



ugr

Universidad
de Granada

FORMULACIÓN Y ANÁLISIS DE
UN ALGORITMO DE INTEGRACIÓN
TEMPORAL CONSERVATIVO
CONSISTENTE PARA EL
PROBLEMA DE CONTACTO

Autor:

Rafael Bravo Pareja

Directores:

Dr. D. José Luis Pérez Aparicio

Dr. D. Rafael Gallego Sevilla

Tesis Doctoral

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica.

Universidad de Granada

Granada - Junio de 2011

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Rafael Bravo Pareja
D.L.: GR 4511-2011
ISBN: 978-84-694-5726-9

**FORMULACIÓN Y ANÁLISIS DE UN
ALGORITMO DE INTEGRACIÓN
TEMPORAL CONSERVATIVO
CONSISTENTE PARA EL PROBLEMA
DE CONTACTO**

Rafael Bravo Pareja

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Granada

Junio de 2011

Resumen

En este trabajo se presenta y se analiza la formulación de un nuevo algoritmo de integración temporal conservativo para problemas de contacto. Este algoritmo se ha desarrollado para cuerpos rígidos bajo el método de los elementos discretos, pero es fácilmente aplicable a cuerpos elásticos bajo el método de los elementos finitos.

La clave de este trabajo es la conservación del momento lineal y angular y la conservación–disipación consistente de energía para los casos sin y con fricción empleando un método de penalty mejorado. Para alcanzar este objetivo, se ha partido del estudio en profundidad de los fundamentos de la mecánica hamiltoniana que han permitido formular y analizar las propiedades conservativas del método de los elementos discretos. Posteriormente se ha estudiado la mecánica del contacto, haciendo especial hincapié en el estudio de la conservación de momentos y energía del método del penalty como medio para forzar la condición de impenetrabilidad.

Las formulaciones previas de algoritmos de integración temporal aplicados a problemas de contacto han demostrado que la energía total de los cuerpos decrece durante el contacto, incluso si no hay fricción, debido a una transferencia artificial de energía cuerpo–resorte elástico de penalty que da lugar a un balance de energía inestable. Otras formulaciones evitan incrementos de energía y por tanto consiguen la estabilidad forzando a que la energía se disipe de manera monotónica. El gran inconveniente de todas ellas es su incapacidad de reproducir la cinemática, la dinámica y la disipación energética del contacto de los experimentos y de las formulaciones analíticas. Consecuentemente se introducen errores en las trayectorias y velocidades.

El nuevo algoritmo se formula bajo un marco conservativo cuyos términos tienen en cuenta la energía disipada por fricción. Este marco ajusta la respuesta consistente mediante la modificación cinemática y dinámica del contacto, para ello se introduce o se disipa energía en los cuerpos y se emplea un modelo mejorado del método del Penalty basado en un resorte elástico y en un amortiguador viscoso que fuerzan la conservación de energía para el contacto sin fricción o la disipación consistente para el friccional. Este método fuerza de manera exacta las condiciones de Kuhn–Tucker cuando sus parámetros de penalización tienden a infinito y además, el amortiguador viscoso controla las vibraciones. El resultado es que la cinemática, la dinámica y la energía es consistente con el comportamiento físico esperado.

Para probar la eficiencia del nuevo algoritmo, éste se ha aplicado a varios problemas de cuerpos rígidos con y sin fricción bajo el método de los elementos discretos. Los dos primeros problemas sin fricción consisten en la simulación numérica y comparación experimental del problema de Carom (problema del juego de billar) y del péndulo de Newton. El resto de problemas friccionales implican un número medio de contactos y se demuestra la robustez del nuevo algoritmo para conservar la energía en situaciones complejas.

Para el caso friccional se simula, se analiza y se compara con la formulación analítica disponible la cinemática, dinámica y disipación energética de tres problemas sencillos. Finalmente, se procede a la simulación de situaciones complejas que son validadas por medio de resultados experimentales.

Abstract

In this dissertation we present the formulation and analysis of a new conserving energy consistent time integration scheme for contact problems. This scheme is developed for rigid bodies using the discrete element method but it is applicable to elastic bodies and the finite element method.

The key of this work is that the linear and angular momentum are conserved and energy is conserved for frictionless contact or consistently dissipated for frictional in every contact using an enhanced Penalty method. In order to reach this target, it has been deeply analyzed the basis of the Hamiltonian mechanics that has allowed to formulate the equations of the discrete element method and analyze its conserving properties. Additionally, the contact mechanics has been studied, focusing in the conservation conditions for momenta and energy using the penalty method as a tool to enforce the impenetrability condition.

Previous formulations for time integration schemes applied to contact problems have shown that the total bodies' energy decreases for contact due to an artificial energy transfer between the penalty spring and the contacting bodies even if no friction is present, that causes an unstable energy balance. More recent formulations were stable, forcing the energy dissipation to be monotonic in order to prevent unstable energy growth. The shortcoming of many was that they were not able to reproduce the real kinematics and dissipation of physical processes, provided by analytical formulations and experiments consequently introduce errors in trajectories and velocities.

The new time integration scheme formulates a conserving framework based on a physical energy dissipation estimator. This framework uses an enhanced Penalty contact model based on a spring and a dashpot, enforcing the energy conservation for frictionless contact and the physical frictional energy dissipation, controlling gap vibrations and modifying the velocities and contact forces during each time step. This method approximately enforces the first and second Kuhn–Tucker conditions. The result is that the conserved or the dissipated energy, kinematics and contact forces are consistent with the expected physical behavior.

In order to prove the efficiency of the new algorithm, this has been applied to several frictionless and frictional rigid problems using the Discrete Element Method. The first two frictionless problems consist of the simulation and analytical comparison of the Newton's Cradle and Carom problems (billiard pool problem). The rest of the frictionless problems imply a medium number of contacts and have been chosen to show the robustness of the new algorithm to conserve energy in complex situations.

For the frictional case, three simple problems have been simulated and compared with the available analytical formulation. Finally, more complex frictional situations have been simulated and validated through experimental results.

Agradecimientos

El trabajo desarrollado a lo largo de este documento no sería posible sin el apoyo económico ofrecido por los Proyectos Nufric E/03/B/F/PP-149.038 (Numerical Friction) enmarcado dentro de la Agencia Leonardo da Vinci, MFOM I+D (2004/38) del Ministerio de Fomento y MICIIN BIA-2008-00522 del Ministerio de Ciencia e Innovación. Así como por el del Ministerio de Educación y Ciencia dentro de su programa de becas para la formación de profesorado universitario FPU.

Especialmente agradezco la paciencia y conocimientos que mi director D. José Luis Pérez Aparicio ha puesto en este trabajo tanto en los aspecto numéricos como de redacción formal del texto. También quería agradecer el apoyo científico del profesor T.A. Laursen durante mi estancia en la Universidad de Duke.

Finalmente lo dedico a mi familia y a todos mis compañeros del Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica de la E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Granada por su apoyo y compañerismo.

Tabla de símbolos

\mathcal{A}	Área del cuerpo
A_L	Área del ciclo
A_T	Área del triángulo equivalente
A	Matriz de amplificación
α	Inclinación del eje mayor de una elipse con la horizontal
β	Parámetro del método de Newmark
c	Valor del amortiguamiento
C	Velocidad normal analítica de desplazamiento relativo entre cuerpos
Δt	Incremento de tiempo
e	Coefficiente de restitución
E_y	Módulo de Young
\mathbb{E}	Energía
ϵ	Deformación unitaria
δ_{kj}	Delta de Kronecker
$\partial\Omega$	Frontera del dominio espacial
$\partial\Omega^*$	Frontera del dominio espacial discreto
Δ	Incremento
D	Invariante de la matriz de amplificación A
\mathbf{f}_{ext}^i	Fuerza exterior aplicada al cuerpo i
\mathbf{f}_c^i	Fuerza de contacto aplicada al cuerpo i
\mathbf{f}_c^{ik}	Fuerza de contacto aplicada al cuerpo i debido al contacto con el cuerpo k
\mathbf{f}_{cN}^{ik}	Fuerza normal de contacto aplicada al cuerpo i debido al contacto con el cuerpo k
\mathbf{f}_{cN}^{iik}	Fuerza normal adicional de contacto aplicada al cuerpo i debido al contacto con el cuerpo k
\mathbf{f}_{cT}^{ik}	Fuerza tangencial de contacto aplicada al cuerpo i debido al contacto con el cuerpo k
\mathbf{f}_{cT}^{iik}	Fuerza tangencial adicional de contacto aplicada al cuerpo i debido al contacto con el cuerpo k
\mathbf{f}_h	Empuje de Arquímedes
\mathbf{f}_s	Fuerza de Stokes
\mathcal{F}^j	Función de forma j
Φ	Función de deslizamiento
ϕ	Ángulo de rozamiento
\mathbf{g}	Aceleración de la gravedad
g_N	Distancia mínima normal entre cuerpos
\dot{g}_N	Velocidad normal de penetración entre cuerpos
g_T	Desplazamiento tangencial relativo entre cuerpos
\dot{g}_N	Velocidad normal de penetración entre cuerpos

γ	Parámetro del método de Newmark
γ_t	Coordenada polar de posición de un cuerpo
Γ^i	Frontera del cuerpo i
Γ_c^i	Frontera de contacto del cuerpo i
\mathcal{H}	Función hamiltoniana
\mathcal{I}_i	Inercia del cuerpo i
\mathcal{J}	Momento angular
K	Rigidez estructural
\mathcal{K}	Parámetro de Stokes
K_N	Rigidez normal del penalty
K_T	Rigidez tangencial del penalty
L	Longitud
L'	Longitud tras deformación
\mathcal{L}	Función lagrangiana
λ_N	Multiplicador de Lagrange aplicado en dirección normal
λ_T	Multiplicador de Lagrange aplicado en dirección tangencial
\mathbf{N}^m	Matriz que contiene a las funciones de forma de orden m
m	Orden de discretización
M_i	Masa del cuerpo
n	Número de coordenadas generalizadas
n_{bd}	Número de cuerpos
$n, n+1/2, n+1$	Configuraciones en los instantes de tiempo n , $n + 1/2$ y $n + 1$
ν	Viscosidad
\mathbf{M}_i^{-1}	Inversa de la matriz de masas del cuerpo i
μ	Coefficiente de fricción
Ω	Dominio espacial
Ω^*	Dominio espacial discreto
ϑ	Frecuencia adimensional de vibración
ϖ	Frecuencia natural de vibración
ω	Velocidad angular de rotación
\mathbf{p}	Momento lineal
\mathbf{p}_{cN}^{ik}	Momento lineal adicional en la dirección normal al contacto entre los cuerpos i y k
\mathbf{p}_{cT}^{ik}	Momento lineal adicional en la dirección tangencial al contacto entre los cuerpos i y k
$\psi_{1N}^{ik}, \psi_{1T}^{ik}$ ψ_{2N}^{ik} y ψ_{2T}^{ik}	Parámetros de proporcionalidad de las variables adicionales en la dirección normal y tangencial
\mathbf{q}_i	Coordenada generalizada
$\mathbf{r}(\cdot)_i$	Vector de posición
r	Radio del cuerpo
ρ_s	Densidad del cuerpo
ρ_f	Densidad del fluido

\mathbf{R}^{ik}	Vector normal unitario al punto de contacto de los cuerpos ik
S	Velocidad tangencial analítica de desplazamiento relativo entre cuerpos
σ	Tensión normal
t	Instante de tiempo
Δt	Paso de tiempo
\mathbf{T}^{ik}	Vector tangente unitario al punto de contacto de los cuerpos ik
\mathcal{T}	Energía cinética
τ	Tensión tangencial
θ	Ángulo del vector velocidad
θ^*	Ángulo del vector velocidad que tras el impacto el contacto cambia de Stick a Slip
\mathcal{V}	Energía potencial
V	Vector velocidad
v_x	Componente de la velocidad en la dirección x
v_y	Componente de la velocidad en la dirección y
w	Peso propio
X	Coordenada del punto de contacto del cuerpo i
Y	Coordenada del punto de contacto del cuerpo k
\mathbf{u}	Desplazamiento
ξ	Amortiguamiento numérico
ξ_N	Coefficiente de amortiguamiento del penalty normal
ξ_T	Coefficiente de amortiguamiento del penalty tangencial
\times	Producto vectorial
$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$	Parámetros de la expresión de las variables adicionales

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Agradecimientos	VII
Tabla de símbolos	IX
1. Introducción	1
1.1. Introducción a los problemas no lineales	1
1.1.1. Introducción a la no linealidad de contacto	5
1.1.2. Aplicaciones del contacto	8
1.2. Concepto de discretización espacial y temporal	10
1.3. Motivación	10
1.4. Antecedentes	14
1.5. Objetivos y contribuciones	17
1.6. Estructura del trabajo	19
2. Formulación del método de los Elementos Discretos	23
2.1. La Dinámica Analítica	23
2.1.1. Coordenadas Generalizadas	24
2.1.2. El principio de D'Alembert en Coordenadas Generali- zadas	24
2.1.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange	27
2.2. Sistemas de múltiples cuerpos	31
2.2.1. Ecuaciones de Hamilton. Introducción	31
2.2.2. Transformada de Legendre	32
2.2.3. Aplicación de las Ecuaciones de Hamilton a dos masas en contacto	34
2.2.4. Integrales primeras	35
2.3. Formulación del método de los Elementos Discretos	37
2.3.1. Discretización espacial	37
2.3.2. Discretización espacial de primer orden de las coorde- nadas generalizadas	38
2.3.3. Discretización de las coordenadas generalizadas me- diante aproximaciones de alto orden	39
2.3.4. Expresión de \mathbf{q} y \mathbf{p} de primer orden en función de las coordenadas generalizadas	40
2.3.5. Formulación general del método de los Elementos Dis- cretos	42

ÍNDICE GENERAL

3. La mecánica del contacto	47
3.1. Descripción cinemática y dinámica del contacto	47
3.2. Algoritmos de contacto	52
3.2.1. Método de los multiplicadores de Lagrange	52
3.2.2. Método del Penalty	56
3.3. Implicaciones energéticas de los algoritmos de contacto	58
3.4. Leyes de conservación	59
3.4.1. Conservación del momento lineal total	61
3.4.2. Conservación del momento angular total	61
3.4.3. Balance de energía total, conservación–disipación	63
4. Formulación del algoritmo de integración sin fricción	67
4.1. Formulación de ACEM para el problema de contacto sin fricción	68
4.1.1. Introducción	68
4.1.2. Mejora conservativa	70
4.2. Conservación discreta del momento lineal, angular y energía.	
Marco de ecuaciones de conservación	73
4.2.1. Balance discreto del momento lineal total	74
4.2.2. Balance discreto del momento angular total	74
4.2.3. Balance discreto de energía total de los cuerpos	76
4.3. Análisis de la dinámica del problema de contacto, método del	
Penalty Mejorado	81
5. Formulación del algoritmo friccional	87
5.1. Formulación de ACEM para el caso friccional	87
5.2. Conservación discreta del momento lineal, angular y disipa-	
ción consistente de energía. Marco de ecuaciones de conserva-	
ción	92
5.2.1. Balance discreto del momento lineal total	92
5.2.2. Balance discreto del momento angular total	93
5.2.3. Balance discreto de energía total	95
5.3. Contacto dinámico friccional, método del Penalty mejorado	101
6. Simulaciones numéricas sin fricción	103
6.1. Introducción	103
6.2. El problema de Carom	103
6.3. La dispersión de las bolas de billar	107
6.4. El péndulo de Newton	109
6.5. Llenado del cangilón	113
7. Simulaciones numéricas con fricción	119
7.1. Introducción	119
7.2. Problema del juego de bolos	119
7.3. Problema de carom con partícula elíptica	122

7.4. El problema del péndulo cóncavo	125
7.5. El colapso de una columna granular bidimensional	126
7.6. Ensayo de cortante cíclico	131
7.6.1. Introducción	131
7.6.2. Preparación de la muestra	132
7.6.3. Operativa del ensayo	134
7.6.4. Resultados	137
7.7. El ensayo de sedimentación	140
7.7.1. Introducción	140
7.7.2. Procedimiento	148
7.7.3. Implementación de la ley de Stokes en ADfr	150
7.7.4. Parámetros del experimento, propiedades constitutivas	152
7.7.5. Simulaciones numéricas	154
8. Conclusiones y futuras líneas de trabajo	165
8.1. Conclusiones	165
8.2. Futuras líneas de trabajo	166
9. Conclusions and future work	169
9.1. Conclusions	169
9.2. Future work	170
A. Formulaciones analíticas	173
Bibliografía	177

Índice de figuras

1.1. Problema del voladizo rígido. Modelo (izqda.). Relación $\theta - \mathbf{f}$ no lineal y aproximación lineal (drcha.)	3
1.2. Problema de las dos barras paralelas (no linealidad material). Modelo (sup.), comportamiento tensodeformacional de cada barra (inf. izqda.), comportamiento global (inf. drcha.)	4
1.3. Problema de la barra inclinada (no linealidad geométrica + material). Modelo (izqda.), relación $\theta - \mathbf{f}$ (drcha.)	4
1.4. Testimonio histórico del conocimiento del dominio de la lubricación para reducir la fricción en el movimiento de grandes bloques rocosos. Ilustración tomada de la tumba de Djehutiotep en Deir El Bersheh (1850 A.C.), antiguo Egipto	5
1.5. Hipótesis sobre los distintos mecanismos empleados para facilitar el desplazamiento de bloques rocosos en Stonehenge (Edad del Bronce), ref. [Lav]	6
1.6. No linealidad de contacto. Impenetrabilidad entre cuerpos . .	7
1.7. No linealidad de contacto. Desplazamiento tangencial con fricción	7
1.8. Simulación numérica mediante MED (sup.) y comparación experimental (inf.) del fallo de un muro de mampostería, ref. [BPR10]	8
1.9. Simulación numérica mediante MED de un arco de mampostería. Fallo y formación de rótulas, ref. [BPA07]	9
1.10. Análisis numérico por MEF del la interacción rueda-pavimento, realizado en ref. [Lau08]	9
1.11. Discretización espacial empleando MEF, MEC y MED (sup.). Discretización temporal (inf.)	11
1.12. Rebote de un disco contra superficie rígida. Posición y , velocidad V y energía \mathbb{E} para Trap., Máx.D. y An	12
1.13. Método del Penalty. (izqda.) Compuesto por una ó dos masas m , resorte elástico de rigidez K_N y \mathbf{f}_c que fuerza $g_N \rightarrow 0$. (drcha.) Respuesta dinámica caracterizada por un cambio súbito en g_N , si $K_N \uparrow$ se producen altas frecuencias $\varpi \uparrow$ (fenómeno de Gibbs), dificultad obtener aproximación temporal discreta	13
1.14. Problema de Signorini para cuerpo rígido. La transferencia artificial de energía cuerpo-penalty disminuye la energía del cuerpo para [LC97], [AP98], mientras que ACEM y [LL02] conservan la energía durante el contacto	17
2.1. Lagrange (1736–1813)	24
2.2. Definición de la configuración y posición de un punto P de un cuerpo i de tres sistemas mecánicos distintos empleando coordenadas generalizadas	25
2.3. D’Alembert (1717–1783)	26

ÍNDICE DE FIGURAS

2.4. Aplicación del principio de D'Alembert para la obtención de las ecuaciones de movimiento de sistema mecánico sencillo compuesto por dos masas	28
2.5. Ejemplo de un sistema de múltiples cuerpos tratado en este trabajo	31
2.6. Hamilton (1805–1865)	32
2.7. Integrales primeras. Conservación de energía \mathcal{H} y momento lineal total \mathbf{p}^{tot} (sup. izqda.), energía y momento angular total \mathcal{J}^{tot} (sup. drcha.), y energía y momentos totales (inf.)	36
2.8. Discretización de dominio Ω^i en Ω^{i*} mediante un único nodo (\bullet). El contorno Ω^i se transforma en Ω^{i*} definido por curvas analíticas sobre las que se puede medir distancias entre cuerpos	38
2.9. Movimiento de traslación de sólido rígido	42
3.1. Contacto entre dos cuerpos i y k . Ptos. de contacto X e Y , proyección de mínima distancia g_N^{ik} , vectores unitarios a la superficie de contacto y partición de las fronteras Γ^*	48
3.2. Interacción entre cuerpos en contacto definida por medio de la fuerza de contacto de componentes f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik} , f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik} . Se han separado los cuerpos para facilitar la representación de las fuerzas	49
3.3. Deslizamiento de un bloque sobre una superficie rugosa. El deslizamiento se produce (slip) cuando la fuerza tangencial \mathbf{f}_{cT} supera a la friccional $\mu \mathbf{f}_{cN}^{ik}$. En esta situación $\Phi^{ik} = 0$, $g_T^{ik} \neq 0$ y $\dot{g}_T^{ik} \neq 0$. En el caso contrario no se produce movimiento, caso stick $\Phi^{ik} < 0$. Nótese que para stick la fuerza de reacción en la base es \mathbf{f}_{cT}^{ik}	51
3.4. Algoritmos de contacto. Multiplicadores de Lagrange (sup.), Método del Penalty (inf.)	53
3.5. Ejemplo básico de aplicación de los algoritmos de contacto . .	54
3.6. Funcional energía $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \lambda_N)$. Multiplicadores de Lagrange . .	55
3.7. Funcional energía $\mathcal{H}^*(q)$ bajo el método del Penalty. Convergencia de la solución aproximada (\bullet) a la exacta (\circ) al incrementar K_N	58
3.8. Representación gráfica de las condiciones de Kuhn–tucker para contacto normal. Multiplicadores de Lagrange (izqda.) y método del Penalty (drcha.)	60
3.9. Representación gráfica de las condiciones de Kuhn–tucker para contacto tangencial no deslizante. Multiplicadores de Lagrange (izqda.) y método del Penalty (drcha.)	60
3.10. Conservación del momento lineal total \mathbf{p}^{tot} antes, durante y después del contacto (izqda.). Fuerzas de contacto entre cuerpos, iguales y en sentido opuesto (drcha.)	62

3.11. Conservación del momento angular total \mathcal{J}^{tot} antes, durante y después del contacto	64
4.1. Integrador de Simo–Tarnow, obtención de \mathbf{q}_{n+1} y \mathbf{p}_{n+1} a partir de la acción de un momento lineal $\mathbf{p}_{n+1/2}$ y fuerza de contacto \mathbf{f}_{cN} $n+1/2$ calculada en el instante $n+1/2$	69
4.2. Mejora conservativa mediante la adición \mathbf{p}_{cN}^i y \mathbf{f}_{cN}^i tal que ajustan la solución a una respuesta conservativa	70
4.3. Variables adicionales \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{p}_{cN}^{ik} , modificación de la cinemática y dinámica del contacto ajustándola a una respuesta conservativa. Cuerpos separados para facilitar la interpretación de la figura	72
4.4. La variable adicional \mathbf{p}_{cN}^{ik} actúa en la dirección $\mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}$, mediante la proyección del incremento $(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)$ en tal dirección	72
4.5. Π_1 Superficie de energía del cuerpo constante $\Delta\mathbb{E}^i = 0$. Π_2 Superficie de energía del cuerpo + energía de contacto constante. A es la transferencia de energía del cuerpo al penalty $\Delta\mathbb{E}^i < 0$. Por medio de B, ACEM calcula \mathbf{p}_{cN}^i and \mathbf{f}_{cN}^i , desplazando $\mathbf{q}_{n+1/2}^{*i}, \mathbf{p}_{n+1/2}^{*i}$ a Π_1	73
4.6. Variación discreta del momento lineal para un cuerpo, igual a la acción de la fuerzas de contacto en $n+1/2$	74
4.7. Conservación discreta del momento lineal. Como las fuerzas de contacto son iguales y opuestas, el algoritmo calcula el incremento $\Delta\mathbf{p}^i/\Delta t, \Delta\mathbf{p}^k/\Delta t$ de cada cuerpo tal que el momento lineal total se conserva	75
4.8. Variación discreta del momento angular para un cuerpo, igual a la acción del momento la fuerzas de contacto en la configuración $n+1/2$	76
4.9. Conservación discreta del momento angular total \mathcal{J}^{tot} . El momento se mantiene constante mediante la modificación en $n+1/2$ del momento angular de cada cuerpo	77
4.10. El momento angular se conserva ya que el vector $\mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}$ y $\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik}$ son paralelos. 1, 2 vectores $\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik}$ y $\mathbf{f}_{cN}^{ki} + \mathbf{f}_{cN}^{ki}$	77
4.11. Balance energético de la ecuación 4.13 dicho balance es igual al correspondiente de la fuerza de contacto $\Delta\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}$ más el de las variables adicionales $\Delta\mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}$ y $\Delta\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{i'}}$	79
4.12. Conservación de energía para el contacto entre dos cuerpos mediante la adición de \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{p}_{cN}^{ik}	80
4.13. Modelo mejorado de método de Penalty	83

ÍNDICE DE FIGURAS

4.14. Influencia de ξ_N en g_N^i , p_{cN}^i , ψ_{1N}^i y ψ_{2N}^i . Conforme aumenta ξ_N , la solución del algoritmo aproxima a las condiciones de Kunh–Tucker. La transferencia artificial de energía disminuye, p_{cN}^i , g_{Nn+1}^i y ψ_{2N}^i tienden a cero (izqda. y drcha.), y ψ_{1N}^i aumenta ya que f_{cN}^i se vuelve más rígido (drcha.)	86
4.15. Influencia de ξ_N en f_{cN}^i , f_{cN}^i , $\Delta E_{p_{cN}^i}$ y $\Delta E_{f_{cN}^i}$. A medida que ξ_N aumenta, la fuerza de contacto f_{cN}^i aumenta ya que el par formado por el resorte elástico y amortiguador se vuelve más rígido. La conservación implica que $f_{cN}^i + f_{cN}^i$ sea constante (izqda.), y por tanto que f_{cN}^i decrezca. $\Delta E_{p_{cN}^i}$ y $\Delta E_{f_{cN}^i}$ decrece a media que la solución se acerca a las condiciones de Kuhn–Tucker (drcha.)	86
5.1. Integrador de Simo–Tarnow, obtención de q_{n+1}^i y p_{n+1}^i a partir de la acción de un momento lineal $p_{n+1/2}^i$ y fuerzas de contacto f_{cN}^i , f_{cT}^i en el instante $n + 1/2$	88
5.2. Modelo de contacto para los casos stick y slip	91
5.3. Funcionamiento de ADfr. Inicialmente, q_n^i, p_n^i se encuentran sobre la superficie de energía de cuerpo constante Π_1 . En el contacto se produce una transferencia artificial de energía dada por A, trasladando la solución a la superficie no consistente Π_2 . ADfr modifica esta solución en $n + 1$ y la desplaza a través de B a Π_1 para stick o a la superficie de disipación de energía consistente Π_3 para slip	92
5.4. Variación discreta del momento lineal para un cuerpo, igual a la acción de la fuerzas de contacto en la configuración $n + 1/2$	93
5.5. Conservación discreta del momento lineal total. Como las fuerzas de contacto son iguales y opuestas, el algoritmo calcula los incrementos $\Delta p^i/\Delta t$, $\Delta p^k/\Delta t$ de cada cuerpo tal que el momento lineal total se conserva	94
5.6. Conservación–disipación de energía para el contacto friccional con un cuerpo. ADfr calcula la energía necesaria para obtener una respuesta conservativa–disipativa consistente	97
5.7. Conservación–disipación consistente de energía para un sistema de dos cuerpos	98
6.1. Trayectoria, velocidad y energía con ACEM. Los resultados concuerdan con la física del problema de Carom sin fricción: se conserva la energía y la velocidad normal es igual en modulo pero opuesta en signo, antes y después del contacto. La posición inicial está indicada por •	105

6.2. Trayectoria, velocidad y energía para Newmark- β . Se produce un comportamiento de tipo no físico debido al incremento ilimitado de energía para Trap. y se muestra un alto amortiguamiento numérico para Max.D. La posición inicial está indicada por \bullet 106

6.3. Dispersión sin fricción, caso i), todas las bolas son iguales y están situadas de manera simétrica. La mayor parte del momento lineal se transmite a lo largo de los lados $b-c$ y $b-d$. Después del impacto únicamente se mueven las bolas situadas en los vértices 108

6.4. Dispersión sin fricción, caso ii), simétrico y dos discos con imperfecciones y caso iii) asimétrico y con tres discos con imperfecciones. Las imperfecciones en los discos favorecen la transmisión del momento lineal en el interior del triángulo. 110

6.5. Problema del péndulo de Newton. Hipótesis i) (arriba) con discos b y c en contacto, o lo que es equivalente a una única masa. Hipótesis ii) (abajo), pequeña separación entre los discos b y c 111

6.6. Problema del péndulo de Newton. Análisis del error en las velocidades post-impacto en función del paso de tiempo Δt y amortiguamiento ξ_N . La convergencia es cuadrática para la esfera a y lineal para b y c 112

6.7. Llenado del cangilón con ACEM. Debido a la conservación de la energía los discos nunca se asientan y algunos de ellos escapan del cangilón 113

6.8. Llenado del cangilón para tres Δt distintos con Trap. Hay un crecimiento de energía sin límite debido a que la regla de Trapecio es inestable ante la presencia del contacto con cualquier paso de tiempo 114

6.9. Llenado del cangilón para tres Δt distintos con Max. D. Aunque este método también sea inestable para el contacto, los resultados (arriba y mitad) tienen sentido físico para grandes Δt debido a la alta disipación numérica del método. Mientras para pequeños, la energía crece sin límite (abajo) 115

6.10. Llenado del cangilón. Frecuencia adimensional $\omega\Delta t$ vs. amortiguamiento numérico. Nulo para Trap. y aumenta con Δt para Max.D. 116

7.1. Problema del juego de bolos. Perfil de velocidades para ambos casos de contacto e instante de transición t_{rod} 120

7.2. Problema del juego de bolos. Evolución de las velocidades y energía vs. fricción ϕ (sup.). Instante de transición deslizamiento-rodadura y potencia media disipada (inf.). 121

ÍNDICE DE FIGURAS

7.3. Problema de Carom con partícula elíptica: trayectoria (sup.), velocidad (inf. izqda.) y energía total (inf. drcha.). En los tres gráficos, los resultados analíticos y numéricos coinciden con bastante exactitud	123
7.4. Problema de Carom con partícula elíptica: velocidad horizontal de salida V_{xo} , vertical V_{yo} (sup. izqda. y drcha.), velocidad de rotación ω_o y energía disipada (inf. izqda. y drcha.) en función del ángulo de incidencia θ y de fricción ϕ	124
7.5. Problema del péndulo cóncavo. Posición inicial, impacto y altura máxima después de impacto definidas por γ_{t_0} , γ_{t_1} y γ_{t_2}	125
7.6. Problema del péndulo cóncavo. Posición del centro de gravedad γ , velocidad $\dot{\gamma}$, velocidad de rotación ω y energía \mathbb{E}	126
7.7. Colapso de la columna bidimensional. Perfiles inicial y final (sup.) para $h/d = 0.5$. Evolución adimensional de la energía total $\mathbb{E}_T/\mathbb{E}_{Tmx}$, energía potencial $\mathbb{E}_p/\mathbb{E}_{pmx}$ y energía cinética $\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{kmx}$ (inf.)	127
7.8. Colapso de la columna bidimensional. Configuración inicial y final (sup.) y evolución adimensional de la energía (inf.) para $h/d = 1.0$	128
7.9. Colapso de la columna bidimensional. Configuración inicial y final (sup.) y evolución adimensional de la energía (inf.) para $h/d = 1.5$	129
7.10. Curva granulométrica de la arena Fraser	132
7.11. Ensayo de cortante cíclico. Muestra 1. Compuesta por 700 cilindros de madera distribuidos homogéneamente	133
7.12. Ensayo de cortante cíclico. Muestra 2. Compactación. Muestra compuesta por 2500 discos distribuidos de manera aleatoria. Estado inicial (izqda.), y compactada bajo $\sigma_0 = 100kN/m^2$ estado final (drcha.)	133
7.13. Ensayo de cortante cíclico. Membrana elástica de la arena Fraser definida por —. Transmisión de tensiones — — — a las partículas interiores y formación de una red de transmisión de fuerzas —	136
7.14. Ensayo de cortante cíclico. Obtención del amortiguamiento equivalente	137
7.15. Ensayo de cortante cíclico. Relación $\gamma-(\sigma_1-\sigma_2)$. Comparación experimental y numérica para muestra 1	140
7.23. ASTM D422 Ensayo de sedimentación	140
7.16. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 1. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	141
7.17. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 2. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	142
7.18. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 3. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	143

7.19. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 1. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	144
7.20. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 2. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	145
7.21. Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 3. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser	146
7.22. Medio granular (izqda.), modelo equivalente continuo (sup. drcha.) y medio discontinuo modelado con discos (inf. izqda.)	147
7.24. Ensayo de sedimentación. Fuerzas actuantes sobre una partícula que sedimenta en un fluido viscoso por gravedad	149
7.25. Ensayo de sedimentación. Velocidad $v(t)$ de una partícula de 5 mm de radio en función de varias viscosidades	150
7.26. Ensayo de sedimentación. Curvas granulométricas de la arena Fraser y de dos muestras artificiales	153
7.27. Ensayo de sedimentación. Velocidad analítica $v(t)$ para partículas de varios tamaños representativos sedimentando en aceite	155
7.28. Ensayo de sedimentación. Configuración inicial para la muestra artificial 2; las partículas de distintos tamaños están distribuidas aleatoriamente en el interior de una matriz	156
7.29. Ensayo de sedimentación. Estado final de la muestra artificial 1 sedimentado en agua, donde se aprecia la gradación de las partículas	157
7.30. Ensayo de sedimentación. Estado final de la muestra artificial 2 sedimentando en agua (izqda.) y benceno (drcha.). En ellas se puede apreciar la creación y la separación de agrupamientos de partículas	158
7.31. Ensayo de sedimentación. Estado final de la arena Fraser sedimentando en aceite	159
7.32. Ensayo de sedimentación. Formación de agrupamientos debido al contacto y a la fricción (izqda.). Velocidad antes y después del contacto para dos partículas cuyos radios verifican $r_a \gg r_b$ (drcha.)	160
7.33. Ensayo de sedimentación. Velocidad numérica de varias partículas de las muestras 1, 2 (sup. izqda. y drcha.) sedimentando en agua y de la arena Fraser (inf.) sedimentando en aceite	161
7.34. Ensayo de sedimentación. Curvas granulométricas numéricas y experimentales para la muestra artificial 1 (sup.), muestra artificial 2 (intermedia) y para la arena Fraser (inf.).	162
A.1. Impacto analítico con fricción.	174

Índice de cuadros

1.1.	Clasificación de no linealidades	2
1.2.	Recorrido histórico de los algoritmos de integración temporal	18
1.3.	Estructura del trabajo	21
2.1.	Pasos para la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico	30
2.2.	Planteamiento continuo de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo	37
2.3.	Descripción del movimiento de un sólido mediante 6 coordenadas generalizadas (3 desplazamientos + 3 momentos lineales)	41
2.4.	Relación entre las constantes $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$ y las coordenadas generalizadas definidas en el centro de gravedad del cuerpo i	43
2.5.	Resumen de las ecuaciones del método de los elementos discretos de orden m para n_{bd} cuerpos	43
3.1.	Valores del coeficiente de fricción μ para el contacto entre varios materiales	51
3.2.	Resumen de las condiciones impuestas en un problema de contacto	52
6.1.	Parámetro de Newmark- β para los problemas primero, tercero y cuarto	104
6.2.	Energía total del cuerpo y momento lineal al principio y final de la simulación. El movimiento es diferente para los tres casos, pero el momento lineal y la energía coinciden para los tres	109
6.3.	Problema del péndulo de Newton. Velocidades post-impacto, momento lineal y energía. El momento lineal total se conserva para todos los algoritmo, las velocidades y la energía difieren de los valores analíticos debido a la inestabilidad de Newmark- β para el contacto. Con ACEM, hay un pequeño error para la hip. i) y la solución es exacta para ii)	112
7.1.	Ensayo de cortante cíclico. Propiedades mecánicas y numéricas de las muestras 1 y 2	134
7.2.	Ensayo de sedimentación. Valores de la viscosidad de los fluidos utilizados	152
7.3.	Ensayo de sedimentación. Velocidad terminal v_t y el tiempo crítico t_{cr} para varios radios y fluidos	154
A.1.	Problema del juego de bolos. Instante analítico de transición deslizamiento-rodadura t_{rod} , velocidades lineales V_{Os}, V_{Or} , velocidades de rotación ω_s, ω_r y pérdida de energía ΔE	173

1

Introducción

Este trabajo se centra en el desarrollo de un integrador temporal no lineal de tipo implícito para la resolución del problema de contacto. Dicho integrador es energéticamente consistente con la física no lineal del problema, conservando energía para el caso sin fricción y disipándola consistentemente para el friccional. Para conseguir este objetivo, se ha formulado un marco de ecuaciones de conservación cuyos términos tiene en cuenta la cantidad de energía disipada por fricción. Dicho marco fuerza a que la respuesta cinemática y dinámica imite de manera consistente a la física del contacto.

En este primer capítulo se hace una breve introducción a los problemas no lineales y se exponen varios ejemplos clásicos, centrándose en las peculiaridades que presenta la no linealidad de contacto. Una vez definidas las ideas básicas de problema no lineal, se introduce el concepto de discretización tanto geométrica como temporal de los problemas de contorno. Especialmente se hace hincapié en la discretización temporal, tema que tratará ampliamente este trabajo.

La necesidad de una correcta aproximación de la respuesta dinámica y cinemática del contacto se ve justificada en el apartado de motivación a través de un ejemplo sencillo, en el que se emplean dos procedimientos básicos de discretización temporal. Para completar una visión general del problema, se realiza un estudio de antecedentes de los métodos de integración temporal. Este estudio abarca desde los métodos básicos (Newmark- β), hasta los más actuales, haciendo hincapié en su aplicabilidad al contacto. Finalmente, los antecedentes y la motivación, servirán de base para definir los objetivos y la estructura de este trabajo.

1.1 Introducción a los problemas no lineales

El continuo incremento en la capacidad de cálculo de los ordenadores actuales ha permitido modelar con mayor precisión el comportamiento dinámico de sistemas físicos complejos mediante el desarrollo de algoritmos no lineales de integración temporal. Si bien el modelado y la solución de los problemas lineales se encuentran bien definidos, los problemas no lineales (plasticidad, transmisión de calor, contacto...) constituyen un auténtico re-

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

to debido tanto a la complejidad de la formulación de sus ecuaciones como de sus procedimientos de solución. Sírvase para ello de la frase de R. Sachs (Berkeley 1970): “*All linear problems are trivial; and all nonlinear problems are impossible*”.

En cualquier problema mecánico se pueden presentar tres tipos de no linealidades: material, geométrica y de contacto. La primera tiene lugar cuando las ecuaciones constitutivas del material son no lineales. La segunda se produce cuando los cambios en la geometría del problema afectan de manera significativa a la relación tensión–deformación, aunque las ecuaciones constitutivas del material sean elástico–lineales. Mientras la tercera se debe a la imposición de la condición de impenetrabilidad geométrica entre cuerpos, es decir dos cuerpos no pueden ocupar la misma posición en el espacio.

Dentro de la no linealidad de contacto se puede distinguir dos tipos de sublinealidades: *i*) de impenetrabilidad (contacto geométrico) y *ii*) friccional (contacto friccional). La primera gobierna la impenetrabilidad entre cuerpos y se considera como un tipo de no linealidad geométrica. La segunda modela el desplazamiento tangencial entre dos superficies de contacto y se considera como un tipo de no linealidad material. Todas estas no linealidades quedan resumidas en la tabla 1.1.

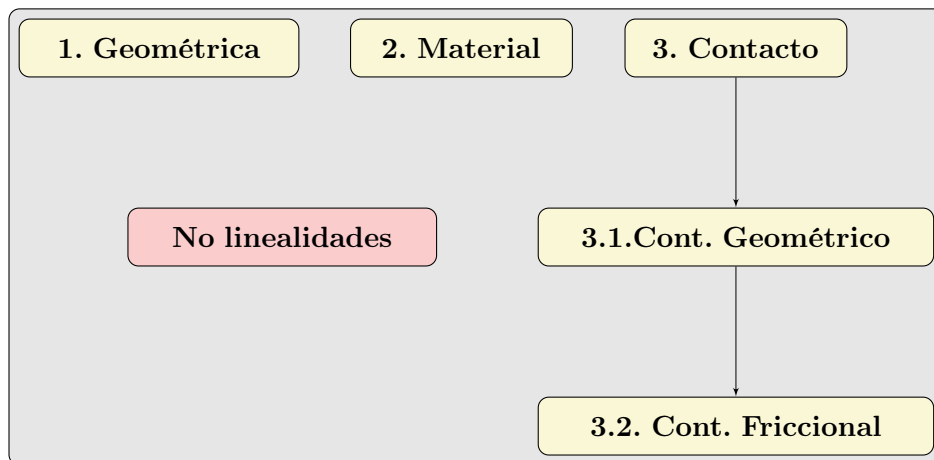


Tabla 1.1: Clasificación de no linealidades

Las figuras 1.1, 1.2 y 1.3 ilustran tres ejemplos representativos de no linealidades geométricas y/o materiales. La figura 1.1 (izqda.) muestra un voladizo rígido con un empotramiento elástico a giro cargado en su extremo por una carga vertical \mathbf{f} . Si se dibuja la relación giro–fuerza, $\theta - \mathbf{f}$, figura 1.1 (drcha. línea continua), se observa un comportamiento no lineal causado por los grandes giros que experimenta la geometría del voladizo que modifican de manera sustancial tanto la posición de \mathbf{f} como la longitud del brazo mecánico (cambia de L a L'). Por tanto, el momento (o giro θ) generado

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS NO LINEALES

en el empotramiento no es proporcional a f mostrando un valor asintótico en $\theta = \pi/2$. Si se linearizasen las ecuaciones de este problema, se llegaría a una relación lineal $\theta - f$, figura 1.1 (drcha. línea discontinua), únicamente aceptable para pequeños valores de θ .

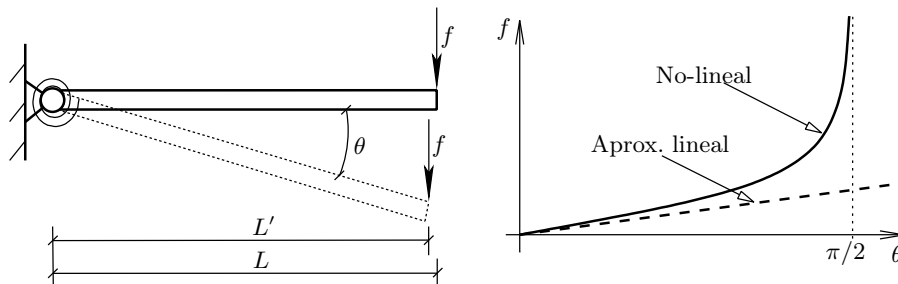


Figura 1.1: Problema del voladizo rígido. Modelo (izqda.). Relación $\theta - f$ no lineal y aproximación lineal (drcha.)

La figura 1.2 (sup.) muestra un ejemplo de no linealidad material. Dicho ejemplo consiste en dos barras paralelas a y b de longitud L empotradas por uno de sus extremos y unidas por el otro a través de un elemento infinitamente rígido. La figura 1.2 (inf. izqda.) muestra el comportamiento deformación-tensión $\epsilon - \sigma$ de cada una de las barras aisladas. Dicho comportamiento es elasto-plástico, es decir un comportamiento compuesto por dos tramos: un primer tramo elástico-lineal (definidos por los módulos de Young E_{ya} y E_{yb}) y un segundo tramo horizontal puramente plástico. Los pares $\epsilon_{ya}, \sigma_{ua}$ y $\epsilon_{yb}, \sigma_{ub}$ son los puntos que definen la no linealidad, marcando el cambio de comportamiento tensodeformacional para cada barra.

Si al problema expuesto se le aplicase una fuerza f creciente en su extremo derecho, se obtendría la relación tensión-deformación dada en la figura 1.2 (inf. drcha.). Dicha relación está formada por tres tramos rectilíneos cuyos puntos de inflexión A y B indican un cambio no lineal en el comportamiento tensodeformacional.

La figura 1.3 (izqda.) muestra un ejemplo en el que se combinan tanto la no linealidad geométrica como la material. Se trata de una barra biarticulada incompresible inclinada con respecto a la horizontal un ángulo θ , en la que en su extremo B se dispone una deslizadera con una carga vertical f . Al variar f aparece una relación $\theta - f$ no lineal, figura 1.3 (drcha.), debida tanto al cambio en la geometría del problema (la barra aumenta o reduce drásticamente su longitud), como al comportamiento no lineal del material (incompresible). En esta figura se observan los puntos de bifurcación C, D, E y F , que dificultan de manera notable el procedimiento de obtención de la solución.

La resolución de las ecuaciones de estos tres problemas no es inmediata, teniendo que recurrir al empleo de procedimientos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales: Newton-Raphson, Line-Search, Arc-Length...

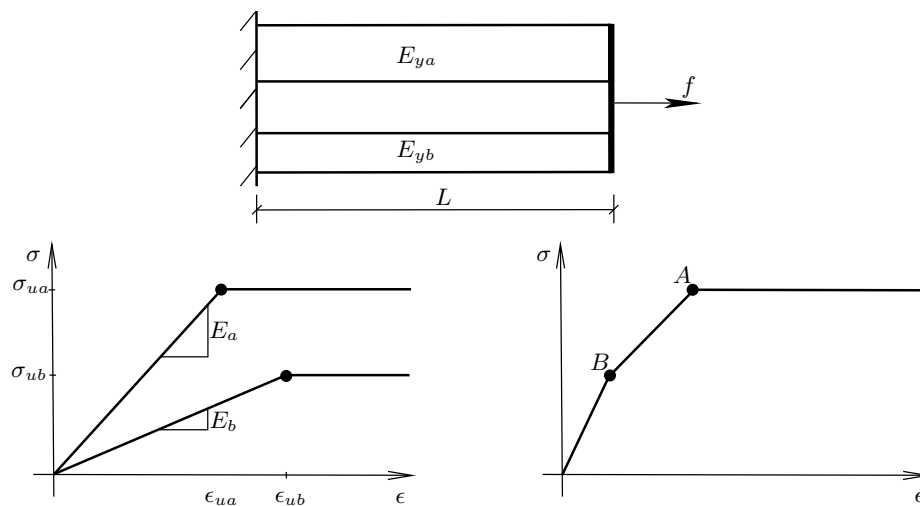


Figura 1.2: Problema de las dos barras paralelas (no linealidad material). Modelo (sup.), comportamiento tensodeformacional de cada barra (inf. izqda.), comportamiento global (inf. drcha.)

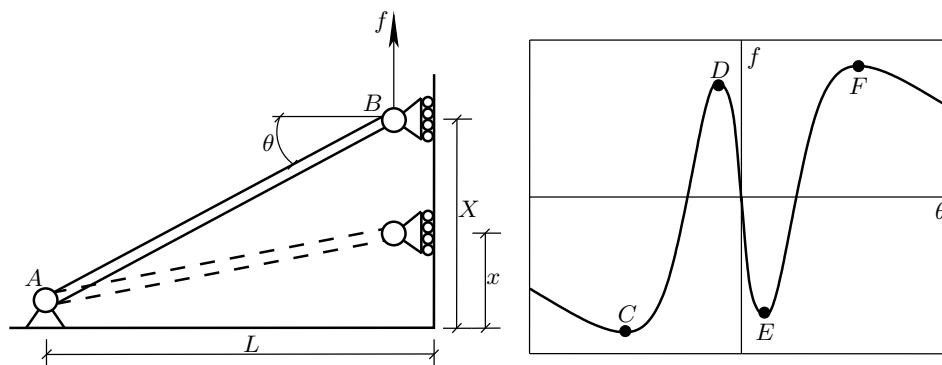


Figura 1.3: Problema de la barra inclinada (no linealidad geométrica + material). Modelo (izqda.), relación $\theta - f$ (drcha.)

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS NO LINEALES

En el siguiente apartado se introduce la no linealidad de contacto, basada en la imposición de una restricción de tipo unilateral (restricción impuesta en un sentido pero no en el otro).

1.1.1. Introducción a la no linealidad de contacto

El contacto es un fenómeno físico que gobierna una gran variedad de problemas de la Ingeniería Civil y Mecánica (mampostería, análisis de macizos rocosos, impacto de vehículos...).

Se tiene constancia del estudio del fenómeno del contacto desde la antigüedad. Muestra de ello es la inscripción de la figura 1.4 tomada de [Lay53], (tumba de Djehutiotep en Deir El Bersheh (1850 A.C.) perteneciente al antiguo Egipto. Éste es el primer testimonio conocido de la lubricación, en el que se observa que el vertido de líquido lubricante en la base de la efigie de faraón reducía la fricción y facilitaba el desplazamiento del pesado bloque rocoso. Si el peso de la efigie es de 60 toneladas y se emplean 172 hombres para arrastrarla con una fuerza máxima de 0.08 toneladas cada uno, consecuentemente el coeficiente de fricción será: $\mu = \frac{f_T}{w} = \frac{172 \times 0.08}{60} = 0.23$. Donde f_T es la fuerza total ejercida por los hombres y w es el peso. Los intentos por reducir la fricción entre materiales se hacen ya patentes en la construcción del monumento megalítico de Stonehenge (Edad del Bronce), figura 1.5. En esta figura se muestran las distintas hipótesis que han establecido los arqueólogos sobre los mecanismos empleados para desplazar los grandes bloques rocosos, ref. [Lav].

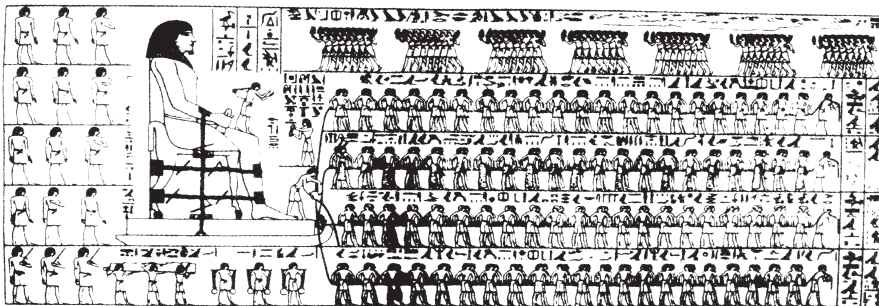


Figura 1.4: Testimonio histórico del conocimiento del dominio de la lubricación para reducir la fricción en el movimiento de grandes bloques rocosos. Ilustración tomada de la tumba de Djehutiotep en Deir El Bersheh (1850 A.C.), antiguo Egipto

Con la aparición de la Mecánica del Medio Continuo en el siglo XIX, el contacto fue tratado como un fenómeno no lineal. Este fenómeno impide que dos cuerpos ocupen físicamente la misma posición en el espacio mediante la imposición de la condición de que la distancia mínima g_N entre ambos siempre sea mayor o igual que cero. Dicha condición corresponde a una restricción

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS NO LINEALES

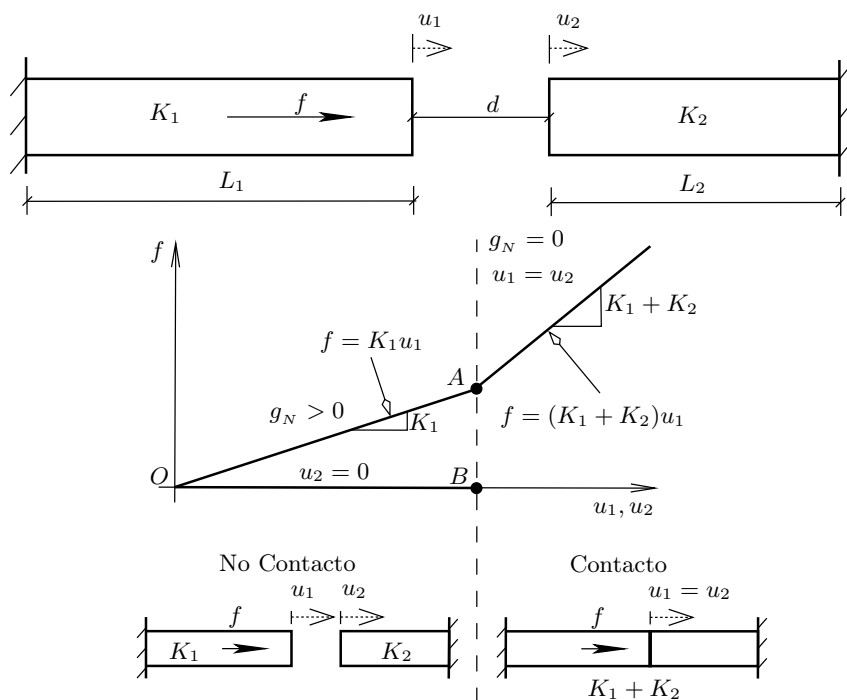


Figura 1.6: No linealidad de contacto. Impenetrabilidad entre cuerpos

(tramo horizontal), separados por el punto de inflexión A .

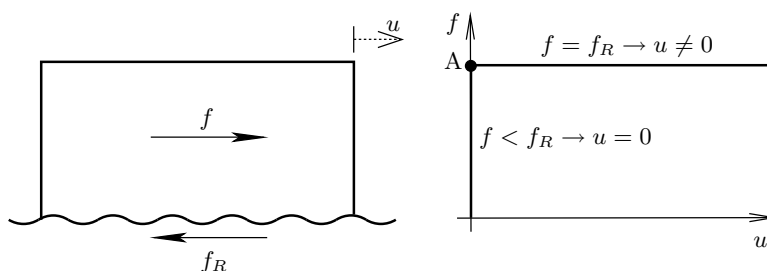


Figura 1.7: No linealidad de contacto. Desplazamiento tangencial con fricción

Estos dos últimos ejemplos demuestran que la no linealidad de contacto está marcada por un cambio abrupto entre sus variables. Ante la dificultad o imposibilidad de la obtención de un método exacto para la resolución de problemas no lineales, se plantean aproximaciones a través de los métodos numéricos. Estas aproximaciones generalmente proporcionan soluciones no consistentes con la física, sobre todo con respecto a la conservación del momento lineal \mathbf{p} , angular \mathcal{J} y de la energía \mathbb{E} .

1.1.2. Aplicaciones del contacto

El contacto es una aplicación de primer orden tanto en la Ingeniería Civil como en la Mecánica. Las figuras 1.8, 1.10 y 1.9 muestran tres ejemplos en los que el contacto juega un papel fundamental. En el primero de ellos, figura 1.8 se muestran los resultados de la simulación numérica (sup.) y la comparación experimental (inf.) del fallo estático de un muro de mampostería de ref. [BPR10] empleando el método de los Elementos Discretos (MED). En este problema se observa que el comportamiento global del muro es debido al contacto y a la fricción entre bloques y que el modo de fallo numérico coincide con el experimental con cierta exactitud.

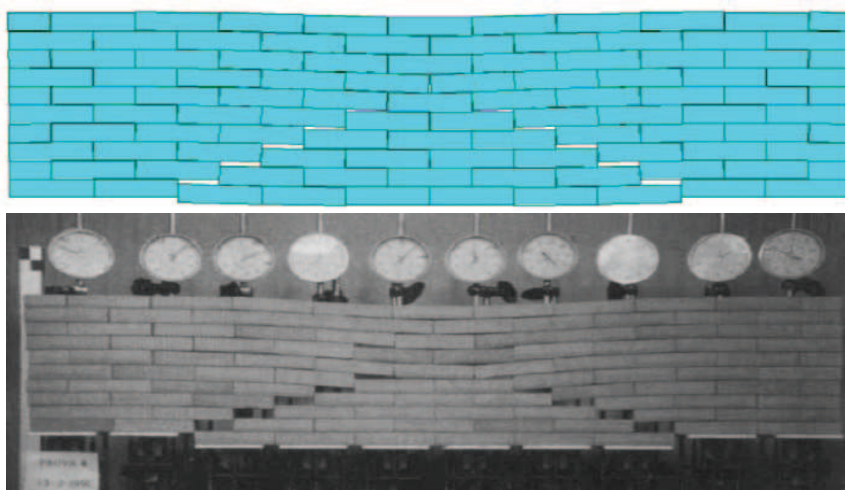


Figura 1.8: Simulación numérica mediante MED (sup.) y comparación experimental (inf.) del fallo de un muro de mampostería, ref. [BPR10]

La figura 1.9 muestra el problema estudiado por ref. [BPA07], que simula el fallo de un arco enterrado de mampostería empleando MED. Esta simulación predice de manera consistente con los experimentos la formación de rótulas que se producen en el colapso.

Finalmente, la figura 1.10 muestra una aplicación industrial del contacto a través de una simulación por el método de Elementos Finitos (MEF) del fenómeno de interacción rueda-pavimento, ref. [Lau08]. Dicho análisis tiene especial interés en la optimización del diseño de neumáticos para mejorar la seguridad vial, disminuir la sonoridad y fomentar la eficiencia energética de los vehículos.

Del análisis de estos ejemplos se desprende que el contacto es un fenómeno físico muy presente en los problemas ingenieriles, cuyo correcto modelado permite obtener soluciones realistas en problemas complejos.

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS NO LINEALES

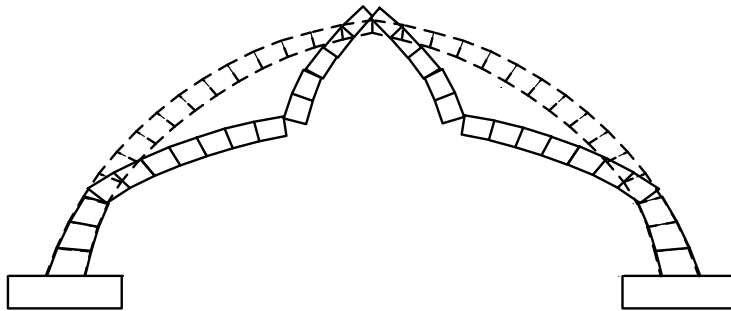


Figura 1.9: Simulación numérica mediante MED de un arco de mampostería. Fallo y formación de rótulas, ref. [BPA07]

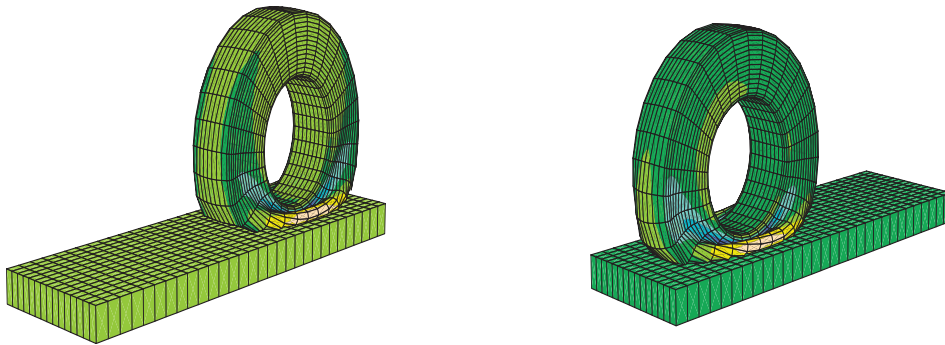


Figura 1.10: Análisis numérico por MEF de la interacción rueda-pavimento, realizado en ref. [Lau08]

1.2 Concepto de discretización espacial y temporal

Debido a la imposibilidad de la obtención de una solución analítica para la mayoría de los problemas no lineales, se hace patente la necesidad de la aplicación de métodos numéricos. Estos métodos se basan en la discretización de las variables espaciales y temporales, ecuaciones no lineales de gobierno y de los dominios del problema continuo con el objetivo de aproximar numéricamente su solución.

La figura 1.11 (sup.), muestra el concepto de discretización espacial de la geometría de un dominio Ω con frontera $\partial\Omega$ en una serie de subregiones Ω^* con frontera $\partial\Omega^*$. En estas subregiones se aproxima la solución del problema en cualquier punto $P \in \Omega^*$ a través de la solución aproximada en unos determinados puntos (\bullet) llamados nodos. La figura 1.11 (sup.) muestra la discretización espacial de Ω y los nodos empleando los métodos de los Elementos Finitos (MEF), Elementos de Contorno (MEC) y Elementos Discretos (MED).

Si el problema es de tipo dinámico, entra en juego el concepto de discretización temporal. Básicamente, como muestra la figura 1.11 (inf.), consiste en discretizar el dominio $t \in [0, T) \rightarrow t_i \in [0, t_1, \dots, t_N)$, en las ecuaciones de gobierno y en las variables del problema, de manera que se obtiene una aproximación $u_i \approx u(t_i)$ de la respuesta continua $u(t)$ en el instante t_i de todo $P \in \Omega^*$.

