de las parábolas ( $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ ). Conocida la ordenada se calcula el radio de curvatura de cada parábola y la carga uniforme que introduce sobre la viga:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0.7}{10} = \frac{e_2}{8} = \frac{e_3}{2}$$

$$\rho_1 = \frac{L_1^2}{2 \cdot e_1} = \frac{10^2}{2 \cdot 0.35} = 142.86 \text{ m} \rightarrow w_1 = \frac{P}{\rho_1} = \frac{1500}{142.86} = 10.50 \text{ kN/m}$$

$$\rho_2 = \frac{L_2^2}{2 \cdot e_2} = \frac{8^2}{2 \cdot 0.7 \frac{4}{5}} = 57.14 \text{ m} \rightarrow w_2 = 26.25 \text{ kN/m}$$

$$\rho_3 = \frac{L_3^2}{2 \cdot e_3} = \frac{2^2}{2 \cdot 0.7 \frac{1}{5}} = 14.29 \text{ m} \rightarrow w_3 = 104.97 \text{ kN/m}$$

Del cálculo de la viga continua sometida a las cargas  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  anteriormente calculadas se obtienen los momentos totales de pretensado. Ver figura 12.14.

El momento primario en el apoyo central es:

$$M=0.35 \cdot 1500=525 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y, por tanto, el momento secundario en el apoyo será  $206.06 \text{ kN}\cdot\text{m}$  ( $731.06-525=206.06$ ). El trazado efectivo tendrá en el apoyo una excentricidad  $y$ , cuyo valor viene dado por:

$$y = 731.06/1500 = 0.487 \text{ m}$$

lo que constituye un incremento de  $137 \text{ mm}$  sobre el trazado real.

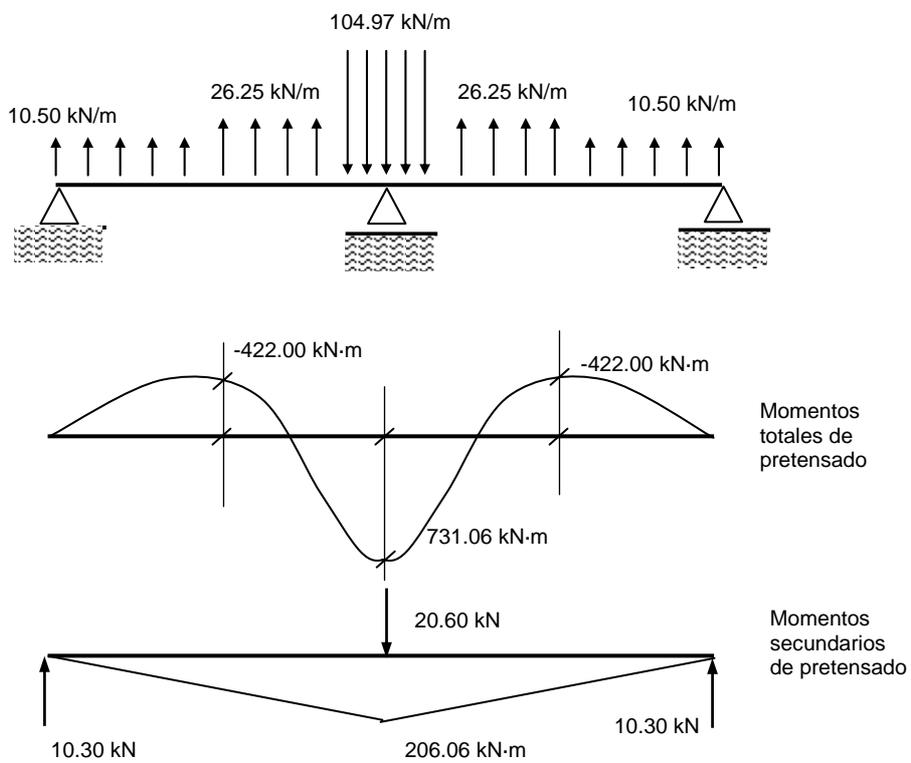


Figura 12.14. Momentos totales y secundarios de pretensado

#### 12.4. DISEÑO DEL TRAZADO DEL TENDÓN

En el capítulo anterior se trató el diseño enfocado especialmente a vigas isostáticas. En vigas hiperestáticas el trazado más empleado es el parabólico, cuyas características geométricas fueron tratadas en el capítulo 4.

En general se suele colocar el punto de inflexión entre parábolas a  $1/10$  de la luz, como en la viga de la figura 12.12, procurando que la excentricidad sea máxima en el punto de máximo momento.

