



UGR

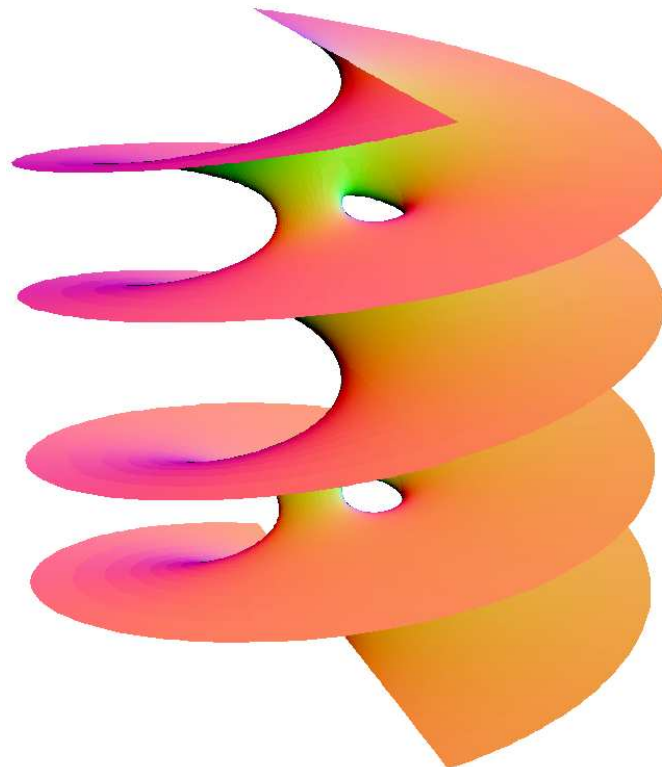
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Geometría y Topología

TESIS DOCTORAL

Superficies Minimales Completas en el Espacio Euclídeo

Antonio Alarcón López



SUPERFICIES MINIMALES COMPLETAS EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

Memoria presentada por el licenciado Antonio Alarcón López, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Francisco Martín Serrano y Leonor Ferrer Martínez, Profesores Titular y Contratado Doctor, respectivamente, de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, Enero de 2008

Ldo. Antonio Alarcón López
Aspirante al grado de Doctor

Prof. Dr. Francisco Martín Serrano
Codirector de la Memoria

Prof^a. Dra. Leonor Ferrer Martínez
Codirectora de la Memoria

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Agradecimientos

El camino ha sido bastante largo, también sinuoso. Durante estos años, he tenido la fortuna de encontrarme con mucha gente que me ha dado parte de su tiempo, compañía, ayuda profesional y personal y sobre todo, ha tenido paciencia conmigo. A mí, si algo me ha enseñado la vida es a ser agradecido...

En primer lugar, vaya mi agradecimiento a Paco, por todo lo que me ha enseñado (no solo matemáticas), por todos sus valiosos consejos y por tantos y tan amenos cafés compartidos. Sin él esta tesis no hubiera sido posible.

Agradezco a Leonor su infinita amabilidad y todo el tiempo que ha invertido en ayudarme y en trabajar conmigo. Gracias también a Paco López y a Nikolai, en quienes pude apoyarme cuando más lo necesitaba. Por último, gracias a todos mis compañeros de hoy y de siempre, especialmente a Ana, César, José Antonio y José María, que son mucho más que eso.

Fuera de este mundo de las matemáticas, también hay muchas personas que han contribuido a la realización de esta tesis, dándome fuerzas para seguir adelante y la posibilidad de desconectar cuando lo he necesitado. Gracias a Isa, porque es mi amiga y porque la quiero. Gracias a Chotiga, ella hizo genial mi estancia en Marsella. A María, por darme los buenos días cada mañana. También doy gracias a Ángel, Jessica, Marta y, para no olvidarme de nadie, a todos mis amigos (vosotros sabéis quienes sois) por todos los buenos momentos compartidos.

Finalmente, agradezco a toda mi familia el haberme dado su amor incondicional durante toda mi vida. Sobre todo, gracias a mis padres y a mi hermana, pues ellos me han convertido en la persona que soy. Para terminar, quiero dar gracias a Mama Pepa por todo y de todo corazón.

A mis padres

“Me gustan los problemas,
no existe otra explicación
¡Esta sí es una
dulce condena!”

Índice general

Resumen y conclusiones	XIII
Abstract and conclusions	XVII
Introducción	XXI
1. Preliminares	1
1.1. Superficies de Riemann	2
1.1.1. El tipo conforme	3
1.1.2. Conjuntos nodales de funciones armónicas	4
1.1.3. Divisores sobre una superficie de Riemann	5
1.1.4. La fórmula de Riemann-Hurwitz	8
1.1.5. Métricas en superficies de Riemann	9
1.1.6. Métricas cónicas	9
1.1.7. Multiciclos	13
1.2. Superficies Minimales	14
1.2.1. La Representación de Weierstrass	15
1.2.2. La Transformación de López-Ros	19
1.2.3. Finales	21
1.2.4. Otras propiedades	23
1.3. Geometría de Convexos	24
1.3.1. Demostración de Meeks-Yau del Teorema de Minkowski	25
I El Problema de Calabi-Yau	27
2. Introducción	31
2.1. El Problema de Calabi-Yau para superficies minimales embebidas	35
2.2. Superficies minimales completas y propias en dominios acotados de \mathbb{R}^3	36
2.3. El problema del tipo y regiones universales para superficies minimales	37
2.4. El comportamiento asintótico	38

3. Lema tipo Runge	41
3.1. Preparando la demostración del Lema 3.1	42
3.2. Demostración del Lema 3.1	46
4. Lema de propia	51
4.1. Demostración del Lema 4.1	53
4.1.1. Preparando el primer proceso de deformación	54
4.1.2. El primer proceso de deformación	60
4.1.3. Propiedades del primer proceso de deformación	69
4.1.4. Preparando el segundo proceso de deformación	74
4.1.5. El segundo proceso de deformación	76
4.1.6. La inmersión Y que demuestra el Lema	78
4.2. Refinamiento para el caso de convexidad estricta	86
5. Lemmas de Completitud	89
5.1. Lema previo	90
5.1.1. Demostración del Lema 5.1	92
5.2. Lema Principal	107
5.2.1. Demostración del Lema 5.2	107
6. Uniendo ser propia y completitud	113
7. Teoremas de Densidad para Superficies Minimales Completas en \mathbb{R}^3	117
7.1. Completitud	119
7.2. Completitud y ser propia	123
7.2.1. Dominios convexos, regulares y acotados	123
7.2.2. Dominios estrictamente convexos, regulares y acotados	127
7.2.3. Dominios convexos	129
8. Una Superficie Minimal Completa y Propia en \mathbb{R}^3 con una Cantidad no Numera-	
ble de Finales	133
8.1. Demostración del Teorema 8.1	135
II El Helicoide Simplemente Periódico de Género Uno	141
9. Introducción	145
9.1. Descripción geométrica	149
9.2. Determinación de los datos de Weierstrass	151
9.3. La curvatura total de \mathcal{H}_1 es -8π	151
9.4. Un primer resultado de unicidad	152
9.5. Otra representación de \mathcal{H}_1	154
10. Un Teorema de Unicidad	157
10.1. Demostración del Teorema 10.1	158
Bibliografía	177

Resumen y conclusiones

En este capítulo presentaremos los resultados principales que se han detallado a lo largo de la memoria y que son aportación original del doctorando a la teoría de superficies minimales completas en el espacio Euclídeo. Posteriormente, comentaremos algunos de los problemas más interesantes que están abiertos en la actualidad y que están relacionados con la materia objeto de esta memoria.

Resultados

Esta memoria consta de tres bloques claramente diferenciados. El primero de ellos (Capítulo 1) tiene carácter preliminar. En él estableceremos las definiciones y resultados básicos que son necesarios para el correcto entendimiento del resto de la memoria. Haremos especial hincapié en algunas de las propiedades de las superficies de Riemann y de las superficies minimales.

El segundo bloque (que se corresponde con la Parte I) lo dedicaremos al estudio del problema de Calabi-Yau para superficies minimales en el espacio Euclídeo tridimensional. Todos los resultados que mostraremos en este bloque pueden encontrarse en [AFM3]. La aportación más importante de esta parte se trata de un Teorema de Densidad para superficies minimales completas y de tipo hiperbólico. Hasta hace poco tiempo, tales superficies jugaban un papel marginal en la teoría global de superficies minimales. No obstante los resultados que hemos mostrado en esta memoria sugieren que la familia de las superficies minimales completas e hiperbólicas está presente en algunos de los más interesantes aspectos de la teoría de superficies minimales.

Teorema. *Las superficies minimales hiperbólicas, de topología finita y propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 forman un conjunto denso en el espacio de todas las superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , provisto con la topología de convergencia diferenciable sobre conjuntos compactos.*

Como caso particular de este teorema, podemos obtener el siguiente resultado de existencia para superficies minimales completas y propias en dominios convexos, con topología finita arbitraria.

Teorema. Para todo dominio convexo D en \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable) existe una inmersión minimal completa y propia $f : M \rightarrow D$, donde M es una superficie de Riemann abierta y con topología finita arbitraria.

Finalmente, uno de las más interesantes corolarios del Teorema de densidad es la construcción del primer ejemplo de superficie minimal completa, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y con una cantidad no numerable de finales.

Teorema. Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una inmersión minimal completa y propia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con una cantidad de finales no numerable.

En el tercer y último bloque de la memoria (Parte II) estudiaremos el helicoides simplemente periódico de género uno. Se trata de una superficie minimal completa y embebida que fue descubierta por Hoffman, Karcher y Wei y resultó fundamental en la construcción del helicoides de género uno. El resultado principal de esta parte de la memoria puede encontrarse en [AFM1] y se trata de un Teorema de Unicidad para el helicoides simplemente periódico de género uno. En particular, demostraremos que esta superficie minimal es única en términos de su topología, curvatura total y simetría.

Teorema. El helicoides simplemente periódico de género uno de Hoffman, Karcher y Wei es la única superficie minimal completa, propiamente embebida en \mathbb{R}^3 y simplemente periódica que satisface las siguientes condiciones:

- Es simétrica respecto a una línea vertical.
- Su cociente por la traslación vertical tiene género uno y dos finales helicoidales.
- La curvatura total de la superficie es -8π .

Problemas abiertos

A continuación expondremos brevemente varias cuestiones de gran interés que guardan relación con el helicoides de género uno o con el problema de Calabi-Yau. Algunos de estos problemas volverán a ser comentados en los capítulos de introducción de cada una de las partes de la memoria.

Topología admisible por una superficie minimal propiamente inmersa en \mathbb{R}^3

Una aplicación del Teorema de Densidad es que todo dominio plano puede ser minimal y propiamente inmerso en \mathbb{R}^3 . Nuevamente, el embebimiento crea una dicotomía, puesto que W. H. Meeks III, J. Pérez y A. Ros han demostrado que los únicos dominios

planos minimal y propiamente embebidos en \mathbb{R}^3 son los planos, las catenoides, el helicoide y los ejemplos minimales de Riemann [MePRo3]. A partir de estos resultados surge un nuevo problema muy interesante: ¿qué superficies de Riemann pueden ser minimal y propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 ? Este problema ha sido resuelto muy recientemente por L. Ferrer, F. Martín y W. H. Meeks III [FMMMe]. Lo que han probado es que dado D un dominio convexo (posiblemente $D = \mathbb{R}^3$) o acotado y regular, entonces para cualquier superficie de Riemann abierta M existe una inmersión $f : M \rightarrow D$ minimal completa y propia.

El problema de Calabi-Yau para superficies minimales embebidas

La respuesta a si existe o no una superficie minimal completa, acotada y embebida es sin duda la cuestión más importante sin resolver acerca del problema de Calabi-Yau (véase la Sección 2.1). Existen varios resultados parciales que implican que, de existir una tal superficie, debe tener género infinito. Actualmente, la construcción de un ejemplo en una bola parece inabordable. En cambio, varios autores están trabajando en un ejemplo contenido en un semiespacio de \mathbb{R}^3 .

El problema de Calabi-Yau en otros ambientes

Existe una relación muy estrecha entre las superficies minimales de \mathbb{R}^3 y las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski tridimensional. Éstas admiten una representación de Weierstrass semejante a la de las minimales en \mathbb{R}^3 . Esta relación permite adaptar las técnicas usadas en el problema de Calabi-Yau para minimales al campo de las maximales. En esta línea, el doctorando ha conseguido varios resultados [A1, A3] tanto usando los argumentos de N. Nadirashvili [N1] como los de S. Morales [Mo1]. También existe un enlace similar entre las superficies minimales de \mathbb{R}^3 y las de curvatura media constantemente uno en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , esto es, las superficies de Bryant. Así, F. Martín, M. Umehara y K. Yamada han construido ejemplos de superficies de Bryant completas y acotadas [MUYa].

En contraste con estas situaciones, la mayoría de los espacios en que se estudian superficies minimales no tienen un comportamiento tan agradable y, por tanto, las técnicas usadas en \mathbb{R}^3 no son adaptables. Uno de los casos más interesantes es el de \mathbb{H}^3 . Las superficies minimales en el hiperbólico no admiten representación de Weierstrass, luego, para la construcción de ejemplos acotados y completos se necesitaría el uso de argumentos novedosos.

Existencia de helicoides de género finito mayor que uno

Aún abierto sigue el problema de la existencia de helicoides de género finito mayor que uno. Por un lado, M. Traizet y M. Weber [TrWe] han dado un primer paso más allá de las evidencias numéricas, hacia la demostración de la existencia de un helicoide de género finito arbitrario. Su idea es usar razonamientos similares a los que utilizaron

Hoffman, Weber y Wolf en su construcción de un helicoides de género uno, pero usando una familia distinta de superficies $\{H_g^t \mid 0 < t < \epsilon\}$. El elemento H_g^t es una superficie minimal embebida, periódica y asintótica al helicoides. Además, es invariante por un movimiento screw vertical. La superficie cociente tiene género g y dos finales helicoidales.

Por otro lado, D. Hoffman y B. White están trabajando en otro método completamente diferente. Su propuesta consiste en construir un helicoides de género g en $\mathbb{S}^2(t) \times \mathbb{R}$, siendo t el radio de la esfera. El siguiente paso sería tomar límite cuando t tiende a infinito, obteniendo así una superficie en \mathbb{R}^3 .

Unicidad del helicoides de género uno

Los embebimientos de \mathcal{H}_1 y del helicoides de género uno derivado de él fueron obtenidos por D. Hoffman, M. Weber y M. Wolf [HWeWo, We1]. Por otro camino, usando métodos variacionales, la existencia de un helicoides de género uno embebido (y simétrico) ha sido demostrada recientemente por D. Hoffman y B. White [HWh2]. Aunque hay evidencias numéricas de que sólo existe un helicoides embebido con género uno, a nuestro entender, este hecho aún no está probado. Además, existen pruebas computacionales de la existencia de helicoides de género uno inmersos pero no embebidos [Bo].

Abstract and conclusions

In this chapter we present the main results that will be detailed along the Ph.D. Thesis and that are original work of the Ph.D. student on the theory of complete minimal surfaces in the Euclidean space. Later, we will discuss some interesting open problems related with the topics studied in this report.

Results

This thesis is divided in three different pieces. The first one (Chapter 1) contains the preliminaries. We will set up the definitions and the results that are required for the well understanding of the rest of the thesis. We will emphasise some properties of Riemann surfaces and minimal surfaces.

The second piece (which corresponds with Part I) will be devoted to the study of the Calabi-Yau problem for minimal surfaces in the 3-dimensional Euclidean space. All the results that we show in this part can be found in [AFM3]. The main work consists of a Density Theorem for hyperbolic complete minimal surfaces. Until the 1980's, it was a general thought that complete minimal surfaces of hyperbolic type played a marginal role in the global theory of minimal surfaces. However, the techniques and methods developed to study the Calabi- Yau problem have showed that these surfaces are present in some of the most interesting aspects of the theory.

Theorem. *Properly immersed, hyperbolic minimal surfaces of finite topology are dense in the space of all properly immersed minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , endowed with the topology of smooth convergence on compact sets.*

In particular, we can obtain the following existence result for arbitrary finite topology complete minimal surfaces that are proper in convex domains.

Theorem. *For any convex domain D in \mathbb{R}^3 (not necessarily bounded or smooth) there exists a complete proper minimal immersion $f : M \rightarrow D$, where M is an open Riemann surface with arbitrary finite topology.*

Finally, one of the most interesting applications of our Density Theorem is the construction of the first example of a complete minimal surface properly immersed in \mathbb{R}^3 with an uncountable number of ends.

Theorem. *There exists a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ and a complete proper minimal immersion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ which has uncountably many ends.*

In the last piece of the thesis (Part II) we will study the singly periodic genus one helicoid. It is a complete embedded minimal surface which was discovered by Hoffman, Karcher and Wei, and that was in the origin of the construction of the genus one helicoid. The main result on this part is a Uniqueness Theorem for the singly periodic genus one helicoid and can be found in [AFM1]. Specifically, we will prove that this minimal surface is unique in terms of its topology, total curvature and symmetry.

Theorem. *The singly periodic genus one helicoid of Hoffman, Karcher and Wei is the only properly embedded in \mathbb{R}^3 singly periodic minimal surface satisfying the following properties:*

- *It is symmetric respect to a vertical line.*
- *Its quotient by a vertical translation has genus one and two helicoidal ends.*
- *The total curvature of the surface is -8π .*

Open problems

Now we will briefly discuss some very interesting questions related with the genus one helicoid or with the Calabi-Yau problem.

Admissible topology of a properly immersed minimal surface in \mathbb{R}^3

An application of the Density Theorem is that any planar domain can be properly and minimally immersed in \mathbb{R}^3 . Again, embeddedness creates a dichotomy in the global theory of minimal surfaces, because it has been recently proved by W. H. Meeks, J. Pérez and A. Ros [MePRo3] that the only properly embedded, non-flat, minimal planar domains in \mathbb{R}^3 are the catenoid, the helicoid and Riemann's minimal examples. From these results arises a new problem: which Riemann surfaces can be properly and minimally immersed in \mathbb{R}^3 ? This problem has been solved very recently by L. Ferrer, F. Martín and W. H. Meeks III [FMMe]. They have proved that given D a domain which is convex (possibly $D = \mathbb{R}^3$) or smooth and bounded, then for any open Riemann surface M , there exists a complete proper minimal immersion $f : M \rightarrow D$.

The Calabi-Yau problem for embedded minimal surfaces

Clearly, the most important open question related with the Calabi-Yau problem is the proof of the existence or not of an embedded complete bounded minimal surface. There exist some partial answers to this question. They imply that such a surface should have infinite genus. Nowadays, the construction of an example included in a ball looks unapproachable. However, some authors are working on an example contained in a halfspace of \mathbb{R}^3 .

The Calabi-Yau problem in other spaces

There exists a close relationship between minimal surfaces in \mathbb{R}^3 and maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3 . Maximal surfaces in \mathbb{L}^3 admit a Weierstrass representation that is similar to the Weierstrass representation of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . This fact lets us adapt the arguments utilized in the Calabi-Yau problem for minimal surfaces to solve the corresponding problem for maximal surfaces. So, the Ph.D. student has obtained several results [A1, A3], using both Nadirashvili's [N1] and Morales' [Mo1] techniques. Moreover, there exists a similar link between minimal surfaces in \mathbb{R}^3 and constant mean curvature one surfaces in the hyperbolic space \mathbb{H}^3 , i.e., Bryant surfaces. By this way, F. Martín, M. Umehara and K. Yamada have constructed examples of bounded complete Bryant surfaces [MUYa].

On the other hand, minimal surfaces in a general space have not so nice behaviour, therefore, the techniques used in \mathbb{R}^3 are not useful. One of the most interesting cases is \mathbb{H}^3 . Minimal surfaces in the hyperbolic space do not admit Weierstrass representation, hence, the construction of bounded complete minimal surfaces in \mathbb{H}^3 needs new arguments.

Existence of an arbitrary finite genus helicoid

The problem of the existence of a helicoid with finite genus remains open. On one hand, M. Traizet and M. Weber [TrWe] have made the first step beyond numerical evidence towards an existence proof of a genus g helicoid. Their idea consists of using similar reasonings that those that Hoffman, Weber and Wolf utilized while the construction of the genus one helicoid, but working with a different family of surfaces $\{H_g^t \mid 0 < t < \epsilon\}$. The element H_g^t is an embedded periodic minimal surface asymptotic to the helicoid. Moreover, each family is invariant under a vertical screw motion. The quotient surfaces have genus g and two helicoidal ends.

On the other hand, D. Hoffman and B. White are working in a completely different argument. Their approach consists of constructing a genus g helicoid in $\mathbb{S}^2(t) \times \mathbb{R}$, where t is the radius of the sphere. The following step would be take limit when t goes to infinity, obtaining by this way a surface in \mathbb{R}^3 .

The uniqueness of the genus one helicoid

The embeddedness of \mathcal{H}_1 and the genus one helicoid derived from it were obtained by D. Hoffman, M. Weber and M. Wolf [HWeWo, We1]. On the other hand, using variational methods, the existence of an embedded (symmetric) genus one helicoid has been recently proved by D. Hoffman and B. White [HWh2]. Although there are numerical evidences that there is only one embedded genus one helicoid, to our knowledge this fact remains unproven. Moreover, there exist computacional proofs of the existence of an immersed genus one helicoid which is not embedded [Bo].

Introducción

Poca gente fuera del mundo de las matemáticas es consciente de la diversidad de las experiencias matemáticas, el grado en que diferentes tópicos matemáticos tienen diferentes y distintivos matices, a menudo apetecibles para algunos matemáticos y repelentes para otros. El atractivo de la teoría de superficies minimales parece residir en la concreción de los objetos estudiados, su origen y relación con el mundo físico y el modo en que están en la intersección de gran número de ramas de la matemática. En los últimos veinticinco años un nuevo ingrediente ha sido añadido: la disponibilidad de los gráficos hechos con ordenador nos proporcionan ilustraciones que son, a la vez, matemáticamente instructivas y estéticamente agradables. La teoría de las superficies minimales cuenta con dos siglos y medio de historia y, en la actualidad, se mantiene como un campo de extrema vitalidad de la investigación matemática.

En 1744, Euler expuso y resolvió el problema de encontrar las superficies de rotación que minimicen área [Eu]. Salvo el plano, la única superficie con esta característica es el catenoide [Bn], que se obtiene por revolución de la curva catenaria. Años después, Lagrange, con diecinueve años de edad, discutió en una serie de cartas a Euler el problema de encontrar un grafo sobre una región del plano, con valores prescritos en el borde y que fuese un punto crítico para el funcional área. Desde su estudio del Cálculo de Variaciones, él formuló la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer un tal grafo $f = f(u, v)$ [La]:

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0, \quad (1)$$

que admite la expresión en forma de divergencia

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Esta ecuación de segundo orden, no lineal y elíptica, se conoce en la literatura como Ecuación de Euler-Lagrange (posteriormente, Ecuación de los grafos minimales). Sin embargo, Lagrange no proporcionó ninguna solución nueva.

En 1776, Meusnier [Mu] mostró que el helicoides también es una solución de (1). A él también debemos una interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange: para tales superficies, la semisuma de las curvaturas principales se anula idénticamente. Esta cantidad se conoce actualmente, por sugerencia de Sophie

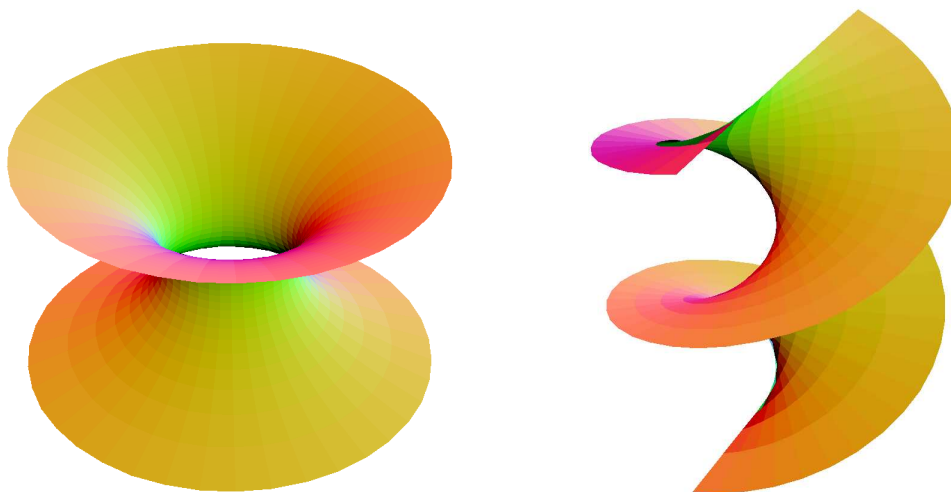


Figura 1: El catenoide y el helicoido

Germain, como la curvatura media de la superficie. Históricamente, esta caracterización es lo que se ha tomado por definición de superficie minimal.

Definición 1. Una superficie en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 se dice minimal si su curvatura media es idénticamente cero.

Las superficies minimales tienen una propiedad que las definen (en realidad tienen varias, algunas de ellas las comentaremos más adelante), todo trozo suficientemente pequeño de una superficie minimal (tan pequeño como para que sea un grafo sobre cierto plano) es la superficie de menor área entre todas las superficies con el mismo borde, equivalentemente, es solución de (1).

Primero Monge en 1784 [Mn1, Mn2], después Legendre en 1787 [Le], y más tarde Lacroix y Ampère entre otros, integraron la ecuación de Lagrange obteniendo fórmulas que han de cumplir las funciones coordenadas de las superficies minimales, en términos de funciones analíticas. Ya en la década de los 30 del siglo XIX, unos sesenta años después de la prueba de la minimalidad del helicoido y el catenoide, Scherk anunció [Sc1, Sc2] ecuaciones explícitas para cinco nuevas superficies minimales. Estas ecuaciones habían sido encontradas usando las fórmulas de representación de Monge-Legendre. Entre estas superficies se encontraban las famosas superficies simple y doblemente periódicas de Scherk.

Tras esto, apareció una nueva caracterización de las superficies minimales, que conecta la teoría de superficies minimales con el análisis complejo: una superficie en \mathbb{R}^3 es minimal si, y solo si, sus coordenadas son funciones armónicas respecto de la estructura conforme asociada a la métrica inducida en la superficie por la métrica euclídea. Esta conexión hizo posibles los avances en la llamada primera época dorada de la teoría

clásica de superficies minimales (aproximadamente 1855-1890). En este periodo, muchos ilustres matemáticos hicieron aportaciones, tales como Catalan, Bonnet, Serret, Riemann, Weierstrass, Enneper, Schwarz, Weingarten, Beltrami, Ribaucour, Neovius, Darboux, Bianchi, Lie, Schoenflies y muchos otros que deberían ser aquí mencionados. Uno de los descubrimientos más significativos de esa época ocurrió en 1863 cuando Christoffel observó que la aplicación de Gauss de una superficie minimal es conforme, y que este hecho las caracteriza, junto con las esferas. Esto ha resultado trascendental en el estudio de las superficies minimales completas, pues una de las líneas de investigación más fructíferas en el estudio de esta familia ha sido la obtención de teoremas tipo Lioville para la aplicación de Gauss.

El físico belga Plateau llevó a cabo a mediados del siglo XIX multitud de experimentos con películas de jabón, los cuales le condujeron a dar una interpretación física de las superficies minimales: pueden ser obtenidas físicamente sumergiendo un alambre curvado en una disolución jabonosa [Pl]. Por ello, el problema de determinar la existencia de superficies minimales con cierta topología prefijada y cuya frontera es una curva cerrada prescrita (o un conjunto de tales curvas), recibe el nombre de Problema de Plateau. Los matemáticos de la época pronto observaron que se encontraban ante un

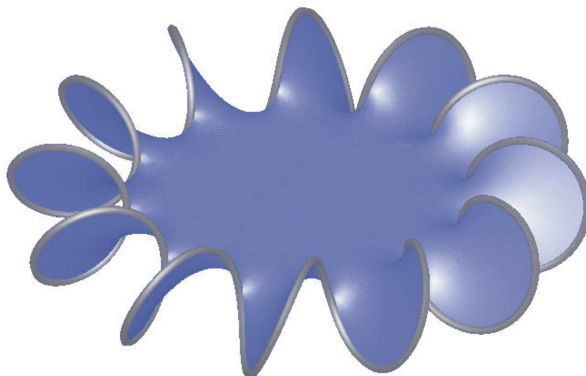


Figura 2: *El problema de Plateau*

problema no solo de extraordinaria dificultad, sino también de posibilidades ilimitadas. Desafortunadamente, Plateau carecía del bagaje matemático necesario para abordar los aspectos teóricos de este problema y, naturalmente, evidencias experimentales nunca pueden reemplazar a una demostración matemática de existencia. Las primeras formulaciones precisas, así como los primeros resultados parciales se deben a Schwarz, Riemann y Weierstrass. De ahí surgieron la superficie triplemente periódica de Schwarz [Sw] (resolviendo el problema con borde un cuadrilátero prefijado) y los ejemplos de Riemann [Rm2, Rm3], los cuales forman una familia uno-paramétrica de superficies minimales foliadas por líneas y círculos en planos paralelos. También apareció el primer ejemplo de superficie minimal no orientable: la superficie de Henneberg [He]. Los descubrimientos de estos nuevos ejemplos se basaron en las fórmulas de representación dadas por Weierstrass [Wt1, Wt2] y Enneper [E], obtenidas a partir de funciones meromorfas definidas sobre superficies de Riemann.

Entonces hubo un largo periodo de tiempo en el que apenas se produjeron avances en la teoría de superficies minimales, el único gran resultado es debido a Bernstein [Be], quien demostró que las únicas soluciones de la ecuación (1) definidas sobre todo el plano complejo son las funciones afines. Sin embargo, si fueron creciendo otras teorías, tales como la integración, la medida de Lebesgue, el análisis funcional o la teoría de ecuaciones elípticas, que a la postre resultaron ser poderosas herramientas en el estudio de las superficies minimales. Este periodo de sequía concluyó cuando en 1931 Douglas [D] y Radó [Ra] resolvieron satisfactoriamente (de modo independiente) el Problema de Plateau para discos bordeados por una curva de Jordan. Destaquemos que por este trabajo Douglas fue galardonado en 1936 con una de las dos primeras medallas Fields (la otra fue concedida a Ahlfors). Así, comenzó una segunda época dorada en la teoría de superficies minimales. En el periodo de 1930 a 1940, aproximadamente, hubo una gran actividad en este campo y aparecieron descubrimientos estimulantes y que abrían nuevos caminos. Nos referimos a trabajos debidos a Courant, McShane, Morrey, Morse, Shiffman, Tompkins, Tonelli y muchos otros.

A partir de la década de 1950, en el estudio de las superficies minimales aparece una nueva línea de trabajo que está conceptualmente alejada de la motivación original, empieza el estudio de las superficies minimales completas. El principal impulsor en este sentido fue el matemático neoyorkino Osserman. Él dió una visión más global de las fórmulas de representación de Weierstrass y Enneper, llenándolas de un contenido más geométrico, acorde con los avances que las Geometrías Diferencial y Algebraica habían experimentado. A partir de ellas, toda inmersión isométrica y minimal de una superficie riemanniana M en \mathbb{R}^3 , puede describirse a partir de una 1-forma holomorfa sobre M y una función meromorfa, verificando una condición de compatibilidad (ver la parte de los preliminares dedicada a la Representación de Weierstrass). En consecuencia empezaron a poder ser utilizadas las herramientas del Análisis Complejo y de la teoría de superficies de Riemann, para el estudio de las superficies minimales en el espacio euclídeo.

Además, Osserman llamó la atención de la comunidad científica sobre la importante subfamilia formada por las superficies minimales completas con curvatura total finita¹. Huber había demostrado (Teorema 13 en los preliminares) que la estructura conforme de una tal superficie se corresponde con una superficie de Riemann compacta salvo una cantidad finita de puntos (los finales topológicos), en particular, estas superficies son de tipo parabólico. A partir de esta información, Osserman [O3] observó que la 1-forma y la función que determinan a una tal superficie mediante la representación de Weierstrass pueden ser extendidas de manera meromorfa a la superficie compacta.

Ya en los años 80, sorprendieron los hallazgos por parte de Chen y Gackstatter [CeGa] de los primeros ejemplos de superficies minimales orientables con topología no trivial. También sorprendente fue el descubrimiento por parte de Costa [Cs], en 1984, de una superficie minimal completa, embebida, con género uno y tres finales. Realmente, Costa produjo la superficie, pero fueron Hoffman y Meeks [HMe2, HMe3] los que demostraron que la superficie de Costa es embebida y la generalizaron para género finito arbitrario. A partir de entonces comenzó lo que muchos geómetras consideran una tercera época dorada de la teoría clásica de superficies minimales. Un gran número de ejemplos de superficies minimales completas han sido descubiertos (en especial con

¹La curvatura total de una superficie se define como la integral sobre la superficie de su curvatura de Gauss.

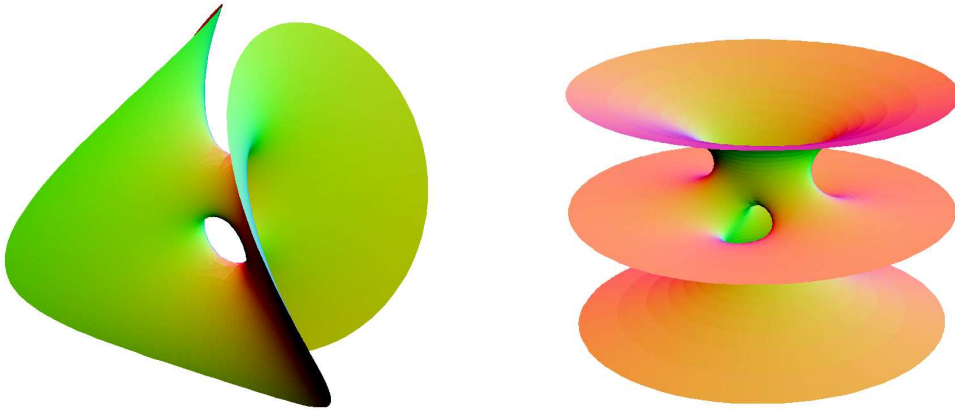


Figura 3: Las superficies de Chen y Gackstater y de Costa

curvatura total finita), muchas veces con la ayuda de modernos ordenadores, los cuales nos permiten visualizar fieles modelos de dichas superficies. Esta abundancia de ejemplos ha motivado la búsqueda de teoremas de clasificación, y de resultados de no existencia de superficies minimales con determinadas propiedades.

Uno de los ejemplos aparecidos en dicha época y que ha generado mayor cantidad de literatura es el helicoides de género uno. Como consecuencia de un teorema de Collin [Co], toda superficie minimal completa, embebida y con topología finita (esto es, género finito y una cantidad finita de finales), o bien tiene curvatura total finita o bien tiene únicamente un final. Como acabamos de manifestar, el caso de las superficies de curvatura total finita está muy desarrollado: hay muchos ejemplos. Sin embargo, hasta ahora solo es conocido (aparte del helicoides) un único ejemplo de superficie minimal completa, embebida en \mathbb{R}^3 , con curvatura total infinita y un final: el helicoides de género uno [HKW1, HKW3]. La prueba de su existencia se debe a Hoffman, Karcher y Wei, mientras que en la demostración de su embebimiento participaron Hoffman, Weber y Wolf [HWeWo, We1]. Uno de los pasos más importantes en el descubrimiento del helicoides de género uno fue la construcción, por parte de Hoffman, Karcher y Wei [HKW2], de una superficie minimal completa, propiamente embebida en \mathbb{R}^3 y con las siguientes propiedades:

- Es simplemente periódica e invariante por una traslación vertical.
- El cociente de la superficie por la traslación tiene género uno.
- Tiene dos finales helicoidales.
- El eje de coordenadas vertical está incluido en la superficie y es una línea de simetría.
- Módulo traslaciones verticales, tiene dos líneas paralelas horizontales que cortan al eje vertical y son líneas de simetría.

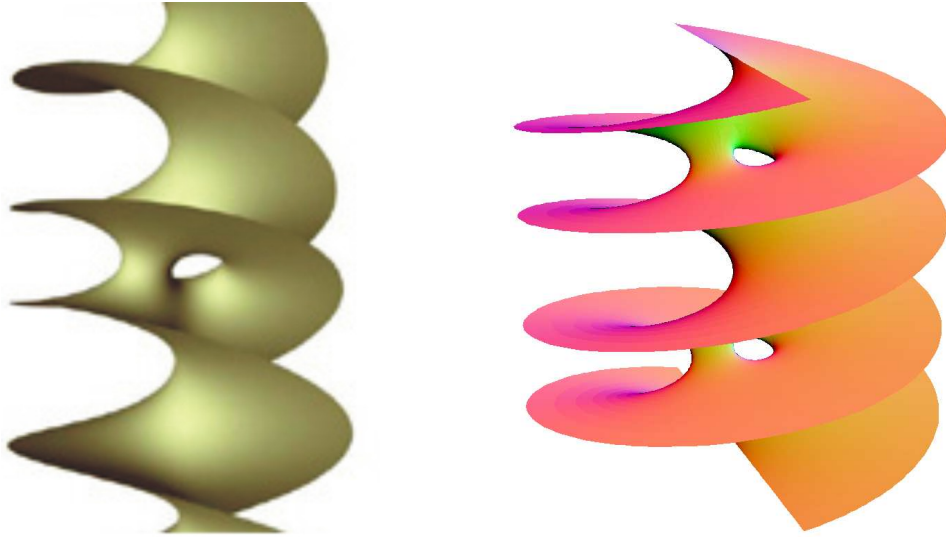


Figura 4: El helicoide de género uno y el simplemente periódico

Esta superficie minimal es conocida como el helicoide simplemente periódico de género uno y constituyó el primer ejemplo encontrado de superficie minimal embebida asintótica al helicoide. Uno de los resultados principales de esta memoria (parte II) es un teorema de unicidad para el helicoide simplemente periódico de género uno [AFM1].

Teorema. *El helicoide simplemente periódico de género uno de Hoffman, Karcher y Wei es la única superficie minimal completa, propiamente embebida en \mathbb{R}^3 y simplemente periódica que satisface las siguientes condiciones:*

- *Es simétrica respecto a una línea vertical.*
- *Su cociente por la traslación vertical tiene género uno y dos finales helicoidales.*
- *La curvatura total de la superficie es -8π .*

Como decíamos, la sobreabundancia de ejemplos encontrados a partir de 1980, llevó a la búsqueda de teoremas de clasificación. Uno de los pioneros se debe a López y Ros [LRo], quienes en 1991 demostraron la unicidad del catenoide como superficie minimal completa, embebida, no plana, con curvatura total finita y la topología de una esfera punteada. En el curso de la prueba de su resultado, López y Ros introdujeron una forma de deformar una superficie minimal a través de superficies minimales que hoy se conoce como deformación de López-Ros. Los detalles de esta herramienta, sencilla a la par que poderosa, serán explicados en el capítulo de preliminares. Como quedará de manifiesto más adelante, la deformación de López-Ros ha sido crucial en varios puntos de la presente memoria.

El siguiente gran resultado en esta línea lo debemos a Meeks y Rosenberg [MeR3]. Ellos caracterizaron el helicoides como la única superficie minimal (sin borde) no plana, simplemente conexa y propiamente embebida en \mathbb{R}^3 . Muy recientemente, Meeks, Pérez y Ros han puesto punto final a la clasificación de los dominios planos minimal y propiamente embebidos en \mathbb{R}^3 [MePRo3], los únicos no planos son el helicoides, el catenoide y los ejemplos minimales de Riemann.