Las herramientas empleadas para la obtención de la solución discreta y aproximada en cualquier instante de tiempo son los algoritmos de integración temporal. El presente trabajo presenta una nueva metodología de integración temporal conservativa–consistentemente disipativa aplicable a métodos numéricos que modelan fenómenos de contacto.

1.3 Motivación

En este apartado se justifica la necesidad del desarrollo de un algoritmo de integración temporal conservativo y estable para problemas de contacto a través del ejemplo de las figuras 1.12. En este ejemplo se estudia la evolución temporal de la posición y , velocidad V y energía \mathbb{E} del problema del rebote de un disco rígido contra una frontera horizontal bajo la acción de la gravedad mediante MED. Para tal fin se han empleado dos miembros habituales de la familia de integradores temporales de Newmark– β que poseen nula y máxima disipación numérica: Regla del Trapecio (Trap.) y Máxima Disipación (Máx.D.).

La figuras 1.12 comparan los resultados numéricos con los analíticos, mostrando una pobre semejanza entre ambos. Se observa que para Trap. tanto la posición y , velocidad V y energía \mathbb{E} se incrementan tras el primer y sucesivos rebotes, en cambio disminuyen para Max.D. La solución analítica

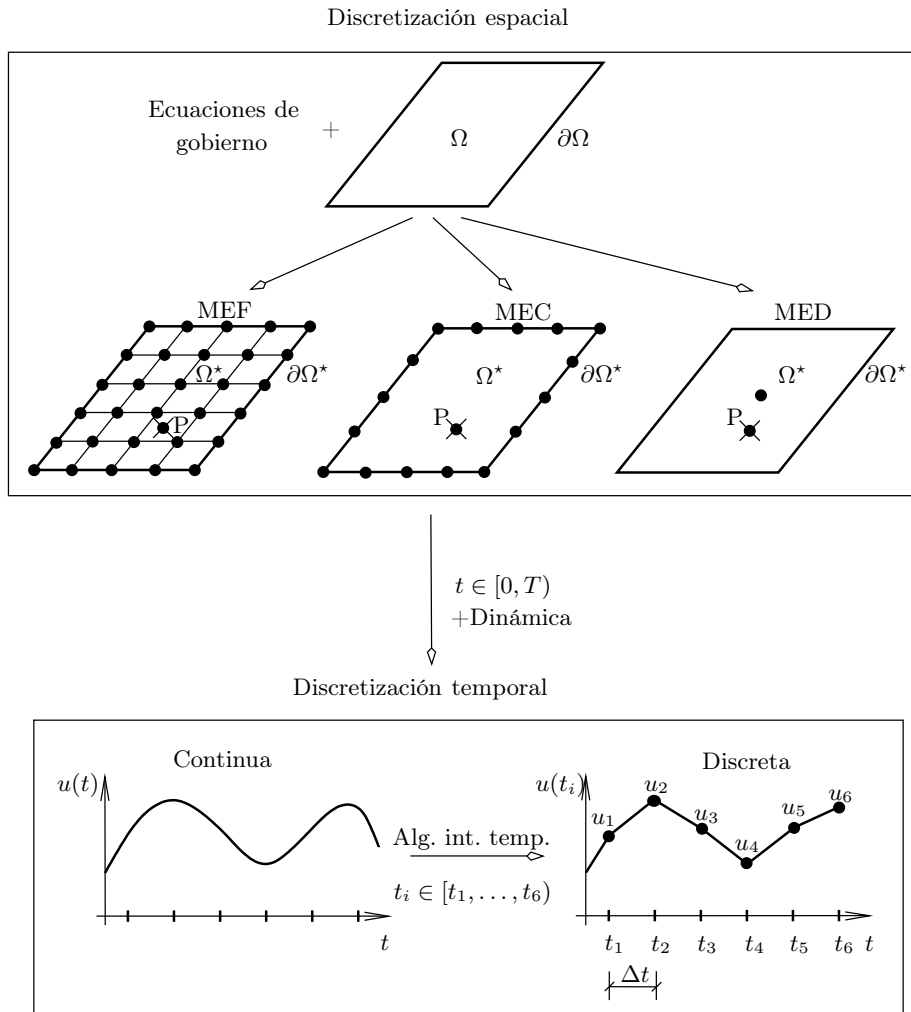


Figura 1.11: Discretización espacial empleando MEF, MEC y MED (sup.). Discretización temporal (inf.)

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

An. muestra un movimiento periódico de amplitud constante debido a la conservación de la energía.

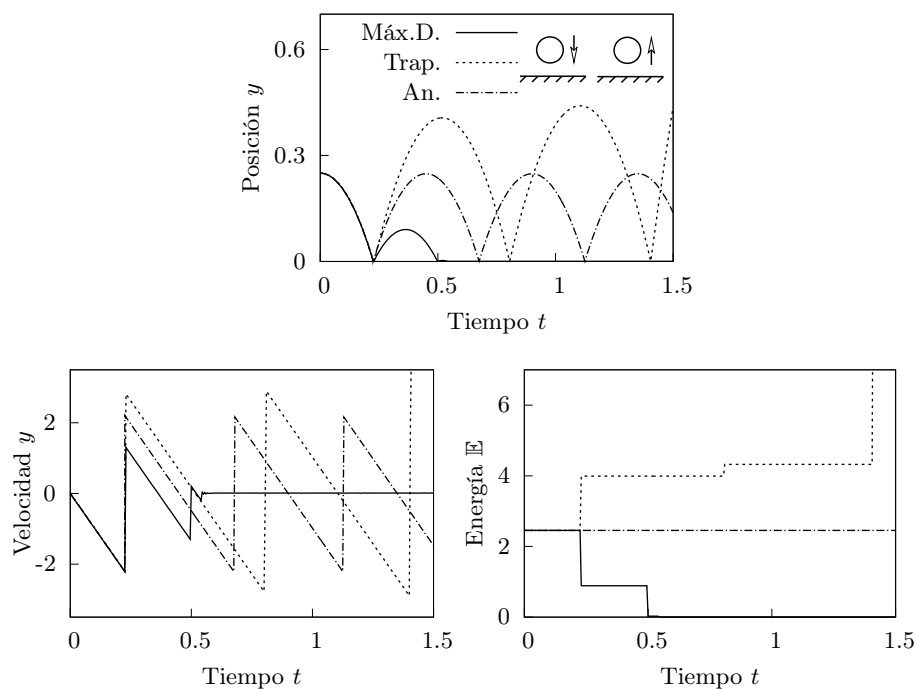


Figura 1.12: Rebote de un disco contra superficie rígida. Posición y , velocidad V y energía E para Trap., Máx.D. y An

La inestabilidad implica súbitos incrementos de energía, por tanto Trap., aunque conservativo para problemas lineales, es inestable ante la no linealidad de contacto produciendo cambios sin sentido físico en la posición, velocidad y energía. Aunque Max.D. también sea inestable, esta inestabilidad se ve atenuada por su elevada disipación numérica, lo que da lugar a un movimiento altamente amortiguado.

De este análisis se deriva que los algoritmos tradicionales de integración temporal, aunque estables para problemas lineales, presentan resultados inestables debido a la no linealidad de contacto, ya que son incapaces de reproducir de manera adecuada la física del problema. El uso de integradores de tipo explícito proporciona peores resultados por su limitada estabilidad y por el pobre cumplimiento de las condiciones de impenetrabilidad.

Otra fuente de falta de inestabilidad, presente incluso en los algoritmos no lineales de integración temporal, es la debida al empleo del método del Penalty¹ como medio para forzar la condición de impenetrabilidad. Las figu-

¹Este método será expuesto en el capítulo 3 y es ampliamente empleado por sus grandes ventajas computacionales

1.3. MOTIVACIÓN

ras 1.13 (izqda.) muestran su funcionamiento consistente en la interposición entre los cuerpos en contacto de un resorte elástico de elevada rigidez K_N que ejerce una acción \mathbf{f}_c (proporcional a g_N) que fuerza a que la penetración entre cuerpos g_N sea prácticamente nula. El valor de esta penetración se puede controlar a través del parámetro K_N , tal que si $K_N \rightarrow \infty, g_N \rightarrow 0$.

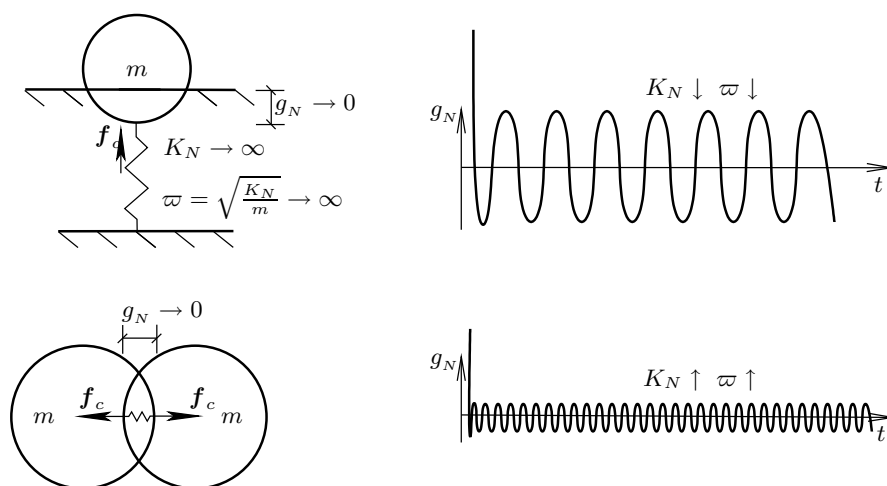


Figura 1.13: Método del Penalty. (izqda.) Compuesto por una ó dos masas m , resorte elástico de rigidez K_N y \mathbf{f}_c que fuerza $g_N \rightarrow 0$. (drcha.) Respuesta dinámica caracterizada por un cambio súbito en g_N , si $K_N \uparrow$ se producen altas frecuencias $\varpi \uparrow$ (fenómeno de Gibbs), dificultad obtener aproximación temporal discreta

El empleo del método del Penalty, figuras 1.13 (izqda.), crea un sistema dinámico compuesto por un resorte elástico de rigidez K_N y una ó dos masas m . Las figuras 1.13 (drcha.) muestra la respuesta en el tiempo de g_N para valores bajos (sup.) y elevados (inf.) de K_N . En ellas se observa que el inicio del contacto se caracteriza por un cambio súbito de g_N que produce una onda de impacto que cambia el sentido de las velocidades (provoca la separación entre cuerpos). Además, el resorte elástico genera oscilaciones que se caracterizan por su frecuencia $\varpi = \sqrt{K_N/m}$. Esta frecuencia aumenta al elevar el valor de la rigidez K_N del resorte (parámetro de penalty) al tratar de aproximar de manera precisa la condición de impenetrabilidad $g_N \rightarrow 0$. Este comportamiento descrito da lugar al fenómeno de Gibbs, refs. [Gib99] y [Arf85], fenómeno consistente en la dificultad de modelar mediante algoritmos de integración temporal fenómenos físicos de alta frecuencia ϖ que se caracterizan por un cambio súbito entre sus variables. Por tanto, se obtiene una mala aproximación tanto de la solución, como de la conservación del momento lineal \mathbf{p} , angular \mathcal{J} y de la energía \mathbb{E} . Ante esta situación, se hace patente la necesidad de desarrollar un algoritmo de integración temporal estable y consistente con la física no lineal del contacto, conservando energías y momentos, y que además cumpla de manera aproximada la condición de

impenetrabilidad, $g_N \rightarrow 0$, dada por el método del Penalty.

En el siguiente apartado se realiza un estudio de antecedentes, donde se analizan los principales trabajos para obtener un método de integración temporal aplicable a problemas no lineales tanto de la elasticidad general como de contacto. A la vista de los resultados de este estudio se establecen las mejoras propuestas en este trabajo.

1.4 Antecedentes

El primer algoritmo de integración temporal para la resolución de problemas elastodinámicos lineales se remonta a 1959 con [New59] mediante el desarrollo de la familia biparamétrica de Newmark- β .

La aplicación de la anterior familia a problemas de contacto se realizó por [HTS⁺76] y [BC85]. En ellos se empleó el método de los Elementos Finitos con el método del Penalty para analizar el contacto dinámico entre dos cuerpos elásticos para los casos sin y con fricción. La respuesta de estos problemas fue mejorada mediante el desarrollo de dos métodos no basados en la integración temporal, sino en el mejor cumplimiento de las condiciones geométricas y cinemáticas del contacto. El primero de ellos [TP93], conseguía una aproximación más precisa de las restricciones cinemáticas del contacto (nula velocidad de penetración entre cuerpos), mientras que el segundo [Lee94], lo hacía con respecto a la restricción geométrica de contacto para el caso sin fricción. Estos dos últimos métodos mejoraron la estabilidad de los algoritmos previos, ya que aumentaron la precisión en la aproximación numérica de la física del contacto.

El desarrollo de algoritmos de integración temporal enfocados a problemas de contacto se produjo con [MOB95] y [HMAL00] mediante el empleo de integradores de tipo explícito. Dichos integradores eran no conservativos [MOB95] o bien conseguían la conservación de energía [HMAL00] a través del tratamiento implícito de alguna de sus variables mediante una ecuación de conservación. Debido a su carácter explícito, únicamente forzaban la condición de impenetrabilidad en el paso anterior, por lo que daba lugar a una pobre representación del contacto en el paso actual. En cambio, los integradores de tipo implícito fuerzan la condición de impenetrabilidad tanto en el paso previo como en el actual, obteniendo una mejor representación del contacto frente a los explícitos. Por tanto, las formulaciones posteriores, al igual que la desarrollada en este trabajo, se han orientado hacia el tratamiento implícito.

Paralelamente a estas referencias, se desarrollaron algoritmos conservativos para la integración temporal de problemas no lineales aplicados a la dinámica del sólido rígido [SW91] y a sistemas hamiltonianos [SLM91] y [SPM91]. Estos trabajos permitieron obtener una formulación conservativa [ST92] para problemas elásticos no lineales simplécticos, que fue extendida posterior-

mente a un amplio abanico de problemas elastodinámicos no lineales como a placas [STW92], a barras [STD95] y a problemas elásticos altamente rígidos [SG93].

La aplicación de los anteriores trabajos al contacto quedó plasmada en [LC97], que desarrolló un algoritmo implícito estable para el caso sin fricción. La estabilidad se aseguraba mediante una formulación que forzaba la disipación numérica incondicional de energía basada en la aproximación de la cuarta condición de Kuhn–Tucker (nula velocidad de penetración entre cuerpos). Dicho algoritmo no forzaba la condición geométrica de impenetrabilidad (primera condición de Kuhn–Tucker), por lo que se producían penetraciones considerables, ya que la condición de velocidad de penetración nula no garantizaba la impenetrabilidad. La disipación numérica de energía se controlaba mediante el parámetro de penalty K_N , de manera que en el caso límite $K_N \rightarrow \infty$, la velocidad de penetración era nula y por tanto no se disipaba energía. La formulación de este algoritmo fue posteriormente ampliada por [CL98] al caso friccional, obteniendo una respuesta incondicionalmente disipativa debida principalmente a la fricción y secundariamente a la disipación numérica inherente al algoritmo de integración.

El concepto de derivada discreta expuesto en [GS96] y [Gon96] permitió la creación de algoritmos que heredaban las propiedades conservativas de la formulación correspondiente del problema continuo que modelaban. Más concretamente, permitió obtener la expresión discreta de las fuerzas conservativas del problema continuo. Por lo que las anteriores formulaciones inestables, podían convertirse en conservativas insertando en su formulación la nueva expresión discreta de las fuerzas. Dicha formulación impulsó el desarrollo de algoritmos conservativos aplicados a problemas con restricciones holónomas [Gon99], a elasticidad no lineal [Gon00] y a problemas elastodinámicos con restricciones [GMP01]. Los anteriores trabajos permitieron el desarrollo de un algoritmo conservativo para problemas de contacto que satisfacía de manera aproximada la condición geométrica de impenetrabilidad [AP98].

Como se intuye de la figura 1.13, en todo problema de contacto bajo el método del Penalty produce una transferencia de energía cuerpo–resorte elástico que se caracteriza por ser artificial, ya que el resorte no está presente en el problema físico real, sino que es un medio para modelar el contacto. La formulación de [AP98] minimizaba tal transferencia por medio de una penalización adicional basada en momento lineal y en una nueva formulación de g_N . De esta manera, se conseguía que la energía total (energía de los cuerpos + energía artificial transferida al resorte) se conservase durante el contacto. Más tarde, la referencia [AP99] amplió dicha formulación al caso friccional, obteniendo un integrador con disipación energética positiva y por tanto incondicionalmente estable. La referencia [HT06] desarrolló una formulación similar a la expuesta anteriormente para elastodinámica no lineal e impacto a baja velocidad. La existencia de la transferencia artificial de energía demostraba que todas las formulaciones previas no eran consistentes

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

con el modelo físico de contacto.

Los trabajos de [LL02] y [LL03] para los casos sin y con fricción, mejoraron el modelo de [AP98] mediante un algoritmo conservativo que eliminaba la transferencia artificial de energía cuerpo–resorte elástico. Dicho algoritmo se basaba en un marco de ecuaciones conservación que forzaban a que la cinemática del contacto fuese conservativa para el caso sin fricción o que disipase energía consistentemente según el modelo de Coulomb para el caso friccional. Su principal inconveniente radicaba en el esquema predictor–corrector en el que estaba formulado. En dicho esquema, la energía se conservaba o se disipaba mediante la modificación cinemática del contacto en la fase correctora, mientras que la condición de impenetrabilidad se forzaba en la fase predictor. Por tanto, la respuesta cinemática y dinámica no era acorde con la física del contacto. Este hecho era debido a que la cinemática y dinámica del contacto no estaban acopladas, por lo que se introducían errores en posiciones y velocidades.

En los últimos años, los avances en los algoritmos de integración temporal se han centrado en el estudio del atenuamiento de la respuesta en problemas de altas frecuencias [AR01a], [AR01b], en el campo de la elasticidad y plasticidad [LM01], [ML02a] y [ML02b]. En los dos primeros trabajos se realiza un amortiguamiento selectivo en altas frecuencias de la respuesta elástica no lineal mediante la introducción de dos funciones de atenuación que respectivamente modifican la cinemática y dinámica del problema. Los tres últimos trabajos amplían la aplicabilidad de los métodos de integración temporal a todo tipo de problemas elastodinámicos y plásticos.

Desde el punto de vista del contacto, los trabajos [AR01a] y [AR01b] han posibilitado el desarrollo de la formulación del nuevo algoritmo conservativo en energía y momentos (ACEM) propuesto en este trabajo. Esta formulación mejora a la de los algoritmos previos mediante la construcción de un marco de ecuaciones conservación que proporcionan un acoplamiento entre la dinámica y la cinemática del contacto, obteniendo una respuesta consistente con la física. A través del marco de ecuaciones de conservación se obtiene un modelo mejorado del método del Penalty. Este modelo está basado en un resorte elástico y en un amortiguador paralelos que fuerzan aproximadamente las condiciones de Kuhn–Tucker (condición de impenetrabilidad y velocidad nula de penetración), adicionalmente el amortiguador atenúa las altas vibraciones del resorte elástico. Para cada contacto, este marco modifica la velocidad y la fuerza del contacto haciendo que se conserve la energía de los cuerpos para el caso sin fricción o que se disipe energía consistentemente con el modelo físico de fricción.

Para comparar la mejora de ACEM con respecto a los más recientes, la figura 1.14 muestra la evolución de la energía total de un cuerpo para el problema de Signorini (contacto de un disco rígido sometido a una velocidad vertical hacia abajo contra una frontera horizontal), antes, durante y después del contacto. Tanto [LL02] como (ACEM) mantienen la energía constante

1.5. OBJETIVOS Y CONTRIBUCIONES

durante el contacto, mientras que [AP98] y [LC97] fallan. Por tanto, estas dos últimos no son capaces de reproducir la respuesta física después de contacto, introduciendo errores en trayectorias y velocidades.

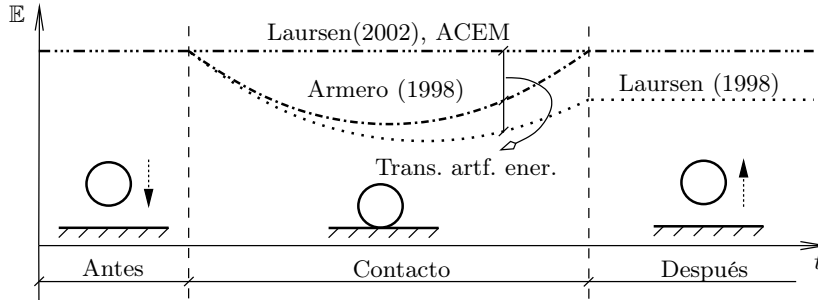


Figura 1.14: Problema de Signorini para cuerpo rígido. La transferencia artificial de energía cuerpo-penalty disminuye la energía del cuerpo para [LC97], [AP98], mientras que ACEM y [LL02] conservan la energía durante el contacto

El algoritmo de integración temporal desarrollado en este trabajo será aplicado para integrar las ecuaciones de movimiento proporcionadas por el MED. Dicho método, que será ampliamente expuesto en el capítulo 2, fue desarrollado por [G.H88] para estudiar el comportamiento de sistemas compuestos por múltiples cuerpos que interactúan a través del contacto y la fricción. Sus aplicaciones se han centrado principalmente en el análisis de la estabilidad de macizos rocosos [BFJ⁺09], el estudio de flujos granulares [KJ95] y en la mecánica de suelos granulares [BPA08].

Finalmente, la tabla 1.2 resume el recorrido histórico de los algoritmos de integración temporal expuestos en este apartado.

1.5 Objetivos y contribuciones

El principal objetivo de este trabajo es el desarrollo de un algoritmo de integración temporal conservativo, implícito, estable y consistente con el problema de contacto bajo el método del Penalty. Para ello, el algoritmo ha de conservar energía para el caso sin fricción o disiparla de manera consistente según un modelo de fricción.

Los objetivos del presente trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- Modificación de los algoritmos no lineales previos para la creación de un algoritmo implícito y estable que tenga en cuenta el acoplamiento entre la cinemática y dinámica del contacto: aproximación a las condiciones de no impenetrabilidad entre cuerpos y velocidad de penetración nula.
- Aplicación de la Derivada Discreta de Gonzalez [GS96] para la obtención de una expresión conservativa discreta de las fuerzas de contacto.

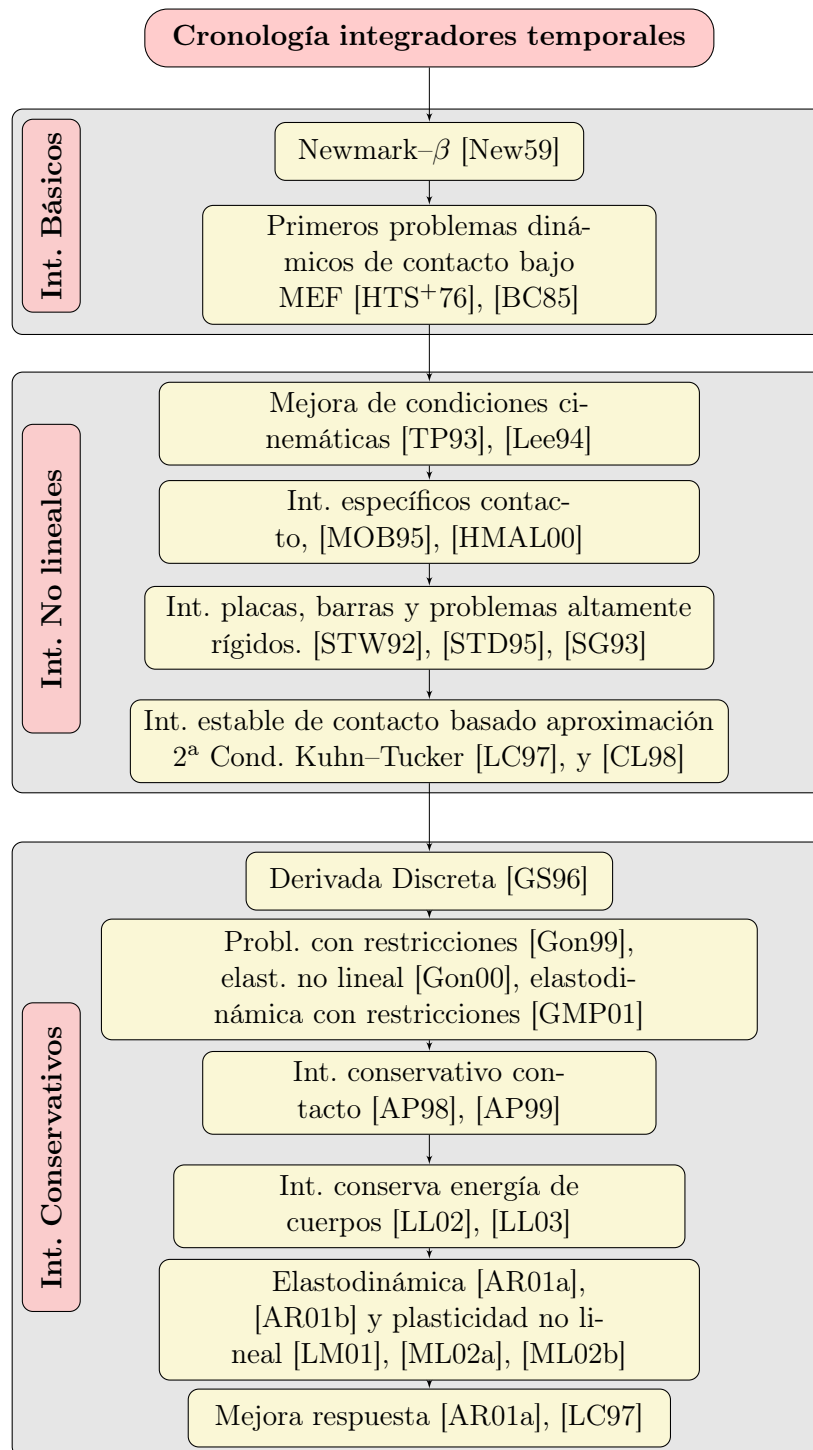


Tabla 1.2: Recorrido histórico de los algoritmos de integración temporal

1.6. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

- Creación de un marco de ecuaciones de conservación, que teniendo en cuenta el acoplamiento expuesto en el primer punto fuerce a la conservación de la energía de los cuerpos en contacto o a la disipación consistente.
- Evaluación paramétrica del funcionamiento del marco de ecuaciones conservación en ACEM.
- Demostración de la capacidad de ACEM para simular de manera precisa una amplia variedad de problemas de contacto bajo MED, comparando los resultados numéricos con los proporcionados por las formulaciones analíticas disponibles y por los resultados experimentales.

Estos objetivos quedan plasmados en este trabajo mediante las siguientes contribuciones:

1. Desarrollo de un algoritmo de integración temporal energéticamente consistente bajo el método del Penalty mediante la modificación cinemática y dinámica del contacto. Dicho algoritmo será construido para cuerpos rígidos para el MED, si bien será generalizable para cuerpos elásticos y a otros métodos numéricos.
2. Creación de un modelo mejorado del método del Penalty. Dicho modelo fuerza de manera aproximada tanto la condición de impenetrabilidad entre cuerpos como la condición cinemática de nula velocidad de penetración.
3. Comparación de resultados numéricos con experimentales y analíticos.

ACEM será aplicado a la resolución de problemas modelados por el MED. Dicho método es adecuado para simular el comportamiento de sistemas compuestos por un elevado número de cuerpos que interactúan a través de contacto y fricción, por lo que es un buen candidato para demostrar las propiedades conservativas de ACEM.

Todos estos objetivos y contribuciones se irán articulando a través de los distintos capítulos de este trabajo cuya estructura queda reflejada en el siguiente apartado y en la tabla 1.3.

1.6 Estructura del trabajo

Junto a esta introducción previa, el resto de este trabajo se estructura en los siguientes capítulos:

En el capítulo 2 se exponen los conceptos y ecuaciones básicas de la formulación del MED. En este capítulo se hace especial énfasis en el estudio las propiedades conservativas del problema continuo que aseguran la conservación de momentos y energía. Posteriormente se expone la discretización

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

geométrica de las variables y ecuaciones de gobierno. Este es el punto de partida para el análisis y comprensión de la formulación tanto del MED como de la formulación discreta de ACEM.

El capítulo 3 analiza la geometría, dinámica y cinemática del problema del contacto. En él se exponen y se formulan bajo el MED los dos principales métodos que fuerzan la condición de impenetrabilidad. A partir de esta formulación se hace un análisis de sus propiedades conservativas que permitirá formular de manera discreta las ecuaciones conservativas de ACEM.

En el capítulo 4 se presenta la formulación de ACEM para el caso sin fricción. Se hace un análisis de la modificación del algoritmo de [SLM91] para adaptarlo a la física del problema de contacto mediante la modificación dinámica y cinemática de sus ecuaciones. Posteriormente se analiza la conservación discreta del momento lineal \mathbf{p} , angular \mathcal{J} y energía \mathbb{E} . Dicho análisis permite la creación del marco de ecuaciones conservación que fuerzan a que el acoplamiento dinámico y cinemático sea consistente con la física del contacto. Finalmente en este apartado se justifica el modelo mejorado del método del Penalty y se analiza paraméricamente su funcionamiento.

La extensión de ACEM para el caso friccional (ACEMfr) se expone en el capítulo 5. En él se estudia la estabilidad y la disipación de energía por fricción mediante la modificación de las ecuaciones del marco de ecuaciones de conservación. Las principales aportaciones del trabajo se centran en estos dos capítulos.

Los capítulos 6 y 7 proporcionan una serie de simulaciones numéricas sin y con fricción, en las cuales se compara la estabilidad y la mejora de las propiedades conservativas del presente algoritmo frente a las formulaciones previas. Siempre que haya sido posible, parte de los resultados han sido validados a través de soluciones analíticas o de experimentos.

Este trabajo se completa a través de un apéndice que contiene las soluciones analíticas empleadas para validar parte de las simulaciones de los capítulos 6 y 7, así como algunos de los resultados de los capítulos 4 y 5.

La tabla 1.3, muestra la estructura de este trabajo agrupada tres grandes bloques: preliminares, núcleo y aplicaciones.

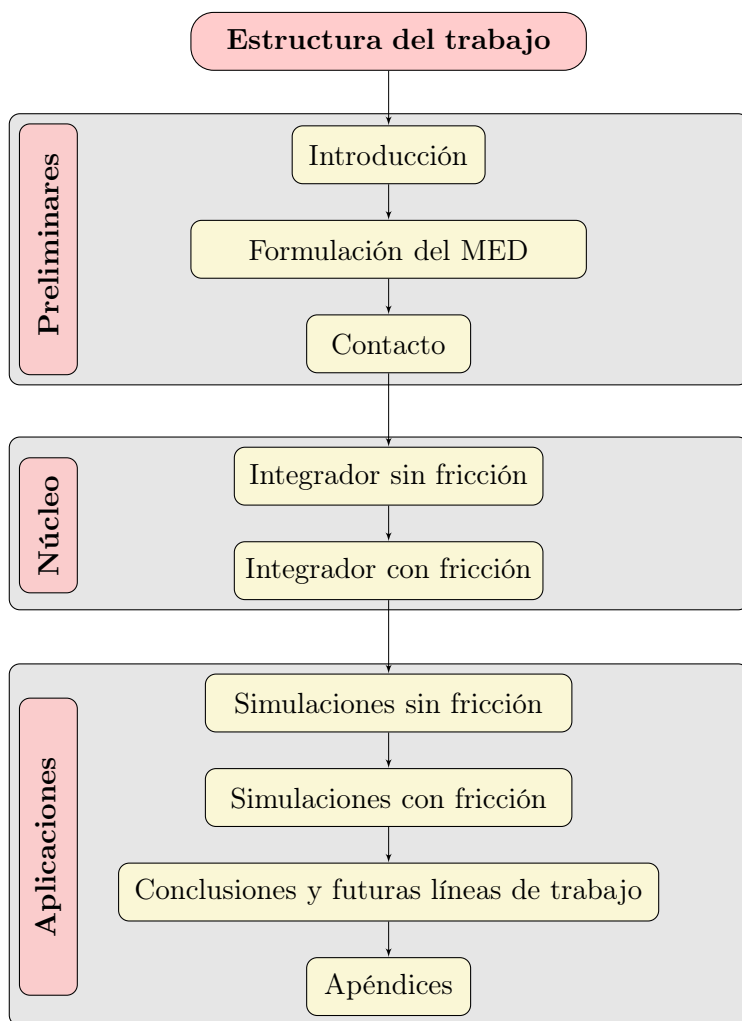


Tabla 1.3: Estructura del trabajo

2

Formulación del método de los Elementos Discretos: dinámica analítica y sistemas de partículas

En este capítulo se presentan las bases físicas sobre las que se formula el método de los Elementos Discretos (MED). Asimismo se obtiene la formulación continua del MED, que será discretizada espacialmente mediante los procedimientos indicados en este capítulo y temporalmente aplicando el nuevo algoritmo de integración temporal expuesto en los capítulos 4 y 5.

La estructura de este capítulo se articula en tres puntos. En el primer punto se realiza una breve introducción a la Dinámica Analítica, mediante el concepto de coordenada generalizada y la derivación del principio de D'Alembert. El concepto de coordenada generalizada será clave para la discretización de los grados de libertad del sólido rígido del MED, así como para definir la restricción de tipo unilateral generada por el contacto. En el segundo punto se estudian los sistemas de múltiples cuerpos, para ello se definen las ecuaciones de Lagrange, base de la dinámica analítica. A partir de estas ecuaciones se obtienen las ecuaciones de primer orden de Hamilton mediante la aplicación de transformada de Legendre y se analizan las propiedades conservativas del MED a través de las integrales primeras. Una vez definidas las ecuaciones de gobierno continuas de los sistemas de múltiples cuerpos, se procede a la formulación del MED en el tercer punto. Para ello se aplica la discretización espacial a las ecuaciones de gobierno y a las variables continuas del segundo punto, lo que permitirá finalmente establecer la formulación general del método.

2.1 La Dinámica Analítica

La dinámica analítica facilita de manera sencilla el tratamiento de sistemas de mecánicos complejos, ya que su formulación permite manipularlos de manera abstracta, separando por una parte las consideraciones físicas de las matemáticas. Es decir, primero se define la geometría y la cinemática del problema, y una vez seleccionadas qué variables entran en juego, se establecen

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

las relaciones entre dichas variables que serán insertadas en las ecuaciones de la dinámica analítica.

La forma de estas ecuaciones es siempre constante y permite obtener de manera automática la solución del problema. Tales ecuaciones fueron introducidas por Joseph Louis Lagrange (1736–1813), figura 2.1, en 1788 y están basadas en el cálculo de variaciones. William Rowan Hamilton (1805–1865), figura 2.6, impulsó el desarrollo de la dinámica de Lagrange haciéndola aún más general, lo que permitió el posterior desarrollo de la Mecánica Cuántica.

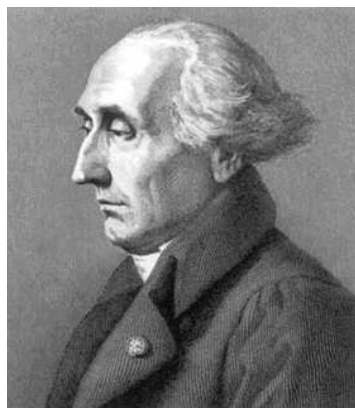


Figura 2.1: Lagrange (1736–1813)

2.1.1. Coordenadas Generalizadas

Se definen como una serie de n variables q^j , $j = 1, \dots, n$ que definen de manera unívoca la configuración de un sistema mecánico. En caso que dichas variables sean independientes entre sí, se llamarán libres. En caso contrario, estarán ligadas por medio de enlaces y el número de grados de libertad¹ será menor que n .

Comentario 2.1.1. *Las coordenadas generalizadas definen de manera unívoca la configuración de un sistema mecánico. Hay que notar que la elección de tales coordenadas no es única, pero todas ellas son equivalentes para definir la misma configuración.*

La posición de un punto P del cuerpo i de un sistema mecánico se define mediante el vector $\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_P^i(\mathbf{q}, t)$ (coordenadas vectoriales) en función de las coordenadas generalizadas. La figura 2.2 muestra la parametrización de tres sistemas mecánicos empleando coordenadas generalizadas así como el vector \mathbf{r}^i en función de dichas coordenadas.

2.1.2. El principio de D'Alembert en Coordenadas Generalizadas

Este principio fue enunciado por Jean D'Alembert (1717–1783), figura 2.3, en 1743. Dicho principio establece que la sumatoria de las fuerzas externas actuantes sobre un cuerpo y las denominadas “fuerzas de inercia”

¹Se define grado de libertad como el número mínimo de variables independientes que definen la configuración de un sistema mecánico

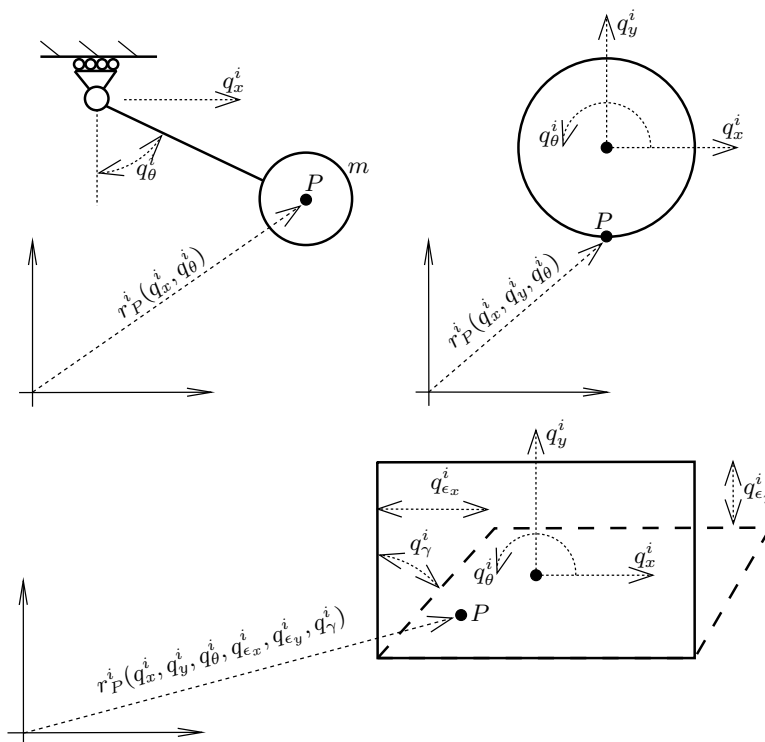


Figura 2.2: Definición de la configuración y posición de un punto P de un cuerpo i de tres sistemas mecánicos distintos empleando coordenadas generalizadas

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

forman un sistema de fuerzas en equilibrio. A este equilibrio se le denomina “equilibrio dinámico”.

Sea un sistema cualquiera compuesto por n_{bd} cuerpos, el principio de D’Alembert implica:

$$\sum_{i=1}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{ext}^i - m^i \ddot{\mathbf{r}}^i) \delta \mathbf{r}^i = 0 \quad (2.1)$$

donde:

- \mathbf{f}_{ext}^i , fuerza externa actuante en el cuerpo i .
- m^i , masa .
- $\delta \mathbf{r}^i$, cualquier campo vectorial de desplazamientos virtuales sobre el conjunto de cuerpos que sea compatible con los enlaces y restricciones de movimiento existentes.
- Los operadores $\dot{}$ y $\ddot{}$ indican primera y segunda derivada temporal.

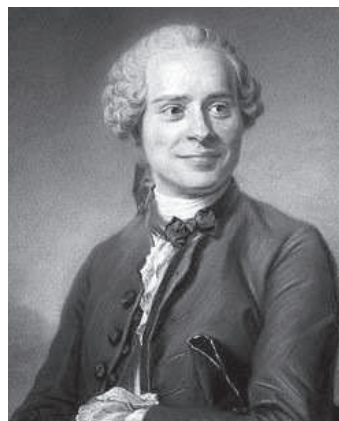


Figura 2.3: D’Alembert (1717–1783)

Comentario 2.1.2. *El ppo. de D’Alembert permite tratar sistemas dinámicos como estáticos mediante la introducción de un fuerza ficticia llamada fuerza de inercia.*

El principio de D’Alembert es realmente una generalización de la segunda ley de Newton en una forma aplicable a sistemas con restricciones², ya que incorpora el hecho de que las fuerzas de ligadura no realizan trabajo en un movimiento compatible. Debe señalarse que el principio de D’Alembert es muy útil para plantear las ecuaciones de movimiento y el cálculo de reacciones de un sistema mecánico usando un campo de desplazamientos virtuales que sea diferenciable. En ese caso el cálculo mediante el principio de D’Alembert, que también se llama en ese contexto principio de los Trabajos Virtuales, es ventajoso sobre el enfoque más simple de la mecánica Newtoniana.

Derivación

El principio de D’Alembert formalmente puede derivarse de las leyes de Newton cuando las fuerzas que intervienen no dependen de la velocidad.

²El problema de contacto es un candidato natural a ser tratado por medio de las ecuaciones de D’Alembert, ya que en él se formula la restricción de impenetrabilidad entre cuerpos

2.1. LA DINÁMICA ANALÍTICA

La derivación resulta de hecho trivial si se considera un sistema de cuerpos tal que sobre el cuerpo i actúa una fuerza externa \mathbf{f}_{ext}^i más una fuerza de ligadura \mathbf{f}_c^{i3} , entonces la mecánica newtoniana asegura que la variación de momento viene dada por:

$$\frac{d(m^i \dot{\mathbf{r}}^i)}{dt} = m^i \frac{d\dot{\mathbf{r}}^i}{dt} = \mathbf{f}_{ext}^i + \mathbf{f}_c^i \quad (2.2)$$

Si el sistema está formado por n_{bd} cuerpos, se tendrán n_{bd} ecuaciones vectoriales de la forma $m^i \frac{d\dot{\mathbf{r}}^i}{dt} - \mathbf{f}_{ext}^i = \mathbf{f}_c^i$, $i = 1, \dots, n_{bd}$. Si se multiplica cada una de estas ecuaciones por un desplazamiento arbitrario $\delta \mathbf{r}^i$ compatible con las restricciones de movimiento existentes, se obtiene:

$$\left(m^i \frac{d\dot{\mathbf{r}}^i}{dt} - \mathbf{f}_{ext}^i \right) \delta \mathbf{r}^i = \mathbf{f}_c^i \delta \mathbf{r}^i \quad (2.3)$$

donde el segundo término se anula por escogerse un sistema de desplazamientos arbitrario “compatible” con las restricciones. Matemáticamente, el concepto compatible, implica que el segundo término de la anterior ecuación es un producto escalar nulo⁴. Finalmente sumando las n_{bd} ecuaciones anteriores se obtiene el principio de D’Alembert, ecuación 2.1.

La figura 2.4 (sup.) muestra un ejemplo del equilibrio dinámico de dos discos de masas m^1 y m^2 unidos por sus centros a través de un resorte elástico horizontal de rigidez K_N ⁵. La masas se consideran apoyadas sobre una superficie sin fricción, por lo que su configuración queda definida por la posición horizontal de cada masa, coordenadas generalizadas q^1 y q^2 . Aislando cada masa y aplicando el principio de D’Alembert, figura 2.4 (inf.), se obtienen las ecuaciones de movimiento añadiendo a las fuerzas actuantes, $K_N(q^1 - q^2)$, $K_N(q^2 - q^1)$ las fuerzas ficticias de inercia $m^1 \ddot{q}^1$ y $m^2 \ddot{q}^2$.

2.1.3. Ecuaciones de Euler–Lagrange

El principio de D’Alembert permite la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, también llamadas ecuaciones de Euler–Lagrange. Para la obtención de dichas ecuaciones para un sistema de n_{bd} cuerpos partamos de la ecuación 2.1 y de $\delta \mathbf{r}^i$, variación infinitesimal de las coordenadas vectoriales:

$$\delta \mathbf{r}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^j} \delta q^j \quad (2.4)$$

Si se sustituye la expresión anterior en la ecuación 2.1 se obtiene:

³En este trabajo se considera la fuerza de contacto \mathbf{f}_c^i como fuerza de ligadura

⁴La fuerza de contacto \mathbf{f}_c^i no realiza trabajo

⁵Este es el problema de contacto más sencillo empleando en método del Penalty

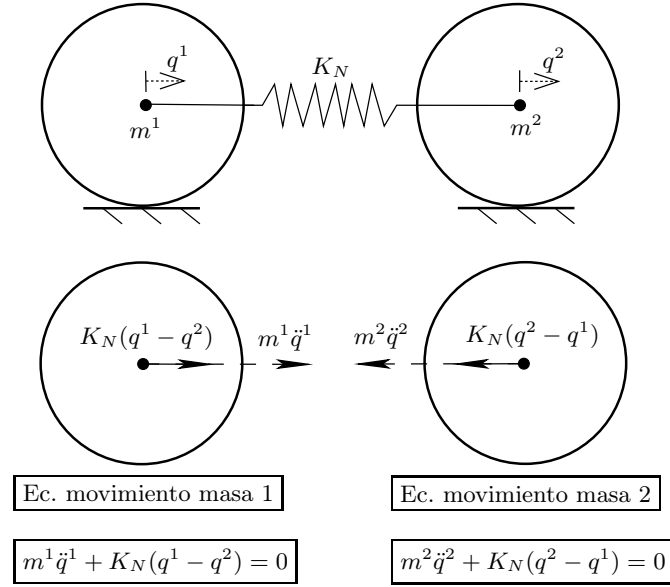


Figura 2.4: Aplicación del principio de D'Alembert para la obtención de las ecuaciones de movimiento de sistema mecánico sencillo compuesto por dos masas

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n_{bd}} \mathbf{f}_{ext}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} - \sum_{i=1}^{n_{bd}} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} \right) \delta \mathbf{q}^j = 0 \quad (2.5)$$

El primer término del paréntesis de esta ecuación es un escalar llamado “fuerzas generalizadas” $Q^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{ext}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j}$, que es la proyección de la fuerza exterior \mathbf{f}_{ext}^i sobre la variable \mathbf{q}^j , mientras el segundo término se expresa como:

$$\sum_{i=1}^{n_{bd}} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} \right) - \sum_{i=1}^{n_{bd}} m^i \dot{\mathbf{r}}^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} \right) \quad (2.6)$$

Para continuar con el desarrollo se han de tener en cuenta las siguientes igualdades:

Definición 2.1.3. $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j}$

Demostración.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^k} \dot{\mathbf{q}}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^k} \delta^{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{q}^j} \quad (2.7)$$

□

Definición 2.1.4. $\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j}}$

Demostración.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j \partial \dot{\mathbf{q}}^k} \dot{\mathbf{q}}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j \partial t} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^k} \dot{\mathbf{q}}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j \partial \dot{\mathbf{q}}^k} \dot{\mathbf{q}}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j \partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \quad \boxed{2.8}$$

Se verifica la igualdad debido a que las derivadas cruzadas coinciden. \square

Usando estas igualdades, la ecuación 2.6 se transforma en:

$$\sum_{i=1}^{nbd} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{nbd} m^i \dot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \right) - \sum_{i=1}^{nbd} m^i \dot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \quad \boxed{2.9}$$

Definiendo la energía cinética total como $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{nbd} \mathcal{T}^i(\dot{\mathbf{r}}^i) = \sum_{i=1}^{nbd} 1/2 m^i (\dot{\mathbf{r}}^i)^2$,

la ecuación anterior se expresa como:

$$\sum_{i=1}^{nbd} m^i \ddot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \quad \boxed{2.10}$$

Por lo que finalmente, el principio de D'Alembert queda:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^j} - \mathcal{Q}^j \right] \delta \mathbf{q}^j = 0 \quad \boxed{2.11}$$

Esta es la ecuación fundamental de la Dinámica Analítica. Nótese que es una expresión abstracta, ya que no se usan las fuerzas \mathbf{f}_{ext}^i sino los coeficientes \mathcal{Q}^j que son las fuerzas generalizadas y la energía cinética total $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{r}})$. Esta ecuación es siempre constante en forma y por tanto la respuesta de un sistema mecánico se obtiene insertando la relación entre las coordenadas generalizadas en dicha ecuación.

La tabla 2.1 resume los pasos para la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico empleando las ecuaciones de Lagrange.

Comentario 2.1.5. *Las ecuaciones de Lagrange permanecen invariables para cualquier tipo de problema. Lo que varía es la elección y la relación entre las coordenadas generalizadas⁶.*

⁶Hay que notar que la relación entre las coordenadas generalizadas no es única, pudiendo distintas elecciones representar el comportamiento del mismo sistema mecánico

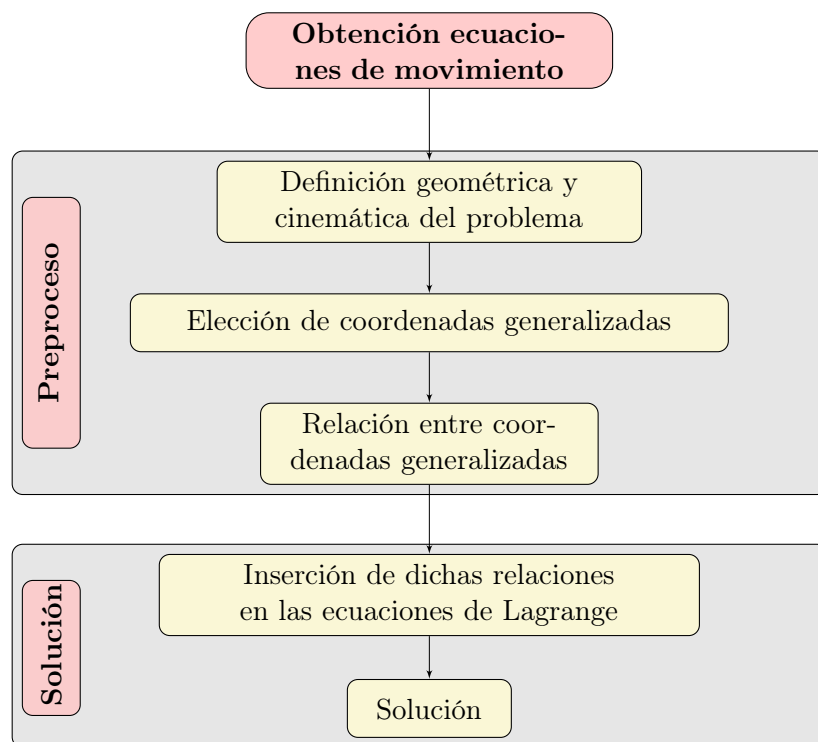


Tabla 2.1: Pasos para la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico

2.2 Sistemas de múltiples cuerpos

En este trabajo se estudia la respuesta de sistemas compuestos por una elevada cantidad de cuerpos rígidos bidimensionales que interactúan a través del contacto. A cada una de estos cuerpos se le aplicarán las leyes de Newton formuladas a través de la dinámica analítica, obteniendo la respuesta global del sistema mediante la correspondiente colaboración individual de cada cuerpo.

Los sistemas de estudiados en este trabajo, como el de la figura 2.5 (izqda.), están compuestos por un número finito de cuerpos n_{bd} , cada uno de los cuales es bidimensional y de dominio Ω . La configuración de cada cuerpo, figura 2.5 (drcha.), está definida por los parámetros \mathbf{q}^i (coordenadas generalizadas).

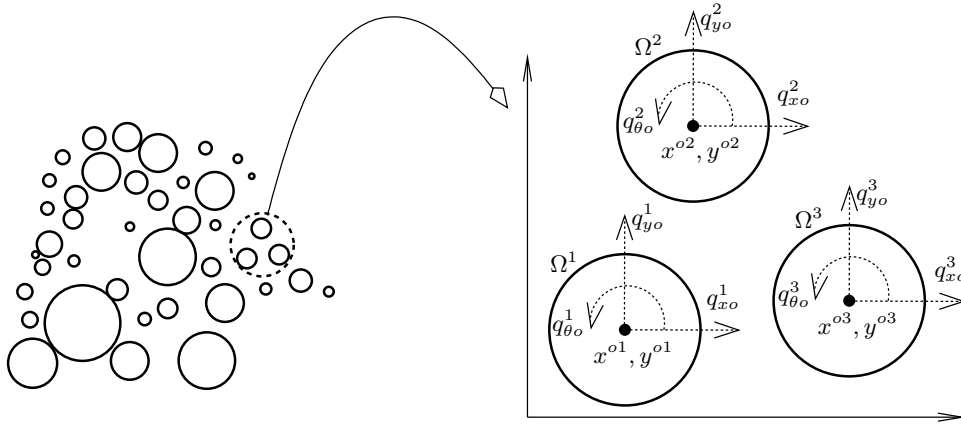


Figura 2.5: Ejemplo de un sistema de múltiples cuerpos tratado en este trabajo

La posición de cualquier punto P de un cuerpo i , $\mathbf{r}^i(\mathbf{q}, t)$, se define a través de las coordenadas generalizadas $q_{x^o}^i, q_{y^o}^i, q_{\theta^o}^i$ definidas en centro de gravedad (x^{oi}, y^{oi}) del cuerpo. Por tanto, se necesitarán $3n_{bd}$ coordenadas generalizadas para definir la configuración de un sistema de n_{bd} cuerpos. Si algunos de estos cuerpos están en contacto, las coordenadas \mathbf{q} estarán relacionadas entre sí (coordenadas dependientes), por lo que el número de coordenadas generalizadas independientes para definir la configuración del sistema de cuerpos será inferior a $3n_{bd}$.

2.2.1. Ecuaciones de Hamilton. Introducción

La configuración de cualquier sistema mecánico compuesto por n_{bd} cuerpos rígidos bidimensionales, estará definido por $3n_{bd}$ coordenadas generalizadas, por lo que según la ecuación 2.11, se necesitarán $3n_{bd}$ ecuaciones de Euler-Lagrange. Dichas ecuaciones son de segundo orden, por tanto habrá

que imponer $2 \times 3n_{bd}$ condiciones iniciales (posiciones y velocidades) para la obtención de su solución.

La dificultad de encontrar una solución analítica a estas ecuaciones, sobre todo ante la presencia de restricciones de contacto, hace patente la necesidad de aplicar métodos numéricos de integración de ecuaciones de segundo orden. Dada la complejidad y la falta de precisión de estos métodos, Hamilton (1805–1865) figura 2.6, desarrolló una metodología para transformar las $3n_{bd}$ ecuaciones de segundo orden de Lagrange en $2 \times 3n_{bd}$ ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton) empleando la transformada de Legendre a costa de introducir $3n_{bd}$ nuevas incógnitas (momentos generalizados \mathbf{p}). El principal inconveniente radica en el mayor número de ecuaciones a resolver, a cambio se obtiene la ventaja de aplicar métodos de integración temporal para ecuaciones de primer orden más sencillos y precisos.



Figura 2.6: Hamilton (1805–1865)

Comentario 2.2.1. *La mecánica de Hamilton está basada en el uso de ecuaciones de primer orden, lo que constituye una ventaja a la hora de aplicar métodos numéricos de integración temporal.*

El uso de las ecuaciones de Hamilton permite tratar de manera abstracta y sencilla los problemas de sistemas de múltiples cuerpos que interactúan a través de contacto. Además, permiten obtener las integrales primeras que definen la evolución en el tiempo de ciertas constantes: momento lineal \mathbf{p} , momento angular \mathcal{J} y energía \mathbb{E} .

En los siguientes subapartados se obtienen las ecuaciones de Hamilton empleando la transformada de Legendre. Posteriormente se expone un ejemplo de obtención de las ecuaciones de movimiento aplicado a un caso sencillo, y finalmente se estudian las propiedades conservativas a través de las integrales primeras.

2.2.2. Transformada de Legendre

Sea la función de Lagrange, $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, función de las coordenadas generalizadas \mathbf{q} (posición) y de su derivada temporal $\dot{\mathbf{q}}$ (velocidad), variables dependientes del parámetro tiempo t . Por otra parte, consideremos unas nuevas coordenadas independientes de \mathbf{q} llamadas momentos generalizados \mathbf{p} . Se llama “transformada de Legendre” $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ de la función Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ a la siguiente expresión:

2.2. SISTEMAS DE MÚLTIPLES CUERPOS

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.12)$$

En esta expresión hay que eliminar para cada cuerpo i las variables $\dot{\mathbf{q}}^i$ en favor de las \mathbf{p}^i mediante la relación $\mathbf{p}^i = \partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)/\partial\dot{\mathbf{q}}^i$, donde la variable $\dot{\mathbf{q}}^i$ se llama “variable conjugada” de \mathbf{p}^i .

Mediante el diferencial de $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ se establecen las relaciones entre las derivadas parciales de $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ y las variables $\dot{\mathbf{q}}$ y \mathbf{p} :

$$d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \left(d\mathbf{p}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{p}^i d\dot{\mathbf{q}}^i - \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial\mathbf{q}^i} d\mathbf{q}^i - \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial\dot{\mathbf{q}}^i} d\dot{\mathbf{q}}^i - \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial t} dt \right) \quad (2.13)$$

Aplicando la relación entre las variables conjugadas \mathbf{p}^i y $\dot{\mathbf{q}}^i$ por medio de la expresión $\mathbf{p}^i = \partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)/\partial\dot{\mathbf{q}}^i$, se llega a:

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \sum_{i=1}^n \left(d\mathbf{p}^i \dot{\mathbf{q}}^i - \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial\mathbf{q}^i} d\mathbf{q}^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{q}^i} d\mathbf{q}^i + \frac{\partial\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{p}^i} d\mathbf{p}^i \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

de esta ecuación se obtienen las siguientes relaciones para cada cuerpo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{p}^i} &= \dot{\mathbf{q}}^i \\ \frac{\partial\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial\mathbf{q}^i} &= -\frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial\mathbf{q}^i} = \dot{\mathbf{p}}^i \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Ecuaciones canónicas} \quad (2.15)$$

Se observa que la derivada de $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ con respecto a \mathbf{p}^i es $\dot{\mathbf{q}}^i$ (“variables conjugadas”), y la derivada de la función de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ y la de Hamilton $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ con respecto a $\dot{\mathbf{q}}^i$ y a \mathbf{p}^i son las mismas pero con signo opuesto. Estas relaciones se conocen como ecuaciones canónicas de Hamilton, la primera ecuación relaciona las variables \mathbf{p}^i es $\dot{\mathbf{q}}^i$, es decir su misión es convertir las ecuaciones de segundo orden a primero, mientras que la segunda ecuación es la segunda ley de Newton.

Es importante destacar notables diferencias entre ambas dinámicas. En la dinámica basada en las ecuaciones de Lagrange, la configuración de un cuerpo viene dada por las coordenadas generalizadas \mathbf{q} , siendo la trayectoria del sistema la curva paramétrica dada por su evolución en el tiempo, $\mathbf{q}(t)$. En cambio, la dinámica Hamiltoniana define la configuración de un sistema

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

mediante las $2 \times 3n_{bd}$ variables \mathbf{q}, \mathbf{p} (variables fásicas: coordenadas geométricas y cantidades de movimiento). Las trayectorias, solución de las ecuaciones canónicas en función del tiempo, serán asimismo $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$, y se denominan trayectorias fásicas para diferenciarlas de la dinámica Lagrangiana.