#### Compensación de momentos

Consideremos el trazado parabólico de la viga isostática de la figura 12.15. La viga está sometida a una carga exterior  $q$  uniformemente distribuida siendo la ley de momentos flectores la que aparece en la figura 12.15. Si se resuelve el trazado mediante una parábola se procurará que el momento de pretensado contrarreste a la ley de momentos exteriores. Por tanto, si  $P$  es la fuerza de pretensado, la excentricidad  $e$  del trazado será  $e = M/P$ ; o lo que es lo mismo, la fuerza vertical que introduce el tendón será igual a la carga  $q$  cambiada de signo<sup>4</sup>. Téngase en cuenta que, desde el punto de vista de deformación vertical, es lo mismo emplear el diagrama de momentos de pretensado que el correspondiente a las cargas verticales introducidas por éste ya que ambos son iguales.

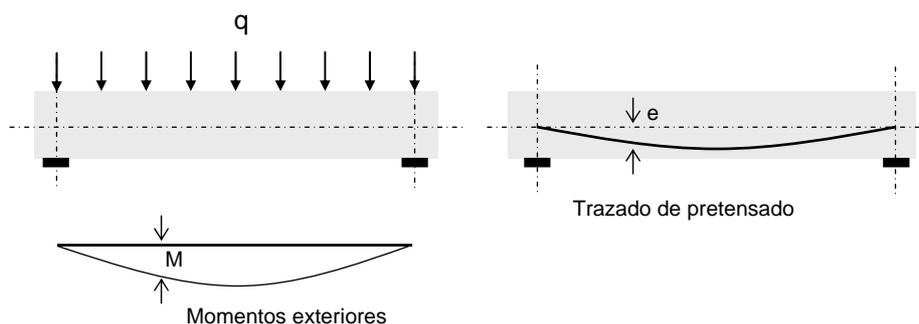


Figura 12.15. Trazado parabólico en una viga isostática

<sup>4</sup> El momento máximo en centro de vano es  $qL^2/8$ , luego la excentricidad máxima es  $e_{m\acute{a}x}=qL^2/8P$ , y el radio de curvatura (4.2) es:

$$\rho = \frac{L_0^2}{2e_0} = \frac{(L/2)^2}{2qL^2/8P}$$

Se puede comprobar que aplicando la expresión 12.1 se obtiene  $w=P/\rho=q$ .

Así pues, el trazado parabólico introduce una fuerza continua opuesta a la acción exterior  $q$ , puesto que no se producen esfuerzos secundarios. La ley de momentos flectores de la carga vertical de pretensado será igual a la ley de momentos primarios  $P \cdot e$ . Ver figura 12.16. A este trazado, obtenido de compensar directamente la ley de flectores, se le denomina trazado concordante.

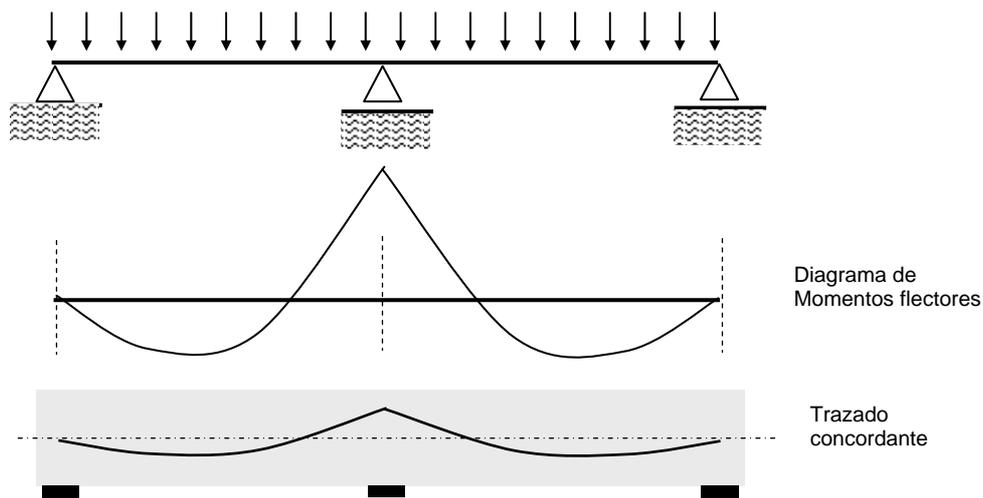


Figura 12.16. Trazado concordante de pretensado.

Obviamente, cuando no existen esfuerzos secundarios, los trazados real y efectivo de pretensado coinciden.

El trazado que se indica en la figura 12.16 no se puede materializar en vigas hiperestáticas dado que los trazados parabólicos tienen que ser del tipo de los que aparecen en las figuras 12.12 y 12.13. Sin embargo, suele ser habitual comenzar el primer tanteo partiendo del diagrama de momentos de las acciones exteriores, procurando que en los puntos de apoyo el radio sea mínimo.