Aparte de los resultados de clasificación, los objetivos de más actualidad en la teoría de superficies minimales son la construcción de ejemplos con determinadas propiedades o, en contraposición, teoremas de no existencia. A comienzos de los setenta, todos los ejemplos de superficies minimales completas y no llanas se extendían indefinidamente en todas las direcciones del espacio, era imposible encontrar una coordenada acotada para tales superficies. Además, el Principio del Máximo impide la existencia de superficies minimales compactas. Estos hechos llevaron a Calabi a conjeturar la no existencia de superficies minimales completas y acotadas en \mathbb{R}^3 [Ca, Y1, Y2]. Este tópico es conocido en la literatura como el Problema de Calabi-Yau. Para obtener un contraejemplo a esta conjetura hubo que esperar a 1996, cuando fueron construidos por Nadirashvili [N1]. Previamente, Jorge y Xavier [JX2] habían proporcionado ejemplos de superficies minimales con una coordenada acotada. Es obvio que el tipo conforme de estas superficies no puede ser parabólico: la acotación de alguna de las coordenadas implica automáticamente hiperbolicidad. Por otro lado, Morales [Mo1] construyó el primer ejemplo de superficie minimal con género finito, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y con tipo conforme hiperbólico (un disco). Estos hechos contradijeron el pensamiento general de que las superficies minimales completas e hiperbólicas desempeñaban un papel marginal en el desarrollo de la teoría. Estos trabajos impulsaron la construcción de nuevos ejemplos de minimales completas e hiperbólicas combinando varias propiedades [LMMo1, LMMo2, MMo1, MN]: acotación, orientabilidad, topología no trivial... una de las líneas fundamentales de investigación está relacionada con la cualidad de ser propios (en \mathbb{R}^3 , en dominios convexos o en dominios acotados y regulares) de los ejemplos, donde encontramos principalmente los trabajos de Martín y Morales [MMo3, MMo4]. La primera parte de esta memoria constituye un avance significativo en la construcción de superficies minimales completas y de tipo hiperbólico, pues auna los ingredientes que acabamos de citar. Además, damos un resultado de densidad que pone de manifiesto la relevancia de tales superficies [AFM3].

Teorema de Densidad. *Las superficies minimales hiperbólicas, de topología finita y propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 forman un conjunto denso en el espacio de todas las superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , provisto con la topología de convergencia diferenciable sobre conjuntos compactos.*

Como caso particular de este teorema, podemos obtener el siguiente resultado de existencia para superficies minimales completas y propias en dominios convexos, con topología finita arbitraria.

Teorema. *Para todo dominio convexo D en \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable) existe una inmersión minimal completa y propia $f : M \rightarrow D$, donde M es una superficie de Riemann abierta y con topología finita arbitraria.*

Finalmente, uno de los más interesantes corolarios del Teorema de densidad es la construcción del primer ejemplo de superficie minimal completa, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y con una cantidad no numerable de finales.

Teorema. *Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una inmersión minimal completa y propia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con una cantidad de finales no numerable.*

1

Preliminares

Dedicaremos este capítulo a introducir una serie de conceptos y resultados que son necesarios para la lectura del resto de la memoria. También usaremos este capítulo para fijar gran parte de la notación que utilizaremos en los teoremas principales de la memoria.

El capítulo se encuentra dividido en tres secciones claramente diferenciadas. La Sección 1.1 trata las superficies de Riemann. En la Sección 1.2 nos ocuparemos del concepto de superficie minimal, haciendo especial hincapié en la representación de Weierstrass de una superficie minimal y en la transformación de López-Ros. Finalmente, en la Sección 1.3 trataremos algunos aspectos de la geometría de los cuerpos convexos del espacio euclídeo.

1.1

Superficies de Riemann

En 1851 [Rm1], el célebre matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann realizó una disertación sobre la teoría general de funciones de variable compleja, basada en las hoy llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann. En ella inventó el instrumento de la superficie de Riemann.

Aparte de ser un importante campo de estudio por sí mismas, las superficies de Riemann han sido una fuente de inspiración, intuición y ejemplos en varias ramas de las matemáticas. En particular, las superficies de Riemann conectan el análisis y la geometría en el campo de la variable compleja, de manera que permiten relacionar la geometría con ciertas propiedades de las funciones analíticas. La información que daremos aquí está obtenida de [FaKr], para más detalles consúltese dicha referencia.

Definición 2. Una superficie de Riemann \mathcal{M} es una superficie diferenciable conexa y con un atlas holomorfo, equivalentemente, una variedad compleja conexa de dimensión uno.

Una aplicación continua entre superficies de Riemann $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ se dice que es holomorfa cuando al escribirla en coordenadas locales obtenemos una función holomorfa entre abiertos del plano complejo. Asimismo, una aplicación de una superficie de Riemann en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, se dice que es meromorfa cuando es holomorfa y no constantemente ∞ . En tal caso, a las preimágenes por f de $\{\infty\}$ se les llama los polos de f . En esta línea se definen funciones armónicas, subarmónicas... sobre superficies de Riemann.

Por otro lado, una 1-forma compleja ω sobre una superficie de Riemann \mathcal{M} se dice que es holomorfa si localmente se escribe como $\omega = f dz$, siendo f una función holomorfa sobre \mathcal{M} . Finalmente, una 1-forma meromorfa ω sobre \mathcal{M} es una 1-forma holomorfa sobre un abierto U de \mathcal{M} , de manera que $\mathcal{M} \setminus U$ es un conjunto discreto y ω se escribe de la forma $\omega = f dz$, siendo f una función meromorfa sobre \mathcal{M} cuyos polos están en $\mathcal{M} \setminus U$. En este caso, se llaman polos de ω a los elementos de $\mathcal{M} \setminus U$.

Los ejemplos más sencillos de superficie de Riemann son el plano complejo \mathbb{C} , el disco unidad abierto \mathbb{D} y la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Es sorprendente el hecho de que toda superficie de Riemann simplemente conexa sea conformemente equivalente a alguna de estas tres (esto es, existe un biholomorfismo entre ellas que identifica las estructuras conformes correspondientes a cada una).

Teorema 1 (Teorema de uniformización de Koebe). Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a \mathbb{C} , \mathbb{D} ó $\overline{\mathbb{C}}$.

1.1.1

El tipo conforme

Existe una clasificación de las superficies de Riemann en tres familias, mutuamente excluyentes, teniendo en cuenta la existencia o no de ciertas funciones subarmónicas sobre ellas:

Definición 3. Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann. Diremos que:

- \mathcal{M} es *elíptica* si es compacta.
- \mathcal{M} es *parabólica* si no es compacta y no existen funciones subarmónicas negativas y no constantes sobre \mathcal{M} .
- \mathcal{M} es *hiperbólica* si existe una función subarmónica negativa y no constante sobre \mathcal{M} .

Nótese que realmente las tres familias anteriores son mutuamente excluyentes. Para ello observemos que una superficie hiperbólica no puede ser compacta, lo cual es una consecuencia evidente del principio del máximo para funciones subarmónicas.

Teorema 2 (Principio del Máximo [Cn1]). Sea G un abierto conexo del plano y $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si existe un punto $a \in G$ con $u(a) \geq u(z) \forall z \in G$, entonces u es una función constante. Por tanto, si u está definida de manera continua en \bar{G} , los posibles máximos de la función estarán en ∂G .

En el caso simplemente conexo, esta clasificación de las superficies de Riemann tiene una especial conexión con la estructura conforme. Nótese que $\bar{\mathbb{C}}$ es elíptica, \mathbb{C} es parabólica y \mathbb{D} es hiperbólica. Así, como consecuencia del Teorema de uniformización de Koebe que hemos enunciado anteriormente, tenemos que una superficie de Riemann simplemente conexa y elíptica (resp. parabólica, hiperbólica) es conformemente equivalente a $\bar{\mathbb{C}}$ (resp. \mathbb{C} , \mathbb{D}).

El problema de decidir cual es el tipo conforme de una superficie de Riemann dada es conocido como el problema del tipo. Es fácil distinguir entre el tipo elíptico y los otros dos, lo realmente interesante es saber distinguir entre los tipos parabólico e hiperbólico.

Los términos parabólico e hiperbólico también están definidos para superficies de Riemann con borde.

Definición 4. Dada una superficie de Riemann \mathcal{M} con borde no vacío, diremos que es *parabólica* si toda función armónica (esto es, armónica en el interior de \mathcal{M} y continua en \mathcal{M}) acotada en la superficie viene determinada por sus valores en el borde. En caso contrario, diremos que \mathcal{M} es *hiperbólica*.

A continuación introduciremos el concepto de que una superficie de Riemann sea recurrente. El término recurrente surge en la teoría que estudia el modelo matemático del fenómeno físico llamado movimiento Browniano, que es el movimiento caótico que describe una pequeña partícula suspendida en un líquido. Curiosamente, en el ambiente de las superficies de Riemann, el concepto de recurrencia está relacionado con el tipo conforme de la superficie. Nosotros optaremos por la definición dada por W. H. Meeks III [Me1].

Definición 5. *Dada una superficie de Riemann sin borde M , diremos que es recurrente si, y solo si, $M \setminus O$ es parabólico para cualquier conjunto abierto y no vacío $O \subsetneq M$. En caso contrario, diremos que M es transitoria.*

En realidad, el siguiente resultado de Grigor'yan [G] muestra que el concepto de recurrencia se reduce a que la superficie de Riemann no tenga tipo conforme hiperbólico.

Teorema 3. *Sea M una superficie de Riemann sin borde. Equivalen:*

- M es transitoria.
- M es hiperbólica.
- Existe una función subarmónica negativa no constante en M .

1.1.2

Conjuntos nodales de funciones armónicas

En la subsección anterior hemos visto la importancia que tiene el concepto de armonicidad en la teoría de superficies de Riemann. Las funciones armónicas definidas sobre superficies de Riemann tienen un comportamiento agradable. Una propiedad que nos será de mucha utilidad es el gran control existente sobre los conjuntos nodales de tales funciones. Recordemos que, se llama conjunto nodal al conjunto de ceros de las funciones propias del operador laplaciano en una variedad riemanniana. En general, la topología de los conjuntos nodales es muy complicada, pero en el caso de las funciones armónicas definidas sobre superficies de Riemann es manejable. El siguiente es un resultado clásico de la teoría de variable compleja [Ch, Teorema 2.5].

Teorema 4. *Dada una superficie de Riemann y una función armónica definida sobre ella, entonces el conjunto de ceros de la función cumple las siguientes propiedades:*

- *Consiste en un conjunto de curvas analíticas.*
- *Los puntos críticos en las líneas de ceros son aislados.*
- *Cuando un subconjunto de líneas de ceros se corta, lo hace formando un sistema equiangular.*

Recordemos que las funciones coordenada de una superficie minimal definida sobre una superficie de Riemann son funciones armónicas. Así, el resultado anterior nos permitirá entender la estructura que tiene el conjunto intersección de una tal superficie minimal y un plano. Al foliar \mathbb{R}^3 por planos paralelos, podremos comprender como son las curvas de nivel de la superficie.

1.1.3

Divisores sobre una superficie de Riemann

Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann y f (resp. ω) una función (resp. 1-forma) meromorfa sobre \mathcal{M} con ceros en puntos p_1, \dots, p_k de órdenes n_1, \dots, n_k y polos en puntos q_1, \dots, q_h de órdenes m_1, \dots, m_h . Por definición, la expresión

$$\frac{p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}}{q_1^{m_1} \cdots q_h^{m_h}}$$

se denomina el divisor principal asociado a la función f (resp. el divisor canónico asociado a la 1-forma ω). Denotaremos por (f) (resp. (ω)) al divisor de f (resp. ω). En la misma línea, se define el divisor de ceros de la función f (resp. de la 1-forma ω) y se denota por $(f)_0$ (resp. $(\omega)_0$) a la expresión

$$p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} .$$

Finalmente, denominamos divisor de polos de f (resp. ω) a

$$q_1^{m_1} \cdots q_h^{m_h} ,$$

y lo denotamos por $(f)_\infty$ (resp. $(\omega)_\infty$).

En general, un divisor sobre una superficie de Riemann \mathcal{M} es una expresión formal del tipo

$$D = \frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_h} ,$$

con p_i, q_j puntos en \mathcal{M} no necesariamente distintos entre sí. Cuando $p_i \neq q_j$ para cualesquiera i y j , decimos que el divisor D es irreducible y definimos su grado como $\deg(D) = k - h \in \mathbb{Z}$. Se llama soporte del divisor D al conjunto de puntos $\{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_h\}$. Diremos que un divisor irreducible D es entero, y notaremos $D \geq 1$ si $h = 0$, equivalentemente, si D es de la forma $D = p_1 \cdots p_k$.

Denotaremos por $\text{div}(\mathcal{M})$ al conjunto de todos los divisores sobre la superficie de Riemann \mathcal{M} . En dicho espacio puede introducirse de forma natural una operación de multiplicación que lo dota de estructura de grupo. Así, si

$$D_1 = \frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_h}, \quad D_2 = \frac{p'_1 \cdots p'_{k'}}{q'_1 \cdots q'_{h'}}$$

entonces definimos $D_1 \cdot D_2$ como el divisor

$$D_1 \cdot D_2 = \frac{p_1 \cdots p_k \cdot p'_1 \cdots p'_{k'}}{q_1 \cdots q_h \cdot q'_1 \cdots q'_{h'}}$$

Esto nos permite también definir una relación de orden entre los divisores: dados dos divisores D_1 y D_2 diremos que D_1 es mayor o igual que D_2 , y denotaremos $D_1 \geq D_2$, si D_1/D_2 es un divisor entero.

Algunos resultados relacionados con divisores sobre superficies de Riemann que necesitaremos a lo largo de la memoria son los que mostramos a continuación [FaKr].

Nota 1. *Un divisor principal sobre una superficie compacta tiene grado cero, mientras que si \mathcal{M} es una superficie de Riemann compacta de género n , entonces los divisores canónicos tienen grado $2n - 2$.*

Teorema 5 (De los huecos de Noether). *Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann compacta con género positivo σ . Sean $p_1, p_2, p_3 \dots$ puntos en \mathcal{M} . Definimos los divisores*

$$D_0 = 1, \quad D_{j+1} = D_j p_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Llamamos cuestión j a ¿existe una función meromorfa f sobre \mathcal{M} con $(f) \geq D_j^{-1}$ y $(f) \not\geq D_{j-1}^{-1}$? Entonces, existen σ enteros

$$1 = n_1 < n_2 < \dots < n_\sigma < 2\sigma,$$

tales que la respuesta a la cuestión j es no si, y solo si, j es uno de los enteros de la lista. El caso $\sigma = 0$ es trivial ya que sobre la esfera siempre existe una función meromorfa con un único polo y simple.

Finalmente, si \mathcal{M} es una superficie de Riemann, entonces se define el (primer) grupo de cohomología holomorfa de de Rham como el espacio vectorial cociente de las 1-formas holomorfas en \mathcal{M} por las exactas (estas últimas son las diferenciales de funciones holomorfas en \mathcal{M}). Denotamos este grupo por $H_{hol}^1(\mathcal{M})$. Obviamente, $H_{hol}^1(\mathcal{M})$ es un espacio vectorial complejo. Además, su dimensión es conocida [FaKr].

Teorema 6. *Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann compacta de género g . Entonces*

$$\dim H_{hol}^1(\mathcal{M}) = g.$$

Teorema 7. *Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann compacta de género g . Tomemos p_1, \dots, p_k puntos distintos en \mathcal{M} y denotemos $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Entonces*

$$\dim H_{hol}^1(\mathcal{M}') = 2g + k - 1 .$$

El Jacobiano y la aplicación de Abel-Jacobi

El próximo objetivo es enunciar y probar un resultado de existencia de ciertas 1-formas sobre superficies de Riemann. Lo necesitaremos en la primera parte de la memoria para obtener métricas bien definidas sobre superficies de Riemann compactas a las que les hemos quitado un abierto.

Para poder detallar su prueba necesitamos introducir los conceptos de Jacobiano de una superficie de Riemann compacta \mathcal{M} , y la aplicación de Abel-Jacobi. Empecemos con

$$\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\} ,$$

una base canónica de la homología de \mathcal{M} , es decir, el número de intersección entre las curvas a_i y b_j es la delta de Kronecker δ_{ij} (véase la Sección III.1 en [FaKr]). Consideremos

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_g\} ,$$

su base dual en el espacio de las 1-formas holomorfas en \mathcal{M} . De este modo tenemos

$$\int_{a_k} \zeta_j = \delta_{jk} , \quad j, k = 1, \dots, g .$$

Llamemos Π a la matriz de orden $g \times g$ con entradas

$$\Pi_{jk} = \int_{b_k} \zeta_j , \quad j, k = 1, \dots, g .$$

Así, Π es simétrica y su parte imaginaria es definida positiva [FaKr, Sección III.2]. Denotemos por $L(\mathcal{M})$ al retículo de \mathbb{C}^g con coeficientes en \mathbb{Z} generado por las $2g$ columnas de la matriz (Id_g, Π) , siendo Id_g la matriz identidad de orden g . Nótese que (Id_g, Π) es una matriz de orden $g \times 2g$ y que sus columnas son linealmente independientes sobre \mathbb{R} (esto se debe a las propiedades que hemos citado de Π). De este modo, $L(\mathcal{M})$ es un retículo en \mathbb{C}^g con soporte compacto.

Definición 6. *Se define el Jacobiano de la superficie de Riemann \mathcal{M} como $J(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^g / L(\mathcal{M})$.*

Nótese que el Jacobiano de \mathcal{M} es una variedad compleja de dimensión g . A partir de la definición de $J(\mathcal{M})$ es inmediato comprobar que la siguiente es una aplicación bien definida.

Definición 7. *Fijado un punto $p_0 \in \mathcal{M}$. Se define la aplicación de Abel-Jacobi $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow J(\mathcal{M})$ dada por*

$$\varphi(p) = \left(\int_{p_0}^p \zeta_1, \dots, \int_{p_0}^p \zeta_g \right) \text{ mod } L(\mathcal{M}) ,$$

donde cada integral se hace a lo largo de una curva fija que une p_0 y p .

Ya estamos en condiciones de enunciar los resultados que necesitamos para la prueba del resultado que perseguimos, sus demostraciones pueden encontrarse en [FaKr, Na].

Proposición 1. *La aplicación de Abel-Jacobi es una aplicación holomorfa bien definida de \mathcal{M} en $J(\mathcal{M})$. Además, tiene rango máximo.*

Teorema 8 (Abel). *Sean D_1 y D_2 dos divisores enteros en \mathcal{M} . Entonces D_1 y D_2 son linealmente equivalentes¹ si, y solo si, $\varphi(D_1) = \varphi(D_2)$ en $J(\mathcal{M})$.*

Gracias al hecho de que $J(\mathcal{M})$ es un grupo abeliano, podemos extender la definición de aplicación de Abel-Jacobi a $\varphi : \text{div}(\mathcal{M}) \rightarrow J(\mathcal{M})$, dada por

$$\sum_{i=1}^r n_i p_i \mapsto \sum_{i=1}^r n_i \varphi(p_i),$$

donde $\text{div}(\mathcal{M})$ es el conjunto de todos los divisores sobre \mathcal{M} .

Por fin, enunciemos y demostremos el resultado de existencia de 1-formas que perseguíamos.

Proposición 2. *Sean \mathcal{M} una superficie de Riemann compacta de género g y $\emptyset \neq U \subset \mathcal{M}$ un abierto. Entonces existe una 1-forma meromorfa en \mathcal{M} tal que el soporte de su divisor está incluido en U .*

Demostración. Usando la Proposición 1 concluimos que la restricción de la aplicación de Abel-Jacobi

$$\varphi : \mathcal{M}^g \longrightarrow J(\mathcal{M})$$

es una aplicación de rango g (esto es, máximo). En particular, por ser U abierto, $\varphi(U^g)$ contiene a un abierto de $J(\mathcal{M})$. Por tanto, la aplicación

$$\varphi : \text{div}(U) \longrightarrow J(\mathcal{M})$$

es sobreyectiva. Así, existe un divisor $D \in \text{div}(U)$ con $\varphi(D) = \varphi(K_{\mathcal{M}})$, donde por $K_{\mathcal{M}}$ denotamos al divisor canónico de \mathcal{M} . En consecuencia, el Teorema de Abel garantiza que el divisor D es linealmente equivalente al divisor canónico $K_{\mathcal{M}}$, luego, existe una 1-forma meromorfa ω en \mathcal{M} cuyo divisor es D . Esta 1-forma ω prueba la proposición. ■

1.1.4

La fórmula de Riemann-Hurwitz

Las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas se comportan en casi toda la superficie como si fuesen aplicaciones recubridoras. Dadas \mathcal{M} y \mathcal{N} superficies de Riemann, p un punto de \mathcal{M} y $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una aplicación holomorfa y

¹Esto es, existe f una función meromorfa en \mathcal{M} con $(f) = D_1/D_2$.

no constante, entonces existen entornos coordenados de p y $f(p)$ de tal forma que f se escribe localmente como $z \mapsto z^n$. Además, este número n es independiente del sistema de coordenadas escogido, en esencia, representa el número de preimágenes por f de un punto en un entorno de $f(P)$. Al número natural $b_f(p) = n - 1$ se le llama el número de ramificación de f en p , y es fácil demostrar que la suma $B_f := \sum_{p \in M} b_f(p)$ es finita. Al entero B_f se le conoce como el índice de ramificación de f .

Teorema 9 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos superficies de Riemann y $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una aplicación holomorfa y no constante entre ellas. Entonces

$$\chi(\mathcal{M}) = \deg(f) \chi(\mathcal{N}) - B_f ,$$

donde χ denota la característica de Euler.

1.1.5

Métricas en superficies de Riemann

Es un hecho conocido [FaKr] que toda superficie de Riemann tiene asociada, de forma natural, una métrica riemanniana. Es más, en cada superficie de Riemann podemos introducir una métrica riemanniana completa de curvatura constante (aunque nosotros trabajaremos habitualmente con otro tipo de métricas). A lo largo de esta memoria, usaremos la métrica en las superficies para medir distancias de la forma que explicamos a continuación.

Sea \mathcal{M} una superficie de Riemann que lleva aparejada una métrica riemanniana ds^2 . Dado un subconjunto $W \subset \mathcal{M}$ y dos puntos $p, q \in W$, definimos la distancia entre ellos (en W y con la métrica ds^2) como

$$\text{dist}_{(W, ds)}(p, q) = \inf \{ \text{long}(\gamma, ds) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow W, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \} ,$$

donde por $\text{long}(\gamma, ds)$ entendemos la longitud de la curva γ medida con la métrica ds^2 .

Aprovechándonos de este modo de medir, definimos la distancia entre dos subconjuntos $T_1, T_2 \subset W$ de la forma

$$\text{dist}_{(W, ds)}(T_1, T_2) = \inf \{ \text{dist}_{(W, ds)}(p, q) \mid p \in T_1, q \in T_2 \} ,$$

y el diámetro de un conjunto como

$$\text{diam}_{ds}(W) = \sup \{ \text{dist}_{(W, ds)}(p, q) \mid p, q \in W \} .$$

1.1.6

Métricas cónicas

En esta subsección vamos a estudiar cierto tipo de métricas de Riemann sobre superficies que están íntimamente relacionadas con el estudio de las superficies minimales.

Definición 8. Sea M una superficie compacta, conexa y orientada, y sean p_1, \dots, p_n , n puntos distintos sobre M . Una métrica cónica sobre M será una métrica de Riemann g sobre $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, llana y satisfaciendo que si (D_i, z) es un disco conforme alrededor de p_i , entonces la métrica g se expresa localmente, alrededor de p_i , como

$$g = e^{2w} dz \wedge d\bar{z} ,$$

siendo $w = \beta_i \log(|z - z(p_i)|)$ una función continua en p_i , y β_i un número real. Al número β_i lo denotaremos por $\text{ord}_{p_i}(g)$.

Nota 2. Una métrica cónica sobre M determina una estructura conforme sobre $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ que extiende de forma única a los puntos p_i .

Existe una restricción global sobre los números $\beta_i = \text{ord}_{p_i}(g)$. Ésta viene descrita por el siguiente resultado. Su demostración es una fácil consecuencia del Teorema de Gauss-Bonnet (en su versión con borde) aplicado a $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$.

Lema 1 (Gauss-Bonnet). Sea M una superficie de Riemann de género σ y sea g una métrica cónica sobre M . Entonces

$$2\sigma - 2 = \sum_{i=1}^n \text{ord}_{p_i}(g) .$$

Ejemplo 1. Cualquiera estructura simplicial sobre una superficie compacta, conexa y orientada, define una métrica cónica sobre la estructura topológica subyacente.

Ejemplo 2. Sea ω una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta M , y sean $\{p_1, \dots, p_n\}$ los ceros y polos de ω . Fijado $z_0 \in M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, la función

$$f : M \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = \int_{z_0}^z \omega ,$$

es multivaluada sobre $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, pero se puede hacer el pull-back $f^*g_0^2$, donde g_0^2 representa la métrica euclídea de \mathbb{C} . A esta métrica sobre $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ la denotaremos por

$$\|\omega\|^2 := f^*g_0^2 .$$

Es inmediato comprobar que $\|\omega\|^2$ es una métrica cónica sobre M y además $\text{ord}_{p_i}(\|\omega\|^2)$ coincide con el orden de p_i como cero o polo de la 1-forma ω .

La aplicación desarrollante

Sea M una superficie de Riemann compacta y g una métrica cónica (llana) con singularidades en $\{p_1, \dots, p_n\} \subset M$. Consideremos $\{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ un atlas de $X \equiv M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ formado por isometrías (locales). Supongamos que dicho atlas induce una orientación en X . Llamemos funciones de transición

$$\gamma_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) ,$$

siempre que sea $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y conexo. Entonces, componiendo $\gamma_{ij} \circ \phi_j$ obtenemos una nueva carta en U_j que coincide con ϕ_i en $U_i \cap U_j$. De este modo, podemos extender la carta $\phi_i : U_i \cup U_j \rightarrow \mathbb{C}$.

Fijemos $x_0 \in X$ y consideremos una carta $(x_0 \in U_0, \phi_0)$. Sea $\Pi : \tilde{X} \rightarrow X$ el recubridor universal. Veamos \tilde{X} como el espacio de las clases de homotopía de arcos en X que salen de x_0 . Consideremos α un representante de $[\alpha] \in \tilde{X}$. Así, $\alpha(1) = \Pi([\alpha])$. Subdividamos la curva α ,

$$x_0 = \alpha(0), \quad x_1 = \alpha(t_1), \dots, \quad x_{n+1} = \alpha(t_{n+1}) = \alpha(1),$$

de manera que existen cartas $\{(U_0, \phi_0), \dots, (U_n, \phi_n)\}$ tales que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{i-1}$, $U_{i-1} \cap U_i$ es conexo y $x_i \in U_{i-1} \cap U_i$, para cada $i = 1, \dots, n$. Ajustando las cartas como hemos explicado antes, encontramos una nueva carta

$$\phi_0^\alpha := \gamma_{01} \circ \gamma_{12} \circ \dots \circ \gamma_{n-1n} \circ \phi_n : \bigcup_{i=0}^n U_i \rightarrow \mathbb{C}.$$

Así, ϕ_0^α coincide con la prolongación analítica de ϕ_0 a lo largo de α .

Definición 9. Fijados un punto base $x_0 \in X$ y una carta inicial $(x_0 \in U_0, \phi_0)$, se llama la aplicación desarrollante de X a la aplicación

$$D : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$$

cuya expresión local es $D = \phi_0^\alpha \circ \Pi$.

Nótese que la aplicación desarrollante de X puede verse como una aplicación multivaluada de X en \mathbb{C} .

Es fácil comprobar que si se cambian los datos iniciales (el punto base y la carta inicial), entonces la aplicación desarrollante cambia por un movimiento rígido de \mathbb{C} .

Nota 3. Sea ω una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta M , y sean $\{p_1, \dots, p_n\}$ los ceros y polos de ω . Consideremos la métrica cónica $\|\omega\|^2$ sobre $X = M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ descrita en el Ejemplo 2, con punto base $x_0 \in X$. Veamos \tilde{X} , el recubridor universal de X , como el espacio de las clases de homotopía de arcos en X que salen de x_0 . Entonces la aplicación

$$f : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f([\alpha]) = \int_\alpha \omega,$$

es una aplicación desarrollante de X .

Para su comprobación basta considerar la aplicación desarrollante de X con punto base x_0 y carta inicial $(x_0 \in U_0, \phi_0)$ escogida del siguiente modo: tomemos $[\alpha_0] \in \tilde{X}$ con $\Pi([\alpha_0]) = x_0$, sea \tilde{U}_0 un entorno de $[\alpha_0]$ tal que $\Pi|_{\tilde{U}_0} : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0 \equiv \Pi(\tilde{U}_0)$ sea biyectiva. Entonces, definimos $\phi_0 := f \circ (\Pi|_{\tilde{U}_0})^{-1} : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Gracias al Ejemplo 2, si \tilde{U}_0 es suficientemente pequeño, entonces $\phi_0 : (U_0, \|\omega\|^2) \rightarrow (\phi_0(U_0) \subset \mathbb{C}, g_0^2)$ es una isometría, luego

(U_0, ϕ_0) es una carta inicial válida. Finalmente, dados $[\alpha] \in \tilde{X}$, α un representante de $[\alpha]$, y ϕ_0^α la prolongación analítica de ϕ_0 a lo largo de α , entonces es inmediato comprobar que $\phi_0^\alpha(\Pi([\alpha])) = \int_\alpha \omega = f([\alpha])$, luego, f es la aplicación desarrollante de X con datos iniciales x_0 y (U_0, ϕ_0) .

Existencia y unicidad de las métricas cónicas

Dados M una superficie de Riemann compacta, $\{p_1, \dots, p_n\} \subset M$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{Z}$ un conjunto de enteros satisfaciendo la relación de Gauss-Bonnet (Lema 1), nosotros vamos a probar que existe una única métrica cónica g sobre M , cuyas singularidades son los puntos p_1, \dots, p_n y $\text{ord}_{p_i}(g) = \beta_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Proposición 3. *Sea M una superficie de Riemann compacta. Sean $\{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos distintos y $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{Z}$ satisfaciendo la relación de Gauss-Bonnet. Entonces existe g una única métrica cónica sobre M cuyos puntos cónicos son precisamente $\{p_1, \dots, p_n\}$ y $\text{ord}_{p_i}(g) = \beta_i$. La unicidad de g es salvo homotecias.*

Demostración. Supongamos primero que sobre M existe una métrica cónica con las características que buscamos. Sea \tilde{M} el recubridor universal de $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ y consideremos

$$D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$$

una aplicación desarrollante de M . Elegimos una 1-forma meromorfa, fija, ω_0 , sobre M , cuyo divisor expresamos como

$$(\omega_0) = \prod_{j=1}^m q_j^{b_j}.$$

Sea $\tilde{\omega}_0$ el levantamiento a \tilde{M} de ω_0 . Puesto que la métrica en $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ es llana, entonces para cualquier $\gamma \in \Pi_1(M \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ y para cualquier $\tilde{p} \in \tilde{M}$ se tiene que

$$D(\gamma\tilde{p}) = \lambda_\gamma \cdot D(\tilde{p}) + \mu_\gamma,$$

donde $\lambda_\gamma, \mu_\gamma \in \mathbb{C}$ y $\|\lambda_\gamma\| = 1$. Por tanto, si llamamos $\tilde{\alpha} := dD$, se tiene que $\tilde{\alpha}(\gamma\tilde{p}) = \lambda_\gamma \tilde{\alpha}(\tilde{p})$. Si definimos $\tilde{f} := \tilde{\alpha}/\tilde{\omega}_0$, entonces \tilde{f} es una función meromorfa en \tilde{M} verificando $\tilde{f}(\gamma\tilde{p}) = \lambda_\gamma \tilde{f}(\tilde{p})$. A partir de esta relación si consideramos la 1-forma meromorfa $\tilde{\beta} = d\tilde{f}/\tilde{f}$, entonces $\gamma^*\tilde{\beta} = \tilde{\beta}$, para toda transformación del recubridor, luego, $\tilde{\beta}$ se induce sobre $M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ a una 1-forma que llamaremos β . La 1-forma β tiene sus singularidades en el conjunto $\{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$.

Consideremos un punto p_i y un entorno suyo donde la métrica se escribe $e^{2w} dz \wedge d\bar{z}$, siendo $w - \beta_i \log|z - z(p_i)|$ continua. En cada punto de la fibra de ese entorno la aplicación D se escribe $D(z) = \int^z w^{\beta_i} dw$, equivalentemente, $\tilde{\alpha} = z^{\beta_i} dz$. Si asumimos que $p_i \neq q_j$, $\forall j$, entonces la 1-forma β se escribirá localmente alrededor de p_i como

$$\beta = \frac{\beta_i}{z} dz.$$

Esto significa que los puntos p_i son polos simples de β y que el residuo de β en p_i es β_i . De la misma forma se puede ver que q_j es un polo simple de β y el residuo correspondiente es $-\beta_j$. Si algún $p_i = q_j$, entonces el residuo en el correspondiente polo es la diferencia

de los exponentes $\beta_i - b_j$. Estos datos determinan la 1-forma β de forma única salvo multiplicar por constantes complejas.

Además, recordemos que

$$\tilde{f}(\tilde{p}) = \text{cte} \cdot \exp \left(\int^{\tilde{p}} \tilde{\beta} \right),$$

de forma que

$$\lambda_\gamma = \frac{\tilde{f}(\gamma\tilde{p})}{\tilde{f}(\tilde{p})} = \exp \left(\int_{\tilde{p}}^{\gamma\tilde{p}} \tilde{\beta} \right) = \exp \left(\int_\gamma \beta \right),$$

lo que significa que todos los periodos de β son imaginarios puros.

Todo esto nos determina la métrica cónica, salvo homotecias, siguiendo un proceso inverso, es decir: consideremos ω_0 una 1-forma meromorfa sobre M con divisor como el que hemos descrito antes. Entonces, existe β_0 una 1-forma meromorfa en M cuyo divisor es

$$(\beta_0) = \frac{1}{p_1 \cdots p_n \cdot q_1 \cdots q_m},$$

y además

$$\begin{cases} \text{Res}_{p_i}(\beta_0) = \beta_i & i = 1, \dots, n \\ \text{Res}_{q_j}(\beta_0) = -b_j & j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Aquí, estamos usando que $\sum_{i=1}^n \beta_i - \sum_{j=1}^m b_j = 0$ para garantizar la existencia de β_0 . Es sencillo ver que existe una 1-forma $\omega \in H(M)$ tal que $\beta = \beta_0 - \omega$ tiene todos sus periodos imaginarios puros. Por lo que hemos dicho antes, esta 1-forma es única salvo constantes complejas.

Consideramos $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ la función multivaluada

$$f(p) = \exp \left(\int^p \beta \right).$$

Finalmente, $g = \|f \cdot \omega_0\|$ es una métrica cónica con las características que estábamos buscando. ■

1.1.7

Multiciclos

Para concluir esta sección, vamos a introducir un nuevo concepto sobre ciertas superficies de Riemann. Es lo que nosotros llamaremos multiciclo. Para ello, tomemos \mathcal{M} una superficie de Riemann compacta y de género finito. Fijemos n un número natural y consideremos n discos abiertos $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_n$ en \mathcal{M} , de manera que sus curvas borde $\gamma_i = \partial\mathbb{D}_i$ sean curvas de Jordan diferenciables. Asumamos también que los cierres de los discos son dos a dos disjuntos, esto es, $\overline{\mathbb{D}_i} \cap \overline{\mathbb{D}_j} = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. En este ambiente hablaremos de multiciclo atendiendo a la siguiente definición.

Definición 10.

- Llamamos ciclo en \mathcal{M} a cada una de las curvas γ_i .
- Hablamos del interior del ciclo γ_i y lo denotamos por $\text{Int}(\gamma_i)$ al disco \mathbb{D}_i .
- Por multiciclo en \mathcal{M} entendemos la familia $\mathcal{J} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.
- Finalmente, definimos

$$\mathcal{M}(\mathcal{J}) := \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{\text{Int}(\gamma_i)}.$$

Como primera observación, cabe decir que el concepto de multiciclo es una generalización para superficies de Riemann compactas con género finito, del concepto de multigón que fue introducido por F. J. López, F. Martín y S. Morales en [LMMo2].

Veamos algunas de las propiedades de nuestros multiciclos. Dados dos multiciclos en \mathcal{M} con el mismo número de ciclos, $\mathcal{J} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ y $\mathcal{J}' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}$, diremos que $\mathcal{J}' < \mathcal{J}$ cuando ocurra que $\overline{\text{Int}(\gamma_i)} \subset \text{Int}(\gamma'_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. En tal caso, es claro que $\mathcal{M}(\mathcal{J}') \subset \mathcal{M}(\mathcal{J})$.

Asumamos ahora que \mathcal{M} lleva aparejada una métrica riemanniana ds^2 . Consideremos $\mathcal{J} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ un multiciclo en \mathcal{M} y ϵ un real positivo suficientemente pequeño. Entonces, podemos definir un nuevo multiciclo $\mathcal{J}^\epsilon = \{\gamma_1^\epsilon, \dots, \gamma_n^\epsilon\}$, donde por γ_i^ϵ entendemos el ciclo en \mathcal{M} definido por las dos siguientes propiedades:

- $\overline{\text{Int}(\gamma_i)} \subset \text{Int}(\gamma_i^\epsilon)$.
- $\text{dist}_{(\mathcal{M}, ds)}(q, \gamma_i) = \epsilon$ para todo q en γ_i^ϵ .

Es obvio que, con esta definición, se cumple $\mathcal{J}^\epsilon < \mathcal{J}$. De forma similar, definimos el multiciclo $\mathcal{J}^{-\epsilon} = \{\gamma_1^{-\epsilon}, \dots, \gamma_n^{-\epsilon}\}$, donde esta vez el ciclo $\gamma_i^{-\epsilon}$ viene definido por las propiedades:

- $\overline{\text{Int}(\gamma_i^{-\epsilon})} \subset \text{Int}(\gamma_i)$.
- $\text{dist}_{(\mathcal{M}, ds)}(q, \gamma_i) = \epsilon$ para todo q en $\gamma_i^{-\epsilon}$.

En este caso, la inclusión que tenemos es $\mathcal{J} < \mathcal{J}^{-\epsilon}$.

1.2**Superficies Minimales**

Sea M una superficie de Riemann y consideremos

$$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una inmersión de M en el espacio euclídeo tridimensional que admita derivadas de todos los órdenes.

Denotaremos \mathcal{S}_X a la métrica riemanniana en la superficie M que es pullback de la métrica euclídea. De esta forma, la inmersión $X : (M, \mathcal{S}_X) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es isométrica, esto es:

$$(\mathcal{S}_X)_p(u, v) = \langle (dX)_p(u), (dX)_p(v) \rangle, \quad \forall u, v \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Diremos que la inmersión X es completa cuando M lo sea para la métrica \mathcal{S}_X . Supongamos que M es una superficie orientada. Siendo así, la métrica riemanniana \mathcal{S}_X define una nueva estructura conforme sobre M [Ka].

Teorema 10. *Toda variedad Riemanniana orientable de dimensión dos tiene, de forma natural, una estructura de superficie de Riemann.*

Dicha estructura es la proveniente de un atlas holomorfo formado por la familia de parámetros isotermos que son compatibles con la orientación elegida.

La inmersión X se dirá conforme si la estructura conforme inducida por la métrica \mathcal{S}_X es la misma que la que tenía M como superficie de Riemann.

Una conocida fórmula para inmersiones conformes y orientadas afirma que

$$\Delta X = 2HG,$$

siendo Δ el operador laplaciano asociado a la métrica \mathcal{S}_X , $G : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss de la inmersión X y H su curvatura media. De la anterior fórmula se deduce que H se anula idénticamente si, y solo si, X es una aplicación armónica de M en \mathbb{R}^3 , esto es, sus coordenadas son funciones armónicas.

Definición 11. *Una inmersión $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice minimal, si su curvatura media se anula idénticamente.*

1.2.1

La Representación de Weierstrass

Entre 1860 y 1864, Weierstrass [Wt1, Wt2] y Enneper [E] mostraron, independientemente, unas fórmulas de representación para superficies minimales que precipitaron un importante avance en esta teoría. Estas fórmulas, que hoy son conocidas como representación de Weierstrass o de Enneper-Weierstrass, fueron recuperadas por Osserman ya a mediados del siglo XIX, mostrando su enorme importancia en el estudio de las superficies minimales completas. La representación de Weierstrass es una excelente herramienta, que identifica cada inmersión minimal con tres 1-formas holomorfas sobre una superficie de Riemann.

A lo largo de esta memoria, usaremos para la representación de Weierstrass la notación introducida por S. Morales en su Memoria de Tesis Doctoral [Mo2], así, esta subsección está basada fuertemente en su exposición. Para ampliar la información que vamos a dar aquí pueden consultarse [LM, O1], entre otros.