2.2.3. Aplicación de las Ecuaciones de Hamilton a dos masas en contacto

Sea el problema definido por la figura 2.5 compuesto por dos discos de masas m^1, m^2 , cuya configuración inicial está definida por las coordenadas generalizadas q^1 y q^2 . Para impedir que ambas masas se interpenetren y por tanto ocupen la misma configuración, se interpone entre ambas un resorte elástico de elevada rigidez K_N que fuerza su separación y define un potencial $\mathcal{V}(q)$. Para la obtención de las ecuaciones de Hamilton se parte de la expresión de la función de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{T}(\dot{q}) - \mathcal{V}(q)$, en la que $\mathcal{T}(\dot{q})$ y $\mathcal{V}(q)$ son:

$$\begin{aligned} g_N &= (q^1 - q^2) \\ \mathcal{V}(q) &= 1/2 K_N g_N^2 \\ \mathcal{T}(\dot{q}) &= \frac{1}{2} m^1 (\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\dot{q}^2)^2 \\ \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \mathcal{T}(\dot{q}) - \mathcal{V}(g_N) = \frac{1}{2} m^1 (\dot{q}^1)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\dot{q}^2)^2 - 1/2 K_N g_N^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde la variable g_N es la distancia mínima entre ambas masas y es dependiente de q^1 y q^2 . Los momentos generalizados se obtienen empleando la siguiente relación:

$$\begin{aligned} p^1 &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}^1} \rightarrow p^1 = m^1 \dot{q}^1 \\ p^2 &= \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}^2} \rightarrow p^2 = m^2 \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mediante la aplicación de la transformación de Legendre a la función de Lagrange $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, se obtiene la función hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{(\mathcal{T}(\mathbf{p}) - \mathcal{V}(\mathbf{q}))}_{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} = p^1 \dot{q}^1 + p^2 \dot{q}^2 - \frac{(\dot{q}^1)^2}{2m^1} - \frac{(\dot{q}^2)^2}{2m^2} + \frac{1}{2} K_N (q^1 - q^2)^2 \quad (2.18)$$

2.2. SISTEMAS DE MÚLTIPLES CUERPOS

A continuación, empleando las relaciones dadas en la ecuación 2.17 se eliminan las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ sustituyéndolas por los momentos generalizados \mathbf{p} . Por lo que finalmente, la función hamiltoniana queda:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - [\mathcal{T}(\mathbf{p}) - \mathcal{V}(\mathbf{q})] = \frac{(p^1)^2}{2m^1} + \frac{(p^2)^2}{2m^2} + \frac{1}{2}K_N(q^1 - q^2)^2 \quad (2.19)$$

Aplicando las ecuaciones canónicas, ecuaciones 2.15, se obtienen las ecuaciones de movimiento del problema:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p^1} = p^1/m^1; & \dot{p}^1 &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^1} = K_N g_N \\ \dot{q}^2 &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p^2} = p^2/m^2; & \dot{p}^2 &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^2} = K_N g_N \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Ecs. 1}^{er} \text{ orden} \quad (2.20)$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} m^1 \ddot{q}^1 + K_N g_N &= 0 \\ m^2 \ddot{q}^2 + K_N g_N &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Ecs. mov. de 2}^o \text{ orden} \quad (2.21)$$

que son las ecuaciones de movimiento expuestas en la figura 2.4.

2.2.4. Integrales primeras

Se definen integrales primeras como aquellas cantidades que se mantienen constantes a lo largo del tiempo en espacio de fases (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Un ejemplo es la función Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, para ello se estudia su variación a lo largo del tiempo:

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p^i} \dot{p}^i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} \quad (2.22)$$

Teniendo en cuenta las relaciones dadas en las ecuaciones 2.15 se llega al siguiente resultado:

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(- \underbrace{\dot{p}^i}_{\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q^i}} \dot{q}^i + \underbrace{\dot{q}^i}_{\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p^i}} \dot{p}^i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} \quad (2.23)$$

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

Esta ecuación implica que la derivada total con respecto al tiempo es igual a la parcial, por lo que si t no entra explícitamente en el Hamiltoniano, entonces $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ es constante y por tanto la energía total se conserva. De la misma manera se pueden obtener las condiciones por las que se conserva el momento lineal total \mathbf{p}^{tot} y angular \mathcal{J}^{tot} . Estas condiciones serán estudiadas en profundidad en el capítulo 3 para el problema de contacto.

La figura 2.7 representa la superficie Π en la que $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ es constante (integral primera), sobre ella cualquier solución $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ conserva la energía total. Si el momento lineal es también integral primera, existe una trayectoria $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ sobre Π definida por la línea continua que conserva tanto el momento como la energía, figura 2.7 (sup. izqda.). Del mismo modo se puede decir para el momento angular, figura 2.7 (sup. drcha.). Si tanto la energía como los momentos son integrales primeras, el sistema mecánico conserva sus tres magnitudes básicas en el tiempo a través de la trayectoria $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ sobre Π (línea continua), figura 2.7 (inf.). El objetivo de este trabajo es la obtención de un algoritmo de integración temporal que obtenga una solución conservativa (línea discontinua) que aproxime a la solución exacta (línea continua).

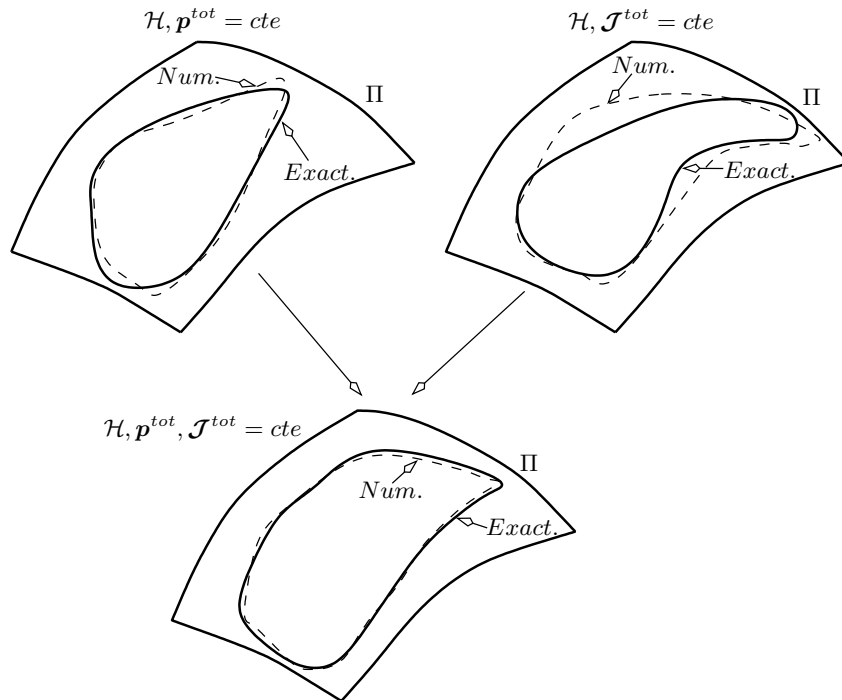


Figura 2.7: Integrales primeras. Conservación de energía \mathcal{H} y momento lineal total \mathbf{p}^{tot} (sup. izqda.), energía y momento angular total \mathcal{J}^{tot} (sup. drcha.), y energía y momentos totales (inf.)

2.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

2.3 Formulación del método de los Elementos Discretos

Una vez fijadas las ecuaciones que definen el comportamiento mecánico de los sistemas de múltiples cuerpos, en este apartado se formulan las ecuaciones del MED para un cuerpo i , expresadas a través del problema de valores iniciales de la tabla 2.2.

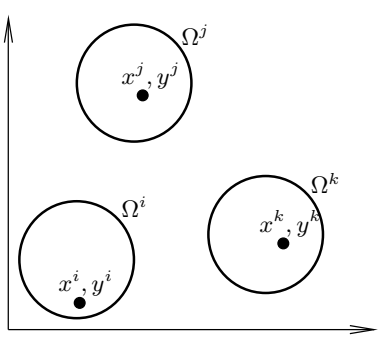
<p>Obtener:</p> $\mathbf{q}^i(t), \mathbf{p}^i(t) \forall x^i, y^i \in \Omega^i, t \in [0, T]$ $i = 1, \dots, n_{bd}$	
<p>Sujeto a:</p> $\dot{\mathbf{q}}^i = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}^i}; \quad \dot{\mathbf{p}}^i = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}^i}$	
<p>Condiciones iniciales:</p> $\mathbf{q}^i(t_0) = \mathbf{q}_0^i; \quad \mathbf{p}^i(t_0) = \mathbf{p}_0^i$	

Tabla 2.2: Planteamiento continuo de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo

Se trata de obtener una aproximación numérica a las variables continuas $\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^i$ que proporcione la posición y momento lineal en cualquier punto x^i, y^i de cada cuerpo Ω^i en el instante t . Para ello, se discretizan espacialmente las ecuaciones de esta tabla que posteriormente serán discretizadas e integradas en el tiempo por medio del algoritmo de integración temporal propuesto en los capítulos 4 y 5.

2.3.1. Discretización espacial

En este subapartado se expone el procedimiento de discretización espacial tanto de la geometría del dominio Ω , como de las coordenadas $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$.

Discretización del dominio Ω

El MED discretiza el dominio Ω^i con frontera $\partial\Omega^i$ de un cuerpo i aproximándolo por un dominio Ω^{i*} con frontera $\partial\Omega^{i*}$ compuesto por un único nodo (\bullet) definido en el centro de gravedad x^{oi}, y^{oi} , figura 2.8. La posición x^i, y^i de cualquier punto de Ω^{i*} se obtiene a través de las coordenadas generalizadas

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

definidas en dicho nodo. En caso de interacción entre cuerpos por contacto, la geometría del contorno del dominio $\partial\Omega^{i*}$ define la posición del punto de contacto.

Comentario 2.3.1. *El MED se basa en la discretización geométrica de cada dominio $\Omega^i \rightarrow \Omega^{i*}$ mediante un único nodo (\bullet) normalmente definido en el centro de gravedad. La posición geométrica de los puntos del contorno $\partial\Omega^i \rightarrow \partial\Omega^{i*}$ se expresa en función de los valores de las coordenadas generalizadas en el nodo.*

Si el contorno $\partial\Omega^i$ está definido por una geometría arbitraria, figura 2.8, éste se discretiza por poligonales, o por medio de curvas tipo spline. Este procedimiento permite obtener una expresión analítica de la geometría del contorno, detectar contactos y determinar la distancia mínima entre cuerpos.

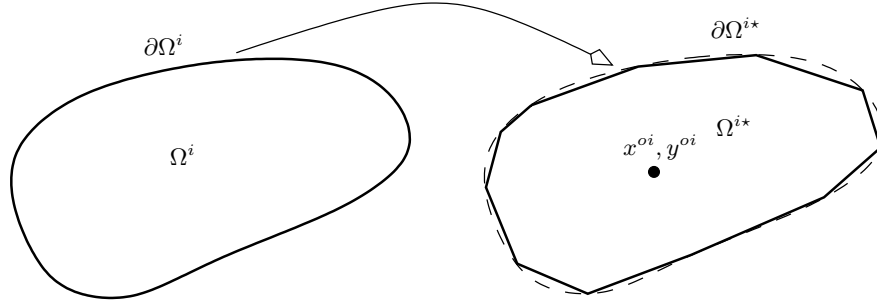


Figura 2.8: Discretización de dominio Ω^i en Ω^{i*} mediante un único nodo (\bullet). El contorno Ω^i se transforma en Ω^{i*} definido por curvas analíticas sobre las que se puede medir distancias entre cuerpos

2.3.2. Discretización espacial de primer orden de las coordenadas generalizadas

Una vez que se ha discretizado el dominio Ω^i de un cuerpo i , en este apartado se procede a la discretización espacial de las variables \mathbf{q}^i , \mathbf{p}^i que insertadas en las ecuaciones de la tabla 2.2 se obtienen las ecuaciones del MED discretas. Para tal fin, se procede a la discretización de dichas variables por medio de la aproximación de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}^i &= \begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^i & a_2^i \\ b_1^i & b_2^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3^i \\ b_3^i \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}^i &= \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^i & c_2^i \\ d_1^i & d_2^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3^i \\ d_3^i \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

donde $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$, $j = 1, \dots, 3$ son constantes que pueden ser expresadas en función de las coordenadas generalizadas definidas en el nodo (\bullet) del

2.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

dominio Ω^{i*} . Los parámetros x^i, y^i son las coordenadas de cualquier punto perteneciente a Ω^{i*} en el que se desea obtener q^i, p^i . Estas expresiones definen la configuración de cada cuerpo del sistema mecánico. Es importante recalcar que el objetivo del MED es la obtención de la “configuración global” en cada instante de tiempo de un sistema de cuerpos que interactúan por contacto. Esta “configuración global” es muy diferente a la de un único cuerpo, ya que ésta última puede ser descrita por medio de ecuaciones sencillas. En cualquier caso, todo sistema de múltiples cuerpos ha de cumplir dos restricciones importantes:

- No penetración
- No tracción entre partículas

De estas restricciones se desprende que de la formulación del MED se obtendrán dos clases de términos:

- Términos de no contacto. Describen el movimiento de la partícula individual cuando no existe interacción entre partículas.
- Términos de contacto. Describen el movimiento de la partícula cuando existen las citadas interacciones.

En función de la necesidad en la precisión de la solución del problema, la aproximación expuesta en las ecuaciones 2.24 se puede desarrollar para un orden mayor. Como estas expresiones son distintas para cada cuerpo, a cada uno se le puede asignar un orden de aproximación distinto.

2.3.3. Discretización de las coordenadas generalizadas mediante aproximaciones de alto orden

La configuración q^i y p^i de un cuerpo i puede ser aproximada mediante desarrollos en serie de orden superior a uno tal como se indica en la ref. [COI98]. De este modo, los desplazamientos y momentos de un punto (x^i, y^i) de Ω^{i*} se representan en serie bidimensional de orden m como:

$$\left. \begin{aligned} q_x^i &= \sum_{j=1}^{3m} \mathcal{F}^{ji}(x^i, y^i) a_j^i ; & q_y^i &= \sum_{j=1}^{3m} \mathcal{F}^{ji}(x^i, y^i) b_j^i \\ p_x^i &= \sum_{j=1}^{3m} \mathcal{F}^{ji}(x^i, y^i) c_j^i ; & p_y^i &= \sum_{j=1}^{3m} \mathcal{F}^{ji}(x^i, y^i) d_j^i \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}^{1i} & 0 & \mathcal{F}^{2i} & 0 & \dots & \dots & \mathcal{F}^{3mi} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}^{1i} & 0 & \mathcal{F}^{2i} & \dots & \dots & 0 & \mathcal{F}^{3mi} \end{bmatrix}}_{N^{mi}(x^i, y^i)} \begin{pmatrix} a_1^i \\ b_1^i \\ a_2^i \\ b_2^i \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{3m}^i \\ b_{3m}^i \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

\mathbf{q}_o^i

$$\begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}^{1i} & 0 & \mathcal{F}^{2i} & 0 & \dots & \dots & \mathcal{F}^{3mi} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}^{1i} & 0 & \mathcal{F}^{2i} & \dots & \dots & 0 & \mathcal{F}^{3mi} \end{bmatrix}}_{N^{mi}(x^i, y^i)} \begin{pmatrix} c_1^i \\ d_1^i \\ c_2^i \\ d_2^i \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{3m}^i \\ d_{3m}^i \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

\mathbf{p}_o^i

Siendo $N^{mi}(x^i, y^i)$ una matriz de dimensiones $2 \times 3m$ que engloba a las funciones de forma \mathcal{F}^{ji} , funciones de x^i, y^i ; $3m$ implica que para cada cuerpo son necesarios tres parámetros para definir la configuración por cada orden. Las variables \mathbf{q}_o^i y \mathbf{p}_o^i son vectores de dimensión $3m$ cuyos elementos, $a_j^i, b_j^i, c_j^i, \dots, d_j^i, j = 1, \dots, 3m$ son parámetros que pueden ser expresados en función de las coordenadas generalizadas definidas en los nodos.

2.3.4. Expresión de \mathbf{q} y \mathbf{p} de primer orden en función de las coordenadas generalizadas

Las expresiones de primer orden que aproximan la configuración de un cuerpo rígido i , \mathbf{q}^i y \mathbf{p}^i , se pueden obtener a través de la superposición de movimientos de sólido rígido. Tradicionalmente el MED ha empleado aproximaciones de primer orden, ya que en la mayoría de los problemas simulados los grandes desplazamientos son resultado de la acumulación de los correspondientes a pequeños pasos de tiempo. Esta suposición se ha demostrado válida con pasos de tiempo ≤ 0.1 s.

Para un sólido rígido libre bidimensional, la configuración de cualquier punto x^i, y^i se puede definir por medio de tres movimientos: dos traslaciones (horizontal y vertical) y una rotación. De esta manera, la configuración de cualquier punto se expresa mediante seis coordenadas generalizadas

2.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

$q_{x_0}^i, q_{y_0}^i, q_{\theta_0}^i$ y $p_{x_0}^i, p_{y_0}^i, p_{\theta_0}^i$ definidas en el centro de gravedad del cuerpo, tabla 2.3:

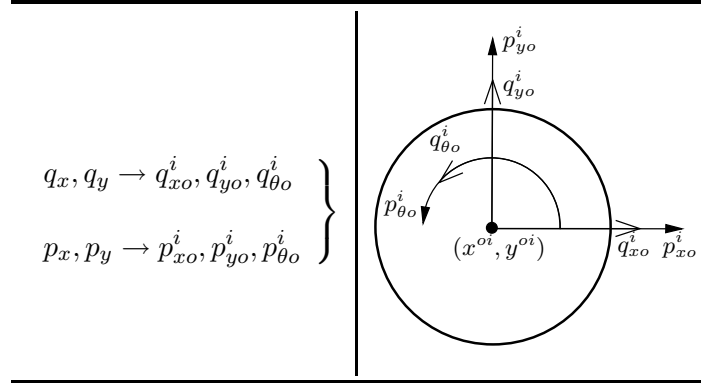


Tabla 2.3: Descripción del movimiento de un sólido mediante 6 coordenadas generalizadas (3 desplazamientos + 3 momentos lineales)

donde $q_{x_0}^i, q_{y_0}^i, q_{\theta_0}^i$ y $p_{x_0}^i, p_{y_0}^i, p_{\theta_0}^i$ son las coordenadas generalizadas que representan la traslación y rotación del centro de gravedad x^{oi}, y^{oi} . Éstas son constantes en todo el cuerpo por ser las funciones de primer orden 1.

Las ecuaciones 2.24 definen la aproximación de \mathbf{q}^i y \mathbf{p}^i de cualquier punto $x^i, y^i \in \Omega^{i*}$ en función de las constantes $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$. A continuación se procede a la obtención de los valores de dichas constantes en función de las coordenadas generalizadas definidas en el centro de gravedad aplicando los movimientos de sólido rígido, figura 2.9:

Movimiento de traslación de sólido rígido

Todo cuerpo rígido i que experimenta un movimiento de traslación ($q_{x_0}^i, q_{y_0}^i$) y ($p_{x_0}^i, p_{y_0}^i$), el desplazamiento y momento lineal serán constantes en cada punto $x^i, y^i \in \Omega^{i*}$. La figura 2.9 (izqda.) muestra la traslación de un cuerpo i de la que se deduce que la configuración \mathbf{q}^i y \mathbf{p}^i entre dos instantes t_0 y t_1 , posiciones x_0^i, y_0^i y x_1^i, y_1^i , se pueden expresar en función de las coordenadas generalizadas en el centro de gravedad como:

$$\begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{x_0}^i \\ q_{y_0}^i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{x_0}^i \\ p_{y_0}^i \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Movimiento de rotación de sólido rígido

Si un cuerpo rígido i experimenta un movimiento de rotación alrededor de un punto fijo⁷ x^{oi}, y^{oi} , el desplazamiento y el momento lineal de primer

⁷Usualmente el centro de gravedad del cuerpo Ω^{i*}

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

orden de cualquier punto $x^i, y^i \in \Omega^{i*}$ se expresan por medio de las coordenadas generalizadas $q_{\theta o}^i, p_{\theta o}^i$ que definen la rotación del cuerpo. La figura 2.9 (drcha.) muestra la rotación de un punto $x^i, y^i \in \Omega^{i*}$ en los instantes t_0 , posición (x_0^i, y_0^i) y t_1 , posición (x_1^i, y_1^i) . Al considerar una aproximación de primer orden, las ecuaciones 2.29 son lineales con respecto al giro.

$$\begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(y^i - y^{oi}) \\ (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix} (q_{\theta o}^i); \quad \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(y^i - y^{oi}) \\ (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix} (p_{\theta o}^i) \quad (2.29)$$

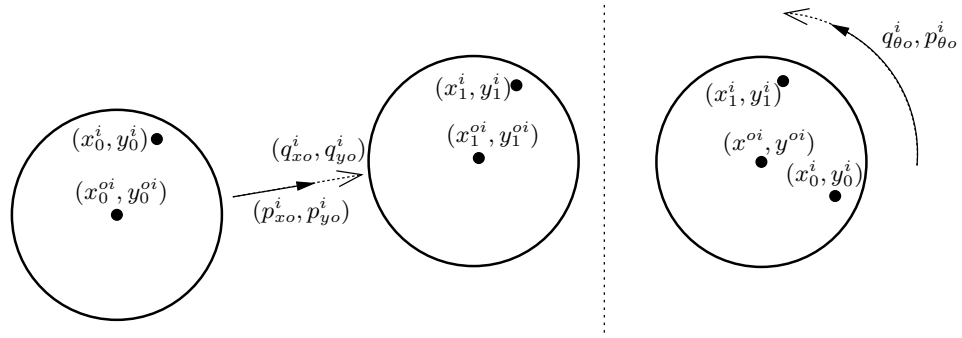


Figura 2.9: Movimiento de traslación de sólido rígido

Finalmente, la configuración del cuerpo quedará definida por la suma de los movimientos previos, obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y^i - y^{oi}) \\ 0 & 1 & (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i)} \underbrace{\begin{pmatrix} q_{xo}^i \\ q_{yo}^i \\ q_{\theta o}^i \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_o^i} \quad (2.30)$$

$$\begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y^i - y^{oi}) \\ 0 & 1 & (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i)} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{xo}^i \\ p_{yo}^i \\ p_{\theta o}^i \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_o^i}$$

Si se comparan las anteriores ecuaciones con 2.24 se obtiene la siguiente relación entre las constantes $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$, $j = 1, \dots, 3$, $i = 1, \dots, n_{bd}$ y las coordenadas generalizadas definidas en el centro de gravedad del cuerpo:

2.3.5. Formulación general del método de los Elementos Discretos

Una vez realizada la discretización de la geometría del dominio Ω y de las ecuaciones de gobierno continuas, se expone a continuación las ecuaciones básicas del MED para todo cuerpo i y orden de aproximación m :

2.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

a_1^i	a_2^i	a_3^i	b_1^i	b_2^i	b_3^i
0	$-q_{\theta o}^i(1 - y^{oi}/y^i)$	$q_{x o}^i$	$q_{\theta o}^i(1 - x^{oi}/x^i)$	0	$q_{y o}^i$
c_1^i	c_2^i	c_3^i	d_1^i	d_2^i	d_3^i
0	$-p_{\theta o}^i(1 - y^{oi}/y^i)$	$p_{x o}^i$	$p_{\theta o}^i(1 - x^{oi}/x^i)$	0	$p_{y o}^i$

Tabla 2.4: Relación entre las constantes $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$ y las coordenadas generalizadas definidas en el centro de gravedad del cuerpo i

Para $i = 1, \dots, n_{bd}$

Solución discreta:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}^i &= \mathbf{N}^{mi}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i(t) \\ \mathbf{p}^i &= \mathbf{N}^{mi}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i(t) \end{aligned} \right\}$$

Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t) = \sum_{i=1}^{n_{bd}} [T^i(\mathbf{N}^{mi}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i) + \mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{mi}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)]$$

Ecuaciones de gobierno:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_o^i &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)}{\partial \mathbf{p}_o^i} = \mathbf{M}^{i-1} \mathbf{p}_o^i \\ \dot{\mathbf{p}}_o^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)}{\partial \mathbf{q}_o^i} = \mathbf{f}_c^i + \mathbf{f}_{ext}^i \end{aligned} \right\}$$

Condiciones iniciales: $\mathbf{q}_0^i, \mathbf{p}_0^i$

Tabla 2.5: Resumen de las ecuaciones del método de los elementos discretos de orden m para n_{bd} cuerpos

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MED

Para facilitar la comprensión sobre la formulación expuesta en la tabla anterior, en los siguientes subapartados se muestran varios ejemplos de la obtención de los términos correspondientes a la matriz de masas y del vector de fuerzas externas mediante desarrollos de orden $m = 1$.

Matriz de masas

La matriz de masas \mathbf{M}_i del cuerpo i , define la masa movilizada por cada coordenada generalizada. Se obtiene a partir de la primera de las ecuaciones de gobierno de la tabla 2.5, que establece la relación entre la derivada temporal de \mathbf{q}_o^i y la derivada de la función hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)$ con respecto a \mathbf{p}_o^i por medio de la expresión $\mathbf{M}^{i-1} \mathbf{p}_o^i$. La función hamiltoniana sólo depende de \mathbf{p}_o^i por medio del término de energía cinética $\mathcal{T}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i)$, cuya expresión se obtiene integrando la energía cinética de un elemento diferencial de área $d\Omega$ y densidad ρ_s :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i) &= \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{2\rho_s} \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{2\rho_s} \mathbf{p}_o^{i\ t} \mathbf{N}^{1it}(x^i, y^i) \mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i d\Omega \end{aligned} \quad (2.31)$$

Aplicando la primera de las ecuaciones de gobierno se llega a la siguiente expresión discreta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_o^i &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)}{\partial \mathbf{p}_o^i} = \frac{\partial \mathcal{T}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i)}{\partial \mathbf{p}_o^i} \\ &= \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{\rho_s} \mathbf{N}^{1it}(x^i, y^i) \mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{p}_o^i d\Omega = \mathbf{M}_i^{i-1} \mathbf{p}_o^i \end{aligned} \quad (2.32)$$

despejando \mathbf{M}_i^{i-1} se obtiene:

$$\mathbf{M}_i^{i-1} = \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{\rho_s} \mathbf{N}^{1it}(x^i, y^i) \mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) d\Omega \quad (2.33)$$

donde \mathbf{M}_i^{i-1} es una matriz cuadrada 3×3 que adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^{i-1} &= \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{\rho_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(y^i - y^{0i}) & (x^i - x^{0i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y^i - y^{0i}) \\ 0 & 1 & (x^i - x^{0i}) \end{bmatrix} d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega^{i*}} \frac{1}{\rho_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y^i - y^{0i}) \\ 0 & 1 & (x^i - x^{0i}) \\ -(y^i - y^{0i}) & (x^i - x^{0i}) & (x^i - x^{0i})^2 + (y^i - y^{0i})^2 \end{bmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

$$\mathbf{M}_i^{-1} = \frac{1}{\rho_s} \begin{bmatrix} \mathcal{A}^i & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}^i \end{bmatrix}$$

donde \mathcal{A}^i es el área del cuerpo y \mathcal{I}^i es su momento de inercia polar.

Vector de fuerzas externas debido a cargas másicas

La segunda ecuación de gobierno de la tabla 2.5 representa la segunda ley de Newton. Esta ecuación relaciona la variación temporal del momento lineal $\dot{\mathbf{p}}_o^i$ para un cuerpo i con la derivada de la función hamiltoniana con respecto a \mathbf{q}_o^i y es igual a la acción de las fuerzas actuantes: fuerzas exteriores \mathbf{f}_{ext}^i y fuerzas de contacto \mathbf{f}_c^i . La expresión discreta de \mathbf{f}_{ext}^i se obtiene derivando la energía potencial $\mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)$ con respecto a \mathbf{q}_o^i , ya que la función hamiltoniana únicamente depende de \mathbf{q}_o^i a través del potencial.

Si (f_x^i, f_y^i) es la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el volumen del cuerpo i y (x^{oi}, y^{oi}) es su centro de gravedad, la energía potencial generada por esta fuerza másica es la integral del potencial generado por un área $d\Omega$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i) &= - \iint_{\Omega^{i*}} \begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} d\Omega = - \iint_{\Omega^{i*}} \mathbf{q}_o^{i\ t} \mathbf{N}^{1i\ t}(x^i, y^i) \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} d\Omega = \\ &= - \iint_{\Omega^{i*}} \begin{pmatrix} q_{x_o}^i & q_{y_o}^i & q_{\theta_o}^i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(y^i - y^{oi}) & (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} d\Omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

Minimizando $\mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)$ respecto a \mathbf{q}_o^i se obtiene la expresión de \mathbf{f}_{ext}^i :

$$\dot{\mathbf{p}}_o^i = - \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)}{\partial \mathbf{q}_o^i} = - \frac{\partial \mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)}{\partial \mathbf{q}_o^i} = - \begin{pmatrix} f_x^i \mathcal{A}^i \\ f_y^i \mathcal{A}^i \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_{ext}^i \quad (2.36)$$

Vector de fuerzas externas debida a carga puntual

Si una carga (f_x^i, f_y^i, τ_z^i) actúa en el punto x^i, y^i del cuerpo i , donde f_x^i y f_y^i son las componentes según x e y de la carga puntual y τ_z^i es el momento aplicado en el centro de gravedad del disco, la energía potencial que generada es:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i) &= - \begin{pmatrix} q_x^i \\ q_y^i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} - \tau_z^i q_{\theta_o}^i = \\ &- (q_{x_o}^i \quad q_{y_o}^i \quad q_{\theta_o}^i) \left(\mathbf{N}^{1it}(x^i, y^i) \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tau_z^i \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Minimizando $\mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)$ respecto a \mathbf{q}_o^i se obtiene la expresión de \mathbf{f}_{ext}^i :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_o^i &= - \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o, t)}{\partial \mathbf{q}_o^i} = - \frac{\partial \mathcal{V}^i(\mathbf{N}^{1i}(x^i, y^i) \mathbf{q}_o^i)}{\partial \mathbf{q}_o^i} = \mathbf{N}^{1it}(x^i, y^i) \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tau_z^i = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -(y^i - y^{oi}) & (x^i - x^{oi}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x^i \\ f_y^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tau_z^i = \mathbf{f}_{ext}^i \end{aligned} \quad (2.38)$$

3

La mecánica del contacto

En este capítulo se describe la geométrica y la física del problema de contacto así como la notación necesaria para su correcta interpretación. El contacto es un problema que se modela por una restricción de tipo unilateral. Es decir, por una restricción que sólo se presenta en un sentido, de manera que no se permite la penetración entre cuerpos pero sí su separación. En caso de que haya movimiento relativo tangencial entre cuerpos, pueden presentarse fenómenos de fricción. Aunque en este trabajo se haya propuesto el uso del modelo de fricción de Coulomb, se pueden emplear otros modelos como los propuestos en [JJ85].

La estructura de este capítulo es la siguiente: en el apartado 3.1 se hace una descripción de la cinemática y de la dinámica del contacto, en el apartado 3.2 se exponen las distintas estrategias para modelar físicamente la restricción de impenetrabilidad entre cuerpos¹. Finalmente, en los apartados 3.3 y 3.4 se analizan las leyes de conservación de momentos y energías² bajo el método del Penalty expuesto en el apartado 3.2.

Para simplificar facilitar la lectura de este y de los siguientes capítulos, las variables \mathbf{q}_o^i y \mathbf{p}_o^i que indican las coordenadas generalizadas del cuerpo i en el centro de gravedad o , se les omite el subíndice. Si dichas variables estuviesen referenciadas en otro punto (ej: \mathbf{X}), se definirían como $\mathbf{q}^i(\mathbf{X})$ y $\mathbf{p}^i(\mathbf{X})$.

3.1 Descripción cinemática y dinámica del contacto

Considérense dos cuerpos rígidos i, k cuyos dominios están definidos por los conjuntos $\Omega^{i^*}, \Omega^{k^*}$ y sus fronteras por $\Gamma^{i^*} = \partial\Omega^{i^*}$ y $\Gamma^{k^*} = \partial\Omega^{k^*}$ (figura 3.1). Estos cuerpos interactúan por contacto y su configuración (posición y velocidad) está definida por las coordenadas generalizadas $\mathbf{q}^i, \mathbf{p}^i, \mathbf{q}^k, \mathbf{p}^k : \Omega^* [0, T) \rightarrow R^2$. La función argumento “arg” de la ecuación 3.1 define la mínima distancia y permite identificar los puntos de $\Gamma^{i^*}, \Gamma^{k^*}$ que están en contacto, $\mathbf{X} \in \Gamma^{i^*}$ y $\mathbf{Y} \in \Gamma^{k^*}$:

¹Algoritmos de contacto

²Integrales primeras

CAPÍTULO 3. LA MECÁNICA DEL CONTACTO

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \arg \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma^{k*}} \left| \mathbf{q}^i(\mathbf{X}) - \mathbf{q}^k(\mathbf{Y}) \right| \quad (3.1)$$

Esta función define una proyección que es ortogonal, por lo que es posible obtener la magnitud que cuantifica la separación g_N^{ik} entre dos cuerpos i y k por medio de la función “gap”:

$$g_N^{ik} = [\mathbf{q}^i(\mathbf{X}) - \mathbf{q}^k(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))]^t \mathbf{R}^{ki} \quad (3.2)$$

donde el significado de estas variables se explica en la figura 3.1. Esta figura muestra dos cuerpos i, k cuya separación mínima entre las fronteras Γ^{i*}, Γ^{k*} es g_N^{ik} y está definida por los puntos \mathbf{X} e \mathbf{Y} , mientras que la dirección normal y tangencial está definida por los vectores unitarios \mathbf{R}^{ki} y \mathbf{T}^{ki} . La función gap $g_N^{ik}(\mathbf{X})$ tiene que satisfacer la restricción unilateral, $g_N^{ik} \geq 0$ (condición de impenetrabilidad). Por tanto, la frontera de contacto Γ_c^* para ambos cuerpos está definida por:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_c^{i*} \equiv \mathbf{X} \\ \Gamma_c^{k*} \equiv \mathbf{Y} \end{array} \right\} : g_N^{ik} \geq 0 \quad (3.3)$$

Nótese que $\Gamma_c^{i*} \equiv \Gamma_c^{k*}$, ya que es común a ambos cuerpos. Para el caso de cuerpos rígidos y redondeados, Γ_c^* consiste en un único punto. El resto de fronteras de la figura 3.1 son las correspondientes a la condición de tensiones Γ_t^* y de desplazamientos prescritos Γ_u^* . Para cada cuerpo, estas tres fronteras satisfacen:

$$\Gamma_u^* \cap \Gamma_t^* \cap \Gamma_c^* = \emptyset; \quad \Gamma_u^* \cup \Gamma_t^* \cup \Gamma_c^* = \Gamma^* \quad (3.4)$$

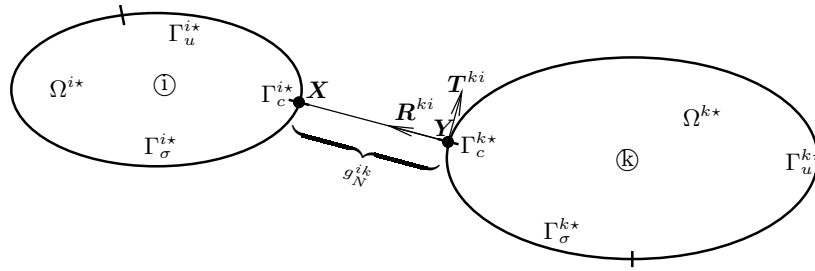


Figura 3.1: Contacto entre dos cuerpos i y k . Ptos. de contacto X e Y , proyección de mínima distancia g_N^{ik} , vectores unitarios a la superficie de contacto y partición de las fronteras Γ^*

Comentario 3.1.1. *El contacto evita que dos puntos interiores cualquiera de los cuerpos Ω^{i*} y Ω^{k*} ocupen físicamente la misma posición en el espacio. Para los puntos de la frontera, Ω^{i*} y Ω^{k*} , podrían ocuparla siempre que la distancia mínima entre sus fronteras sea mayor o igual a cero.*

3.1. DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL CONTACTO

Dados dos cuerpos i, k en contacto, éstos pueden desplazarse paralelamente al plano de contacto en Γ_c^* . Por tanto, es posible definir una variable adicional g_T^{ik} que cuantifique dicho movimiento como:

$$g_T^{ik}(\mathbf{X}) = [\mathbf{q}^i(\mathbf{X}) + \mathbf{u}^i(\mathbf{X}) - \mathbf{q}^k(\mathbf{Y}(\mathbf{X})) - \mathbf{u}^k(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))]^t \mathbf{T}^{ki} \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{u}^i(\mathbf{X})$ and $\mathbf{u}^k(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))$ son los desplazamientos de los puntos de contacto entre los instantes t_0 y t_1 .

Comentario 3.1.2. *El contacto tangencial restringe geoméricamente el desplazamiento relativo entre cuerpos al plano tangencial del punto de contacto en el que interactúan.*

Físicamente, la interacción por contacto entre dos cuerpos i, k se define por medio de la fuerza \mathbf{f}_c^{ik} , figura 3.2, cuya expresión vectorial es:

$$\mathbf{f}_c^{ik} = f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik} + f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik} \quad (3.6)$$

donde f_{cN}^{ik} y f_{cT}^{ik} son las componentes de la fuerza de contacto en la dirección normal y tangencial. La fuerza de contacto es una fuerza de tipo interno y verifica el principio de acción–reacción, lo que implica: $\mathbf{f}_c^{ik} = -\mathbf{f}_c^{ki}$.

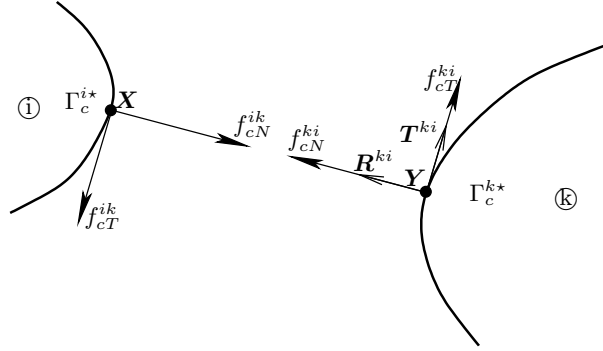


Figura 3.2: Interacción entre cuerpos en contacto definida por medio de la fuerza de contacto de componentes $f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik}, f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik}$. Se han separado los cuerpos para facilitar la representación de las fuerzas

Las condiciones de Kuhn–Tucker indican las restricciones que han de cumplir los gaps y las componentes de \mathbf{f}_c para el contacto normal y tangencial. Para caso normal, estas condiciones se resumen en:

Condiciones de Kuhn–Tucker contacto normal

$$g_N^{ik} \geq 0; \quad f_{cN}^{ik} \geq 0; \quad f_{cN}^{ik} g_N^{ik} = 0; \quad f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik} = 0 \quad (3.7)$$

CAPÍTULO 3. LA MECÁNICA DEL CONTACTO

La primera condición implica que la distancia mínima entre las fronteras Γ_i^* y Γ_k^* de dos cuerpos i y k ha de ser siempre mayor o igual a cero. La segunda indica que la fuerza de contacto ha de ser de compresión. La tercera es la “condición complementaria”, lo que significa que en contacto $g_N^{ik} = 0$, $f_{cN}^{ik} \neq 0$, y en ausencia de contacto $g_N^{ik} \neq 0$, $f_{cN}^{ik} = 0$. Finalmente, la cuarta es la “condición persistente”, que implica que la velocidad de penetración entre cuerpos ha de ser nula. Desde el punto de vista energético, la condición complementaria posee unidades de energía (fuerza por desplazamiento), mientras que la persistente de potencia (fuerza por velocidad). Por tanto, como se muestra en la ecuación 3.8 las fuerzas de contacto no crean ni trabajo ni potencia.

$$\begin{aligned} \boxed{\text{“Condición complementaria”}} &= f_{cN}^{ik} g_N^{ik} = 0 \rightarrow \boxed{\text{Energía nula}} \\ \boxed{\text{“Condición persistente”}} &= f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik} = 0 \rightarrow \boxed{\text{Potencia nula}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

En este trabajo el comportamiento de \mathbf{f}_{cT} se ha modelado por medio del modelo friccional de Coulomb. Dicho modelo distingue dos tipos de comportamiento tangencial: contacto tipo stick (pegado), no se produce un desplazamiento relativo entre cuerpos paralelamente a la superficie de contacto y contacto tipo slip (deslizante), se produce desplazamiento relativo. Ambos tipos de comportamiento están gobernados en el contacto entre cuerpos i, k por condiciones de Kuhn–Tucker para contacto tangencial:

Condiciones de Kuhn–Tucker contacto tangencial

$$\boxed{\Phi^{ik} = \left| f_{cT}^{ik} \right| - \mu f_{cN}^{ik} \leq 0; \quad g_T^{ik} \geq 0; \quad g_T^{ik} \Phi^{ik} = 0} \quad (3.9)$$

La primera condición implica que el desplazamiento comienza cuando se cumple la condición $\Phi^{ik} = 0$, siendo Φ^{ik} la función de deslizamiento. La figura 3.3 muestra un bloque i sobre una superficie rugosa k , donde el deslizamiento se produce cuando la fuerza tangencial f_{cT}^{ik} iguala a la de fricción μf_{cN}^{ik} , fuerza proporcional a f_{cN}^{ik} a través del coeficiente de fricción³ μ . En este caso se cumple $\Phi^{ik} = 0$, lo que implica que se produce el desplazamiento del bloque $g_T^{ik} \neq 0$ y adquiere velocidad $\dot{g}_T^{ik} \neq 0$. El caso contrario $\Phi^{ik} < 0$ se caracteriza por ausencia de movimiento. Nótese que la fuerza de reacción en la base es \mathbf{f}_{cT} . La segunda condición implica que el movimiento relativo entre cuerpos g_T^{ik} se produce en la dirección de la fuerza tangencial. La última condición asegura que valores nulos de g_T^{ik} están asociados con movimiento tangencial nulo, contacto tipo stick $\Phi^{ik} < 0$. Mientras que los positivos son indicativos de deslizamiento entre cuerpos, contacto tipo slip y están asociados a $\Phi^{ik} = 0$.

³Ver tabla 3.1 para los valores más usuales de μ

3.1. DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL CONTACTO

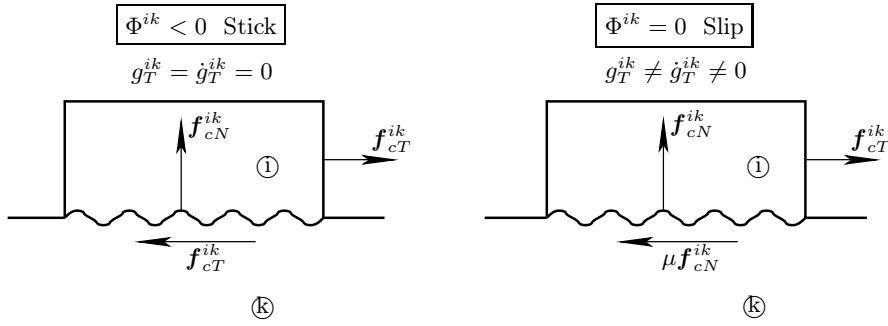


Figura 3.3: Deslizamiento de un bloque sobre una superficie rugosa. El deslizamiento se produce (slip) cuando la fuerza tangencial f_{cT}^{ik} supera a la friccional μf_{cN}^{ik} . En esta situación $\Phi^{ik} = 0$, $g_T^{ik} \neq 0$ y $\dot{g}_T^{ik} \neq 0$. En el caso contrario no se produce movimiento, caso stick $\Phi^{ik} < 0$. Nótese que para stick la fuerza de reacción en la base es f_{cT}^{ik}

Material	μ
Hormigón–hormigón	0.50–1.00
Hormigón–arena	0.35–0.60
Metal–madera	0.30–0.65
Acero–acero	0.20–0.80
Madera–acero	0.50–1.20

Tabla 3.1: Valores del coeficiente de fricción μ para el contacto entre varios materiales

3.2 Algoritmos de contacto

En este apartado se exponen dos de los métodos (algoritmos de contacto) más utilizados para forzar la condición de impenetrabilidad y modelar el contacto tangencial entre cuerpos. Como se ha indicado en el apartado anterior, la impenetrabilidad entre cuerpos se fuerza a través de la fuerza \mathbf{f}_c^{ik} . Los algoritmos de contacto proporcionan distintos métodos para la obtención de dicha fuerza y cumplir las condiciones de Kunh–Tucker. En resumen, un problema de contacto fuerza las siguientes condiciones:

Si $g_N^{ik} < 0$ (No hay contacto). Entonces:

$$f_{cN}^{ik} = 0 \text{ y } \dot{g}_N^{ik} \neq 0$$

Si $g_N^{ik} = 0$ (Contacto). Entonces:

Contacto Normal:

$$f_{cN}^{ik} \geq 0 ; \quad g_N^{ik} \geq 0 ; \quad f_{cN}^{ik} g_N^{ik} = 0 ; \quad f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik} = 0$$

Contacto Tangencial:

$$\Phi^{ik} = |f_{cT}^{ik}| - \mu f_{cN}^{ik} \leq 0 ; \quad g_T^{ik} \geq 0 ; \quad g_T^{ik} \Phi^{ik} = 0$$

Tabla 3.2: Resumen de las condiciones impuestas en un problema de contacto

En los siguientes subapartados se exponen y se formulan bajo el MED los algoritmos de contacto más utilizados: método de los multiplicadores de Lagrange y método del Penalty.

3.2.1. Método de los multiplicadores de Lagrange

La segunda de las ecuaciones de gobierno del MED relaciona para cada cuerpo i , la variación temporal de la cantidad de movimiento $\dot{\mathbf{p}}^i$ con la resultante total de la fuerza de contacto \mathbf{f}_c^i a través de la derivada con respecto a \mathbf{q}^i de la función hamiltoniana:

$$\dot{\mathbf{p}}^i = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{f}_c^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \quad (3.10)$$

3.2. ALGORITMOS DE CONTACTO

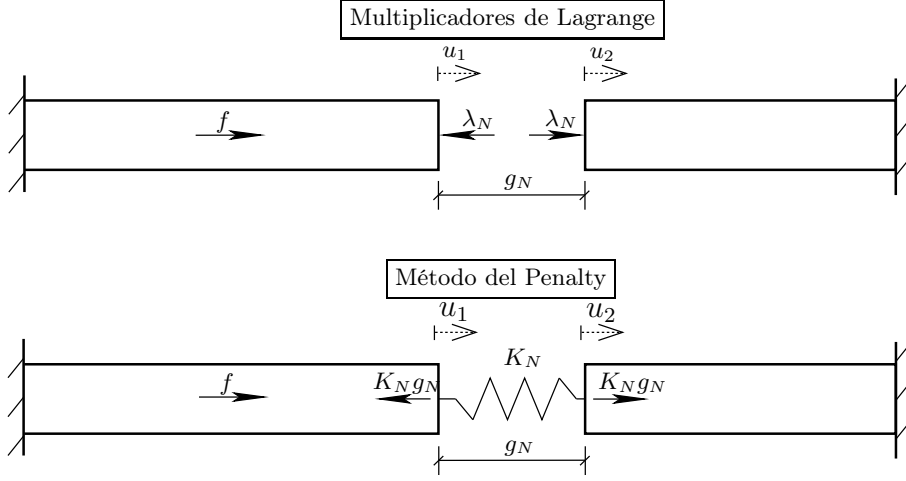


Figura 3.4: Algoritmos de contacto. Multiplicadores de Lagrange (sup.), Método del Penalty (inf.)

El método de los multiplicadores de Lagrange obtiene la expresión de la fuerza de contacto \mathbf{f}_c^{ik} entre dos cuerpos i y k , tal que se cumple de manera exacta la condiciones de Kuhn–Tucker. Para ello, se plantea las ecuaciones del MED con las siguientes restricciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}^i} = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{f}_c^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} &\text{Sujeto a: } g_N^{ik} \geq 0 ; g_T^{ik} \geq 0 \\ &\text{Para } i = 1, \dots, n_{bd} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Estas restricciones se implementan en las ecuaciones de gobierno por medio de la función hamiltoniana modificada \mathcal{H}^* :

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\lambda_N^{ik} g_N^{ik} + \lambda_T^{ik} g_T^{ik}) \quad (3.12)$$

Por cada contacto se añaden dos nuevas incógnitas: λ_N^{ik} y λ_T^{ik} . Si se analiza dimensionalmente $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)$, los términos $\lambda_N^{ik} g_N^{ik}$, $\lambda_T^{ik} g_T^{ik}$ tienen dimensiones de potencial y los multiplicadores λ_N^{ik} , λ_T^{ik} de fuerzas. Se demuestra que el funcional $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)$ es convexo, luego su solución es un punto de silla, mínimo para la variable desplazamiento y máximo para λ_N^{ik} , λ_T^{ik} .

CAPÍTULO 3. LA MECÁNICA DEL CONTACTO

Para facilitar la comprensión sobre el funcionamiento de este algoritmo se presenta un ejemplo sencillo, figura 3.5. Éste consiste en un cuerpo elástico estático, representado por medio de un resorte de 1 grado de libertad q (desplazamiento horizontal del extremo derecho), que entra en contacto con una frontera rígida vertical.

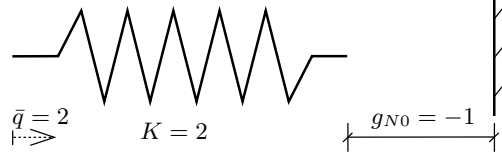


Figura 3.5: Ejemplo básico de aplicación de los algoritmos de contacto

El resorte posee una rigidez $K = 2$ y está sujeto a un desplazamiento prescrito de valor $\bar{q} = 2$ en su extremo izquierdo con un desplazamiento incógnita en su extremo derecho que está inicialmente a una distancia $g_{N0} = -1$ del obstáculo. Por tanto, el potencial almacenado en el resorte viene dado por:

$$\mathcal{V}(q) = \frac{K}{2}(q - \bar{q})^2 = (q - 2)^2 \quad (3.13)$$

y la función gap es:

$$g_N(q) = q + g_{N0} = q - 1 \quad (3.14)$$

que da lugar al siguiente funcional $\mathcal{H}^*(q, \lambda_N)$:

$$\mathcal{H}^*(q, \lambda_N) = \mathcal{V}(q) + \lambda_N g_N = (q - 2)^2 + \lambda_N (q - 1) \quad (3.15)$$

Donde $\lambda_N \geq 0$ es la fuerza de contacto desarrollada en el extremo derecho del resorte. La figura 3.6 muestra el valor del funcional $\mathcal{H}^*(q, \lambda_N)$ con respecto a las variables q y λ_N . En dicho funcional se aprecia un punto de silla (solución del problema) para $\lambda_N = 2$ y $q = 1$.

Una vez definida la función $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)$, la solución del problema se obtiene a través de las ecuaciones de gobierno del MED:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \lambda_N)}{\partial q} &= 2(q - 2) + \lambda_N = 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \lambda_N)}{\partial \lambda_N} &= (q - 1) = 0 \end{aligned} \right\}; \text{ Tal que: } g_N \geq 0 \quad (3.16)$$

donde la solución del sistema es: $q = 1$ y $\lambda_N = \mathbf{f}_{cN} = 2$.

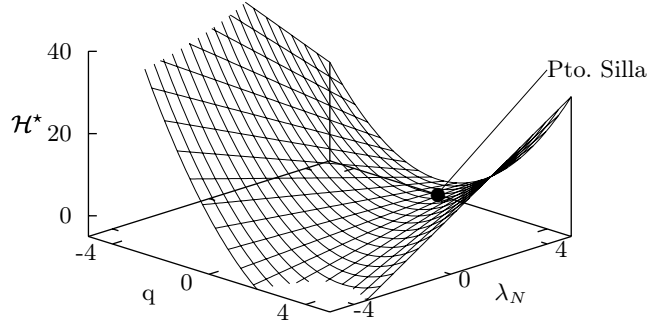


Figura 3.6: Funcional energía $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \lambda_N)$. Multiplicadores de Lagrange

Formulación general

A continuación se formulan las ecuaciones del MED para un sistema de n_{bd} cuerpos que interactúan por contacto bajo el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, las restricciones de contacto se introducen en la función hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, obteniendo la función hamiltoniana modificada $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)$:

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\lambda_N^{ik} g_N^{ik} + \lambda_T^{ik} g_T^{ik}) \quad (3.17)$$

Como se introducen dos nuevas variables λ_N^{ik} y λ_T^{ik} por cada contacto entre cuerpos i y k , se obtiene un problema mixto en el que además de las coordenadas generalizadas entran en juego como incógnitas adicionales los multiplicadores de Lagrange. Por tanto, las ecuaciones de gobierno del problema a integrar en el tiempo son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)}{\partial \mathbf{p}^i}; & \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)}{\partial \lambda_N^{ik}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{p}}^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)}{\partial \mathbf{q}^i}; & \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda_N, \lambda_T, t)}{\partial \lambda_T^{ik}} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Para } i = 1, \dots, n_{bd} \\ k = i + 1, \dots, n_{bd} \end{array} \quad (3.18)$$

Observaciones:

- La dimensión del sistema de ecuaciones no lineales (ecuaciones de gobierno) con contacto es mucho mayor que sin contacto.

CAPÍTULO 3. LA MECÁNICA DEL CONTACTO

- Aparición de elementos nulos en la diagonal de la matriz de rigidez tangente, por lo que se producen problemas de mal condicionamiento.

3.2.2. Método del Penalty

El método del Penalty disfruta de la particular ventaja de que no se introducen nuevas incógnitas en el funcional $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, ya que las restricciones de contacto se formulan únicamente en función de las coordenadas generalizadas. A cambio se fuerzan de manera aproximada las restricciones de contacto.

Físicamente hablando, consiste en la introducción en la dirección normal y tangencial al plano de contacto entre cuerpos i, k de unos resortes elásticos de rigidez K_N y K_T respectivamente (parámetros de penalty). Dichos resortes fuerzan aproximadamente la separación y controlan el desplazamiento tangencial entre cuerpos. Para formular este método en MED se plantea el siguiente problema:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}^i} = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{f}_c^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} &\text{Sujeto a: } g_N^{ik} \approx 0 ; g_T^{ik} \approx 0 \\ &i = 1, \dots, n_{bd} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Estas aproximaciones se introducen en las ecuaciones por medio de la función hamiltoniana modificada $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$:

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{1}{2} (K_N (g_N^{ik})^2 + K_T (g_T^{ik})^2) \quad (3.20)$$

donde los términos $\frac{1}{2} K_N (g_N^{ik})^2$ y $\frac{1}{2} K_T (g_T^{ik})^2$ es el potencial generado en el contacto de dos cuerpos i, k por los resortes en la dirección normal y tangencial. Aplicando las ecuaciones 3.19 a la función $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}^i} = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}^i} = \mathbf{f}_c^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Sujeto a: } g_N^{ik} \approx 0 ; g_T^{ik} \approx 0 \\ &i = 1, \dots, n_{bd} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2. ALGORITMOS DE CONTACTO

donde \mathbf{f}_c^{ik} es la fuerza de contacto ejercida por los resortes elásticos:

$$\mathbf{f}_c^{ik} = K_N g_N^{ik} \mathbf{R}^{ik} + K_T g_T^{ik} \mathbf{T}^{ik} \quad (3.22)$$

La solución proporcionada por las ecuaciones 3.21 satisface de manera aproximada las condiciones de contacto (Kunh–Tucker) y es dependiente de la elección de los parámetros de penalty. Dichas condiciones se cumplen de manera exacta cuando el valor de estos dos parámetros tienden a infinito.

Para comprender el funcionamiento de este algoritmo se retoma el ejemplo de la figura 3.5. En este caso el funcional $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ adquiere la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^*(q) = (q - 2)^2 + \frac{1}{2} K_N (q - 1)^2 \quad (3.23)$$

Y las ecuaciones de gobierno del problema son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}^*(q)}{\partial p} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{H}^*(q)}{\partial q} &= 2(q - 2) + K_N (q - 1) \end{aligned} \right\}; \text{ Tal que: } g_N \approx 0 \quad (3.24)$$

donde la solución del sistema (dependiente de K_N) es: $q = (4 + K_N)/(2 + K_N)$ y por tanto $\mathbf{f}_{cN} = K_N g_N = K_N [(4 + K_N)/(2 + K_N) - 1]$.

Si se dibuja el funcional $\mathcal{H}^*(q)$ en función de q para varios valores de $K_N = 1, 10, 50, 100$ (figura 3.7), se observa que la solución aproximada (\bullet), mínimo de $\mathcal{H}^*(q)$, tiende a la solución exacta (\circ) conforme se incrementa el valor de K_N . Si se hace el límite de la solución: $\lim_{K_N \rightarrow \infty} q = 1$ y $\lim_{K_N \rightarrow \infty} \mathbf{f}_{cN} = 2$, se obtiene la misma solución que la proporcionada por el método de los multiplicadores de Lagrange, ya que en este caso se tiende al cumplimiento exacto de las condiciones de Kunh–Tucker.

Formulación general

A continuación se formulan las ecuaciones del MED para un sistema de n_{bd} cuerpos que interactúan por contacto a través del método del Penalty. Para ello, las restricciones de contacto se introducen en la función hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, obteniendo la función modificada $\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{1}{2} (K_N (g_N^{ik})^2 + K_T (g_T^{ik})^2) \quad (3.25)$$

La solución del problema se obtiene a través de las ecuaciones de gobierno:

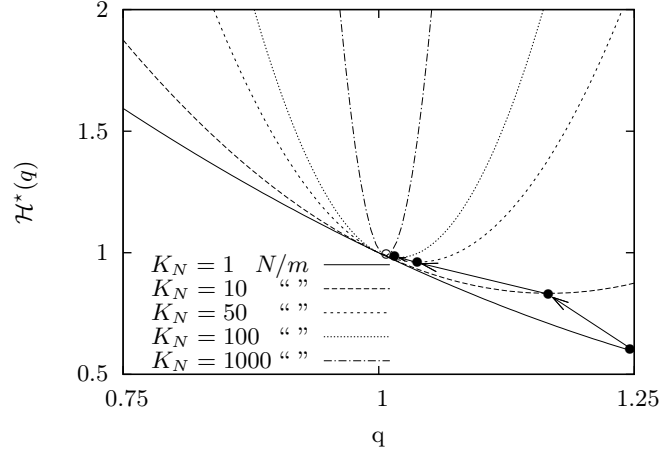


Figura 3.7: Funcional energía $\mathcal{H}^*(q)$ bajo el método del Penalty. Convergencia de la solución aproximada (\bullet) a la exacta (\circ) al incrementar K_N

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p^i} \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i} \end{aligned} \right\} \text{Para } i = 1, \dots, n_{bd} \quad (3.26)$$

Observaciones:

- *El tamaño del sistema de ecuaciones lineales del problema con contacto permanece inalterado con respecto al correspondiente sin contacto.*
- *Contacto dependiente de los parámetros K_N y K_T .*
- *Dificultad en la elección de los parámetros de penalty. Valores elevados aproximan las condiciones de contacto, pero la linealización de las ecuaciones de gobierno produce una matriz de rigidez tangente de elevado número de condicionamiento.*

3.3 Implicaciones energéticas de los algoritmos de contacto

En este apartado se estudia el efecto de los algoritmos de contacto en la conservación–disipación de energía. En la ecuación 3.8 se ha demostrado que las condiciones complementaria y persistente de Kuhn–Tucker pueden ser interpretadas como condiciones de tipo energético, ya que implican que tanto el trabajo como la potencia de las fuerzas de contacto han de ser nulas.

3.4. LEYES DE CONSERVACIÓN

Las figuras 3.8 y 3.9 muestran gráficamente las condiciones de Kuhn–Tucker para contacto normal y tangencial respectivamente bajo el método de los multiplicadores de Lagrange (izqda.) y del Penalty (drcha.). Los multiplicadores de Lagrange, figuras 3.8 y 3.9 (izqda.), fuerzan la restricción de contacto de manera exacta, $g_N = 0$, $\dot{g}_N = 0$ para contacto normal y $g_T = 0$, $\dot{g}_T = 0$ para contacto tangencial tipo stick, de manera que se cumple que en contacto los gaps son cero pero \mathbf{f}_c no es nula. Para el método del Penalty, figuras 3.8 y 3.9 (drcha.), las condiciones de Kuhn–Tucker se fuerzan de manera aproximada: $g_N \approx 0$, $\dot{g}_N \approx 0$, $g_T \approx 0$, $\dot{g}_T \approx 0$, permitiendo una cierta penetración. Esta situación da lugar a que las fuerzas de contacto no sean nulas para $g_N \neq 0$ y $g_T \neq 0$.

El área encerrada por cada gráfica de las figuras 3.8 y 3.9 representa el trabajo y la potencia realizadas por las fuerzas de contacto. Para el método de los multiplicadores de Lagrange el área es nula y por tanto el trabajo y la potencia son nulas. En cambio, para el método del Penalty, el área no es nula, lo que implica que las fuerzas de contacto realizan trabajo. Dicho trabajo consiste en la transferencia de energía de las masas en contacto–resorte elástico. Este resorte elástico es un artificio por el cual se aproxima la condición de impenetrabilidad y no existe como tal en el problema real. Por tanto, se ha de considerar que esta transferencia de energía masa–resorte elástico es artificial.

Como se ha indicado en los apartados anteriores, los parámetros K_N y K_T controlan la aproximación de las condiciones de Kuhn–Tucker. Desde el punto de vista energético disminuyen la transferencia artificial de energía masa–resorte elástico, tal y como se muestra por la disminución del área encerrada en las figuras 3.8 y 3.9 (drcha.).