### Transformación lineal

Anteriormente se ha visto que el trazado efectivo se obtenía a partir del trazado real modificándolo en función de los valores de los momentos secundarios. En general, se mantenía la forma del trazado ajustándola en los apoyos de manera que el resto del trazado experimentaba una variación lineal en función de la distancia al apoyo en el que realiza el ajuste y del valor de éste.

*Hernández-Gil*

Consideremos una aproximación rectilínea del trazado para el problema correspondiente a la figura 12.13, (figura 12.17a) y una transformación lineal del trazado ajustada al apoyo central, figura 12.17b.

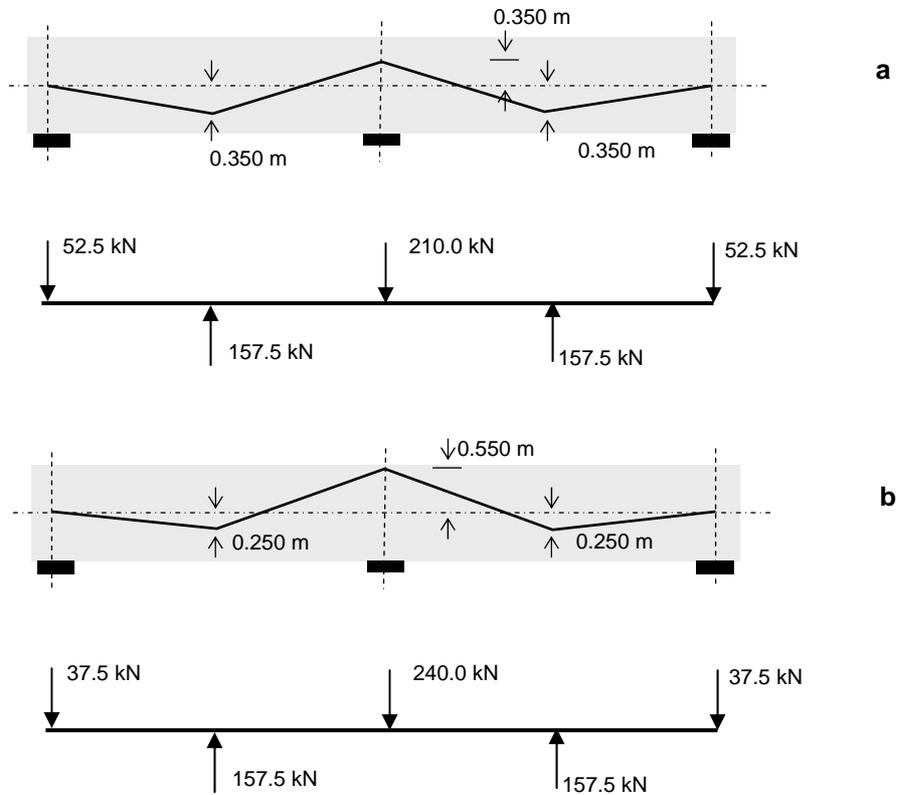


Figura 12.17. Transformación lineal

En las figuras 12.17a y b se han representado, además de los trazados, las cargas verticales equivalentes. Se aprecia que estas cargas equivalentes son distintas en los apoyos de las vigas 12.17a y b e iguales en el interior de los vanos. Puesto que las cargas en el interior de los vanos son las mismas en las dos vigas los momentos totales de pretensado serán idénticos aunque aisladamente no coincidan los momentos primarios y secundarios. Sin embargo, tal y como se ha visto en el apartado 12.3, los momentos totales son los únicos que intervienen en la definición del trazado efectivo<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> ó línea de presiones en el hormigón.

Si no se aproxima el curvo por uno rectilíneo esto no sería totalmente cierto puesto que el punto de inflexión habría variado ligeramente. Si embargo, este hecho no se suele tener en cuenta. Así pues, se puede concluir que las transformaciones lineales del trazado de pretensado no modifican los momentos totales de pretensado. Esta propiedad es muy útil para la modificación de trazados con objeto de verificar las limitaciones de tensiones, ya tratadas en el capítulo anterior.

**Referencias**

*Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-02)*. American Concrete Institute. Michigan. (Enero 2005).

Chen W.F., Sohal I. (1995). *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*. Springer-Verlag. Nueva York.

*Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.

Clough R.W. y Penzien J. (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.

Cook R.D., Malkus D.S. y Plesha M.e. (1989). *Concepts and Applications of Finite Elements Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York.



Tabla de secciones en cm<sup>2</sup> y pesos (cualquier tipo de acero)

Diámetro Ø (mm)	Peso (kg/m)	Número de barras								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0,15	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,37	1,57	1,77
6	0,22	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54
8	0,4	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52
10	0,62	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07
12	0,89	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18
14	1,21	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85
16	1,58	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10
20	2,47	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27
25	3,85	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18
32	6,31	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38
40	9,87	12,57	25,13	37,70	50,27	62,83	75,40	87,96	100,53	113,10