Consideremos M una superficie de Riemann, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme, T una base ortonormal en \mathbb{R}^3 y X_j , $j = 1, 2, 3$, las funciones coordenadas de X en la base T . Al ser dX_j , $j = 1, 2, 3$, 1-formas armónicas, si llamamos

$$\Phi_j = dX_j + i(*dX_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

siendo $*$ el operador de Hodge (ver [FaKr]), tenemos que Φ_j es una 1-forma holomorfa en M . Si $(U, z = u + iv)$ son unos parámetros locales isotermos de la superficie M para la métrica \mathcal{S}_X , entonces las 1-formas Φ_j tienen una expresión local en U de la forma

$$\Phi_j = \left(\frac{\partial X_j}{\partial u} - i \frac{\partial X_j}{\partial v} \right), \quad z = u + iv.$$

No es difícil darse cuenta de que Φ_j está globalmente definida sobre M , es decir, no depende de la elección de parámetros isotermos que hagamos. Teniendo en cuenta la anterior expresión, observamos que por ser X conforme se verifica

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0,$$

y por ser X una inmersión entonces

$$|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0.$$

Además, si tomamos p y q dos puntos en M y γ una curva diferenciable a trozos uniendo p con q , entonces tenemos

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi_j = X_j(q) - X_j(p), \quad j = 1, 2, 3,$$

donde por Re entendemos parte real. Puesto que la parte real de la integral no depende de la curva, solamente de los puntos inicial y final, es habitual escribir

$$\operatorname{Re} \int_p^q \Phi_j, \quad \text{en lugar de} \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi_j.$$

Con esta notación podemos reconstruir la inmersión X a partir de las 1-formas Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 mediante la fórmula

$$X(p) = X(p_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_1 \right) e_1 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_2 \right) e_2 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_3 \right) e_3, \quad (1.1)$$

donde p_0 es un punto fijo en M , $p \in M$ y $T = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Recíprocamente, dadas tres 1-formas Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 verificando

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0, \quad (1.2)$$

$$|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2 \neq 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0, \quad \forall \gamma \text{ curva cerrada en } M, \quad (1.4)$$

p_0 un punto fijo en M y $T = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , entonces la aplicación $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(p) = X(p_0) + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_1 \right) e_1 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_2 \right) e_2 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_3 \right) e_3 ,$$

es una inmersión minimal y conforme.

Es conveniente que observemos que las tres formas Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 dependen de la base ortonormal T en la que expresamos la inmersión. No obstante, no es difícil comprobar que si (Φ_1, Φ_2, Φ_3) y $(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3)$ son dos representaciones de Weierstrass de X , correspondientes a distintas bases ortonormales, entonces

$$(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3)^t = A \cdot (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^t ,$$

siendo A la matriz ortonormal del correspondiente cambio de base.

En la primera parte de esta memoria será imprescindible tener en cuenta cual es la base que estamos usando a la hora de trabajar con la representación de Weierstrass (en la segunda parte usaremos siempre la base canónica de \mathbb{R}^3). En consecuencia, en nuestra definición de representación de Weierstrass precisaremos la base ortonormal que se está teniendo en cuenta.

Definición 12. Por representación de Weierstrass entenderemos una cuadrupla $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$, en la que T es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 y Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 son 1-formas holomorfas sobre M verificando (1.2) y (1.3). Dadas dos representaciones de Weierstrass $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ y $(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{T})$, diremos que son equivalentes si

$$(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3)^t = A \cdot (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^t ,$$

donde A es la matriz de cambio de base entre T y \tilde{T} . Esto constituye una relación de equivalencia en la familia de las representaciones de Weierstrass. Denotaremos también por Φ a la clase de equivalencia de la representación Φ .

Sobre esta definición cabe hacer una serie de observaciones:

- Diremos que una representación de Weierstrass Φ no tiene periodos reales si verifica (1.4). En tal caso, la aplicación dada por (1.1) es una inmersión minimal conforme.
- Cuando una representación de Weierstrass $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ proporcione una inmersión minimal bien definida mediante (1.1), escribiremos la expresión de la inmersión como

$$X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi + C ,$$

para cada $p \in M$, con $p_0 \in M$ y $C \in \mathbb{R}$ fijos, donde estamos usando la notación

$$\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi \equiv \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_1 \right) e_1 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_2 \right) e_2 + \left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi_3 \right) e_3, \quad (1.5)$$

siendo $T = \{e_1, e_2, e_3\}$. Esta expresión no depende del representante elegido para la clase de Φ . Por tanto, podemos asociar a cada clase de equivalencia Φ , que proporcione una inmersión minimal bien definida, una familia de inmersiones $X_C = \operatorname{Re} \int \Phi + C$, $C \in \mathbb{R}^3$, que se diferencian únicamente en una traslación.

- Nótese que para Φ una clase de representaciones de Weierstrass y T una base ortonormal, siempre existe un representante de la forma $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$. En ocasiones utilizaremos para dicho representante la notación $\Phi = (\Phi_{1,T}, \Phi_{2,T}, \Phi_{3,T})$.

La información contenida en las tres 1-formas de una representación de Weierstrass $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ puede condensarse un poco más. Consideremos

$$\eta_{(\Phi,T)} = \Phi_1 - i\Phi_2 \quad (1.6)$$

$$g_{(\Phi,T)} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}. \quad (1.7)$$

Tenemos entonces una 1-forma holomorfa $\eta_{(\Phi,T)}$ y una función meromorfa $g_{(\Phi,T)}$, a partir de las cuales es posible recuperar las tres 1-formas de Φ , del modo siguiente:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g_{(\Phi,T)}^2)\eta_{(\Phi,T)}, \quad \Phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g_{(\Phi,T)}^2)\eta_{(\Phi,T)}, \quad \Phi_3 = g_{(\Phi,T)}\eta_{(\Phi,T)}. \quad (1.8)$$

Cuando $X(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi$ está bien definida, la función meromorfa $g_{(X,T)} = g_{(\Phi,T)}$ tiene un sentido geométrico claro. Se verifica que

$$G_X(p) = \left(2 \frac{\operatorname{Re}(g_{(X,T)}(p))}{1 + |g_{(X,T)}(p)|^2}, 2 \frac{\operatorname{Im}(g_{(X,T)}(p))}{1 + |g_{(X,T)}(p)|^2}, \frac{|g_{(X,T)}(p)|^2 - 1}{1 + |g_{(X,T)}(p)|^2} \right),$$

donde G_X es la aplicación de Gauss de la inmersión X , o lo que es igual,

$$g_{(X,T)} = \Pi \circ G_X, \quad (1.9)$$

siendo $\Pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde el polo norte para la base ortonormal $T = \{e_1, e_2, e_3\}$, esto es,

$$\Pi(ae_1 + be_2 + ce_3) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c} \right), \quad \forall (ae_1 + be_2 + ce_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}.$$

Por este motivo, es habitual llamar a $g_{(X,T)}$ la aplicación de Gauss de la inmersión X .

Definición 13. Dadas η una 1-forma holomorfa y g una función meromorfa, diremos que constituyen unos datos de Weierstrass si cumplen que los ceros de la 1-forma η se encuentran justamente sobre los polos de la función g , y además el orden de un cero de η es el doble del orden del correspondiente polo de g .

Nótese que dados unos datos de Weierstrass (g, η) y una base ortonormal T , podemos construir una representación de Weierstrass $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ mediante las relaciones (1.8). El hecho de que (g, η) sean unos datos de Weierstrass garantiza que Φ_1, Φ_2 y Φ_3 son holomorfas y verifican (1.2) y (1.3). Vista esta relación, en ocasiones también nos referiremos al par (g, Φ_3) como los datos de Weierstrass de la inmersión (notese que, teniendo en cuenta (1.8), tenemos $\eta_{(\Phi, T)} = \Phi_3/g_{(\Phi, T)}$).

Notación 1. Sean $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme y T una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , entonces notaremos por $\Phi_{(X, T)} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ a la representación de Weierstrass correspondiente a la inmersión X para la base T . Además, escribiremos por $(g_{(X, T)}, \eta_{(X, T)})$ o por $(g_{(X, T)}, (\Phi_3)_{(X, T)})$ a los datos de Weierstrass de la inmersión X para la base T .

Notación 2. De forma similar, dado u un vector de \mathbb{R}^3 , denotaremos por $u_{(k, T)}$ a la k -ésima coordenada del vector u en la base T . También representaremos las dos primeras coordenadas de u en T como $u_{(*, T)} = (u_{(1, T)}, u_{(2, T)})$.

Cuando $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(z) = \operatorname{Re} \int^z \Phi$ es una inmersión minimal conforme bien definida, entonces $\|\Phi\|$ describirá la métrica \mathcal{S}_X inducida por la inmersión. Obsérvese que el hecho de que la inmersión sea conforme equivale a que las métricas \langle, \rangle y \mathcal{S}_X son conformes, esto es, existe una función positiva $\lambda_X : M \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que

$$(\mathcal{S}_X)_p(u, v) = \lambda_X^2(p) \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in T_p M \cong \mathbb{R}^2, \quad \forall p \in M.$$

Además, no es difícil comprobar que

$$\lambda_X(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Phi\| = \frac{1}{2} (1 + |g_{(X, T)}|^2) \|\eta_{(X, T)}\|, \quad (1.10)$$

expresión que no depende de la base ortonormal T .

1.2.2

La Transformación de López-Ros

Sean $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)$ una representación de Weierstrass definida sobre una superficie de Riemann M , y $(g_{(\Phi, T)}, \eta_{(\Phi, T)})$ sus datos de Weierstrass en la base T . Consideremos en M una nueva representación de Weierstrass $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, T)$ dada por

$$\eta_{(\tilde{\Phi}, T)} = \eta_{(\Phi, T)} h, \quad g_{(\tilde{\Phi}, T)} = \frac{g_{(\Phi, T)}}{h},$$

donde $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa sin ceros. Obsérvese que ambas representaciones están construidas sobre la misma base ortonormal T . Pues bien, a esta forma de

construir una nueva representación de Weierstrass a partir de otra, se la conoce como transformación de López-Ros.

Desde nuestro punto de vista, la propiedad más importante de la representación de Weierstrass resultante es que la tercera 1-forma queda invariante, esto es,

$$\Phi_3 = \eta_{(\Phi, T)} g_{(\Phi, T)} = (\eta_{(\Phi, T)} h) \frac{g_{(\Phi, T)}}{h} = \tilde{\Phi}_3 .$$

Este hecho se traduce en que, cuando $X = \operatorname{Re} \int \Phi$ y $\tilde{X} = \operatorname{Re} \int \tilde{\Phi}$ sean inmersiones minimales bien definidas sobre M , entonces sus terceras coordenadas, referidas a la base T , serán iguales

$$(X(p))_{(3, T)} = (\tilde{X}(p))_{(3, T)} , \quad \forall p \in M .$$

En este caso, la transformación de López-Ros funciona como una herramienta, poderosa y natural, para deformar superficies minimales, sin modificar la tercera coordenada respecto de cierta base prefijada. Queda claro que esta forma de deformar depende tanto de la función holomorfa h como de la base ortonormal T .

El nombre de esta transformación se debe a que F. J. López y A. Ros la utilizaron por primera vez [LRo], tomando como h funciones constantes. Ellos deformaban una superficie minimal obteniendo una familia continua uniparamétrica de superficies minimales. En su origen, la transformación de López-Ros se usó para funciones constantes, sin embargo, posteriormente se le ha sacado gran partido usando funciones más complicadas. Nadirashvili, en su construcción de superficies minimales completas y acotadas [N1], utilizó funciones holomorfas y sin ceros, obtenidas mediante el uso del Teorema de Runge. Está misma técnica fue explotada posteriormente por Martín y Morales, y también por el propio Nadirashvili, en algunas de sus diferentes construcciones de superficies minimales completas y acotadas [MMo1, MMo2, MMo3, MMo4, MN]. Recordemos que el Teorema de Runge es un resultado clásico de la variable compleja que afirma [Cn1]:

Teorema 11. Sean K un subconjunto compacto de \mathbb{C} y E un subconjunto de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ que corta a cada componente conexa de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$. Sean f una función holomorfa en un conjunto abierto que contiene a K y $\epsilon > 0$, entonces existe una función racional $R(z)$ con polos únicamente en E y tal que

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon , \quad \forall z \in K .$$

Nadirashvili trabajaba con datos de Weierstrass (g, η) definidos sobre dominios simplemente conexos de \mathbb{C} . Esto supone que las 1-formas Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 , de la representación de Weierstrass correspondiente, no tienen periodos reales, con lo cual, a partir de ellas se obtiene una inmersión minimal bien definida. El uso de una función h holomorfa que no se anula, en la transformación de López-Ros, implica que $(g/h, h\eta)$ vuelven a ser datos de Weierstrass, luego, dan lugar a una inmersión minimal bien definida. En estas circunstancias, la transformación de López-Ros proporciona un modo de deformar una inmersión minimal en otra, sin necesidad de preocuparse de los periodos de las 1-formas de la nueva representación.

Sin disfrutar de esta ventaja, López, Martín y Morales [LMMo1, LMMo2], ingeniaron un método de construir funciones h holomorfas y sin ceros que, a la vez, cierran los periodos cuando son utilizadas en la transformación de López-Ros. Para ello, añadieron al Teorema de Runge una ingeniosa utilización del Teorema de la Función Implícita.

En la primera parte de esta memoria, usaremos la transformación de López-Ros para modificar superficies minimales definidas sobre superficies de Riemann con topología finita arbitraria. En consecuencia, no podremos usar el Teorema de Runge clásico para obtener las funciones h . Lo que haremos será utilizar el Teorema de la Función Implícita de manera similar a como lo hicieron López, Martín y Morales, pero mezclándolo con una versión adecuada, más completa, del Teorema de Runge [Ry, Teorema 10]:

Teorema 12. *Sean K un subconjunto compacto (y propio) de una superficie de Riemann compacta M y $E \subset M$ un conjunto teniendo puntos en cada componente conexa de $M \setminus K$. Sea f una función holomorfa en un entorno abierto de K , excepto posiblemente por una cantidad finita de polos en K . Entonces, fijado $\epsilon > 0$, existe una función meromorfa \bar{f} sobre M que es holomorfa en $M \setminus E$ salvo por los polos de f y tal que*

$$|\bar{f} - f| < \epsilon \quad \text{en } K .$$

1.2.3

Finales

El estudio de las superficies minimales completas con curvatura total finita comenzó a partir de los trabajos de Huber y Osserman. Este tipo de superficies disfrutaban de especiales propiedades que no aparecen en general en el resto de superficies minimales. Para ser más precisos, existe un control bastante grande del comportamiento asintótico en infinito de las superficies minimales completas con curvatura total finita. Además, este comportamiento asintótico está sorprendentemente relacionado con la topología de la superficie.

Sea $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal isométrica de una superficie de Riemann orientable (\mathcal{M}, ds^2) que trae asociada una métrica riemanniana. Se define la curvatura total de la inmersión X como la integral sobre \mathcal{M} de la curvatura de Gauss de la inmersión. En lo que resta de subsección, supondremos que \mathcal{M} es completa y con curvatura total finita y denotaremos por (g, η) a sus datos de Weierstrass. El siguiente resultado es consecuencia de uno más general de A. Huber [Hu].

Teorema 13. *En las condiciones arriba descritas, la superficie de Riemann \mathcal{M} es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta $\bar{\mathcal{M}}$ salvo una cantidad finita de puntos.*

De este modo, podemos escribir $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. A los puntos $\{p_1, \dots, p_n\}$ se les llama los finales de \mathcal{M} .

Usando el Teorema de Huber, Osserman [O1, O3] probó:

Teorema 14. *Los datos de Weierstrass g y η se extienden de manera meromorfa a $\overline{\mathcal{M}}$.*

Como consecuencia de este resultado, en estas condiciones no es difícil comprobar que

Teorema 15. *La curvatura total de \mathcal{M} es exactamente $-4\pi \deg(g)$, siendo $\deg(g)$ el grado de la aplicación de Gauss.*

Por otro lado, también existe un modo sencillo de calcular la curvatura total de los cocientes con topología finita de superficies minimales simplemente periódicas. Dicha curvatura total puede ser computada en términos del número de ramificación de sus finales [MeR2].

Teorema 16. *Consideremos una superficie minimal simplemente periódica y propiamente embebida en \mathbb{R}^3 . Supongamos que la superficie cociente M tiene topología finita. Entonces, la curvatura total de M es*

$$C(M) = -2\pi(W(M) - \chi(M)),$$

donde $W(M)$ es el número total de ramificación de M y $\chi(M)$ es su característica de Euler.

Estos dos resultados que acabamos de citar nos serán de gran utilidad en la segunda parte de la memoria. Notaremos que ambos pueden ser aplicados bajo las hipótesis de nuestro Teorema de Unicidad para el helicoides simplemente periódico de género uno. Por hipótesis, conoceremos la curvatura total de la superficie, luego, obtendremos información acerca de su aplicación de Gauss y de su número de ramificación.

La anterior definición de final es un caso particular de lo que se conoce como final topológico, que es lo que vamos a mostrar a continuación [Th] (lo necesitaremos en el Capítulo 8). Sea M una variedad conexa y no compacta, consideremos

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, +\infty[\rightarrow M \mid \alpha \text{ es un arco propio}\}.$$

En \mathcal{A} definimos una relación de equivalencia: diremos que $\alpha_1 \sim \alpha_2$ si, y solo si, para cada compacto $K \subset M$ ocurre que α_1 y α_2 están eventualmente² en la misma componente conexa de $M \setminus K$. En consecuencia, será $\alpha_1 \approx \alpha_2$ si, y solo si, existe un compacto $K \subset M$ tal que α_1 y α_2 están en componentes conexas distintas de $M \setminus K$.

²es decir, fuera de un subconjunto compacto de $[0, +\infty[$

Definición 14. En estas condiciones, llamaremos *final* de M a cada una de las clases de equivalencia de A/\sim .

Finales helicoidales

Como hemos visto más arriba, los finales de una superficie minimal completa y con topología finita son necesariamente anulares, esto es, homeomorfos a un disco punteado. Además, los finales anulares de superficies minimales propiamente embebidas, periódicas y con topología finita en el cociente, deben ser asintóticos al final de un helicoides, a un anillo plano o a un plano [HK, MeR2]. En el primero de los casos diremos que tenemos un final helicoidal.

Estudiemos brevemente la geometría de un final helicoidal. Si consideramos un final de una superficie minimal de género uno, simplemente periódica, propiamente embebida e invariante bajo la acción de una traslación vertical, y si, además, asumimos que la aplicación de Gauss g de la superficie tiene un cero en dicho final, entonces [P] existe una coordenada conforme z alrededor del final, de manera que los datos de Weierstrass de la superficie pueden escribirse localmente en el final como

$$g(z) = zh(z), \quad \Phi_3(z) = -\frac{i}{z} dz,$$

siendo h una función holomorfa en el final con $h(0) \neq 0$. De esta información, deducimos la siguiente afirmación.

Nota 4. Los finales helicoidales verticales son polos simples de Φ_3 .

1.2.4

Otras propiedades

En 1894, H. A. Schwarz obtuvo, como consecuencia más o menos sencilla del principio de reflexión que él mismo desarrolló para las funciones armónicas del plano, el siguiente resultado [HK]:

Teorema 17 (Principio de Reflexión de Schwarz).

- Sea M una superficie minimal conteniendo un segmento rectilíneo ℓ , entonces M es simétrica respecto de la rotación de ángulo 180° alrededor de la recta que contiene a ℓ .
- Sea M una superficie minimal conteniendo en su frontera un segmento rectilíneo ℓ , entonces M puede ser extendida por la rotación de 180° alrededor de la recta que contiene a ℓ , obteniendo de este modo una superficie minimal que contiene a ℓ en su interior.

Al tener curvatura de Gauss no positiva en todos sus puntos, las superficies minimales cumplen la propiedad de la envolvente convexa [O2].

Teorema 18 (De la envolvente convexa). *Sea $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal. Entonces para cada dominio D en M tal que $X(D)$ es acotado, la imagen de D está contenida en la envolvente convexa de la imagen de su borde.*

1.3

Geometría de Convexos

La geometría de convexos es una materia clásica con extensa literatura. A continuación vamos a describir algunos conceptos que necesitaremos en la parte de la tesis dedicada al problema de Calabi-Yau. Se llama cuerpo convexo a un conjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^n con interior no vacío. El siguiente teorema de H. Minkowski [Mi] asegura que todo cuerpo convexo de \mathbb{R}^n puede ser aproximado en términos de la métrica de Hausdorff por una sucesión de cuerpos convexos analíticos (esto es, cuya superficie borde es analítica). Recordemos que la distancia de Hausdorff entre dos subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R}^n , C y D , viene dada por la expresión:

$$\delta^H(C, D) = \max \left\{ \sup_{x \in C} \left\{ \inf_{y \in D} \|x - y\| \right\}, \sup_{y \in D} \left\{ \inf_{x \in C} \|x - y\| \right\} \right\}.$$

Teorema 19. *Sea C un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n . Entonces existe una sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cuerpos convexos cumpliendo las siguientes propiedades:*

- $C \subset C_n$ y $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C en términos de la métrica de Hausdorff.
- ∂C_n es una variedad analítica $(n - 1)$ -dimensional.
- Las curvaturas de ∂C_n nunca se anulan.

Puede encontrarse una demostración moderna de este resultado en [MeY, Sección 3]. Detallaremos esta demostración en la subsección 1.3.1.

Introduzcamos ahora un poco de notación. Dado C un dominio convexo, acotado y regular de \mathbb{R}^3 y p un punto en su borde, denotaremos por $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ a las curvaturas principales de ∂C en p asociadas al normal unitario interior. Notemos que al ser C convexo, podemos tomar $\kappa_2(p) \geq \kappa_1(p) \geq 0$. En estas condiciones, también denotaremos

$$\kappa_1(\partial C) := \min\{\kappa_1(p) \mid p \in \partial C\}.$$

Por otro lado, si consideramos $\mathcal{N} : \partial C \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación normal exterior (esto es, la aplicación de Gauss) de ∂C , entonces existe una constante positiva a de manera que

la superficie $\partial C_t := \{p + t\mathcal{N}(p) \mid p \in \partial C\}$ es regular $\forall t \in [-a, +\infty[$ y bordea un dominio convexo y acotado, al que llamaremos C_t . Notemos que la constante a , evidentemente, depende del convexo C .

En esta tesis, definimos la proyección normal a ∂C como la aplicación $\mathcal{P}_C : \mathbb{R}^3 \setminus C_{-a} \rightarrow \partial C$ dada por

$$\mathcal{P}_C(p + t\mathcal{N}(p)) = p.$$

Finalmente, definimos la aplicación de Gauss extendida como la aplicación $\mathcal{N}_C : \mathbb{R}^3 \setminus C_{-a} \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$\mathcal{N}_C(x) = \mathcal{N}(\mathcal{P}_C(x)).$$

1.3.1

Demostración de Meeks-Yau del Teorema de Minkowski

Sea C un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n . Sin pérdida de generalidad, supongamos que C contiene al cero en su interior. Tomemos B una bola cerrada de \mathbb{R}^n centrada en cero y suficientemente grande para que C esté contenido en la bola abierta. Consideremos la función $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(x, \partial C) & \text{si } x \notin C \\ -\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(x, \partial C) & \text{si } x \in C, \end{cases}$$

De este modo, f es una función continua en B con las siguientes propiedades:

(a) Existe U un entorno abierto de $\overline{B \setminus C}$, de forma que f es convexa en U , esto es,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in U, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

(b) $C = \{x \in B \mid f(x) \leq 0\}$.

(c) $\partial C = \{x \in B \mid f(x) = 0\}$.

Consideremos también $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \|x\|^2, \quad \forall x \in B.$$

Así, g es diferenciable en B y es estrictamente convexa en U , es decir,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y), \quad \forall x, y \in U, \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Sea $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente a cero de números reales positivos. Es claro que, para cada natural n , la función $f + \epsilon_n g$ es estrictamente convexa en U . El siguiente paso consiste en aproximar cada $f + \epsilon_n g$ por una función diferenciable g_n que sea estrictamente convexa en un entorno fijo de ∂C . Para ello usaremos el núcleo del calor de B , esto es, una función $p(x, y, t)$ continua en $B \times B \times \mathbb{R}^+$, C^2 en la primera variable, C^1 en la tercera y verificando

- $p_t = p_{xx}$ en $B \times B \times \mathbb{R}^+$, donde estamos denotando con subíndices la derivación respecto de la variable.

- $p|_{\partial B} \equiv 0$.
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_B p(x, y, t) u_0(y) dy = u_0(x)$, uniformemente para cada función u_0 continua en B y que se anula en el borde de B .

Ahora, consideremos U' un entorno abierto de ∂C contenido en U y con $\overline{U'}$ incluido en el interior de B . De este modo, es posible construir una aplicación continua $f_n : B \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$f_n|_{U'} \equiv f + \epsilon_n g, \quad f_n|_{\partial B} \equiv 0.$$

Así, para cada $t > 0$, la función $u(t) : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(t)(x) = \int_B p(x, y, t) f_n(y) dy$$

es diferenciable y cuando t decrece a 0, entonces $u(t)$ converge uniformemente a f_n . En consecuencia, existe un positivo t_n suficientemente pequeño para que $g_n := u(t_n)$ sea diferenciable en B y estrictamente convexa en U' . Además, si elegimos los t_n convenientemente pequeños, podemos suponer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{x \in \partial C} |g_n(x)| \right\} = 0. \quad (1.11)$$

En estas condiciones, el Teorema de Sard [IKw] asegura que el conjunto de valores críticos de g_n tiene medida cero, luego podemos tomar una sucesión $\{\delta_n\}_n \searrow 0$ y tal que

$$\Sigma_n := \{x \in B \mid g_n(x) = \sup_{y \in \partial C} |g_n(y)| + \delta_n \equiv \mu_n\}$$

es una variedad analítica $(n-1)$ -dimensional y, por ser g_n estrictamente convexa, sus curvaturas nunca se anulan.

Por último definimos

$$C_n := \{x \in B \mid g_n(x) \leq \mu_n\}.$$

De esto modo, C_n es un cuerpo convexo bordeado por Σ_n . Así, para ver que la sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ resuelve el Teorema 19 solo nos queda comprobar que cumple la primera de las tesis. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $C \subset C_n$. Gracias a la convexidad de C_n , basta demostrar que $\partial C \subset C_n$. Para $x \in \partial C$ tenemos

$$g_n(x) \leq |g_n(x)| \leq \sup_{y \in \partial C} |g_n(y)| < \mu_n,$$

luego, $x \in C_n$. Finalmente, (1.11) y el hecho de que $\{\delta_n\}_n \searrow 0$ implican la convergencia de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a f y de $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a cero. Por tanto, la definición de C_n y la propiedad (b) de la función f implican la convergencia de $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a C en términos de la métrica de Hausdorff.

Esto termina la demostración.

Parte I

El Problema de Calabi-Yau

Esta parte de la memoria está dedicada al estudio del problema de Calabi-Yau para superficies minimales en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , esto es, la construcción de ejemplos de superficies minimales completas y acotadas.

Esta parte se encuentra estructurada de la manera siguiente. Lo primero que haremos, Capítulo 2, será introducir el problema y describir los resultados más representativos que se han obtenido a lo largo de la historia, haciendo especial hincapié en los avances más recientes. También explicaremos, brevemente, las técnicas que usó N. Nadirashvili [N1] en la construcción del primer ejemplo de superficie minimal completa y acotada en \mathbb{R}^3 . Sin duda, se trata del trabajo más importante hasta la fecha en este campo.

Los siguientes capítulos los emplearemos en detallar los resultados que el doctorando, junto con Leonor Ferrer y Francisco Martín, ha realizado en este problema. Dichos resultados pueden encontrarse en [AFM3]. En el Capítulo 3 mostraremos la técnica usada para conseguir funciones tipo Runge que puedan ser usadas como transformación de López-Ros en el ambiente de las superficies de Riemann con topología finita arbitraria. En el siguiente Capítulo generalizaremos la técnica introducida por S. Morales en [Mo1] y que permite añadir la cualidad de ser propia a los ejemplos de minimales completas y acotadas. Posteriormente, en los Capítulos 5 y 6 detallaremos nuestra generalización de la técnica de Nadirashvili y mostraremos la manera de aplicar ambas técnicas de forma simultánea, respectivamente. En el Capítulo 7 será cuando usemos todos los resultados previos obtenidos en los capítulos anteriores para demostrar los teoremas principales de esta parte de la memoria. En particular demostraremos un Teorema de Densidad para superficies minimales completas. Finalmente y como corolario de dicho teorema, en el Capítulo 8 construiremos el primer ejemplo de superficie minimal completa, propia en \mathbb{R}^3 y teniendo una cantidad no numerable de finales.

Notación. En toda esta parte de la memoria consideraremos M una superficie de Riemann compacta de género $\sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2

Introducción

Como consecuencia del principio del máximo para funciones armónicas, es claro que no existen superficies minimales compactas en \mathbb{R}^3 (sin borde). Además, un simple estudio de los ejemplos clásicos de superficies minimales completas y no planas (catenoide, helicoides, ejemplos de Riemann,...) revela que no se puede acotar ninguna de las funciones coordenadas de estas superficies. De hecho, ninguno de estos ejemplos está contenido en un semiespacio. Estas circunstancias, motivaron a E. Calabi en 1965 a conjeturar lo siguiente:

Conjetura 2.1. *No existen superficies minimales completas y acotadas en \mathbb{R}^3 .*

Conjetura 2.2. *Una superficie minimal completa y no plana en \mathbb{R}^3 tiene proyección no acotada sobre cualquier línea recta. En particular, una tal superficie no puede estar contenida en un semiespacio.*

Ambas conjeturas resultaron ser falsas. El primer ejemplo de una superficie minimal completa y no plana con una de sus funciones coordenada acotada fue dado por L. P. Jorge y F. Xavier [JX2] en 1980. Ellos construyeron un disco minimal completo contenido en una banda abierta de \mathbb{R}^3 , dando de este modo un contraejemplo para la segunda conjetura de Calabi. Para ello necesitaron la representación de Weierstrass y una ingeniosa forma de utilizar el Teorema de Runge (Teorema 11).

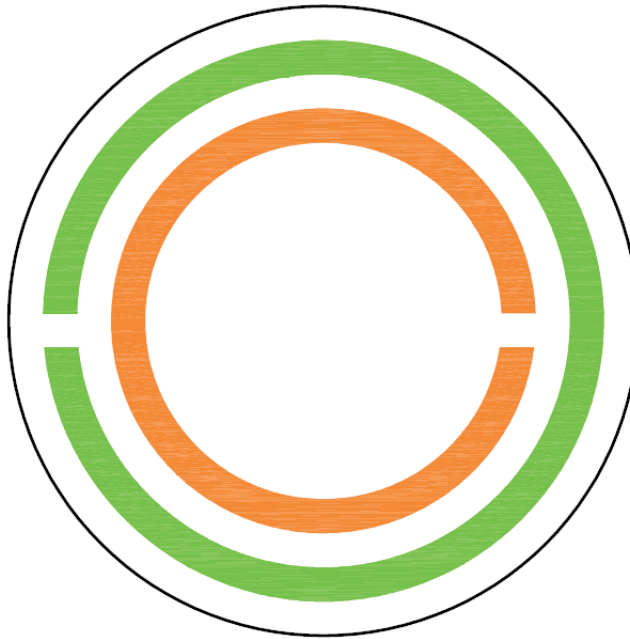


Figura 2.1: *Los laberintos de Jorge y Xavier*

Mediante las mismas técnicas, otros ejemplos de superficies minimales completas contenidas entre dos planos paralelos de \mathbb{R}^3 fueron construidos por H. Rosenberg y E. Toubiana [RT] y por F. J. López [L]. Los ejemplos de Rosenberg y Toubiana eran cilindros mientras que López construyó superficies no orientables.

Por otro lado, F. F. Brito [B] desarrolló un método alternativo para la construcción de este tipo de superficies. Este método fue usado posteriormente por Costa y Simões para construir ejemplos con mayor género y mayor cantidad de finales [CsSi].

Los argumentos analíticos introducidos por Jorge y Xavier son bastante ingeniosos y están presentes en casi todos los artículos de investigación dedicados a la construcción de superficies minimales completas con algún tipo de acotación en sus funciones coordenadas. En particular, su idea de usar un laberinto de conjuntos compactos en torno

al borde de un dominio simplemente conexo del plano, junto con el Teorema de Runge, para obtener la completitud de la superficie, fue usada más adelante por N. Nadirashvili [N1], de forma más elaborada, para construir el primer ejemplo de superficie minimal completa contenida en una bola de \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.1. *Existe una inmersión minimal completa $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ del disco unidad abierto de \mathbb{C} en la bola unidad abierta de \mathbb{R}^3 . Además, tal inmersión puede ser construida con curvatura de Gauss negativa.*

Las superficies de Nadirashvili también son contraejemplo de una conjetura clásica propuesta por Hadamard [Ha].

Conjetura 2.3. *No existen superficies completas y acotadas en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss negativa.*

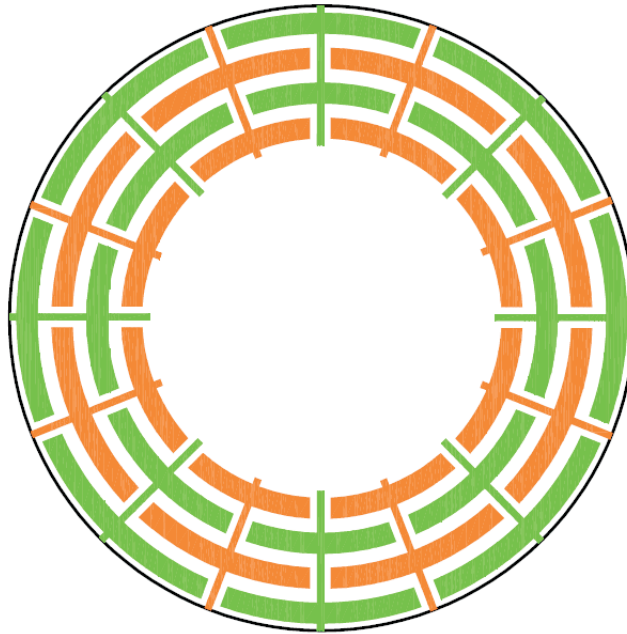


Figura 2.2: Los laberintos de Nadirashvili

La idea de Nadirashvili consiste en construir, de manera recursiva, una sucesión de discos minimales (con borde)

$$f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}_{R_n} = B(0, R_n),$$

de forma que ocurran

- $\|f_n - f_{n-1}\| < \frac{1}{n^2}$, en $\mathbb{D}_{1-1/n} = D(0, 1 - \frac{1}{n})$.
- $\text{dist}_{(\mathbb{D}, \mathcal{S}_{f_n})}(0, \partial\mathbb{D}) \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- $R_n \approx \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$.

El método para obtener la inmersión f_n a partir de la f_{n-1} , consiste en deformar la inmersión original en torno a su borde. La deformación actúa tangencialmente a la esfera de radio R_{n-1} de manera que la métrica intrínseca de la superficie crece del orden de $1/n$. Además, queda claro que la nueva inmersión está contenida en una bola de radio mayor, pero este radio es $R_n = \sqrt{R_{n-1}^2 + 1/n^2}$.

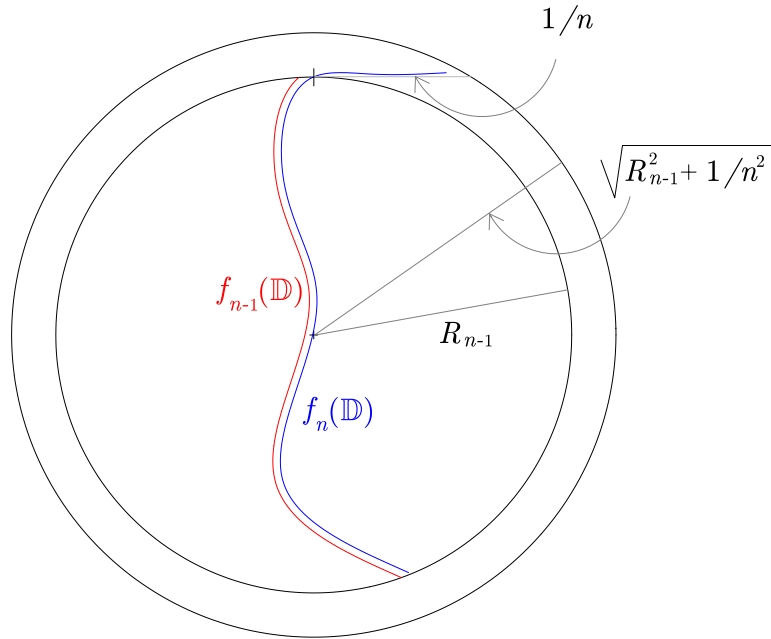


Figura 2.3: La técnica de Nadirashvili

De la primera de las anteriores propiedades obtenemos que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de aplicaciones armónicas, luego, converge a otra aplicación armónica f . La segunda propiedad implica la completitud de la inmersión límite f , mientras que de la tercera propiedad se deduce que ésta es acotada.

Poco tiempo después, las técnicas de Nadirashvili fueron usadas para la construcción de nuevos ejemplos de inmersiones minimales completas y acotadas. La primera secuela se debe a F. Martín y S. Morales, quienes construyeron [MMo1] un ejemplo con

la estructura conforme de un anillo. Más tarde, F. J. López, F. Martín y S. Morales sofisticaron aún más la técnica para construir ejemplos de género finito arbitrario y un final [LMMo1] y ejemplos no orientables con topología finita arbitraria [LMMo2].

A la vista de los resultados, las conjeturas de Calabi fueron actualizadas en el año 2000 por S. -T. Yau, quien indicó las siguientes cuestiones:

- ¿Existen superficies minimales completas y embebidas en una bola de \mathbb{R}^3 ?
- ¿Existen immersiones minimales completas y propias $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$? donde por propia entendemos que $f^{-1}(C)$ es compacto para todo compacto $C \subset \mathbb{B}$.
- ¿Qué se puede decir del comportamiento asintótico de una inmersión minimal completa y acotada?
- ¿Cuál es el espectro del operador laplaciano de una tal inmersión?

Estas cuestiones han sido profundamente estudiadas en los últimos años y han generado gran cantidad de literatura.

2.1

El Problema de Calabi-Yau para superficies minimales embebidas

En lo que concierne a la existencia de superficies minimales completas y embebidas en una bola de \mathbb{R}^3 , T. H. Colding y W. P. Minicozzi [CMz2] han probado recientemente que una superficie minimal completa y embebida en \mathbb{R}^3 que tenga topología finita debe estar propiamente embebida en \mathbb{R}^3 . En particular, una tal superficie no puede estar contenida en una bola.

Teorema 2.2. *Una superficie minimal completa embebida y con topología finita en \mathbb{R}^3 debe ser propia en \mathbb{R}^3 .*

El resultado de Colding y Minicozzi ha sido generalizado en dos direcciones diferentes. Por un lado, W. H. Meeks III, J. Pérez y A. Ros [MePRo2] han demostrado que toda superficie minimal completa y embebida en \mathbb{R}^3 con género finito y una cantidad numerable de finales es propiamente embebida en \mathbb{R}^3 .

Por otro lado, Meeks y Rosenberg [MeR1] han obtenido que si una superficie minimal completa y embebida en \mathbb{R}^3 tiene radio de inyectividad positivo, entonces es propia en el espacio. Este último resultado es consecuencia de otro más geneal:

Teorema 2.3 (Cierre de las laminaciones minimales). *Sea M una superficie minimal completa y embebida en una 3-variedad riemanniana N . Supongamos que M tiene radio de inyectividad positivo. Entonces \overline{M} tiene estructura de laminación minimal $C^{1,\alpha}$ de N .*

Como consecuencia de los resultados anteriores es natural pensar en la siguiente conjetura debida a Meeks:

Conjetura 2.4. *Toda superficie minimal completa y embebida en \mathbb{R}^3 que tenga género finito debe ser propia en \mathbb{R}^3 .*

Nos gustaría mencionar que tal conjetura parece ser falsa bajo la hipótesis de género infinito. Actualmente, Meeks, Pérez y Traizet están trabajando en la existencia de una laminación minimal de \mathbb{R}^3 cuyas hojas no son propias y tienen género infinito. En particular, podrían ser capaces de construir una superficie minimal completa, embebida y contenida en un semiespacio.

A la vista de todos estos resultados, la construcción de un ejemplo de superficie minimal completa en un bola de \mathbb{R}^3 con género infinito, se ha convertido en un problema muy interesante, puesto que, de existir un ejemplo de minimal completa acotada y embebida, ha de tener género infinito.