Comentario 3.3.1. *A la vista del análisis realizado en estos apartados, el método del Penalty presenta un menor coste computacional. A cambio no satisface plenamente la restricción de impenetrabilidad y produce una transferencia artificial de energía cuerpo–resorte elástico. Estos inconvenientes atenúan aumentando el valor de los parámetros de penalty hasta límites que no produzcan problemas de condicionamiento numérico.*

3.4 Leyes de conservación

En este apartado se analizan y se obtienen las leyes por las que se conservan ciertas propiedades de las ecuaciones del MED bajo la acción del contacto: conservación del momento lineal \mathbf{p}^{tot} , momento angular \mathcal{J}^{tot} y conservación–disipación de energía \mathbb{E} total. Este análisis será el punto de referencia que permitirá construir las ecuaciones de conservación sobre las que se basa ACEM.

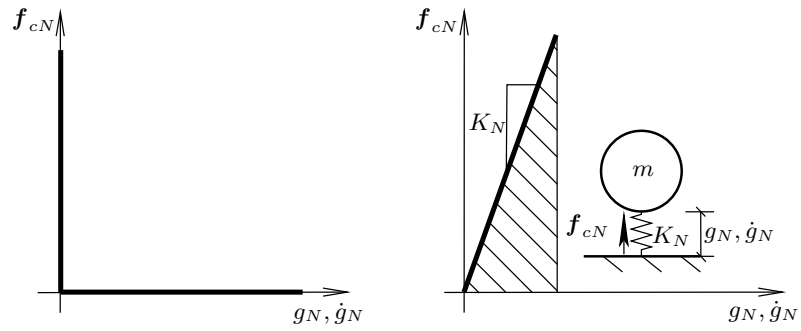


Figura 3.8: Representación gráfica de las condiciones de Kuhn–tucker para contacto normal. Multiplicadores de Lagrange (izqda.) y método del Penalty (drcha.)

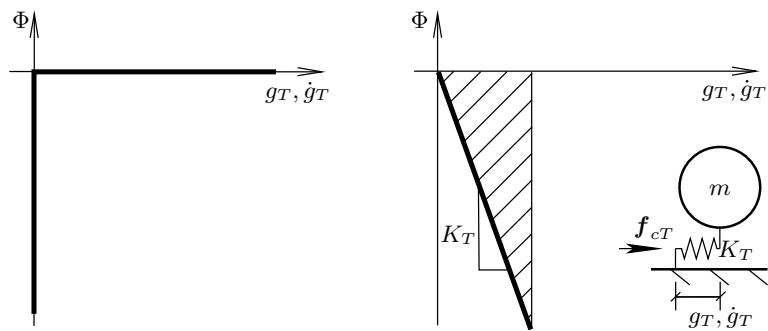


Figura 3.9: Representación gráfica de las condiciones de Kuhn–tucker para contacto tangencial no deslizante. Multiplicadores de Lagrange (izqda.) y método del Penalty (drcha.)

3.4.1. Conservación del momento lineal total

Para el caso de un cuerpo rígido i y en ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext}^i = 0$, el balance del momento lineal $d\mathbf{p}^i/dt$ está dado por la segunda de las ecuaciones de gobierno del MED y es igual a la resultante de fuerzas de contacto \mathbf{f}_c^i generadas por los $n_{bd} - 1$ cuerpos restantes:

$$\frac{d\mathbf{p}^i}{dt} = \mathbf{f}_c^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \quad (3.27)$$

Para un sistema compuesto por n_{bd} cuerpos, el balance del momento lineal total \mathbf{p}^{tot} es igual a la suma del balance de cada cuerpo e igual a la resultante de todas las fuerzas de contacto:

$$\frac{d\mathbf{p}^{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{d\mathbf{p}^i}{dt} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^i = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \quad (3.28)$$

donde \mathbf{f}_c^{ik} es la fuerza de contacto transmitida del cuerpo i al k , $\mathbf{f}_c^{ik} = 0$ si no hay contacto. El principio de acción-reacción verifica: $\mathbf{f}_c^{ik} = -\mathbf{f}_c^{ki}$, anulándose el término derecho de la ecuación 3.28 y por tanto el momento lineal total \mathbf{p}^{tot} se conserva.

Corolario 3.4.1. *Para cada contacto, siempre se verifica $\mathbf{f}_c^{ik} = -\mathbf{f}_c^{ki}$ (principio de acción-reacción). Por lo que en ausencia de fuerzas exteriores, la resultante de fuerzas internas actuantes sobre los cuerpos en contacto es nula y por tanto se conserva el momento lineal total.*

La figura 3.10 (izqda.) representa la conservación del momento lineal total \mathbf{p}^{tot} para un sistema de dos cuerpos i, k en tres instantes de tiempo: antes del contacto t_{n-1} , durante el contacto t_n y después del contacto t_{n+1} . En ausencia de fuerzas exteriores, el vector de momento lineal total \mathbf{p}^{tot} permanece constante durante los tres instantes, ya que por el ppo. de acción-reacción, las componentes normales y tangenciales de las fuerzas de contacto son iguales y opuestas, figura 3.10 (drcha.). Por tanto, la resultante total de las fuerzas actuantes es nula y \mathbf{p}^{tot} es constante.

3.4.2. Conservación del momento angular total

El producto vectorial de la segunda de las ecuaciones de gobierno por \mathbf{q}^i , junto al principio de acción y reacción proporcionan el balance de momento angular $d\mathcal{J}^i/dt$ de un cuerpo i en contacto. Dicho balance expresa que en ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext}^i = 0$, la variación de momento angular es igual a la acción del momento de la fuerza de contacto, ecuación 3.29.

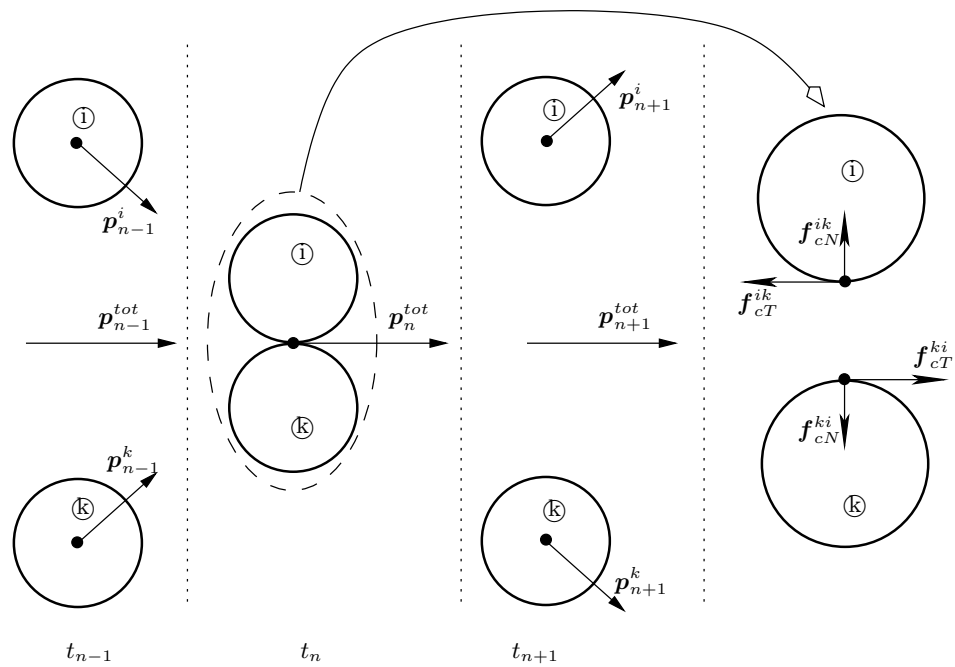


Figura 3.10: Conservación del momento lineal total \mathbf{p}^{tot} antes, durante y después del contacto (izqda.). Fuerzas de contacto entre cuerpos, iguales y en sentido opuesto (drcha.)

3.4. LEYES DE CONSERVACIÓN

$$\frac{d\mathcal{J}^i}{dt} = \dot{\mathbf{p}}^i \times \mathbf{q}^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \times \mathbf{q}^i = \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \times (\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^k) \quad (3.29)$$

Empleando las ecuaciones 3.2 y 3.6 se puede expresar este balance en función de g_N^{ik} y de las componentes normales y tangenciales de la fuerza de contacto, ecuación 3.30.

$$\frac{d\mathcal{J}^i}{dt} = \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} \left(f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik} + f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik} \right) \times g_N^{ik} \mathbf{R}^{ik} \quad (3.30)$$

Para un sistema de n_{bd} cuerpos, el balance de momento angular total es igual a la suma del balance de cada cuerpo, ecuación 3.31.

$$\frac{d\mathcal{J}^{tot}}{dt} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{bd}} \dot{\mathbf{p}}^i \times \mathbf{q}^i = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \times \mathbf{q}^i = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} \mathbf{f}_c^{ik} \times (\mathbf{q}^i - \mathbf{q}^k) \\ \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} \left(f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik} + f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik} \right) \times g_N^{ik} \mathbf{R}^{ik} \end{cases} \quad (3.31)$$

En esta última ecuación se verifica que los vectores $f_{cN}^{ik} \mathbf{R}^{ik}$ y $g_N^{ik} \mathbf{R}^{ik}$ son paralelos, por lo que su producto vectorial es cero. Adicionalmente, el producto $f_{cT}^{ik} g_N^{ik} \mathbf{T}^{ik} \times \mathbf{R}^{ik}$ también es nulo, ya que en contacto $g_N^{ik} = 0$ y por tanto el momento angular total \mathcal{J}^{tot} se conserva.

Corolario 3.4.2. *La colinealidad de la componente normal de la fuerza de contacto con la dirección de mínima distancia $g_N^{ik} \mathbf{R}^{ik}$ y las condiciones de Kunh–Tucker provocan la conservación del momento angular para un sistema de n_{bd} cuerpos en contacto.*

La figura 3.11 (sup.) representa la conservación del momento angular total para un sistema de dos cuerpos en tres instantes de tiempo: antes de contacto t_{n-1} , durante el contacto t_n y después del contacto t_{n+1} . En ausencia de fuerzas exteriores, el vector de momento lineal total \mathcal{J}^{tot} permanece constante durante los tres instantes debido al principio de acción–reacción y a la condición de impenetrabilidad entre cuerpos, figura 3.11 (inf.) .

3.4.3. Balance de energía total, conservación–disipación

En ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext}^i = 0$, el balance de energía $d\mathbb{E}^i/dt$ de un cuerpo i debido al contacto se obtiene a través de la suma del producto

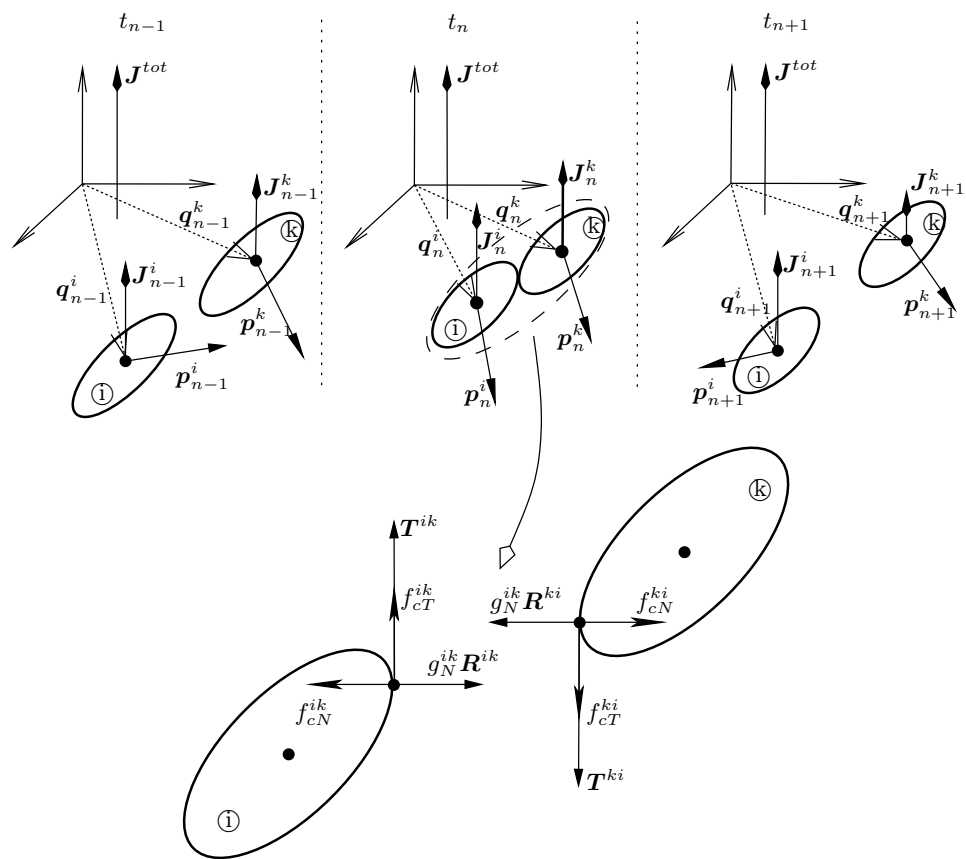


Figura 3.11: Conservación del momento angular total \mathcal{J}^{tot} antes, durante y después del contacto

3.4. LEYES DE CONSERVACIÓN

de $\dot{\mathbf{p}}^{i t}$ por la primera ecuación de gobierno del MED más el producto de $-\dot{\mathbf{q}}^{i t}$ por la segunda ecuación, dando lugar a la siguiente ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^{i t} \dot{\mathbf{q}}^i &= \dot{\mathbf{p}}^{i t} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i \\ + \\ -\dot{\mathbf{q}}^{i t} \dot{\mathbf{p}}^i &= -\dot{\mathbf{q}}^{i t} \mathbf{f}_c^i \end{aligned} \right\} \rightarrow \underbrace{\dot{\mathbf{p}}^{i t} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i}_{\frac{d\mathbb{E}^i}{dt}} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^{i t} \mathbf{f}_c^i}_{\frac{d\mathbb{E}_{f_c^i}}{dt}} = 0 \quad (3.32)$$

Esta ecuación es un balance de potencias, donde el primer término es la evolución temporal de la energía del cuerpo⁴ i , mientras que el segundo es la debida a la fuerza de contacto \mathbf{f}_c^i . Este balance puede ser extendido a un sistema compuesto por n_{bd} cuerpos:

$$\sum_{i=1}^{n_{bd}} \dot{\mathbf{p}}^{i t} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i - \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \dot{\mathbf{q}}^{i t} \mathbf{f}_c^{ik} = 0 \quad (3.33)$$

Teniendo en cuenta el principio de acción-reacción, la anterior ecuación se transforma en:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n_{bd}} \dot{\mathbf{p}}^{i t} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i}_{\frac{d\mathbb{E}}{dt}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k)^t \mathbf{f}_c^{ik}}_{\frac{d\mathbb{E}_c}{dt}} = 0 \quad (3.34)$$

El resultado es una ecuación de potencias global, donde el primer término expresa el balance de energía total del sistema de n_{bd} cuerpos, mientras el segundo es la contribución debida a las fuerzas de contacto. Este último término se puede expresar en función de las componentes normales y tangenciales de las fuerzas de contacto (ecuación 3.6) y de la derivada temporal \dot{g}_N^{ik} (ecuación 3.2):

$$\frac{d\mathbb{E}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} \left[f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik} + f_{cT}^{ik} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k)^t \mathbf{T}^{ik} \right] \quad (3.35)$$

Este término expresa que la variación temporal de energía asociada al contacto es igual potencia generada por la componente de contacto normal $f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik}$ más la correspondiente a la tangencial, $f_{cT}^{ik} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k)^t \mathbf{T}^{ik}$. El contacto normal cumple $f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik} = 0$, cuarta condición de Kuhn-Tucker, mientras que para el contacto tangencial se verifica que $f_{cT}^{ik} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k)^t \mathbf{T}^{ik} = 0$ (no hay desplazamiento relativo entre cuerpos) para el caso no deslizante stick y

⁴En ausencia de fuerzas exteriores, la única energía de un cuerpo rígido es de tipo cinético

CAPÍTULO 3. LA MECÁNICA DEL CONTACTO

$f_{cT}^{ik} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k) \mathbf{T}^{ik} > 0$ para el contacto deslizante slip. Por tanto, la energía se conserva para el caso stick, mientras que decrece para el slip.

Bajo el método del Penalty, la potencia asociada con el término normal $f_{cN}^{ik} \dot{g}_N^{ik}$ como con la tangencial asociada al caso stick $f_{cT}^{ik} (\dot{\mathbf{q}}^i - \dot{\mathbf{q}}^k) \mathbf{T}^{ik}$ no son nulas, lo que implica que la energía \mathbb{E} varía debido a la transferencia artificial cuerpo-resortes elásticos.

Corolario 3.4.3. *En ausencia de fuerzas exteriores, la fuente de disipación de energía de un sistema de n_{bd} cuerpos en contacto se debe a la acción de las fuerzas tangenciales $f_{cT}^{ik} \mathbf{T}^{ik}$. La energía se conserva para el caso stick (no se produce desplazamiento relativo entre cuerpos), mientras que para el caso slip, las fuerzas tangenciales realizan trabajo disipando monótonamente la energía.*

4

Formulación del algoritmo de integración temporal conservativo para el problema de contacto sin fricción

En este capítulo se desarrolla un algoritmo de integración temporal conservativo en energía y momentos (ACEM) para el problema de contacto sin fricción. Dicho algoritmo aproxima la dinámica del problema de contacto de manera consistente. Para ello, se analiza cómo ACEM conserva los momentos y energía total. En caso que no se conserve alguna de estas cantidades de manera natural, se fuerza a su conservación mediante la construcción de un “marco de ecuaciones de conservación”.

Como se ha demostrado en los apartados 1.3 y 3.3, el empleo del método del Penalty produce una transferencia artificial de energía cuerpo–resorte elástico que modifica la respuesta dinámica del contacto, no siendo acorde con la física. El método del Penalty es ampliamente usado por reducir de manera considerable el número de incógnitas. A cambio, se produce un comportamiento anómalo que se atenúa escogiendo valores elevados de los parámetros de penalty hasta límites que no produzcan problemas de condicionamiento numérico. ACEM fuerza a que la energía artificial transferida cuerpo–resorte elástico sea recuperada mediante la adición de energía adicional. Esta energía es calculada mediante el marco de ecuaciones de conservación y se introduce en el cuerpo a través de la modificación de la dinámica y de la cinemática del contacto. Consiguiendo que la respuesta sea consistente con la física del contacto sin fricción.

La formulación de ACEM ha de ser implícita, ya que se fuerza mejor la condición de impenetrabilidad al tener en cuenta la restricción de contacto tanto en el instante actual n como en el siguiente $n + 1$. Además, permiten formular el marco de ecuaciones de conservación cuyos términos tienen en cuenta el balance de energía debida al contacto.

La estructura del capítulo es la siguiente: primero se formulan las ecuaciones de ACEM, haciendo especial hincapié en su funcionamiento a través de la modificación dinámica y cinemática del contacto. Posteriormente se formula el marco de ecuaciones conservación, que permite obtener la ecuación de ba-

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

lance de energía que fuerza la respuesta consistente de ACEM. Y finalmente, se analiza el método del Penalty mejorado obtenido como consecuencia de la construcción del marco de ecuaciones de conservación.

4.1 Formulación de ACEM para el problema de contacto sin fricción

4.1.1. Introducción

Partiendo discretización espacial de las ecuaciones de gobierno del MED (ecuaciones 4.1, izqda.) ya expuestas en el capítulo 2, en este apartado se procede a la discretización temporal de dichas ecuaciones. Para ello, ACEM se desarrolla a partir del integrador conservativo en momentos y energía de Simo–Tarnow [STW92] (ecuaciones 4.1, drcha.), que es una discretización en el tiempo de un sistema hamiltoniano continuo. En este integrador, el primer conjunto de ecuaciones relacionan posiciones \mathbf{q}_n^i , \mathbf{q}_{n+1}^i y momentos lineales \mathbf{p}_n^i , \mathbf{p}_{n+1}^i de un cuerpo i en los instantes n y $n + 1$, mientras que el segundo es una aproximación discreta de la segunda ley de Newton en $n + 1/2$:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}^i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}^i \\ \dot{\mathbf{p}}^i = \mathbf{f}_{ext}^i + \mathbf{f}_{cN}^i \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i = \mathbf{M}_i^{-1} \frac{\mathbf{p}_n^i + \mathbf{p}_{n+1}^i}{2} \\ \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} = \mathbf{f}_{ext\ n+1/2}^i + \mathbf{f}_{cN\ n+1/2}^i \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{f}_{ext\ n+1/2}^i$ y $\mathbf{f}_{cN\ n+1/2}^i$ son las resultantes discretas de la fuerza exterior \mathbf{f}_{ext}^i y de la fuerza de contacto \mathbf{f}_{cN}^i actuante sobre el cuerpo i en $n + 1/2$ y Δt es el incremento de tiempo entre n y $n + 1$. En ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext\ n+1/2}^i = 0$, la acción del integrador temporal se muestra en la figura 4.1, donde se obtiene \mathbf{q}_{n+1} y \mathbf{p}_{n+1} a partir de la acción del momento lineal $\mathbf{p}_{n+1/2}$ y de la fuerza de contacto $\mathbf{f}_{cN\ n+1/2}$ calculados en $n + 1/2$.

El balance de energía entre n y $n + 1$, ecuación 4.2, se obtiene a partir de la suma del producto de la primera ecuación de 4.1 (drcha.) por $(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t$ más la segunda por $-(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t$. La ecuación resultante indica que el incremento de energía del cuerpo¹ $\mathbb{E}_{n+1}^i - \mathbb{E}_n^i$ es igual al decremento de la energía de la fuerza de contacto $\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN\ n+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN\ n}^i}$.

¹Para cuerpos rígidos y en ausencia de fuerzas exteriores, la única energía del cuerpo es la cinética

4.1. FORMULACIÓN DE ACEM PARA EL PROBLEMA DE CONTACTO SIN FRICCIÓN

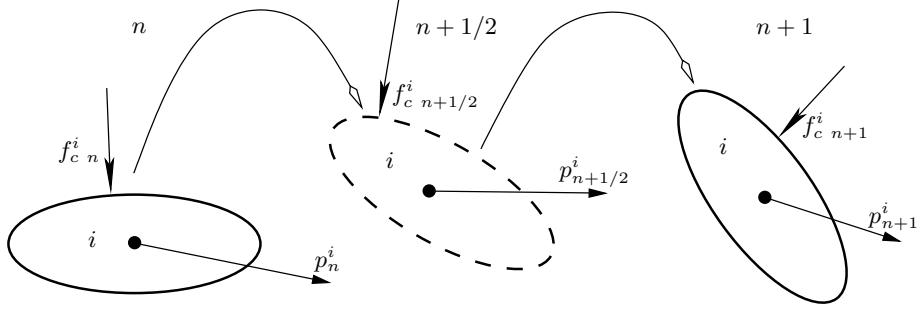


Figura 4.1: Integrador de Simo–Tarnow, obtención de \mathbf{q}_{n+1} y \mathbf{p}_{n+1} a partir de la acción de un momento lineal $\mathbf{p}_{n+1/2}$ y fuerza de contacto $\mathbf{f}_{cN}^{i, n+1/2}$ calculada en el instante $n + 1/2$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i \\ &+ \\ -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{i, n+1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\equiv \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\mathbb{E}_{n+1}^i - \mathbb{E}_n^i} - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{i, n+1/2}}_{\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{i, n+1}}^i - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}^i} = 0$$

Para un sistema compuesto por n_{bd} cuerpos el balance de energía total será:

$$\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\mathbb{E}_{n+1}^i - \mathbb{E}_n^i} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{i, n+1/2}}_{\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{i, n+1}}^i - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}^i} = 0 \quad (4.3)$$

Comentario 4.1.1. *El balance de energía del cuerpo es igual al trabajo realizado por las fuerzas de contacto. Éste es nulo si se cumplen con exactitud las condiciones de Kunh–Tucker, en caso contrario² la energía no se conserva.*

El método del Penalty verifica $\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{i, n+1}}^i - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}^i \neq 0$, por lo que de esta ecuación se desprende que la energía de la fuerza de contacto produce una variación de la energía entre n y $n + 1$.

²Como sucede con el método del Penalty

4.1.2. Mejora conservativa

En este apartado se propone la modificación de las ecuaciones 4.1 (drcha.) para forzar la conservación de la energía de un sistema de cuerpos en contacto empleando el método del Penalty. Para ello, dados dos cuerpos rígidos i , k en contacto, las ecuaciones 4.4 conservan los momentos y la energía total añadiendo dos variables adicionales: un momento lineal \mathbf{p}_{cN}^{ik} y una fuerza de contacto \mathbf{f}_{cN}^{ik} (el subíndice $n+1/2$ para \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{f}_{cN}^{ik} se omite para facilitar la lectura). Si los cuerpos i y k no están en contacto, \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{f}_{cN}^{ik} son nulos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{M}_i^{-1} \left(\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{p}_{cN}^{ik} \right) = \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \mathbf{p}_{cN}^i) \\ \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ki}) = \mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}'_{cN}^i \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Comentario 4.1.2. La mejora conservativa propuesta fuerza a la conservación de energía del sistema de cuerpos mediante la modificación cinemática y dinámica del contacto. De esta modo, aunque se cumplan de manera aproximada las condiciones de Kuhn–Tucker, la respuesta del cuerpo será conservativa y consistente.

La figura 4.2 muestra la mejora de ACEM respecto al algoritmo de Simo–Tarnow mediante la adición al cuerpo i de las resultantes de \mathbf{p}_{cN}^i y \mathbf{f}'_{cN}^i tal que ajustan la solución a una respuesta conservativa.

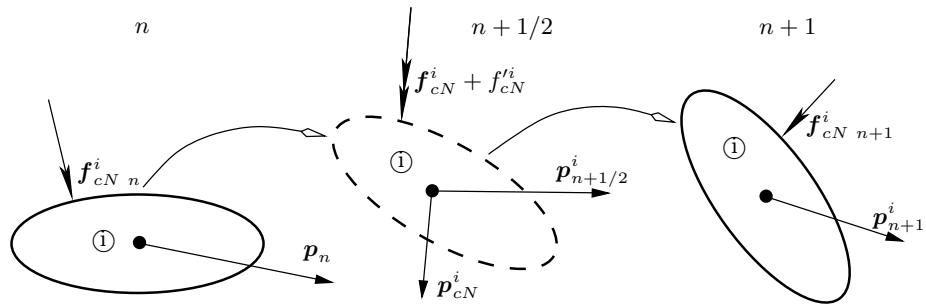


Figura 4.2: Mejora conservativa mediante la adición \mathbf{p}_{cN}^i y \mathbf{f}'_{cN}^i tal que ajustan la solución a una respuesta conservativa

Las variables \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{p}_{cN}^{ik} son incrementos entre n y $n+1$ de la fuerza de contacto y del momento lineal proporcionales a los parámetros ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} (ecuaciones 4.5). En el apartado 4.2 se demostrará que para que las

4.1. FORMULACIÓN DE ACEM PARA EL PROBLEMA DE CONTACTO SIN FRICCIÓN

ecuaciones 4.4 proporcionen una solución conservativa, estos dos parámetros han de estar relacionados entre sí por medio del marco de ecuaciones de conservación. La variable K_N es la rigidez del penalty, g_{Nn+1}^{ik} y g_{Nn}^{ik} son los gaps, y $\mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}$ es el vector unitario, todas estas variables están definidas en dirección normal a la superficie en el punto de contacto.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{cN}^i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \mathbf{p}_{cN}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \frac{1}{2} \psi_{2N}^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} \underbrace{\mathbf{R}_{n+1/2}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)}_{\text{proyección local}} \\ \mathbf{f}_{cN}^i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \mathbf{f}_{cN}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \frac{1}{2} \psi_{1N}^{ik} K_N (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

La figura 4.3 muestra el significado físico de \mathbf{p}_{cN}^{ik} y \mathbf{f}_{cN}^{ik} para un conjunto de cuerpos en contacto. Dichas variables modifican la cinemática y dinámica del contacto ajustándola a una respuesta conservativa. Nótese que las fuerzas de contacto cumplen el ppo. de acción y reacción, $\mathbf{f}_{cN}^{ik} = -\mathbf{f}_{cN}^{ki}$. Las variables \mathbf{p}_{cN}^i y \mathbf{f}_{cN}^i (vector discontinuo) son las resultantes de las fuerzas y de los momentos lineales actuantes en un cuerpo i .

El contacto restringe el movimiento de los cuerpos a la superficie de contacto. Por tanto, la variable \mathbf{p}_{cN}^{ik} , ver figura 4.4, ha de formularse en coordenadas locales a dicha superficie y transformarse a globales por medio del vector $\mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}$, ecuación 4.5 (sup.). Es importante recalcar que $\mathbf{p}_{cN}^{ik} \neq \mathbf{p}_{cN}^{ki}$, ya que cada cuerpo tiene una masa distinta.

La fuerza de contacto \mathbf{f}_{cN}^{ik} (ecuación 4.6), se formula empleando la Derivada Discreta de Gonzalez [Gon00], herramienta que proporciona una expresión discreta que hereda las propiedades conservativas de su correspondiente función continua.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{cN}^i &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \mathbf{f}_{cN}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \frac{\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn+1}^{ik}) - \mathcal{V}^{ik}(g_{Nn}^{ik})}{g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \frac{1}{2} K_N (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn+1}^{ik}) = \frac{1}{2} K_N (g_{Nn+1}^{ik})^2$ y $\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn}^{ik}) = \frac{1}{2} K_N (g_{Nn}^{ik})^2$ son los potenciales de contacto del resorte del penalty.

La figura 4.5 muestra el funcionamiento de ACEM para el problema de Signorini con un cuerpo i . Π_1 representa la superficie de energía constante

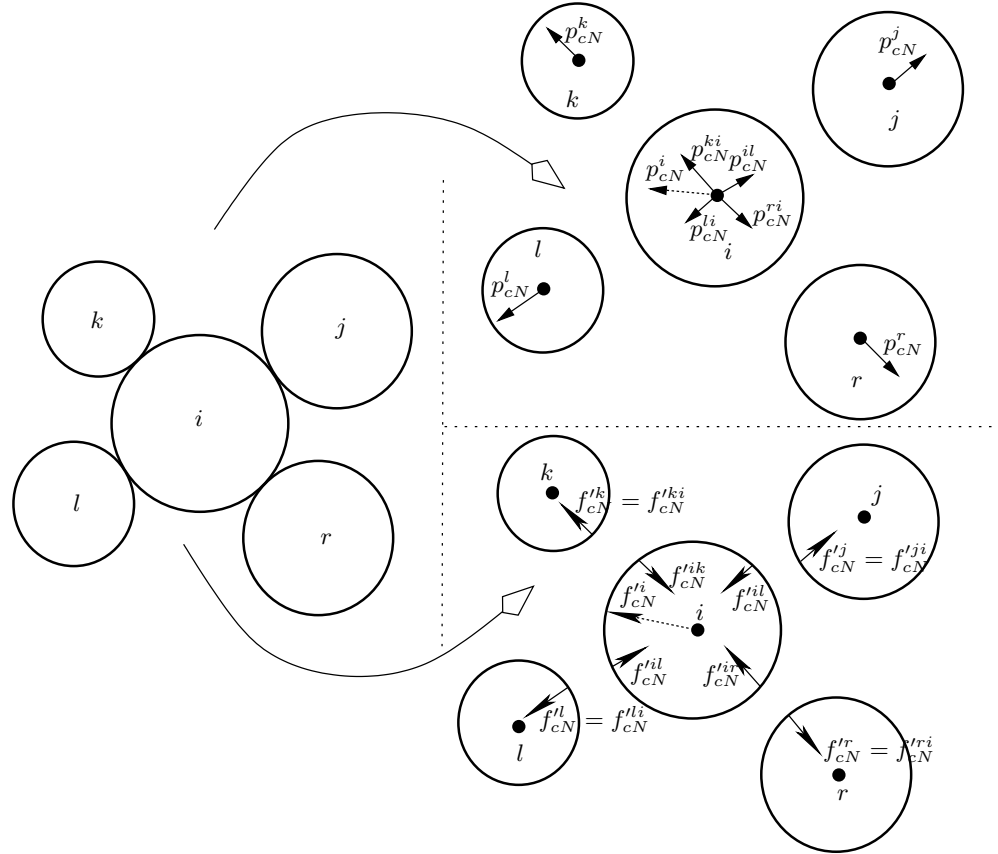


Figura 4.3: Variables adicionales f_{cN}^{ik} y p_{cN}^{ik} , modificación de la cinemática y dinámica del contacto ajustándola a una respuesta conservativa. Cuerpos separados para facilitar la interpretación de la figura

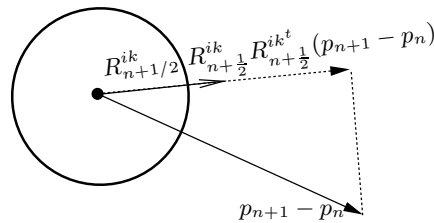


Figura 4.4: La variable adicional p_{cN}^{ik} actúa en la dirección $R_{n+1/2}^{ik}$, mediante la proyección del incremento $(p_{n+1}^i - p_n^i)$ en tal dirección

4.2. CONSERVACIÓN DISCRETA DEL MOMENTO LINEAL, ANGULAR Y ENERGÍA. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

$\Delta E^i = E_{n+1}^i - E_n^i = 0$, lugar donde se ha de localizar cualquier solución conservativa. Π_2 es la superficie donde la energía del cuerpo más la energía del resorte de penalty es constante. Por tanto, es el emplazamiento que representa la situación donde parte de la energía del cuerpo se transfiere al resorte de penalty, lo que implica que $\Delta E^i < 0$. Antes del contacto, instante n , el par q_n^i, p_n^i se encuentra sobre Π_1 . En $n + 1/2$, se produce el contacto y hay una transferencia artificial de energía al resorte de penalty (representada por A) para aproximar la condición de impenetrabilidad. Por tanto, el par $q_{n+1/2}^{*i}, p_{n+1/2}^{*i}$ se encuentra sobre Π_2 . Por medio de B ACEM calcula p_{cN}^i y f_{cN}^{i} entre n y $n + 1$ de manera que desplaza el par $q_{n+1/2}^{*i}, p_{n+1/2}^{*i}$ a Π_1 en $n + 1$, aproximando además la condición de impenetrabilidad.

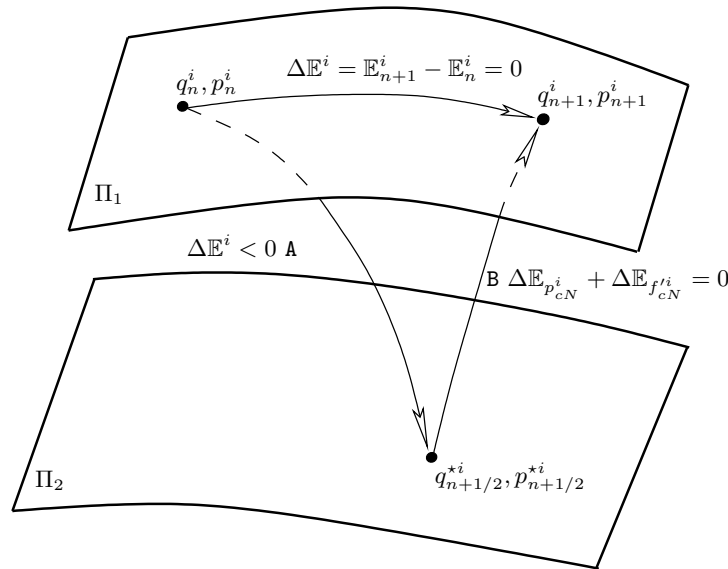


Figura 4.5: Π_1 Superficie de energía del cuerpo constante $\Delta E^i = 0$. Π_2 Superficie de energía del cuerpo + energía de contacto constante. A es la transferencia de energía del cuerpo al penalty $\Delta E^i < 0$. Por medio de B, ACEM calcula p_{cN}^i and f_{cN}^i , desplazando $q_{n+1/2}^{*i}, p_{n+1/2}^{*i}$ a Π_1

4.2 Conservación discreta del momento lineal, angular y energía. Marco de ecuaciones de conservación

En este apartado se analizan las propiedades conservativas de ACEM con respecto a los momentos y a la energía. Mediante la transformación de las ecuaciones 4.4 se obtiene el marco de ecuaciones de conservación que relaciona p_{cN}^{ik} y f_{cN}^{ik} para cada contacto.

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

4.2.1. Balance discreto del momento lineal total

La segunda de las ecuaciones 4.4 expresa de manera discreta el balance del momento lineal $\Delta \mathbf{p}^i / \Delta t$ en ausencia de fuerzas externas. Para un cuerpo i , este balance es igual a la resultante de las fuerzas de contacto, \mathbf{f}_{cN}^i más \mathbf{f}_{cN}^i , (ecuación 4.7 y figura 4.6); lo que significa que la variación discreta del momento lineal es igual a la resultante de las fuerzas de contacto en $n + 1/2$.

$$\frac{\Delta \mathbf{p}^i}{\Delta t} = \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} = \mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^i \quad (4.7)$$

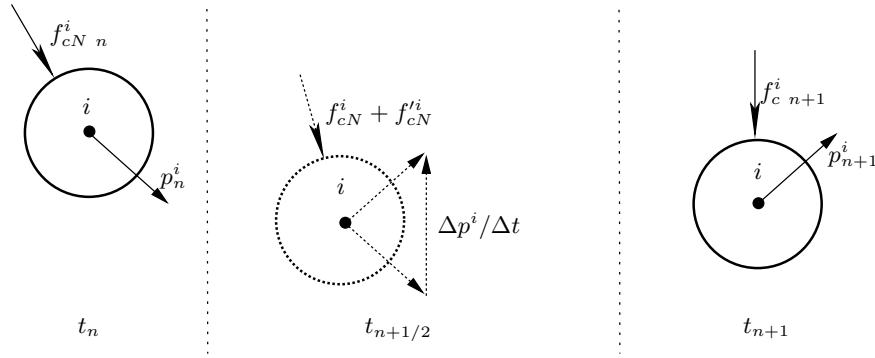


Figura 4.6: Variación discreta del momento lineal para un cuerpo, igual a la acción de la fuerzas de contacto en $n + 1/2$

El balance total de momento lineal, ecuación 4.8, es la suma del correspondiente para cada cuerpo y es igual a la resultante de las fuerzas de contacto. La figura 4.7 muestra la variación del momento lineal de cada cuerpo y el total para dos cuerpos i, k en contacto. Las fuerzas $\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik}$ y $\mathbf{f}_{cN}^{ki} + \mathbf{f}_{cN}^{ki}$ son iguales y opuestas (ppo. acción-reacción) y ACEM modifica el momento lineal de cada cuerpo por medio de $\Delta \mathbf{p}^i / \Delta t$ y $\Delta \mathbf{p}^k / \Delta t$ en $n + 1/2$, tal que el vector \mathbf{p}^{tot} se conserva. Este hecho se verifica en la ecuación 4.8, el ppo. de acción-reacción fuerza a que se anule el término derecho de la ecuación y por tanto, $\mathbf{p}_{n+1}^{tot} = \mathbf{p}_n^{tot}$.

$$\frac{\mathbf{p}_{n+1}^{tot} - \mathbf{p}_n^{tot}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^i) = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik}) \quad (4.8)$$

4.2.2. Balance discreto del momento angular total

El balance discreto de momento angular $\Delta \mathcal{J}^i / \Delta t$ para un cuerpo i , se obtiene a través del producto vectorial de la segunda de las ecuaciones 4.7

4.2. CONSERVACIÓN DISCRETA DEL MOMENTO LINEAL, ANGULAR Y ENERGÍA. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

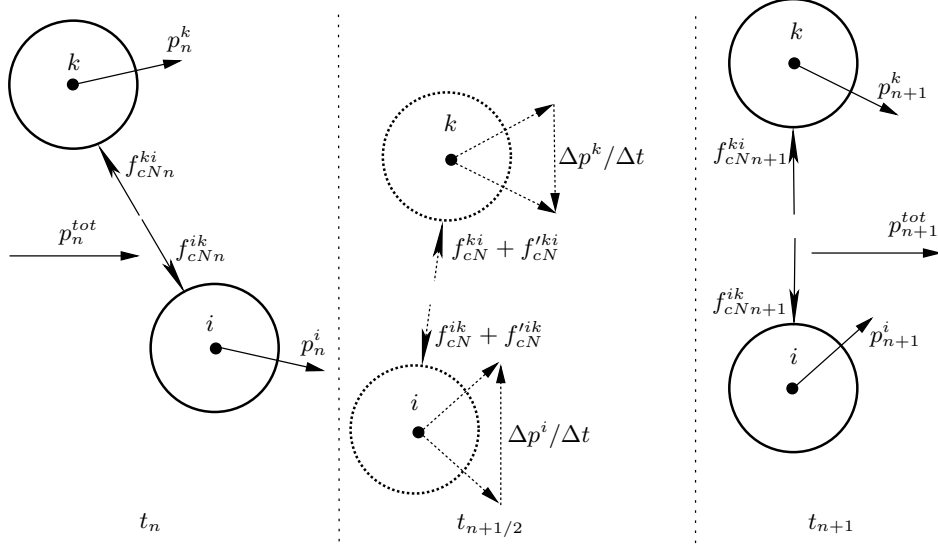


Figura 4.7: Conservación discreta del momento lineal. Como las fuerzas de contacto son iguales y opuestas, el algoritmo calcula el incremento $\Delta \mathbf{p}^i / \Delta t$, $\Delta \mathbf{p}^k / \Delta t$ de cada cuerpo tal que el momento lineal total se conserva

por $(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)$. Este balance es igual al momento generado por las fuerzas de contacto en $n + 1/2$, tal y como se muestra tanto en la ecuación 4.9 como en la figura 4.8:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)}{\Delta t} \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \\ & \left\{ \begin{aligned} & \equiv \frac{\mathcal{J}_{n+1}^i - \mathcal{J}_n^i}{\Delta t} \\ & = (\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^{i'}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \\ & = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ki}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \end{aligned} \right. \quad (4.9) \end{aligned}$$

donde \mathcal{J}^i es el momento angular para un cuerpo i . El balance total de \mathcal{J}^{tot} es igual a la suma de los balances para cada cuerpo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_{n+1}^{tot} - \mathcal{J}_n^{tot}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)}{\Delta t} \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ki}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \end{aligned} \quad (4.10)$$

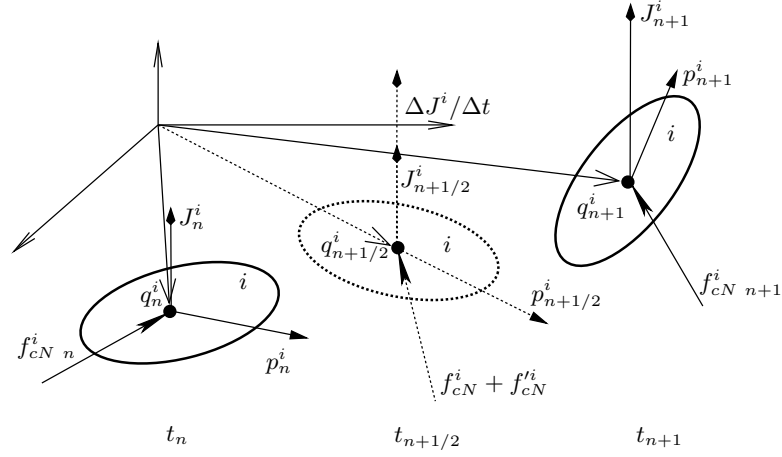


Figura 4.8: Variación discreta del momento angular para un cuerpo, igual a la acción del momento la fuerzas de contacto en la configuración $n + 1/2$

Empleando el ppo. de acción-reacción y la expresión discreta de g_N^{ik} en $n + 1/2$: $g_N^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} = (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)$, se puede expresar este balance en función de la penetración entre cuerpos:

$$\frac{\mathcal{J}_{n+1}^{tot} - \mathcal{J}_n^{tot}}{\Delta t} \left\{ \begin{array}{l} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{fik}) \times [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)] \\ = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{k=i+1}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{fik}) \times (g_N^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}) \end{array} \right. \quad (4.11)$$

La figura 4.9 muestra la evolución del momento angular total \mathcal{J}^{tot} de dos cuerpos i, k en contacto entre los instantes n y $n + 1$ mediante la modificación en $n + 1/2$ del momento angular de cada cuerpo. Para el contacto sin fricción se verifica que los vectores $\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{fik}$ y $g_N^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik}$ son paralelos, ver figura 4.10, por tanto el producto vectorial de la ecuación 4.11 es nulo y el momento angular total se conserva, $\mathcal{J}_{n+1}^{tot} = \mathcal{J}_n^{tot}$.

Comentario 4.2.1. Las ecuaciones 4.8 y 4.11 demuestran que tanto el momento lineal y angular total se conservan para cualquier \mathbf{p}_{cN}^{ik} y \mathbf{f}_{cN}^{fik} , lo que significa que ACEM conserva ambos momentos sin ecuaciones adicionales.

4.2.3. Balance discreto de energía total de los cuerpos

El balance discreto de energía de un cuerpo i en contacto, ecuación 5.11, entre los instantes n y $n + 1$ se obtiene a través de la suma de los productos del

4.2. CONSERVACIÓN DISCRETA DEL MOMENTO LINEAL, ANGULAR Y ENERGÍA. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

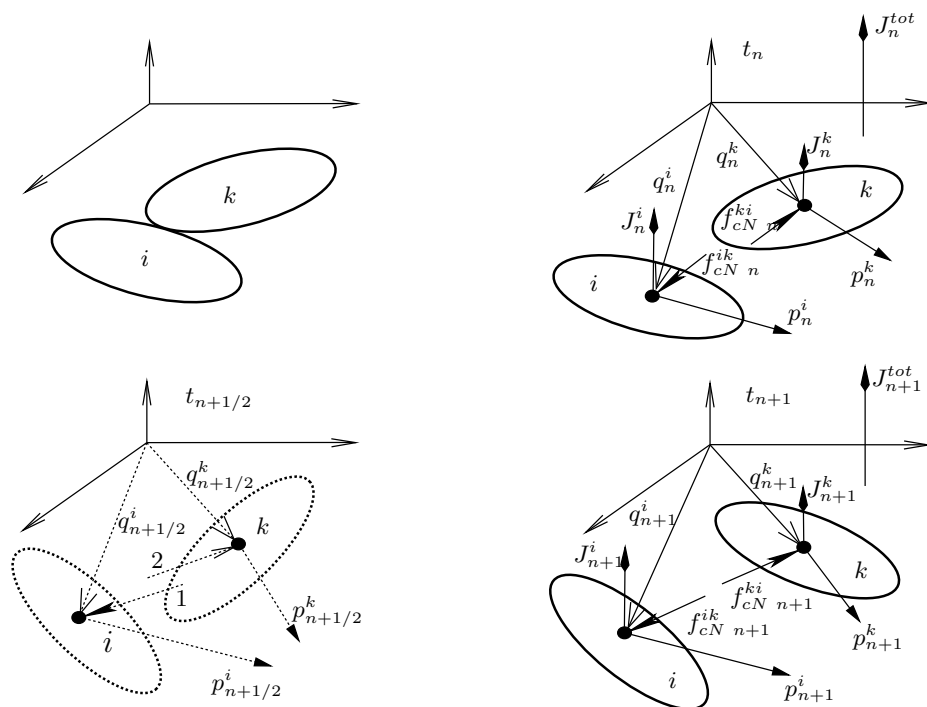


Figura 4.9: Conservación discreta del momento angular total \mathcal{J}^{tot} . El momento se mantiene constante mediante la modificación en $n + 1/2$ del momento angular de cada cuerpo

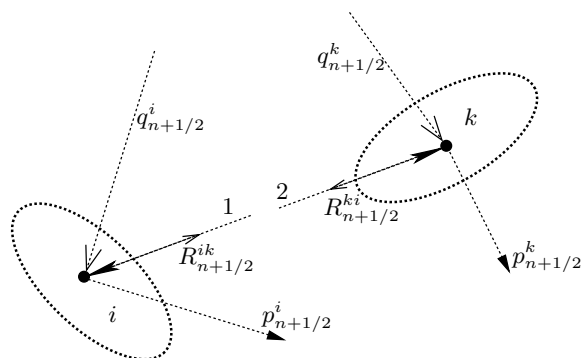


Figura 4.10: El momento angular se conserva ya que el vector $R_{n+1/2}^{ik}$ y $f_{cN}^{ik} + f_{cN}^{ik}$ son paralelos. 1, 2 vectores $f_{cN}^{ik} + f_{cN}^{ik}$ y $f_{cN}^{ki} + f_{cN}^{ki}$

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

primer y segundo conjunto de ecuaciones 4.4 por $(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t$ y $-(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t$ respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \mathbf{p}_{cN}^i) \\ &+ \\ -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^i) \end{aligned} \right\}$$

$$\equiv (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} (\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \mathbf{p}_{cN}^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^i)$$

(4.12)

Identificando cada término se obtiene:

$$\underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} = \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^i}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^i}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}(\psi_{1N}^i)} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^i}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}(\psi_{2N}^i)}$$

(4.13)

donde el resultado es una ecuación de equilibrio de energías en función de \mathbf{f}_{cN}^i , \mathbf{p}_{cN}^i y \mathbf{f}_{cN}^i : $\Delta \mathbb{E}^i = \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i} - \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}(\psi_{1N}^i) + \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}(\psi_{2N}^i)$, donde $\Delta \mathbb{E}^i = \mathbb{E}_{n+1}^i - \mathbb{E}_n^i$ es el balance de energía del cuerpo, $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}$, $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}(\psi_{1N}^i)$ y $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}(\psi_{2N}^i)$ son los incrementos asociados a \mathbf{f}_{cN}^i , \mathbf{f}_{cN}^i y \mathbf{p}_{cN}^i respectivamente dependientes de los parámetros ψ_{1N}^i y ψ_{2N}^i . La figura 4.11 muestra la conservación de energía de la ecuación 4.13 en un cuerpo i .

El balance total de energía de un sistema compuesto por n_{bd} cuerpos se obtiene sumando el correspondiente a cada cuerpo:

$$0 = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} - \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}}$$

(4.14)

$$- \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})}$$

4.2. CONSERVACIÓN DISCRETA DEL MOMENTO LINEAL, ANGULAR Y ENERGÍA. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

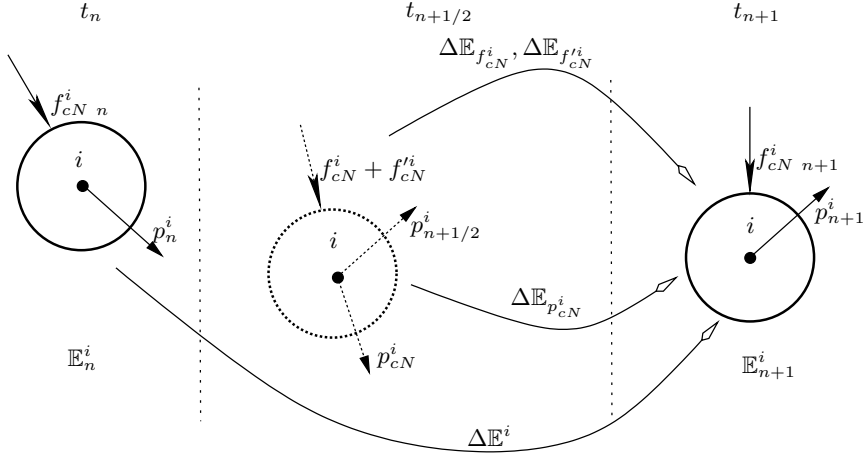


Figura 4.11: Balance energético de la ecuación 4.13 dicho balance es igual al correspondiente de la fuerza de contacto $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^i}$ más el de las variables adicionales $\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^i}$ y $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{i'}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{i'k}}_{\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{i'k}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nótese que para cuerpos rígidos y en ausencia de fuerzas externas, $\Delta \mathbb{E}^i$ es el balance de energía cinética. Los parámetros ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} de los que dependen \mathbf{p}_{cN}^{ik} y $\mathbf{f}_{cN}^{i'k}$ pueden ser positivas o negativas, por lo que $\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^{ik}}$, $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{i'k}}$ pueden añadir o sustraer energía de cada contacto; la conservación de la energía total de los cuerpos se fuerza haciendo nulo la parte derecha de la ecuación 4.15:

$$0 = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{i'k}}_{\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{i'k}}(\psi_{1N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} \right] \quad (4.16)$$

Esta ecuación proporciona infinitos pares $\psi_{1N}^{ik}, \psi_{2N}^{ik}$ y puede ser desacoplada forzando la conservación de energía en cada contacto. De esta modo, usando de nuevo el ppo. de acción-reacción y teniendo en cuenta la relación

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

de reciprocidad $\psi_{1N}^{ik} = \psi_{1N}^{ki}, \psi_{2N}^{ik} = \psi_{2N}^{ki}$, la ecuación 5.15 puede reescribirse para el contacto entre cuerpos i y k como:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} \\ & - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ki}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ki}}(\psi_{2N}^{ki})} = 0 \end{aligned}$$

(4.17)

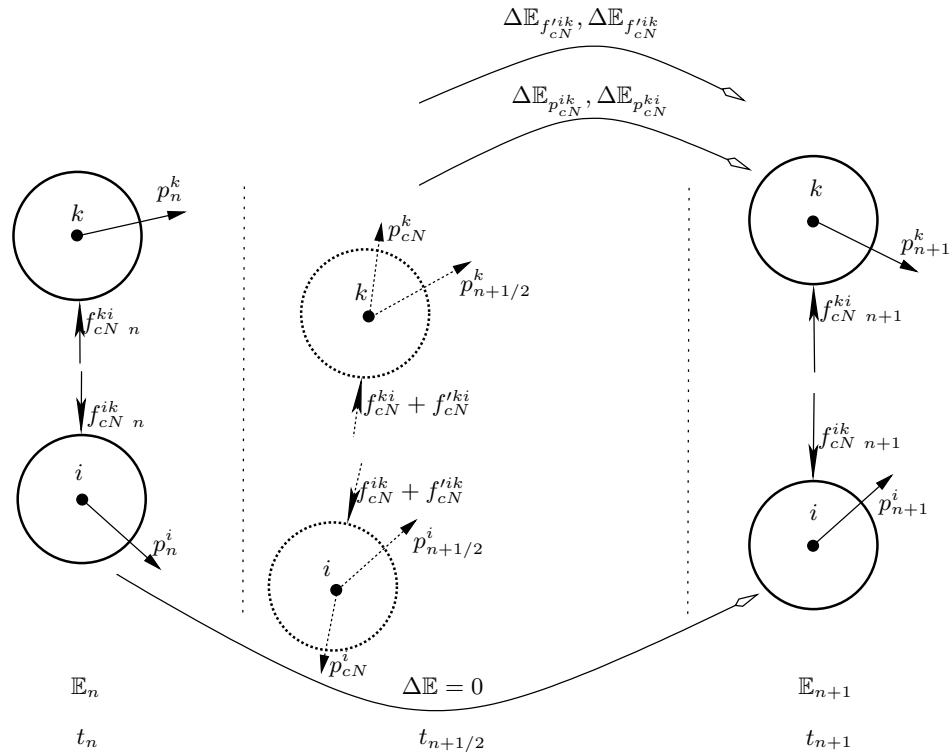


Figura 4.12: Conservación de energía para el contacto entre dos cuerpos mediante la adición de \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{p}_{cN}^{ik}

La expresión anterior implica que para cada contacto entre cuerpos i y k , $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}} = -\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik}) + \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik}) + \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ki}}(\psi_{2N}^{ki})$; por tanto, la energía añadida o sustraída por \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{p}_{cN}^{ki} y \mathbf{f}_{cN}^{ik} es igual a la energía artificial transmitida al penalty. Los incrementos $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})$, $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ki}}(\psi_{2N}^{ki})$ conservan la energía del cuerpo, mientras que $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})$ ajusta la fuerza de contacto

4.3. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL PROBLEMA DE CONTACTO, MÉTODO DEL PENALTY MEJORADO

a una solución conservativa. La ecuación 4.17 proporciona la primera parte para encontrar una relación única entre ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} .

ACEM siempre será estable, ya que se fuerza a que el balance de energía sea cero. Si $\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}$ es una solución del problema, la ecuación de conservación de energía satisface:

$$\underbrace{\Delta E}_{=0} - \underbrace{\Delta E_{p_{cN}} + \Delta E_{f_{cN}} + \Delta E_{f'_{cN}}}_{=0} = 0 \quad (4.18)$$

4.3 Análisis de la dinámica del problema de contacto, método del Penalty Mejorado

Para cada contacto, la ecuación 4.17 proporciona una relación no única entre ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} tal que conserva la energía total de los cuerpos. En este apartado se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden que representa la respuesta dinámica asociada a ACEM. Esta ecuación define un modelo de contacto basado en un método de penalty mejorado compuesto por un resorte elástico y un amortiguador viscoso paralelos que posibilitará la obtención de una relación única entre las dos ψ_N .

A continuación se procede a la obtención de esta ecuación de segundo orden para el problema de contacto más sencillo, problema de Signorini³, siendo posteriormente generalizable al caso general de dos cuerpos en contacto. Para este problema, las variables q_{n+1} , q_n , p_{n+1} y p_n serán escalares y dicho desarrollo comprende desde las ecuaciones 4.19 a 4.24 a través de los siguientes pasos:

1. Mediante las ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6 se expresa q_{n+1} y p_{n+1} en función de q_n y p_n :

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1+\psi_{2N}}{2} \\ \frac{1+\psi_{1N}}{2} \vartheta_N^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\psi_{2N}}{2} \\ -\frac{1-\psi_{1N}}{2} \vartheta_N^2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de amplificación, $\vartheta_N = \varpi_N \Delta t$, $\varpi = \sqrt{K_N/m}$ (m es la masa del cuerpo). Con la notación $D = 1 + [\vartheta_N^2(1 + \psi_{1N} + \psi_{2N})^2]/4$ los invariantes de \mathbf{A} serán:

³Problema de contacto de un cuerpo rígido contra una frontera horizontal sometido a una velocidad inicial vertical negativa

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{2}{D} \left[1 - \vartheta_N (1 - (\psi_{1N} + \psi_{2N})^2) \right] \\ L_2 &= \frac{1}{D^2} \left(1 - \frac{\vartheta_N}{4} \left[1 - (\psi_{1N} + \psi_{2N})^2 \right]^2 + \vartheta_N^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

2. La ecuación característica que proporciona los valores propios λ de \mathbf{A} es: $\lambda^2 - L_1\lambda + L_2 = 0$. Si \mathbf{I} es la matriz identidad, el teorema de Cayley–Hamilton establece:

$$\mathbf{A}^2 - L_1\mathbf{A} + L_2\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

3. Definiendo $\mathbf{y}_{n-1} = (q_{n-1}, p_{n-1}\Delta t)^t$, $\mathbf{y}_n = (q_n, p_n\Delta t)^t$, $\mathbf{y}_{n+1} = (q_{n+1}, p_{n+1}\Delta t)^t$, multiplicando la ecuación 4.21 por \mathbf{y}_{n-1} , y considerando que $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A}^2\mathbf{y}_{n-1}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1}$ se obtiene la siguiente relación que liga \mathbf{y}_{n+1} , \mathbf{y}_n y \mathbf{y}_{n-1} :

$$\mathbf{y}_{n+1} - L_1\mathbf{y}_n + L_2\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

4. Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de la primera fila de la ecuación 4.22 centrado en $t_{n+1/2}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \varpi_N^2 \Delta t \frac{\psi_{1N} + \psi_{2N}}{2} \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \varpi_N^2 q_{n+\frac{1}{2}} \\ &- \frac{\Delta t}{2} \left(\dddot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \varpi_N^2 \Delta t \frac{\psi_{1N} + \psi_{2N}}{2} \ddot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \varpi_N^2 \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

De este desarrollo se demuestra el primer orden de ACEM como su ecuación diferencial de segundo orden asociada:

$$\underbrace{0}_{\text{Inercia}} = \underbrace{\ddot{q}_{n+1/2}}_{\text{Inercia}} + \underbrace{\overbrace{\varpi_N^2 \Delta t \frac{\psi_{1N} + \psi_{2N}}{2}}^{2\xi_N \varpi_N} \dot{q}_{n+1/2}}_{\text{Amortiguador viscoso}} + \underbrace{\varpi_N^2 q_{n+1/2}}_{\text{Resorte elástico}} \quad (4.24)$$

Esta ecuación representa un modelo mejorado de penalty, figura 4.13, compuesto por un resorte elástico y un amortiguador viscoso que controla tanto g_N como la velocidad de penetración \dot{g}_N respectivamente. En este modelo, el amortiguamiento es proporcional a ψ_{1N} , ψ_{2N} , y a través del segundo término de la ecuación 4.24 se puede establecer una relación entre estas dos

4.3. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL PROBLEMA DE CONTACTO, MÉTODO DEL PENALTY MEJORADO

variables y la expresión general del amortiguamiento viscoso $2\xi_N\varpi_N$, ecuación 4.25. De este modo, el comportamiento del amortiguador se define a través del parámetro adimensional ξ_N que es una penalización para \dot{g}_N :

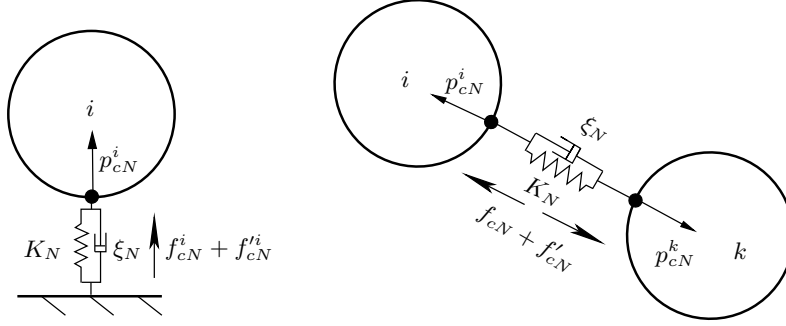


Figura 4.13: Modelo mejorado de método de Penalty

$$\psi_{1N} + \psi_{2N} = \frac{4\xi_N}{\vartheta_N} \quad (4.25)$$

Esta ecuación puede generalizarse fácilmente para cualquier contacto entre cuerpos rígidos i y k :

$$\psi_{1N}^{ik} + \psi_{2N}^{ik} = \frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}} \quad (4.26)$$

donde $\vartheta_N^{ik} = \varpi_N^{ik} \Delta t$, $\varpi_N^{ik} = \sqrt{K_N/m}$, y m es ahora la mayor de las dos masas de cada contacto.