2.2

Superficies minimales completas y propias en dominios acotados de \mathbb{R}^3

La propiedad topológica de ser propia ha jugado un papel importante en la teoría de subvariedades minimales y un gran número de resultados clásicos en la materia asumen que la subvariedad es propia.

Es trivial comprobar que una subvariedad compacta es automáticamente propia. Por otro lado, no existen razones para esperar que una inmersión (o un embebimiento) en general sea propia. No obstante, se piensa que una inmersión (o embebimiento) minimal que sea propia tiene un comportamiento más adecuado. Esta asunción fue puesta de manifiesto por el problema de Calabi-Yau. Como ya hemos mencionado antes, la versión inmersa de esta conjetura ha resultado ser falsa. En contraposición con el resultado de existencia dado por Nadirashvili; Colding y Minicozzi han probado que toda superficie minimal completa embebida y con topología finita debe ser propia. De la misma definición de ser propia, queda claro que una superficie minimal propiamente inmersa en el espacio Euclídeo debe no ser acotada, luego, los ejemplos de Nadirashvili no son embebidos ni propios. Sin embargo, cabe preguntarse sobre la posibilidad de construir inmersiones minimales completas $f : M \rightarrow \mathbb{B}$ que sean propias en la bola unidad, en el sentido de que $f^{-1}(C)$ sea compacto para todo compacto $C \subset \mathbb{B}$.

Después de esto, Martín y Morales [MMo2] introdujeron un ingrediente adicional a la técnica de Nadirashvili con el fin de producir un disco minimal completo y propiamente inmerso en una bola de \mathbb{R}^3 . Esta nueva maquinaria fue previamente usada por Morales [Mo1] para construir el primer ejemplo de superficie minimal completa y propia con el tipo conforme de un disco. Mucho antes, Rosenberg y Toubiana [RT] habían construido un anillo minimal propiamente inmerso entre dos planos paralelos de \mathbb{R}^3 , ejemplo que

está relacionado con la previa construcción de Jorge y Xavier.

Más tarde, mejorando sus argumentos, Martín y Morales [MMo3] dieron respuesta a la pregunta sobre la existencia de superficies minimales completas, simplemente conexas y propiamente inmersas en regiones convexas del espacio. Para ser más precisos, su resultado principal asegura:

Teorema 2.4. *Dado $B \subset \mathbb{R}^3$ un dominio convexo de \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable), entonces existe una inmersión minimal completa y propia $f : \mathbb{D} \rightarrow B$.*

Los dominios convexas forman una familia grande y muy conocida de dominios del espacio Euclídeo. No obstante, es natural preguntarse acerca de la necesidad de la hipótesis de convexidad. Un resultado probado por Nadirashvili [N3] muestra que la convexidad no se puede borrar de las hipótesis del teorema anterior. Nadirashvili encontró un dominio del espacio en el cual no existen inmersiones minimales completas, propias y con topología finita. Él llamó a este dominio Jaula Mágica. Posteriormente y basándose en esa construcción, Martín, Meeks y Nadirashvili [MMeN] mostraron dominios que no contienen superficies minimales completas y propiamente inmersas con topología finita.

2.3

El problema del tipo y regiones universales para superficies minimales

En cierto sentido, el Teorema 2.4 está relacionado con una cuestión intrínseca asociada a la estructura compleja subyacente: el llamado problema del tipo para una superficie minimal, esto es, cuando la superficie es hiperbólica o parabólica (el caso elíptico o compacto no es posible para una superficie minimal).

Sea una región conexa W de \mathbb{R}^3 que es, o bien abierta, o bien el cierre de un conjunto abierto. Decimos que W es universal para superficies minimales si toda superficie minimal completa, conexa y propiamente inmersa $M \subset W$ es, o bien recurrente ($\partial M = \emptyset$), o bien una superficie parabólica con borde. La cuestión abierta de determinar que regiones del espacio son universales para superficies minimales ha sido propuesta por W. H. Meeks y J. Pérez [MeP1].

El Teorema 2.4 implica que un dominio convexo de \mathbb{R}^3 no es universal para superficies minimales. En contraposición con este resultado, Martín, Meeks y Nadirashvili [MMeN] han mostrado la existencia de regiones abiertas y acotadas de \mathbb{R}^3 que no admiten superficies minimales completas y con un final anular propiamente inmersas en ellas. En particular, como ya hemos dicho anteriormente, tales dominios no contienen superficies minimales completas y propiamente inmersas con topología finita.

Por otro lado, es conocido [CoKuMeR] que el cierre de un dominio convexo es universal para superficies minimales. Esto es consecuencia del siguiente resultado debido a Collin, Kusner, Meeks y Rosenberg:

Teorema 2.5. *Sea M una superficie minimal conexa, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y, posiblemente, con borde. Entonces, toda componente de la intersección de M con un semiespacio cerrado es una superficie parabólica con borde. En particular, si M tiene borde vacío e intersecta a un plano en un conjunto compacto, entonces M es recurrente.*

Hasta hace bien poco, las superficies minimales completas de tipo hiperbólico jugaron un papel marginal en la teoría global de superficies minimales. No obstante los resultados que vamos a mostrar en esta memoria [AFM3] sugieren que la familia de las superficies minimales completas e hiperbólicas está presente en algunos de los más interesantes aspectos de la teoría de superficies minimales.

Teorema 2.6 (Teorema de Densidad). *Las superficies minimales hiperbólicas, de topología finita y propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 forman un conjunto denso en el espacio de todas las superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , provisto con la topología de convergencia diferenciable sobre conjuntos compactos.*

Como caso particular de este teorema, podemos obtener el siguiente resultado de existencia [AFM3] que mejora al Teorema 2.4.

Teorema 2.7. *Para todo dominio convexo D en \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable) existe una inmersión minimal completa y propia $f : M \rightarrow D$, donde M es una superficie de Riemann abierta y con topología finita arbitraria.*

Una de las más interesantes aplicaciones del Teorema de densidad es la construcción del primer ejemplo de superficie minimal completa, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y con una cantidad no numerable de finales [AFM3]. Dicha construcción se encuentra detallada en el Capítulo 8 de esta memoria.

Teorema 2.8. *Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una inmersión minimal completa y propia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con una cantidad de finales no numerable.*

2.4

El comportamiento asintótico

En esta sección, vamos a comentar algunos problemas interesantes relacionados con el comportamiento asintótico de una superficie minimal completa y propia. Dado

un disco minimal completo M en \mathbb{R}^3 , definimos su conjunto límite como $L(M) = \overline{M} \setminus M$. Cuando M es propia en la bola, entonces no es difícil darse cuenta de que $L(M)$ es un subconjunto cerrado y conexo de \mathbb{S}^2 . En general, si estamos tratando con una superficie minimal con topología finita M , el número de componentes conexas del conjunto límite es menor o igual que el número de finales de nuestra inmersión X . En efecto, tomemos p y q , dos puntos distintos en el conjunto límite pero asociados al mismo final. Consideremos dos sucesiones $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergentes (a dicho final) en M , de manera que $\{X(p_n)\} \rightarrow p$ y $\{X(q_n)\} \rightarrow q$. Entonces, para cada n , podemos tomar una curva conexa γ_n uniendo p_n con q_n y contenida fuera de un compacto K_n , de forma que $\cup_n K_n = M$. Así, obtenemos una curva límite γ contenida en el conjunto límite y uniendo p y q , luego, ambos puntos están en la misma componente conexa del conjunto límite.

Además, cuando M es propia en la bola, entonces el conjunto límite no tiene puntos aislados. En efecto, asumamos p_0 es un punto aislado en el conjunto límite y lleguemos a una contradicción. Fijemos $\epsilon_0 > 0$ (pequeño) y una sucesión $\{\epsilon_n\} \searrow 0$ con $\epsilon_n < \epsilon_0 \forall n$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la intersección de la superficie (en un entorno de p_0) con la esfera de radio $1 - \epsilon_n$ consiste en una curva cerrada γ_n . Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar una superficie minimal estable M_n solución del problema de Plateau con borde $\gamma_0 \cup \gamma_n$. De este modo, encontramos como límite de las superficies M_n , una superficie minimal estable M_∞ , con una singularidad aislada en p_0 . Ahora bien, el principio de la singularidad evitable [MeP2] implica que p_0 es un punto regular, luego M_∞ no tiene singularidades. Por otro lado, M_∞ tiene borde γ_0 , está contenida en la bola y la corta únicamente en el punto p_0 . Este hecho contradice el principio del máximo.

En cualquier caso, resultaría muy interesante saber más acerca del comportamiento de este conjunto límite.

Sobre este tópico, Martín y Morales [MMo4] mejoraron sus técnicas originales y fueron capaces de mostrar que todo dominio acotado con borde $C^{2,\alpha}$ admite un disco minimal completo y propiamente inmerso, de manera que su conjunto límite está tan cerca como se quiera de una curva cerrada y simple prescrita en el borde del dominio. En esta línea de resultados, Martín y Nadirashvili [MN] encontraron curvas de Jordan en el espacio Euclídeo que son conjunto límite de superficies minimales completas. Además, probaron que tales curvas de Jordan son densas en el espacio de las curvas de Jordan con la métrica de Hausdorff.

Teorema 2.9. *Existen inmersiones minimales completas y conformes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que admiten una extensión continua al disco cerrado $F : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}^3$. La aplicación $F|_{\mathbb{S}^1}$ es un embebimiento y $F(\mathbb{S}^1)$ es una curva de Jordan no rectificable con dimensión de Hausdorff 1.*

Además, para cada curva de Jordan Γ en \mathbb{R}^3 y para cada $\epsilon > 0$, existe una tal inmersión minimal que además cumple que la distancia de Hausdorff entre Γ y $F|_{\mathbb{S}^1}$ es más pequeña que ϵ .

En particular, Martín y Nadirashvili demostraron la existencia de discos minimales completos y compactos (esto es, inmersiones completas definidas en el disco unidad y que admiten una extensión continua al disco cerrado). Otro ejemplos de inmersiones

minimales completas y compactas, éstos con topología finita arbitraria, pueden encontrarse en [A4].

Por otro lado, también hay resultados en la dirección contraria, la de la no existencia. Así, si asumimos la existencia de un disco minimal compacto, entonces Nadirashvili [N2] prueba que su conjunto límite no puede ser subconjunto del borde de un cubo de \mathbb{R}^3 . Desafortunadamente, en el artículo [N2] la condición de compacidad faltaba en las hipótesis del teorema, sin embargo fue usada en la demostración.

Como secuela de ese artículo, el doctorando y Nadirashvili [AN] dieron condiciones sobre el conjunto límite de discos minimales completos, compactos y propios en un dominio G de \mathbb{R}^3 con borde C^2 . Probaron que la segunda forma fundamental de la superficie ∂G no es definida negativa en ningún punto del conjunto límite de tales inmersiones. También demostraron la no existencia de tales discos cuando G es un poliedro.

3

Lema tipo Runge

Como ya hemos mencionado, en este capítulo presentaremos y demostraremos un lema tipo el Teorema de Runge para superficies de Riemann con topología finita arbitraria. A pesar de que este resultado tiene una demostración muy técnica, será crucial en la prueba de los teoremas principales del capítulo.

En concreto, demostraremos el resultado que mostramos continuación.

Lema 3.1. Sea \mathcal{J} un multicyclo (en M) y $F : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme. Denotemos $(g_{(F,T)}, (\Phi_3)_{(F,T)})$ a sus datos de Weierstrass respecto de una base ortonormal T . Consideremos K_1 y K_2 dos conjuntos compactos y disjuntos en $M(\mathcal{J})$ y $\Delta \subset M$, verificando:

- Existe una base de la homología de $M(\mathcal{J})$ en K_2 .
- $\overline{\Delta} \subset M \setminus (K_1 \cup K_2)$.
- Δ tiene un punto en cada componente conexa de $M \setminus (K_1 \cup K_2)$.

Entonces, para cualesquiera $m \in \mathbb{N}$ y $t > 0$ existe una función holomorfa y sin ceros $H : \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que

(L.3.1.a) $|H - t| < 1/m$ en K_1 .

(L.3.1.b) $|H - 1| < 1/m$ en K_2 .

(L.3.1.c) La inmersión minimal $\tilde{F} : \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ con datos de Weierstrass

$$g_{(\tilde{F},T)} = \frac{g_{(F,T)}}{H}, \quad (\Phi_3)_{(\tilde{F},T)} = (\Phi_3)_{(F,T)},$$

está bien definida.

Este lema constituye una herramienta cuya utilidad reside en obtener funciones que al ser usadas en la transformación de López-Ros proporcionan inmersiones minimales bien definidas. Además, estas funciones (cuando m es grande) tienen la cualidad de que apenas modifican la inmersión sobre un conjunto compacto, gracias a la propiedad (L.3.1.b), mientras que, por el otro lado, la deforman tan violentamente como queramos sobre el otro compacto (propiedad (L.3.1.a)). En cambio, existe una zona de descontrol correspondiente al exterior de la unión de los dos compactos, en la cual no sabemos como se comporta la nueva inmersión.

Como ya adelantamos anteriormente, las herramientas principales que usaremos para la demostración de este resultado son el Teorema de la Función Implícita y la versión del Teorema de Runge dada por Royden (Teorema 12). Debido a la necesidad de utilización de tal teorema, nos hemos visto obligados a introducir las correspondientes restricciones sobre los compactos y sobre el conjunto Δ . Además, asumimos la existencia de una base de la homología de $M(\mathcal{J})$ en K_2 , para que así, el Teorema de la Función Implícita nos permita cerrar los periodos de la inmersión resultante.

3.1

Preparando la demostración del Lema 3.1

Antes de iniciar la prueba del lema, debemos introducir cierta terminología y demostrar varias afirmaciones. Este paso previo, volveremos a tenerlo en cuenta durante

la prueba de otro de los lemas de esta parte de la memoria, aquel que proporciona la cualidad de ser propia. Entonces necesitaremos funciones para ser usadas en la transformación de López-Ros y que no se ajustan a las proporcionadas por el Lema 3.1.

A lo largo de esta sección, denotaremos

$$\varrho = 2\sigma + E - 1,$$

donde hemos supuesto que E es el número de ciclos que componen el multiciclo \mathcal{J} . Recordamos que σ es el género de la superficie de Riemann compacta M . En estas condiciones, una base de la homología de $M(\mathcal{J})$ estará formada exactamente por ϱ curvas (véase el Teorema 7 en la página 7). Por nuestras hipótesis, existe una tal base $\mathcal{B} = \{\aleph_1, \dots, \aleph_\varrho\}$ contenida en el compacto K_2 . Finalmente, denotaremos por \mathcal{H} al espacio vectorial complejo de las 1-formas holomorfas en $\overline{M(\mathcal{J})}$.

Las dos primeras afirmaciones que vamos a mostrar son una herramienta para demostrar la Afirmación 3.3. Esta última nos proporcionará un conjunto de funciones holomorfas que serán fundamentales en la demostración del Lema 3.1.

Afirmación 3.1. *Tomemos un vector ϱ -dimensional complejo no nulo (a_1, \dots, a_ϱ) y consideremos la curva*

$$c = \sum_{j=1}^{\varrho} a_j \aleph_j.$$

Entonces, existe una 1-forma holomorfa $\tau \in \mathcal{H}$ tal que $\int_c \tau = 1$.

Demostración. El primer grupo de cohomología holomorfa de De Rham de $\overline{M(\mathcal{J})}$, al que denotaremos $H_{\text{hol}}^1(\overline{M(\mathcal{J})})$, es un espacio vectorial complejo de dimensión ϱ (véase el Teorema 7 en los preliminares o [FaKr]). Observemos que la aplicación $I : H_{\text{hol}}^1(\overline{M(\mathcal{J})}) \rightarrow \mathbb{C}^\varrho$ dada por

$$I([\psi]) = \left(\int_{\aleph_1} \psi, \dots, \int_{\aleph_\varrho} \psi \right)$$

está bien definida. Esto se debe a que la clase de una 1-forma exacta en $H_{\text{hol}}^1(\overline{M(\mathcal{J})})$ es cero. Además, si una 1-forma holomorfa anula los periodos en una base de la homología, entonces es exacta, de donde se sigue que I es una aplicación inyectiva. En consecuencia, ya que la linealidad es evidente, I es un isomorfismo de espacios vectoriales (complejos). De este modo, existe una clase $[\psi] \in H_{\text{hol}}^1(\overline{M(\mathcal{J})})$ de manera que su imagen por I no cae en el subespacio $\{(z_1, \dots, z_\varrho) \in \mathbb{C}^\varrho \mid \sum_{j=1}^{\varrho} a_j z_j = 0\}$. Ahora, para terminar la demostración basta con tomar $\tau \in [\psi]$ con $\int_c \tau = 1$. ■

Afirmación 3.2. Consideremos $\tau \in \mathcal{H}$ y $p \in \overline{M(\mathcal{J})}$. Entonces, existe una función holomorfa $A : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que

$$(\tau + dA)_0 \geq (\tau)_0 \cdot p,$$

donde $(\cdot)_0$ denota el divisor de ceros.

Demostración. Asumamos que el divisor de ceros de la 1-forma τ es de la forma $(\tau)_0 = q_1 \cdots q_k \cdot p^n$, siendo $p \neq q_i, \forall i = 1, \dots, k$. Supongamos que existe una función holomorfa $v : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las dos condiciones siguientes:

- 1) $v(p) \neq v(q_i), \forall i = 1, \dots, k$.
- 2) p no es punto de ramificación de v .

Consideremos ahora la función $J : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$J = (v - v(p))^{n+1} \prod_{i=1}^k (v - v(q_i))^2.$$

Es evidente que el divisor de ceros de la diferencial de J es mayor o igual que el de τ , y que, gracias a las propiedades de la función v , el orden de p como cero de dJ es exactamente n , luego coincide con su orden como cero de τ . En consecuencia, existe un número complejo λ de manera que $(\tau + \lambda dJ)_0 \geq q_1 \cdots q_k \cdot p^{n+1}$, luego $A = \lambda J$ resuelve la afirmación.

Comprobemos ahora que, en efecto, existe una tal función v satisfaciendo las condiciones 1) y 2). La existencia de una función $v_1 : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ cumpliendo la propiedad 1) es una consecuencia inmediata del Teorema de Royden (Teorema 12). Para obtenerla basta tomar como compacto el conjunto $\{q_1, \dots, q_k, p\}$ y como conjunto E el complementario de $\overline{M(\mathcal{J})}$ en M . Así, podemos encontrar una función holomorfa en $\overline{M(\mathcal{J})}$ y con valores aproximadamente fijados en los puntos $q_i, i = 1, \dots, k$, y en el punto p . De este modo encontramos una función v_1 satisfaciendo 1). Por otro lado, consideremos (U, z) una carta coordenada conforme centrada en p y $m \in \mathbb{N}$. De este modo, \overline{U} es un compacto de M . Tomemos O un abierto de M conteniendo a \overline{U} y $\xi : O \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\xi(z) = z, \forall z \in O$. Finalmente, fijemos un conjunto E contenido en $M \setminus \overline{M(\mathcal{J})}$, que tenga puntos en cada componente conexa de $M \setminus \overline{U}$ y que no corte a O . Entonces, $\forall m \in \mathbb{N}$, del Teorema de Royden obtenemos una función holomorfa $h_m : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ con $|h_m(z) - z| < 1/m$ para todo $z \in \overline{U}$. De este modo, la sucesión $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en \overline{U} a z , y por la holomorfía, $\{dh_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a dz . Puesto que p no es punto de ramificación de z , concluimos la existencia de un natural m_0 , suficientemente grande, tal que p no es punto de ramificación de $v_2 = h_{m_0}$. Así, $v_2 : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$ cumple la propiedad 2). Finalmente, tomamos como función v satisfaciendo 1) y 2), una combinación lineal adecuada de v_1 y v_2 . Esto termina la demostración. ■

Para el siguiente resultado vamos a añadir un poco más de notación. Denotaremos por $\mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})})$ al espacio vectorial real de las funciones holomorfas en $\overline{M(\mathcal{J})}$. También, por comodidad, vamos a denotar $g = g_{(F,T)}$ y $\Phi_3 = (\Phi_3)_{(F,T)}$.

Afirmación 3.3. La aplicación lineal $\mathcal{F} : \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})}) \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ dada por

$$\mathcal{F}(\varphi) = \left(\operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} + g \right) \right]_{j=1, \dots, \varrho}, \operatorname{Im} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} - g \right) \right]_{j=1, \dots, \varrho} \right)$$

es sobreyectiva.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que \mathcal{F} no es sobreyectiva. En tal caso, existe un vector no nulo $(\mu_1, \dots, \mu_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho}$ de manera que $\mathcal{F}(\mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})})) \subset \{(x_1, \dots, x_{2\varrho}) \mid \sum_{j=1}^{2\varrho} \mu_j x_j = 0\}$. Esto es, $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})})$, se tiene

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{\varrho} \mu_j \operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} + g \right) \right] \right) + \left(\sum_{j=1}^{\varrho} \mu_{j+\varrho} \operatorname{Im} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} - g \right) \right] \right).$$

Simplemente usando que

$$\operatorname{Im} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} - g \right) \right] = \operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} (-i)\varphi \Phi_3 \left(\frac{1}{g} - g \right) \right]$$

y desarrollando la expresión resultante, obtenemos que

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\varrho} \left(u_j \int_{\mathbb{N}_j} \frac{\varphi}{g} \Phi_3 + \overline{u_j} \int_{\mathbb{N}_j} \varphi g \Phi_3 \right) \right] = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})}), \quad (3.1)$$

donde hemos denotado $u_j = \mu_j - i\mu_{j+\varrho}$, para cada $j = 1, \dots, \varrho$.

Ahora, usando la Afirmación 3.1 para $a_j = \overline{u_j}$, $j = 1, \dots, \varrho$, encontramos una 1-forma $\tau_0 \in \mathcal{H}$ de manera que

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{\varrho} \overline{u_j} \int_{\mathbb{N}_j} \tau_0 \right) = 1.$$

La Afirmación 3.2 asegura que, sumando 1-formas exactas a τ_0 , podemos encontrar otra 1-forma cuyo divisor de ceros sea mayor que cualquier divisor que fijemos. De este modo, concluimos la existencia de una 1-forma $\tau \in \mathcal{H}$ con las dos siguientes propiedades:

- $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{\varrho} \overline{u_j} \int_{\mathbb{N}_j} \tau \right) = 1.$
- $(\tau)_0 \geq \left(\left(\frac{\Phi_3}{g} \right) \Big|_{\overline{M(\mathcal{J})}} \right)_0^2 \cdot \left((g dg) \Big|_{\overline{M(\mathcal{J})}} \right)_0.$

Teniendo en cuenta esta segunda propiedad, si definimos $w = \frac{\tau}{2g dg}$, entonces

$$(w)_0 \geq \left(\left(\frac{\Phi_3}{g} \right) \Big|_{\overline{M(\mathcal{J})}} \right)_0^2,$$

luego,

$$(dw)_0 \geq \left(\left(\frac{\Phi_3}{g} \right) \Big|_{\overline{M(\mathcal{J})}} \right)_0.$$

En consecuencia,

$$\varphi := \frac{g}{\Phi_3} dw \in \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})}).$$

Para esta φ , la ecuación (3.1) queda

$$0 = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\varrho} \left(u_j \int_{\mathbb{K}_j} dw + \overline{u_j} \int_{\mathbb{K}_j} g^2 dw \right) \right].$$

Ahora, la primera integral es cero (estamos integrando una 1-forma exacta sobre una curva cerrada) y al integrar la segunda por partes nos queda

$$0 = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\varrho} \overline{u_j} \int_{\mathbb{K}_j} w 2g dg \right] = \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\varrho} \overline{u_j} \int_{\mathbb{K}_j} \tau \right] = 1,$$

donde hemos usado la primera de las propiedades de la 1-forma τ . Evidentemente, hemos llegado a una contradicción y probado así el lema. \blacksquare

Como comentamos previamente, la anterior afirmación asegura la existencia de un conjunto de funciones holomorfas $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2\varrho}\} \subset \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J})})$ de manera que sus imágenes por la aplicación \mathcal{F} forman un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^{2\varrho}$, $\{\mathcal{F}(\varphi_1), \dots, \mathcal{F}(\varphi_{2\varrho})\}$, linealmente independiente. Además, fijado $m_0 \in \mathbb{N}$, salvo reescalar las funciones φ_j , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\left| \sum_{j=1}^{2\varrho} x_j \varphi_j(p) \right| < \frac{1}{m_0}, \quad (3.2)$$

para cualesquiera $x = (x_1, \dots, x_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho}$ con $\|x\|_\infty < 1$, y $p \in \overline{M(\mathcal{J})}$.

3.2

Demostración del Lema 3.1

Fijado un número natural n , el Teorema 12 nos proporciona una función holomorfa $\vartheta_n : \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- $|\vartheta_n - n \log(t)| < 1/n$ en K_1 , donde t es el real positivo fijado en el enunciado del lema.

- $|\vartheta_n| < 1/n$ en K_2 .

Ahora, prescrito un vector $\Theta = (\lambda_0, \dots, \lambda_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$, definimos una nueva función holomorfa $h^{\Theta,n} : \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h^{\Theta,n}(p) = \exp \left[\lambda_0 \vartheta_n(p) + \sum_{j=1}^{2\varrho} \lambda_j \varphi_j(p) \right],$$

donde las aplicaciones φ_j , $j = 1, \dots, 2\varrho$, son las descritas en (3.2). Detengámonos un momento para observar las propiedades de la función $h^{\Theta,n}$.

- $h^{\Theta,n}$ es una función holomorfa sin ceros.
- $h^{\Theta,n}$ se parece a la función constantemente t en K_1 , cuando $\lambda_0 = 1/n$, $\|\Theta\|_\infty$ es suficientemente pequeña y n es suficientemente grande.
- Además, en tal caso, $h^{\Theta,n}$ está muy cerca de 1 en K_2 .

En consecuencia, lo único que le falta a la función $h^{\Theta,n}$ para ser solución del Lema 3.1 es cerrar los periodos de la inmersión resultante al ser usada en la transformación de López-Ros a partir de los datos de Weierstrass de F . Así, lo que nos queda por hacer es usar adecuadamente el Teorema de la Función Implícita para encontrar un natural n y un vector $\Theta \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$ tales que la función $h^{\Theta,n}$ resuelva el lema. Para hacerlo, debemos trabajar un poco.

Consideremos en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta$ la nueva representación de Weierstrass, obtenida de la inmersión F en la base T mediante la transformación de López-Ros por la función $h^{\Theta,n}$. Esto es, la representación de Weierstrass $\Phi^{\Theta,n} = (\Phi_1^{\Theta,n}, \Phi_2^{\Theta,n}, \Phi_3^{\Theta,n}, T)$ cuyos datos de Weierstrass en la base T son

$$g^{\Theta,n} := \frac{g}{h^{\Theta,n}}, \quad \Phi_3^{\Theta,n} := \Phi_3.$$

Claramente, la sucesión $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en K_2 a la función $\vartheta_\infty \equiv 0$. Esto nos induce a considerar, para $\Theta = (\lambda_0, \dots, \lambda_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$, también una nueva representación de Weierstrass $\Phi^{\Theta,\infty} = (\Phi_1^{\Theta,\infty}, \Phi_2^{\Theta,\infty}, \Phi_3^{\Theta,\infty}, T)$ sobre K_2 . así, definimos los datos de Weierstrass sobre la base T

$$g^{\Theta,\infty} := \frac{g}{h^{\Theta,\infty}}, \quad \Phi_3^{\Theta,\infty} := \Phi_3,$$

donde la función $h^{\Theta,\infty} : K_2 \rightarrow \mathbb{C}$ viene dada por

$$h^{\Theta,\infty}(p) = \exp \left[\sum_{j=1}^{2\varrho} \lambda_j \varphi_j(p) \right].$$

Al haber sido obtenidas por transformación de López-Ros, las terceras coordenadas (respecto de la base T) de todas estas representaciones de Weierstrass queda invariante, luego, por ser F una inmersión minimal bien definida, no tienen periodos reales. En

cambio, el problema de periodos para las dos primeras coordenadas no está resuelto. Para resolverlo, definimos, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la aplicación $\mathcal{P}_n : \mathbb{R}^{2\varrho+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ dada por

$$\mathcal{P}_n(\Theta) = \left(\operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \Phi_1^{\Theta,n} \right]_{j=1,\dots,\varrho}, \operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \Phi_2^{\Theta,n} \right]_{j=1,\dots,\varrho} \right).$$

De esta forma, la representación de Weierstrass $\Phi^{\Theta,n}$ da lugar a una inmersión minimal bien definida si, y solo si, $\mathcal{P}_n(\Theta) = \vec{0}$. Así, por ser F una inmersión minimal bien definida y $\Phi^{\vec{0},n}$ su representación de Weierstrass (puesto que $h^{\vec{0},n} \equiv 1$), concluimos que $\mathcal{P}_n(\vec{0}) = \vec{0}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.¹

Consideremos $\mathcal{Q}_n : \mathbb{R}^{2\varrho} \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ dada por

$$\mathcal{Q}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}) = \mathcal{P}_n(0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}).$$

Por otro lado, denotando $(\mathcal{Q}_n)_j$ (resp. \mathcal{F}_j) a la j -ésima función coordenada de \mathcal{Q}_n (resp. \mathcal{F} , aplicación descrita en la Afirmación 3.3), $\forall j = 1, \dots, 2\varrho$, no es difícil comprobar que

$$\frac{\partial (\mathcal{Q}_n)_j}{\partial \lambda_i}(\vec{0}) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(\varphi_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \varrho\}. \quad (3.3)$$

En efecto, probémoslo para $j \in \{1, \dots, \varrho\}$. El caso $j \in \{\varrho+1, \dots, 2\varrho\}$ es totalmente análogo. Para este j tenemos

$$(\mathcal{Q}_n)_j(\Theta) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{N}_j} \Phi_1^{\Theta,n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{N}_j} \left(\frac{h^{\Theta,n}}{g} - \frac{g}{h^{\Theta,n}} \right) \Phi_3,$$

donde indistintamente estamos denotando $\Theta = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho})$ y $\Theta = (0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho})$. En consecuencia, si fijamos $i \in \{1, \dots, \varrho\}$, entonces

$$\frac{\partial (\mathcal{Q}_n)_j}{\partial \lambda_i}(\vec{0}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{N}_j} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial h^{\Theta,n}}{\partial \lambda_i} + \frac{g}{(h^{\Theta,n})^2} \frac{\partial h^{\Theta,n}}{\partial \lambda_i} \right) \Phi_3 \Big|_{\vec{0}}. \quad (3.4)$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial h^{\Theta,n}}{\partial \lambda_i} = \varphi_i h^{\Theta,n}, \quad h^{\vec{0},n} \equiv 1,$$

la ecuación (3.4) implica

$$\frac{\partial (\mathcal{Q}_n)_j}{\partial \lambda_i}(\vec{0}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{N}_j} \left(\frac{1}{g} + g \right) \varphi_i \Phi_3 = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(\varphi_i),$$

como queríamos demostrar.

Usando (3.3), obtenemos, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$[\operatorname{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_n)](\vec{0}) = [\operatorname{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{Q}_n)](\vec{0}) = \frac{1}{2^{2\varrho}} \det(\mathcal{F}(\varphi_1), \dots, \mathcal{F}(\varphi_{2\varrho})) \neq 0,$$

donde hemos usado que $\{\mathcal{F}(\varphi_1), \dots, \mathcal{F}(\varphi_{2\varrho})\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

En particular, denotando $\overline{B}(0, r) = \{\Theta \in \mathbb{R}^{2\varrho} \mid \|\Theta\| \leq r\}$, podemos encontrar $\xi > 0$ y $0 < r < 1$ tales que

¹Nótese que estamos denotando indistintamente $\vec{0} \in \mathbb{R}^{2\varrho}$ y $\vec{0} \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$.

- $[\text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_\infty)]|_{[-\xi, \xi] \times \overline{B}(0, r)} \neq 0$.
- $\mathcal{P}_\infty(0, \cdot)|_{\overline{B}(0, r)} \equiv \mathcal{Q}_\infty|_{\overline{B}(0, r)}$ es una aplicación inyectiva.

La primera de las propiedades se obtiene por continuidad y la segunda usando el Teorema de la Función Inversa.

Sobre K_2 , la sucesión $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $0 \equiv \vartheta_\infty$. Además, las curvas de la homología, \aleph_i , $i = 1, \dots, \varrho$, están incluidas en K_2 , luego, no es difícil ver la convergencia uniforme

$$\{\text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_\infty) \text{ en } [-\xi, \xi] \times \overline{B}(0, r).$$

Por tanto, existe un natural n_0 tal que

$$[\text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_n)](\lambda_0, \Theta) \neq 0, \quad \forall (\lambda_0, \Theta) \in [-\xi, \xi] \times \overline{B}(0, r), \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.5)$$

Así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Implícita a la aplicación \mathcal{P}_n en el punto $\vec{0} \in [-\xi, \xi] \times \overline{B}(0, r)$. Este Teorema nos da una aplicación diferenciable $L_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ satisfaciendo

$$\mathcal{P}_n(\lambda_0, L_n(\lambda_0)) = 0, \quad \forall \lambda_0 \in I_n,$$

donde I_n es un intervalo abierto que contiene al cero y maximal, en el sentido de que L_n no puede ser extendida regularmente más allá de I_n .

Afirmación 3.4. *En estas condiciones, existen $\epsilon_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que la aplicación $L_n : [0, \epsilon_0] \rightarrow \overline{B}(0, r)$ está bien definida para todo $n \geq n_0$.*

Demostración. Denotemos ϵ_n al supremo de la componente conexa de $L_n^{-1}(\overline{B}(0, r)) \cap [0, \xi]$ que contiene a $\lambda_0 = 0$. Veamos que $\epsilon_n \in I_n$. Para ello, consideremos una sucesión creciente $\{\lambda_0^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converja a ϵ_n . Al ser $L_n(\lambda_0^k) \in \overline{B}(0, r)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, por la compacidad de $\overline{B}(0, r)$ podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que

$$\{L_n(\lambda_0^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \Theta_n \in \overline{B}(0, r),$$

y, en consecuencia,

$$\mathcal{P}_n(\epsilon_n, \Theta_n) = 0.$$

Además, (3.5) asegura que (para ese mismo n_0)

$$[\text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P}_n)](\epsilon_n, \Theta_n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Entonces, gracias a estas dos últimas ecuaciones, el Teorema de la Función Implícita nos proporciona una aplicación $\tilde{L}_n : \tilde{I}_n \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ tal que $\mathcal{P}_n(\lambda_0, \Theta) = 0$ si, y solo si, $\Theta = \tilde{L}_n(\lambda_0)$, y donde \tilde{I}_n es un intervalo abierto conteniendo a ϵ_n . Por tanto, la maximalidad del intervalo I_n asegura que $\epsilon_n \in I_n$. Así, ha de ser $\epsilon_n = \xi$ o $L_n(\epsilon_n) = \Theta_n \in \partial(B(0, r))$.

Definamos por fin

$$\epsilon_0 := \liminf \{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Resulta evidente que si ϵ_0 es positivo, entonces resuelve la afirmación, considerando como n_0 el encontrado en (3.5). Para comprobarlo, procedamos por reducción al absurdo. Asumamos que $\epsilon_0 = 0$. En tal caso, tomando una subsucesión si es necesario, podemos afirmar que la sucesión $\{\epsilon_n\}$ converge a 0. De esta convergencia, sin perder generalidad, también podemos suponer que $\epsilon_n < \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego, por lo que vimos antes, ha de ser $\Theta_n \in \partial(B(0, r))$. De este modo, la compacidad de $\partial(B(0, r))$ garantiza que, salvo tomar una subsucesión, $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \Theta_\infty \in \partial(B(0, r))$. Pero entonces, se tiene $\mathcal{P}_\infty(0, \Theta_\infty) = 0 = \mathcal{P}_\infty(0, \vec{0})$, contradiciéndose así la inyectividad de la aplicación $\mathcal{P}_\infty(0, \cdot)$ en $\overline{B}(0, r)$. La única suposición que hemos hecho es que $\epsilon_0 = 0$, luego, debe ser $\epsilon_0 > 0$, lo que prueba la afirmación. ■

Finalmente, consideremos un natural $n \geq n_0$ suficientemente grande para que $1/n \leq \epsilon_0$ y denotemos $(\lambda_1^n, \dots, \lambda_{2\varrho}^n) = L_n(1/n)$. Definamos $H : \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$H(p) = \exp \left[\frac{1}{n} \vartheta_n(p) + \sum_{j=1}^{2\varrho} \lambda_j^n \varphi_j(p) \right],$$

donde, como siempre, las funciones φ_j son las descritas en (3.2). Si escogemos los naturales m_0 (definido en (3.2)) y $n \geq n_0$ suficientemente grandes, es claro que la función H verifica las propiedades (L.3.1.a) y (L.3.1.b) del Lema 3.1. Comprobemos que también cumple (L.3.1.c). En efecto, como la aplicación de periodos \mathcal{P}_n se anula en $(1/n, \lambda_1^n, \dots, \lambda_{2\varrho}^n)$, entonces la inmersión minimal \tilde{F} con datos de Weierstrass

$$g_{(\tilde{F}, T)} = \frac{g_{(F, T)}}{H}, \quad (\Phi_3)_{(\tilde{F}, T)} = (\Phi_3)_{(F, T)},$$

está bien definida. De este modo, la función H también cumple (L.3.1.c), con lo que queda probado el Lema 3.1.

4

Lema de propia

En este capítulo nos ocuparemos de presentar y demostrar el resultado que nos permite añadir la cualidad de ser propia en un dominio convexo a una superficie minimal completa y acotada. Recordemos que nosotros entendemos que dado un dominio $E \subset \mathbb{R}^3$, una inmersión $X : M \rightarrow E$ es propia en E si la preimagen de todo compacto de E es un compacto de M .

Las técnicas que utilizaremos son una generalización de las usadas por F. Martín y S. Morales [MMo3] en su construcción de discos minimales completos y propios en dominios convexos de \mathbb{R}^3 . A su vez, ellos se inspiraron en un innovador trabajo previo de Morales [Mo1], quién construyó el primer ejemplo de superficie minimal propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y con tipo conforme hiperbólico (concretamente, un disco).

El resultado que vamos a detallar en este capítulo es el siguiente.

Lema 4.1. Sean E y E' dos dominios convexos, regulares y acotados de \mathbb{R}^3 , tales que $0 \in E \subset \overline{E} \subset E'$. Consideremos \mathcal{J}_0 un multiciclo (en M), $X : \overline{M(\mathcal{J}_0)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme y \mathcal{J}' otro multiciclo en M satisfaciendo $\mathcal{J}' < \mathcal{J}_0$, $X(p_0) = 0$ para cierto punto $p_0 \in M(\mathcal{J}')$ fijo, y

$$X(\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus M(\mathcal{J}')) \subset E' \setminus \overline{E}. \quad (4.1)$$

Finalmente, consideremos $b_2 > 0$ tal que E'_{-b_2} y E_{-2b_2} existen. Entonces, para cada $b_1 > 0$ existen un multiciclo \mathcal{J} y una inmersión minimal conforme $Y : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaciendo $Y(p_0) = 0$ y

(L.4.1.a) $\mathcal{J}' < \mathcal{J} < \mathcal{J}_0$.

(L.4.1.b) $\|Y(p) - X(p)\| < b_1, \forall p \in \overline{M(\mathcal{J}')}.$

(L.4.1.c) $Y(\mathcal{J}) \subset E' \setminus E'_{-b_2}.$

(L.4.1.d) $Y(\overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}')) \subset \mathbb{R}^3 \setminus E_{-2b_2}.$

La herramienta en la que se basa la demostración de este lema es la transformación de López-Ros para superficies minimales. En este capítulo comprobaremos que, eligiendo convenientemente el sistema de referencia y la función holomorfa a usar en la transformación, es posible tener cierto control sobre la imagen de una inmersión obtenida a partir de otra mediante una transformación de López-Ros.

El Lema 4.1 proporciona una forma de deformar una inmersión minimal X definida sobre el dominio $\overline{M(\mathcal{J}_0)}$ definido por un multiciclo \mathcal{J}_0 . Esta deformación cuenta con las siguientes propiedades:

- Apenas modifica la inmersión original fuera de un entorno $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus M(\mathcal{J}')$ del borde del dominio de definición. Véase (L.4.1.b) para un real positivo b_1 suficientemente pequeño. Esta propiedad será fundamental para obtener la convergencia de las inmersiones cuando usemos el lema recursivamente.
- Es suficientemente violenta en ese entorno como para provocar la existencia de un multiciclo \mathcal{J} en él, cuya imagen por la nueva inmersión está muy próxima al borde del dominio convexo exterior E' (propiedad (L.4.1.c) con b_2 cercano a cero).
- A la vez, consigue controlar la imagen de la nueva inmersión en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}')$ para mantenerla fuera de E_{-2b_2} , esto es, casi fuera del dominio convexo E . Obsérvese (L.4.1.d) con b_2 próximo a cero. Esta condición resultará básica a la hora de obtener la propiedad de ser propia para las inmersiones de los teoremas principales de esta parte de la memoria.

4.1

Demostración del Lema 4.1

La demostración del Lema consistirá en deformar sucesivamente la inmersión X mediante el uso de la transformación de López-Ros. Cada una de las deformaciones que aplicaremos actuará principalmente sobre un pequeño conjunto en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus M(\mathcal{J}')$, mientras que apenas deformará la inmersión en el resto del dominio de definición. Para hacer esto, usaremos de manera fuerte el Lema 3.1 para obtener las funciones holomorfas que, con una elección acertada del sistema de referencia, al ser usadas al transformar mediante López-Ros proporcionan un control de las inmersiones que obtenemos en cada deformación. Para encontrar la inmersión que resuelve el lema, necesitaremos aplicar sucesivamente una cantidad finita de transformaciones de López-Ros.

La estrategia de demostración cuenta con dos etapas diferentes. En la primera de ellas, mediante un proceso recurrente obtendremos a partir de X una inmersión X_n^E definida sobre un dominio $M(\mathcal{J}_4)$ asociado a un multicyclo \mathcal{J}_4 y que contiene a $M(\mathcal{J}')$. Esta inmersión contará, entre otras, con las dos siguientes propiedades:

- Es tan próxima a X como queramos en $M(\mathcal{J}')$. Condición fundamental para poder garantizar la propiedad (L.4.1.b).
- La imagen de un conjunto de puntos $\{a_i^k \mid i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, E\}$ que están en el borde de $M(\mathcal{J}_4)$, está contenida fuera del dominio convexo E' . Esto representa una primera aproximación para conseguir la propiedad (L.4.1.c).

En la segunda etapa volveremos a usar un proceso recurrente. En él, deformaremos la inmersión X_n^E a lo largo de las curvas que unen los puntos a_i^k para obtener una inmersión Y_n^E tal que:

- Es próxima a X_n^E (y por tanto a X) en el dominio $M(\mathcal{J}')$. Nuevamente, esta propiedad se necesita para garantizar (L.4.1.b).
- La imagen de tales curvas queda fuera del dominio convexo E' . Segunda y definitiva aproximación para obtener (L.4.1.c).

En ambos procesos, ejerceremos un control sobre la imagen de la inmersión que se obtiene al deformar, de manera que se verifique la propiedad (L.4.1.d). En cada deformación, este control se debe a una elección acertada del sistema de referencia y la función holomorfa que aplicaremos en la transformación de López-Ros.

Como paso previo a la demostración fijaremos algo de notación. En primer lugar, consideramos ω una 1-forma meromorfa en M que no tenga ceros ni polos en el dominio $\overline{M(\mathcal{J}_0)}$. Su existencia es debida a la Proposición 2 demostrada en los preliminares (página 8).

En estas condiciones, es bien conocido que $ds^2 := \|\omega\|^2$ es una métrica riemanniana en $\overline{M(\mathcal{J}_0)}$ (véase la subsección 1.1.6 en el capítulo de preliminares).

Nota 4.1. Fijado un punto $q \in \overline{M(\mathcal{J}_0)}$, consideramos la aplicación desarrollante de $\|\omega\|^2$,

$$f(p) := \int_q^p \omega .$$

Entonces, $\|\omega\|^2 = f^* ds_0^2$, donde ds_0^2 representa la métrica euclídea de \mathbb{C} . En particular, f es una isometría local.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, vamos a definir una relación de orden en el conjunto $I \equiv \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, E\}$. Diremos

$$(j, l) > (i, k) \Leftrightarrow \begin{cases} l > k \\ \text{o} \\ l = k \text{ y } j > i . \end{cases}$$

Dados $p \in M(\mathcal{J}_0)$ y $r > 0$, denotaremos $D(p, r)$ al disco centrado en p y de radio r en $(M(\mathcal{J}_0), ds)$, esto es,

$$D(p, r) = \{q \in M(\mathcal{J}_0) \mid \text{dist}_{(M(\mathcal{J}_0), ds)}(p, q) < r\} .$$

Finalmente, vamos a definir dos constantes que serán importantes a lo largo de la demostración.

- Denotamos

$$\mu = \text{máx}\{\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(x, \partial E) \mid x \in E'\} ,$$

es decir, μ representa el menor real tal que $E' \subset E_\mu$.

- Fijamos $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño para que se verifiquen ciertas desigualdades que aparecerán a lo largo de esta demostración. En tales desigualdades solo se verán involucrados los datos del Lema 4.1, es decir, $X, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}, E, E', b_1$ y b_2 . Las condiciones que cumple esta constante irán siendo determinadas a lo largo de la demostración.

4.1.1

Preparando el primer proceso de deformación

Lo primero que vamos a hacer es definir un conjunto finito de puntos $\{p_i^k \mid (i, k) \in I\}$, contenidos en $M(\mathcal{J}_0) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$, alrededor del multiciclo \mathcal{J}' . Cada subconjunto de puntos $\{p_i^k \mid i = 1, \dots, n\}$ rodeará al k -ésimo ciclo de \mathcal{J}' . Además, tomaremos tales puntos lo suficientemente próximos entre sí, para conseguir que tanto X como su representación de Weierstrass sean casi constantes en un pequeño abierto conexo de $M(\mathcal{J}_0)$ que contenga a dos puntos consecutivos p_i^k y p_{i+1}^k , para cada $(i, k) \in I$, donde estamos adoptando el convenio $p_{n+1}^k = p_1^k$. Además de esto, vamos a fijar un conjunto de números complejos de módulo uno que, a posteriori, servirán para controlar las direcciones en las que haremos las deformaciones en este primer proceso.

Más concretamente, demos cuenta del siguiente resultado.

Afirmación 4.1. *Existen un multiciclo \mathcal{J}_1 tal que $\mathcal{J}' < \mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_0$, y una secuencia de puntos $\{p_i^k \mid (i, k) \in I\}$, contenidos en $M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$, satisfaciendo la siguiente lista de propiedades:*

- 1) *Para cada $k \in \{1, \dots, E\}$, existe un ciclo γ_k contenido en $M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$ y que pasa ordenadamente por los puntos $\{p_1^k, \dots, p_n^k\}$.*
- 2) *El conjunto de ciclos $\mathcal{J}_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_E\}$ forma un multiciclo (en M) con $\overline{M(\mathcal{J}')} \subset M(\mathcal{J}_2)$.*
- 3) *Existen discos abiertos $B^{i,k} \subset M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$ tales que $\{p_i^k, p_{i+1}^k\} \subset B^{i,k}$ (recordemos el convenio $p_{n+1}^k = p_1^k$) y*

$$\|X(p) - X(p')\| < \epsilon_0, \quad \forall p, p' \in B^{i,k}, \quad \forall (i, k) \in I. \quad (4.2)$$

- 4) *Para cada $(i, k) \in I$, existe $S_i^k = \{e_1^{i,k}, e_2^{i,k}, e_3^{i,k}\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , siendo $e_1^{i,k} = \mathcal{N}_E(X(p_i^k))$ (donde \mathcal{N}_E denota la aplicación de Gauss extendida del convexo E , ver página 25 en el capítulo de preliminares), y satisfaciendo*

$$\|e_j^{i,k} - e_j^{i+1,k}\| < \frac{\epsilon_0}{3\mu}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \quad (4.3)$$

(aquí hemos de convenir $e_j^{n+1,k} = e_j^{1,k}$) y

$$f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \neq 0, \quad \text{donde} \quad f_{(X, S_i^k)} := \frac{\eta_{(X, S_i^k)}}{\omega}. \quad (4.4)$$

- 5) *Para cada $(i, k) \in I$, existe una constante compleja θ_i^k de módulo uno, parte imaginaria no nula y*

$$\left| \theta_i^k \frac{f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)}{|f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)|} - 1 \right| < \frac{\epsilon_0}{3\mu}. \quad (4.5)$$

Demostración. \mathcal{J}' es un multiciclo, luego, un conjunto de curvas regulares a trozos, luego, tiene medida nula. Además, $\mathcal{N}_E \circ X$ es una aplicación¹ diferenciable en $M(\mathcal{J}_0) \setminus M(\mathcal{J}')$. En consecuencia, existe un subconjunto abierto y no vacío $U \subset \mathbb{S}^2$, de manera que $\mathcal{N}_E(X(\mathcal{J}')) \subset \mathbb{S}^2 \setminus \overline{U}$. Así, por continuidad, existe un multiciclo \mathcal{J}_1 con $\mathcal{J}' < \mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_0$ y suficientemente próximo a \mathcal{J}' para que $\mathcal{N}_E(X(M(\mathcal{J}_1) \setminus M(\mathcal{J}'))) \subset \mathbb{S}^2 \setminus \overline{U}$.

Consideremos ahora $\{V_1, V_2\}$ una base ortonormal de campos de vectores tangentes en $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{U}$. Definamos, $\forall p \in M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$,

$$\xi_1(p) = \mathcal{N}_E(X(p)), \quad \xi_2(p) = V_1(\mathcal{N}_E(X(p))), \quad \xi_3(p) = V_2(\mathcal{N}_E(X(p))).$$

Observemos que para satisfacer 1) y 3) tan solo debemos tomar una cantidad grande de puntos, colocados suficientemente próximos los unos de los otros. La propiedad 2)

¹Nótese que es una aplicación bien definida gracias a (4.1).

no es más que forzar que los ciclos de la 1) formen un multicyclo. De este modo, la continuidad uniforme de X y de los campos ξ_j , $j = 1, 2, 3$, asegura que podemos encontrar, para n suficientemente grande, un conjunto de puntos $\{p_i^k \mid (i, k) \in I\} \subset M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$ satisfaciendo las propiedades 1), 2) y 3) y tales que

$$\|\xi_j(p_i^k) - \xi_j(p_{i+1}^k)\| < \frac{\epsilon_0}{6\mu}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall (i, k) \in I. \quad (4.6)$$

Ahora, llamemos G a la aplicación de Gauss esférica de X . Entonces, por ser $p_i^k \in M(\mathcal{J}_1) \setminus \overline{M(\mathcal{J}')}$ podemos escribir, para cada $(i, k) \in I$,

$$G(p_i^k) = \sum_{j=1}^3 \varrho_j^{i,k} \cdot \xi_j(p_i^k), \quad \text{donde } \varrho_j^{i,k} \in [-1, 1], \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

Tomemos $a \in [0, 1] \setminus \{\varrho_2^{i,k} \mid (i, k) \in I\}$ y definamos

$$e_1^{i,k} = \xi_1(p_i^k), \quad e_2^{i,k} = -\sqrt{1 - a^2} \xi_2(p_i^k) + a \xi_3(p_i^k), \quad e_3^{i,k} = a \xi_2(p_i^k) + \sqrt{1 - a^2} \xi_3(p_i^k).$$

Esta elección convierte a $\{e_1^{i,k}, e_2^{i,k}, e_3^{i,k}\}$ en una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Además, (4.6) implica trivialmente (4.3). Así, para probar 4) ya solo hemos de comprobar que ocurre (4.4). Para ello, observemos que la elección del real a obliga a ser $e_3^{i,k} \neq G(p_i^k)$, $\forall (i, k) \in I$. Por otro lado, si fuese $f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) = 0$, entonces sería $\eta_{(X, S_i^k)}(p_i^k) = 0$. Así, teniendo en cuenta que $\|\Phi_{(X, S_i^k)}\|^2 \neq 0$ y como se obtiene $\Phi_{(X, S_i^k)}$ a partir de $(g_{(X, S_i^k)}, \eta_{(X, S_i^k)})$, concluimos que $g_{(X, S_i^k)}(p_i^k) = \infty$, luego $G(p_i^k) = e_3^{i,k}$. Esta contradicción prueba (4.4) y en consecuencia 4).

Finalmente, la existencia de los números complejos θ_i^k cumpliendo la propiedad 5) es evidente. ■

Para poder comprender la demostración del lema, es necesario atender en este momento al siguiente comentario.

Nota 4.2. Las propiedades (4.2) y (4.3) son cíclicas, en el sentido de que también son ciertas para $i = n$, siguiendo el convenio $p_{n+1}^k = p_1^k$, $S_{n+1}^k = S_1^k$ y $B^{n+1,k} = B^{1,k}$.

El siguiente paso consiste en fijar, para cada $(i, k) \in I$, una función holomorfa $\zeta_{i,k} : M(\mathcal{J}_0) \setminus \{p_i^k\} \rightarrow \mathbb{C}$ que tiene un polo simple en el punto p_i^k . Después, a partir de estas funciones construiremos las funciones que utilizaremos como transformación de López-Ros en este primer proceso. La existencia de las funciones $\zeta_{i,k}$ es una consecuencia directa del Teorema de los huecos de Noether (Teorema 5 en los preliminares). Además, salvo multiplicar $\zeta_{i,k}$ por una constante compleja, podemos asumir que el residuo de la 1-forma $\zeta_{i,k} \cdot \omega$ en el punto p_i^k es -1 , $\forall (i, k) \in I$.

Ahora, vamos a dar un primer paso para fijar una constante δ que representa el radio de una familia de discos centrados en los puntos p_i^k . La deformación de la representación de Weierstrass de X que vamos a hacer en este primer proceso actuará fundamentalmente dentro de estos discos, mientras que apenas hará cambios fuera de ellos. Además, vamos a destacar puntos $q_i^k \in \partial D(p_i^k, \delta)$ y curvas regulares $\beta_{i,k}$ uniéndolos con

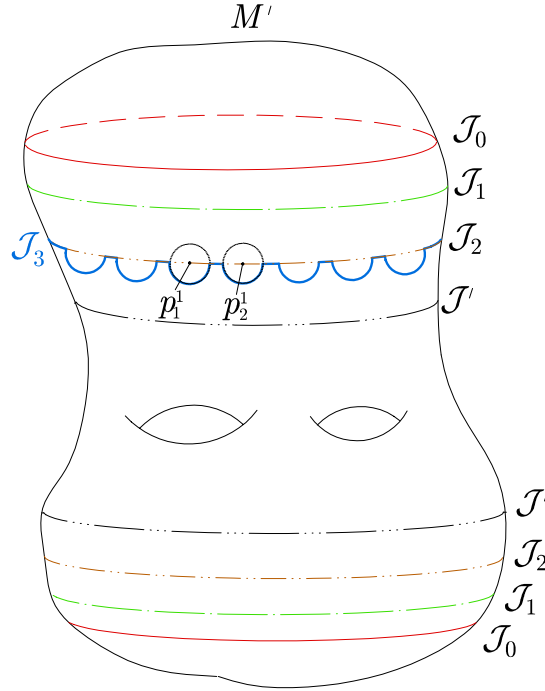


Figura 4.1: La superficie M y los multicitos $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ y \mathcal{J}' .

los puntos p_i^k tales que la función $\zeta_{i,k}$ tiene un especial comportamiento sobre ellas. La tesis (2) de la siguiente afirmación garantiza que la integral (orientada) entre dos puntos cualesquiera de la curva $\beta_{i,k}$ de la 1-forma $\zeta_{i,k} \cdot \omega$ es un número real positivo.

Afirmación 4.2. Existe una constante $\delta \in]0, 1[$ tal que, para cada $(i, k) \in I$, existen un punto $q_i^k \in \partial D(p_i^k, \delta)$ y una curva regular y simple $\beta_{i,k} : [0, 1] \rightarrow D(p_i^k, \delta)$ satisfaciendo

- (1) $\beta_{i,k}(0) = q_i^k, \beta_{i,k}(1) = p_i^k$ y $\beta_{i,k}(]0, 1[) \subset D(p_i^k, \delta)$.
- (2) $\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t)) \cdot \omega_{\beta_{i,k}(t)}(\beta'_{i,k}(t)) \in \mathbb{R}^+, \forall t \in [0, 1[$.
- (3) $\text{Im}(\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))) \cdot \text{Im}(\theta_i^k) < 0, \forall t \in [0, 1[$.

Demostración. Fijemos $(i, k) \in I$. El residuo de $\zeta_{i,k} \cdot \omega$ en el punto p_i^k es -1 , por tanto, podemos considerar $(D(p_i^k, \delta_i^k), z_i^k)$ una carta holomorfa centrada en p_i^k y tal que

$$\zeta_{i,k} \cdot \omega = -\frac{dz_i^k}{z_i^k}.$$

Consideremos ahora el conjunto

$$A = \{q \in D(p_i^k, \delta_i^k) \mid \text{Im}(\zeta_{i,k}(z_i^k(q))) = 0\}.$$

Si δ_i^k es suficientemente pequeño entonces $D(p_i^k, \delta_i^k)$ tiene dos componentes conexas. Llamemos U a la componente conexa en la que

$$\operatorname{Im}(\theta_i^k) \cdot \operatorname{Im}(\zeta_{i,k}(z_i^k(q))) < 0.$$

Nuevamente, si δ_i^k es suficientemente pequeño, es posible encontrar en U una curva $\beta_{i,k}$ de manera que $z_i^k(\beta_{i,k}(t)) = e^{i\theta_0}(1-t)$. De esta forma, tenemos

$$\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t)) \cdot \omega_{\beta_{i,k}(t)}(\beta'_{i,k}(t)) = -\frac{(dz_i^k)_{\beta_{i,k}(t)}(\beta'_{i,k}(t))}{z_i^k(\beta_{i,k}(t))} = \frac{dt}{1-t} \in \mathbb{R}^+.$$

De este modo, terminamos la demostración tomando $\delta = \min\{\delta_i^k \mid (i, k) \in I\}$. ■

Antes de fijar definitivamente la constante δ , definimos

$$\delta' = \max\{\operatorname{long}_{(M, ds)}(\beta(q_i, p_i^k)) \mid (i, k) \in I\},$$

donde estamos denotando por $\beta(p, q)$ al arco orientado de $\beta_{i,k}([0, 1])$ que empieza en q y termina en p . De este modo, es claro que $\delta' \geq \delta$ y $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta' = 0$.

Teniendo en cuenta esta definición, fijemos la constante δ .

Afirmación 4.3. *Existe una constante $\delta \in]0, 1[$ suficientemente pequeña para que se verifique la Afirmación 4.2 y la siguiente lista de propiedades:*

(A1) *Existe un multiciclo \mathcal{J}_3 descrito por*

$$M(\mathcal{J}_3) = M(\mathcal{J}_2) \setminus \left(\bigcup_{(i,k) \in I} D(p_i^k, \delta) \right).$$

(A2) $\overline{D(p_i^k, \delta)} \cup \overline{D(p_{i+1}^k, \delta)} \subset B^{i,k}, \forall (i, k) \in I$.

(A3) $\overline{D(p_i^k, \delta)} \cap \overline{D(p_j^l, \delta)} = \emptyset, \forall (i, k) \neq (j, l) \in I$.

(A4) $\delta' \cdot \max_{\overline{D(p_i^k, \delta)}} \{|f_{(X, S_i^k)}|\} < 2\epsilon_0, \forall (i, k) \in I$.

(A5) $\delta' \cdot \max_{\overline{D(p_i^k, \delta)}} \{|f_{(X, S_i^k)} g_{(X, S_i^k)}^2|\} < |\operatorname{Im}(\theta_i^k)| \epsilon_0, \forall (i, k) \in I$.

(A6) $3\mu \cdot \max_{p \in \overline{D(p_i^k, \delta)}} \{|f_{(X, S_i^k)}(p) - f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)|\} < |f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \epsilon_0, \forall (i, k) \in I$.

(A7) $\delta' \cdot \max_{\overline{D(p_i^k, \delta)}} \{\|\phi\|\} < \epsilon_0, \forall (i, k) \in I$, donde $\Phi = \phi \cdot \omega$ es la representación de Weierstrass de la inmersión X . Nótese que $\|\phi\|$ no depende de la base ortonormal de la representación Φ .

Es obvio que para la demostración no hemos de hacer más que tomar δ suficientemente pequeño. La propiedad (A1) nos dice que la topología del nuevo conjunto $M(\mathcal{J}_3)$ es la misma que la de $M(\mathcal{J}_2)$. Las propiedades (A2) y (A3) sirven para describir los conjuntos en los que la deformación es violenta. Finalmente, el resto de propiedades nos

aseguran el control sobre la dirección de la deformación que vamos a realizar.

Llegados a este punto, definimos una nueva constante

$$\ell = \text{diam}_{(M, ds)}(M(\mathcal{J}_3)) + 2\delta' + 2\pi\delta + 1 .$$

Su significado geométrico se entenderá con claridad un poco más adelante.

Ahora ya, estamos en disposición de deformar la representación de Weierstrass de X . Para ello, construiremos para cada $k \in \{1, \dots, E\}$ una sucesión de n elementos

$$\Psi_k = \{\Psi_{i,k} \mid i = 1, \dots, n\} ,$$

donde cada elemento

$$\Psi_{i,k} = \{\kappa_i^k, a_i^k, C_i^k, G_i^k, \Phi_i^k\}$$

está compuesto por:

- κ_i^k es una constante positiva.
- a_i^k es el primer punto en la curva orientada $\beta(q_i^k, p_i^k)$ tal que

$$\frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega = 3\mu , \quad (4.7)$$

donde μ es la constante que definimos en la página 54. Veamos que dicha elección es posible. Por un lado la propiedad (2) de la Afirmación 4.2 asegura que la anterior integral toma valores reales positivos. Por otro lado, la 1-forma $\zeta_{i,k} \omega$ tiene un polo en el punto p_i^k , luego la integral

$$\int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega$$

diverge a $+\infty$ cuando p tiende a p_i^k . Estas dos afirmaciones junto al hecho de que $|f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \neq 0$ (ver ecuación (4.4)) garantizan la existencia de un tal a_i^k .

- C_i^k es un trozo de una curva regular, cerrada y simple C contenida en $D(p_i^k, \delta)$. Esta curva C es tal que $a_i^k \in C_i^k$ y cada componente conexa de $\beta(p_i^k, q_i^k) \setminus \{a_i^k\}$ cae en una componente conexa de $\overline{D(p_i^k, \delta)} \setminus C$ (tal y como indica la Figura 4.2).
- G_i^k es un sector anular cerrado y acotado por C_i^k , el borde de $D(p_i^k, \delta)$ y el borde de un pequeño entorno de la curva $\beta(q_i^k, p_i^k)$. Véase de nuevo la Figura 4.2.
- Φ_i^k es una representación de Weierstrass definida en el dominio

$$\overline{M(\mathcal{J}_1)} \setminus \left(\bigcup_{(j,l) \leq (i,k)} U(p_j^l) \right) ,$$

donde $U(p_j^l) = D(p_j^l, \delta) \setminus \overline{G_j^l}$ es un pequeño entorno abierto del punto p_j^l . Además, denotaremos $\Phi^{i,k} = \phi^{i,k} \cdot \omega$.

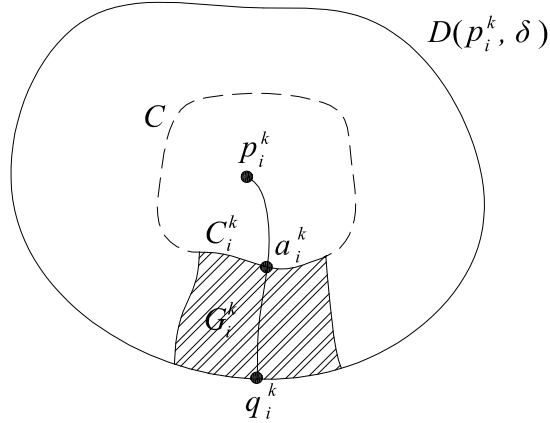


Figura 4.2: El disco conforme $D(p_i^k, \delta)$.

Nota 4.3. En lo que resta, en cada familia Ψ_k , seguiremos el convenio de que $\Psi_{n+1,k} = \Psi_{1,k}$. Además, hemos de poner especial cuidado al pasar de una familia Ψ_{k-1} a la siguiente Ψ_k . Lo haremos del siguiente modo. Para el caso distinguido $k = 1$, llamaremos $\Phi^{0,1} = \phi^{0,1}\omega$ a la representación de Weierstrass de la inmersión X . Así, denotaremos $\Psi_{0,1} = \{\Phi^{0,1}\}$. Para el caso $k > 1$, escribiremos $\Phi^{0,k} = \Phi^{n,k-1}$ y también $\Psi_{0,k} = \{\Phi^{0,k}\}$.

4.1.2

El primer proceso de deformación

La familia $\Psi_{i,k}$ será construida de manera que satisfaga una serie de propiedades. Éstas, tienen por finalidad describir el comportamiento de $\Phi^{i,k}$ sobre el dominio $\overline{M(\mathcal{J}_1)} \setminus (\cup_{(j,l) \leq (i,k)} U(p_j^l))$. Así, dichas propiedades involucrarán las coordenadas de dicha representación de Weierstrass respecto de la base S_i^k . Veámoslo con detalle.

Afirmación 4.4. *Construimos la familia $\Psi_{i,k}$ de manera que cumpla la siguiente lista de propiedades.*

$$(B1_i^k) \quad \delta' \cdot \max_{D(p_j^l, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i,k}, S_j^l)}|\} < 2\epsilon_0, \forall (j, l) > (i, k).$$

$$(B2_i^k) \quad \delta' \cdot \max_{D(p_j^l, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i,k}, S_j^l)} g_{(\Phi^{i,k}, S_j^l)}^2|\} < |\operatorname{Im}(\theta_i^k)|\epsilon_0, \forall (j, l) > (i, k).$$

$$(B3_i^k) \quad 3\mu \cdot \max_{p \in D(p_j^l, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i,k}, S_j^l)}(p) - f_{(X, S_j^l)}(p_j^l)|\} < |f_{(X, S_j^l)}(p_j^l)|\epsilon_0, \forall (j, l) > (i, k).$$

$$(B4_i^k) \quad \|\operatorname{Re} \int_{\alpha_p} \Phi^{i,k}\| < \epsilon_0, \text{ para todo } p \in C_i^k \text{ y para toda curva } \alpha_p \text{ contenida en } C_i^k \text{ y conectando } a_i^k \text{ con } p.$$

$$(B5_i^k) \quad \Phi_{(3, S_i^k)}^{i,k} = \Phi_{(3, S_i^k)}^{i-1,k}, \text{ donde estamos denotando por } \Phi_{(j, S_i^k)}^{i,k} \text{ a la } j\text{-ésima coordenada de } \Phi^{i,k} \text{ en la base ortonormal } S_i^k.$$

$$(B6_i^k) \quad |\phi^{i,k}(p) - \phi^{i-1,k}(p)| < \frac{\epsilon_0}{nE\ell}, \text{ para todo punto } p \text{ del compacto}$$

$$K_i^k = \overline{M(\mathcal{J}_1)} \setminus \left(D(p_i^k, \delta) \cup \left(\bigcup_{(j,l) < (i,k)} U(p_j^l) \right) \right).$$

$$(B7_i^k) \quad \left\| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi^{i,k} - \operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi^{i-1,k} \right\| < 15\epsilon_0.$$

(B8_i^k) *Para todo $p \in G_i^k$ se tiene*

$$\left\| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \Phi^{i,k} \right) e_1^{i,k} + \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \Phi_{(2, S_i^k)}^{i,k} \right) e_2^{i,k} - \frac{1}{2} |f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right) e_1^{i,k} \right\| < 5\epsilon_0.$$

$$(B9_i^k) \quad 3\mu + \epsilon_0 \geq \frac{1}{2} |f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right) \geq -\epsilon_0, \text{ para todo } p \in \overline{G_i^k}.$$

Las anteriores propiedades son ciertas para todo $(i, k) \in I$, excepto las propiedades $(B1_i^k)$, $(B2_i^k)$ y $(B3_i^k)$ que solo se verifican para $(i, k) \in I$ con $i = 1, \dots, n-1$. Del mismo modo, la propiedad $(B7_i^k)$ ocurre solamente para $(i, k) \in I$ con $i = 2, \dots, n+1$ (véase la Nota 4.3).

Nótese que las normas tomadas en las propiedades $(B4_i^k)$, $(B6_i^k)$ y $(B7_i^k)$ no dependen de las bases escogidas en las correspondientes representaciones de Weierstrass.

Antes de entrar en los detalles técnicos de la construcción recursiva de estas familias, expliquemos el propósito de cada una de las propiedades de la Afirmación 4.4. Las pro-

propiedades (B1_i^k), (B2_i^k), (B3_i^k) y (B9_i^k) son de carácter técnico, nos servirán exclusivamente para demostrar la propiedad (B8_i^k). El resto de propiedades controlan el comportamiento de la nueva representación de Weierstrass $\Phi^{i,k}$. La tercera coordenada de esta representación en la base S_i^k queda perfectamente descrita, la propiedad (B5_i^k) asegura que es idéntica a la de $\Phi^{i-1,k}$. Ahora, la propiedad (B6_i^k) afirma que las representaciones $\Phi^{i,k}$ y $\Phi^{i-1,k}$ son muy parecidas fuera del disco $D(p_i^k, \delta)$. Así, tenemos control sobre la nueva representación fuera de tal disco. Este control será fundamental para conseguir la tesis (L.4.1.b) del Lema 4.1. Por otro lado, dentro del disco $D(p_i^k, \delta)$ solo nos interesa el comportamiento de $\Phi^{i,k}$ en el conjunto G_i^k . De ello se encargan el resto de propiedades. Así, lo que hacemos es estudiar la aplicación de $\overline{G_i^k}$ en \mathbb{R}^3 dada por

$$p \longmapsto \operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \Phi^{i,k}.$$

Esta aplicación describe una inmersión minimal definida en $\overline{G_i^k}$ y cuya representación de Weierstrass en la base S_i^k es $\Phi^{i,k}$. La propiedad (B8_i^k) dice que la superficie plana formada por las dos primeras coordenadas en S_i^k de dicha inmersión se parece a una banda estrecha, alargada y acotada. En particular, cuando la función toma valores en $\beta(q_i^k, a_i^k)$ estas dos primeras coordenadas forman una curva plana que se comporta de forma similar a un segmento recto. Esta misma propiedad unida a la elección del punto a_i^k , verificando (4.7), aseguran que la longitud de esta curva es, aproximadamente, 3μ . Además, la correcta elección de la constante compleja θ_i^k , que actuará a modo de giro alrededor de p_i^k , nos dará el control necesario sobre la dirección de deformación a lo largo de la curva $\beta(q_i^k, a_i^k)$. Así¹, el extremo correspondiente a a_i^k queda fuera del conexo exterior E' . Además, gracias a las propiedades (B6_i^k) y, sobre todo, (B7_i^k) podemos concluir que el comportamiento de dos tales curvas planas consecutivas, esto es, las correspondientes a $\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)$ y $\beta(q_i^k, a_i^k)$, es similar. Finalmente, la propiedad (B4_i^k) dice que la inmersión se comporta casi como una constante sobre la curva C_i^k . Este hecho será importante en el segundo proceso de deformación.

Demostremos la afirmación. Como ya hemos mencionado, seguiremos un proceso recursivo. De este modo, para construir $\Psi_{i,1}$ a partir de $\Psi_{i-1,1}$ haremos uso de las Propiedades (B1_{i-1}¹), (B2_{i-1}¹) y (B3_{i-1}¹). Para el primer paso ($i = 1$) no contamos con tales propiedades, en su lugar usaremos (A4), (A5) y (A6) de la Afirmación 4.3. Éstas equivalen a las hipotéticas (B1₀¹), (B2₀¹) y (B3₀¹), respectivamente.

Análogamente, para obtener $\Psi_{i,k}$ con $k > 1$ a partir de $\Psi_{i-1,k}$ usaremos las Propiedades (B1_{i-1}^k), (B2_{i-1}^k) y (B3_{i-1}^k). De nuevo el caso $i = 1$ es especial, lo que haremos será usar (B1_n^{k-1}), (B2_n^{k-1}) y (B3_n^{k-1}), respectivamente.

Veámoslo con detalle. Supongamos definida la familia $\Psi_{i-1,k}$ cumpliendo las Propiedades (B1_{i-1}^k), ..., (B9_{i-1}^k). El modo de definir $\Phi^{i,k}$ a partir de $\Phi^{i-1,k}$ será mediante la transformación de López-Ros. Así, los datos de Weierstrass de $\Phi^{i,k}$ serán

$$g_{(\Phi^{i,k}, S_i^k)} = \frac{g_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}}{h_{i,k}}, \quad \Phi_{(3, S_i^k)}^{i,k} = \Phi_{(3, S_i^k)}^{i-1,k}, \quad (4.8)$$

donde $h_{i,k} : \overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus U(p_i^k) \rightarrow \mathbb{C}$ será una función holomorfa, sin ceros y tal que:

¹Recordemos la definición de μ hecha en la página 54 y la hipótesis (4.1).

- Para cierto $\lambda > 0$ pequeño (lo fijaremos más adelante), $h_{i,k}$ se parece suficientemente a la función $\lambda \theta_i^k \zeta_{i,k} + 1$ en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus U(p_i^k)$.
- Los datos de Weierstrass (4.8) representan a una inmersión minimal bien definida.

Nótese que el Lema 3.1 no nos proporciona una tal función $h_{i,k}$. Lo que haremos será adaptar aquella demostración para este caso particular. Omitiremos parte de los detalles.

Primero de todo, observemos que la Propiedad (3) de la Afirmación 4.2 garantiza que

$$|1 + c \theta_i^k \zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))| \geq |\operatorname{Im}(\theta_i^k)| > 0, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \forall c > 0. \quad (4.9)$$

En efecto, si además de dicha propiedad tenemos también en cuenta que $|\theta_i^k| = 1$ y que $|\operatorname{Re}(\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t)))| \leq |\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))|$, entonces obtenemos

$$|1 + c \theta_i^k \zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))| \geq \sqrt{1 + (c \operatorname{Re}(\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))))^2 + 2 \operatorname{Re}(\theta_i^k)(c \operatorname{Re}(\zeta_{i,k}(\beta_{i,k}(t))))}.$$

Ahora, la función real de variable real $x \mapsto 1 + x^2 + 2 \operatorname{Re}(\theta_i^k)x$ alcanza su mínimo absoluto en $x = -\operatorname{Re}(\theta_i^k)$, donde vale $1 - \operatorname{Re}(\theta_i^k)^2$. Así, la anterior ecuación sigue

$$\geq \sqrt{1 - \operatorname{Re}(\theta_i^k)^2} = |\operatorname{Im}(\theta_i^k)| > 0,$$

como queríamos comprobar. La última desigualdad se debe a que elegimos θ_i^k con parte imaginaria no nula.

Consideremos $\mathcal{B} = \{\aleph_1, \dots, \aleph_\varrho\}$ una base de la homología de $M(\mathcal{J}_0)$ de manera que las curvas \aleph_j , $j = 1, \dots, \varrho$, estén contenidas en $M(\mathcal{J}_2) \setminus \cup_{(j,l) \in I} D(p_j^l, \delta)$. Esto es posible por ser dicho dominio el asociado a un multiciclo. Recordemos que ϱ fue definido anteriormente en la página 43.

Razonando como en la Afirmación 3.3 encontramos un conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2\varrho}\}$ de funciones holomorfas en $\overline{M(\mathcal{J}_0)}$ de manera que $\{\mathcal{F}(\varphi_1), \dots, \mathcal{F}(\varphi_{2\varrho})\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^{2\varrho}$ linealmente independiente, siendo $\mathcal{F} : \mathcal{O}(\overline{M(\mathcal{J}_0)}) \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ la aplicación descrita en dicha afirmación. Igual que entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\left| \exp \left[\sum_{j=1}^{2\varrho} x_j \varphi_j(p) \right] - 1 \right| < \frac{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|}{2}, \quad (4.10)$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho}$ con $\|x\|_\infty < 1$ y para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J}_0)}$. Siguiendo con el razonamiento, definamos para $\Theta = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}) \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$ la aplicación $h^\Theta : \overline{M(\mathcal{J}_0)} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h^\Theta(p) = \lambda_0 \theta_i^k \zeta_{i,k}(p) + \exp \left[\sum_{j=1}^{2\varrho} \lambda_j \varphi_j(p) \right].$$

Listemos algunas de sus propiedades.

- h^Θ es holomorfa en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus \{p_i^k\}$. En el punto p_i^k tiene un polo simple heredado de la función $\zeta_{i,k}$.

- Cuando Θ tiende a $\vec{0} \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$ la función h^Θ converge uniformemente a 1 en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus D(p_i^k, \delta)$. De este hecho obtenemos fundamentalmente dos consecuencias.
 - Existe un real $r \in]0, 1[$ de manera que h^Θ no tiene ceros en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus D(p_i^k, \delta)$ para todo $\Theta \in B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^{2\varrho+1} \mid \|x\| < r\}$.
 - Al deformar $\Phi^{i-1,k}$ mediante el uso en la transformación de López-Ros de la función h^Θ , obtendremos una nueva representación de Weierstrass que converge a $\Phi^{i-1,k}$ uniformemente en $\overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus D(p_i^k, \delta)$, cuando $\Theta \rightarrow \vec{0}$.
- Debido a (4.9) y (4.10), tenemos $|h^\Theta(\beta_{i,k}(t))| > \frac{1}{2} |\text{Im}(\theta_i^k)| > 0$, para todo $\Theta \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$ con $\|\Theta\| < 1$ y para todo $t \in [0, 1[$. Por tanto, por continuidad, h^Θ no tiene ceros en un entorno de la curva $\beta_{i,k}(t)$, $t \in [0, 1[$.

Consideremos ahora $\Phi^\Theta = (\Phi_1^\Theta, \Phi_2^\Theta, \Phi_3^\Theta, S_i^k)$ la representación de Weierstrass cuyos datos de Weierstrass en la base S_i^k son

$$g^\Theta = \frac{g(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}{h^\Theta}, \quad \Phi_3^\Theta = \Phi_{(3, S_i^k)}^{i-1,k}.$$

El siguiente paso consiste en resolver el problema de periodos de las dos primeras coordenadas de esta representación. Para ello, definimos la aplicación de periodos $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{2\varrho+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ dada por

$$\mathcal{P}(\Theta) = \left(\text{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \Phi_1^\Theta \right]_{j=1, \dots, \varrho}, \text{Re} \left[\int_{\mathbb{N}_j} \Phi_2^\Theta \right]_{j=1, \dots, \varrho} \right).$$

De esta forma, la representación de Weierstrass Φ^Θ da lugar a una inmersión minimal bien definida si, y solo si, $\mathcal{P}(\Theta) = \vec{0}$. Así, puesto que $\Phi^{i-1,k}$ representa una inmersión minimal bien definida y $\Phi^{\vec{0}} = \Phi^{i-1,k}$, por ser $h^{\vec{0}} \equiv 1$, concluimos que $\mathcal{P}(\vec{0}) = \vec{0}$. Nótese que estamos denotando indiferentemente $\vec{0} \in \mathbb{R}^{2\varrho}$ y $\vec{0} \in \mathbb{R}^{2\varrho+1}$. Además, \mathcal{P} es una aplicación de clase C^1 y, como en la demostración del Lema 3.1, la elección de las funciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2\varrho}\}$ garantiza que

$$[\text{Jac}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{2\varrho}}(\mathcal{P})](\vec{0}) \neq 0.$$

De esta forma, siguiendo los mismos argumentos que entonces, el Teorema de la Función Implícita proporciona una constante positiva κ y una curva $L :]-\kappa, \kappa[\rightarrow \mathbb{R}^{2\varrho}$ de manera que

$$\mathcal{P}(\lambda_0, L(\lambda_0)) = \vec{0}, \quad (\lambda_0, L(\lambda_0)) \in B(0, r), \quad \forall \lambda_0 \in]-\kappa, \kappa[,$$

siendo r el real positivo que fijamos al listar las propiedades de h^Θ . En consecuencia, la representación de Weierstrass $\Phi^{(\lambda_0, L(\lambda_0))}$ da lugar a una inmersión minimal bien definida para cada $\lambda_0 \in]-\kappa, \kappa[$. Además, en el compacto K_i^k (véase la propiedad (B6_i^k)) la representación $\Phi^{(\lambda_0, L(\lambda_0))}$ converge uniformemente a $\Phi^{i-1,k}$ cuando $\lambda_0 \rightarrow 0$. De hecho, no es difícil comprobar la convergencia uniforme también de los datos de Weierstrass. En particular, cuando λ_0 tiende a cero tenemos sobre K_i^k

$$g^{(\lambda_0, L(\lambda_0))} \rightarrow g_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}, \quad f^{(\lambda_0, L(\lambda_0))} \rightarrow f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}.$$

Teniendo estas convergencias en cuenta y las Propiedades (B1_{i-1}^k), (B2_{i-1}^k), (B3_{i-1}^k) y (B6_{i-1}^k) encontramos $\kappa_i^k \in]0, \kappa[$ suficientemente pequeño para que la representación de Weierstrass $\Phi^{i,k}$ con datos

$$g_{(\Phi^{i,k}, S_i^k)} = g^{(\kappa_i^k, L(\kappa_i^k))}, \quad \Phi_{(3, S_i^k)}^{i,k} = \Phi_3^{(\kappa_i^k, L(\kappa_i^k))}$$

verifique (B1_i^k), (B2_i^k), (B3_i^k) y (B6_i^k). Además, $\Phi^{i,k}$ representa a una inmersión minimal bien definida

$$X_i^k : \overline{M(\mathcal{J}_2)} \setminus \left(\bigcup_{(j,l) \leq (i,k)} D(p_j^l, \delta) \right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y cumple la Propiedad (B5_i^k) por haber sido obtenida de $\Phi^{i-1,k}$ mediante una transformación de López-Ros sobre la base S_i^k . Para comprobar el resto de propiedades de la Afirmación 4.4 tenemos que argumentar un poco más. Por comodidad escribiremos $h_{i,k}$ en lugar de $h^{(\kappa_i^k, L(\kappa_i^k))}$.