La combinación de las ecuaciones 4.17 y 4.26 proporciona una expresión explícita para ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} :

$$\begin{aligned} \psi_{1N}^{ik} &= \frac{\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}}}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2}; & \psi_{2N}^{ik} &= \frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}} - \psi_{1N}^{ik} \\ \mathcal{N}_1 &\equiv [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik} \\ \mathcal{N}_2 &\equiv [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t K_N \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) \\ \mathcal{D}_1 &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ki} \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ki t} (\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k) \\ \mathcal{D}_2 &\equiv -\frac{1}{2}K_N (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik})^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Insertando estas expresiones en la ecuación 4.4 y teniendo en cuenta que $\xi_N = c/(2M\omega_N^{ik})$ (c es el coeficiente de amortiguamiento) se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 \frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}} &= 2 \frac{c}{K_N \Delta t} \\
 \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{M}_i^{-1} \left\{ \mathbf{p}_{n+1/2}^i + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}} \left(1 - \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} \right) - \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} \right] (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)}_{\text{Mom. adicional } \mathbf{p}_{cN}^{ik}} \right\} \\
 \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{f}_{cN}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} K_N \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} g_{Nn+1}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) + \frac{4\xi_N}{\vartheta_N^{ik}} \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} K_N \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) \right] = \\
 &= \mathbf{f}_{cN}^i + \underbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} \underbrace{K_N \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik})}_{\text{F. del resorte } \hat{\mathbf{f}}_{cN}^{ik}} + \frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2} \underbrace{2c \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} \frac{\overbrace{g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}}^{\dot{g}_{Nn+1/2}^{ik}}}}{\Delta t}}_{\text{F. amortiguamiento } \mathbf{f}_d^i} \right]}_{\text{F. contacto adicional } \mathbf{f}'_{cN}}
 \end{aligned}$$

Esta descomposición demuestra el modelo de contacto mejorado de ACEM compuesto por las siguientes penalizaciones: i) momento adicional \mathbf{p}_{cN}^{ik} y la

4.3. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DEL PROBLEMA DE CONTACTO, MÉTODO DEL PENALTY MEJORADO

fuerza de amortiguamiento \mathbf{f}_d^i que controlan la velocidad $\dot{g}_{N, n+1/2}$ y *ii*) fuerza del resorte $\hat{\mathbf{f}}_{cN}^{ik}$ que controla la penetración. Estas penalizaciones satisfacen las condiciones de impenetrabilidad de Kuhn–Tucker cuando $K_N, \xi_N \rightarrow \infty$.

Comentario 4.3.1. *Del marco de ecuaciones de conservación se deriva el modelo mejorado del método de penalty basado en un resorte elástico y un amortiguador viscoso paralelos que fuerzan la aproximación de la condición de impenetrabilidad y velocidad nula de penetración (condiciones de Kuhn–Tucker).*

A continuación se analiza la respuesta paramétrica de ACEM en función de ξ_N para el problema de Signorini. Las figuras 4.14 y 4.15 muestran los resultados de este análisis para un disco i de masa unidad que contacta con una superficie horizontal con una velocidad inicial $V_0^i = (0, -1) \text{ m/s}$, $K_N = 10^6 \text{ N/m}$, y $\Delta t = 2.0 \times 10^{-3} \text{ s}$. De estas figuras se concluye que a medida que ξ_N crece:

- La penetración tiende a cero, figura 4.14 izqda., ya que ξ_N amortigua la velocidad de penetración y por tanto reduce el g_N^i .
- La fuerza de contacto adicional \mathbf{f}_{cN}^i se incrementa, ya que el par compuesto por el resorte y amortiguador se vuelve más rígido (figura 4.15 izqda.). Como la fuerza de contacto total es conservativa, se verifica que $\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^i$ es constante.
- El parámetro ψ_{1N}^i crece (figura 4.14 drcha.), debido a su proporcionalidad con \mathbf{f}_{cN}^i .
- $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}$ and $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}$ tienden a cero (figuras 4.15 drcha.). Conforme la solución de ACEM se acerca a las condiciones de Kuhn–Tucker, menor será la transferencia de energía cuerpo–penalty.

De este análisis se desprende que la energía insertada por $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i}$ y $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i}$ decrece (figura 4.15 drcha.) a medida que ξ_N crece. Adicionalmente, $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^i} \rightarrow 0$, lo que implica que \mathbf{p}_{cN}^i y $\psi_{2N}^i \rightarrow 0$ (figura 4.14 izqda. y drcha.).

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO SIN FRICCIÓN

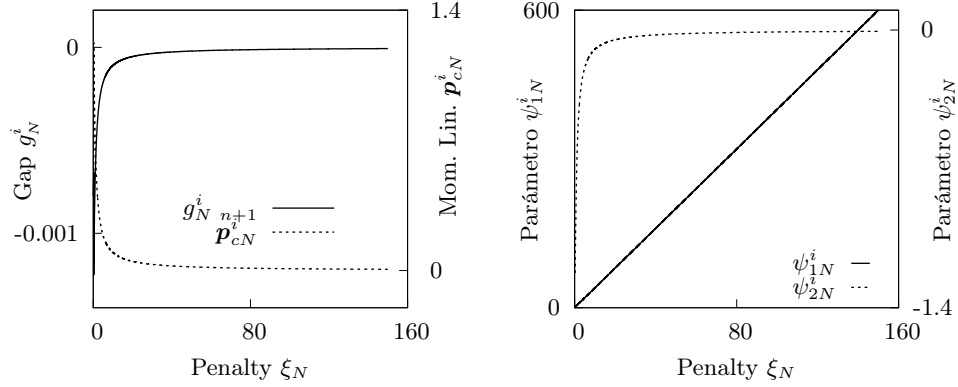


Figura 4.14: Influencia de ξ_N en g_N^i , p_{cN}^i , ψ_{1N}^i y ψ_{2N}^i . Conforme aumenta ξ_N , la solución del algoritmo aproxima a las condiciones de Kuhn–Tucker. La transferencia artificial de energía disminuye, p_{cN}^i , g_{Nn+1}^i y ψ_{2N}^i tienden a cero (izqda. y drcha.), y ψ_{1N}^i aumenta ya que f_{cN}^i se vuelve más rígido (drcha.)

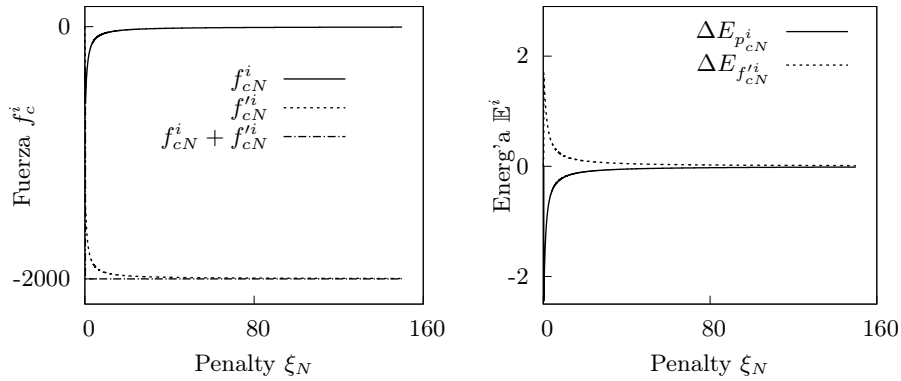


Figura 4.15: Influencia de ξ_N en f_{cN}^i , f_{cN}^{ri} , $\Delta E_{p_{cN}^i}$ y $\Delta E_{f_{cN}^{ri}}$. A medida que ξ_N aumenta, la fuerza de contacto f_{cN}^i aumenta ya que el par formado por el resorte elástico y amortiguador se vuelve más rígido. La conservación implica que $f_{cN}^i + f_{cN}^{ri}$ sea constante (izqda.), y por tanto que f_{cN}^{ri} decretea. $\Delta E_{p_{cN}^i}$ y $\Delta E_{f_{cN}^{ri}}$ decrece a media que la solución se acerca a las condiciones de Kuhn–Tucker (drcha.)

5

Formulación del algoritmo de integración temporal consistente para el problema de contacto con fricción

El objetivo de este capítulo es el diseño de un algoritmo de integración temporal consistente con el contacto friccional mediante un tratamiento semejante al del capítulo anterior. Para tal fin, los términos del marco de ecuaciones de conservación tienen en cuenta la disipación por medio de un estimador. Una de las características más notables de la fricción, es la disipación de energía en forma de calor. Aunque desde el punto de vista numérico la fricción es ventajosa, ya que favorece la estabilidad. Su modelado es complejo debido al cambio abrupto entre las situaciones stick y slip.

La estructura del capítulo es la siguiente: primero se formula el nuevo algoritmo disipativo, haciendo especial hincapié en su funcionamiento para los casos stick y slip. Posteriormente se formula el marco de ecuaciones de conservación que permite la obtención de la ecuación de balance de energía que tiene en cuenta la disipación friccional. Finalmente, se analiza el contacto friccional bajo el método del Penalty mejorado expuesto en el capítulo anterior.

5.1 Formulación de ACEM para el caso friccional

En este apartado se realiza el desarrollo friccional de ACEM, que a partir de ahora se llamará “algoritmo disipativo friccional” (ADfr). El desarrollo de ADfr se realiza bajo las mismas hipótesis consideradas para el caso sin fricción (ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext}^i = 0$ y cuerpos rígidos. Para ello, se parte de la discretización del algoritmo de Simo–Tarnow [STW92] del capítulo anterior, donde entra en juego la fuerza de contacto tangencial \mathbf{f}_{cT}^i de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i \\ \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Donde $\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2}$ y $\mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2}$ son las resultantes de las fuerzas de contacto normales y tangenciales actuantes sobre el cuerpo i en $n + 1/2$. El funcionamiento del algoritmo se muestra en la figura 5.1 donde las variables en $n + 1$ se calculan a partir de las correspondientes en n y $n + 1/2$. En el resto del capítulo los subíndices de las fuerzas de contacto correspondientes a $n + 1/2$ se omite para facilitar la lectura.

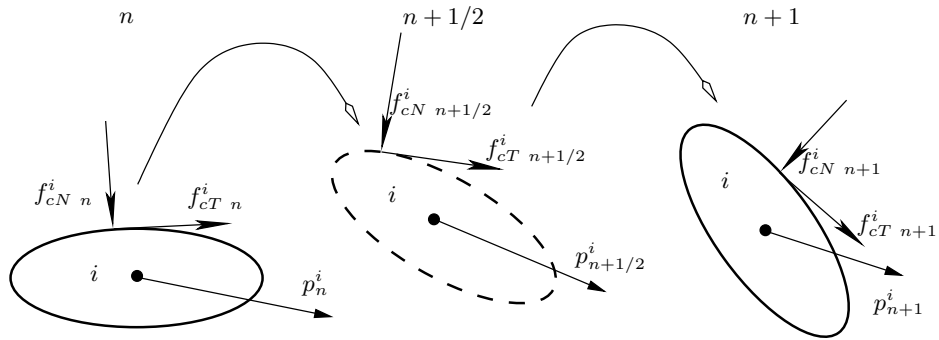


Figura 5.1: Integrador de Simo–Tarnow, obtención de \mathbf{q}_{n+1}^i y \mathbf{p}_{n+1}^i a partir de la acción de un momento lineal $\mathbf{p}_{n+1/2}^i$ y fuerzas de contacto $\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2}$, $\mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2}$ en el instante $n + 1/2$

A continuación se analiza el balance de energía del algoritmo de Simo–Tarnow para el caso friccional realizando el mismo procedimiento que en capítulos anteriores. La ecuación 5.2, indica que el incremento de energía total $\Delta \mathbb{E} = \mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n$, se debe al incremento de energía $(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1}} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^i{}_n}) + (\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1}} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^i{}_n})$ asociado a la acción de las resultantes de las fuerzas de contacto normal \mathbf{f}_{cN}^i y tangencial \mathbf{f}_{cT}^i :

5.1. FORMULACIÓN DE ACEM PARA EL CASO FRICCIONAL

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i \\ &+ \\ -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2}) \end{aligned} \right\}$$

$$\equiv \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\mathbb{E}_{n+1}^i - \mathbb{E}_n^i} - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2})}_{(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn}^i}) + (\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn}^i})}$$

Para n_{bd} cuerpos:

$$0 = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n} - \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_{cN}^i{}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{cT}^i{}_{n+1/2})}_{(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn}^i}) + (\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn}^i})} \quad (5.2)$$

El objetivo de ADfr, ecuaciones 5.3, es que la energía total se conserve para el caso stick $\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n$ y se disipe para el slip $\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n < 0$. Para ello, físicamente la energía asociada a la fuerza de contacto normal ha de conservarse siempre, $(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cNn}^i}) = 0$, mientras que la asociada a la fuerza tangencial ha de disiparse consistentemente según un modelo de fricción para el caso slip $(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn}^i}) < 0$, y conservarse para el stick $(\mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn+1}^i} - \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cTn}^i}) = 0$. El uso del método del Penalty no asegura la conservación de la energía asociada a la fuerza normal ni la conservación-disipación consistente para la fuerza tangencial. Para ello, se modifican las ecuaciones 5.1 añadiendo para el contacto entre cuerpos i y k , dos momentos lineales \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{p}_{cT}^{ik} y de dos fuerzas $\mathbf{f}_{cN}^{'ik}$, $\mathbf{f}_{cT}^{'ik}$ adicionales en la dirección normal y tangencial que modifican la respuesta del contacto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik}) = \mathbf{p}_{n+1/2}^i + \mathbf{p}_{cN}^i + \mathbf{p}_{cT}^i \\ \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{'ik} + \mathbf{f}_{cN}^{'ik} + \mathbf{f}_{cT}^{'ik} + \mathbf{f}_{cT}^{'ik}) = \mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^{'i} + \mathbf{f}_{cT}^i + \mathbf{f}_{cT}^{'i} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Este procedimiento fuerza a la modificación cinemática y dinámica del contacto tal que la energía total de los cuerpos se conserva o se disipa de manera consistente. Las expresiones de las variables adicionales \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{p}_{cT}^{ik} , $\mathbf{f}_{cN}^{'ik}$ y $\mathbf{f}_{cT}^{'ik}$ vienen dadas por las ecuaciones 5.4 para el contacto normal y tangencial (casos stick y slip):

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

Normal:

$$\mathbf{p}_{cN}^{ik} = \frac{\psi_{2N}^{ik}}{2} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i); \quad \mathbf{f}_{cN}^{ik} = \frac{\psi_{1N}^{ik}}{2} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} K_N (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik})$$

Tang. Stick:

$$\mathbf{p}_{cT}^{ik} = \frac{\psi_{2T}^{ik}}{2} \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i); \quad \mathbf{f}_{cT}^{ik} = \frac{\psi_{1T}^{ik}}{2} \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} K_T (g_{Tn+1}^{ik} - g_{Tn}^{ik})$$

Tang. Slip:

$$\mathbf{p}_{cT}^{ik} = 0; \quad \mathbf{f}_{cT}^{ik} = 0; \quad \mathbf{f}_{cT}^{ik} = -\mu \Psi \left| \mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik} \right| \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} \quad (5.4)$$

donde K_N y K_T es la rigidez normal y tangencial de los resortes elásticos del Penalty y g_{Nn+1}^{ik} , g_{Nn}^{ik} , g_{Tn+1}^{ik} , g_{Tn}^{ik} son los gaps normal y tangencial en n y $n+1$. La constante $\Psi = \pm 1$ es el sentido del deslizamiento, μ es el coeficiente de fricción y ψ_{1N}^{ik} , ψ_{1T}^{ik} , ψ_{2N}^{ik} y ψ_{2T}^{ik} son los parámetros de proporcionalidad. Nótese que \mathbf{p}_{cT}^{ik} y \mathbf{f}_{cT}^{ik} fuerzan la conservación de la energía en el caso stick. Para el caso slip, \mathbf{p}_{cT}^{ik} y \mathbf{f}_{cT}^{ik} son nulos, ya que no existe resorte de penalty tangencial; la fuerza de fricción de coulomb \mathbf{f}_{cT}^{ik} se calcula a través del valor absoluto de la fuerza de contacto normal.

La figura 5.2 muestra el modelo de penalty definido por ADfr en el punto de contacto C para dos cuerpos i, k junto a los momentos \mathbf{p}_{cN}^{ik} , \mathbf{p}_{cT}^{ik} para el contacto normal y tangencial. ADfr añade una fuerza de contacto \mathbf{f}_{cN}^{ik} y un momento lineal \mathbf{p}_{cN}^{ik} adicionales para el contacto normal, mientras que para el tangencial únicamente añade, \mathbf{f}_{cT}^{ik} y \mathbf{p}_{cT}^{ik} para el caso stick. En esta figura, junto a los resortes elásticos se muestra uno o dos amortiguadores viscosos definidos por los parámetros ξ_N y ξ_T que controlan las vibraciones del contacto. El funcionamiento de estos amortiguadores se explicará al final de este capítulo

La resultante de la fuerza \mathbf{f}_{cN}^i para contacto normal y \mathbf{f}_{cT}^i para el caso stick se obtiene a partir de \mathbf{f}_{cN}^{ik} y \mathbf{f}_{cT}^{ik} por medio de la derivada de [Gon00]:

5.1. FORMULACIÓN DE ACEM PARA EL CASO FRICCIONAL

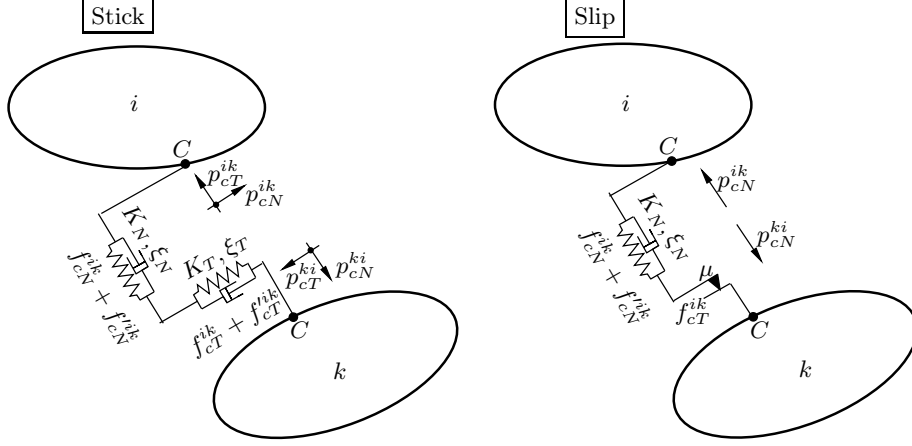


Figura 5.2: Modelo de contacto para los casos stick y slip

$$\mathbf{f}_{cN}^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_{cN}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn+1}^{ik}) - \mathcal{V}^{ik}(g_{Nn}^{ik})}{g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}} \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{1}{2} K_N \mathbf{R}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik})$$

$$\mathbf{f}_{cT}^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \mathbf{f}_{cT}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{\mathcal{V}^{ik}(g_{Tn+1}^{ik}) - \mathcal{V}^{ik}(g_{Tn}^{ik})}{g_{Tn+1}^{ik} - g_{Tn}^{ik}} \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \frac{1}{2} K_T \mathbf{T}_{n+\frac{1}{2}}^{ik} (g_{Tn+1}^{ik} - g_{Tn}^{ik})$$

(5.5)

donde $\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn+1}^{ik}) = K_N (g_{Nn+1}^{ik})^2/2$, $\mathcal{V}^{ik}(g_{Nn}^{ik}) = K_N (g_{Nn}^{ik})^2/2$ y $\mathcal{V}^{ik}(g_{Tn+1}^{ik}) = K_T (g_{Tn+1}^{ik})^2/2$, $\mathcal{V}^{ik}(g_{Tn}^{ik}) = K_T (g_{Tn}^{ik})^2/2$, son los potenciales de los resortes de contacto en la dirección normal y tangencial.

La figura 5.3 muestra el funcionamiento de ADfr con un cuerpo i bajo el problema de Signorini para los casos stick y slip; la superficie Π_1 representa la localización donde la energía del cuerpo es constante en el instante n , $\mathbb{E}_n^i = C_1$ y por tanto, es el lugar en el que se encuentran inicialmente tanto la posición como el momento lineal $\mathbf{q}_n^i, \mathbf{p}_n^i$.

Cuando se produce un contacto, hay una transferencia artificial de energía cuerpo–resorte de penalty dada por $A \Delta \mathbb{E}^i < 0$, por lo que la solución en $n + 1/2$, $\mathbf{q}_{n+1/2}^{*i}, \mathbf{p}_{n+1/2}^{*i}$, se desplaza a la superficie no consistente de energía Π_2 . Para [STW92] la solución final se queda en Π_2 , mientras que ADfr la modifica mediante el marco de ecuaciones de conservación B del apartado 5.2. Para el caso stick se vuelve a Π_1 , conservándose la energía. Mientras que para el caso slip, B fuerza la solución intermedia a desplazarse a la superficie de disipación energética consistente Π_3 , en la que la pérdida de energía $\Delta \mathbb{E}^i$ es igual a la disipada por $\Delta \mathbb{E}_{cT}^i$.

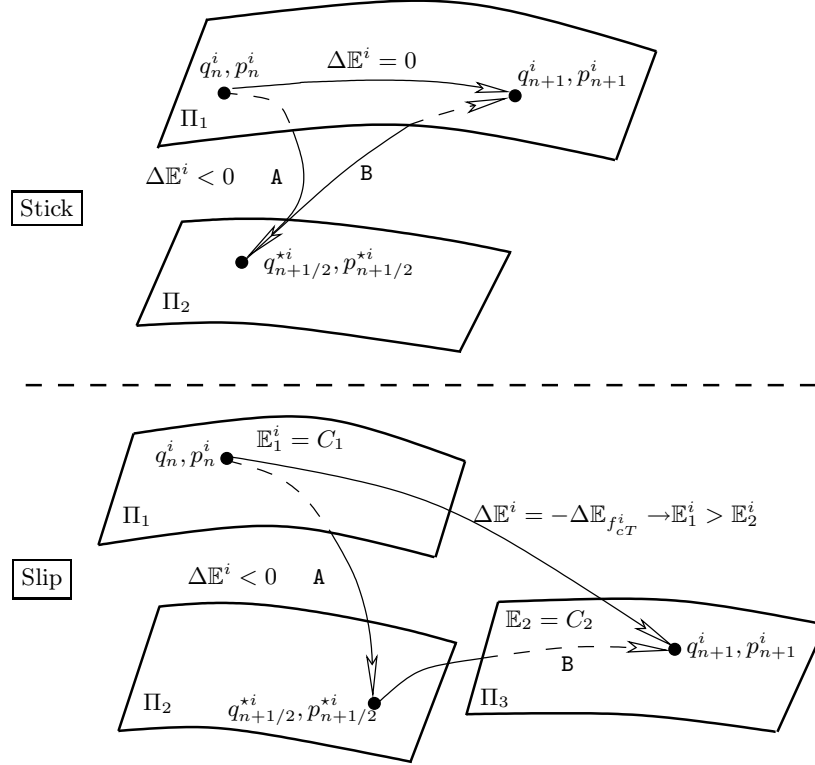


Figura 5.3: Funcionamiento de ADfr. Inicialmente, $\mathbf{q}_n^i, \mathbf{p}_n^i$ se encuentran sobre la superficie de energía de cuerpo constante Π_1 . En el contacto se produce una transferencia artificial de energía dada por A, trasladando la solución a la superficie no consistente Π_2 . ADfr modifica esta solución en $n + 1$ y la desplaza a través de B a Π_1 para stick o a la superficie de disipación de energía consistente Π_3 para slip

5.2 Conservación discreta del momento lineal, angular y disipación consistente de energía. Marco de ecuaciones de conservación

En este apartado se obtienen las ecuaciones de balance discreto del momento lineal \mathbf{p}^{tot} , momento angular \mathcal{J}^{tot} y energía total \mathbb{E} para un sistema de n_{bd} cuerpos en contacto. Dichas ecuaciones forman el marco de ecuaciones de conservación que ha de cumplir ADfr y están formuladas bajo la hipótesis de sólido rígido en ausencia de fuerzas exteriores $\mathbf{f}_{ext}^i = 0$.

5.2.1. Balance discreto del momento lineal total

La segunda de las ecuaciones 5.3, expresa la variación discreta del momento lineal de un cuerpo i para el caso friccional. Dicha variación $\Delta \mathbf{p}^i / \Delta t$, figura 5.4, es consecuencia de la resultante de las fuerzas de contacto norma-

5.2. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

les \mathbf{f}_{cN}^i , $\mathbf{f}_{cN}^{i'}$ y tangenciales \mathbf{f}_{cT}^i , $\mathbf{f}_{cT}^{i'}$ en $n + 1/2$:

$$\frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left(\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{i'k} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{i'k} \right) = \left(\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^{i'} + \mathbf{f}_{cT}^i + \mathbf{f}_{cT}^{i'} \right) \quad (5.6)$$

La variación del momento lineal total (ecuación 5.7), es la suma de la correspondiente a cada cuerpo y es igual a la resultante de las fuerzas de contacto que actúan sobre el sistema de n_{bd} cuerpos:

$$\frac{\mathbf{p}_{n+1}^{tot} - \mathbf{p}_n^{tot}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left(\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{i'k} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{i'k} \right) \\ \sum_{i=1}^{n_{bd}} \left(\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^{i'} + \mathbf{f}_{cT}^i + \mathbf{f}_{cT}^{i'} \right) \end{cases} \quad (5.7)$$

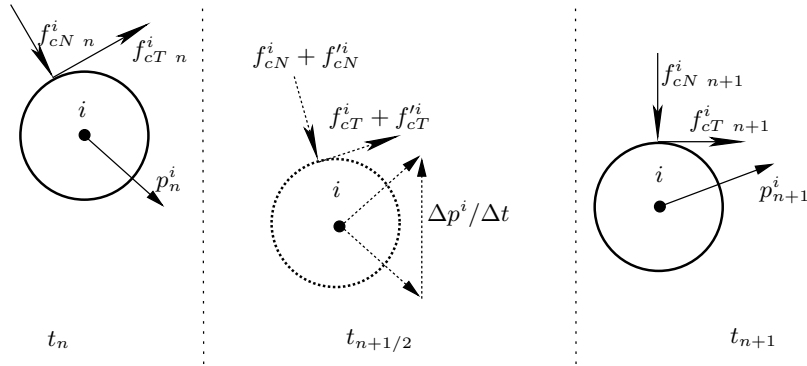


Figura 5.4: Variación discreta del momento lineal para un cuerpo, igual a la acción de las fuerzas de contacto en la configuración $n + 1/2$

Para cada contacto se verifica por el ppo. de acción y reacción: $\mathbf{f}_{cT}^{ik} = -\mathbf{f}_{cT}^{ki}$ para stick y $\mathbf{f}_{cT}^{ik} = -\mathbf{f}_{cT}^{ki}$, $\mathbf{f}_{cT}^{i'k} = \mathbf{f}_{cT}^{ki}$ para slip y $\mathbf{f}_{cN}^i = -\mathbf{f}_{cN}^{i'}$, $\mathbf{f}_{cT}^{ik} = -\mathbf{f}_{cT}^{ki}$ para ambos, ver figura 5.5. En todos los casos se anulan los términos situados a la derecha de la ecuación 5.7 y por tanto se conserva el momento lineal total: $\mathbf{p}_{n+1}^{tot} = \mathbf{p}_n^{tot}$.

5.2.2. Balance discreto del momento angular total

El producto vectorial de la segunda de las ecuaciones 5.3 por $(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)$, proporciona el balance discreto de momento angular para un cuerpo i :

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

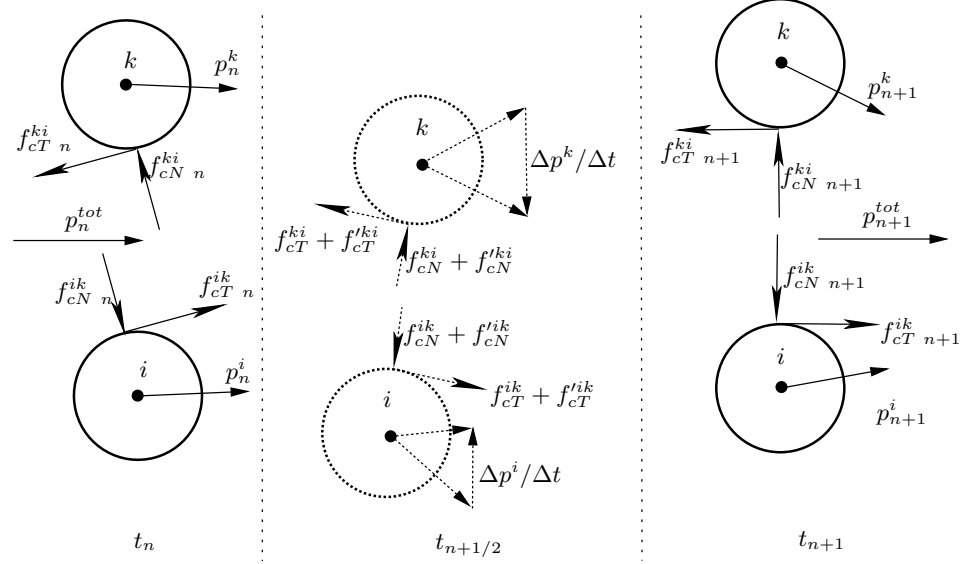


Figura 5.5: Conservación discreta del momento lineal total. Como las fuerzas de contacto son iguales y opuestas, el algoritmo calcula los incrementos $\Delta p^i/\Delta t$, $\Delta p^k/\Delta t$ de cada cuerpo tal que el momento lineal total se conserva

$$\frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) = \begin{cases} \equiv \frac{\mathcal{J}_{n+1}^i - \mathcal{J}_n^i}{\Delta t} \\ = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{'ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{'ik}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \\ = (\mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}_{cN}^{'i} + \mathbf{f}_{cT}^i + \mathbf{f}_{cT}^{'i}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \end{cases} \quad (5.8)$$

Esta ecuación indica que la variación del momento angular de un cuerpo i es igual al momento generado por las fuerzas de contacto. El balance total para n_{bd} cuerpos es:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_{n+1}^{tot} - \mathcal{J}_n^{tot}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{\mathcal{J}_{n+1}^i - \mathcal{J}_n^i}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)}{\Delta t} \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{'ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{'ik}) \times (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Aplicando de nuevo el ppo. de acción-reacción y definiendo el desplazamiento relativo entre cuerpos en los instantes n y $n + 1$ en función de g_N^{ik} y g_T^{ik} en $n + 1/2$: $(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k) = g_{Nn+1/2}^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} + g_{Tn+1/2}^{ik} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ik}$, la anterior ecuación se transforma en:

$$\frac{\mathcal{J}_{n+1}^{tot} - \mathcal{J}_n^{tot}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{nbd} \sum_{k=i+1}^{nbd} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}'_{cN}{}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}'_{cT}{}^{ik}) \times (g_{Nn+1/2}^{ik} \mathbf{R}_{n+1/2}^{ik} + g_{Tn+1/2}^{ik} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ik}) \quad (5.10)$$

Si se observa la parte derecha de esta ecuación, la fuerza de contacto (vector de la izquierda) y el desplazamiento (vector de la derecha) son paralelos tanto para el caso stick como slip. Por tanto, el producto vectorial es nulo y el momento angular total se conserva: $\mathcal{J}_{n+1}^{tot} = \mathcal{J}_n^{tot}$.

Comentario 5.2.1. *Al igual que el caso sin fricción, las ecuaciones 5.7 y 5.10 demuestran que el momento lineal y angular se conservan para cualquier valor de ψ , ya que las ecuaciones hamiltonianas del ADfr son invariantes ante rotaciones.*

5.2.3. Balance discreto de energía total

El balance de energía de un cuerpo i se obtiene a través de la suma de los productos de las ecuaciones 5.3 por $(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t$ y $-(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t$ respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \left[\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} (\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik}) \right] \\ &+ \\ -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}'_{cN}{}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}'_{cT}{}^{ik}) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \equiv 0 &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \left[\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} (\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik}) \right] \\ &- (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}'_{cN}{}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}'_{cT}{}^{ik}) \end{aligned}$$

(5.11)

Identificando cada término de la anterior ecuación se obtiene:

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

$$\begin{aligned}
0 = & \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{[-(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}]}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} \\
& - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} \\
& - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

donde el incremento de energía del cuerpo $\Delta \mathbb{E}^i$ es debido a la acción de las energías de \mathbf{f}_{cN}^{ik} , \mathbf{f}_{cT}^{ik} y de las variables adicionales \mathbf{f}_{cN}^{ik} , \mathbf{f}_{cT}^{ik} , \mathbf{p}_{cN}^{ik} y \mathbf{p}_{cT}^{ik} , ver figura 5.6 en $n + 1/2$. Para un sistema de n_{bd} cuerpos en contacto, la ecuación de balance será igual a la suma de los balances de cada cuerpo:

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} + \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{[-(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}]}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} \\
& - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} \\
& - \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n = & \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}]}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} \\
& + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} \\
& + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.2. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

donde $\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \Delta \mathbb{E}^i$ es el balance total de energía entre n y $n + 1$. $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{ik}}$ y $\Delta \mathbb{E}_{f_{cT}^{ik}}$ son las energías artificiales transferidas a los resortes de penalty y $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})$, $\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})$, $\Delta \mathbb{E}_{f_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})$, $\Delta \mathbb{E}_{p_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})$ son los incrementos de energía generados por las variables adicionales que conservan la energía para contacto normal y la conservan–disipan consistentemente para el tangencial.

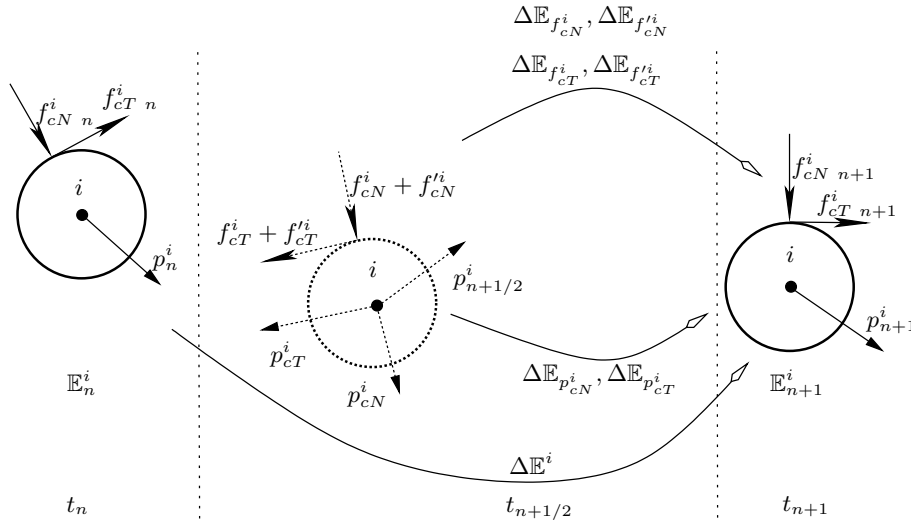


Figura 5.6: Conservación–disipación de energía para el contacto friccional con un cuerpo. ADfr calcula la energía necesaria para obtener una respuesta conservativa–disipativa consistente

La ecuación 5.14 es el marco de ecuaciones de conservación que relaciona el incremento de energía total con los de las variables de contacto. La figura 5.7 muestra el contacto de dos cuerpos, el papel de conservación–disipación de energía se incluye en los términos $\Delta \mathbb{E}_{f_{cT}^{ik}}$, $\Delta \mathbb{E}_{f_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})$ y $\Delta \mathbb{E}_{p_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})$ en $n + 1/2$. Por tanto, la pérdida de energía será siempre consistente ya que la disipación está incluida en la ecuación de balance.

Físicamente, la energía para el contacto normal se conserva, mientras que se disipa consistentemente para el caso slip y se conserva para el stick. Dichas condiciones se imponen en la ecuación 5.14, donde se establecen las relaciones entre $\Delta \mathbb{E}_{f_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik}) - \Delta \mathbb{E}_{p_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})$ para contacto normal y $\Delta \mathbb{E}_{p_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik}) - \Delta \mathbb{E}_{f_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})$ para tangencial por medio de los parámetros ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} , ψ_{1T}^{ik} y ψ_{2T}^{ik} en los siguientes casos:

- Caso STICK

Para el caso stick, la energía se conserva, ya que no se disipa energía

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

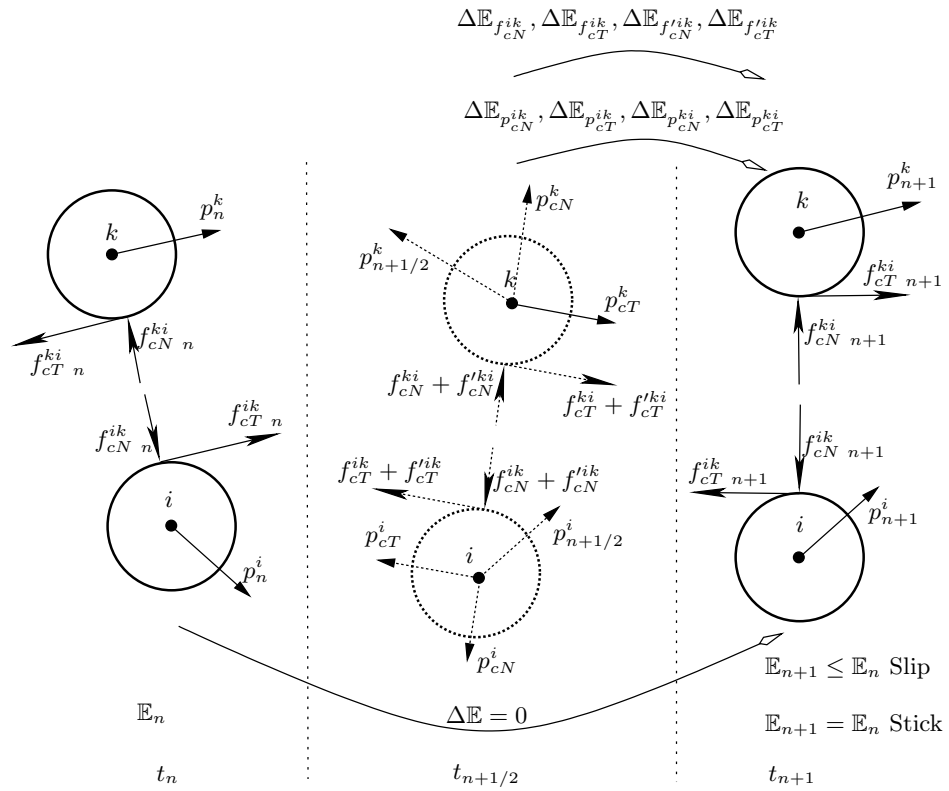


Figura 5.7: Conservación–disipación consistente de energía para un sistema de dos cuerpos

5.2. MARCO DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

por fricción. Esta condición se fuerza haciendo cero la parte derecha de la ecuación 5.14:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{i=1}^{nbd} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nbd} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} \right. \\
 & \left. + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})} \right]
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Esta ecuación proporciona infinitas relaciones entre los parámetros ψ_{1N}^{ik} , ψ_{2N}^{ik} , ψ_{1T}^{ik} , ψ_{2T}^{ik} tal que satisfacen la conservación de la energía total de los cuerpos. La condición de conservación se fuerza en la dirección normal y tangencial mediante el desacoplamiento de la anterior ecuación para cada contacto. De esta modo, usando el ppo. de acción-reacción y las relaciones de reciprocidad $\psi_{1N}^{ik} = \psi_{1N}^{ki}$, $\psi_{2N}^{ik} = \psi_{2N}^{ki}$, $\psi_{1T}^{ik} = \psi_{1T}^{ki}$ y $\psi_{2T}^{ik} = \psi_{2T}^{ki}$, la ecuación 5.15 puede describirse para el contacto entre cuerpos i, k como:

Contacto normal:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} \\
 & - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ki}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ki}}(\psi_{2N}^{ik})} = 0
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Contacto tangencial:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} + \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)]^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} \\
 & - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ki}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ki}}(\psi_{2T}^{ik})} = 0
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 implican que la energía transferida a los resortes normal y tangencial del penalty se recupera mediante la asociación a las variables adicionales. Las energías $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})$ y $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})$ conservan la energía total de los cuerpos, mientras que $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})$ y $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})$ ajustan las fuerzas de contacto para que sean conservativas.

■ Caso SLIP

Desde el punto de vista físico, la energía disipada por fricción ha de ser igual al incremento total de energía: $\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n = - \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}$.

Esta condición se fuerza haciendo cero el último sumatorio de la ecuación 5.15. Adicionalmente se verifica $\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik}) = \Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik}) = 0$, ya que en esta situación solamente existe un resorte elástico en la dirección normal y la fuerza tangencial \mathbf{f}_{cT}^{ik} se obtiene a partir de $\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik}$ (modelo de coulomb)¹. Por tanto se obtiene un balance de energía en función de términos relacionados con el contacto normal:

$$\sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} \right] = 0 \quad (5.18)$$

Al igual que en el caso anterior, esta ecuación puede desacoplarse forzando el balance nulo de energía para cada contacto. Usando de nuevo el ppo. de acción-reacción y la reciprocidad $\psi_{1N}^{ik} = \psi_{1N}^{ki}$, $\psi_{2N}^{ik} = \psi_{2N}^{ki}$, se obtiene finalmente una relación entre ψ_{1N}^{ik} y ψ_{2N}^{ik} (ecuación 5.19) que fuerza la conservación de energía para el contacto normal y la disipación consistente para el tangencial.

$$\underbrace{\left[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k) \right]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{\left[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i) - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k) \right]^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} \\ \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ki}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ki}}(\psi_{2N}^{ki})} = 0 \quad (5.19)$$

¹Ver condición de deslizamiento en la ecuación 5.4

5.3. CONTACTO DINÁMICO FRICCIONAL, MÉTODO DEL PENALTY MEJORADO

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 para el caso stick, y 5.19 para el slip, definen relaciones no únicas entre los parámetros ψ o las variables adicionales. Insertando estas relaciones en las ecuaciones 5.3, se obtiene una respuesta conservativa o consistentemente disipativa.

Las ecuaciones 5.15 y 5.18, aseguran la estabilidad de ADfr, ya que como se muestra en las ecuaciones 5.20, la energía total se conserva para el caso stick y se disipa positivamente para el caso slip:

Stick:

$$\underbrace{\Delta \mathbb{E}}_{=0} + \underbrace{\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}} - \Delta \mathbb{E}_{f_{cN}} - \Delta \mathbb{E}_{f'_{cN}}}_{=0} + \underbrace{\Delta \mathbb{E}_{p_{cT}} - \Delta \mathbb{E}_{f_{cT}} - \Delta \mathbb{E}_{f'_{cT}}}_{=0} = 0$$

Slip:

$$\Delta \mathbb{E} + \underbrace{\Delta \mathbb{E}_{p_{cN}} - \Delta \mathbb{E}_{f_{cN}} - \Delta \mathbb{E}_{f'_{cN}}}_{=0} = - \underbrace{\Delta \mathbb{E}_{f'_{cT}}}_{<0} \quad (5.20)$$

5.3 Contacto dinámico friccional, método del Penalty mejorado

Para cada contacto, las ecuaciones 5.16, 5.17 y 5.19 proporcionan una relación no única entre $\psi_{1N}^{ik}, \psi_{2N}^{ik}$ y $\psi_{1T}^{ik}, \psi_{2T}^{ik}$ respectivamente, que automáticamente conserva o disipa consistentemente la energía total para los casos stick y slip.

Usando el procedimiento de descomposición modal expuesto en el capítulo anterior, es posible obtener la ecuación de equilibrio dinámico de segundo orden que define un modelo mejorado del método del Penalty. Este modelo descrito en las ecuaciones 5.21 y en la figura 5.2 consiste en un grupo compuesto por un resorte elástico y un amortiguador viscoso dispuestos en la dirección normal y tangencial que controlan tanto g_N, g_T como sus respectivas velocidades.

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ALGORITMO FRICCIONAL

$$\begin{aligned}
 0 &= \ddot{q}_{Nn+1/2} + \overbrace{\varpi_N^2 \Delta t \frac{\psi_{1N} + \psi_{2N}}{2}}^{2\xi_N \varpi_N} \dot{q}_{Nn+1/2} + \varpi_N^2 q_{Nn+1/2} \\
 0 &= \underbrace{\ddot{q}_{Tn+1/2}}_{\text{Inercia}} + \underbrace{\overbrace{\varpi_T^2 \Delta t \frac{\psi_{1T} + \psi_{2T}}{2}}^{2\xi_T \varpi_T} \dot{q}_{Tn+1/2}}_{\text{Amortiguador}} + \underbrace{\varpi_T^2 q_{Tn+1/2}}_{\text{Resorte}}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Las variables $q_{Nn+1/2}$, $q_{Tn+1/2}$ representan el movimiento del cuerpo en la dirección normal y tangencial. Los amortiguadores viscosos son dependientes de ξ_N , ξ_T , parámetros de penalización para las velocidades que fuerzan de manera aproximada la condición consistente de Kuhn–Tucker (velocidad de penetración nula). Las ecuaciones 5.21 proporcionan las siguientes relaciones:

$$\psi_{1N} + \psi_{2N} = \frac{4\xi_N}{\Omega_N} ; \quad \psi_{1T} + \psi_{2T} = \frac{4\xi_T}{\Omega_T} \tag{5.22}$$

que pueden generalizarse fácilmente para cualquier contacto entre cuerpos rígidos i, k como:

$$\psi_{1N}^{ik} + \psi_{2N}^{ik} = \frac{4\xi_N}{\Omega_N^{ik}} ; \quad \psi_{1T}^{ik} + \psi_{2T}^{ik} = \frac{4\xi_T}{\Omega_T^{ik}} \tag{5.23}$$

donde $\Omega_N^{ik} = \varpi_N^{ik} \Delta t$, $\Omega_T^{ik} = \varpi_T^{ik} \Delta t$, $\varpi_N^{ik} = \sqrt{K_N/m}$, $\varpi_T^{ik} = \sqrt{K_T/m}$, y m es la mayor de las dos masas en contacto. La combinación de las ecuaciones 5.16, 5.17, 5.19 con las ecuaciones 5.23 proporcionan las expresiones para ψ_{1N}^{ik} , ψ_{2N}^{ik} y ψ_{1T}^{ik} , ψ_{2T}^{ik} mostradas en el apéndice. La inserción de estas expresiones en las ecuaciones 5.3 fuerza a que la respuesta sea conservativa para el caso stick y consistentemente disipativa para el slip.

6

Simulaciones numéricas sin fricción

6.1 Introducción

En este capítulo se han simulado cuatro ejemplos numéricos representativos sin fricción con ACEM mediante MED aplicado a discos rígidos. El primer ejemplo estudia el problema de Carom (o problema de la mesa de billar), en que la conservación de los momentos y de la energía total de los cuerpos se analiza a través de un disco que impacta en el interior de una caja rígida.

El segundo ejemplo analiza la dispersión y el rebote de un triángulo compuesto por 55 bolas de billar para las siguientes dos situaciones: a) todas las bolas tienen el mismo diámetro e inicialmente están en contacto, y b) varias bolas tienen un diámetro ligeramente menor (existencia de imperfecciones).

El tercero consiste en el problema del péndulo de Newton, en el que se estudia la respuesta conservativa de tres esferas alineadas sostenidas cada una de ellas por un cable. En esta situación, una de las esferas extremas se aparta de su posición de equilibrio e impacta a las colidantes con una determinada velocidad. Este problema tiene dos soluciones analíticas construidas en base a dos hipótesis diferentes.

Finalmente, el cuarto ejemplo simula el llenado de un cangilón bajo la acción de la gravedad. Este problema se caracteriza por su elevado número de contactos y mediante el mismo se demuestra la robustez de ACEM con respecto a la conservación de la energía.

Para comparar el funcionamiento de ACEM con el resto de algoritmos, los ejemplos primero, tercero y cuarto han sido simulados adicionalmente mediante la familia de integradores temporales de Newmark- β . Se han empleado los parámetros β y γ de la tabla 6.1, que corresponden con la Regla del Trapecio (Trap.) y el método de Máxima Disipación (Max.D.), integradores que tienen nulo y máximo amortiguamiento numérico respectivamente.

6.2 El problema de Carom

El problema bidimensional de Carom, o problema de la mesa de billar, consiste en el análisis de la trayectoria de un disco sometido a una determi-

CAPÍTULO 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS SIN FRICCIÓN

Método	β	γ	Estabilidad
Trapecio (Trap.)	1/4	1/2	Incondicional
Máx. Disipación (Max.D.)	0.49	1	Condicional

Tabla 6.1: Parámetro de Newmark- β para los problemas primero, tercero y cuarto

nada velocidad inicial en el interior de una caja rígida cuadrada de un metro de lado.

La velocidad inicial es $V_0 = (4, -4) \text{ m/s}$ y la posición $(0.25, 0.25) \text{ m}$. Los parámetros de la simulación son: $K_N = 10^6 \text{ N/m}$, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3} \text{ s}$, masa unidad, radio 10^{-2} m y dos valores distintos de los penalties para las velocidades, bajo y elevado $\xi_N = 1$ y $\xi_N = 200$.

Las figuras 6.1 muestran los resultados de la simulación: trayectorias (izqda.), velocidades y energías (drcha.). Como se demuestra en las figuras, ACEM conserva la energía y los momentos, por lo que para cada contacto el ángulo y velocidad incidentes son iguales y opuestos a los salientes y además las trayectorias se superponen una sobre otra de manera cíclica. Estos resultados coinciden con la solución analítica de la figuras 6.1 (izqda.) para ambos valores de ξ_N . Las condiciones iniciales impuestas fuerzan a que el disco impacte en la mitad de cada lado del cuadrado.

Si se simula el mismo problema usando el método de Newmark- β con el conjunto de parámetros de la tabla 6.1, las trayectorias no coinciden con las correspondientes a los resultados analíticos. Aunque Trap. (figuras 6.2 sup.) es incondicionalmente estable para problemas lineales, se comporta de manera inestable debido a las no linealidades de contacto, que dan lugar a incrementos de energía en cada impacto. Tanto la velocidad normal a la frontera como el ángulo saliente se incrementa y cambian de signo después de cada contacto (figuras 6.2 izqda. y drcha. respectivamente), dando trayectorias cada vez más cerradas sin sentido físico.

Max.D., (figura 6.2, inf.), también se comporta de manera inestable con los impactos, pero debido a su elevado amortiguamiento numérico intrínseco, fuerza a que la energía decrezca con cada contacto. Este amortiguamiento provoca que disminuya tanto la velocidad normal a la superficie, como consecuentemente el ángulo de salida, lo que da lugar a una trayectoria abierta que simula un contacto inelástico sin la suficiente precisión física. Para Trap. como para Max.D. la velocidad tangencial no se ve afectada por el contacto por la ausencia de fricción en esta simulación.

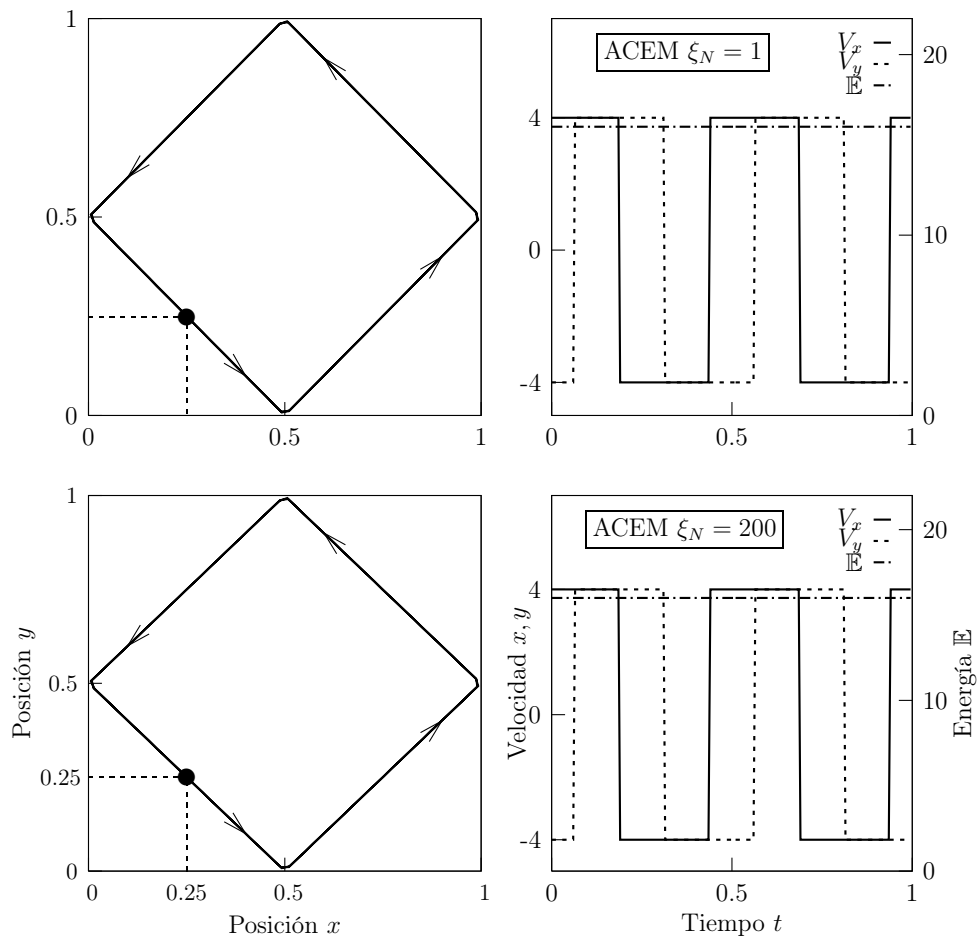


Figura 6.1: Trayectoria, velocidad y energía con ACEM. Los resultados concuerdan con la física del problema de Carom sin fricción: se conserva la energía y la velocidad normal es igual en módulo pero opuesta en signo, antes y después del contacto. La posición inicial está indicada por •

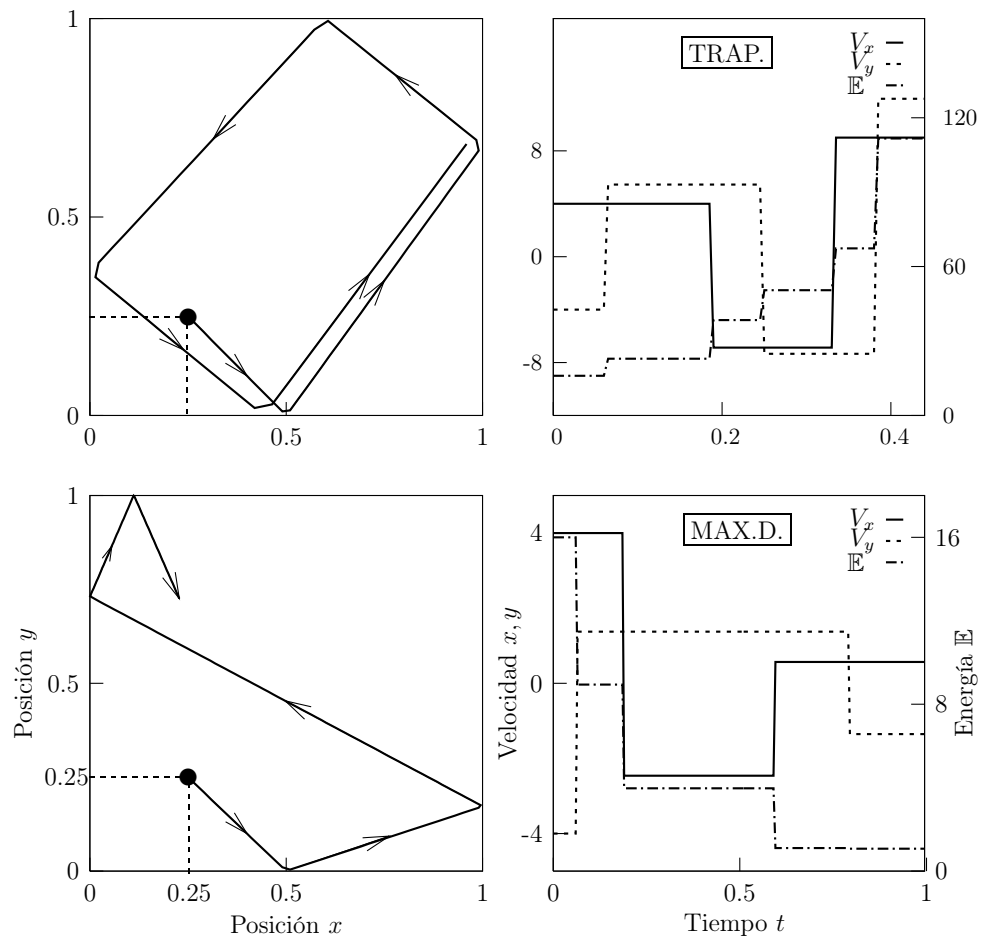


Figura 6.2: Trayectoria, velocidad y energía para Newmark- β . Se produce un comportamiento de tipo no físico debido al incremento ilimitado de energía para Trap. y se muestra un alto amortiguamiento numérico para Max.D. La posición inicial está indicada por •

6.3 La dispersión de las bolas de billar

En este apartado se simula numéricamente la dispersión de las bolas del juego de billar, figuras 6.3 y 6.4. La bola incidente a (de diámetro $5 \times 10^{-2} m$) se somete a una velocidad inicial de $V_0 = (0, 10) m/s$, impactando contra un triángulo compuesto por 55 bolas en contacto. Este problema ha sido simulado con ACEM usando los siguientes parámetros: $K_N = 10^6 N/m$, $\xi_N = 200$, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4} s$, y masa de cada bola $0.15 kg$. Aunque se haya considerado que todos los discos son rígidos, no todos los contactos se producen de manera instantánea, ya que la presencia de los resortes de penalty propagan el impacto en el interior del triángulo por medio de una onda que retrasa la transmisión de los contactos.

Comentario 6.3.1. *En este problema se estudia la robustez en la conservación de energía y momentos de ACEM en problemas con un moderado número de contactos simultáneos. Asimismo, se estudia la sensibilidad en los resultados finales de una ligera variación en la geometría inicial del problema.*

Esta simulación se centra en el análisis de la conservación de la energía total de los cuerpos y de la propagación del momento lineal en el interior del triángulo. Se han considerado tres casos cuyos resultados se muestran en las figuras 6.3 y 6.4. Estos casos corresponden a las siguientes situaciones: i) todos los discos tienen el mismo diámetro, $6 \times 10^{-2} m$; ii) dos bolas sombreadas situadas simétricamente (con respecto a la línea de impacto) tienen un diámetro ligeramente inferior respecto al resto, $5.8 \times 10^{-2} m$; y, iii) mismo caso que ii) pero con tres bolas situadas de manera asimétrica. En todos los casos, la bola a impacta contra b , a retrocede y b contacta con las bolas circundantes. En estas figuras, la dirección y la magnitud del momento lineal de cada bola se indica por medio de una flecha.

La figura 6.3 muestra los resultados para el caso i), que corresponde a la situación simétrica con todas las bolas del mismo tamaño. Esta configuración provoca que la mayor parte del momento lineal se transmita a lo largo de las direcciones definidas por los lados $b-c$ y $b-d$, razón por la que las bolas c y d salen despedidas rápidamente. Las figuras 6.4 muestran los resultados para los casos ii) y iii), en los que la transmisión del momento lineal p_x, p_y , de la energía \mathbb{E} y la dispersión de las bolas es simétrica para el caso ii) y asimétrica para el iii). Adicionalmente se observa que no hay tendencias evidentes en las direcciones de la transmisión del momento lineal, y la mayoría de las bolas adquieren el suficiente movimiento para que el triángulo se disemine completamente. Todos estos resultados concuerdan cualitativamente con el comportamiento de las bolas en el juego de billar, donde las imperfecciones en el diámetro de las bolas y la posición inicial influyen el movimiento post-impacto. Aunque los resultados para estos tres casos son cualitativamente

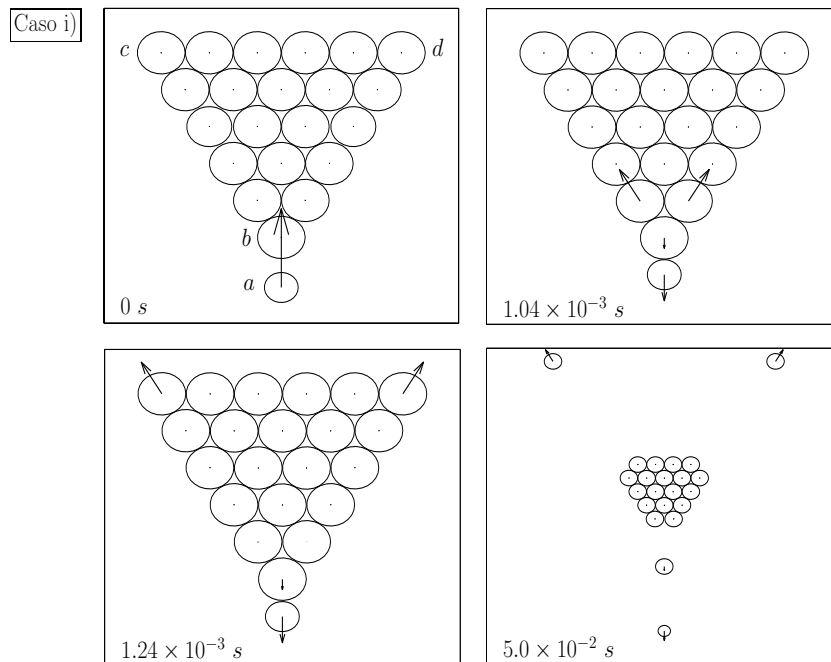


Figura 6.3: Dispersión sin fricción, caso i), todas las bolas son iguales y están situadas de manera simétrica. La mayor parte del momento lineal se transmite a lo largo de los lados $b-c$ y $b-d$. Después del impacto únicamente se mueven las bolas situadas en los vértices

6.4. EL PÉNDULO DE NEWTON

diferentes, ACEM calcula y conserva el mismo momento lineal total y la misma energía de los cuerpos (ver tabla 6.2).

	Caso i)		Caso ii)		Caso iii)	
t (s)	0	1.0	0	1.0	0	1.0
p_x (Kg m/s)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
p_y (Kg m/s)	8.66	8.66	8.66	8.66	8.66	8.66
\mathbb{E} (J)	43.3	43.3	43.3	43.3	43.3	43.3

Tabla 6.2: Energía total del cuerpo y momento lineal al principio y final de la simulación. El movimiento es diferente para los tres casos, pero el momento lineal y la energía coinciden para los tres

6.4 El péndulo de Newton

El tercer ejemplo simula el impacto de tres esferas rígidas y alineadas empleando ACEM y Newmark- β . Las figuras 6.5 muestran tres esferas a, b y c inicialmente estáticas, donde a ha sido desplazada inicialmente hacia la izquierda. La esfera a se somete a una velocidad inicial $V_{a0} = 1$ m/s impactando contra b .

Este problema se puede resolver usando dos hipótesis distintas. La primera, i) las esferas b y c están inicialmente juntas, y cuando a impacta a b , b y c impactan simultáneamente. Esta hipótesis considera que las masas b y c se comportan como una única masa $b + c$. En la segunda hipótesis, ii), todas las esferas están ligeramente separadas y el contacto entre $b-c$ ocurre después que el de $a-b$. La referencia [CH01] proporciona la solución analítica de las velocidades post-impacto: $V_{a1} = -1/3 V_{a0}, V_{b1} = V_{c1} = 2/3 V_{a0}$ para i) y $V_{a1} = V_{b1} = 0, V_{c1} = V_{a0}$ para ii).

Los parámetros de la simulación para ambas hipótesis son $K_N = 10^7$ N/m, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ s, $\xi_N = 200$, masa unidad y diámetro 10^{-1} m. La Tabla 6.3 muestra las velocidades post-impacto para Trap., Max.D., ACEM, y las soluciones analíticas. Las dos primeras conservan el momento lineal, pero fallan en la conservación de la energía, ya que son inestables para el contacto; por tanto, sus velocidades post-impacto difieren de las analíticas. La última fila de esta tabla muestra el error entre ACEM y las soluciones analíticas. De esta tabla se observa que las velocidades post-impacto difieren ligeramente para la hipótesis i) y son exactas para ii).

Si se produce más de un contacto en el mismo instante, como sucede en i), los resultados para ACEM serán diferentes para cada elección de los valores de K_N y ξ_N , ya que el método del penalty no satisface exactamente la condición de impenetrabilidad. Todas estos resultados se caracterizan por poseer el mismo momento lineal y energía total.

CAPÍTULO 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS SIN FRICCIÓN

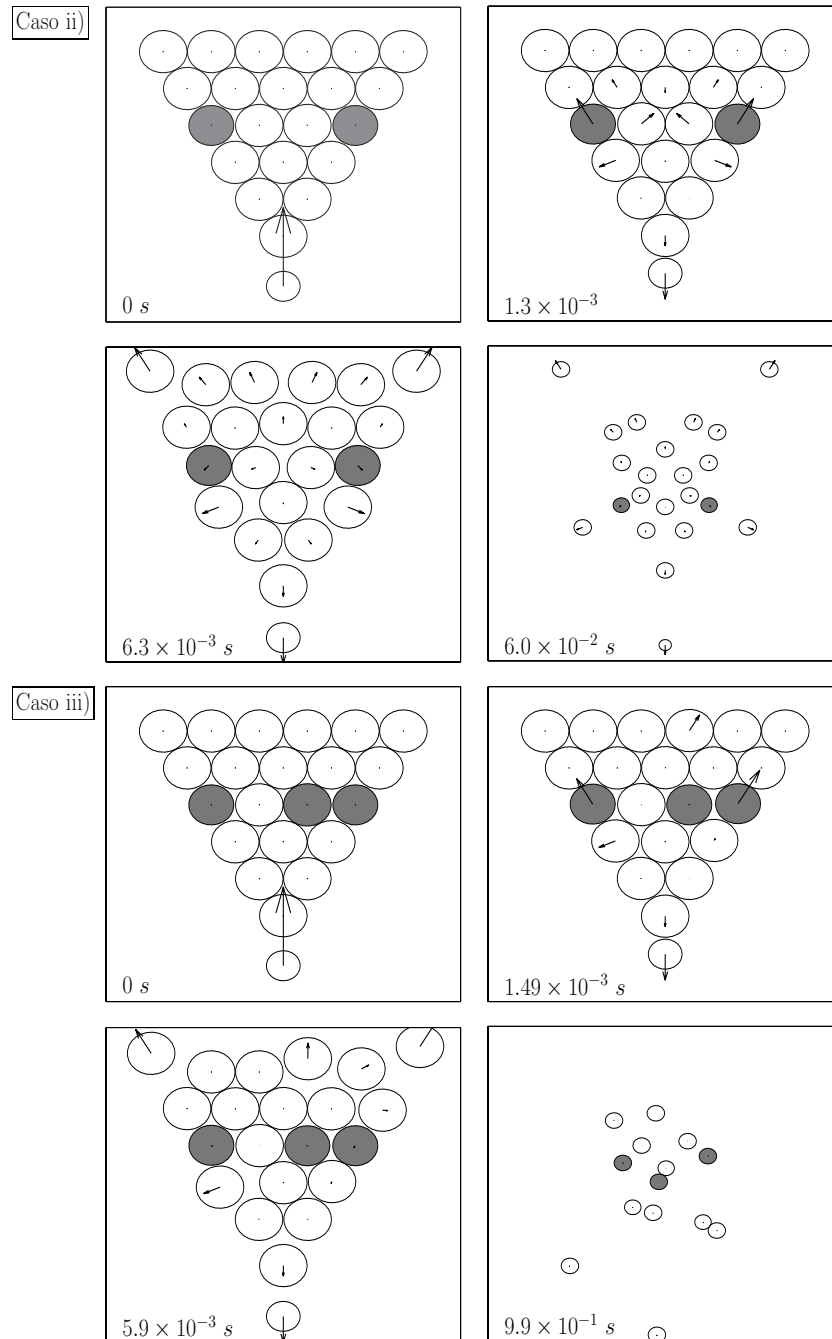


Figura 6.4: Dispersión sin fricción, caso ii), simétrico y dos discos con imperfecciones y caso iii) asimétrico y con tres discos con imperfecciones. Las imperfecciones en los discos favorecen la transmisión del momento lineal en el interior del triángulo.

6.4. EL PÉNDULO DE NEWTON

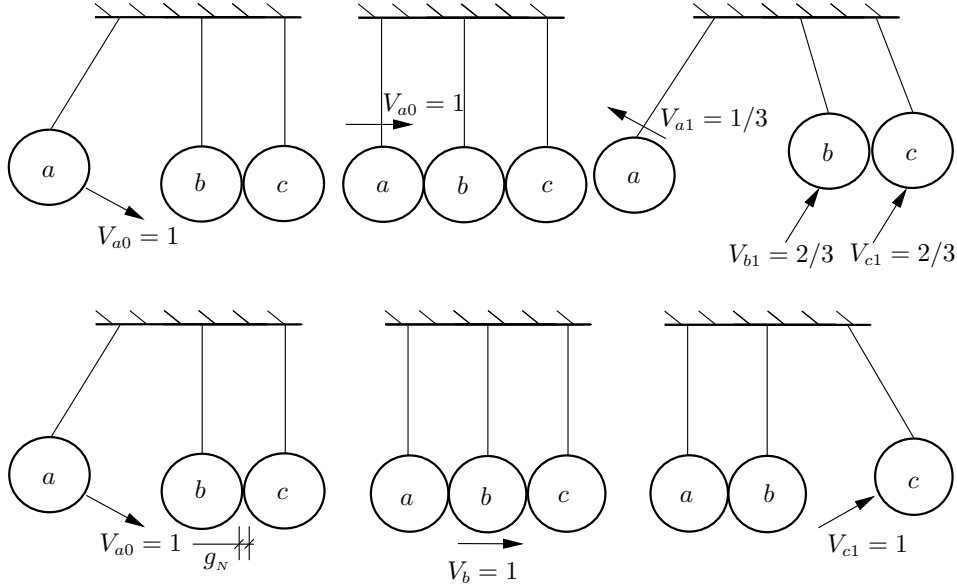


Figura 6.5: Problema del péndulo de Newton. Hipótesis i) (arriba) con discos b y c en contacto, o lo que es equivalente a una única masa. Hipótesis ii) (abajo), pequeña separación entre los discos b y c

La formulación analítica se basa en la condición de impenetrabilidad, por tanto, los resultados de ACEM tienden a los analíticos cuando $K_N, \xi_N \rightarrow \infty$. Para la hipótesis ii), cada contacto se produce en instantes distintos; por tanto el error es cero, ya que para esta hipótesis la solución conservativa dada por ACEM es única.

Las figuras 6.6 muestran el error de las velocidades post-impacto en función del paso de tiempo Δt (sup.) y ξ_N (inf.) para la hipótesis i). Cada línea representa el error para un valor distinto de K_N . Las figuras de la izquierda muestran los errores para la esfera a , mientras que las de la derecha los muestran para b y c . Como se espera, el error converge a cero a medida que $K_N, \xi_N \rightarrow \infty$ y $\Delta t \rightarrow 0$.

De la tabla 6.3 se puede observar que para la hipótesis i), el error de ACEM con respecto a la solución analítica es muy pequeño para la esfera a , pero no es despreciable para b y c . Esta razón se puede explicar por el trabajo de [Lov97], que probó que si dos cuerpos contactan en el inicio de un paso de tiempo n , el error en el ratio de convergencia es cuadrático y lineal para cualquier otro caso; obviamente, a impacta a b exactamente en el instante n , y el algoritmo muestra convergencia cuadrática (figuras 6.6 izqda.).

Aunque este problema se ha simulado empleando cuerpos rígidos, el resorte de penalty propaga una onda de impacto de a a b y de b a c . Esta onda retrasa el segundo impacto b - c un tiempo α , $\alpha < \Delta t$, sucediendo en el instante $n + \alpha$. Este hecho da lugar a que la convergencia del error sea lineal

CAPÍTULO 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS SIN FRICCIÓN

Algs.	Hipótesis i)					Hipótesis ii)				
	V_{a1}	V_{b1}	V_{c1}	\mathbf{p}^{tot}	\mathbb{E}	V_{a1}	V_{b1}	V_{c1}	\mathbf{p}^{tot}	\mathbb{E}
Trap.	-0.82	0.33	1.49	1.0	1.5	-0.33	0.08	1.24	1.0	0.83
Max.D.	-1.07	0.44	1.13	1.0	0.9	-0.31	-0.04	1.36	1.0	0.97
ACEM	-0.32	0.67	0.65	1.0	1.0	0.00	0.00	1.00	1.0	1.00
Anal.	-0.33	0.66	0.66	1.0	1.0	0.00	0.00	1.00	1.0	1.00
%	0.01	1.14	1.15	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00	0.0	0.00

Tabla 6.3: Problema del péndulo de Newton. Velocidades post-impacto, momento lineal y energía. El momento lineal total se conserva para todos los algoritmo, las velocidades y la energía difieren de los valores analíticos debido a la inestabilidad de Newmark- β para el contacto. Con ACEM, hay un pequeño error para la hip. i) y la solución es exacta para ii)

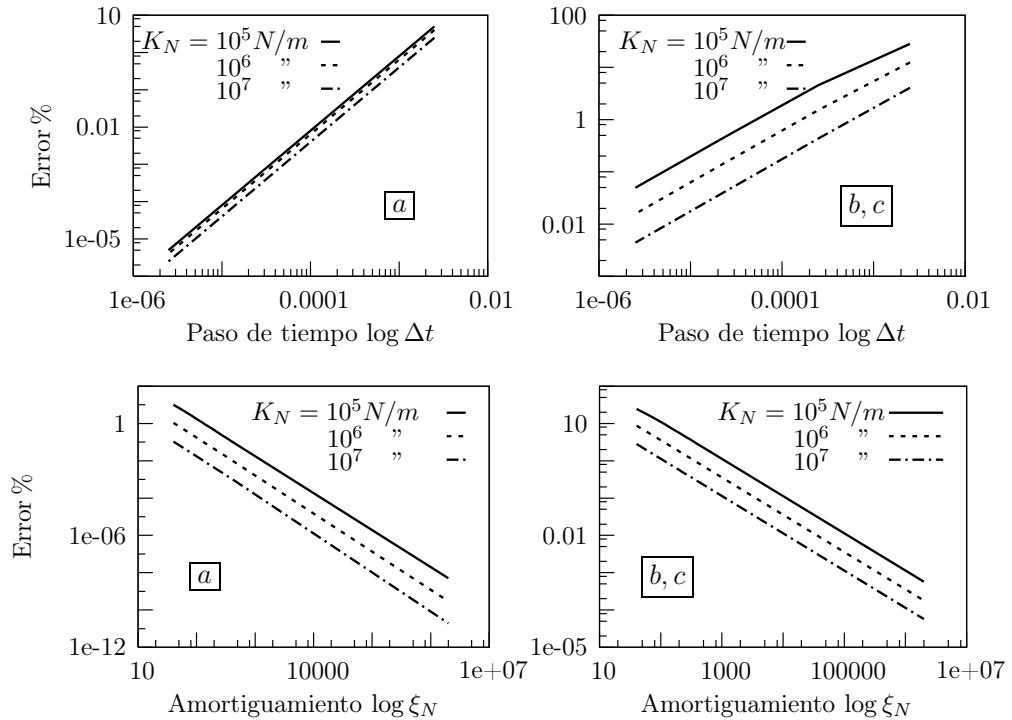


Figura 6.6: Problema del péndulo de Newton. Análisis del error en las velocidades post-impacto en función del paso de tiempo Δt y amortiguamiento ξ_N . La convergencia es cuadrática para la esfera a y lineal para b y c

para el contacto entre b y c (figuras 6.6 drcha.).

6.5 Llenado del cangilón

En este ejemplo se simula el llenado bajo la acción de la gravedad de un cangilón cuadrado de un metro de lado, con una abertura de 30° usando 665 discos de masa unidad y radio $4 \times 10^{-3} m$.

Los discos están inicialmente dispuestos en una matriz rectangular a modo de trebolillo, separados por muy poca distancia entre sí, y el cangilón se modela como una serie de fronteras rígidas. La figura 6.7 muestra la evolución ACEM en cuatro instantes diferentes con parámetros: $K_N = 10^6 N/m$, $\xi_N = 200$ y $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3} s$.

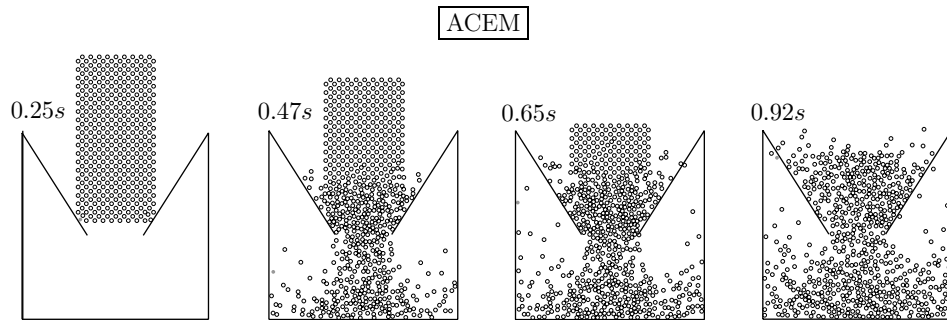


Figura 6.7: Llenado del cangilón con ACEM. Debido a la conservación de la energía los discos nunca se asientan y algunos de ellos escapan del cangilón

Comentario 6.5.1. *En este ejemplo se realiza un estudio comparativo de los resultados de la aplicación de ACEM frente a los algoritmos más populares de la familia de Newmark- β para problemas con múltiples contactos. Además se justifica la inestabilidad que presenta Newmark- β para el contacto.*

Durante los primeros instantes de la simulación, los discos localizados en los laterales y la parte baja de la matriz rebotan contra las caras rígidas inclinadas del cangilón. Por tanto, los contactos se propagan a través del resto de los discos, cambiando sus trayectorias y velocidades. ACEM conserva la energía total de los cuerpos, por lo que los discos se mueven continuamente en el interior del cangilón y algunos de ellos escapan de él. Aunque ésta sea una simulación numérica cuyos resultados no concuerden con los de la realidad experimental, resulta muy útil para probar las propiedades conservativas de ACEM ante la presencia de múltiples contactos. No se ha dibujado ningún gráfico sobre la evolución de la energía, ya que ésta siempre se conserva.

El mismo problema ha sido simulado empleando Newmark- β con Trap. y Max.D. para Δt pequeños, medianos y grandes. Las figuras 6.8 y 6.9 mues-

CAPÍTULO 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS SIN FRICCIÓN

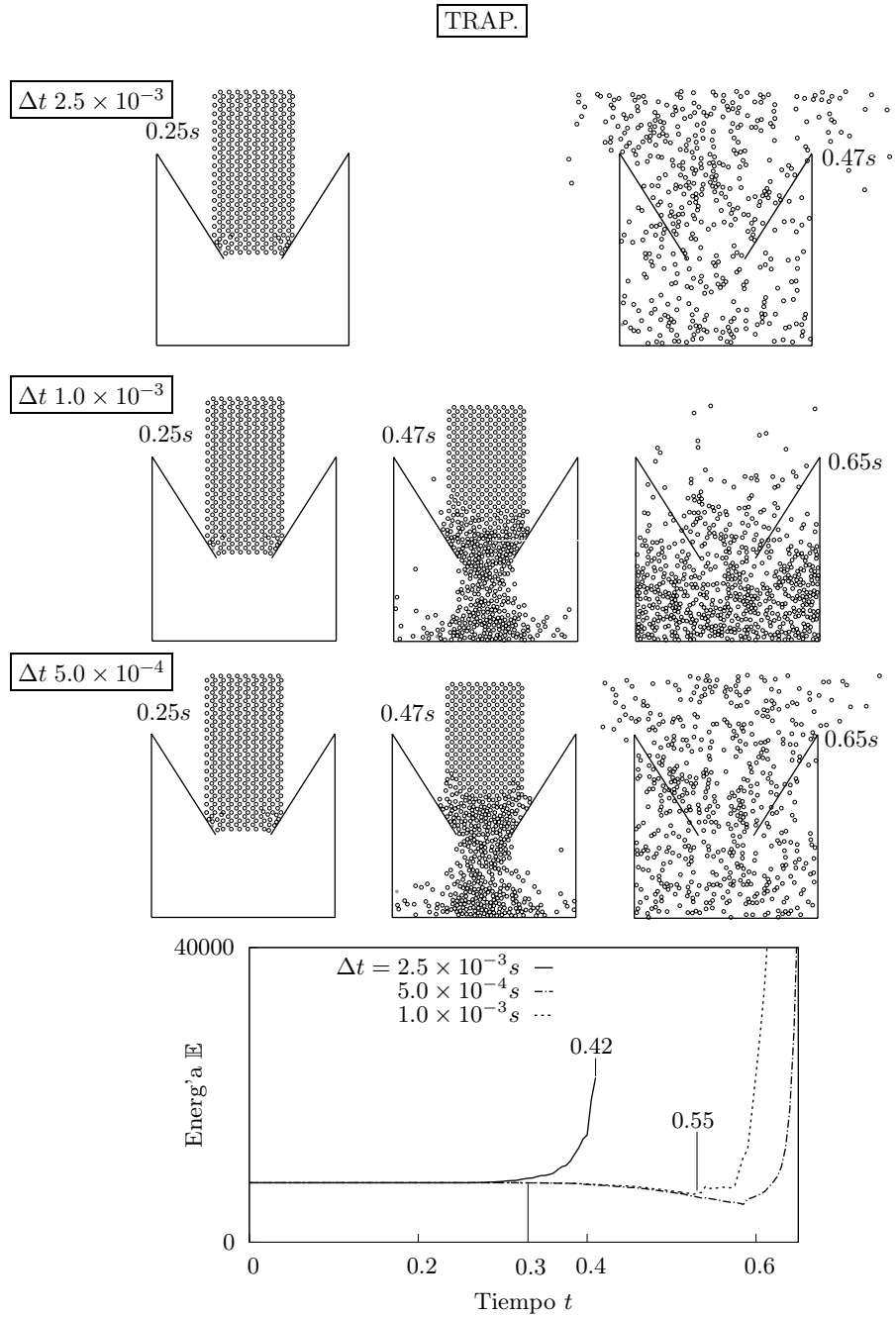


Figura 6.8: Llenado del cangilón para tres Δt distintos con Trap. Hay un crecimiento de energía sin límite debido a que la regla de Trapecio es inestable ante la presencia del contacto con cualquier paso de tiempo

6.5. LLENADO DEL CANGILÓN

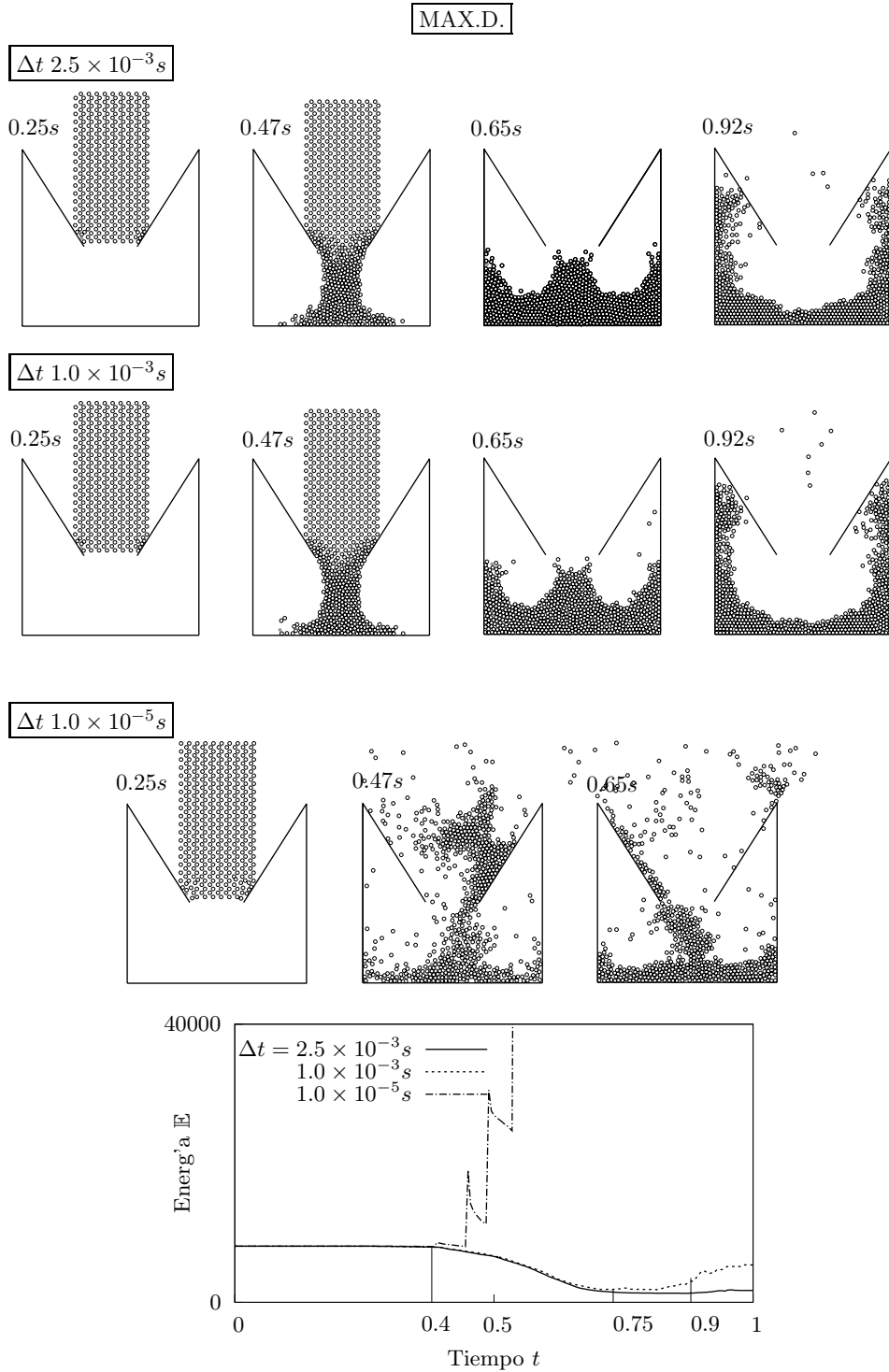


Figura 6.9: Llenado del cangilón para tres Δt distintos con Max. D. Aunque este método también sea inestable para el contacto, los resultados (arriba y mitad) tienen sentido físico para grandes Δt debido a la alta disipación numérica del método. Mientras para pequeños, la energía crece sin límite (abajo)

CAPÍTULO 6. SIMULACIONES NUMÉRICAS SIN FRICCIÓN

tran el llenado, donde está claro que Trap. es inestable para cualquier Δt , mientras que Max.D. sólo lo es para los pequeños.

La inestabilidad implica que el movimiento de los discos crece sin límite debido a un incremento de energía no físico, lo que causa que muchos de ellos salgan despedidos del cangilón. La referencia [LC97] obtuvo una norma energética para Newmark- β que decrece cuando dos cuerpos penetran y crece cuando se separan. Debido a que el penalty es un método aproximado que elimina la restricción de contacto (suprime el resorte elástico) cuando el gap es positivo, $g_N > 0$, la fuerza de contacto añade energía a los cuerpos. Por otro lado, es posible que esta energía adicional se disipe por el amortiguamiento numérico ξ , dependiendo del tipo de algoritmo y del paso de tiempo.

La figura 7.14, obtenida de [Hug87], muestra la relación entre la frecuencia adimensional $\vartheta_N = \varpi_N \Delta t$ y el amortiguamiento numérico ξ para ambos métodos. Trap. no introduce amortiguamiento aunque el paso de tiempo sea grande; consecuentemente, los cuerpos ganan energía cuando se separan. Por el contrario, el método Max.D. posee el amortiguamiento más elevado de la familia Newmark- β y dicho amortiguamiento aumenta con Δt . Por tanto, si se usan pasos de tiempo grandes, el amortiguamiento puede disipar toda la ganancia de energía, situación que no es posible usando pasos de tiempo pequeños.

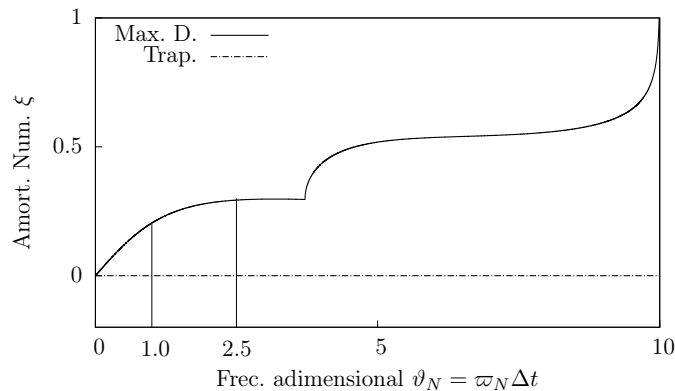


Figura 6.10: Llenado del cangilón. Frecuencia adimensional $\omega \Delta t$ vs. amortiguamiento numérico. Nulo para Trap. y aumenta con Δt para Max.D.

El gráfico inferior de la figuras 6.8 muestra la evolución de la energía para Trap.; cuanto más grande sea el paso de tiempo, antes aparece el incremento de energía (inestabilidad), dando lugar a que el programa se pare debido al desbordamiento de memoria. Este comportamiento es debido al hecho que para grandes pasos de tiempo, el contacto se abre con un gap g_N grande, y por tanto la ganancia de energía será también elevada. Este incremento de energía

6.5. LLENADO DEL CANGILÓN

se puede ver gráficamente en la secuencia superior de las figuras 6.8, donde para 0.47 s la simulación ya es inestable y los discos se dispersan de manera no realista. A medida que Δt disminuye (segunda y tercera secuencias), el gap g_N cuando se separan los cuerpos es bastante cercano a cero, y por tanto la ganancia de energía es pequeña. Aún así para 0.65 s los resultados son inestables y para un tiempo mediano 0.47 s, la simulación es aún estable.

Este comportamiento también se puede observar en el gráfico de energías, figuras 6.8 (inf.). Para valores de Δt grandes, en el instante de 0.42 s se aprecia una clara inestabilidad, para valores de Δt medianos y pequeños es estable, pero en el instante 0.6 s cualquier Δt produce resultados inestables. En el mismo gráfico, se aprecia que para Δt pequeños y medianos, la energía de los cuerpos decrece en $t \approx 0.3$ s, ya que en este instante la mayoría de los cuerpos se están penetrando. En cambio, en $t \approx 0.55$ s estos discos empiezan a separarse y por tanto, las fuerzas de contacto introducen grandes cantidades de energía.

Las tres secuencias de las figuras 6.9, muestran los resultados de la simulación usando Max.D. Dichos resultados difieren notablemente con respecto a los de Trap. aunque se hayan empleado los mismos Δt . Para Δt grandes y medianos, incluso si los g_N después de la separación son grandes, la ganancia de energía se disipa por el elevado amortiguamiento numérico del método, tal y como se muestra en la primera y segunda. En la imagen final de cada secuencia, se observa que los discos se comportan como un fluido viscoso debido al elevado amortiguamiento numérico del método. En esta situación los discos que se encuentran en la parte superior y que tienen poco amortiguamiento numérico (debido al bajo número de contactos) presionan sobre aquellos situados en la parte más baja cuyo movimiento está amortiguado tras muchos contactos.

Para Max.D., los valores del coeficiente de amortiguamiento numérico ξ proporcionados en la figura 7.14 cuando $\varpi_N \Delta t = 1.0$ y $\varpi_N \Delta t = 2.5$ (pasos de tiempo medianos y grandes) son $\xi = 0.2$ y $\xi = 0.3$, respectivamente (valores elevados). Pero empleando pequeños $\varpi_N \Delta t = 0.01 \rightarrow \xi \approx 0$, aparece un súbito incremento de energía debido a contacto (inestabilidad), que el amortiguamiento numérico es incapaz de disipar y causa que la mayoría de los discos sean repelidos del cangilón (secuencia tercera). El gráfico de inferior de las figuras 6.9 muestra claramente esta situación, en el que para pequeños Δt y tiempos totales $t > 0.4$ s el comportamiento de la simulación es inestable. Para Δt medianos y grandes la energía alcanza un mínimo en la situación en la mayoría de los cuerpos están penetrando $t \approx 0.75$ s. En $t \approx 0.9$ s, debido al alto amortiguamiento numérico, los discos no se separan para Δt grandes, mientras que para medianos se separan ligeramente experimentando un leve incremento de energía.

7

Simulaciones numéricas con fricción

7.1 Introducción

En este capítulo se estudia el funcionamiento de ADfr mediante cuatro ejemplos representativos empleando cuerpos rígidos circulares y elípticos. Los dos primeros ejemplos, el problema del juego de bolos y el problema de carom con partícula elíptica, consisten en el análisis de la cinemática de una partícula aislada. Dichos ejemplos, aunque sencillos, se consideran útiles para validar los resultados numéricos con la formulación analítica de [Str94] y [WM92] resumida en el Apéndice A.

En el tercer ejemplo se simula la rodadura y el impacto de dos discos idénticos dispuestos simétricamente sobre una superficie semicircular rugosa. Los discos se mueven de forma periódica bajo la acción de la gravedad, impactando en mitad de la superficie y retrocediendo a una posición más baja debido a la pérdida de energía. El objetivo de esta simulación es el estudio del papel de la fricción disco-superficie y disco-disco en la atenuación del movimiento.

Finalmente, en el cuarto ejemplo se simula el colapso de una columna granular bidimensional bajo la acción de la gravedad. Este proceso se caracteriza por el elevado número de contactos friccionales. Para validar los resultados de la simulación, el perfil tendido tras el colapso se comparará con los experimentales.

7.2 Problema del juego de bolos

En esta simulación se analiza la cinemática, disipación de energía y el instante t_{rod} de transición de deslizamiento (contacto slip) a rodadura (contacto stick) de un disco apoyado sobre una superficie plana con fricción sometido a una velocidad inicial V_{O_i} . El ángulo de fricción ϕ se varía para estudiar cómo ADfr disipa energía y predice el instante t_{rod} , mientras que los parámetros fijos son: $K_N = K_T = 10^6$ N/m, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ s, $\rho_s = 2500$ kg/m³, $\xi_N = \xi_T = 200$ y gravedad $g = -9.81$ m/s. El radio de la bola es $R = 3 \times 10^{-3}$ m y la velocidad inicial prescrita en el centro de gravedad $V_{O_i} = 4$ m/s.

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

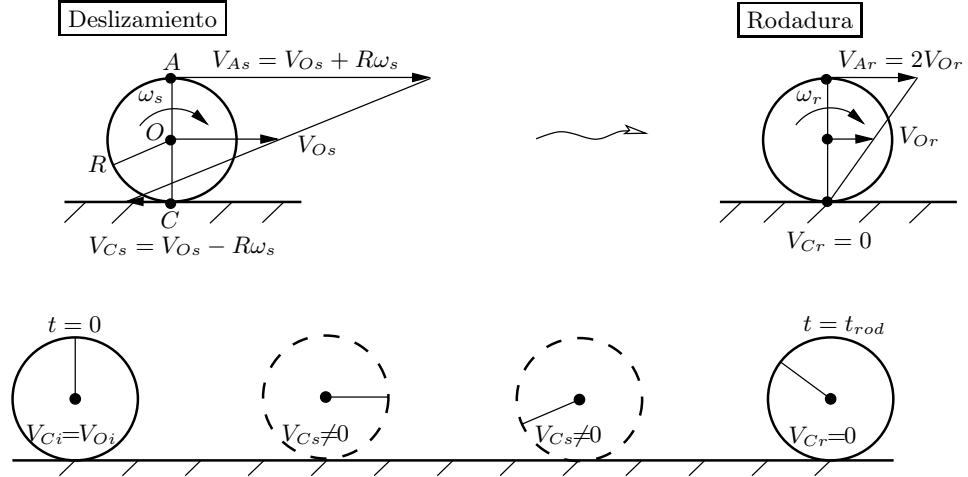


Figura 7.1: Problema del juego de bolos. Perfil de velocidades para ambos casos de contacto e instante de transición t_{rod}

En la figura 7.1 (sup.) se define el caso slip o deslizante, como el movimiento para el cual la velocidad relativa horizontal (con respecto a la superficie) del punto de contacto V_{C_s} en cualquier instante no es nula. La distribución de velocidades del disco es lineal entre el punto de contacto C , el centro O y el punto más alto A . El caso stick se alcanza en el instante t_{rod} cuando V_{C_r} es cero.

La figura 7.1 (inf.) muestra la posición inicial, dos posiciones intermedias y el instante donde se inicia la rodadura. Inicialmente, todos los puntos del disco se mueven con la misma velocidad V_{O_i} , por tanto $V_A = V_O = V_C = V_{O_i}$. Después del inicio del movimiento, la fuerza de fricción causa un momento, una velocidad de rotación ω_r y consecuentemente, las velocidades de los tres puntos son distintas; en la posición intermedia (deslizamiento) se puede observar una cierta traslación y rotación, $V_{C_s} \neq 0$. Finalmente se alcanza el caso stick (rodadura) en el instante t_{rod} , cumpliéndose $V_{C_r} = 0$ y $\omega = \omega_r$.

Las figuras 7.2 (sup.) muestran las velocidades V, ω y la energía \mathbb{E} en función del tiempo t . Para el caso slip, la fuerza de fricción decrece V_O , aumenta linealmente ω (izqda.) y disipa energía (drcha.). En el instante $t = t_{rod}$ se alcanza el caso stick, en esta situación las velocidades y la energía permanecen constantes e independientes de ϕ ; lo que implica que la cantidad de energía disipada para alcanzar $V_{C_r} = 0$ es constante. Por otro lado, ϕ influye en la potencia disipada $\Delta E/t_{rod}$ y en t_{rod} (figuras 7.2 inf.); un incremento de ϕ aumenta la energía disipada por unidad de tiempo $\Delta E/t_{rod}$ y como la energía disipada es constante, decrece el valor de t_{rod} .

Los resultados numéricos obtenidos coinciden con los de la formulación analítica del Apéndice A, figura 7.2 (inf.). Nótese en la figura 7.2 (sup. dr-

7.2. PROBLEMA DEL JUEGO DE BOLOS

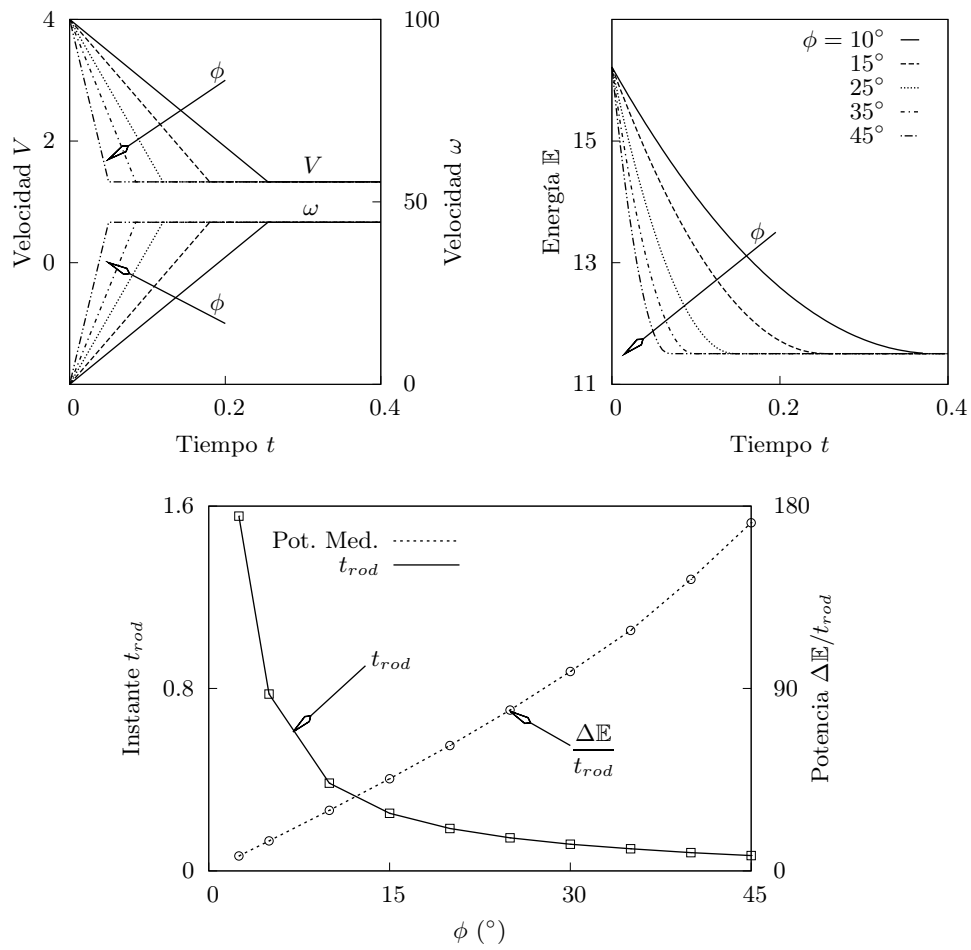


Figura 7.2: Problema del juego de bolos. Evolución de las velocidades y energía vs. fricción ϕ (sup.). Instante de transición deslizamiento-rodadura y potencia media disipada (inf.).

cha.), que para el caso stick la energía alcanza un mínimo estable. Por tanto, el punto de contacto C también alcanza una situación estable y no desliza de nuevo.

7.3 Problema de carom con partícula elíptica

En este apartado se simula la trayectoria de una elipse rígida como consecuencia de los sucesivos impactos en el interior de un cuadrado de lado unidad. La elipse, de ejes $15/6 \times 10^{-2} m$, se posiciona inicialmente en $(0.45, 0.1) m$, con una inclinación $\alpha = 50^\circ$ como se muestra en la figura 7.3 (sup.). Se somete a una velocidad inicial $V_x = 1$, $V_y = -0.4 m/s$, sin rotación, en una dirección definida por el ángulo $\theta = -22^\circ$ y con un ángulo de fricción $\phi = 15^\circ$. El resto de los parámetros numéricos son los mismos que en las simulaciones previas. Para visualizar la rotación de la elipse, su orientación queda definida por una flecha que abarca el mayor de sus semiejes. Debido a la compleja geometría de la elipse, se ha implementado el algoritmo de detección de contactos de [WLW08].

Las figuras 7.3 muestran la evolución de la trayectoria de la simulación (sup.), velocidades lineales (inf. izqda.), velocidad de rotación y energía (inf. drcha.) para ADfr y la comparación con la solución analítica del apéndice A. Primero, la elipse impacta contra la parte más baja de la caja y por tanto rota, ya que la línea de acción de la fuerza resultante del contacto no pasa por el centro de gravedad, figuras 7.3 (sup. e inf. drcha.). En esta situación, se muestra que la relación entre las velocidades iniciales V_x , V_y verifica la condición dada en el apéndice que fuerza a que el punto de contacto deslice a lo largo de la cara horizontal disipando energía. Los sucesivos impactos disminuyen la velocidad tangencial (velocidad respecto a la cara), figura 7.3 (inf. izqda). Consecuentemente, si la relación velocidad normal–tangencial alcanza la condición θ^* dada en el apéndice, el impacto no será disipativo y el punto de contacto no desliza.

Es importante tener en cuenta que un impacto puede ser conservativo para un contacto y disipativo para otros. Este hecho se debe a que la relación de velocidades cambian para cada impacto, como se puede apreciar en la figura 7.3 (inf. drcha.), donde en los instantes $t = 1.8$ y $t = 3.2 s$ se conserva la energía, mientras que pata $t < 0.4$ y en los instantes $t = 3.5$ y $t = 3.7 s$ se disipa. Los resultados numéricos y analíticos coinciden, ya que tanto ADfr como la formulación analítica se han desarrollado forzando la conservación de energía para el contacto normal y la conservación–disipación consistente para el tangencial.

Para evaluar el funcionamiento de ADfr con respecto a la disipación de energía, las velocidades post–impacto y la comparación con la formulación analítica, se ha analizado paramétricamente el primer impacto de este problema en función del ángulo incidente θ y el de fricción ϕ (figuras 7.4). Para

7.3. PROBLEMA DE CAROM CON PARTÍCULA ELÍPTICA

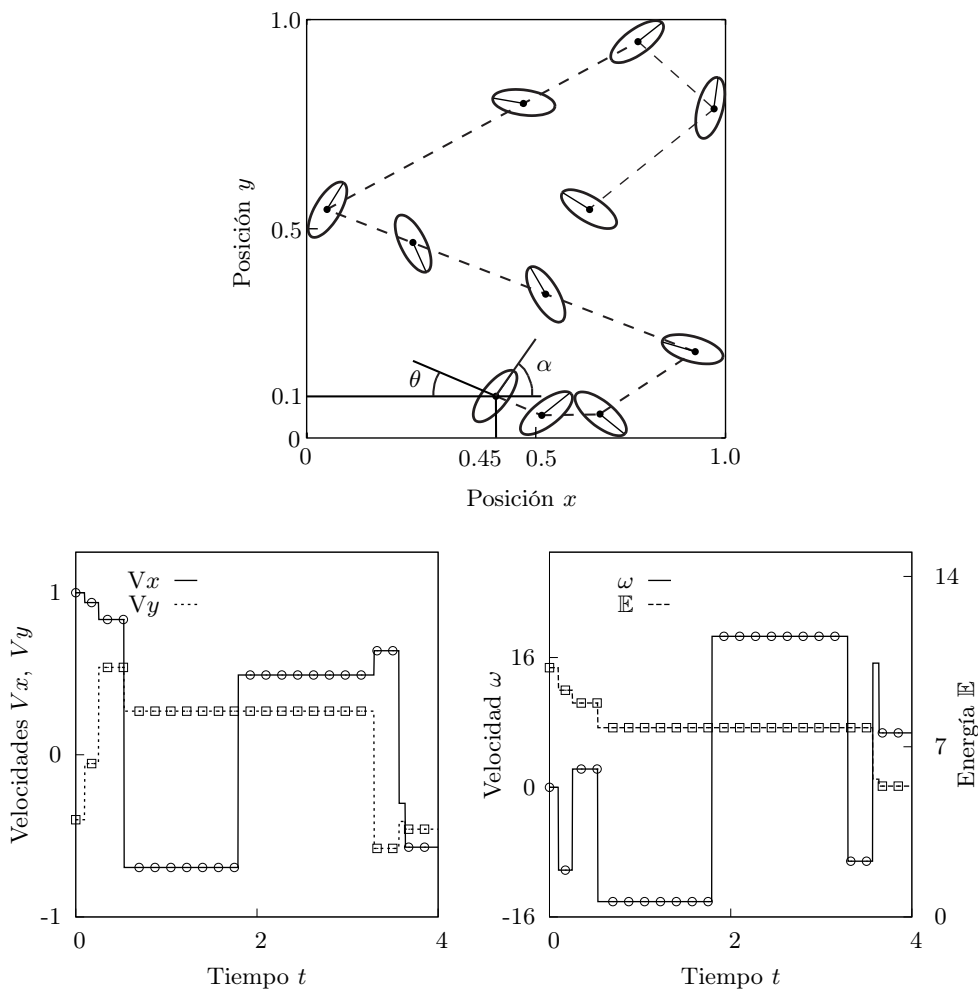


Figura 7.3: Problema de Carom con partícula elíptica: trayectoria (sup.), velocidad (inf. izqda.) y energía total (inf. drcha.). En los tres gráficos, los resultados analíticos y numéricos coinciden con bastante exactitud

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

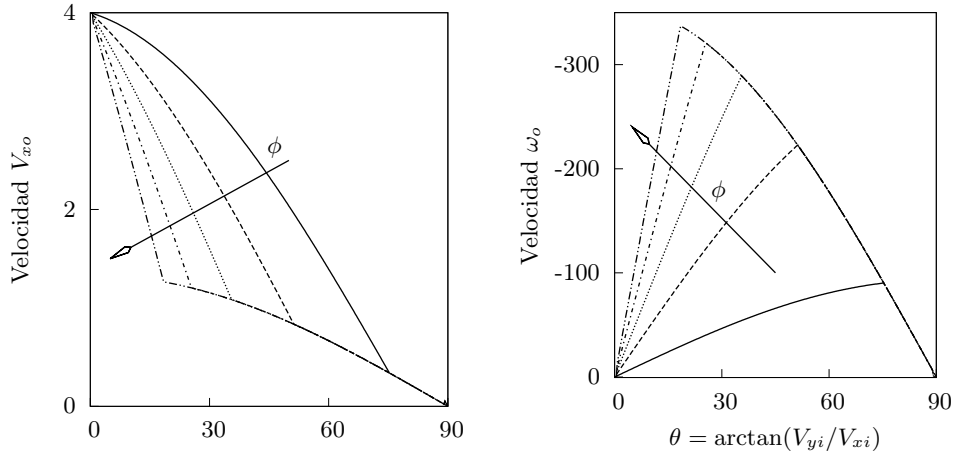


Figura 7.4: Problema de Carom con partícula elíptica: velocidad horizontal de salida V_{xo} , vertical V_{yo} (sup. izqda. y drcha.), velocidad de rotación ω_o y energía disipada (inf. izqda. y drcha.) en función del ángulo de incidencia θ y de fricción ϕ

cada ϕ , se repite la simulación para valores de θ variando de 0° a 90° . Se prescribe la velocidad inicial $V_x = 4 \cos \theta$, $V_y = -4 \sin \theta$ m/s de este modo, la energía antes de impacto será siempre la misma independientemente de θ y ϕ . El resto de parámetros son los mismos que los de la anterior simulación.

Las figuras 7.4 (sup. e inf. izqda.), muestran la influencia de ϕ y θ en las velocidades post-impacto tangencial V_{xo} , normal V_{yo} y angular ω_o . La primera se reduce con ϕ y aumenta proporcionalmente con V_{yi} . La segunda, V_{yo} es normal a la fuerza de fricción, por tanto no se ve afectada. La velocidad angular ω_o , (figura 7.4 inf. izqda.), aumenta con ϕ debido al momento inducido por la fuerza de fricción.

Para cada una de las curvas de las figuras, se pueden apreciar dos zonas en función del ángulo incidente $\theta = \tan^{-1}(V_{yi}/V_{xi})$: i) caso slip, ii) caso stick. Para el caso i), la combinación de las fuerzas impulsivas creadas por V_{xi} y V_{yi} es mayor que la fuerza de fricción y por tanto, el disco desliza. En esta situación cada curva depende de ϕ , ya que la fuerza de fricción es función de este ángulo. A medida que θ crece, la fuerza impulsiva creada por V_{xi} y V_{yi} decrece y se llega al caso ii). En esta situación, la fuerza impulsiva tangencial creada por las velocidades incidentes es menor que la fuerza $\mu \mathbf{f}_{cN}$, por lo que la partícula no desliza $\Phi < 0$ (caso stick); todas las curvas convergen a una única porque la fuerza de fricción es igual a la fuerza tangencial y no es una función de ϕ . Para cada ϕ hay un valor de θ^* que limita estas dos zonas (ver el apéndice).

La figura 7.4 (inf. drcha.) muestra la pérdida de energía ΔE en función de ϕ y θ . Para valores de θ bajos ΔE es relativamente pequeña, el deslizamiento

7.4. EL PROBLEMA DEL PÉNDULO CÓNCAVO

debido a V_{xi} es elevado pero la fuerza impulsiva normal generada es muy baja al serlo V_{yi} . Para valores de θ cercanos al caso stick, la pérdida también es baja, en este caso el deslizamiento debido a V_{xi} es pequeño pero la fuerza impulsiva normal generada es muy elevada al serlo V_{yi} . Entre estos valores límite hay una combinación óptima θ_m que provoca que ΔE sea máximo. De esta figura y de la formulación del apéndice se desprende que este máximo aumenta con ϕ y se alcanza con un θ cada vez más bajo. La transición entre los casos slip–stick, es decir $\Delta E \equiv 0$, sucede para valores bajos de θ cuando aumenta ϕ . También en este caso, los resultados numéricos coinciden con los de la formulación analítica.

7.4 El problema del péndulo cóncavo

En este apartado se estudia la atenuación del movimiento de dos discos rígidos dispuestos de manera simétrica sobre una superficie semicircular rugosa bajo la acción de la gravedad, figura 7.5. En este problema, hay dos fuentes de disipación de energía: fricción entre disco–superficie, e impacto friccional entre discos. El movimiento se caracteriza por ser periódico, los discos avanzan y retroceden alternativamente siempre a una posición más baja que la anterior hasta que finalmente se para. El radio de los discos y de la superficie es 0.1 m y 0.5 m respectivamente, el ángulo de fricción es $\phi = 15^\circ$, la posición inicial se define a través del ángulo $\gamma_{t0} = 45^\circ$ y la velocidad inicial es nula.

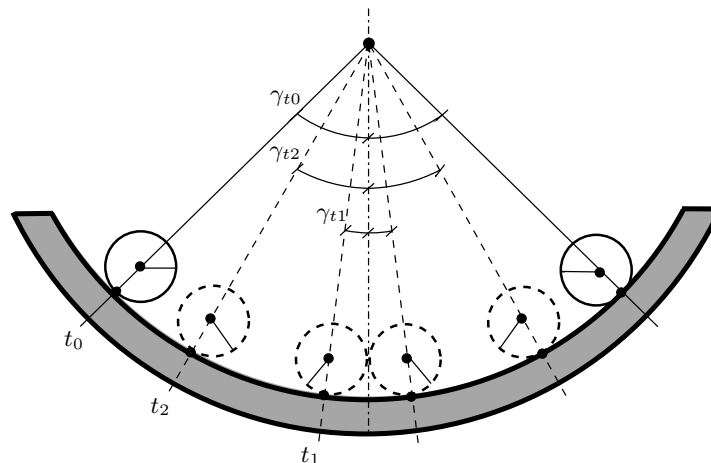


Figura 7.5: Problema del péndulo cóncavo. Posición inicial, impacto y altura máxima después de impacto definidas por γ_{t0} , γ_{t1} y γ_{t2}

Las figuras. 7.6 (izqda. y dcha.), muestran los resultados del centro de gravedad para uno de los discos, ya que el problema es simétrico. La figura

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

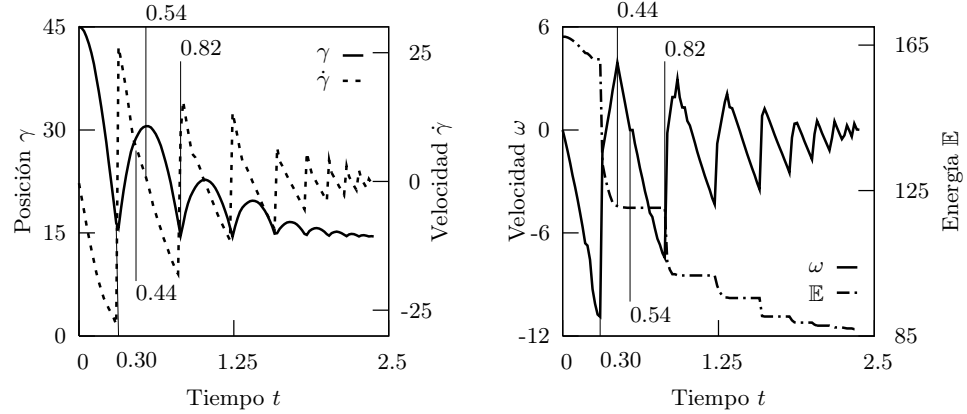


Figura 7.6: Problema del péndulo cóncavo. Posición del centro de gravedad γ , velocidad $\dot{\gamma}$, velocidad de rotación ω y energía \mathbb{E} .

de la izquierda muestra la posición polar γ y la velocidad $\dot{\gamma}$, mientras que la de la derecha, muestra la energía total \mathbb{E} y la velocidad de rotación ω .

Imponiendo las anteriores condiciones iniciales, ambos discos deslizan desde el principio de la simulación (disipan energía) y finalmente impactan en la posición más baja en el instante $t \approx 0.3$ s. Antes de este primer impacto, ω y $\dot{\gamma}$ aumentan (en módulo), mientras que \mathbb{E} disminuye. Y en el primer impacto, $\dot{\gamma}$ y ω experimentan un súbito incremento, invierten sus valores y la energía \mathbb{E} disminuye repentinamente.

Como era esperado, la velocidad angular ω alcanza un máximo en $t_{rod} \approx 0.4$ s, instante en el que la velocidad del punto de contacto es nula, $V_C = 0$. A partir de ese instante los discos comienzan a rodar y no disipan energía por fricción. Durante la rodadura ω y $\dot{\gamma}$ son nulos en $t \approx 0.54$ s, instante en el que los discos alcanzan la máxima altura de la oscilación γ . Inmediatamente después, los discos continúan rodando hacia abajo aumentando ω y $\dot{\gamma}$ hasta producirse un nuevo impacto en el instante $t \approx 0.82$ s.

La secuencia anteriormente descrita se repite de manera cíclica con un movimiento progresivamente atenuado hasta que se para en $t \approx 2.4$ s, situación en que la amplitud de las oscilaciones es despreciable.

7.5 El colapso de una columna granular bidimensional

En este apartado se simula el colapso de varias columnas granulares bajo la acción de la gravedad. Estas columnas están compuestas por granos de azúcar de forma relativamente esférica y están confinadas por sus bordes laterales, por lo que el movimiento puede considerarse bidimensional. El objetivo

7.5. EL COLAPSO DE UNA COLUMNA GRANULAR BIDIMENSIONAL

de la simulación es la comparación entre los perfiles finales (post-colapso) numéricos de ADfr y experimentales de [LHSF05], así como la monitorización numérica de la disipación de energía.

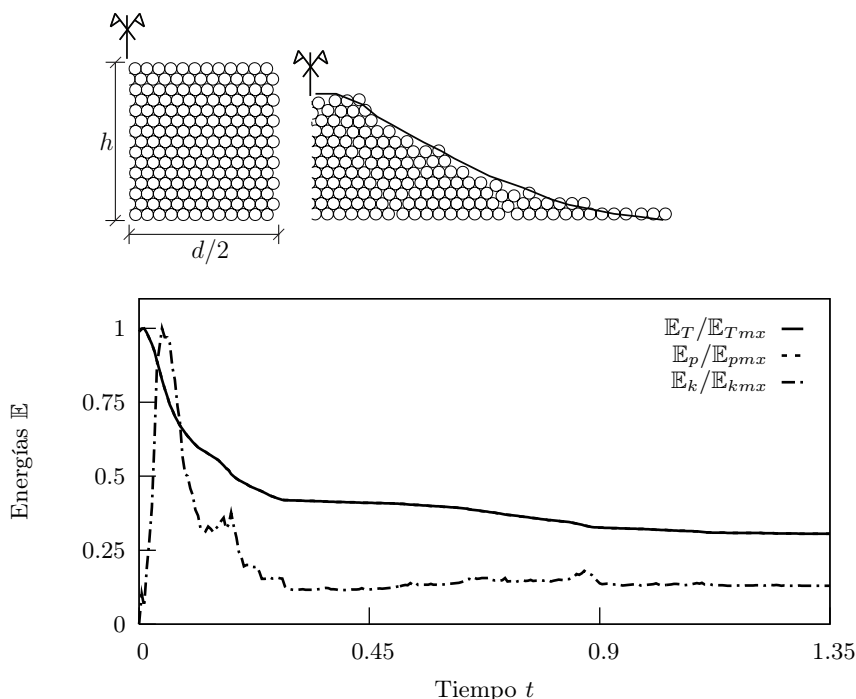


Figura 7.7: Colapso de la columna bidimensional. Perfiles inicial y final (sup.) para $h/d = 0.5$. Evolución adimensional de la energía total $\mathbb{E}_T/\mathbb{E}_{Tmx}$, energía potencial $\mathbb{E}_p/\mathbb{E}_{pmx}$ y energía cinética $\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{kmx}$ (inf.)