La Propiedad (B8_i^k) se debe fundamentalmente a la forma de la función $h_{i,k}$ que ha sido usada en la transformación de López-Ros. En este punto es donde se hace necesaria la correcta elección de la constante θ_i^k . Para comprobar (B8_i^k) usaremos, por comodidad, notación compleja, escribiremos $a + ib$ en lugar de $a e_1^{i,k} + b e_2^{i,k}$. La estrategia consiste en demostrar la propiedad para todo punto $p \in \beta(q_i^k, a_i^k)$ y luego tomar G_i^k suficientemente próximo a $\beta(q_i^k, a_i^k)$ para que cumpla la propiedad por continuidad. Así, fijemos $p \in \beta(q_i^k, a_i^k)$. De la misma definición de $\beta_{i,k}$ obtenemos

$$\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega = \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \in \mathbb{R}^+,$$

que es un real positivo por la tesis (2) de la Afirmación 4.2. Por tanto, usando primero (4.5) y luego (4.7), tenemos

$$\frac{1}{2} \left| \left(\left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| - \overline{\theta_i^k f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)} \right) \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| < \\ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{3\mu} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \leq \epsilon_0.$$

En consecuencia,

$$\left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \Phi_{(1, S_i^k)}^{i,k} + i \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \Phi_{(2, S_i^k)}^{i,k} - \frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| < \\ \left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \Phi_{(1, S_i^k)}^{i,k} + i \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \Phi_{(2, S_i^k)}^{i,k} - \frac{1}{2} \overline{\theta_i^k f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| + \epsilon_0. \quad (4.11)$$

Ahora, para cualquier representación de Weierstrass Φ es un cálculo directo comprobar que $\operatorname{Re} \Phi_1 + i \operatorname{Re} \Phi_2 = \frac{1}{2}(\overline{\eta} - g^2 \eta)$, luego (4.11) equivale a

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \left(\overline{f_{(\Phi^{i,k}, S_i^k)} \omega} - g_{(\Phi^{i,k}, S_i^k)}^2 f_{(\Phi^{i,k}, S_i^k)} \omega \right) - \frac{1}{2} \overline{\theta_i^k f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| + \epsilon_0 =$$

por la definición de $\Phi^{i,k}$ y separando sumandos,

$$= \frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} h_{i,k} \omega} - \int_{\beta(q_i^k, p)} \frac{g_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}^2 f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}}{h_{i,k}} \omega - \frac{1}{2} \overline{\theta_i^k f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| + \epsilon_0 . \quad (4.12)$$

Usemos en este momento la definición de $h_{i,k}$. Teniendo en cuenta (4.10) podemos escribir

$$h_{i,k} = 1 + \theta_i^k \kappa_i^k \zeta_{i,k} + v_{i,k} ,$$

siendo $v_{i,k} : \overline{M(\mathcal{J}_0)} \setminus \{p_i^k\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con

$$|v_{i,k}| < \frac{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|}{2} . \quad (4.13)$$

Así, introduciendo esta forma de escribir $h_{i,k}$ en el primer sumando de (4.12) y separando sumandos nos queda

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} \theta_i^k \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega} + \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} (v_{i,k} + 1) \omega} - \int_{\beta(q_i^k, p)} f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} g_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}^2 \frac{\omega}{h_{i,k}} - \overline{\theta_i^k f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right| + \epsilon_0 \leq$$

reordenando los sumandos y usando la desigualdad triangular,

$$\epsilon_0 +$$

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{\left(f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} - f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right) \theta_i^k \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega} \right| + \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} (v_{i,k} + 1) \omega} \right| + \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} g_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)}^2 \frac{\omega}{h_{i,k}} \right| . \quad (4.16)$$

Acotemos superiormente cada uno de los tres últimos sumandos. Para acotar (4.14) hacemos uso de la Propiedad (B3 $_{i-1}^k$) y la ecuación (4.7) que define al punto a_i^k . Además, tendremos en cuenta que $|\theta_i^k| = 1$ y que la Propiedad (2) de la Afirmación 4.2 asegura que

$$\int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \in \mathbb{R}^+ .$$

De este modo,

$$\left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \overline{\left(f_{(\Phi^{i-1,k}, S_i^k)} - f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right) \theta_i^k \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \max_{p' \in D(p_i^k, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}(p') - f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)|\} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i, k} \omega \leq \\ & \frac{\epsilon_0}{3\mu} |f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i, k} \omega \leq 2\epsilon_0 . \end{aligned}$$

Para el sumando (4.15) usaremos (B1 $_{i-1}^k$), la desigualdad (4.13) y la definición de δ' , la cual implica

$$\left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \omega \right| \leq \delta' . \quad (4.17)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \frac{f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}(v_{i, k} + 1) \omega}{f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}(v_{i, k} + 1) \omega} \right| \leq \\ & \max_{p' \in D(p_i^k, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}(p')| (|v_{i, k}(p')| + 1)\} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \omega \right| < \\ & \frac{2\epsilon_0}{\delta'} \left(\frac{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|}{2} + 1 \right) \delta' = 2\epsilon_0 \left(\frac{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|}{2} + 1 \right) < 4\epsilon_0 . \end{aligned}$$

Finalmente, para acotar (4.16) observemos primero que (4.9), (4.10) y la definición de $h_{i, k}$ implican

$$|h_{i, k}(p')| > \frac{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|}{2} , \quad \forall p' \in \beta(q_i^k, p_i^k) .$$

Teniendo esto en cuenta, la Propiedad (B2 $_{i-1}^k$), la ecuación (4.17) y la definición de δ' , tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)} g_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}^2 \frac{\omega}{h_{i, k}} \right| \leq \\ & \max_{p' \in D(p_i^k, \delta)} \{|f_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}(p') g_{(\Phi^{i-1, k}, S_i^k)}^2(p')|\} \cdot \max_{p' \in \beta(q_i^k, p_i^k)} \left\{ \frac{1}{|h_{i, k}(p')|} \right\} \left| \int_{\beta(q_i^k, p)} \omega \right| < \\ & |\operatorname{Im}(\theta_i^k)| \frac{\epsilon_0}{\delta'} \frac{2}{|\operatorname{Im}(\theta_i^k)|} \delta' = 2\epsilon_0 . \end{aligned}$$

Por tanto, gracias a estas acotaciones y recorriendo la cadena de desigualdades que empezó en (4.11) concluimos que la Propiedad (B8 $_i^k$) ocurre para todo punto p en la curva $\beta(q_i^k, a_i^k)$. Por tanto, por continuidad (de $\Phi^{i, k}$, $\zeta_{i, k}$ y ω), podemos tomar C_i^k y G_i^k suficientemente próximos a a_i^k y $\beta(q_i^k, a_i^k)$, respectivamente, para que se siga cumpliendo en todo G_i^k . De este modo, demostramos (B8 $_i^k$).

Además, estas elecciones las hacemos de forma adecuada para que también se cumplan (B4 $_i^k$) y (B9 $_i^k$). Esto es trivialmente posible por continuidad (de $\Phi^{i, k}$) en el caso de (B4 $_i^k$). Para (B9 $_i^k$) hemos de tener en cuenta que

$$0 \leq \frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, p)} \kappa_i^k \zeta_{i, k} \omega \right) \leq 3\mu , \quad \forall p \in \beta(q_i^k, a_i^k) ,$$

y usar la continuidad de esta función. No olvidemos que, además de todas estas restricciones, debemos tomar G_i^k suficientemente próximo a $\beta(q_i^k, a_i^k)$ para que la función $h_{i, k}$

no tenga ceros sobre G_i^k . Como siempre, esto es posible por continuidad¹ (en este caso de $h_{i,k}$).

Así, ya tenemos completamente definida la familia $\Psi_{i,k}$ cumpliendo las propiedades de la Afirmación 4.4 excepto (B7_i^k). Finalmente, comprobemos que ésta última también se verifica. Para ello, escribimos

$$\left\| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi^{i,k} - \operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi^{i-1,k} \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^2 \left[\left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(j, S_i^k)}^{i,k} \right) e_j^{i,k} - \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(j, S_{i-1}^k)}^{i-1,k} \right) e_j^{i-1,k} \right] \right\| + \quad (4.18)$$

$$\left\| \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(3, S_i^k)}^{i,k} \right) e_3^{i,k} - \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(3, S_{i-1}^k)}^{i-1,k} \right) e_3^{i-1,k} \right\|. \quad (4.19)$$

Acotemos por separado cada uno de los sumandos. Para (4.18) usaremos primero (B8_i^k) y (B8_{i-1}^k) con lo que nos queda

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^2 \left[\left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(j, S_i^k)}^{i,k} \right) e_j^{i,k} - \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(j, S_{i-1}^k)}^{i-1,k} \right) e_j^{i-1,k} \right] \right\| = \\ & \left\| \sum_{j=1}^2 \left[\left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(j, S_i^k)}^{i,k} \right) e_j^{i,k} \right] - \sum_{j=1}^2 \left[\left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(j, S_{i-1}^k)}^{i-1,k} \right) e_j^{i-1,k} \right] \right\| \leq \\ & \left\| \left(\frac{1}{2} |f_{(X, S_i^k)}(p_i^k)| \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right) e_i^{i,k} - \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{2} |f_{(X, S_{i-1}^k)}(p_{i-1}^k)| \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \kappa_{i-1}^k \zeta_{i-1,k} \omega \right) e_i^{i-1,k} \right\| + 10\epsilon_0 = \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la definición de a_i^k cumpliendo (4.7) y la proximidad entre los vectores de las bases S_i^k y S_{i-1}^k descrita por (4.3),

$$\left\| 3\mu e_1^{i,k} - 3\mu e_1^{i-1,k} \right\| + 10\epsilon_0 < \epsilon_0 + 10\epsilon_0 = 11\epsilon_0.$$

Usando (B5_i^k), (B5_{i-1}^k) y la desigualdad triangular en (4.19) tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(3, S_i^k)}^{i,k} \right) e_3^{i,k} - \left(\operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(3, S_{i-1}^k)}^{i-1,k} \right) e_3^{i-1,k} \right\| \leq \\ & \left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi_{(3, S_i^k)}^{i-1,k} \right| + \left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \Phi_{(3, S_{i-1}^k)}^{i-2,k} \right| = \quad (4.20) \end{aligned}$$

¹Recordemos que $h_{i,k}$ no tiene ceros sobre $\beta(q_i^k, a_i^k)$.

recordemos que escribimos $\Phi^{i,k} = \phi^{i,k}\omega$ para todo $(i,k) \in I$,

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \phi_{(3, S_i^k)}^{i-1, k} \omega \right| + \left| \operatorname{Re} \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \phi_{(3, S_{i-1}^k)}^{i-2, k} \omega \right| \leq \\ & \frac{\max}{D(p_i^k, \delta)} \{ \|\phi^{i-1, k}\| \} \left| \int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \omega \right| + \frac{\max}{D(p_{i-1}^k, \delta)} \{ \|\phi^{i-2, k}\| \} \left| \int_{\beta(q_{i-1}^k, a_{i-1}^k)} \omega \right| \leq \end{aligned}$$

por la definición de δ' ,

$$\delta' \left(\frac{\max}{D(p_i^k, \delta)} \{ \|\phi^{i-1, k}\| \} + \frac{\max}{D(p_{i-1}^k, \delta)} \{ \|\phi^{i-2, k}\| \} \right) < \quad (4.21)$$

Ahora, usando la desigualdad triangular, (B6_j^l) para $(j, l) < (i, k) \in I$, y (A7), tenemos en $\overline{D(p_i^k, \delta)}$

$$\begin{aligned} \|\phi^{i-1, k}\| & \leq \|\phi^{i-1, k} - \phi^{i-2, k}\| + \dots + \|\phi^{1, 1} - \phi^{0, 1}\| + \|\phi^{0, 1}\| < \\ & \frac{\epsilon_0}{nE\ell} + (i-1)k + \frac{\epsilon_0}{nE\ell} + \frac{\epsilon_0}{\delta'} \leq \frac{\epsilon_0}{\ell} + \frac{\epsilon_0}{\delta'}. \end{aligned}$$

Teniendo esta desigualdad en cuenta y la análoga para $\|\phi^{i-2, k}\|$, la ecuación (4.21) sigue

$$\delta' \left(\frac{\epsilon_0}{\ell} + \frac{\epsilon_0}{\delta'} + \frac{\epsilon_0}{\ell} + \frac{\epsilon_0}{\delta'} \right) < 4\epsilon_0,$$

donde estamos usando que $\ell > \delta'$ por definición (página 59).

En consecuencia, la Propiedad (B7_i^k) ocurre, con lo que terminamos la demostración de la Afirmación 4.4.

4.1.3

Propiedades del primer proceso de deformación

Después de haber realizado el primer proceso de deformación nos damos cuenta de que hemos construido una familia de representaciones de Weierstrass, $\{\Phi^{i,k} \mid (i,k) \in I\}$, que no procuran inmersiones minimales bien definidas sobre $M(\mathcal{J}_1)$ (recordemos que \mathcal{J}_1 es un multiciclo que fijamos en la Afirmación 4.1). Esto se debe a que las representaciones $\Phi^{i,k}$ tienen polos y, posiblemente, ceros en $M(\mathcal{J}_1)$. La existencia de tales polos y ceros es consecuencia de que hemos utilizado en la transformación de López-Ros las funciones $h_{i,k}$. Esta función tiene un polo en el punto $p_i^k \in M(\mathcal{J}_1)$ y, posiblemente, tenga ceros en $D(p_i^k, \delta) \subset M(\mathcal{J}_1)$.

Nuestro siguiente objetivo será describir un dominio \mathcal{U} en $M(\mathcal{J}_1)$ donde dichas representaciones de Weierstrass determinen inmersiones minimales bien definidas

$$X_i^k(p) := \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i,k}, \quad p \in \mathcal{U}, \quad (i,k) \in I.$$

Consideremos un real positivo $\delta'' > \delta$ de manera que

- $\overline{D(p_i^k, \delta'')} \cup \overline{D(p_{i+1}^k, \delta'')} \subset B^{i,k}, \forall (i,k) \in I$. Esto es posible tomando δ'' suficientemente poco mayor que δ y teniendo en cuenta la Propiedad (A2) de la Afirmación 4.3.

- $\overline{D(p_i^k, \delta'')} \cap \overline{D(p_j^l, \delta'')} = \emptyset, \forall (i, k) \neq (j, l) \in I$. Esta vez hemos de tener en cuenta (A3) y, nuevamente, elegir δ'' suficientemente próximo a δ .

Por ser $\delta'' > \delta$ y $p_i^k \in \partial M(\mathcal{J}_2), \forall (i, k) \in I$ (el multiciclo \mathcal{J}_2 también fue descrito en la Afirmación 4.1), podemos encontrar una curva $\alpha_{i,k}$ cumpliendo

- $\alpha_{i,k}$ está incluida en $D(p_i^k, \delta'') \setminus D(p_i^k, \delta)$.
- $\alpha_{i,k}$ conecta el dominio $\partial D(p_i^k, \delta'') \cap \text{Int } M(\mathcal{J}_2)$ con el punto q_i^k . Aquí estamos denotando $\text{Int } M(\mathcal{J}_2) = M(\mathcal{J}_2) \setminus (\partial M(\mathcal{J}_2))$.

Finalmente, tomemos N_i^k un pequeño entorno abierto de la curva $\alpha_{i,k} \cup \beta(q_i^k, a_i^k)$ con

$$N_i^k \subset \overline{G_i^k \cup (D(p_i^k, \delta'') \setminus D(p_i^k, \delta))}.$$

Definimos el dominio \mathcal{U} como (véase la Figura 4.3)

$$\mathcal{U} = \left(M(\mathcal{J}_2) \setminus \left(\bigcup_{(i,k) \in I} D(p_i^k, \delta'') \right) \right) \cup \left(\bigcup_{(i,k) \in I} N_i^k \right).$$

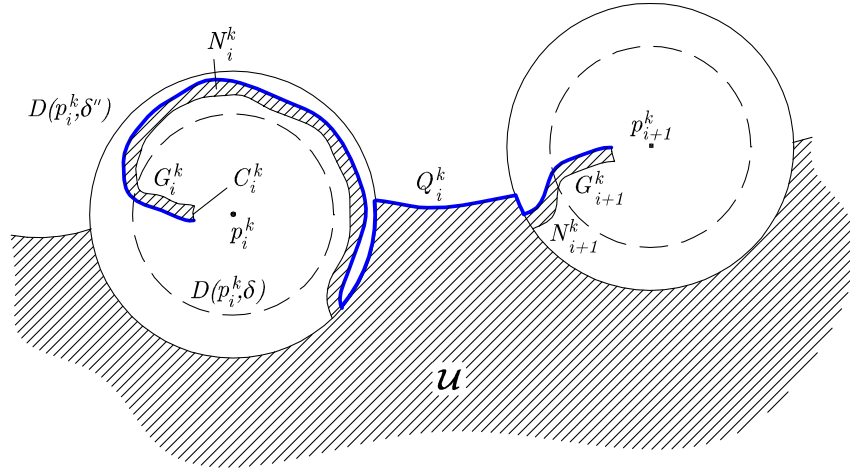


Figura 4.3: El dominio \mathcal{U} y las curvas Q_i^k .

Una elección adecuada de δ'' , $\alpha_{i,k}$ y N_i^k garantiza el siguiente resultado. Simplemente hemos de tomar δ'' suficientemente poco mayor que δ , la curva $\alpha_{i,k}$ de manera que

$$\text{long}_{(M(\mathcal{J}_0), ds)}(\alpha_{i,k}) < \pi\delta + \delta' + \frac{1}{2},$$

y N_i^k suficientemente pequeño. Nuevamente, dicha elección de la curva $\alpha_{i,k}$ es posible si δ'' es conveniente.

Afirmación 4.5. El dominio \mathcal{U} satisface la siguiente lista de propiedades:

- (C1) Existe un multiciclo $\mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ tal que $\mathcal{U} = M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})$. En lo que sigue escribiremos $M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})$ en lugar de \mathcal{U} .
- (C2) $\beta(q_i^k, a_i^k) \subset \overline{M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})}$ y $\mathcal{J}' < \mathcal{J}_{\mathcal{U}}$.
- (C3) $\text{diam}_{(M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}}), ds)}(M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})) < \ell$.
- (C4) $\overline{M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})} \cap \overline{D(p_i^k, \delta)} \subset \overline{G_i^k}, \forall (i, k) \in I$.
- (C5) $M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})$ y $M(\mathcal{J}_0)$ tienen el mismo grupo de homología. Además, éste está generado por la base \mathcal{B} fijada en la página 63.
- (C6) $\overline{M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})}$ no contiene ningún polo ni ningún cero de las funciones $h_{i,k}, (i, k) \in I$, por tanto, no contiene ningún polo ni cero de las representaciones $\Phi^{i,k}, (i, k) \in I$. En consecuencia, éstas dan lugar a inmersiones minimales, conformes y bien definidas sobre $M(\mathcal{J}_{\mathcal{U}})$.

Demostración. Recordemos que $\ell = \text{diam}_{(M(\mathcal{J}_0), ds)}(M(\mathcal{J}_3)) + 2\delta' + 2\pi\delta + 1$, siendo $M(\mathcal{J}_3) = M(\mathcal{J}_2) \setminus (\cup_{(i,k) \in I} D(p_i^k, \delta))$. Así, para conseguir (C3) basta con tomar N_i^k suficientemente pequeño para que $\text{diam}_{(M(\mathcal{J}_0), ds)}(N_i^k) < \pi\delta + \delta' + \frac{1}{2}$. El resto de las propiedades son evidentes por como se ha hecho la construcción. ■

Gracias a (C6) queda claro que podemos encontrar un nuevo multiciclo $\mathcal{J}_4 > \mathcal{J}_{\mathcal{U}}$ (y suficientemente pequeño) de manera que satisfaga (C3), (C5) y que las inmersiones

$$X_i^k : M(\mathcal{J}_4) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X_i^k(p) = \text{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i,k}$$

sigan estando bien definidas, para cada $(i, k) \in I$. Recordemos que estas inmersiones han sido obtenidas a partir de la inmersión original X mediante un proceso recursivo que consta de n_E pasos. En el paso (i, k) de este proceso apenas hemos deformado la inmersión anterior fuera de un pequeño disco centrado en el punto p_i^k . Además, en dicho paso, no modificamos la tercera coordenada de la inmersión en la base S_i^k . Como consecuencia, al final del proceso hemos obtenido una inmersión X_n^E definida en el dominio asociado a un multiciclo \mathcal{J}_4 con las siguientes características:

- Es próxima a X en todo $M(\mathcal{J}_4)$ salvo en pequeños discos centrados en los puntos $p_i^k, (i, k) \in I$.
- Las imágenes de los puntos $a_i^k, (i, k) \in I$, quedan alejadas del convexo E . De hecho, suficientemente alejadas para caer fuera de E' .
- Las imágenes de dos puntos consecutivos, a_i^k y a_{i+1}^k , son cercanas entre sí.

Formalicemos esta lista de propiedades.

Afirmación 4.6. Para cada $(i, k) \in I$, tenemos

$$(D1_i^k) \quad \|X_i^k(p) - X_{i-1}^k(p)\| < \frac{\epsilon_0}{nE}, \text{ para todo punto } p \text{ en } M(\mathcal{J}_4) \setminus D(p_i^k, \delta).$$

$$(D2_i^k) \quad (X_i^k)_{(3, S_i^k)} = (X_{i-1}^k)_{(3, S_i^k)}.$$

$$(D3_i^k) \quad \|X_n^E(a_i^k) - X_n^E(a_{i+1}^k)\| < 20\epsilon_0.$$

$$(D4_i^k) \quad X_n^E(a_i^k) \in \mathbb{R}^3 \setminus E_{2\mu}(\subset \mathbb{R}^3 \setminus E').$$

Demostración. La Propiedad (D1_i^k) es consecuencia de (B6_i^k) y (C3). En efecto, por definición de X_i^k y usando que $\Phi^{i,k} = \phi^{i,k}\omega$ (y lo análogo para $i-1$), tenemos

$$\begin{aligned} \|X_i^k(p) - X_{i-1}^k(p)\| &= \left\| \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i,k} - \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i-1,k} \right\| = \left\| \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (\phi^{i,k} - \phi^{i-1,k})\omega \right\| \leq \\ &\int_{p_0}^p |\phi^{i,k} - \phi^{i-1,k}| \|\omega\| \leq \max_{p' \in M(\mathcal{J}_4) \setminus D(p_i^k, \delta)} \{|\phi^{i,k}(p') - \phi^{i-1,k}(p')|\} \cdot \int_{p_0}^p \|\omega\| \leq \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $M(\mathcal{J}_4) \setminus D(p_i^k, \delta) \subset K_i^k$ (recordemos que K_i^k fue definido en la Afirmación 4.4),

$$\max_{p' \in K_i^k} \{|\phi^{i,k}(p') - \phi^{i-1,k}(p')|\} \cdot \operatorname{diam}_{(M(\mathcal{J}_4), ds)}(M(\mathcal{J}_4)) < \frac{\epsilon_0}{nE\ell} \cdot \ell = \frac{\epsilon_0}{nE},$$

donde en la última desigualdad hemos usado (B6_i^k) y (C3).

Por otro lado, (B5_i^k) implica inmediatamente (D2_i^k).

La prueba de (D3_i^k) es algo más complicada. Sumando y restando varios términos tenemos

$$\|X_n^E(a_i^k) - X_n^E(a_{i+1}^k)\| \leq$$

$$\|X_n^E(a_i^k) - X_i^k(a_i^k)\| + \tag{4.22}$$

$$\|X_n^E(a_{i+1}^k) - X_{i+1}^k(a_{i+1}^k)\| + \tag{4.23}$$

$$\|X_{i+1}^k(q_{i+1}^k) - X_i^k(q_i^k)\| + \tag{4.24}$$

$$\|(X_i^k(a_i^k) - X_i^k(q_i^k)) - (X_{i+1}^k(a_{i+1}^k) - X_{i+1}^k(q_{i+1}^k))\|. \tag{4.25}$$

Acotemos ahora cada sumando por separado. Usando las Propiedades (D1_j^l), $(j, l) > (i, k) \in I$, acotamos superiormente el sumando (4.22) por ϵ_0 . El mismo argumento, con $(j, l) > (i+1, k) \in I$, acota el término (4.23) por ϵ_0 . Para (4.24) escribimos

$$\|X_{i+1}^k(q_{i+1}^k) - X_i^k(q_i^k)\| \leq \|X(q_{i+1}^k) - X(q_i^k)\| +$$

$$\|X_{i+1}^k(q_{i+1}^k) - X(q_{i+1}^k)\| + \|X_i^k(q_i^k) - X(q_i^k)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 + \epsilon_0 = 3\epsilon_0,$$

donde hemos usado la desigualdad (4.2) para acotar el primer sumando, las Propiedades (D1_j^l), $(j, l) \leq (i+1, k) \in I$, para el segundo (nótese que podemos usar (D1_{i+1}^k) por ser

$q_{i+1}^k \in \partial D(p_{i+1}^k, \delta)$) y, finalmente, $(D1_j^l)$, $(j, l) \leq (i, k) \in I$, para el tercero. Por último, para acotar el sumando (4.25) usaremos $(B7_{i+1}^k)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & \|(X_i^k(a_i^k) - X_i^k(q_i^k)) - (X_{i+1}^k(a_{i+1}^k) - X_{i+1}^k(q_{i+1}^k))\| = \\ & \left\| \operatorname{Re} \left(\int_{\beta(q_{i+1}^k, a_{i+1}^k)} \Phi^{i+1, k} \right) - \operatorname{Re} \left(\int_{\beta(q_i^k, a_i^k)} \Phi^{i, k} \right) \right\| < 15\epsilon_0 . \end{aligned}$$

Para terminar, probemos $(D4_i^k)$. Para ello veamos que $X_n^E(a_i^k)$ está próximo al vector $X(p_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k))$. En efecto, sumando y restando términos se tiene

$$\begin{aligned} & \|X_n^E(a_i^k) - (X(p_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k)))\| \leq \\ & \|X_n^E(a_i^k) - X_i^k(a_i^k)\| + \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\|X_i^k(q_i^k) - X(q_i^k)\| + \quad (4.27)$$

$$\|X(q_i^k) - X(p_i^k)\| + \quad (4.28)$$

$$\|X_i^k(a_i^k) - (X_i^k(q_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k)))\| . \quad (4.29)$$

Nuevamente, acotaremos cada sumando por separado. Cada uno de los tres primeros sumandos está acotado por ϵ_0 . Veámoslo. Para (4.26) usamos $(D1_j^l)$, $(j, l) > (i, k) \in I$. Para la cota de (4.27) tenemos otra vez en cuenta $(D1_j^l)$, esta vez para $(j, l) \leq (i, k) \in I$. Por otro lado, la acotación del sumando (4.28) se debe a la desigualdad (4.2). Por último, acotemos (4.29). Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} & \|X_i^k(a_i^k) - (X_i^k(q_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k)))\| \leq \\ & \|(X_i^k(a_i^k) - X_i^k(q_i^k))_{(*, S_i^k)} - 3\mu e_1^{i, k}\| + |(X_i^k(a_i^k) - X_i^k(q_i^k))_{(3, S_i^k)}| \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde hemos usado que la base S_i^k era tomada de forma que $e_1^{i, k} = \mathcal{N}_E(X(p_i^k))$. Ahora, teniendo en cuenta (4.7) y la definición de X_i^k , el primer sumando de (4.30) es exactamente

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^{a_i^k} \Phi_{(1, S_i^k)}^{i, k} \right) e_1^{i, k} + \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^{a_i^k} \Phi_{(2, S_i^k)}^{i, k} \right) e_2^{i, k} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^{a_i^k} \kappa_i^k \zeta_{i, k} \omega \right) e_1^{i, k} \right\| < 5\epsilon_0 , \end{aligned}$$

donde hemos usado $(B8_i^k)$ para la acotación. El segundo sumando de (4.30) ya fue tratado en (4.20), donde lo acotamos superiormente por $2\epsilon_0$. En consecuencia, hemos comprobado que

$$\|X_n^E(a_i^k) - (X(p_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k)))\| \leq 10\epsilon_0 .$$

De este modo, por ser $X(p_i^k) + 3\mu\mathcal{N}_E(X(p_i^k)) \in \mathbb{R}^3 \setminus E_{3\mu}$, entonces $(D4_i^k)$ ocurre para ϵ_0 suficientemente pequeño en términos de μ . \blacksquare

4.1.4

Preparando el segundo proceso de deformación

En el primer proceso hemos modificado la inmersión X hasta otra inmersión X_n^E definida sobre el dominio asociado a un multiciclo \mathcal{J}_4 y que aplica los puntos $\{a_i^k \mid (i, k) \in I\}$ fuera del convexo E' . En este segundo proceso modificaremos recursivamente la inmersión $Y_0^1 = X_n^E$ alrededor de todo el borde de $M(\mathcal{J}_U)$ para llevarlo también fuera de E' . Esta modificación volverá a hacerse mediante el uso de la transformación de López-Ros, así, lo primero que vamos a hacer será fijar las bases ortonormales de \mathbb{R}^3 que utilizaremos en las transformaciones. Para cada $(i, k) \in I$, tomemos $T_i^k = \{w_1^{i,k}, w_2^{i,k}, w_3^{i,k}\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 de manera que

$$w_3^{i,k} = \mathcal{N}_E(X_n^E(a_i^k)). \quad (4.31)$$

El borde de $M(\mathcal{J}_U)$, esto es, \mathcal{J}_U , es un conjunto de E curvas cerradas, dos a dos disjuntas y diferenciables a trozos. Para cada $(i, k) \in I$, llamemos Q_i^k a la componente conexa (cerrada) del conjunto $\overline{\mathcal{J}_U \setminus (C_i^k \cup C_{i+1}^k)}$ que no corta al resto de arcos C_j^l , $(j, l) \in I \setminus \{(i, k), (i+1, k)\}$ (véase la Figura 4.3). Nótese que $\overline{\mathcal{J}_U \setminus (C_i^k \cup C_{i+1}^k)}$ es un conjunto de $E+1$ curvas simples, dos de ellas son el resultado de quitar C_i^k y C_{i+1}^k al k -ésimo ciclo de \mathcal{J}_U , mientras que las $E-1$ restantes se corresponden con el resto de los ciclos de \mathcal{J}_U .

Observemos que la familia de curvas $\{Q_i^k \mid (i, k) \in I\}$ es dos a dos disjunta y satisface,

$$Q_i^k \subset B^{i,k}, \quad (4.32)$$

$$Q_i^k \cap \overline{D(p_j^l, \delta)} = \emptyset, \quad \forall (j, l) \in I \setminus \{(i, k), (i+1, k)\}. \quad (4.33)$$

Además, salvo una pequeña perturbación de las curvas Q_i^k , podemos suponer que,

$$f_{(X_n^E, T_i^k)}(p) \neq 0, \quad \forall p \in Q_i^k. \quad (4.34)$$

En efecto, si $f_{(X_n^E, T_i^k)}(p) = 0$ para algún $p \in Q_i^k$, $(i, k) \in I$, entonces podemos modificar \mathcal{U} en un pequeño entorno de p de manera que las nuevas curvas Q_i^k correspondientes al nuevo \mathcal{U} no pasen por los ceros de las funciones $f_{(X_n^E, T_i^k)}$, $(i, k) \in I$. Esto es posible puesto que, al ser holomorfas, los ceros de dichas funciones son aislados. Nótese que estas posibles modificaciones pueden hacerse sin afectar al cumplimiento de la Afirmación 4.5, la elección del multiciclo \mathcal{J}_4 y las ecuaciones (4.32) y (4.33) para los nuevos Q_i^k , $(i, k) \in I$.

Sigamos describiendo los objetos necesarios para el proceso de deformación. Denotamos por \widehat{C}_i^k a un conjunto abierto que contiene a C_i^k y que es suficientemente pequeño para que ocurra

$$\|X_n^E(p) - X_n^E(a_i^k)\| < 3\epsilon_0, \quad \forall p \in \widehat{C}_i^k \cap \overline{M(\mathcal{J}_U)}. \quad (4.35)$$

Para comprobar que esta elección es posible, veamos que la desigualdad ocurre para todo $p \in C_i^k$. Así, (4.34) será consecuencia de la continuidad de X_n^E cuando tomemos \widehat{C}_i^k suficientemente pequeño. En efecto, fijado $p \in C_i^k$, tenemos

$$\|X_n^E(p) - X_n^E(a_i^k)\| \leq \|X_i^k(p) - X_i^k(a_i^k)\| +$$

$$\|X_n^E(p) - X_i^k(p)\| + \|X_n^E(a_i^k) - X_i^k(a_i^k)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 + \epsilon_0 = 3\epsilon_0,$$

donde hemos hecho uso de $(B4_i^k)$ para acotar el primer sumando y $(D1_j^l)$, $(j, l) > (i, k)$, para los otros dos.

Finalmente, definimos, para cada real positivo ξ y para cada $(i, k) \in I$,

$$Q_i^k(\xi) = \{p \in M(\mathcal{J}_0) \mid \text{dist}_{(M(\mathcal{J}_0), ds)}(p, Q_i^k) \leq \xi\},$$

esto es, el entorno tubular (cerrado) de Q_i^k en $M(\mathcal{J}_0)$ a distancia $\xi > 0$. En la deformación, conjuntos de este tipo serán de vital importancia pues es en ellos donde actuarán de manera fuerte las transformaciones de López-Ros. Ahora fijaremos $\xi > 0$ suficientemente pequeño para que se cumplan ciertas aseveraciones, pero, previamente, hemos de definir una constante

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \min_{(i,k) \in I} \left\{ \min_{p \in Q_i^k} \{|f_{(X_n^E, T_i^k)}(p)|\} \right\}. \quad (4.36)$$

Notemos que ε_1 es positivo gracias a (4.34).

Afirmación 4.7. Existe $\xi > 0$ de manera que, $\forall (i, k) \neq (j, l) \in I$, se satisface la lista de propiedades siguiente:

(E1) $Q_i^k(\xi) \subset M(\mathcal{J}_4)$.

(E2) $Q_i^k(\xi) \cap Q_j^l(\xi) = \emptyset$, $\forall (j, l) \in I \setminus \{(i, k)\}$.

(E3) $Q_i^k(\xi) \cap \overline{D(p_j^l, \delta)} = \emptyset$, $\forall (j, l) \in I \setminus \{(i, k), (i+1, k)\}$.

(E4) $Q_i^k(\xi) \subset B^{i,k}$.

(E5) $\left| \int_{[x_0, x_1]} \omega \right| < \frac{\xi}{2}$, $\forall x_0 \in Q_i^k$, $\forall x_1 \in \partial D(x_0, \xi/2)$. Aquí, $[x_0, x_1]$ representa el arco que minimiza la longitud entre x_0 y x_1 . Recordemos que estamos trabajando con la métrica $ds^2 = \|\omega\|^2$.

(E6) Para todo $p \in Q_i^k$, se tiene

$$|f_{(X_n^E, T_i^k)}(p) - f_{(X_n^E, T_i^k)}(q)| < \varepsilon_1, \quad \forall q \in D(p, \xi/2).$$

(E7) $\text{diam}_{(M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi), ds)}(\overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)}) < \ell$.

Demostración. Razonemos siempre teniendo en cuenta que $\xi > 0$ es tan pequeño como queramos. (E1) ocurre trivialmente. El hecho de que los conjuntos Q_i^k sean dos a dos disjuntos implica (E2). La Propiedad (E3) se deduce de (4.33). (E4) es consecuencia de (4.32). Ahora, (E5) ocurre por ser la aplicación desarrollante f una isometría local (véase la Nota 4.1 en la página 54). (E6) es consecuencia de la continuidad uniforme de $f_{(X_n^E, T_i^k)}$ sobre Q_i^k . Finalmente, (E3) implica (E7). ■

4.1.5

El segundo proceso de deformación

Por fin estamos listos para construir de forma recursiva una sucesión de familias $\{\Lambda_{i,k} \mid (i,k) \in I\}$ donde el elemento $\Lambda_{i,k} = \{Y_i^k, \tau_i^k, \nu_i^k\}$ está constituido por:

- $Y_i^k : \overline{M(\mathcal{J}_4)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión minimal, conforme, bien definida y con $Y_i^k(p_0) = (0, 0, 0)$. Además, denotaremos $Y_0^1 = X_n^E$ y $Y_0^k = Y_n^{k-1}, \forall k \in \{2, \dots, E\}$.
- τ_i^k y ν_i^k son constantes reales positivas.

Construiremos dicha sucesión de familias a partir de X_n^E usando transformaciones de López-Ros. Para obtener Y_i^k a partir de Y_{i-1}^k usaremos, con la base T_i^k , una función que toma valores grandes en $Q_i^k(\xi/2)$ y es cercana a 1 fuera de $Q_i^k(\xi)$. De este modo, conseguiremos arrastrar la imagen de $Q_i^k(\xi/2)$ fuera del convexo E' sin apenas modificar Y_{i-1}^k fuera de $Q_i^k(\xi)$. Además, la tercera coordenada de la inmersión en la base T_i^k quedará invariante. Por otro lado, las constantes τ_i^k y ν_i^k serán tomadas suficientemente grandes y pequeñas, respectivamente, para que ocurran ciertas desigualdades de carácter técnico.

Afirmación 4.8. Podemos construir la sucesión $\{\Lambda_{i,k} \mid (i,k) \in I\}$ de manera que, $\forall (i,k) \in I$, ocurra la siguiente lista de propiedades:

- (F1^k) $(Y_i^k)_{(3, T_i^k)} = (Y_{i-1}^k)_{(3, T_i^k)}$.
- (F2^k) $\|Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p)\| < \frac{\epsilon_0}{nE}, \forall p \in \overline{M(\mathcal{J}_4)} \setminus Q_i^k(\xi)$.
- (F3^k) $|f_{(Y_i^k, T_i^k)}(p) - f_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}(p)| < \frac{\epsilon_1}{nE}, \forall p \in \overline{M(\mathcal{J}_4)} \setminus Q_i^k(\xi), \forall (j,l) > (i,k)$.
- (F4^k) $\left(\frac{1}{\tau_i^k} + \frac{\nu_i^k}{\tau_i^k(\tau_i^k - \nu_i^k)} \right) \max_{Q_i^k(\xi/2)} \{|f_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)} g_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}^2|\} + \nu_i^k \max_{Q_i^k(\xi/2)} \{|f_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}|\} < \frac{2}{\xi}$.
- (F5^k) $\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_i^k \xi}{4} \min_{Q_i^k} \{|f_{(Y_0^1, T_i^k)}|\} - 1 \right) > \text{diam}_{\mathbb{R}^3}(E') + 1$.

Veamos como. Supongamos que tenemos construidas $Y_0^1, Y_1^1, \dots, Y_{i-1}^k$, para cierto $(i,k) \in I$, y construyamos la familia $\Lambda_{i,k}$. En este momento es cuando necesitamos usar, por primera vez en la memoria, el Lema 3.1. Usemos dicho lema para los datos

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_4, \quad F \equiv Y_{i-1}^k, \quad K_1 \equiv Q_i^k(\xi/2), \quad K_2 \equiv \overline{M(\mathcal{J}_4)} \setminus Q_i^k(\xi),$$

$$\Delta \equiv M \setminus \overline{M(\mathcal{J}_4)}, \quad m > \frac{1}{\nu_i^k}, \quad t \equiv \tau_i^k.$$

Estos datos son válidos, esto es, pueden ser usados en el Lema 3.1. En efecto,

- Existe una base de la homología de $M(\mathcal{J}_4)$ en el compacto $\overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)}$. Esto es debido a que dicho conjunto sigue siendo el asociado a un multicyclo.
- $M \setminus M(\mathcal{J}_4) \subset M \setminus (Q_i^k(\xi/2) \cup \overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)})$. Esta inclusión ocurre ya que, por definición, $\overline{M(\mathcal{J}_4)} \subset M(\mathcal{J}_4)$, y (E1) implica la inclusión de $Q_i^k(\xi/2)$ en $M(\mathcal{J}_4)$.
- $M \setminus \overline{M(\mathcal{J}_4)}$ tiene puntos en cada una de las componentes conexas de $M \setminus (Q_i^k(\xi/2) \cup \overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)})$.

Ahora, el Lema 3.1 proporciona una función holomorfa y sin ceros $H \equiv l_{i,k} : \overline{M(\mathcal{J}_4)} \rightarrow \mathbb{C}$ (en particular, $l_{i,k}$ está definida en $\overline{M(\mathcal{J}_4)}$) de manera que

- $|l_{i,k}(p) - \tau_i^k| < \nu_i^k, \forall p \in Q_i^k(\xi/2)$.
- $|l_{i,k}(p) - 1| < \nu_i^k, \forall p \in \overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)}$. En estas dos propiedades hemos usado que $\nu_i^k > 1/m$.
- La inmersión minimal $\tilde{F} \equiv Y_i^k : \overline{M(\mathcal{J}_4)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con datos de Weierstrass

$$g_{(Y_i^k, T_i^k)} = \frac{g_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}}{l_{i,k}}, \quad \Phi_{(3, T_i^k)}^{i,k} = \Phi_{(3, T_i^k)}^{i-1,k}, \quad (4.37)$$

está bien definida. En particular, Y_i^k está bien definida en $\overline{M(\mathcal{J}_4)}$.

Así, definimos la inmersión Y_i^k como

$$Y_i^k(p) = \text{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i,k},$$

donde los datos de Weierstrass de $\Phi^{i,k}$ en la base ortonormal T_i^k están determinados por la transformación de López-Ros (4.37).

Comprobemos que si hemos tomado τ_i^k suficientemente grande y ν_i^k suficientemente pequeño, entonces la familia $\Lambda_{i,k}$ así definida satisface la Afirmación 4.8. En efecto, (F1_i^k) ocurre trivialmente puesto que Y_i^k ha sido obtenida a partir de Y_{i-1}^k mediante una transformación de López-Ros sobre la base T_i^k . Las propiedades (F4_i^k) y (F5_i^k) ocurren de manera directa. Nótese que para que se cumpla (F5_i^k) necesitamos la ecuación (4.34), la cual obliga a ser positivo a ese mínimo. Finalmente, observemos que la función $\lambda_{i,k}$ converge uniformemente a 1 sobre $\overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)}$ cuando $\nu_i^k \rightarrow 0$. Por tanto, $\phi_{(Y_i^k, T_j^k)}$ converge uniformemente a $\phi_{(Y_{i-1}^k, T_j^k)}$ en $\overline{M(\mathcal{J}_4) \setminus Q_i^k(\xi)}$ cuando ν_i^k tiende a cero, y, en consecuencia, obtenemos (F2_i^k) y (F3_i^k) (recordemos que esta convergencia también implica la de los datos de Weierstrass).

De esta forma concluimos la definición de la familia de inmersiones $\{Y_i^k \mid (i, k) \in I\}$. Para finalizar la demostración del Lema 4.1 ya solo nos queda comprobar que la inmersión

$$Y_n^E : \overline{M(\mathcal{J}_4)} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

satisface todas sus tesis.

4.1.6

La inmersión Y que demuestra el Lema

Consideremos la inmersión $Y : \overline{M(\mathcal{J}_U)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $Y = Y_n^E$. Comprobemos que la restricción de Y al dominio asociado a cierto multiciclo satisface las tesis (L.4.1.a), ..., (L.4.1.d) del Lema 4.1.

• **Propiedad (L.4.1.b):** $\|Y(p) - X(p)\| < b_1, \forall p \in \overline{M(\mathcal{J}')}$.

En efecto, las Propiedades (A2) y (E4) implican, respectivamente, que los compactos donde las deformaciones han sido violentas, esto es, $D(p_i^k, \delta)$ y $Q_i^k(\xi)$ están contenidos en la bola $B^{i,k}$, $\forall (i,k) \in I$. A su vez, la Propiedad 3) de la Afirmación 4.1 asegura que dicha bola tiene intersección vacía con $\overline{M(\mathcal{J}'})$. Como consecuencia,

$$\overline{M(\mathcal{J}')} \subset M(\mathcal{J}_U) \setminus \left(\left(\bigcup_{(i,k) \in I} D(p_i^k, \delta) \right) \cup \left(\bigcup_{(i,k) \in I} Q_i^k(\xi) \right) \right).$$

Esto significa que sobre $\overline{M(\mathcal{J}'})$ apenas hemos deformado la inmersión original. Rigurosamente, la anterior inclusión asegura que para cada punto $p \in \overline{M(\mathcal{J}'})$ podemos usar las Propiedades (F2_i^k) y (D1_i^k), $(i,k) \in I$, para obtener

$$\|Y(p) - X(p)\| \leq \|Y_n^E(p) - Y_0^1(p)\| + \|X_n^E(p) - X_0^1(p)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 < b_1, \quad (4.38)$$

donde suponemos que ϵ_0 fue tomado suficientemente pequeño en términos de b_1 para que ocurra la última desigualdad. Nótese que hemos usado (F2_i^k) para acotar el primer sumando y (D1_i^k) para el segundo.

• **Propiedades (L.4.1.a) y (L.4.1.c):** Existe un multiciclo \mathcal{J} con $\mathcal{J}' < \mathcal{J} < \mathcal{J}_0$ de manera que $Y(\mathcal{J}) \subset E' \setminus E'_{-b_2}$.

Como paso previo demostraremos el siguiente resultado:

Afirmación 4.9. *Toda curva conexa γ en $M(\mathcal{J}_U)$ conectando $M(\mathcal{J}')$ con \mathcal{J}_U posee un punto $p' \in \gamma$ tal que $Y(p') \in \mathbb{R}^3 \setminus E'$.*

Demostración. Sea $\gamma \subset \overline{M(\mathcal{J}_U)}$ una tal curva y supongamos $\gamma(0) \in M(\mathcal{J}')$ y $\gamma(1) \equiv x_0 \in \mathcal{J}_U$. Recordemos que el multiciclo \mathcal{J}_U viene descrito por

$$\mathcal{J}_U = \left(\bigcup_{(i,k) \in I} C_i^k \right) \cup \left(\bigcup_{(i,k) \in I} Q_i^k \right).$$

Además, definimos entornos \widehat{C}_i^k y $Q_i^k(\xi)$ de las curvas C_i^k y Q_i^k , respectivamente. La definición de dichos entornos en la página 74, asegura que \widehat{C}_i^k solamente corta a $Q_i^k(\xi)$ y a

$Q_{i-1}^k(\xi)$. En consecuencia, el punto x_0 debe estar en uno de los cuatro emplazamientos que discutiremos a continuación, para cierto $(i, k) \in I$.

Caso i) Asumamos $x_0 \in \widehat{C}_i^k \cap Q_i^k(\xi)$. Veamos que $Y_n^E(x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'$. Para ello, bastará con comprobar que $\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(Y_n^E(x_0), \partial E) > \mu$, donde $\mu > 0$ es la constante que definimos en la página 54.

Llamemos T al plano tangente a ∂E en el punto $\mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k))$. Por ser E convexo, su borde está contenido en uno de los semiespacios determinados por T . Por tanto, para todo punto p en el semiespacio que no contiene a ∂E tenemos $\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, \partial E) \geq \text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, T)$. Comprobemos que $Y_n^E(x_0)$ se encuentra en dicho semiespacio. Nótese (ver (4.31)) que la base ortonormal T_i^k fue elegida de forma que sus dos primeros vectores generan T , mientras que el tercero viene dado por $w_3^{i,k} = \mathcal{N}_E(X_n^E(a_i^k))$. De aquí se deduce que un punto p está en el semiespacio determinado por T que no contiene a ∂E si, y solo si, $(p - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k)))_{(3, T_i^k)} > 0$. Además, independientemente de la posición del punto p , será $\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, T) = (p - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k)))_{(3, T_i^k)}$, donde estamos teniendo en cuenta la ortonormalidad de T_i^k .

Ahora, la Propiedad (D4 $_i^k$) asegura que $(X_n^E(a_i^k) - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k)))_{(3, T_i^k)} > 2\mu$, donde de nuevo estamos usando la ortonormalidad de T_i^k . Por otro lado,

$$\begin{aligned} |(Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k))_{(3, T_i^k)}| &\leq \|Y_n(x_0) - Y_i^k(x_0)\| + |(Y_i^k(x_0) - Y_{i-1}^k(x_0))_{(3, T_i^k)}| + \\ &\|Y_{i-1}^k(x_0) - Y_0^1(x_0)\| + \|X_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k)\| < \epsilon_0 + 0 + \epsilon_0 + 3\epsilon_0 = 5\epsilon_0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En esta computación hemos usado (F2 $_j^l$), $(j, l) > (i, k)$, teniendo en cuenta (E2), para acotar el primer sumando. El segundo es cero gracias a (F1 $_i^k$). Nuevamente (F2 $_j^l$), $(j, l) < (i, k)$, prueba la cota del tercer sumando. Finalmente para el último sumando hemos usado la desigualdad (4.35), que puede utilizarse debido al emplazamiento del punto $x_0 \in \widehat{C}_i^k$.

En consecuencia, ocurre

$$\begin{aligned} (Y_n^E(x_0) - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k)))_{(3, T_i^k)} = \\ (Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k))_{(3, T_i^k)} + (X_n^E(a_i^k) - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_i^k)))_{(3, T_i^k)} > 2\mu - 5\epsilon_0 > \mu, \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde estamos suponiendo que ϵ_0 fue elegido suficientemente pequeño en términos de μ . Así, $\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(p, \partial E) > \mu$, luego, $Y_n^E(x_0) \notin E'$ como queríamos demostrar.

Caso ii) Asumamos $x_0 \in \widehat{C}_i^k \cap Q_{i-1}^k(\xi)$. Seguiremos los mismos argumentos que en el caso anterior. Esta vez trabajamos sobre la base T_{i-1}^k . Como en (4.39) y usando además la Propiedad (D3 $_{i-1}^k$), obtenemos

$$\begin{aligned} |(Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_{i-1}^k))_{(3, T_{i-1}^k)}| &\leq \\ |(Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k))_{(3, T_{i-1}^k)}| + \|X_n^E(a_i^k) - X_n^E(a_{i-1}^k)\| &< 5\epsilon_0 + 20\epsilon_0 = 25\epsilon_0. \end{aligned}$$

Así, podemos razonar del mismo modo que en (4.40) para concluir

$$(Y_n^E(x_0) - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_{i-1}^k)))_{(3, T_{i-1}^k)} =$$

$$(Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_{i-1}^k))_{(3, T_{i-1}^k)} + (X_n^E(a_{i-1}^k) - \mathcal{P}_E(X_n^E(a_{i-1}^k)))_{(3, T_{i-1}^k)} > 2\mu - 25\epsilon_0 > \mu,$$

donde otra vez estamos suponiendo que escogimos ϵ_0 tan pequeño en términos de μ para que ocurra la última desigualdad. Por tanto, $Y_n^E(x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'$, lo que termina la prueba en este caso.

Caso iii) Supongamos $x_0 \in \widehat{C}_i^k \setminus (\cup_{(j,l) \in I} Q_j^l(\xi))$. Este caso es similar a los anteriores pero un poco más sencillo, puesto que el punto x_0 apenas se ha visto afectado por el segundo proceso de deformación. Así, podemos aplicar la Propiedad (F2 $_j^l$) para todo $(j, l) \in I$, para obtener

$$\begin{aligned} \|Y_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k)\| &\leq \\ \|Y_n^E(x_0) - Y_0^1(x_0)\| + \|X_n^E(x_0) - X_n^E(a_i^k)\| &< \epsilon_0 + 3\epsilon_0 = 4\epsilon_0, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta (4.35) para acotar el segundo de los sumandos. Terminamos como en los dos casos precedentes, desempeñando esta desigualdad el papel de (4.39).

Caso iv) Finalmente, supongamos $x_0 \in Q_i^k \setminus (\cup_{(j,l) \in I} \widehat{C}_j^l)$. Este es el caso más complicado. Esta vez no podremos asegurar que el punto $Y_n^E(x_0)$ caiga fuera de E' . En lugar de eso argumentaremos que existe un punto $x_1 \in \gamma$ de manera que la distancia entre $Y_n^E(x_0)$ y $Y_n^E(x_1)$ es mayor que el diámetro de E' . En consecuencia, γ no puede estar contenida en E' .

Con el fin de simplificar la notación, en los siguientes cálculos escribiremos $f^{i-1,k}$ y $g^{i-1,k}$ en lugar de $f_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}$ y $g_{(Y_{i-1}^k, T_i^k)}$, respectivamente. También usaremos notación compleja, escribiremos $a + ib$ en lugar de $aw_1^{i,k} + bw_2^{i,k}$.

Tomemos $x_1 \in \gamma \cap D(x_0, \xi/2)$. Un tal punto existe por ser γ conexa, empezar en $M(\mathcal{J}')$ y terminar en $x_0 \in Q_i^k$. Recordemos que (E4) garantiza que $M(\mathcal{J}') \cap Q_i^k(\xi/2) = \emptyset$. Además, para todo punto p en la curva minimizante $[x_0, x_1]$ tiene sentido $Y_n^E(p)$, puesto que esta inmersión está definida en todo $\overline{M(\mathcal{J}_4)}$ y $[x_0, x_1] \subset D(x_0, \xi/2) \subset Q_i^k(\xi/2) \subset M(\mathcal{J}_4)$, donde estamos teniendo en cuenta la Propiedad (E1).

Gracias a (F2 $_j^l$), $(j, l) > (i, k)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|Y_n^E(x_0) - Y_n^E(x_1)\| &> \|Y_i^k(x_0) - Y_i^k(x_1)\| - 2\epsilon_0 \geq \\ \|(Y_i^k(x_0) - Y_i^k(x_1))_{(*, T_i^k)}\| &- 2\epsilon_0 = \end{aligned}$$

usando la definición de Y_i^k en términos de su representación de Weierstrass y recordando que $\text{Re } \Phi_1 + i \text{Re } \Phi_2 = \frac{1}{2}(\overline{\eta} - g^2\eta)$, la ecuación anterior sigue

$$\frac{1}{2} \left| \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1,k} l_{i,k} \omega} - \int_{[x_1, x_0]} \frac{f^{i-1,k} (g^{i-1,k})^2 \omega}{l_{i,k}} \right| - 2\epsilon_0. \quad (4.41)$$

La función $l_{i,k}$ es parecida a τ_i^k en $[x_1, x_0]$. Por tanto, la primera de las integrales en la anterior ecuación será próxima a $\tau_i^k \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1,k} \omega}$, mientras que la segunda será pequeña en términos de τ_i^k . Rigurosamente, sumando y restando algunos términos, (4.41) es una cota superior de

$$\frac{1}{2} \left| \tau_i^k \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1,k} \omega} \right| - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\tau_i^k} \int_{[x_1, x_0]} f^{i-1,k} (g^{i-1,k})^2 \omega \right| -$$

$$\frac{1}{2} \left| \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1, k}(l_{i, k} - \tau_i^k) \omega} \right| - \frac{1}{2} \left| \int_{[x_1, x_0]} f^{i-1, k}(g^{i-1, k})^2 \left(\frac{1}{l_{i, k}} - \frac{1}{\tau_i^k} \right) \omega \right| - 2\epsilon_0 >$$

usando que $|l_{i, k} - \tau_i^k| < \nu_i^k$ en $[x_0, x_1]$, y (E5),

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\tau_i^k}{2} \left| \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1, k} \omega} \right| - \frac{\xi}{4} \left(\frac{1}{\tau_i^k} \max_{Q_i^k(\xi/2)} \{|f^{i-1, k}(g^{i-1, k})^2|\} + \right. \\ &\left. \nu_i^k \max_{Q_i^k(\xi/2)} \{|f^{i-1, k}|\} + \frac{\nu_i^k}{\tau_i^k(\tau_i^k - \nu_i^k)} \max_{Q_i^k(\xi/2)} \{|f^{i-1, k}(g^{i-1, k})^2|\} \right) - 2\epsilon_0. \end{aligned}$$

Así, usando (F4_i^k) y recorriendo toda la cadena de desigualdades nos queda

$$\|Y_n^E(x_0) - Y_n^E(x_1)\| > \frac{1}{2} \left(\tau_i^k \left| \int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1, k} \omega} \right| - 1 \right) - 2\epsilon_0. \quad (4.42)$$

Afinemos un poco más esta cota haciendo algunos cálculos sobre $|\int_{[x_1, x_0]} \overline{f^{i-1, k} \omega}|$. Sumando y restando algunos términos, nos queda¹

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[x_1, x_0]} f^{i-1, k} \omega \right| \geq \left| f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0) \int_{[x_1, x_0]} \omega \right| - \\ &\left| \int_{[x_1, x_0]} (f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0) - f_{(Y_0^1, T_i^k)}) \omega \right| - \left| \int_{[x_1, x_0]} (f_{(Y_0^1, T_i^k)} - f^{i-1, k}) \omega \right|. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ahora, usando (E5), el primer sumando cumple

$$\left| f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0) \int_{[x_1, x_0]} \omega \right| = \frac{\xi}{2} |f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0)|.$$

Por otro lado, gracias a (E6) y teniendo en cuenta (E5), el segundo término de (4.43) satisface (recordemos que $Y_0^1 = X_n^E$ y la definición de ϵ_1 en (4.36))

$$\left| \int_{[x_1, x_0]} (f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0) - f_{(Y_0^1, T_i^k)}) \omega \right| < \frac{\xi}{2} \epsilon_1.$$

Finalmente, usando (F3_j^l), $(j, l) < (i, k)$ y nuevamente (E5), el último término verifica

$$\left| \int_{[x_1, x_0]} (f_{(Y_0^1, T_i^k)} - f^{i-1, k}) \omega \right| < \frac{\xi}{2} \epsilon_1.$$

En consecuencia, (4.43) queda

$$\left| \int_{[x_1, x_0]} f^{i-1, k} \omega \right| > \frac{\xi}{2} |f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0)| - \xi \epsilon_1 \geq \frac{\xi}{4} \min_{Q_i^k} \{|f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0)|\}. \quad (4.44)$$

¹Nos olvidamos del conjugado, pues no afecta al módulo de la integral.

Por último, (4.42) y (4.44) implican

$$\|Y_n^E(x_0) - Y_n^E(x_1)\| > \frac{1}{2} \left(\tau_i^k \frac{\xi}{4} \min \left\{ |f_{(Y_0^1, T_i^k)}(x_0)| \right\} - 1 \right) - 2\epsilon_0 >$$

por (F5_i^k),

$$\text{diam}_{\mathbb{R}^3}(E') + 1 - 2\epsilon_0 > \text{diam}_{\mathbb{R}^3}(E'),$$

donde, como de costumbre, ϵ_0 debe ser suficientemente pequeño. Por tanto, como anticipamos, debe existir un punto $x_2 \in \gamma$ (entre x_0 y x_1) de forma que $Y_n^E(x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'$. Esto termina la demostración en este último caso, luego, damos por probada la Afirmación 4.9. ■

Por otro lado, (4.1), asegura que $X(\mathcal{J}') \subset E'$. Por tanto, teniendo en cuenta (4.38) concluimos que $Y(\mathcal{J}') \subset E'$. Para esta afirmación hemos supuesto que ϵ_0 fue elegido suficientemente pequeño. En consecuencia, la propiedad de la envolvente convexa para superficies minimales garantiza que $Y(\overline{M(\mathcal{J}')})) \subset E'$. Este hecho junto con la Afirmación 4.9 implican trivialmente la existencia de un multiciclo \mathcal{J} satisfaciendo las Propiedades (L.4.1.a) y (L.4.1.c).

• **Propiedad (L.4.1.d):** $Y(\overline{M(\mathcal{J})}) \setminus M(\mathcal{J}') \subset \mathbb{R}^3 \setminus E_{-2b_2}$.

Nótese que ahora el multiciclo \mathcal{J} ya está fijado. Consideremos p un punto en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}')$ y comprobemos que $Y(p) \notin E_{-2b_2}$. Para ello, distinguiremos entre cinco posibles emplazamientos del punto p . Para observar que estos cinco casos cubren todas las posibilidades tendremos en cuenta la Propiedad (E3). Ésta garantiza que $Q_i^k(\xi)$ corta a los discos $D(p_i^k, \delta)$ y $D(p_{i+1}^k, \delta)$ pero tiene intersección vacía con el resto de discos.

Caso I) Supongamos que $p \notin \left(\cup_{(i,k) \in I} D(p_i^k, \delta) \right) \cup \left(\cup_{(i,k) \in I} Q_i^k(\xi) \right)$. En este conjunto las immersiones X e Y son muy próximas puesto que todas las deformaciones que hemos realizado apenas actúan sobre él. En concreto, tenemos

$$\|Y(p) - X(p)\| \leq \|Y_n^E(p) - Y_0^1(p)\| + \|X_n^E(p) - X_0^1(p)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 < 2b_2,$$

donde hemos utilizado las Propiedades (F2_i^k), $(i, k) \in I$, para acotar el primer sumando y (D1_i^k), $(i, k) \in I$, para acotar el segundo. También, como de costumbre, hemos asumido que ϵ_0 fue tomado suficientemente pequeño en términos de b_2 para que ocurra la última desigualdad.

Notemos ahora que, por ser $p \notin M(\mathcal{J}')$, la hipótesis (4.1) del Lema 4.1 asegura que $X(p) \notin E$. Así, de la anterior ecuación deducimos que $Y(p) \notin E_{-2b_2}$, que es lo que queríamos comprobar.

Caso II) Supongamos que $p \in D(p_i^k, \delta) \setminus \left(\cup_{(j,l) \in I} Q_j^l(\xi) \right)$, para cierto $(i, k) \in I$. Nuevamente, la segunda deformación apenas afecta a este conjunto, luego podremos utilizar las propiedades (F2_j^l), $(j, l) \in I$. En cambio, el paso (i, k) del primer proceso de deformación actúa violentamente sobre él, por lo que no podremos usar (D1_i^k), aunque si el resto de propiedades (D1_j^l). Lo que haremos será comprobar que

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), \mathcal{N}_E(X(p_i^k)) \rangle > -b_2. \quad (4.45)$$

Veamos que esto termina la demostración. En efecto, por la hipótesis (4.1) tenemos que $X(p_i^k) \notin E$. Además, $\mathcal{N}_E(X(p_i^k))$ es el normal unitario exterior a E , quien es convexo. Por tanto, (4.45) garantizaría que $Y_n^E(p) \notin E_{-b_2}$, en particular $Y_n^E(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus E_{-2b_2}$. Finalmente, comprobemos que ocurre (4.45). Por definición, $e_1^{i,k} = \mathcal{N}_E(X(p_i^k))$. Sumando y restando algunos términos tenemos

$$\begin{aligned} \langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle &= \langle X_i^k(p) - X_i^k(q_i^k), e_1^{i,k} \rangle + \\ &\quad \langle Y_n^E(p) - Y_0^1(p), e_1^{i,k} \rangle + \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\langle X_n^E(p) - X_i^k(p), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.47)$$

$$\langle X_i^k(q_i^k) - X(q_i^k), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.48)$$

$$\langle X(q_i^k) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle. \quad (4.49)$$

Acotemos inferiormente estos últimos cuatro términos. Usando (F2_j^l), $(j, l) \in I$, (4.46) nos queda

$$\langle Y_n^E(p) - Y_0^1(p), e_1^{i,k} \rangle \geq - \left| \langle Y_n^E(p) - Y_0^1(p), e_1^{i,k} \rangle \right| \geq - \|Y_n^E(p) - Y_0^1(p)\| > -\epsilon_0,$$

donde también hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que $e_1^{i,k}$ es unitario. Con los mismos argumentos pero usando (D1_j^l), $(j, l) > (i, k) \in I$, concluimos que el término en (4.47) es mayor que $-\epsilon_0$. Ahora, (D1_j^l), $(j, l) < (i, k) \in I$, nos da $-\epsilon_0$ como cota inferior de (4.48). Finalmente, para (4.49) usamos (4.2). De este modo,

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > \langle X_i^k(p) - X_i^k(q_i^k), e_1^{i,k} \rangle - 4\epsilon_0.$$

Ahora, gracias a la Propiedad (B8_i^k) tenemos

$$\left| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \Phi_{(1, S_i^k)}^{i,k} \right) - \frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right) \right| < 5\epsilon_0,$$

luego, por la definición de X_i^k , se sigue

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > \frac{1}{2} \left| f_{(X, S_i^k)}(p_i^k) \right| \left(\operatorname{Re} \int_{q_i^k}^p \kappa_i^k \zeta_{i,k} \omega \right) - 9\epsilon_0 \geq -10\epsilon_0 > -b_2,$$

donde hemos usado (B9_i^k) en la penúltima desigualdad y hemos supuesto que ϵ_0 fue elegido suficientemente pequeño en términos de b_2 . Así, hemos probado (4.45) con lo que terminamos la demostración en este caso.

Caso III) Supongamos que $p \in D(p_i^k, \delta) \cap Q_i^k(\xi)$, para cierto $(i, k) \in I$. De nuevo terminaremos la demostración probando que $\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > -2b_2$. En este caso no disponemos de (D1_i^k) ni de (F2_i^k), luego debemos refinar el razonamiento.

Empezamos, como de costumbre, sumando y restando algunos términos. Así,

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle =$$

$$\langle Y_n^E(p) - Y_i^k(p), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.50)$$

$$\langle Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.51)$$

$$\langle Y_{i-1}^k(p) - Y_0^1(p), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.52)$$

$$\langle X_n^E(p) - X_i^k(p), e_1^{i,k} \rangle + \quad (4.53)$$

$$\langle X_i^k(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle. \quad (4.54)$$

Primero acotemos inferiormente los sumandos más sencillos. Gracias a (D1_j^l), (j, l) > (i, k), (resp. (j, l) < (i, k)) obtenemos que el término en (4.50) (resp. (4.52)) es mayor que -ε₀. Del mismo modo, usando (F2_j^l), (j, l) > (i, k), acotamos inferiormente (4.53) por -ε₀. Ahora, siguiendo los argumentos usados en el caso anterior, encontramos que el sumando (4.54) queda mayor que -b₂.

La cota para (4.51) es un poco más difícil de encontrar. Como primer paso, necesitamos obtener una cota superior de $\|w_3^{i,k} - e_1^{i,k}\|$. Recordemos que durante la prueba de la Propiedad (D4_i^k) en la página 73 obtuvimos

$$\|X_n^E(a_i^k) - (3\mu e_1^{i,k} + X(p_i^k))\| < 11\epsilon_0.$$

En consecuencia y teniendo en cuenta la definición de los vectores $w_3^{i,k}$ y $e_1^{i,k}$, nos queda

$$\|w_3^{i,k} - e_1^{i,k}\| = \|\mathcal{N}_E(X_n^E(a_i^k)) - \mathcal{N}_E(X(p_i^k))\| = \quad (4.55)$$

$$\|\mathcal{N}_E(X_n^E(a_i^k)) - \mathcal{N}_E(3\mu e_1^{i,k} + X(p_i^k))\| \leq C \cdot \|X_n^E(a_i^k) - (3\mu e_1^{i,k} + X(p_i^k))\| \leq 11C\epsilon_0,$$

donde C representa el máximo de $\|d\mathcal{N}_E\|$ en $\mathbb{R}^3 \setminus E$. Este máximo se alcanza puesto que $\|d\mathcal{N}_E(x)\| \rightarrow 0$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. Nótese que la constante C solo depende del convexo E . Al no depender de ϵ_0 , llegado el momento podremos suponer que ϵ_0 fue elegido suficientemente pequeño en términos de C . Por otro lado, la Propiedad (F1_i^k) asegura que $\langle Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p), w_3^{i,k} \rangle = 0$, por tanto, usando también (4.55), encontramos

$$\begin{aligned} \left| \langle Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p), e_1^{i,k} \rangle \right| &= \left| \langle Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p), e_1^{i,k} - w_3^{i,k} \rangle \right| \leq \\ &11C\epsilon_0 (\|Y_i^k(p)\| + \|Y_{i-1}^k(p)\|). \end{aligned}$$

Aquí hemos vuelto a usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la triangular. Ya hemos encontrado cotas para todos los sumandos concluyendo que

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > -3\epsilon_0 - b_2 - 11C\epsilon_0 (\|Y_i^k(p)\| + \|Y_{i-1}^k(p)\|). \quad (4.56)$$

Llegados a este punto, comprobemos que $\|Y_i^k(p)\|$ y $\|Y_{i-1}^k(p)\|$ están acotados en términos de ϵ_0 . Por un lado, la Propiedad (L.4.1.c), que ya hemos demostrado, junto con la propiedad de la envolvente convexa aseguran que $Y(p) \in E'$, luego, aplicando sucesivamente (F2_j^l), (j, l) > (i, k), obtenemos que $Y_i^k(p) \in E'_{\epsilon_0}$. En particular, existe una constante C' que no depende de ϵ_0 y de modo que $\|Y_i^k(p)\| < C'$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|Y_{i-1}^k(p) - X(q_i^k)\| &\leq \|Y_{i-1}^k(p) - X_i^k(p)\| + \\ \|(X_i^k(p) - X(q_i^k))_{(*, S_i^k)}\| &+ |(X_i^k(p) - X(q_i^k))_{(3, S_i^k)}| < 3\mu + 11\epsilon_0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Veamos como hemos conseguido esta cota. Para el primer sumando usamos $(F2_j^l)$, $(j, l) < (i, k)$, y $(D1_j^l)$, $(j, l) > (i, k)$, obteniendo

$$\|Y_{i-1}^k(p) - X_i^k(p)\| \leq \|Y_{i-1}^k(p) - Y_0^1(p)\| + \|X_n^E(p) - X_i^k(p)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 .$$

Para el segundo sumando escribimos

$$\|(X_i^k(p) - X(q_i^k))_{(*, S_i^k)}\| \leq \|(X_i^k(p) - X_i^k(q_i^k))_{(*, S_i^k)}\| + \|X_i^k(q_i^k) - X(q_i^k)\| <$$

usando la definición de X_i^k y $(D1_j^l)$, $(j, l) \leq (i, k)$,

$$\left\| \left(\operatorname{Re} \int_p^{q_i^k} \Phi_{(1, S_i^k)}^{i, k} \right) e_1^{i, k} + \left(\operatorname{Re} \int_p^{q_i^k} \Phi_{(2, S_i^k)}^{i, k} \right) e_2^{i, k} \right\| + \epsilon_0 <$$

por $(B8_i^k)$ y teniendo en cuenta que $e_1^{i, k}$ es unitario,

$$\frac{1}{2} \left| \int_{(X, S_i^k)} f(p_i^k) \right| \left(\operatorname{Re} \int_p^{q_i^k} \kappa_i^k \zeta_{i, k} \omega \right) + 5\epsilon_0 + \epsilon_0 < 3\mu + \epsilon_0 + 5\epsilon_0 + \epsilon_0 = 3\mu + 7\epsilon_0 ,$$

donde hemos usado $(B9_i^k)$ en la última desigualdad. Finalmente, para el tercer sumando hacemos uso de $(D2_i^k)$, $(D1_j^l)$, $(j, l) < (i, k)$ y la ecuación (4.2) obteniendo

$$|(X_i^k(p) - X(q_i^k))_{(3, S_i^k)}| = |(X_{i-1}^k(p) - X(q_i^k))_{(3, S_i^k)}| \leq$$

$$\|X_{i-1}^k(p) - X(p)\| + \|X(p) - X(q_i^k)\| < \epsilon_0 + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 .$$

De este modo, (4.57) garantiza la existencia de una constante C'' que no depende de ϵ_0 y tal que $\|Y_{i-1}^k(p)\| < C''$. En consecuencia, (4.56) sigue

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i, k} \rangle > -3\epsilon_0 - b_2 - 11C\epsilon_0(C' + C'') > -2b_2 ,$$

donde hemos supuesto que ϵ_0 es suficientemente pequeño en términos de b_2 para que ocurra la última desigualdad. Esto termina la prueba en este tercer caso.

Caso IV) Supongamos que $p \in D(p_{i+1}^k, \delta) \cap Q_i^k(\xi)$, para un $(i, k) \in I$. Este caso es muy similar al anterior. Razonando como antes y usando (4.3) tenemos

$$\|e_1^{i+1, k} - w_3^{i, k}\| \leq \|e_1^{i+1, k} - e_1^{i, k}\| + \|e_1^{i, k} - w_3^{i, k}\| < \frac{\epsilon_0}{3\mu} + 11C\epsilon_0 .$$

Argumentando como en el caso anterior concluimos que

$$\left| \langle Y_i^k(p) - Y_{i-1}^k(p), e_1^{i+1, k} \rangle \right| < \epsilon_0 \left(11C + \frac{1}{3\mu} \right) (\|Y_i^k(p)\| + \|Y_{i-1}^k(p)\|) .$$

Utilizando esta desigualdad de forma análoga al caso anterior deducimos que $Y(p) \notin E_{-2b_2}$.

Caso V) Finalmente, asumamos que $p \in Q_i^k(\xi) \setminus (\cup_{(j,l) \in I} D(p_j^l, \delta))$. Este caso vuelve a ser muy similar al caso III), de hecho un poco más sencillo. Volvemos a omitir parte de los detalles. Razonando como entonces, tenemos

$$\langle Y_n^E(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > \langle X(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle - 11C\epsilon_0(\|Y_i^k(p)\| + \|Y_{i-1}^k(p)\|) - 3\epsilon_0 >$$

usando (4.2),

$$-11C\epsilon_0(\|Y_i^k(p)\| + \|Y_{i-1}^k(p)\|) - 4\epsilon_0 > -2b_2,$$

donde nuevamente hemos supuesto que ϵ_0 fue tomado suficientemente pequeño.

De este modo terminamos la demostración en este último caso y, por tanto, la comprobación de la Propiedad (L.4.1.d).

De esta manera, la inmersión $Y = Y_n^E$ cumple todas las tesis del Lema 4.1, luego damos por concluida su demostración.

4.2

Refinamiento para el caso de convexidad estricta

El Lema 4.1 puede ser sustancialmente mejorado cuando el dominio E sea estrictamente convexo. En tal caso controlamos cuanto se diferencian la inmersión original X y la inmersión resultante Y en todo el dominio de definición de ésta última. Esta mejora nos permitirá afinar nuestro Teorema de densidad para el caso de dominios estrictamente convexos.

Recordemos que dado C un dominio convexo, acotado y regular de \mathbb{R}^3 y p un punto en su borde, estamos denotando

$$\kappa_1(\partial C) := \min\{\kappa_1(p) \mid p \in \partial C\},$$

donde $\kappa_2(p) \geq \kappa_1(p) \geq 0$ son las curvaturas principales de ∂C en el punto p asociadas al normal unitario interior. Si además C es estrictamente convexo, entonces $\kappa_1(\partial C) > 0$. La existencia de esta cota es lo que nos permite refinar nuestros argumentos.

Proposición 4.1. *Si además E es estrictamente convexo, entonces la construcción anterior también nos da, $\forall p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}')$,*

$$\|Y(p) - X(p)\| < m(b_2, E, E') := \sqrt{\frac{2(\delta^H(E, E') + 2b_2)}{\kappa_1(\partial E)} + \delta^H(E, E')^2},$$

donde δ^H representa la distancia de Hausdorff.

Demostración. Tomemos $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}')$ cualquiera. Por la hipótesis (4.1) tenemos

$$X(p) \in E' \setminus \overline{E}.$$

Por otro lado, la propiedad de la envolvente convexa de las superficies minimales y (L.4.1.c) garantizan que

$$Y(p) \in E'.$$

Además, chequeando la demostración de la Propiedad (L.4.1.d), observamos que ocurre una de las dos siguientes situaciones:

- (A) $\|Y(p) - X(p)\| < 2\epsilon_0$.
- (B) Existe $(i, k) \in I$ de manera que $\langle Y(p) - X(p_i^k), e_1^{i,k} \rangle > -b_2 - C\epsilon_0$ y $\|X(p_i^k) - X(p)\| < \epsilon_0$, siendo $C > 0$ una constante que no depende de ϵ_0 . Nótese que la segunda desigualdad se debe a (4.2).

Si estamos en la primera posibilidad, entonces la demostración de la Proposición 4.1 termina sin más que tomar ϵ_0 suficientemente pequeño en términos de $\delta^H(E, E')$, b_2 y $\kappa_1(\partial E)$. Supongamos que sucede el segundo caso.

Consideremos el punto $q = X(p_i^k) - (b_2 + C\epsilon_0)e_1^{i,k}$, y sea Π el plano ortogonal a $e_1^{i,k}$ que pasa por q . El hecho de que estemos en la situación (B) implica que $Y(p)$ está en la intersección de E' con el semiespacio generado por Π que contiene a $X(p_i^k)$ (véase la Figura 4.4). Llamemos \mathcal{D} a dicho conjunto. Ahora, teniendo en cuenta esta última afirmación y que $X(p_i^k) \in E' \setminus E$, observamos que

$$\rho := \max\{\text{dist}(x, X(p_i^k)) \mid x \in \mathcal{D}\}$$

será mayor cuanto más cerca esté $X(p_i^k)$ de E . Por tanto, la peor de las situaciones para nosotros sería que $X(p_i^k) \in \partial E$. Supongamos que así ocurre. Tomemos ahora el punto $q' = X(p_i^k) - (1/\kappa_1(\partial E))e_1^{i,k}$, y sea \mathcal{B} la bola centrada en q' y de radio $(1/\kappa_1(\partial E)) + \delta^H(E, E')$ (véase de nuevo la Figura 4.4). Notemos que $E' \subset \mathcal{B}$, puesto que de otro modo habría puntos de $\partial E'$ a distancia de E mayor que $\delta^H(E, E')$. En particular,

$$\rho \leq \rho' := \max\{\text{dist}(X(p_i^k), x) \mid x \in \mathcal{B}^*\},$$

donde estamos denotando por \mathcal{B}^* a la parte de \mathcal{B} que se queda al lado de Π determinado por $X(p_i^k)$. Nótese que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}^*$. Ahora, por el Teorema de Pitágoras, tenemos

$$\rho' = \sqrt{(b_2 + C\epsilon_0)^2 + (\rho'')^2}, \quad (4.58)$$

siendo

$$\rho'' = \max\{\text{dist}(q, x) \mid x \in \mathcal{B}^*\}.$$

Aquí estamos usando que los máximos que definen a ρ' y a ρ'' se alcanzan en una misma curva de $\partial \mathcal{B}$, concretamente en $\Pi \cap (\partial \mathcal{B})$. Fijemos q'' un punto en dicha curva. Entonces, q , q'' y $X(p_i^k)$ forman un triángulo rectángulo. De ahí (4.58). Del mismo modo, los puntos q , q' y q'' también forman un triángulo rectángulo, luego el Teorema de Pitágoras asegura que

$$(\rho'')^2 = \left(\frac{1}{\kappa_1(\partial E)} + \delta^H(E, E') \right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa_1(\partial E)} - (b_2 + C\epsilon_0) \right)^2.$$

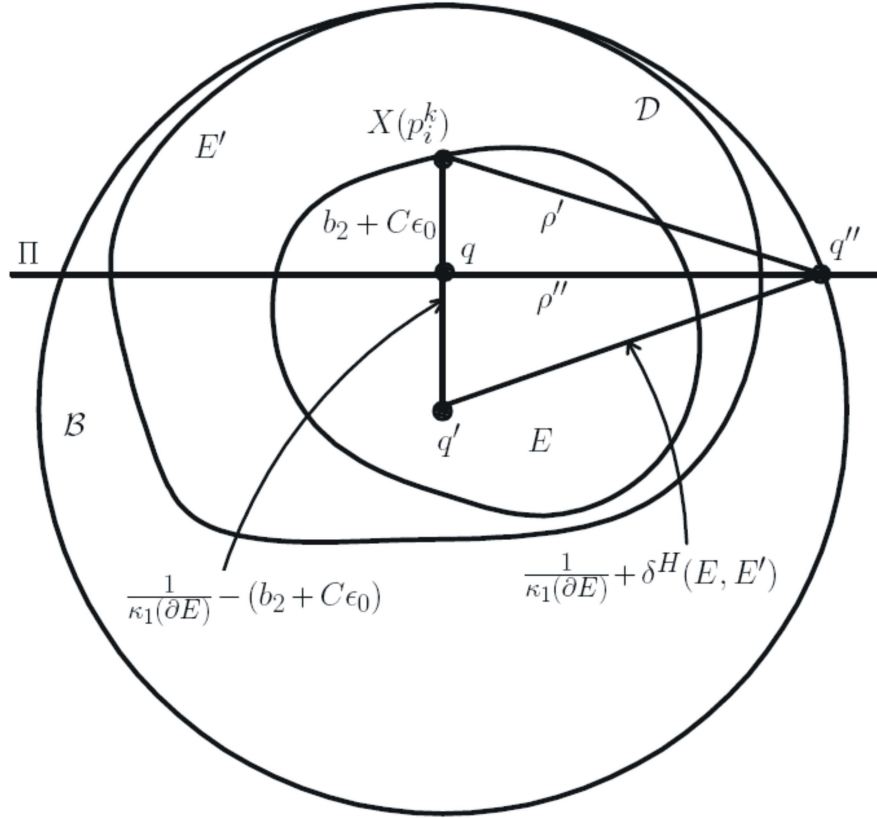


Figura 4.4: Distancia entre $Y(p)$ y $X(p)$.