Se han simulado tres columnas granulares, todas ellas tienen la misma anchura $d = 2.4 \times 10^{-2} m$, pero diferente altura h y están caracterizadas por la relación $a = h/d = 0.5, 1.0, 1.5$. Debido a la simetría del problema tanto en geometría como en condiciones iniciales, sólo se presentarán los resultados correspondientes a la mitad derecha de la simulación. Los parámetros físicos y numéricos son los mismos que los de los ejemplos anteriores, a excepción de: diámetro de la partícula $10^{-3} m$, ángulo de fricción $\phi = 35^\circ$ y densidad $\rho_s = 1580 kg/m^3$ (tomada de [LHSF05]).

Las figuras 7.7, 7.8 y 7.9 (sup.) muestran el estado inicial y final de los perfiles estables de las simulaciones numéricas y de los resultados experimentales (línea sólida). Ambos perfiles muestran una buena coincidencia a excepción de una serie de discrepancias locales, probablemente causadas por la variabilidad estadística de la densidad, del diámetro real de las partículas y del ángulo de fricción. Sin embargo, las principales diferencias se deben a las condiciones iniciales; en la columna experimental la distribución de la po-

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

sición de las partículas es aleatoria, mientras que en la numérica es ordenada. Por tanto, la posición inicial de las partículas no es la misma y los resultados numéricos variarán con respecto de los experimentales. Adicionalmente, hay otros mecanismos presentes en los experimentos que no están implementados en el modelo numérico, tales como el desgaste de las partículas, la resistencia del aire y el amortiguamiento interno del material.

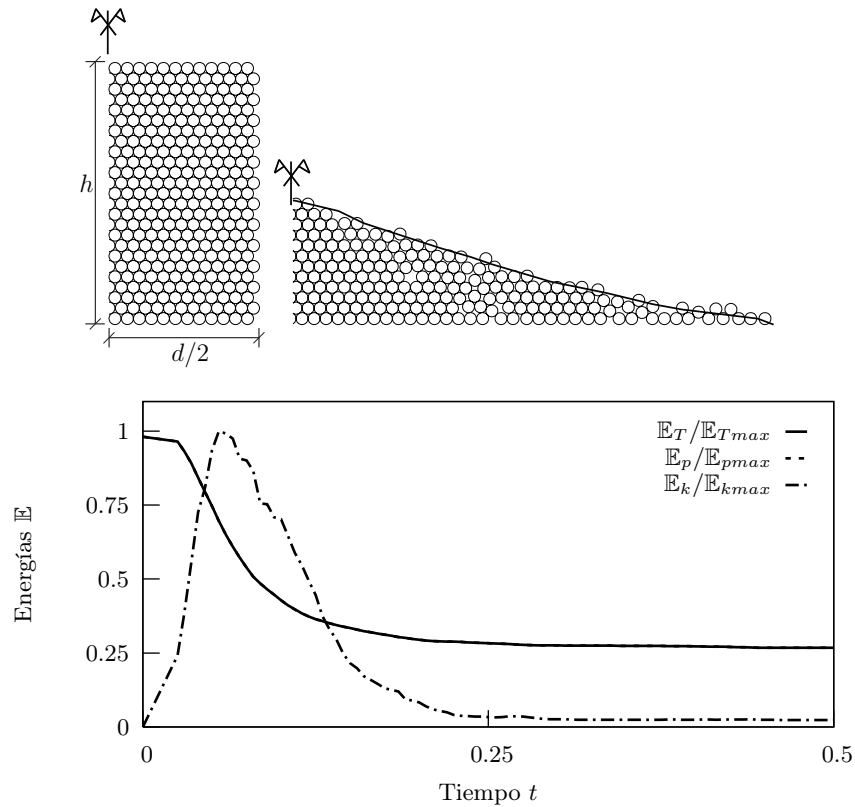


Figura 7.8: Colapso de la columna bidimensional. Configuración inicial y final (sup.) y evolución adimensional de la energía (inf.) para $h/d = 1.0$

Las figuras 7.7, 7.8 y 7.9 (inf.) muestran la evolución proporcionada por ADfr de la energía cinética, potencial y total de cada columna ($\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{kmax}$, $\mathbb{E}_p/\mathbb{E}_{pmax}$, $\mathbb{E}_T/\mathbb{E}_{Tmax}$), normalizadas con respecto al máximo de cada una.

Inicialmente, toda la energía es potencial debido a la falta de movimiento. Como era esperado, el peso de las partículas fuerza al movimiento de los granos cercanos a la superficie externa, transformando su energía potencial \mathbb{E}_p en cinética \mathbb{E}_k . En la primera columna, debido a la baja altura del espécimen, los granos cercanos al eje vertical no se mueven y por tanto no disipan energía: para cada contacto la fuerza de fricción es mayor que la fuerza de contacto tangencial debidas al peso.

7.5. EL COLAPSO DE UNA COLUMNA GRANULAR BIDIMENSIONAL

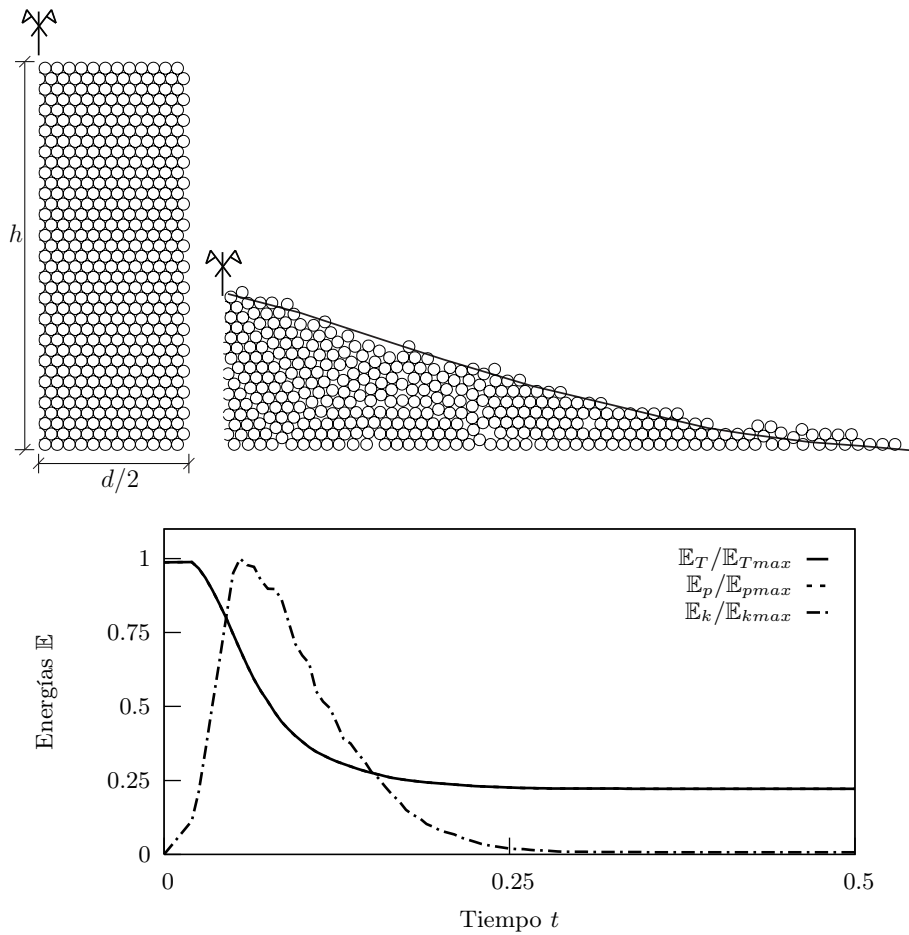


Figura 7.9: Colapso de la columna bidimensional. Configuración inicial y final (sup.) y evolución adimensional de la energía (inf.) para $h/d = 1.5$

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

El principio del colapso se caracteriza por un súbito incremento de la energía cinética normalizada $\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{kmax}$. Conforme evoluciona el tiempo, la forma de la columna cambia continuamente: muchos de los granos situados en la parte superior y media se mueven, disipando energía cinética y perdiendo energía potencial. Por tanto, el pico de la energía cinética que se observa en las tres figuras corresponde a la situación en la que la mayoría de las partículas se empiezan a mover. Después de ese instante, las energías potencial y cinética experimentan una rápida disminución y alcanzan un valor estable en menos de 0.45 s para las dos últimas columnas, mientras que para la primera es de 0.9 s. Este hecho se debe a que las fuerzas de fricción son mucho más bajas para la primera columna que para el resto, y consecuentemente el movimiento está menos restringido. Hay que recalcar que el marco de ecuaciones de conservación de ADfr fuerza la disipación consistente de energía para el caso slip (fricción) y la conservación para el stick, por lo que las fuerzas de contacto calculadas son próximas a la realidad física.

En todas las columnas, la relación de energía cinética $\mathbb{E}_k/\mathbb{E}_{kmax}$ alcanza un valor muy pequeño (no nulo) al finalizar el colapso de la columna, ya que durante la simulación se escapan varios discos que ruedan de manera indefinida. La columna adquiere un perfil estable cuando la energía total alcanza un mínimo y todos los contactos son de tipo stick. Nótese que para todos los casos, el valor de la energía cinética es mucho menor que la potencial, ya que la velocidad que alcanzan los discos durante el colapso es muy pequeña. Por tanto, las curvas de la energía potencial y total prácticamente coinciden. Los saltos de energía que se producen en la primera columna son debidos a efectos locales causados por el bajo número de partículas. Estos saltos se atenúan por efectos de homogeneización a medida que aumenta el número de partículas.

Los resultados para las dos últimas columnas, aunque sean muy similares a la anterior, muestran ligeras diferencias debido a la inestabilidad generada por la elevada relación de aspecto a . Por tanto, las fuerzas de contacto son mayores, las partículas deslizan fácilmente y disipan rápidamente energía debido a su elevado peso y altura. Estos argumentos justifican la rapidez por la que se alcanza una configuración estable frente a la primera columna. El instante en que se inicia el movimiento es muy similar para las tres, ya que en todas la configuración inicial es inestable.

Finalmente se observa una buena correspondencia entre perfiles finales numéricos y experimentales, lo que implica que la energía disipada por ADfr es similar a la de los experimentos de [LHSF05].

7.6 Ensayo de cortante cíclico

7.6.1. Introducción

En este apartado se simula el ensayo de cortante cíclico y la disipación energética de dos muestras granulares bidimensionales compuestas por 700 y 2500 discos respectivamente mediante ADfr. En esta simulación se ha tomado un enfoque micromecánico del comportamiento de los suelos granulares frente al tradicional macromecánico. Para estudiar en profundidad el comportamiento de los suelos sin cohesión mediante el enfoque micromecánico, el medio granular se ha considerado como un agregado de discos circulares. Estos discos interactúan en los puntos de contacto (ver figura 7.12), formando una red de transmisión de contactos que proporcionan el comportamiento macroscópico de la muestra. De tal modo, la cinemática de cada partícula se describe por la traslación y la rotación de cada partícula que da lugar a una distribución no uniforme.

Con respecto a la dinámica, el comportamiento local está gobernado por los siguientes principios: el contacto ha de ser siempre compresivo y la fuerza tangencial puede ser mayor o menor que la friccional de Coulomb. En el primer caso se producen deslizamientos entre partículas y disipación de energía lo que da lugar a importantes cambios. La cinemática y dinámica son los responsables del comportamiento macromecánico ya que implican importantes cambios en su estructura.

A escala global los materiales granulares se modelan generalmente como un medio continuo en el que no se tiene en cuenta su naturaleza discontinua y por tanto, los modelos constitutivos se basan en observaciones macromecánicas. De estas observaciones se desprende un comportamiento basado en modelos elastoplásticos. Probablemente muchos modelos son incapaces de modelar el comportamiento bajo cargas complejas y necesitan la introducción de varios parámetros internos como la deformación plástica, endurecimiento... donde su significado físico no está claramente definido.

En los últimos años, ha habido un interés creciente que se ha centrado en enfoques micro-macro mecánicos con el principal objetivo de deducir el comportamiento equivalente de un continuo en base de consideraciones micromecánicas. El MED es uno de los métodos mejor adaptados en este estudio, ya que es capaz de estudiar la interacción entre discos que continuamente se están interaccionando por contacto. Este método puede monitorizar de manera eficiente las tensiones internas y el comportamiento de los contactos, por lo que su ventaja radica en la gran información de tipo micromecánico que se puede sacar junto a la de tipo macro. Por tanto, en este apartado se justifican tanto los resultados macroscópicos de este experimento desde el punto de vista del comportamiento micromecánico dado por MED como la disipación energética del material granular en forma de ciclos de histéresis.

7.6.2. Preparación de la muestra

La muestra 1 obtenida de [CCL97] está compuesta por 700 cilindros de madera con diámetros 13, 18, 28 mm, todos con el mismo porcentaje, el ángulo de fricción es de 28° y cohesión nula, mientras que la muestra 2 obtenida de [LQB06] está compuesta por 2500 partículas correspondiente a la Fraser Sand con radios desde 0.1 a 1 mm con la distribución mostrada por la curva granulométrica de la figura 7.10.

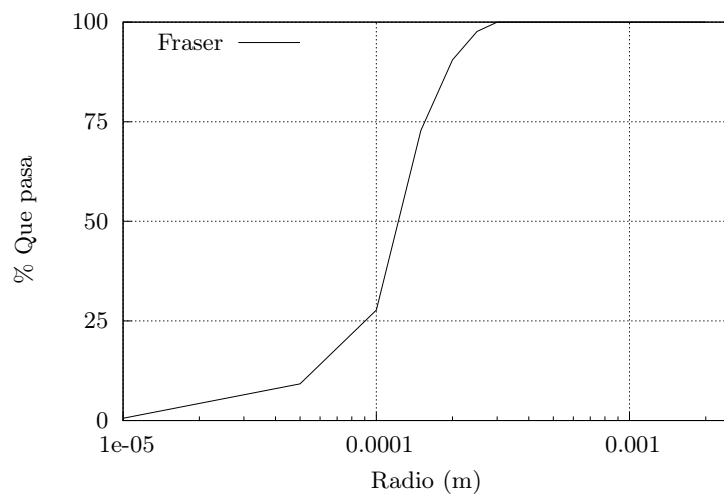


Figura 7.10: Curva granulométrica de la arena Fraser

El experimentos se realiza en una caja paralelepédica para la muestra 1 (M.1), mientras que la muestra 2 (M.2), se deposita en el interior de una membrana cuya base superior e inferior están compuestas como elementos rígidos. La caja de la primera muestra, ver figura 7.11 se rellena de manera manual, procurando que obtener una muestra lo más homogénea posible de manera que no queden grandes huecos o concentraciones de cilindros de tamaño similar. Mediante esta ordenación se consigue que ante la aplicación de las cargas se comporte de manera lo más homogénea e isótropa posible.

Los 2500 discos de la muestra 2 se ha relleno numéricamente según los porcentajes indicados en la figura 7.10 y se han distribuido inicialmente de manera aleatoria dentro de una matriz rectangular. La figura 7.12 (izqda.) muestra la disposición inicial donde ninguna partícula está en contacto con las de alrededor. A cada disco y posibles contactos se le han prescrito tanto un ángulo de fricción ϕ , cohesión c , la densidad ρ_s y parámetros penalty K_N , K_T . Los valores de todos estos parámetros se muestran en la tabla 7.1. La elección de los parámetros numéricos del penalty aseguran que las penetraciones entre discos serán pequeñas. A continuación se procede a confinar la muestra 2 en ausencia de la acción de la gravedad aplicando a cada una de sus paredes una tensión progresiva hasta que se alcanza el valor tensión de

7.6. ENSAYO DE CORTANTE CÍCLICO

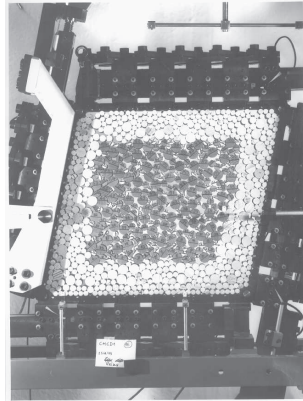


Figura 7.11: Ensayo de cortante cíclico. Muestra 1. Compuesta por 700 cilindros de madera distribuidos homogéneamente

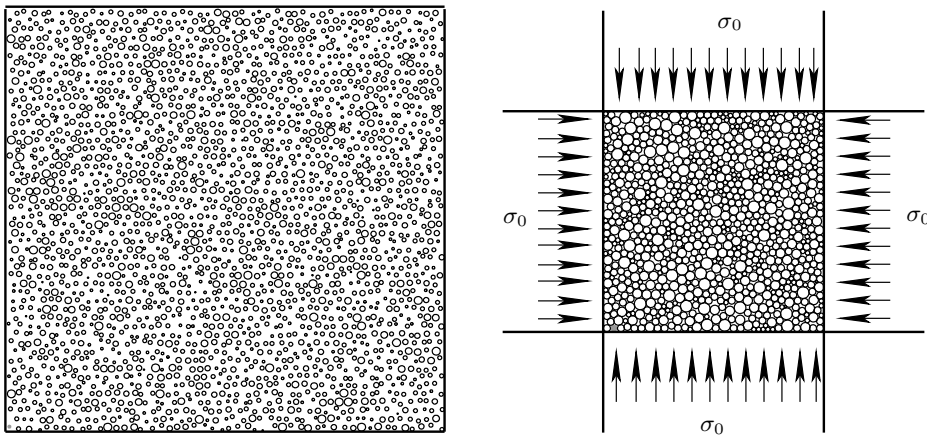


Figura 7.12: Ensayo de cortante cíclico. Muestra 2. Compactación. Muestra compuesta por 2500 discos distribuidos de manera aleatoria. Estado inicial (izqda.), y compactada bajo $\sigma_0 = 100kN/m^2$ estado final (drcha.)

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

confinamiento $\sigma_0 = 100kN/m^2$ en que el estado tensional de la muestra es semejante al experimental.

	ϕ°	c N/m	ρ_s kg/m ³	σ_0 kN/m ²	$K_N = K_T$ N/m	$\xi_N = \xi_T$	Δt s
M.1	28°	0		50	10 ⁶	100	0.001
M.2	26°	0	2500	100	10 ⁶	100	0.001

Tabla 7.1: Ensayo de cortante cíclico. Propiedades mecánicas y numéricas de las muestras 1 y 2

7.6.3. Operativa del ensayo

Muestra 1

En este experimento se aplica una deformación cíclica de amplitud constante γ_{max} y se miden las tensiones σ, τ . Para ello, se sigue la operativa de la ref. [CCL97], que consiste en una vez rellena la caja y comprimida con una tensión confinamiento $\sigma_0 = 50kN/m^2$. Se procede a aplicar una historia de distorsiones angulares γ , para ello se deja la base fija, mientras que las caras laterales se desplazan angularmente y la carga superior horizontalmente, tal y como muestra la figura 7.11. Numéricamente se consigue el mismo efecto mediante cuatro fronteras rígidas: una inferior fija, dos laterales que cada una gira alrededor del punto de unión de la frontera lateral con la horizontal y una superior cuyo movimiento está prescrito en función de los desplazamientos laterales de las dos caras anteriores. En este experimento se conocen las fuerzas transmitidas por los discos a las fronteras, mediante galgas en la realidad experimental y numéricamente en la simulación. Dichas fuerzas se obtienen a través de la red de de fuerzas de contacto que se producen durante el experimento. Para obtener unos resultados lo suficientemente homogéneos se han escogido 700 discos tal y como se indica en la referencia del experimento.

En cada instante de tiempo se mide numéricamente la fuerza de contacto normal f_{NAB} y tangencial f_{TAB} de cada cilindro de la frontera. A partir de estas mediciones se obtiene las tensiones normales y tangenciales en cada cara promediando las fuerzas de contacto. Para ello se considera que los puntos de contacto entre los discos externos de la muestra forman una poligonal tal y como se muestra en la figura 7.13, en esta poligonal se considera repartida la acción de las fuerzas de contacto. De esta manera, la tensión en cada cara i se obtiene a través del siguiente promedio:

7.6. ENSAYO DE CORTANTE CÍCLICO

Para cada cara i :

$$\sigma^i = \sum_{j=1}^{n_{seg}} \mathbf{f}_{cN}^j / L^j \mathbf{R}^j \quad \tau^i = \sum_{j=1}^{n_{seg}} \mathbf{f}_{cT}^j / L^j \mathbf{T}^j \quad (7.1)$$

donde n_{seg} es el número de segmentos que compone la envolvente de cada cara lateral, para cada segmento j , L^j es la longitud de cada segmento y \mathbf{R}^j y \mathbf{T}^j son los vectores normales y tangenciales.

Muestra 2

En este experimento se aplica una historia cíclica de cargas de amplitud constante σ_{max} y se miden deformaciones γ . Para ello la muestra de la figura 7.12 previamente compactada se introduce en una membrana elástica cuya misión es transmitir las cargas exteriores al material granular e impedir la salida de agua de la muestra saturada. Esta membrana, funcionamiento se muestra en la figura 7.13, fue implementada numéricamente en el código MED de este trabajo empleando los datos de la ref. [TB99]. Los discos más superficiales de la muestra están en contacto con las membrana y se consideran “discos membrana”, la membrana actúa en cada uno de ellos sobre una superficie — — — y le aplicará las tensiones impuestas. Las tensiones externas σ se transforman en fuerzas aplicadas a cada disco membrana a través de la línea — — — que es una aproximación a través de segmentos rectos de — — —. La resultantes de las fuerzas actuantes en cada uno de los segmentos se distribuye a cada partícula. Por ejemplo, la tensión actuante en el segmento DE genera una resultante normal de valor $\mathbf{F}_{NDE} = \sigma L_{DE} \mathbf{R}_{DE}$, donde L_{DE} es la longitud del segmento que une los puntos DE y \mathbf{R}_{DE} es el vector normal unitario a dicho segmento, mientras que la tangencial es $\mathbf{F}_{TDE} = \sigma L_{DE} \mathbf{T}_{DE}$, donde \mathbf{T}_{DE} es el vector tangencial unitario. La muestra sólo puede distorsionarse angularmente γ , ya que las fronteras rígidas impiden el movimiento vertical pero sí permiten el desplazamiento horizontal. Esta distorsión angular se mide numéricamente a través del desplazamiento horizontal Δ de la frontera superior rígida, de manera que dada una muestra de altura H , la distorsión angular sera $\gamma = \Delta/H$.

Una vez realizado este experimento se obtendrá aproximadamente un diagrama tensión–deformación más conocido como ciclo de histéresis cuya forma teórica es la dada por la figura 7.14. Este diagrama permite obtener el amortiguamiento de la muestra a través de la siguiente fórmula:

$$D = \frac{A_L}{4\pi A_T} \quad (7.2)$$

donde A_L es el área del ciclo y A_T es el área del triángulo.

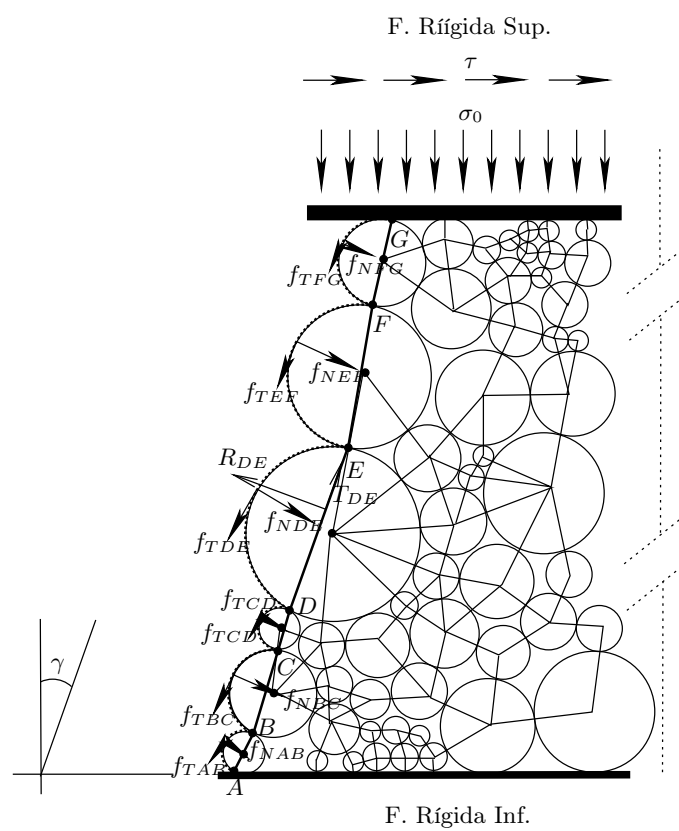


Figura 7.13: Ensayo de cortante cíclico. Membrana elástica de la arena Fraser definida por —. Transmisión de tensiones - - - a las partículas interiores y formación de una red de transmisión de fuerzas —

7.6. ENSAYO DE CORTANTE CÍCLICO

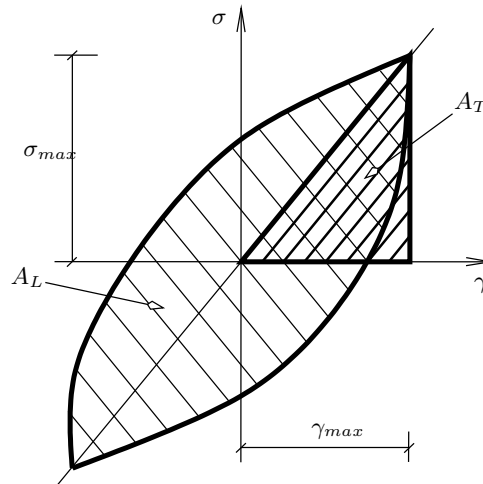


Figura 7.14: Ensayo de cortante cíclico. Obtención del amortiguamiento equivalente

7.6.4. Resultados

A continuación se procede a la descripción de los resultados de los experimento numérico realizado sobre las muestras 1 y 2. Las figuras 7.15 a 7.21 muestran la relación tensión deformación para ambas muestras con la correspondiente comparación experimental. Es de notar que esta relación es no lineal debido al comportamiento elastoplástico del suelo. Este comportamiento es debido tanto al desplazamiento friccional y al reagrupamiento de cada uno de los discos que componen la muestra ¹.

La figura 7.15 muestra la relación y la comparación experimental de la tensión horizontal-tensión vertical ($\sigma_1 - \sigma_2$) distorsión angular γ para la muestra 1 bajo un ciclo de derecha a izquierda de amplitud $\gamma_{max} \approx 0.1rad$ y frecuencia 1 Hz. Para obtener unos resultados numéricos semejantes a los experimentales y tener en cuenta la variabilidad estadística de los parámetros del experimento real, tal y como se indica en la ref. [CCL97], se ha calibrado el modelo discreto variando tanto el ángulo de rozamiento interno ϕ , la tensión de confinamiento σ_0 , densidad del material ρ_s y velocidad de amplitud de la deformación. Además esta calibración se ha realizado sobre tres muestras de igual granulometría pero distintos ordenamientos, ya que es prácticamente imposible imitar numéricamente las condiciones iniciales del experimento real.

La relación mostrada en la figura 7.15 es no lineal, mostrando un compor-

¹Es de recalcar que en los modelos continuos, el comportamiento elastoplástico de un suelo granular es modelado por parámetros cuyo significado físico no es claro y que no son representativos del comportamiento real del suelo

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

tamiento anisótropo ocasionado por el ajuste interno en la microestructura del suelo al aplicar progresivamente la deformación γ . Es de destacar un primer tramo rectilíneo AB es de elevada pendiente causado por la gran resistencia inicial de la muestra al inicio del movimiento. Desde el punto de vista micromecánico del contacto, la fuerza normal y tangencial aumentan progresivamente con la deformación aplicada, si la fuerza tangencial supera a la de fricción se produce el deslizamiento (movilización entre partículas) y por tanto la disipación de energía en forma de calor.

Una vez iniciado el movimiento, el incremento de la resistencia disminuye, es decir la pendiente de la relación deformación–tensión del tramo BC decrece fuertemente, situación en la que gran parte de los discos están deslizando. Cuando se aplica la máxima distorsión angular positiva, la compacidad de la muestra es máxima y por tanto lo será la tensión. Desde el punto de vista micromecánico, en el nivel de deformación intermedio $\gamma \approx 0.025$ rad, las fuerzas de contacto superan a las de fricción y cuando la deformación aplicada es prácticamente máxima $\gamma \approx 0.09$ rad todas las partículas están deslizando (disipando energía), es por ello que la fuerza tangencial se hace constante (el tramo BC es prácticamente horizontal) y en esta situación se produce el mayor número de contactos.

Tras alcanzarse la máxima deformación se produce la descarga–carga en sentido contrario mediante la variación progresiva de la deformación angular de derecha a izquierda. A medida que se produce descarga, tramo CD , se experimenta una súbita caída de la tensión debido a que las fuerzas de contacto disminuyen al estar la muestra menos coaccionada. Nótese que se alcanza la tensión mínima (pto. B) con una deformación no nula. Este hecho se debe al reordenamiento interno de las partículas dando lugar a una ordenación mucho más compacta.

A medida que se aplica la deformación hacia la izquierda, tramo DE , aumenta la coacción de las partículas, por lo que éstas experimentan un cierta resistencia al movimiento. Internamente, la fuerza normal de cada contacto crece progresivamente con la deformación, por lo que se incrementa la fuerza necesaria para producir el movimiento. Nótese que cuando se llega a un nivel de deformación $\gamma \approx 0$, la tensión en esa situación no es nula debido al reordenamiento de las partículas. Finalmente la tensión aumenta hasta llegar al punto E donde la tensión es máxima al estar la muestra sometida al máximo confinamiento. Este proceso finaliza en el punto F mostrando un comportamiento semejante al tramo BC . De este experimento realizado sobre la muestra 1 se deduce que las tres muestras numéricas exhiben un patrón de comportamiento semejante que corresponde con cierta semejanza al experimental.

A continuación se muestran los resultados numéricos con la comparación experimental correspondiente a la muestra 2 de la arena Fraser, figuras 7.16 a 7.21. Al igual que en el caso anterior, para tener en cuenta la variabilidad estadística de los parámetros de la muestra, el experimento numérico se

7.6. ENSAYO DE CORTANTE CÍCLICO

ha simulado y calibrado sobre tres muestras que corresponden a idéntica granulometría pero con distinto ordenamiento. Adicionalmente la forma real de las partículas es aproximadamente circular y tridimensional, por lo que se ha tenido que realizar un complicado y laborioso proceso de calibración del modelo numérico a los resultados experimentales. En este proceso se ha constatado que para un buen ajuste de los resultados numéricos con los experimentales es necesario incrementar el ángulo de rozamiento interno del material para tener en cuenta el rozamiento adicional que supone la ligera angulosidad que presentan las partículas reales de la muestra 2. Además este experimento es muy sensible ante una ligera variación de la tensión de confinamiento σ_0 , por lo que la calibración ha sido muy intensiva con respecto a este parámetro para obtener unos resultados numéricos acordes con los experimentales.

En esta simulación se aplica una historia cíclica de tensión tangencial τ de la ref. [LQB06] sobre la frontera rígida superior de la figura 7.13 con frecuencia 1 Hz y amplitud $7 \text{ sKn}/\text{m}^2$. En cada instante se mide la distorsión angular γ dibujando los ciclos de histéresis de las figuras. La muestra está saturada, por lo que una pequeña parte de la tensión aplicada será absorbida por el agua, hecho que no se refleja en el modelo numérico y para bajas frecuencias es prácticamente despreciable. En este experimento se observa un comportamiento semejante al de la muestra anterior, la deformación máxima en cada ciclo se da cuando se alcanza la tensión máxima, experimentando después un súbito descenso en la deformación. El comportamiento es simétrico, pero se observa que conforme evolucionan los ciclos, la deformación es cada vez mayor, este hecho es debido a que cuando se descarga la muestra, ésta se va haciendo cada vez más suelta. Nótese que los resultados experimentales siempre van un poco más avanzados (más deformados) que los numéricos debido a que se produce una degradación en la rigidez de la muestra real por el desgaste entre las superficies de contacto. Este hecho no se ha podido implementar en el modelo numérico, por lo que los resultados numéricos son ligeramente menos deformables y disipan menos energía. Con respecto a la disipación de energía, una vez pasados unos ciclos, en cada uno se disipa prácticamente la misma cantidad de energía (nótese que el área del ciclo es prácticamente la misma). Este hecho se observa en las figuras a partir del ciclo 9, en el que se alcanza un estado estacionario donde prácticamente toda la energía introducida por la carga externa es igual a la disipada. La tabla ?? muestra la energía disipada tanto numérica como experimental en cada ciclo de histéresis empleando la ecuación 7.2.

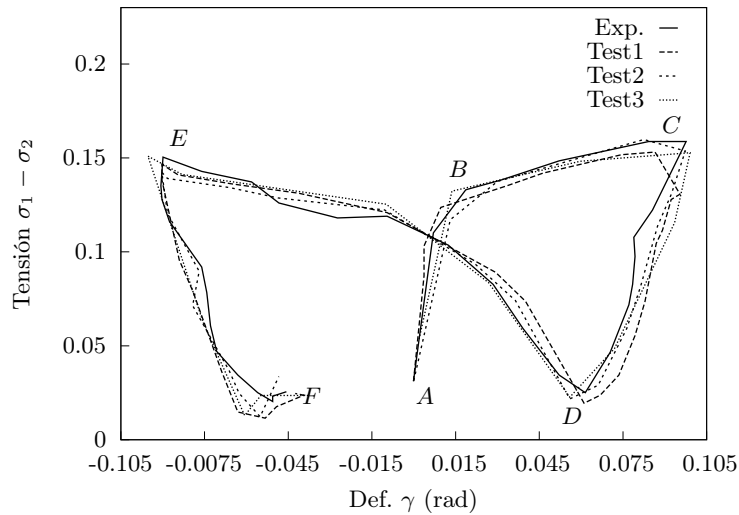


Figura 7.15: Ensayo de cortante cíclico. Relación $\gamma-(\sigma_1 - \sigma_2)$. Comparación experimental y numérica para muestra 1

7.7 El ensayo de sedimentación

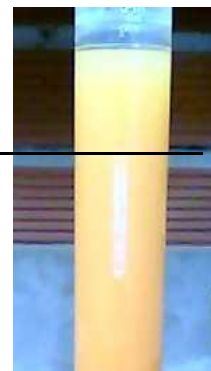
7.7.1. Introducción

La sedimentación se modelado tradicionalmente desde un enfoque continuo empleando las ecuaciones de advección–dispersión para analizar la evolución en el tiempo del porcentaje de partículas de cada tamaño, ver [GD]. Este enfoque es una simplificación de la realidad que ha proporcionado buenos resultados en muchas aplicaciones,. Sin embargo, la realidad del problema físico es que cada una de las partículas se transportan en el interior de un fluido, colisionanando unas con otras.

Gracias al incremento en la capacidad de cálculo de los ordenadores, es posible modelar la sedimentación de las partículas desde un enfoque micro-mecánico, el medio granular se considera como un medio discontinuo, con partículas rígidas y huecos, tal y como muestra la figura 7.22.

Se han desarrollado varia herramientas analíticas para el estudio del comportamiento de un medio granular en el interior de un fluido, [Har77], etc. Sin embargo, estos métodos están muy limitados a simples agrupamientos de partículas y no son representativos de la composición interna real de los suelos.

En este estudio se analizan tres muestras representativas diferentes: arena Fraser [Ast96] y dos muestras de tipo artificial. Se ha empleado un número representativo de discos (muchos menos que los que hay en un experimento real, pe-



7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

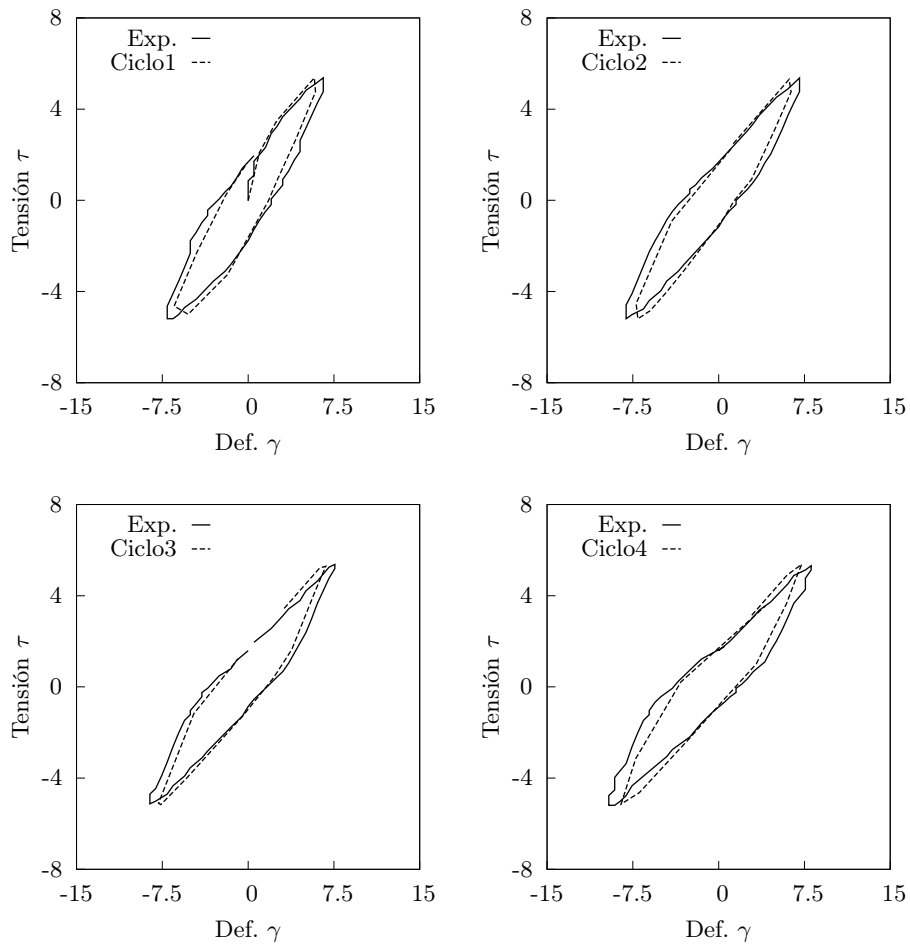


Figura 7.16: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 1. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

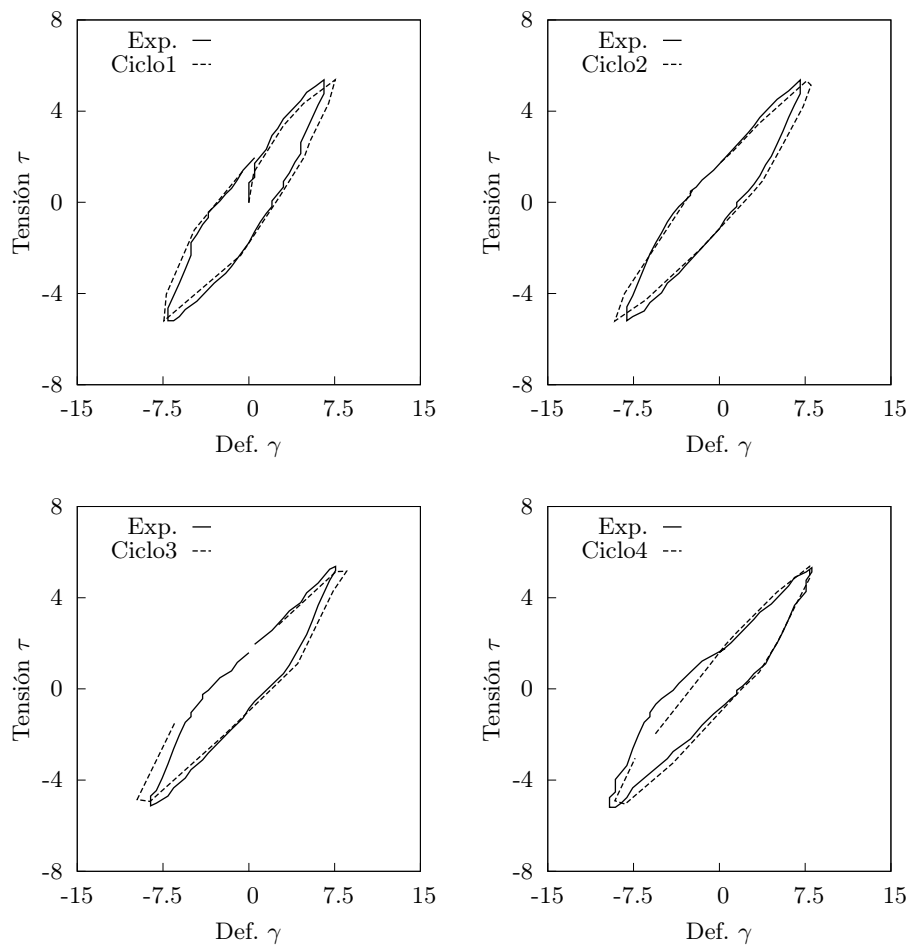


Figura 7.17: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 2. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

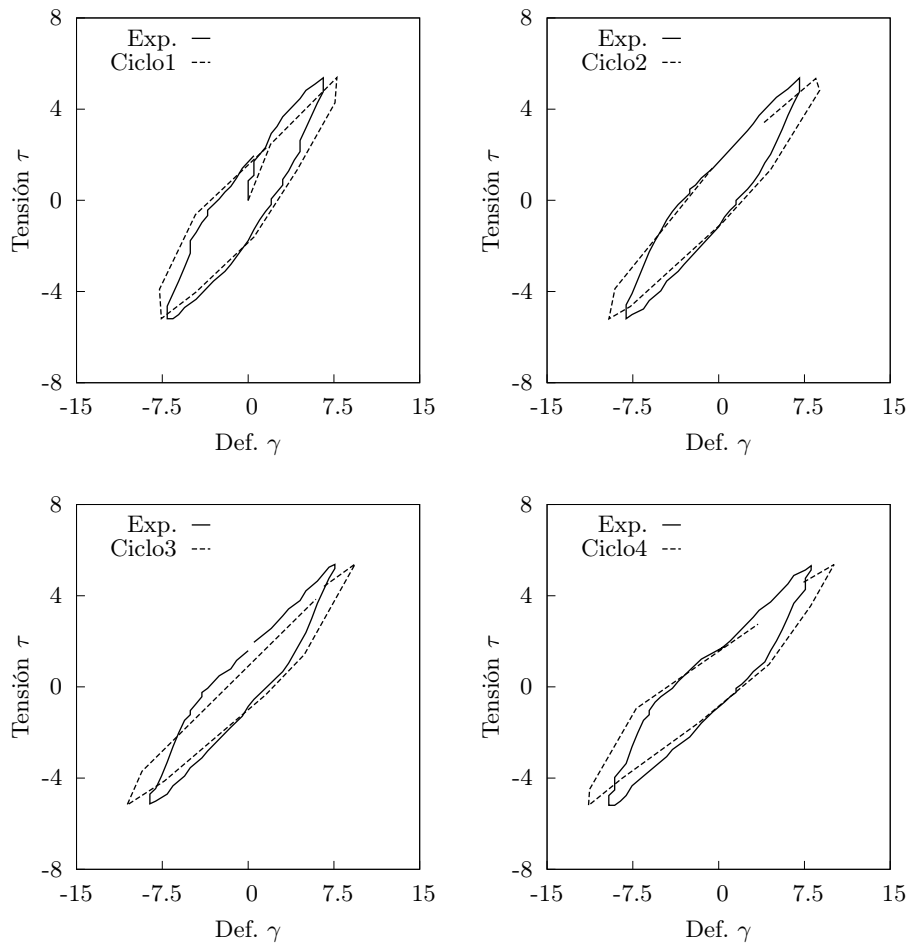


Figura 7.18: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 3. Ciclos 1 al 4. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

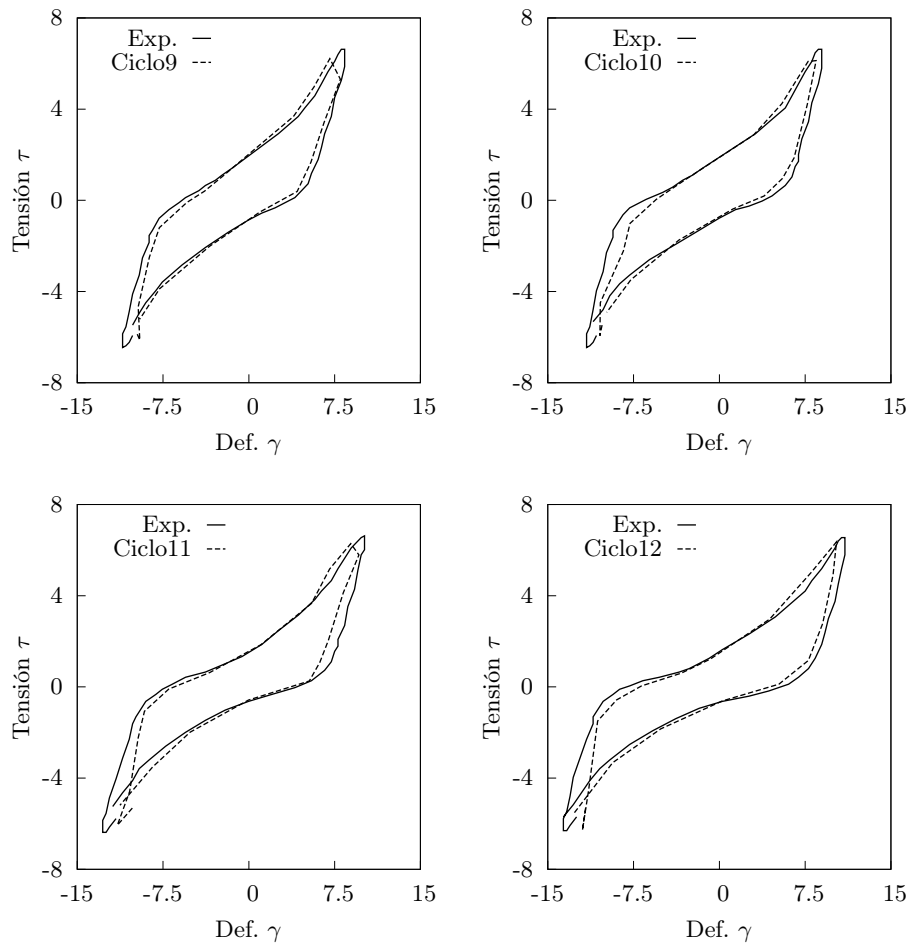


Figura 7.19: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 1. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

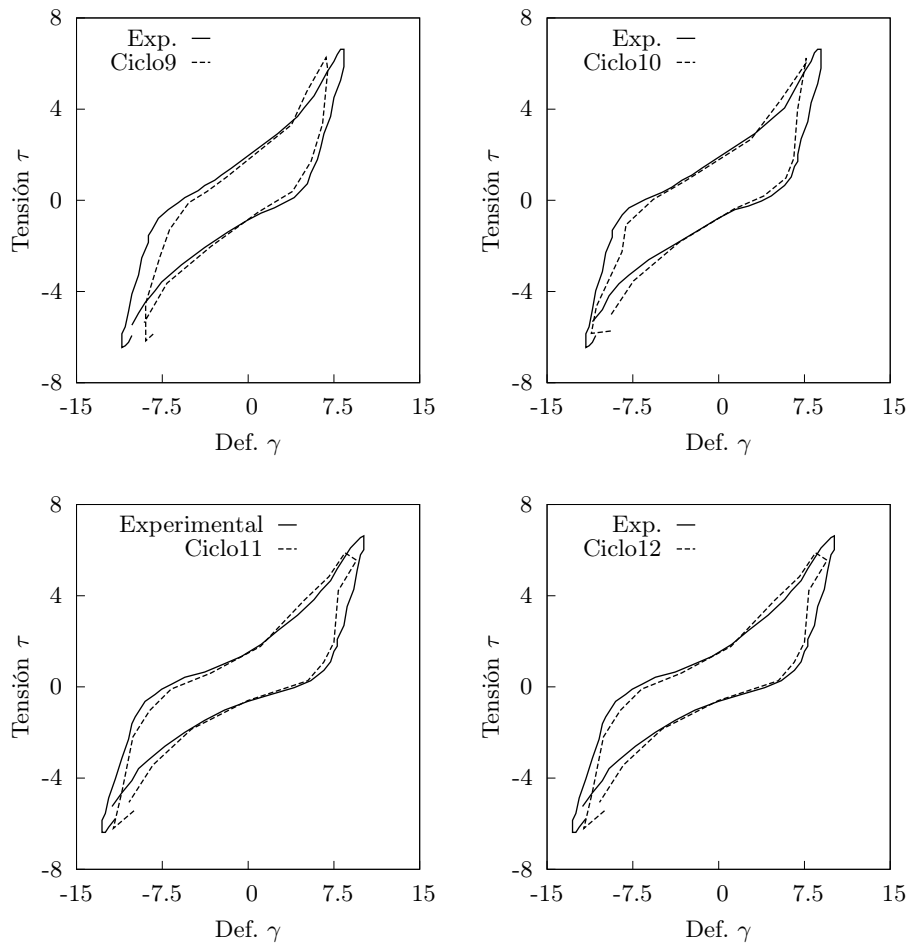


Figura 7.20: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 2. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

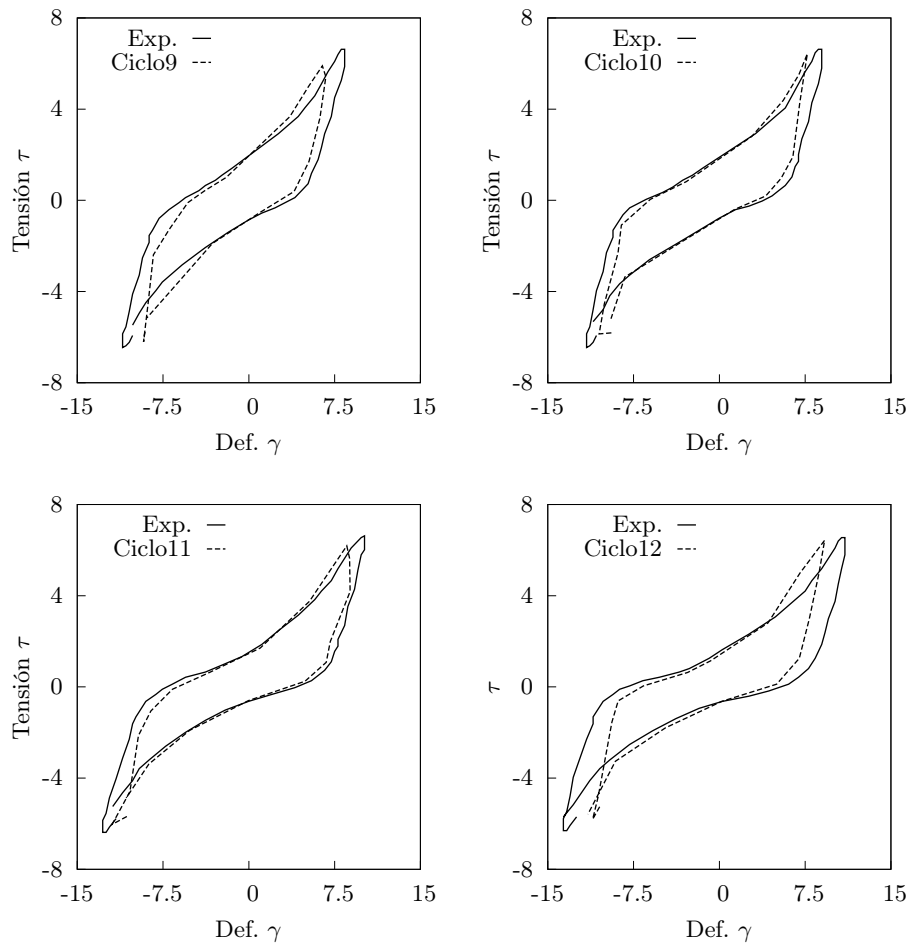


Figura 7.21: Ensayo de cortante cíclico. Ordenación 3. Ciclos 9 al 12. Comparación numérica y experimental para arena Fraser

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

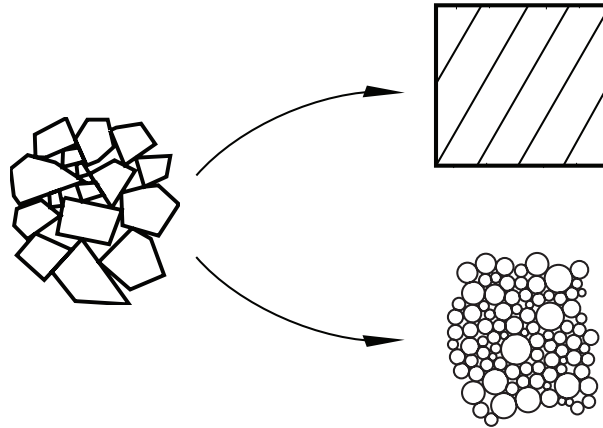


Figura 7.22: Medio granular (izqda.), modelo equivalente continuo (sup. drcha.) y medio discontinuo modelado con discos (inf. izqda.)

ro estadísticamente significativos) que simula las partículas del medio granular en el interior del fluido. Cada muestra está caracterizada por una densidad media ρ_s , un ángulo de rozamiento interno ϕ y una distribución granulométrica. El principal objetivo de este apartado es la simulación del experimento de sedimentación estándar de la ref. [AD63]. Este experimento de laboratorio consiste en la sedimentación con agua destilada de una pequeña cantidad de material granular seco en un largo recipiente cilíndrico. Este ensayo dura 24 horas, una vez pasado ese tiempo se obtiene una gradación de tamaños distribuidos a lo largo de la altura del recipiente, ver figura 7.23. Mediante el empleo de un hidrómetro se puede estimar la concentración de tamaños en distintos puntos del recipiente y por lo tanto se obtiene indirectamente la curva granulométrica del material.

En todos los experimentos numéricos se ha seguido el siguiente procedimiento: los discos de cada muestra se han distribuido inicialmente en el interior de una matriz regular. A cada elemento de esta matriz se le ha asignado un radio con la condición que dos discos adyacentes nunca se superpongan. A continuación se aplica la acción de la gravedad, las fuerzas de contacto, y las fuerzas transmitidas por el fluido (flotación y viscosidad) y por tanto, comienza la sedimentación. Durante la sedimentación, las partículas se pueden unir formando agrupamientos, este fenómeno altera la velocidad de sedimentación de cada partícula, lo que da lugar a una alteración en la curva granulométrica. Este hecho se produce tanto en la realidad numérica como en la experimental.

7.7.2. Procedimiento

Este experimento se ha realizado tradicionalmente en la Mecánica de suelos para obtener la curva granulométrica de una muestra cuyas partículas son tan pequeñas que no pueden ser medidas por procedimientos de tipo estándar como es el ensayo de tamizado, ver [LW69].

La muestra de material granular se deposita para que sedimente en el interior de un fluido de media o alta viscosidad, la curva granulométrica se obtiene cuando ha pasado suficiente tiempo (a menudo muchas horas) y todas las partículas sedimentan con una velocidad constante proporcional a su tamaño.

El objetivo de esta simulación numérica es la obtención de la curva granulométrica de tres muestras teniendo en cuenta el contacto entre partículas. Este efecto puede ser muy significativo, ya que las distorsiones que se producen en los resultados experimentales debido a la formación de agrupamientos que producen errores importantes en la medida. Este hecho se debe a que todas las partículas del agrupamiento sedimentan con la misma velocidad, normalmente muy distinta de la velocidad de la partícula individual, ver apartado 7.7.5.

El procedimiento de este experimento es recurrente, se empieza con la curva granulométrica de una muestra dada y a través de la simulación numérica se obtiene una curva similar a la original. Para validar ADfr con los experimentos reales, el objetivo es demostrar que la herramienta numérica puede predecir las diferencias esperadas y obtener el perfil de velocidades de sedimentación de las partículas, incluyendo el efecto de los contactos.

En los siguientes subapartados, se describen las leyes básicas que gobiernan el proceso de sedimentación, haciendo especial hincapié en la ley de Stokes.

Ley de Stokes

La formulación de la ley de Stokes es básica para describir el comportamiento de un cuerpo en el interior de un fluido, ver [Har77]. Esta ley indica que cuando una partícula se mueve en el interior de un fluido viscoso experimenta una fuerza resistente \mathbf{f}_s proporcional a su velocidad \mathbf{v} :

$$\mathbf{f}_s = -\mathcal{K} \nu \mathbf{v} \quad (7.3)$$

donde \mathcal{K} es una constante de proporcionalidad que depende de la geometría de la partícula, ρ_f es la densidad del fluido y ν su viscosidad. Stokes obtuvo por medio de análisis dimensional el valor de la constante de proporcionalidad para una partícula esférica en función del radio r , $\mathcal{K} = 6\pi r$. Por tanto la anterior ecuación es lineal en cada variable. El resto de fuerzas actuantes sobre una partícula que sedimenta bajo la acción de la gravedad, figura 7.24 son:

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

- Peso w
- Empuje de Arquímedes f_h
- Inercia f_v
- Contacto f_c

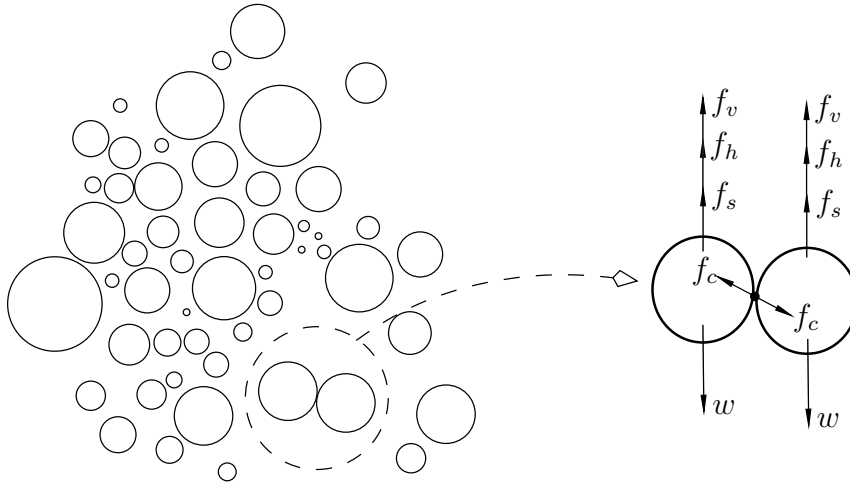


Figura 7.24: Ensayo de sedimentación. Fuerzas actuantes sobre una partícula que sedimenta en un fluido viscoso por gravedad

Todas las fuerzas anteriores se consideran cargas puntuales aplicadas en el centro de gravedad. Usando la segunda ley de Newton en cada partícula, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la velocidad de sedimentación:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s \mathbf{g} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f \mathbf{g} - 6\pi\nu\rho_f r \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (7.4)$$

donde ρ_s es la densidad de la partícula, por tanto su masa es $m = \rho_s \frac{4}{3}\pi r^3$ y \mathbf{g} es la aceleración de la gravedad. La velocidad terminal \mathbf{v}_t se define como la velocidad cuando el tiempo t es lo suficientemente grande. Bajo la condición inicial de velocidad nula, la ecuación 7.5 (izqda.) es la solución general de la ecuación anterior y la ecuación 7.5 (drcha.) es la expresión de \mathbf{v}_t .

$$\frac{v(t)}{v_t} = -1 + \exp\left(-\frac{9\nu t}{2(\rho_s - \rho_f)r^2}\right); \quad v_t = \frac{2(\rho_s - \rho_f)\mathbf{g}r^2}{9\nu} \quad (7.5)$$

La figura 7.25 muestra la velocidad de sedimentación proporcionada por la anterior ecuación para una partícula de 5 mm de radio y densidad 2500 kg/m³ en el interior de un fluido genérico de densidad 1000 kg/m³ y distintas viscosidades. Los resultados muestran una tendencia clara que la velocidad de sedimentación tiende asintóticamente a la velocidad terminal \mathbf{v}_t en un periodo corto de tiempo. La viscosidad del fluido es muy influyente, cuanto mayor sea, menor tiempo se tardará en alcanzar \mathbf{v}_t . Para la viscosidad más

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

elevada $\nu = 1$ este tiempo es de 0.04 s, mientras que para la más baja $\nu = 0.1$ kg/m-s es de 0.7 s. Según se indica en la ecuación 7.5 (drcha.) el radio de la partícula es proporcional a la raíz cuadrada de v_t , por tanto, midiendo esta última se puede estimar el valor del radio. Tanto la figura como la ecuación también muestran que para viscosidades bajas v_t es elevada, en una relación de 10 para los valores extremos de viscosidad.

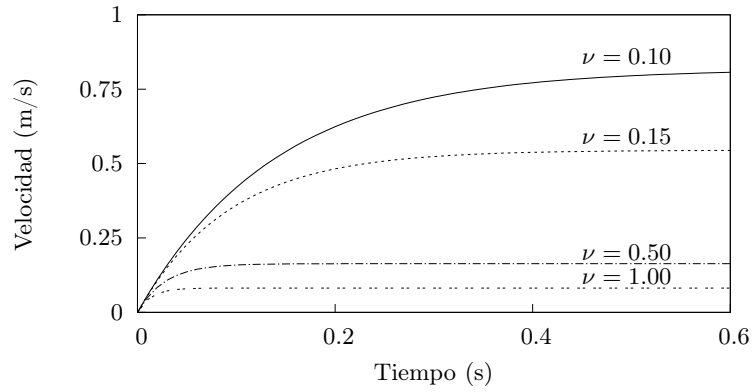


Figura 7.25: Ensayo de sedimentación. Velocidad $v(t)$ de una partícula de 5 mm de radio en función de varias viscosidades

Es importante recalcar que esta formulación solamente es válida para una partícula aislada o un grupo disperso de partículas que no estén en contacto.

7.7.3. Implementación de la ley de Stokes en ADfr

A continuación se formulan las ecuaciones de ADfr teniendo en cuenta la fuerza hidrostática \mathbf{f}_h^i y la de Stokes \mathbf{f}_s^i acutantes sobre un cuerpo i . Para ello a la segunda de las ecuaciones 5.3 se les añade la expresión discreta de las anteriores fuerzas en $n + 1/2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= \mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left(\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik} \right) = \mathbf{p}_{n+1/2}^i + \mathbf{p}_{cN}^i + \mathbf{p}_{cT}^i \\ \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left(\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}'_{cN}{}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}'_{cT}{}^{ik} \right) + \mathbf{f}_s^i = \mathbf{f}_{cN}^i + \mathbf{f}'_{cN}{}^i + \mathbf{f}_{cT}^i + \mathbf{f}'_{cT}{}^i + \mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

donde \mathbf{f}_s^i es la expresión de la fuerza viscosa discreta en $n + 1/2$ dada por:

$$\mathbf{f}_s^i = -\mathcal{K} \nu \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i \quad (7.7)$$

El balance de energía asociado a las anteriores ecuaciones es:

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \frac{\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i}{\Delta t} &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t M_i^{-1} \left[\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik}) \right] \\ &+ \\ -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \frac{\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i}{\Delta t} &= -(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \equiv 0 &= (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t M_i^{-1} \left[\mathbf{p}_{n+1/2}^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{p}_{cN}^{ik} + \mathbf{p}_{cT}^{ik}) \right] \\ &- (\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} (\mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cN}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik} + \mathbf{f}_{cT}^{ik}) + \mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i \right] \end{aligned}$$

(7.8)

Agrupando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n &= \sum_{i=1}^{n_{bd}} \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t M_i^{-1} \mathbf{p}_{n+1/2}^i}_{\Delta \mathbb{E}^i} = \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \underbrace{[(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}]}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} \\ &+ \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t M_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} \\ &+ \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t M_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i)}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i}} \end{aligned}$$

(7.9)

donde $\Delta \mathbb{E}_{(\mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i)}$ es la energía debida al empuje \mathbf{f}_h^i y a la disipación de energía de la fuerza \mathbf{f}_s^i debida al fluido viscoso.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n = & - \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cT}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t (\mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i)}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_h^i + \mathbf{f}_s^i}} \right] = \\
 & \sum_{i=1}^{n_{bd}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n_{bd}} \left[\underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}_{cN}^{ik}}} + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}'_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}'_{cN}^{ik}}(\psi_{1N}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cN}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cN}^{ik}}(\psi_{2N}^{ik})} \right. \\
 & \left. + \underbrace{(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t \mathbf{f}'_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{f}'_{cT}^{ik}}(\psi_{1T}^{ik})} - \underbrace{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_{cT}^{ik}}_{\Delta \mathbb{E}_{\mathbf{p}_{cT}^{ik}}(\psi_{2T}^{ik})} \right]
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

haciendo nulo el último sumatorio de la anterior ecuación, se consigue que la pérdida de energía total $\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n$ sea igual a la disipada por fricción, a la acción del empuje hidrostático y a la fuerza viscosa. Siguiendo el procedimiento indicado en el capítulo 5 se obtiene que la respuesta de ADfr sea energéticamente consistente con el contacto friccional en el interior de un fluido viscoso.

7.7.4. Parámetros del experimento, propiedades constitutivas

Las propiedades que influyen en este experimento son las siguientes:

Viscosity

Esta propiedad se define como la resistencia que experimenta un fluido a deformarse tangencialmente, esta es una propiedad similar a la fricción entre sólidos. La tabla 7.2 muestra la viscosidad de los fluidos empleados en los experimentos.

Fluido	ρ_f kg/m ³	$\nu \times 10^{-3}$ kg/m·s
Benzeno	880	0.673
Agua	1000	1.05
Aceite	900	100

Tabla 7.2: Ensayo de sedimentación. Valores de la viscosidad de los fluidos utilizados

Como se ha indicado anteriormente, la ecuación 7.5, muestra que la viscosidad es inversamente proporcional a la velocidad terminal. Por tanto, es

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

conveniente usar fluidos muy viscosos en la simulación numérica para reducir tanto v_t como el tiempo de cálculo.

Densidad

Se ha considerado la densidad usual de un suelo $\rho_s = 2500 \text{ kg/m}^3$ y la densidad de los fluidos empleados en los experimentos se muestran en la tabla 7.2.

Curvas granulométricas

Se ha empleado la curva granulométrica standar de la arena Fraser y de dos muestras artificiales, todas ellas de 1470 discos. Las curvas granulométricas correspondientes a estas tres muestras se representan en la figura 7.26:

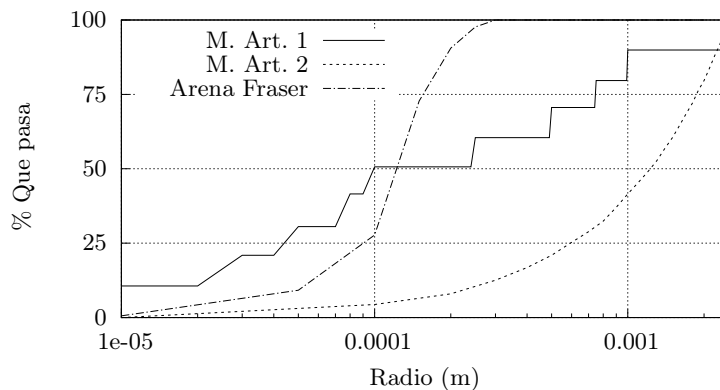


Figura 7.26: Ensayo de sedimentación. Curvas granulométricas de la arena Fraser y de dos muestras artificiales

- Arena Fraser. Corresponde a una distribución de tamaños en la que la mayoría de los tamaños de partículas se encuentran concentrados dos zonas: i) entre 1.0×10^{-5} y 1.0×10^{-4} m y ii) entre 2.0×10^{-4} y 2.5×10^{-4} m.
- Muestra artificial 1. Esta muestra se caracteriza por ser discontinua. La mayoría de los tamaños se encuentran concentrado en 2.5×10^{-5} , 5.0×10^{-5} , 7.5×10^{-5} , 1.0×10^{-4} , 2.5×10^{-4} , 5.0×10^{-4} , 7.5×10^{-4} , 1.0×10^{-3} , 2.5×10^{-3} m. Se ha creado esta muestra para mostrar demostrar el agrupamiento de partículas del mismo tamaño durante la sedimentación.
- Muestra artificial 2. Corresponde a una distribución continua de tamaños en un rango entre 2.5×10^{-5} y 2.5×10^{-3} m. Mediante esta muestra se pretende obtener una estela continua de tamaños.

CAPÍTULO 7. SIMULACIONES NUMÉRICAS CON FRICCIÓN

7.7.5. Simulaciones numéricas

Mediante la ecuación 7.5, en este apartado se obtiene la velocidad de sedimentación en función del tiempo de varios tamaños representativos de partículas. La tabla 7.3 muestra v_t y el tiempo en el que se alcanza t_{cr} (tiempo crítico) para aceite, agua y benceno:

Rad. $\times 10^{-3}$ m	Aceite		Agua		Benzeno	
	$t_{cr} \times 10^{-3}$ s	$v_t \times 10^{-3}$ m/s	t_{cr} s	v_t m/s	t_{cr} s	v_t m/s
0.01	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0
0.05	0.2	0.08	0.014	0.01	0.039	0.012
0.1	0.88	0.32	0.073	0.03	0.141	0.048
0.5	12	8.17	1.75	0.77	2.42	1.214
1	77	32.69	6.75	3.11	16.2	4.858
1.5	217	73.57	22.0	7.00	35.3	10.93

Tabla 7.3: Ensayo de sedimentación. Velocidad terminal v_t y el tiempo crítico t_{cr} para varios radios y fluidos

Con estos datos, podemos predecir aproximadamente en la simulación numérica el tiempo máximo en el que todas las partículas habrán alcanzado la velocidad terminal. Nótese que el tiempo crítico t_{cr} para la partícula más grande es dos órdenes de magnitud mayor en benceno que en aceite, lo que implica un mayor coste computacional. Pero como se demostrará más adelante, tanto en benceno como en agua es fácil visualizar la dispersión de las partículas.

La figura. 7.27 muestra la evolución de la velocidad para aceite empleando la ecuación 7.5. Debido a la alta viscosidad de este fluido, se puede apreciar que la velocidad terminal se alcanza muy rápidamente a excepción del tamaño más grande.

En la fase inicial de la simulación numérica, se genera una distribución de 1475 discos, cada uno de ellos localizado en un elemento de la matriz. La distribución de los discos responde a las curvas granulométricas de las figuras 7.26. Como muestra de ejemplo, en la figura 7.28 se muestra la matriz inicial de la muestra artificial 2. La matriz se encuentra inicialmente en reposo, se procede a la sedimentación en el interior del fluido bajo la acción de la gravedad. Los efectos del fluido se representan en MED por medio del empuje de Arquímedes y las fuerzas de Stokes, y las interacciones por contacto se usa el método del penalty. En todas las muestras, los parámetros del penalty son $K_N = K_T = 10^5$ N/m, $\xi_N = \xi_T = 100$ N/m y el coeficiente de fricción es $\mu = \tan 38^\circ$. El paso de tiempo inicial es muy pequeño $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ s ya que, como se explicó anteriormente, para fluidos de alta viscosidad el tiempo total de simulación $\approx t_{cr}$ es también muy pequeño. Si MED detecta grandes penetraciones entre partículas en un instante de tiempo, automáticamente

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

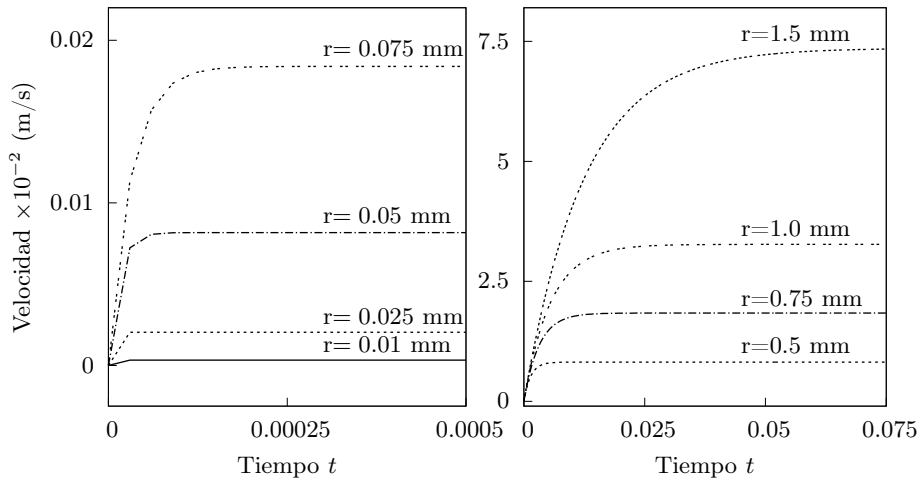


Figura 7.27: Ensayo de sedimentación. Velocidad analítica $v(t)$ para partículas de varios tamaños representativos sedimentando en aceite

se disminuy el paso de tiempo correspondiente a la iteración y se repiten los cálculos.

Para lograr una gran separación visible entre partículas durante la sedimentación, se han empleado fluidos de baja viscosidad (Agua y benceno) para ambas muestras artificiales. Para la arena Fraser, se ha empleado aceite para ilustrar la dificultades en visualización de la dispersión entre partículas, ya que v_t se alcanza rápidamente.

Las figuras 7.29, 7.30 y 7.31 muestran las etapas finales de la simulación cuando el 95 % de las partículas han alcanzado la velocidad terminal. La progresiva gradación de tamaños se puede ser apreciada en las dos primeras figuras, donde se muestra claramente que las partículas más grandes ocupan el fondo de la figura.

En la figura 7.29 se pueden apreciar varias zonas, donde las partículas son de tamaño muy distinto. Este hecho se debe a la discontinuidad en el tamaño de las partículas de la muestra artificial 1, y valida cualitativamente los resultados de la simulación. Durante la simulación, las partículas más grandes tienden a dispersar a las más pequeñas debido a su elevada velocidad y consecuentemente a las fuerzas de contacto. Por la misma razón, aunque el movimiento sea predominantemente vertical, la forma final del experimento es semejante a la de un gran cono.

La figura 7.30 muestra la misma distribución para muestra artificial 2 sedimentando en agua (izqda.) y en benceno (drcha.). Como era lo esperado, y a pesar de la diferentes viscosidades de ambos fluidos, las curvas granulométricas resultantes son muy similares, aunque, aunque la distribución final es ligeramente diferente. Sin embargo, la simulación en la que se empleó benceno duró aproximadamente 11 horas en un AMD64 con un procesador de

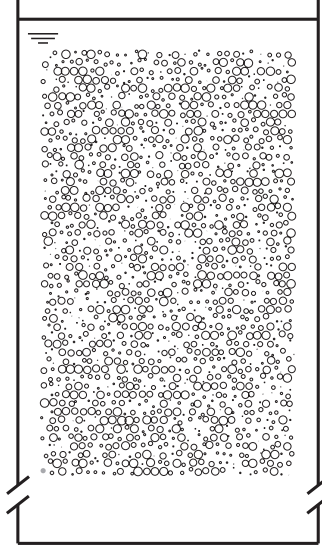


Figura 7.28: Ensayo de sedimentación. Configuración inicial para la muestra artificial 2; las partículas de distintos tamaños están distribuidas aleatoriamente en el interior de una matriz

2.5 MHz con 140.000 iteraciones mientras que la simulación con agua únicamente duró dos horas. Esta muestra tiene una distribución continua de tamaños, por tanto no hay tantas áreas vacías dentro del cono explicado en la anterior simulación.

Para la simulación empleando la arena Fraser, figura 7.31, las velocidades terminales son menores que las de los casos anteriores debido a la alta viscosidad del aceite. Consecuentemente, tanto la separación entre partículas como la gradación es pequeña. Como se indica en la curva granulométrica inicial, figura 7.26, el número de partículas de tamaño intermedio es bajo, por tanto, después de la sedimentación, las partículas se agrupan en dos grandes grupos. No se aprecia forma cónica durante la simulación, incluso si las partículas son lo suficientemente grande. Esto es debido a la alta viscosidad del fluido que restringe el movimiento horizontal a pesar de las fuerzas de contacto.

En todas las muestras, las partículas más grandes se mueven con una mayor v_t (figura. 7.27) y por tanto capturan a las más pequeñas que poseen una velocidad menor. En este proceso, se pueden agrupar agrupamientos de partículas compuestos por diferentes tamaños pero que sedimentan con la misma velocidad: las partículas pequeñas son capturadas por las más grandes, figura 7.32 (izqda.).

Este efecto se puede ver claramente en la figura 7.31 y puede averiguarse en la figura 7.30. Sin embargo, en la figura 7.29 este efecto no se observa ya que para los tamaños grandes la fuerza principal es el peso, mientras que para los pequeños es la fuerza resistente (Stokes y empuje de Arquímedes);

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

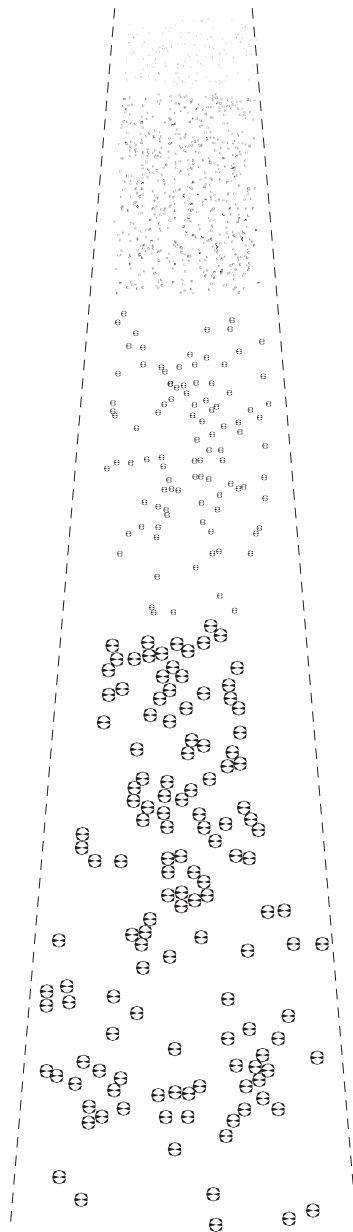


Figura 7.29: Ensayo de sedimentación. Estado final de la muestra artificial 1 sedimentado en agua, donde se aprecia la gradación de las partículas

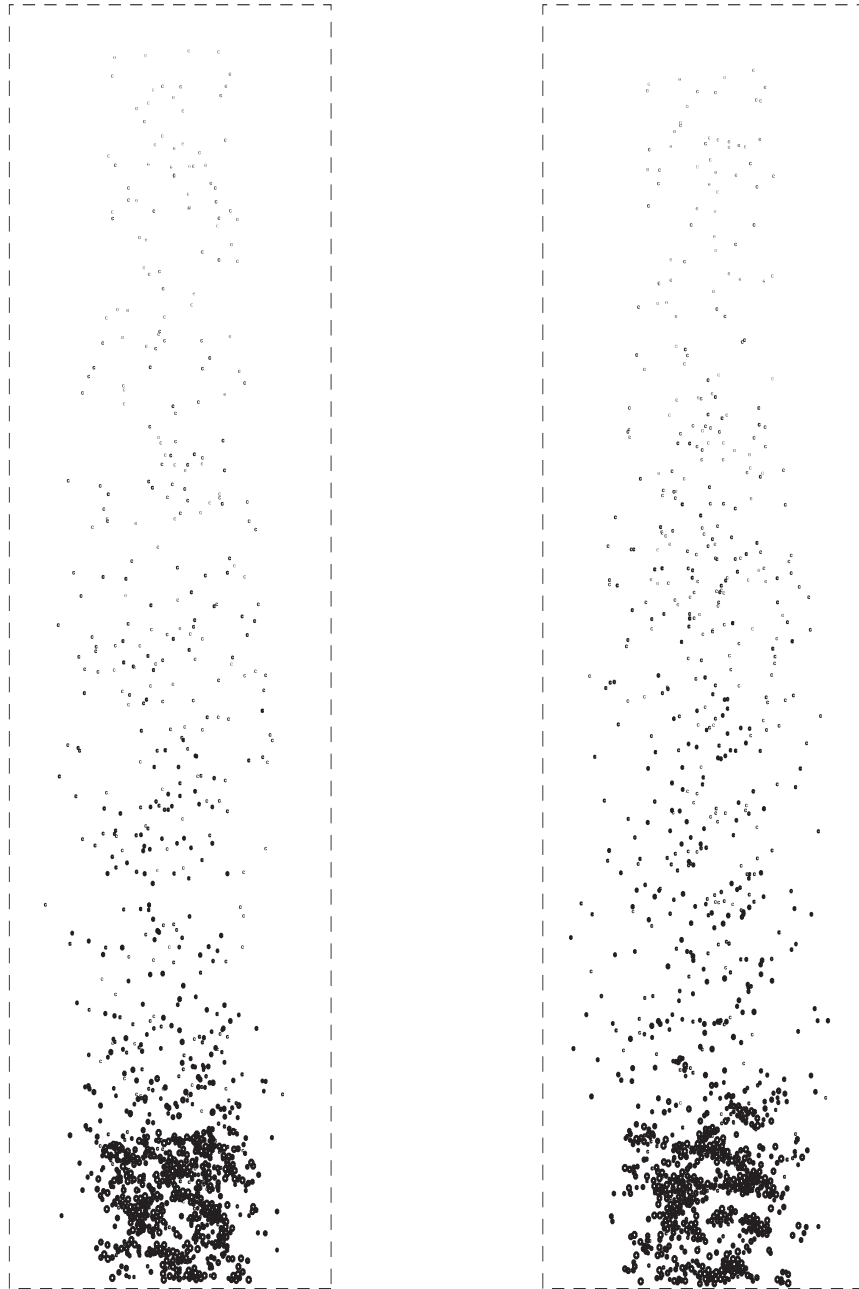


Figura 7.30: Ensayo de sedimentación. Estado final de la muestra artificial 2 sedimentando en agua (izqda.) y benceno (drcha.). En ellas se puede apreciar la creación y la separación de agrupamientos de partículas

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

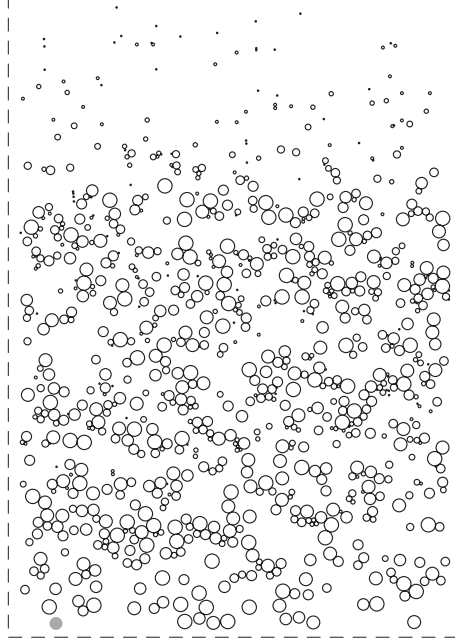


Figura 7.31: Ensayo de sedimentación. Estado final de la arena Fraser sedimentando en aceite

el peso tiende a juntar las partículas, mientras que las fuerzas resistentes tienden a deslizar los discos del agrupamiento forzando a que se abra. Únicamente distribuciones continuas de partículas, como las mostradas en las figuras 7.30 y 7.31 son capaces de formar agrupamientos compuestos por partículas de tamaño ligeramente distinto, ya que para todas las partículas del agrupamiento, la fuerza predominante es una o la otra.

Para calcular la velocidad de un agrupamiento, vamos a considerar dos partículas a y b (figura 7.32 drcha.), tal que el primer radio es mucho mayor que el segundo, por tanto sus velocidades terminales son $v_t^a \gg v_t^b$. Si estas dos partículas forman un agrupamiento, la velocidad de sedimentación del agrupamiento es:

$$v_t^{cl} = \frac{m_a v_t^a + m_b v_t^b}{m_a + m_b} \quad (7.11)$$

Como la masa de b es mucho más pequeña que la de a , $m_b \approx 0$, de la anterior fórmula se desprende $v_t^{cl} \approx v_t^a$. Por tanto, la partícula b sedimenta con una velocidad $\approx v_t^a$, que es la correspondiente a la de mayor tamaño. Por esta razón, la curva granulométrica obtenida puede presentar una baja proporción de tamaños pequeños que la curva original, tal y como se observa en la figura 7.34.

La figura 7.33 muestra la velocidad numérica de sedimentación de cinco partículas diferentes de las muestras 1, 2 en agua y Fraser en aceite. Se

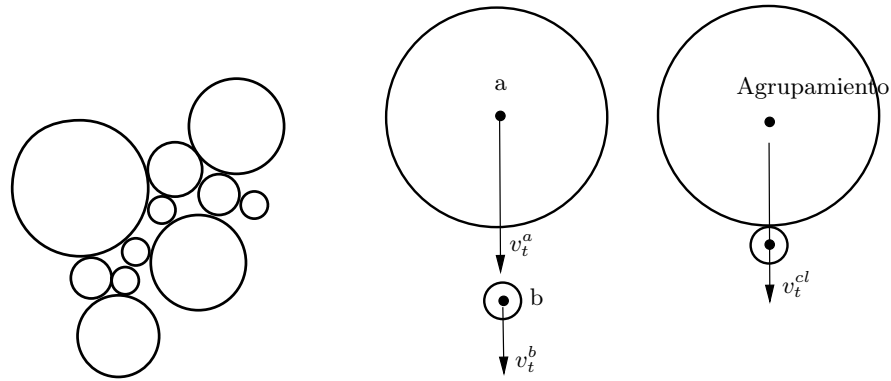


Figura 7.32: Ensayo de sedimentación. Formación de agrupamientos debido al contacto y a la fricción (izqda.). Velocidad antes y después del contacto para dos partículas cuyos radios verifican $r_a \gg r_b$ (drcha.)

puede observar en que en los dos primeros gráficos que las velocidades se ven claramente alteradas por las interacciones que se producen a la hora de formarse las agrupaciones de partículas. Algunas de estas alteraciones son transitorias, ya que después de algún tiempo se rompen las agrupaciones y cada partícula tiende rápidamente a su propia v_t . Para la arena Fraser (figura 7.33, inf.), the las alteraciones debidas al contacto son insignificantes ya que la viscosidad del fluido es elevada. Durante el experimento se están formando y rompiendo agrupaciones continuamente, pero muchos de ellas permanecen cerradas durante toda la simulación, ya que una vez formadas, la fricción previene que se abra.

En cada instante de tiempo t_i de la simulación, MED proporciona la velocidad de sedimentación numérica $v(t_i)$ de cada partícula. Cuando la diferencia de velocidades entre dos instantes de tiempo es menor que una tolerancia dada, se considera que se ha alcanzado la velocidad terminal v_t de la partícula. Usando este valor y el de las constantes ν , ρ_s , ρ_f , se obtiene el radio de cada partícula (ecuación segunda de 7.5). Una vez que todas las partículas han alcanzado su velocidad terminal se puede obtener numéricamente la curva granulométrica.

La figura 7.34 muestra la curva granulométrica numérica junto a la original. Como era esperado, la muestra numérica coincide con bastante exactitud con la original a excepción de los tamaños más grandes para los que el experimento numérico muestra ligeras diferencias debido a:

- Formación de agrupamientos. Como se explicó previamente, algunas de las pequeñas partículas son consideradas como partículas grandes si forman parte de la agrupación, por lo que se introducen errores en la interpretación de la curva granulométrica.
- Apertura de los agrupamientos. Cuando las partículas más pequeñas

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

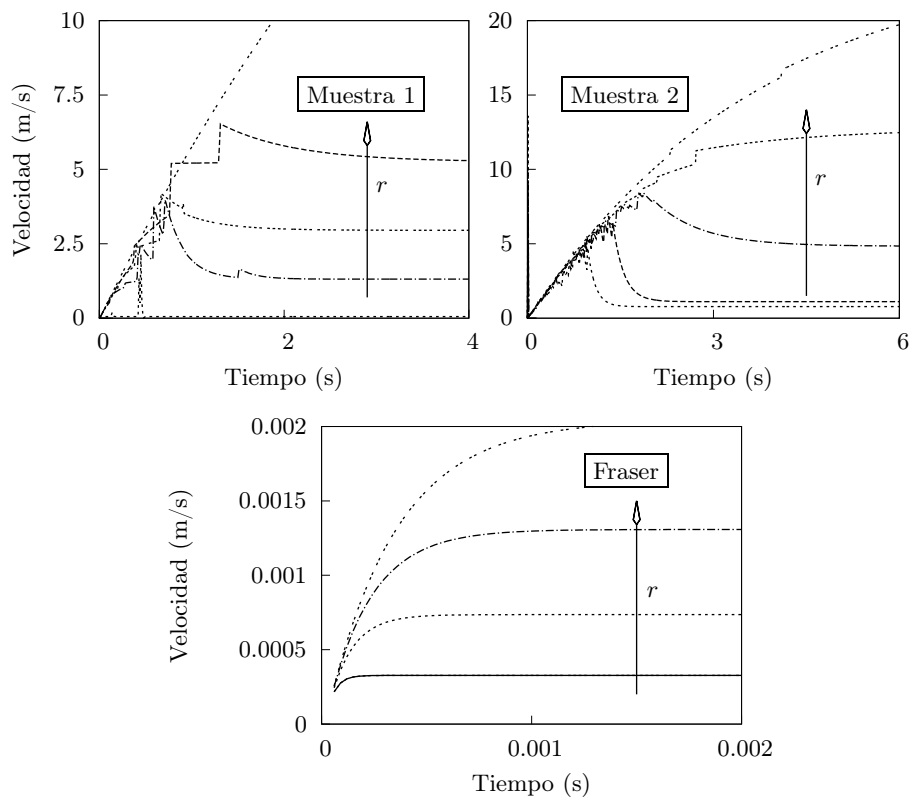


Figura 7.33: Ensayo de sedimentación. Velocidad numérica de varias partículas de las muestras 1, 2 (sup. izqda. y drcha.) sedimentando en agua y de la arena Fraser (inf.) sedimentando en aceite

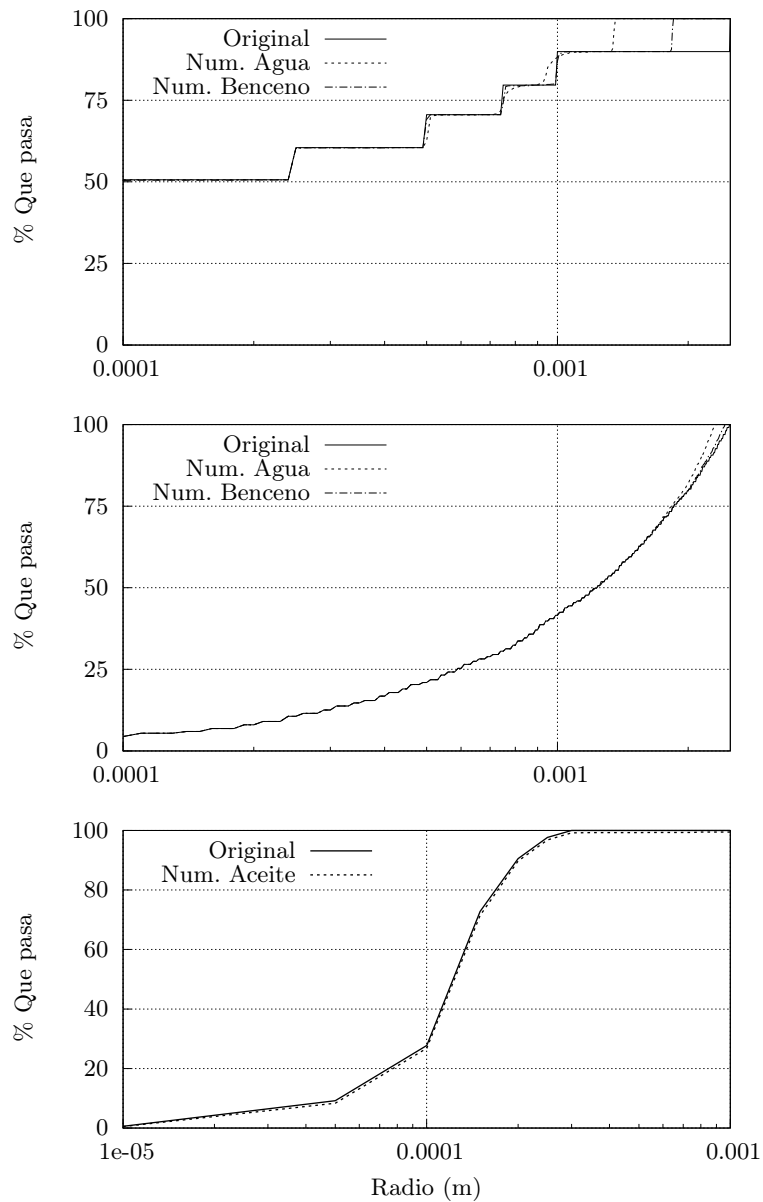


Figura 7.34: Ensayo de sedimentación. Curvas granulométricas numéricas y experimentales para la muestra artificial 1 (sup.), muestra artificial 2 (intermedia) y para la arena Fraser (inf.).

7.7. EL ENSAYO DE SEDIMENTACIÓN

abandonan el agrupamiento, todavía tienen una velocidad muy superior a su velocidad terminal, que no puede ser alcanzada al final de la simulación.

Estas discrepancias entre las curvas originales y numéricas, que incluso ocurren en el test de laboratorio, muestran la dificultad de obtener exactamente la curva granulométrica de materiales de tamaño muy pequeño. Para evitar este problema, la duración del experimento debería ser mucho más larga que la proporcionada en la tabla 7.3.

De este experimento se ha demostrado que el MED es una poderosa herramienta para modelar sistemas mecánicos complejos que interactúan por contacto y fricción. Combinación con ADfr facilita la disipación numérica de la energía de las partículas en el interior del fluido, permitiendo obtener la curva granulométrica de la muestra teniendo en cuenta los fenómenos de contacto.

8

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

8.1 Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un nuevo algoritmo de integración temporal para el problema de contacto que conserva los momentos y conserva–disipa de manera consistente la energía de los cuerpos para los casos sin y con fricción respectivamente. Este algoritmo representa una novedad sobre las anteriores estrategias de integración temporal que se resumen en los siguientes puntos:

- La conservación–disipación consistente se obtiene mediante la modificación de la cinemática y la dinámica del contacto de cada cuerpo. Dicha modificación se consigue a través de la adición por cada contacto de un momento lineal \mathbf{p}_c y una fuerza \mathbf{f}'_c suplementarios proporcionados por el marco de ecuaciones de conservación. Como se fuerza a que la energía asociada al contacto normal se conserve, ACEM obtiene de manera precisa la fuerza de contacto normal y consecuentemente la fuerza de contacto tangencial para el caso slip. Para el caso stick ACEM fuerza la conservación en la dirección tangencial.
- La imposición de la condición de conservación garantiza la estabilidad del algoritmo y define un modelo mejorado del método de penalty compuesto por un resorte elástico de rigidez K_N y un amortiguador viscoso de valor ξ_N . El papel de ξ_N se ha estudiado paramétricamente para el problema de contacto de Signorini, concluyendo que este modelo es consistente con las condiciones complementarias y persistentes de Kuhn–Tucker cuando K_N y ξ_N tienden a infinito. Además, el amortiguador viscoso atenúa las vibraciones del resorte del penalty.
- El marco de ecuaciones de conservación acopla las variables \mathbf{p}_c y \mathbf{f}_c , por lo que la respuesta del ACEM se ajusta consistentemente a la respuesta física frente a otros integradores que consiguen la conservación mediante la variable \mathbf{p}_c . Por tanto, la respuesta en estos integradores no es consistente al no tener en cuenta la posible ajuste de la fuerza

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

de contacto a una respuesta conservativa, introduciendo errores en las trayectorias y velocidades post-contacto.

- ACEM ha reproducido de manera muy aproximada el movimiento perpetuo de un disco para el problema de Carom. También se ha probado su capacidad para representar la dispersión de las bolas y las interacciones interiores en el problema de la dispersión de las bolas de billar. Para el problema del péndulo de Newton, se ha mostrado una buena correspondencia de las velocidades post-impacto con respecto a las soluciones analíticas. En estos dos últimos problemas se ha demostrado que el resorte de penalty provoca una onda de impacto que retrasa la transmisión de los contactos. Finalmente el algoritmo se muestra robusto para problemas con un número medio de contactos como es el caso del llenado del cangilón.
- Para los casos friccionales, ACEM ha reproducido de manera precisa tanto el movimiento de un disco sobre una superficie plana o curva y rugosa como el movimiento de una elipse rígida en el problema de Carom. Estos problemas han sido estudiados de manera paramétrica en función del ángulo de fricción ϕ , demostrando la capacidad de ACEM para simular situaciones complejas.
- Meter ciclos y sedimentación
- Parte de estos problemas han sido simulados adicionalmente mediante los métodos de integración temporal de Newmark- β : la regla del trapecio y el método de máxima disipación (nulo y máximo amortiguamiento numérico respectivamente). Para estos métodos se ha demostrado que se conserva el momento lineal total, pero se comportan de manera inestable ante el contacto. La regla del trapecio muestra un incremento incontrolado de energía independiente del paso de tiempo Δt debido a su nulo amortiguamiento numérico. Para grandes pasos de tiempo, el método de máxima disipación puede disipar este incremento de energía a través de su elevado amortiguamiento numérico sin sentido físico.

8.2 Futuras líneas de trabajo

Durante el desarrollo de esta investigación han surgido nuevos temas investigación relacionados con ACEM, cuyo contenido se resume en los siguientes puntos:

- Extensión de ACEM al campo de la elastodinámica general mediante método de los elementos finitos.
- Desarrollo de ACEM para problemas de contacto acoplados con otro tipo de campos, especialmente térmicos y piezoeléctricos.

8.2. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

- Desarrollo de un algoritmo de integración temporal consistente para plasticidad, teniendo en cuenta la analogía del comportamiento plástico con el friccional.
- Aplicación de problemas inversos a problemas dinámicos simulados con el MED bajo ACEM.
- Aplicación a problemas de incompresibilidad mediante la formulación de esta restricción por el método del Penalty.
- Formulación más compleja y de segundo orden de las variables adicionales \mathbf{p}_c y \mathbf{f}_c .

El objetivo de todas estas líneas de trabajo es generalizar la aplicación y formulación de ACEM a problemas con restricciones similares a la del contacto.

9

Conclusions and future work

9.1 Conclusions

In this dissertation a new time integration scheme has been presented. This scheme conserves momenta and conserves or dissipates energy consistently for the frictionless and frictional cases respectively. The most relevant innovations respect to previous works are summarized in the following items:

- The conservation or consistent dissipation of energy is obtained through the kinematic and dynamic modification of contact. Such modification consists on the addition of a linear momentum \mathbf{p}_c and a force \mathbf{f}_c for every contact given by the conserving equations' framework. As the energy associated to normal contact is enforced to be conserved, ACEM accurately obtains the normal contact force and consequently the tangential force for the slip case. For stick, ACEM enforces the energy conservation in tangential direction.
- The enforcement of conservation guarantees the stability and defines an enhanced penalty method composed by an elastic spring and a viscous damper controlled by parameters K_N and ξ_N respectively. The role of ξ_N is parametrically analyzed in the Signorini contact problem. This analysis concludes that the enhanced penalty method is consistent with the complementary and persistent Kuhn–Tucker conditions when K_N and ξ_N tend to infinity. Additionally, the viscous damper reduces the vibrations due to the penalty spring.
- The conserving equations' framework couples variables \mathbf{p}_c and \mathbf{f}_c , making ACEM adjust the solution to be consistent with contact. Previous integrators reached conservation only through variable \mathbf{p}_c , therefore the solution, although conservative, was not consistent since the contact force was not adjusted to the conservative solution, introducing errors in trajectories and velocities.
- ACEM has accurately simulated the perpetual motion of a single rigid disk in the Carom's problem. Additionally it has been shown its ability

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

to reproduced the internal interactions and the dispersion of the disks for the pool game. The results for the Newton's cradle problem have shown a good agreement between the numerical and analytical post-impact velocities. For these two problems, it has been demonstrated that the penalty method creates an impact wave that delays the contacts' transmission. Finally, ACEM is quite robust for medium number contact problems like the filling of a bucket.

- For frictional contact, ACEM has reproduced the motion of a rigid disk over a flat and a curved rough surface and the dissipative impacts of a rigid ellipse for the Carom's problem. These problems have parametrically analyzed as a function of the friction angle ϕ , demonstrating the ability of ACEM to simulate complex situations.
- Meter ciclos y sedimentación
- Several of the previous problems have been simulated through the Newmark- β time integration scheme: trapezoidal rule and maximum dissipation methods (zero and maximum numerical damping respectively). Both methods conserve linear momenta but behave unstable with contact. The trapezoidal rule shows a spurious energy blow up independent of the time step Δt due to its null numerical damping. For large Δt , the maximum dissipation method dissipates this blow up through its non physical high numerical damping.

9.2 Future work

Some directions for future research on topics addressed in this dissertation include:

- Extension of ACEM to general elastodynamics under the finite element method.
- Development to coupled contact problems, specially thermal or piezoelectric coupling.
- Taking into account the analogy between plasticity-friction, and the ACEM's equations it is suggested to develop a consistent time integration scheme applied to plasticity problems.
- Aplicación de problemas inversos a problemas dinámicos simulados con el MED bajo ACEM.
- Application of ACEM to incompressibility problems formulated through the penalty method.
- Second order formulation of the additional variables \mathbf{p}_c y \mathbf{f}_c .

9.2. FUTURE WORK

The target of the future work is to generalize the formulation and applicability of ACEM to problems modeled with restrictions similar to contact.

A

Formulaciones analíticas

A partir de la ref. [PSB99] e imponiendo el ppo. de DAlembert y la condición de rodadura, se puede obtener la velocidad final y la energía disipada por el movimiento de un disco sobre una superficie rugosa para el problema del juego de bolos. Los resultados se resumen en la tabla A.1, donde V_{Oi} , V_{Or} , ω_r son la velocidad inicial, lineal y de rodadura, y ΔE es la pérdida de energía. Durante el deslizamiento, intervalo de tiempo $t \in [0, t_{rod}]$, la velocidad V_{Os} decrece linealmente entre V_{Oi} y V_{Or} mientras que la angular ω_s se incrementa entre 0 y ω_r .

t_{rod}	V_{Os}	ω_s	V_{Or}	ω_r	ΔE
$\frac{V_{Oi}}{3\mu g}$	$V_{Oi} - \frac{V_{Oi}}{3t_{rod}}t$	$\frac{2V_{Oi}}{3Rt_{rod}}t$	$\frac{2V_{Oi}}{3}$	$\frac{2V_{Oi}}{3R}$	$\frac{13}{18}\rho_s\pi R^2V_{Oi}^2$

Tabla A.1: Problema del juego de bolos. Instante analítico de transición deslizamiento-rodadura t_{rod} , velocidades lineales V_{Os} , V_{Or} , velocidades de rotación ω_s , ω_r y pérdida de energía ΔE .

La variable t es cualquier instante durante el deslizamiento, R es el radio del disco, g la gravedad ρ_s la densidad. Estos resultados demuestran que la velocidad final y la energía son independientes del coeficiente de fricción $\mu = \tan \phi$, que sólo influye en el instante de transición t_{rod} entre el deslizamiento y la rodadura. En caso $\mu = 0$, $t_{rod} \rightarrow \infty$, por lo que nunca se alcanza la rodadura, las velocidades y energía permanecen constantes.

La formulación de [Str94] proporciona una validación analítica del problema de Carom con partícula elíptica: dados dos cuerpos 1, 2 el balance de momento lineal en el impacto es:

APÉNDICE A. FORMULACIONES ANALÍTICAS

$$\begin{aligned}
 m^1(\dot{x}^1 - \dot{x}^{1o}) &= P_x & m^2(\dot{x}^2 - \dot{x}^{2o}) &= -P_x \\
 m^1(\dot{y}^1 - \dot{y}^{1o}) &= P_y & m^2(\dot{y}^2 - \dot{y}^{2o}) &= -P_y \\
 m^1(r^1)^2(\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^{1o}) &= P_x y^1 - P_y x^1 & m^2(r^2)^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^{2o}) &= -P_x y^2 + P_y x^2
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde m^1, m^2 son las masas, $\dot{x}^{1o}, \dot{y}^{1o}, \dot{\theta}^{1o}$ y $\dot{x}^{2o}, \dot{y}^{2o}, \dot{\theta}^{2o}$ son las velocidades preimpacto del centro de las masas en x, y y la rotación. Las coordenadas x^1, y^1, x^2, y^2 de los centros representan la posición antes del impacto, mientras que $\dot{x}^1, \dot{y}^1, \dot{\theta}^1, \dot{x}^2, \dot{y}^2, \dot{\theta}^2$ las velocidades (incógnitas) después del impacto. Los radios de giro son r^1, r^2 , mientras que P_x, P_y son los impulsos en la dirección normal y tangencial, ver figura. A.1.

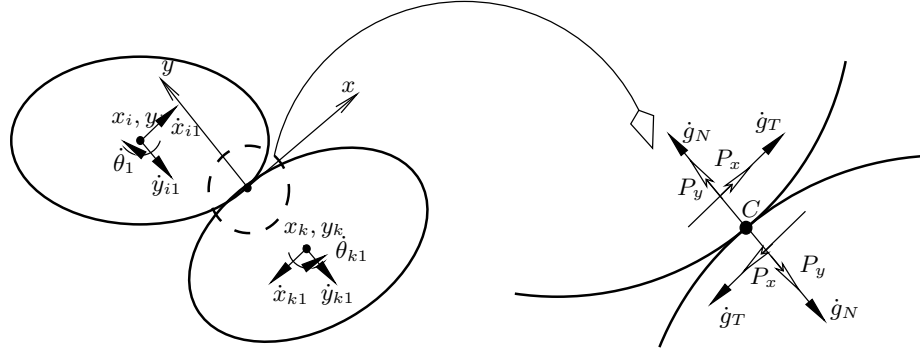


Figura A.1: Impacto analítico con fricción.

Las velocidades relativas en dirección normal y tangencial $\dot{g}_{T0}, \dot{g}_{N0}$, definidas en el plano de contacto por el punto c , (ver figura. A.1), entre cuerpos antes del impacto son:

$$\begin{aligned}
 \dot{g}_{T0} &= \dot{x}_{ic0} - \dot{x}_{kc0} = (\dot{x}_{i0} + \dot{\theta}_{i0}y_i) - (\dot{x}_{k0} + \dot{\theta}_{k0}y_k) \\
 \dot{g}_{N0} &= \dot{y}_{ic0} - \dot{y}_{kc0} = (\dot{y}_{i0} - \dot{\theta}_{i0}x_i) - (\dot{y}_{k0} - \dot{\theta}_{k0}x_k)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

mientras que en el instante del impacto:

$$\begin{aligned}
 \dot{g}_{T1} &= \dot{x}_{ic1} - \dot{x}_{kc1} = (\dot{x}_{i1} + \dot{\theta}_{i1}y_i) - (\dot{x}_{k1} + \dot{\theta}_{k1}y_k) \\
 \dot{g}_{N1} &= \dot{y}_{ic1} - \dot{y}_{kc1} = (\dot{y}_{i1} - \dot{\theta}_{i1}x_i) - (\dot{y}_{k1} - \dot{\theta}_{k1}x_k)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde $\dot{x}_{ic0}, \dot{y}_{ic0}, \dot{x}_{kc0}, \dot{y}_{kc0}, \dot{x}_{ic1}, \dot{y}_{ic1}$ y $\dot{x}_{kc1}, \dot{y}_{kc1}$ son las velocidades pre y post impacto en el punto de contacto. Imponiendo la condición que la velocidad normal \dot{g}_{N1} en el punto de contacto sea siempre cero y que la tangencial \dot{g}_{T1} sea cero únicamente para el caso stick, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\text{Stick} &\rightarrow P_x = -\frac{B_2\dot{g}_{T0} + (1+e)\dot{g}_{N0}B_3}{B_1B_2 - B_3^2}; & P_y &= -\frac{B_3\dot{g}_{T0} + (1+e)\dot{g}_{N0}B_1}{B_1B_2 - B_3^2} \\
\text{Slip} &\rightarrow P_x = -\mu P_y; & P_y &= -(1+e)\frac{\dot{g}_{N0}}{B_2 + \Psi\mu B_3}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde e es el coeficiente de restitución ($e = 1$ en este trabajo), $\Psi = \pm 1$ es la dirección de deslizamiento y las constantes B_1, B_2, B_3 están dadas por:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} + \frac{y_i^2}{m_i r_i^2} + \frac{y_k^2}{m_k r_k^2} \\
B_2 &= \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_k} + \frac{x_i^2}{m_i r_i^2} + \frac{x_k^2}{m_k r_k^2} \\
B_3 &= \frac{x_i y_i}{m_i r_i^2} - \frac{x_k y_k}{m_k r_k^2}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

La solución de las ecuaciones A.1 proporciona las velocidades post-impacto $\dot{x}_{i1}, \dot{y}_{i1}, \dot{\theta}_{i1}$ y $\dot{x}_{k1}, \dot{y}_{k1}, \dot{\theta}_{k1}$.

El valor del ángulo incidente θ (ver figura. 7.3) que limita la transición entre los casos slip y stick θ^* está dado por:

$$\tan \theta^* = (1+e) \frac{B_2 + \mu B_1}{B_3 + \mu B_2} \tag{A.6}$$

y el ángulo incidente que produce la máxima disipación es $\theta_{mx} = \theta^*/2$.

Para el algoritmo de este trabajo, la expresión completa de las variables $\psi_{1N}^{ik}, \psi_{2N}^{ik}, \psi_{1T}^{ik}, \psi_{2T}^{ik}$ calculadas en los capítulos 4 y 5 están dadas por:

$$\begin{aligned}
\psi_{1N}^{ik} &= \frac{\mathcal{N}_{1N} + \mathcal{N}_{2N} \frac{4\xi_N}{\Omega_N^{ik}}}{\mathcal{D}_{1N} + \mathcal{D}_{2N}}; & \psi_{2N}^{ik} &= \frac{4\xi_N}{\Omega_N^{ik}} - \psi_{1N}^{ik} \\
\mathcal{N}_{1N} &= [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)^t] \mathbf{f}_{cN}^{ik} \\
\mathcal{N}_{2N} &= [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)^t] K_N N_{n+1/2}^{ik} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik}) \\
\mathcal{D}_{1N} &= \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t}{2} N_{n+1/2}^{ik} M^{i-1} N_{n+1/2}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i) + \\
&\quad \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t}{2} N_{n+1/2}^{ki} M^{k-1} N_{n+1/2}^{ki t} (\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k) \\
\mathcal{D}_{2N} &= -\frac{K_N}{2} (g_{Nn+1}^{ik} - g_{Nn}^{ik})^2
\end{aligned} \tag{A.7}$$

APÉNDICE A. FORMULACIONES ANALÍTICAS

$$\begin{aligned}
 \psi_{1T}^{ik} &= \frac{\mathcal{N}_{1T} + \mathcal{N}_{2T} \frac{4\xi_T}{\Omega_T^{ik}}}{\mathcal{D}_{1T} + \mathcal{D}_{2T}}; & \psi_{2T}^{ik} &= \frac{4\xi_T}{\Omega_T^{ik}} - \psi_{1T}^{ik} \\
 \mathcal{N}_{1T} &= [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)^t] \mathbf{f}_{cT}^{ik} \\
 \mathcal{N}_{2T} &= [(\mathbf{q}_{n+1}^i - \mathbf{q}_n^i)^t - (\mathbf{q}_{n+1}^k - \mathbf{q}_n^k)^t] K_T \mathbf{T}_{n+1/2}^{ik} (g_{Tn+1}^{ik} - g_{Tn}^{ik}) \\
 \mathcal{D}_{1T} &= \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i)^t}{2} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ik} M^{i-1} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ik t} (\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_n^i) + \\
 &\quad \frac{(\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k)^t}{2} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ki} M^{k-1} \mathbf{T}_{n+1/2}^{ki t} (\mathbf{p}_{n+1}^k - \mathbf{p}_n^k) \\
 \mathcal{D}_{2T} &= -\frac{K_T}{2} (g_{Tn+1}^{ik} - g_{Tn}^{ik})^2
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Bibliografía

- [AD63] ASTM-D422. *ASTM D422 Standard Test Method for Particle-Size Analysis of Soils*. American Society for Testing Materials, November 1963.
- [AP98] F. Armero and E. Petocz. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(3-4):269–300, 1998.
- [AP99] F. Armero and E. Petocz. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: Formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179(1-2):151–178, 1999.
- [AR01a] F. Armero and I. Romero. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. part i: low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(20-21):2603 – 2649, 2001.
- [AR01b] F. Armero and I. Romero. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. part ii: second-order methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52):6783 – 6824, 2001.
- [Arf85] G. Arfken. Gibbs phenomenon. *Mathematical Methods for Physicists*, (14):783–787, 1985.
- [Ast96] C.J. Astill. Velacs project. verification of liquefaction analysis by centrifugal studies. Toronto, Canada, July 1996.
- [BC85] K.-J. Bathe and A.B. Chaudhary. Solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(1):65–88, 1985. cited By (since 1996) 130.
- [BFJ⁺09] A. Bobet, A. Fakhimi, S. Johnson, J. Morris, F. Tonon, and M.R. Yeung. Numerical models in discontinuous media: Review of advances for rock mechanics applications. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(11):1547–1561, 2009. cited By (since 1996) 0.
- [BPA07] R. Bravo and J. L. Perez-Aparicio. Discontinuous numerical analysis of masonry vaults, 2007.

BIBLIOGRAFÍA

- [BPA08] R. Bravo and J.L. Pérez-Aparicio. *Numerical Soil Mechanics Experiments using Discontinuous Deformation Analysis*, in *Computational Contact Mechanics*, volume 1 of *Computational mechanics*. Springer-Verlag, 2008.
- [BPR10] N Bicanic, D A Ponniah, and J I Robinson. *Discontinuous deformation analysis of masonry bridges*. Saxe-Coburg Publications, 2010.
- [CCL97] F. Calvetti, G. Combre, and J. Lanier. Experimental micro-mechanical analysis of a 2d granular material: relation between structure evolution and loading path. *MECHANICS OF COHESIVE-FRICTIONAL MATERIALS*, 2:121–163, 1997.
- [CH01] V. Ceanga and Y. Hurmuzlu. A new look at an old problem: Newton’s cradle. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 68(4):575–583, 2001.
- [CL98] V. Chawla and T.A. Laursen. Energy consistent algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(5):799–827, 1998.
- [COI98] Guangqi C., Yuzo O., and Takahiro I. Development of high-order manifold method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(4):685–712, 1998.
- [GD] C. Griffiths and C. Dyt. Accessing sedsim: sedimentary process modelling software.
- [G.H88] Shi G.H. *Discontinuous deformation analysis- A new model for the statics and dynamics of block systems*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- [Gib99] J.W. Gibbs. Fourier series. *Nature*, (50):200–606, 1899.
- [GMP01] O. Gonzalez, J.H. Maddocks, and R.L. Pego. Multi-multiplier ambient-space formulations of constrained dynamical systems, with an application to elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 157(4):285–323, 2001.
- [Gon96] O. Gonzalez. Time integration and discrete hamiltonian systems. *Journal of Nonlinear Science*, 6(5):449–467, 1996.
- [Gon99] O. Gonzalez. Mechanical systems subject to holonomic constraints: Differential-algebraic formulations and conservative integration. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 132(1-2):165 – 174, 1999.

-
- [Gon00] O. Gonzalez. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13-14):1763–1783, 2000.
- [GS96] O. Gonzalez and J.C. Simo. On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear hamiltonian systems with symmetry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(3-4):197–222, 1996.
- [Har77] M.E. Harr. *Mechanics of Particulate Media. A Probabilistic Approach*. McGraw–Hill, 1977.
- [HMAL00] M.W. Heinstein, F.J. Mello, S.W. Attaway, and T.A. Laursen. Contact - impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3-4):621–640, 2000.
- [HT06] Patrice Hauret and Patrick Le Tallec. Energy-controlling time integration methods for nonlinear elastodynamics and low-velocity impact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):4890 – 4916, 2006. John H. Argyris Memorial Issue. Part I.
- [HTS⁺76] T. Hughes, R.L. Taylor, J.L. Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8(3):249–276, 1976. cited By (since 1996) 103.
- [Hug87] T. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1987.
- [JJ85] Oden J.T and Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (52):527–634, 1985.
- [KJ95] Te-Chih K. and Bray J. Modeling of particulate media using discontinuous deformation analysis. *Journal of engineering mechanics*, 11(11):1234–1242, 1995.
- [Lau08] T. A. Laursen. *Computational Contact Mechanics*, volume 1 of *Computational mechanics*. Springer-Verlag, 2008.
- [Lav] G. Lavin. Stonehenge brought using wood basket weaving.
- [Lay53] A.G. Layard. Discoveries in the ruins of nineveh and babylon, i and ii., 1853.

BIBLIOGRAFÍA

- [LC97] T.A. Laursen and V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(5):863–886, 1997.
- [Lee94] K. Lee. A numerical solution for dynamic contact problems satisfying the velocity and acceleration compatibilities on the contact surface. *Computational Mechanics*, 15(3):189–200, 1994.
- [LHSF05] G. Lube, H. E. Huppert, R. S. J. Sparks, and A. Freundt. Collapses of two-dimensional granular columns. *Physical Review E*, 72(4), 10 2005.
- [LL02] T.A. Laursen and G.R. Love. Improved implicit integrators for transient impact problems - geometric admissibility within the conserving framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(2):245–274, 2002.
- [LL03] G.R. Love and T.A. Laursen. Improved implicit integrators for transient impact problems - dynamic frictional dissipation within an admissible conserving framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(19):2223–2248, 2003.
- [LM01] T. A. Laursen and X. N. Meng. A new solution procedure for application of energy-conserving algorithms to general constitutive models in nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47):6309 – 6322, 2001.
- [Lov97] G.R. Love. An accurate energy-conserving numerical method for impacting systems. Master’s thesis, Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 1997.
- [LQB06] S. López-Querol and R. Blázquez. Liquefaction and cyclic mobility model for saturated granular media. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS*, 30:413–439, 2006.
- [LW69] Lambe and Whitman. *Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, Canada, 1969.
- [ML02a] X.N. Meng and T.A. Laursen. Energy consistent algorithms for dynamic finite deformation plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(15-16):1639–1675, 2002. cited By (since 1996) 22.

-
- [ML02b] X.N. Meng and T.A. Laursen. On energy consistency of large deformation plasticity models, with application to the design of unconditionally stable time integrators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38(10):949–963, 2002.
- [MOB95] A. Munjiza, D.R.J. Owen, and N. Bicanic. Combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering computations*, 12(2):145–174, 1995.
- [New59] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics division*, pages 67–94, July 1959.
- [PSB99] T. Pöschel, T. Schwager, and N.V. Brilliantov. Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 10(1):169–174, 1999.
- [SG93] J.C. Simo and O. Gonzalez. Assessment of energy-momentum and symplectic schemes for stiff dynamical systems. pages 1–12, New Orleans, LA, USA, 1993. Publ by ASME, New York, NY, United States.
- [SLM91] J.C. Simo, D. Lewis, and J.E. Marsden. Stability of relative equilibria. part i: The reduced energy-momentum method. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 115(1):15–59, 1991.
- [SPM91] J.C. Simo, T.A. Posbergh, and J.E. Marsden. Stability of relative equilibria. part ii: Application to nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 115(1):61–100, 1991.
- [ST92] J.C. Simo and N. Tarnow. Conserving algorithms for nonlinear dynamics. volume 246, pages 41–50, Anaheim, CA, USA, 1992. Publ by ASME, New York, NY, United States.
- [STD95] J.C. Simo, N. Tarnow, and M. Doblare. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(9):1431–1473, 1995.
- [Str94] W. J. Stronge. Swerve during three-dimensional impact of rough rigid bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 61(3):605–611, 1994.
- [STW92] J.C. Simo, N. Tarnow, and K.K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1):63–116, 1992.
-

BIBLIOGRAFÍA

- [SW91] J.C. Simo and K.K. Wong. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(1):19–52, 1991.
- [TB99] Patricia A. Thomas and Johnathan D. Bray. Capturing nonspherical shape of granular media with clusters. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(3):169–178, March 1999.
- [TP93] R. L. Taylor and P. Papadopoulos. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(12):2123–2140, 1993.
- [WLW08] C. Wellmann, C. Lillie, and P. Wriggers. A contact detection algorithm for superellipsoids based on the common-normal concept. *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, 25(5):432–442, 2008.
- [WM92] Y. Wang and M. T. Mason. Two-dimensional rigid-body collisions with friction. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 59(3):635–642, 1992.