Añadiendo esta información a (4.58) y simplificando, obtenemos

$$\rho' = \sqrt{\frac{2((b_2 + C\epsilon_0) + \delta^H(E, E'))}{\kappa_1(\partial E)} + (\delta^H(E, E'))^2}.$$

Finalmente, tengamos en cuenta que $\|X(p_i^k) - X(p)\| < \epsilon_0$ y que ρ' es una cota superior para la norma de $X(p_i^k) - Y(p)$. De este modo obtenemos

$$\|X(p) - Y(p)\| \leq \|X(p) - X(p_i^k)\| + \|X(p_i^k) - Y(p)\| \leq \epsilon_0 + \rho' < m(b_2, E, E'),$$

donde estamos asumiendo que tomamos ϵ_0 suficientemente pequeño en términos de $\delta^H(E, E')$, b_2 y $\kappa_1(\partial E)$. Esto termina la demostración. ■

5

Lemas de Completitud

En este capítulo será cuando obtengamos los resultados que, usados recursivamente, nos permiten construir superficies minimales completas y acotadas. Lo que haremos será emplear el resultado tipo Runge que hemos demostrado en el Capítulo 3 (Lema 3.1), así como la transformación de López-Ros, con el fin de deformar alrededor de su borde una superficie minimal dada con topología finita. De este modo, seremos capaces de incrementar el diámetro intrínseco de la superficie, pero preservando el diámetro extrínseco. Los lemas que vamos a presentar y demostrar a continuación, suponen una fuerte generalización del lema original de Nadirashvili [N1]. Esta mejora se observa en dos sentidos. Por un lado, nuestros lemas funcionan en el ambiente de las superficies de Riemann con topología finita arbitraria. Por el otro lado, nosotros conseguimos que la inmersión original y la resultante se parezcan tanto como se quiera en todo el dominio de definición de esta última. La demostración de los lemas de este capítulo está inspirada en las técnicas que Martín y Nadirashvili mostraron en [MN].

5.1

Lema previo

Como hemos avanzado, con el fin de demostrar el lema de completitud probaremos primero un resultado técnico. Previamente, para poder presentarlo, debemos introducir algo de notación. Denotaremos

$$M' = M \setminus \left(\bigcup_{i=1}^E \mathbb{D}_i \right),$$

donde \mathbb{D}_i , $i = 1, \dots, E$, son discos conformes (y con cierres disjuntos) en la superficie de Riemann compacta M . De este modo M' es el conjunto asociado a un multicyclo. Al igual que en el capítulo anterior, denotaremos por ω a una 1-forma holomorfa sin ceros en M' . También denotaremos ds a la métrica

$$ds^2 = \|\omega\|^2.$$

Además, para cada $i = 1, \dots, E$, fijamos Σ_i un ciclo analítico alrededor de \mathbb{D}_i y

$$\beta_i : \Sigma_i \rightarrow \Gamma_i \subset \mathbb{R}^3$$

una curva de Jordan analítica. Finalmente, dado $\mathcal{T}(\Sigma_i)$ un entorno tubular de Σ_i en (M, ds^2) , denotamos por

$$P_i : \mathcal{T}(\Sigma_i) \rightarrow \Sigma_i$$

la proyección natural. Aunque estas últimas definiciones parezcan un poco arbitrarias, durante el desarrollo del capítulo veremos que resultan fundamentales para mantener la acotación al completar la superficie.

Ahora ya estamos en disposición de describir el primero de los lemas.

Lema 5.1. Sean $\mathcal{J} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_E\}$ un multiciclo en M' , $X : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme, p_0 un punto en $M(\mathcal{J})$ y $r > 0$. Supongamos

(1) $X(p_0) = 0$.

(2) $\gamma_i \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, para cada $i = 1, \dots, E$.

(3) $\|X(p) - \beta_i(P_i(p))\| < r$, para cada $p \in \gamma_i$ y para cada $i = 1, \dots, E$.

Entonces, para cada $s > 0$ y para cada $\epsilon > 0$ tal que $p_0 \in M(\mathcal{J}^\epsilon)$ existen un multiciclo $\tilde{\mathcal{J}} = \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_E\}$ y una inmersión minimal conforme $\tilde{X} : \overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\tilde{X}(p_0) = 0$ y satisfaciendo la siguiente lista de propiedades:

(L5.1.a) $\tilde{\gamma}_i \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, para cada $i = 1, \dots, E$.

(L5.1.b) $\mathcal{J}^\epsilon \subset \tilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$.

(L5.1.c) $s < \text{dist}_{\overline{(M(\tilde{\mathcal{J}}), \tilde{X})}}(p, \tilde{\mathcal{J}})$, para todo $p \in \mathcal{J}^\epsilon$.

(L5.1.d) $\|\tilde{X}(p) - \beta_i(P_i(p))\| < R$, para todo $p \in \tilde{\gamma}_i$ y para todo $i = 1, \dots, E$, donde

$$R = \sqrt{4s^2 + r^2} + \epsilon.$$

(L5.1.e) $\|\tilde{X}(p) - X(p)\| < \epsilon$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J}^\epsilon)}$.

El objetivo de este lema es deformar la inmersión X alrededor de su borde. La deformación se hará de manera que incrementemos el diámetro intrínseco de la superficie (Propiedad (L5.1.c)). Al tiempo, conseguimos controlar el diámetro extrínseco gracias a la propiedad de la envolvente convexa junto con las Propiedades (3) y (L5.1.d). Esta forma de controlar el diámetro extrínseco de la superficie está inspirada en una técnica introducida por F. Martín y N. Nadirashvili [MN] y supone una importante mejora con respecto a los argumentos originales de Nadirashvili que hasta ahora se han usado en la construcción de superficies minimales completas y acotadas [N1], [LMMo1], [MMo3],... Concretamente, este avance nos permitirá dos hechos (Lema 5.2):

- Podremos hacer crecer el diámetro intrínseco de la superficie tanto como queramos, sufriendo un incremento del extrínseco tan pequeño como se quiera. En los trabajos existentes hasta ahora había una relación directa entre ambos crecimientos.
- La inmersión resultado de la deformación se parece tanto como queramos a la original en todo su dominio de definición. En los trabajos precedentes, no se tenía control sobre un entorno del borde del dominio de definición de la inmersión final.

Como es habitual en este tipo de lemas, el método de demostración consistirá en tomar la representación de Weierstrass de la inmersión X (la denotaremos por $\Phi^{0,1}$) y modificarla en sucesivas etapas, obteniendo en cada una de ellas una representación de Weierstrass $\Phi^{i,k}$. Cada una de las representaciones será obtenida de la anterior

mediante la aplicación de una transformación de López-Ros. Ésta usará, sobre un sistema de referencia adecuado, una función holomorfa obtenida mediante el Lema 3.1. En consecuencia, cada una de las representaciones de Weierstrass $\Phi^{i,k}$ dará lugar a una inmersión minimal bien definida F_i^k .

Asociada a cada una de las transformaciones tendremos un pequeño conjunto $\omega_i^k \subset M(\mathcal{J})$. Sobre este conjunto la correspondiente transformación de López-Ros actuará de forma violenta mientras que fuera de un entorno suyo, apenas modificará la representación original. De esto modo, F_{i-1}^k y F_i^k serán próximas en $M(\mathcal{J})$ salvo un pequeño entorno de ω_i^k , a la par que la métrica asociada a F_i^k aumenta en ω_i^k respecto de la asociada a F_{i-1}^k . Por otro lado, la elección del sistema de referencia en cada transformación será fundamental para controlar el diámetro extrínseco de la nueva superficie, en cada etapa.

Los conjuntos ω_i^k se distribuirán a modo de E laberintos alrededor de las componentes conexas de \mathcal{J} . Estos laberintos son una generalización al caso de un multiciclo de los que introdujo Nadirashvili [N1] para construir discos minimales completos y acotados (véase la Figura 2.2). Esta familia de conjuntos está diseñada de manera que toda curva que parta del punto p_0 y llegue a la frontera de $M(\mathcal{J})$ debe atravesar algún ω_i^k o bien bordearlo. En cualquier caso, la longitud de dicha curva es grande. En caso de bordearlos su longitud euclídea será grande puesto que el laberinto descrito por los conjuntos tiene forma sinuosa. Por el otro lado, sobre los conjuntos ω_i^k habremos incrementado la métrica mediante el uso de la transformación de López-Ros. Este hecho garantiza un crecimiento global de la métrica intrínseca de la superficie.

5.1.1

Demostración del Lema 5.1

El conjunto de las curvas de Jordan analíticas en M' es denso en el de las curvas de Jordan regulares a trozos en M' , luego, por comodidad y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el multiciclo \mathcal{J} está formado por ciclos analíticos.

El primer paso de la demostración consiste en fijar el número de transformaciones que vamos a aplicar a la inmersión X . Con tal ánimo, fijamos un real $\zeta_0 \in]0, \epsilon[$ suficientemente pequeño para que $\gamma_i^{\zeta_0}$ tenga sentido y $\gamma_i^{\zeta_0} \subset T(\Sigma_i)$, para cada $i = 1, \dots, E$. Ahora, consideremos un natural N de manera que $2/N < \zeta_0$ y

$$\|X(p) - \beta_i(P_i(p))\| < r, \quad (5.1)$$

para cualquier punto p en la componente conexa de $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^{2/N})$ alrededor de \mathbb{D}_i , para cada $i = 1, \dots, E$. Esta elección es posible debido a la hipótesis (3) del Lema 5.1. Además, a lo largo de la prueba del lema asumiremos que N es escogido suficientemente grande, para que se cumplan una serie de desigualdades que irán apareciendo.

De este modo, ya podemos asegurar que el número de etapas que necesitaremos para construir \tilde{X} a partir de X será precisamente $2N \cdot E$.

Para los razonamientos que siguen, es conveniente tener en cuenta lo siguiente:

Nota 5.1. A lo largo de la prueba del Lema 5.1 aparecerá un conjunto de constantes positivas que dependen exclusivamente de los datos del lema, esto es, $X, \mathcal{J}, r, \epsilon$ y s . Es importante notar que la definición de estas constantes no dependerá del natural N que acabamos de fijar. El símbolo ‘cte’ denotará indiferentemente a todas esas constantes.

De modo similar a como hicimos en el capítulo anterior, vamos a definir una relación de orden total en el conjunto $I \equiv \{1, \dots, 2N\} \times \{1, \dots, E\}$. Diremos

$$(j, l) > (i, k) \Leftrightarrow \begin{cases} l > k \\ \text{o} \\ l = k \text{ y } j > i. \end{cases}$$

Definamos ahora la familia de conjuntos $\{\omega_i^k \mid (i, k) \in I\}$. Para ello, empecemos considerando, para cada $k = 1, \dots, E$, una familia de puntos $\{v_{1,k}, \dots, v_{2N,k}\}$ en la curva γ_k . Supongamos que tales puntos dividen a γ_k en $2N$ partes iguales, esto es, $2N$ curvas de igual longitud. Asumamos también que los puntos están ordenados de manera natural. Siguiendo la proyección normal, podemos transferir esta partición de γ_k a la curva $\gamma_k^{2/N}$, esto es, la curva en $M(\mathcal{J})$ paralela a γ_k y tal que la distancia entre ellas es $2/N$. De este modo obtenemos una familia de puntos $\{v'_{1,k}, \dots, v'_{2N,k}\}$ en $\gamma_k^{2/N}$. Esta familia divide a dicha curva en $2N$ partes aunque, en principio, no iguales.

En estas condiciones definimos los siguientes conjuntos (véase la Figura 5.1):

- $L_{i,k} = [v_{i,k}, v'_{i,k}]$, $\forall (i, k) \in I$. Recordemos que $[v_{i,k}, v'_{i,k}]$ representa la geodésica minimizante en $(M(\mathcal{J}), ds)$ uniendo $v_{i,k}$ y $v'_{i,k}$ (por tanto, su longitud será $2/N$).
- $\mathcal{G}_{j,k} = \gamma_k^{j/N^3}$, para cada $j = 0, \dots, 2N^2$.
- $\mathcal{A}_k = \bigcup_{j=0}^{N^2-1} \overline{\text{Int}(\mathcal{G}_{2j+1,k}) \setminus \text{Int}(\mathcal{G}_{2j,k})}$ y $\tilde{\mathcal{A}}_k = \bigcup_{j=1}^{N^2} \overline{\text{Int}(\mathcal{G}_{2j,k}) \setminus \text{Int}(\mathcal{G}_{2j-1,k})}$.
- $\mathcal{R}_k = \bigcup_{j=0}^{2N^2} \mathcal{G}_{j,k}$.
- $\mathcal{B}_k = \bigcup_{j=1}^N L_{2j,k}$ y $\tilde{\mathcal{B}}_k = \bigcup_{j=0}^{N-1} L_{2j+1,k}$.
- $\mathcal{L}_k = \mathcal{B}_k \cap \mathcal{A}_k$ y $\tilde{\mathcal{L}}_k = \tilde{\mathcal{B}}_k \cap \tilde{\mathcal{A}}_k$.
- $H_k = \mathcal{R}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \tilde{\mathcal{L}}_k$.
- $\Omega_{N,k} = \left\{ p \in \text{Int}(\mathcal{G}_{2N^2,k}) \setminus \text{Int}(\mathcal{G}_{0,k}) \mid \text{dist}_{(M, ds)}(p, H_k) \geq \frac{1}{4N^3} \right\}$. Aquí debemos asumir que N es suficientemente grande para que $\Omega_{N,k}$ sea no vacío.

- $\Omega_N = \bigcup_{k=1}^E \Omega_{N,k}$.
- Para cada $(i, k) \in I$, definimos ω_i^k como la curva $L_{i,k}$ junto con las componentes conexas de $\Omega_{N,k}$ que tienen intersección no vacía con $L_{i,k}$. Nótese que ω_i^k es un conjunto compacto.
- Para cada $(i, k) \in I$, definimos

$$\varpi_i^k = \{p \in M \mid \text{dist}_{(M, ds)}(p, \omega_i^k) < \delta(N)\},$$

donde $\delta(N) > 0$ está escogido para que los conjuntos $\overline{\varpi_i^k}$, $(i, k) \in I$, sean disjuntos dos a dos.

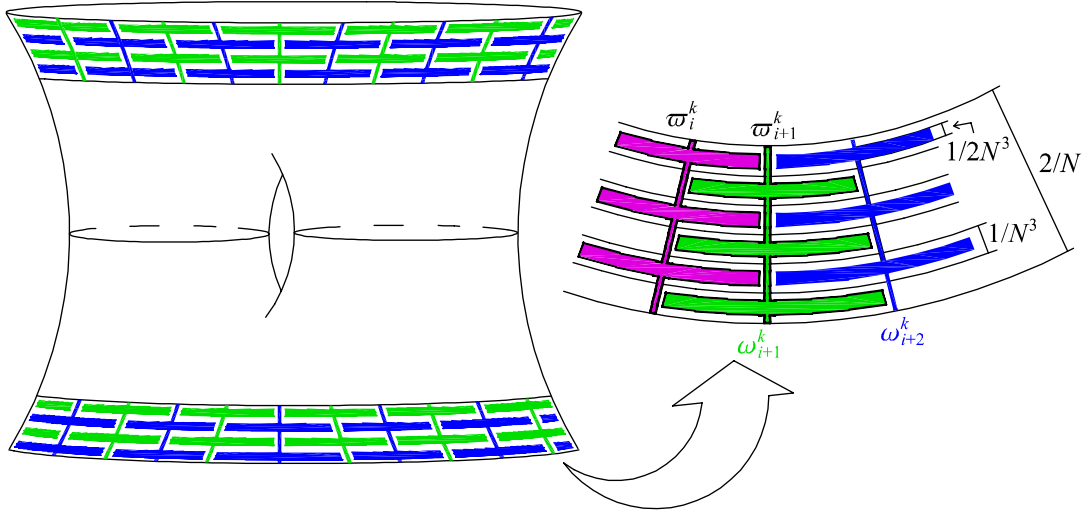


Figura 5.1: El laberinto alrededor del borde de $M(\mathcal{J})$.

Nota 5.2. La familia de conjuntos ϖ_i^k , $(i, k) \in I$, está contenida en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \overline{M(\mathcal{J}^\epsilon)}$. Este hecho es consecuencia inmediata de la elección de N y de ζ_0 y será fundamental a la hora de demostrar la Propiedad (L5.1.e) del Lema 5.1.

Dos de las propiedades fundamentales del laberinto que acabamos de describir quedan reflejadas en el siguiente resultado.

Afirmación 5.1. Si N es tomado suficientemente grande, entonces para cada $(i, k) \in I$ se tienen:

$$(1) \text{diam}_{(M, ds)}(\varpi_i^k) < \frac{\text{cte}}{N}.$$

(2) Sean $c > 0$ una constante y $\lambda^2 \cdot ds^2$ una métrica conforme en $\overline{M(\mathcal{J})}$ que satisfaga

$$\lambda \geq \begin{cases} c & \text{en } M(\mathcal{J}) \\ cN^4 & \text{en } \Omega_N. \end{cases}$$

Entonces, para cada curva α en $\overline{M(\mathcal{J})}$ conectando $\gamma_k^{\zeta_0}$ y γ_k , para cierto $k \in \{1, \dots, E\}$, se tiene que

$$\text{long}_{(M, \lambda \cdot ds)}(\alpha) \geq \text{cte} \cdot cN.$$

Demostración. Para la Propiedad (1), es inmediato darse cuenta de que

$$\text{diam}_{(M, ds)} \leq \text{diam}_{(M, ds)}(L_{i,k}) + 2 \max\{\delta(L_{i,k}, L_{i-1,k}), \delta(L_{i,k}, L_{i+1,k})\},$$

donde

$$\delta(L_{i,k}, L_{j,k}) = \max\{\text{dist}_{(M, ds)}(p, q) \mid p \in L_{i,k}, q \in L_{j,k}\}, \quad \forall j \in \{i-1, i+1\}.$$

Por un lado,

$$\text{diam}_{(M, ds)}(L_{i,k}) = \frac{2}{N},$$

mientras que por el otro, para $j \in \{i-1, i+1\}$,

$$\begin{aligned} \delta(L_{i,k}, L_{j,k}) &\leq \text{diam}_{(M, ds)}(L_{i,k}) + \text{diam}_{(M, ds)}(L_{j,k}) + \text{dist}_{(M, ds)}(v_{i,k}, v_{j,k}) = \\ &\frac{2}{N} + \frac{2}{N} + \frac{\text{long}_{(M, ds)}(\gamma^k)}{2N} < \frac{\text{cte}}{N}. \end{aligned}$$

Así, queda demostrado (1). Para comprobar la segunda propiedad, denotamos por α_j un trozo conexo de α que conecte $\gamma_k^{j/N}$ con $\gamma_k^{(j+1)/N}$, para cada $j = 0, \dots, N^2 - 1$. Entonces, por el modo en que hemos construido el laberinto (véase de nuevo la Figura 5.1), o bien ocurre que

$$\text{long}_{(M, ds)}(\alpha_j) > \frac{\text{cte}}{N},$$

o bien α_j atraviesa $\Omega_{N,k} \subset \Omega_N$, de manera que

$$\text{long}_{(M, ds)}(\alpha_j \cap \Omega_N) > \frac{1}{2N^3}.$$

Un modo de comprobar esta afirmación es observar que es cierta para curvas en \mathbb{C} y tener en cuenta que la aplicación desarrollante de ω es una isometría local (Nota 4.1). En cualquiera de los dos casos anteriores, la definición de λ asegura que

$$\text{long}_{(M, \lambda \cdot ds)}(\alpha_j) > \frac{\text{cte}}{N} \cdot c,$$

luego,

$$\text{long}_{(M, \lambda \cdot ds)}(\alpha) \geq \sum_{j=0}^{N^2-1} \text{long}_{(M, \lambda \cdot ds)}(\alpha_j) > \sum_{j=0}^{N^2-1} \frac{\text{cte}}{N} \cdot c > \text{cte} \cdot cN.$$

Así, concluimos la prueba de la Afirmación 5.1. ■

Llegados a este punto, vamos a construir, para N suficientemente grande, una sucesión de $2NE$ inmersiones minimales, conformes y con borde $\{F_i^k : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid (i, k) \in I\}$. Lo haremos siguiendo un proceso recursivo, cada una de ellas será obtenida a partir de la anterior mediante la aplicación de una transformación de López-Ros, usando por función holomorfa una dada por el Lema 3.1, y sobre una base adecuada. Denotaremos $F_0^1 = X$ y $F_0^k = F_{2N}^{k-1}$, $\forall k = 2, \dots, E$. La inmersión obtenida en el último paso, F_{2N}^E , será la inmersión \tilde{X} que demuestre el Lema 5.1.

Construiremos la sucesión de inmersiones de manera que se cumpla la afirmación que enunciamos a continuación.

Afirmación 5.2. *La familia $\{F_i^k \mid (i, k) \in I\}$ satisface la siguiente lista de propiedades:*

(a1_i^k) $F_i^k(p) = \text{Re} \left(\int_{p_0}^p \Phi^{i,k} \right)$, donde $\Phi^{i,k} = \phi^{i,k} \cdot \omega$ es una representación de Weierstrass bien definida.

(a2_i^k) $\|\phi^{i,k}(p) - \phi^{i-1,k}(p)\| \leq 1/N^2$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \varpi_i^k$.

(a3_i^k) $\|\phi^{i,k}(p)\| \geq N^{7/2}$, para todo $p \in \omega_i^k$.

(a4_i^k) $\|\phi^{i,k}(p)\| \geq \text{cte}/\sqrt{N}$, para todo $p \in \varpi_i^k$.

(a5_i^k) $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(G_i^k(p), G_{i-1}^k(p)) < 1/N^2$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \varpi_i^k$, donde estamos denotando por $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}$ a la distancia intrínseca en \mathbb{S}^2 y por G_j^k a la aplicación de Gauss de la inmersión F_j^k , $j = i, i-1$.

(a6_i^k) Existe $S_i^k = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^3 tal que

(a6.1_i^k) Para todo $p \in \overline{\varpi_i^k}$ con $\|X(p) - \beta_k(\mathbb{P}_k(p))\| \geq 1/\sqrt{N}$, se tiene

$$\|(X(p) - \beta_k(\mathbb{P}_k(p)))_{(*, S_i^k)}\| < \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}.$$

(a6.2_i^k) $(F_i^k(p))_{(3, S_i^k)} = (F_{i-1}^k(p))_{(3, S_i^k)}$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J})}$.

(a7_i^k) $\|F_i^k(p) - F_{i-1}^k(p)\| \leq \text{cte}/N^2$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \varpi_i^k$.

En la primera propiedad aseguramos que las representaciones de Weierstrass $\Phi^{i,k}$ dan lugar a inmersiones minimales bien definidas. Como ya hemos adelantado, esto será debido a que cada una de ellas es obtenida mediante transformación de López-Ros

y usando como parámetro una función holomorfa dada por el Lema 3.1. Esta transformación apenas modificará a la inmersión original fuera de ϖ_i^k . Este hecho queda reflejado en las Propiedades (a2_i^k) y (a7_i^k) (tengamos en cuenta que N será tomado suficientemente grande).

Por otro lado, recordemos que la norma de una representación de Weierstrass describe la métrica inducida por ésta. De este modo, la Propiedad (a3_i^k) garantiza que (pensando en N como un natural grande) la métrica inducida por F_i^k sobre ω_i^k es grande. Este hecho es la clave para conseguir inmersiones minimales completas. Además, (a4_i^k) nos da una cota inferior de la métrica inducida por F_i^k sobre $\varpi_i^k \setminus \omega_i^k$, mientras que, finalmente, la Propiedad (a2_i^k) implica que la métrica de dos inmersiones consecutivas es parecida fuera de ϖ_i^k .

La Propiedad (a6_i^k) afirma la existencia de una base ortonormal de \mathbb{R}^3 en la que las dos primeras coordenadas de $(X - \beta_k \circ P_k)(\overline{\varpi}_i^k)$ son pequeñas. Este hecho y que la tercera coordenada en dicha base de las inmersiones F_i^k y F_{i-1}^k es exactamente la misma, serán fundamentales a la hora de demostrar la Propiedad (L5.1.d) del Lema 5.1 que, recordemos, es la clave de la acotación al construir inmersiones minimales completas.

Finalmente, (a5_i^k) es una condición técnica para probar (a6_i^k).

Describamos la construcción. Como anticipamos, la sucesión $\{F_i^k \mid (i, k) \in I\}$ va a ser construida siguiendo un proceso recursivo. El orden que vamos a seguir es similar al procedimiento explicado en la Nota 4.3, página 60, para la familia $\Psi_{i,k}$. Así, construiremos F_i^k a partir de F_{i-1}^k y en el caso especial en que $i - 1 = 0$, adoptaremos el convenio $F_0^k := F_{2N}^{k-1}$, si $k > 1$, y $F_0^1 := X$. Seguiremos el mismo convenio para las representaciones de Weierstrass.

Fijemos $(i, k) \in I$ y supongamos que tenemos definidas las inmersiones $\{F_j^l \mid (j, l) < (i, k)\}$ satisfaciendo la lista de propiedades de la Afirmación 5.2. Nótese que para el caso $(i, k) = (1, 1)$, la inmersión $F_{i-1}^k = F_0^1 = X$ solo verifica la Propiedad (a1₀¹), el resto no tiene sentido. Sin embargo, no necesitaremos más para construir F_1^1 .

Antes que nada, vamos a mostrar una serie de propiedades de la inmersión F_{i-1}^k que se deducen de las propiedades (a1_j^l), ..., (a7_j^l), para $(j, l) < (i, k)$. Usaremos estas propiedades para poder construir F_i^k a partir de F_{i-1}^k .

Afirmación 5.3. Para N suficientemente grande, ocurren:

$$(b1) \quad \|\phi^{i-1,k}\| \leq \text{cte en } \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \left(\bigcup_{(j,l) < (i,k)} \varpi_j^l \right).$$

$$(b2) \quad \|\phi^{i-1,k}\| \geq \text{cte en } \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \left(\bigcup_{(j,l) < (i,k)} \varpi_j^l \right).$$

$$(b3) \quad \text{diam}_{\mathbb{R}^3}(F_{i-1}^k(\varpi_i^k)) < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

$$(b4) \quad \text{diam}_{\mathbb{S}^2}(G_{i-1}^k(\varpi_i^k)) < \frac{1}{\sqrt{N}}. \text{ En particular}$$

$$G_{i-1}^k(\varpi_i^k) \subset \text{Cono} \left(g, \frac{1}{\sqrt{N}} \right),$$

para cierto $g \in G_{i-1}^k(\varpi_i^k)$, siendo $\text{Cono}(x, \theta) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \angle(x, y) < \theta\}$.

(b5) Existe una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , $S_i^k = \{e_1, e_2, e_3\}$, satisfaciendo

$$(b5.1) \quad \angle(e_3, X(p) - \beta_k(P_k(p))) < \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}, \text{ para todo } p \in \varpi_i^k \text{ con } \|X(p) - \beta_k(P_k(p))\| \geq 1/\sqrt{N}.$$

$$(b5.2) \quad \angle(\pm e_3, G_{i-1}^k(p)) \geq \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}, \text{ para todo } p \in \varpi_i^k.$$

Demostración. Para deducir (b1) escribimos

$$\|\phi^{i-1,k}\| \leq \|\phi^{0,1}\| + \sum_{(j,l) < (i,k)} \|\phi^{j,l} - \phi^{j-1,l}\| \leq \|\phi^{0,1}\| + \frac{2E}{N} < \text{cte},$$

donde hemos usado (a2^l), $(j, l) < (i, k)$. Usando estas mismas propiedades y asumiendo que N fue tomado suficientemente grande, tenemos

$$\|\phi^{i-1,k}\| \geq \|\phi^{0,1}\| - \sum_{(j,l) < (i,k)} \|\phi^{j,l} - \phi^{j-1,l}\| \geq \|\phi^{0,1}\| - \frac{2E}{N} > \text{cte} (> 0),$$

con lo que queda probada la condición (b2). Aquí hemos usado de manera fuerte que $\inf\{\|\phi^{0,1}(p)\| \mid p \in \overline{M(\mathcal{J})}\} > 0$.

Para comprobar (b3) tomamos $p, p' \in \varpi_i^k$, entonces

$$\|F_{i-1}^k(p) - F_{i-1}^k(p')\| = \left\| \int_p^{p'} \phi^{i-1,k} \omega \right\| \leq \int_p^{p'} \|\phi^{i-1,k}\| \|\omega\| \leq$$

usando (b1) y la Propiedad (1) de la Afirmación 5.1,

$$\text{cte} \cdot \text{diam}_{(M,ds)}(\varpi_i^k) < \frac{\text{cte}}{N} < \frac{1}{\sqrt{N}},$$

donde asumimos que N fue tomado suficientemente grande para que ocurra la última desigualdad.

Para (b4), observemos que

$$\text{diam}_{\mathbb{S}^2}(G_0^1(\varpi_i^k)) < \sup\{\|(dG_0^1)_p\| \mid p \in \varpi_i^k\} \cdot \text{diam}_{(M,ds)}(\varpi_i^k) < \frac{\text{cte}}{N},$$

donde otra vez hemos tenido en cuenta (1) de la Afirmación 5.1. Ahora, dados $p, p' \in \varpi_i^k$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(G_{i-1}^k(p), G_{i-1}^k(p')) &\leq \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(G_0^1(p), G_0^1(p')) + \\ &\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(G_{i-1}^k(p), G_0^1(p)) + \text{dist}_{\mathbb{S}^2}(G_0^1(p'), G_{i-1}^k(p')) < \end{aligned}$$

usando la ecuación anterior para el primer sumando y las Propiedades (a5_j^l), $(j, l) < (i, k)$, para los otros dos

$$\frac{\text{cte}}{N} + \frac{E}{N} + \frac{E}{N} < \frac{1}{\sqrt{N}},$$

donde hemos supuesto que N fue escogido lo bastante grande para que se de la última desigualdad.

Finalmente, demostremos (b5). Para hacerlo consideremos

$$H := \text{Cono}\left(g, \frac{2}{\sqrt{N}}\right) \cup \text{Cono}\left(-g, \frac{2}{\sqrt{N}}\right),$$

donde g viene dado por la Propiedad (b4). Tomemos vectores $e_3 \in \mathbb{S}^2 \setminus H$ y $p \in \varpi_i^k$. Entonces

$$\angle(\pm e_3, G_{i-1}^k(p)) \geq \angle(\pm e_3, g) - \angle(g, G_{i-1}^k(p)) \geq \frac{2}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

donde hemos usado (b4). En consecuencia, todo vector de $\mathbb{S}^2 \setminus H$ verifica (b5.2). Ahora, consideremos también el conjunto

$$\mathcal{N} := \left\{ \frac{X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))}{\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\|} \mid p \in \varpi_i^k \text{ y } \|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \right\}.$$

Así, $\mathcal{N} \subset \mathbb{S}^2$ y su diámetro en \mathbb{S}^2 está acotado por $1/\sqrt{N}$ (cuando N es tomado suficientemente grande). En efecto,

$$\begin{aligned} \text{diam}_{\mathbb{S}^2}(\mathcal{N}) &\leq \\ \sup \left\{ \|(dK)_p\| \mid p \in \varpi_i^k \text{ y } \|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \right\} &\cdot \text{diam}_{(M,ds)}(\varpi_i^k), \end{aligned}$$

siendo

$$K = \frac{X - \beta_k \circ \mathbf{P}_k}{\|X - \beta_k \circ \mathbf{P}_k\|}.$$

Luego, gracias a (1) de la Afirmación 5.1 y a la compacidad de ϖ_i^k , concluimos que

$$\text{diam}_{\mathbb{S}^2}(\mathcal{N}) \leq \frac{\text{cte}}{N} < \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (5.2)$$

donde, como de costumbre, hemos asumido que N fue escogido suficientemente grande para que ocurra la última desigualdad.

Ahora, para poder elegir un vector e_3 satisfaciendo (b5.1) además de (b5.2), estudie-
mos los siguientes dos casos posibles:

- Supongamos $(\mathbb{S}^2 \setminus H) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Elijamos $e_3 \in (\mathbb{S}^2 \setminus H) \cap \mathcal{N}$ cualquiera. Por ser $e_3 \in \mathbb{S}^2 \setminus H$ verifica (b5.2). Por otro lado, si $p \in \varpi_i^k$ es tal que $\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \geq 1/\sqrt{N}$, entonces

$$\frac{X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))}{\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\|} \in \mathcal{N}.$$

Así, puesto que e_3 también está en \mathcal{N} , tenemos

$$\angle(e_3, X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))) = \angle\left(e_3, \frac{X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))}{\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\|}\right) < \frac{1}{\sqrt{N}},$$

donde hemos tenido en cuenta (5.2). En consecuencia, e_3 verifica (b5.1) con lo que hemos demostrado (b5) en este caso.

- Supongamos $(\mathbb{S}^2 \setminus H) \cap \mathcal{N} = \emptyset$. En esta situación, tenemos $\mathcal{N} \subset H$, luego, por la definición de H , existen vectores $e_3 \in \mathbb{S}^2 \setminus H$ y $q \in \mathcal{N}$ de manera que

$$\angle(e_3, q) < \frac{2}{\sqrt{N}}. \quad (5.3)$$

Por un lado, por ser $e_3 \in \mathbb{S}^2 \setminus H$ tenemos (b5.2). Por el otro, si $p \in \varpi_i^k$ es tal que $\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \geq 1/\sqrt{N}$, ocurre

$$\frac{X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))}{\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\|} \in \mathcal{N}.$$

Además, también $q \in \mathcal{N}$, luego, razonando como antes, (5.2) garantiza que

$$\angle(q, X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))) < \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.4)$$

Entonces,

$$\angle(e_3, X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))) \leq \angle(e_3, q) + \angle(q, X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))) < \frac{3}{\sqrt{N}},$$

donde hemos tenido en cuenta (5.3) y (5.4). Así, concluimos la prueba de (b5) en este segundo caso.

Esto termina la demostración de la Afirmación 5.3. ■

Llegados a este punto estamos en disposición de definir la inmersión F_i^k . Como anunciamos, para ello aplicaremos una transformación de López-Ros a la inmersión F_{i-1}^k .

Denotemos por $(g^{i-1,k}, \Phi_3^{i-1,k})$ a los datos de Weierstrass de F_{i-1}^k en la base ortonormal S_i^k dada por la Afirmación que acabamos de demostrar. Construyamos, para cada $\alpha > 0$, una función holomorfa sin ceros

$$h_\alpha : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{C}$$

satisfaciendo

- $|h_\alpha - \alpha| < 1/\alpha$ en ω_i^k .
- $|h_\alpha - 1| < 1/\alpha$ en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k$.
- La inmersión minimal con datos de Weierstrass $(g^{i-1,k}/h_\alpha, \Phi_3^{i-1,k})$ en la base S_i^k está bien definida en $\overline{M(\mathcal{J})}$.

Para conseguirlo, no hemos de hacer más que aplicar el Lema 3.1 a los datos

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}, \quad K_1 = \omega_i^k, \quad K_2 = \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k, \quad \Delta \subset M \setminus \overline{M(\mathcal{J})}, \quad m = t = \alpha.$$

Consideremos $\alpha > 0$ que será fijado suficientemente grande para cumplir una serie de desigualdades que iremos mostrando a lo largo de la construcción de F_i^k . Ahora, usando h_α como parámetro en la transformación de López-Ros, definimos los datos de una nueva representación de Weierstrass $\Phi^{i,k}$ en la base S_i^k como

$$\left(g^{i,k} := \frac{g^{i-1,k}}{h_\alpha}, \quad \Phi_3^{i,k} := \Phi_3^{i-1,k} \right).$$

Así, la inmersión minimal conforme $F_i^k : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F_i^k(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi^{i,k}$$

está bien definida. Comprobemos que la inmersión minimal F_i^k así definida satisface las Propiedades de la Afirmación 5.2.

La Propiedad (a1^k) es evidente por construcción.

Nótese que cuando α tiende a $+\infty$ entonces h_α converge uniformemente a la función constantemente 1 en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k$. En consecuencia, $\phi^{i,k}$ converge uniformemente a $\phi^{i-1,k}$ en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k$ cuando $\alpha \rightarrow +\infty$. De esta forma, asumiendo que α fue tomado suficientemente grande, ocurre (a2^k).

Del mismo modo, cuando $\alpha \rightarrow +\infty$, la convergencia de las 1-formas de la representación de Weierstrass implica que $g^{i,k}$ converge uniformemente a $g^{i-1,k}$, en $\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k$. En consecuencia tenemos la convergencia de la aplicación de Gauss G_i^k a G_{i-1}^k . Así, para obtener (a5^k) no hemos de hacer más que suponer que α fue tomado suficientemente grande.

Ahora, para $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k$, se tiene

$$\begin{aligned} \|F_i^k(p) - F_{i-1}^k(p)\| &= \left\| \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (\phi^{i,k} - \phi^{i-1,k}) \omega \right\| \leq \\ &\sup_{\overline{M(\mathcal{J})} \setminus \omega_i^k} \{ \|\phi^{i,k} - \phi^{i-1,k}\| \} \cdot \operatorname{diam}_{(M, ds)}(\overline{M(\mathcal{J})}) < \frac{\text{cte}}{N^2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado (a2_i^k), con lo que queda probado (a7_i^k).

En el otro extremo, la función holomorfa h_α converge uniformemente a infinito en ω_i^k cuando $\alpha \rightarrow +\infty$. Así, para $p \in \omega_i^k$, tenemos (véase (1.10) en los preliminares)

$$\begin{aligned} \|\phi^{i,k}(p)\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{|g^{i,k}(p)|} + |g^{i,k}(p)| \right) \|\phi_3^{i,k}(p)\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|h_\alpha(p)|}{|g^{i-1,k}(p)|} \|\phi_3^{i-1,k}(p)\| \geq \\ &\quad \min_{\omega_i^k} (|h_\alpha|) \cdot \min_{\omega_i^k} \left(\frac{\|\phi_3^{i-1,k}\|}{|g^{i-1,k}|} \right) \geq N^{7/2} \end{aligned}$$

donde hemos supuesto, como siempre, que α fue fijado suficientemente grande para que ocurra la última desigualdad. En consecuencia, hemos comprobado (a3_i^k).

Probemos ahora (a6_i^k). Por un lado (a6.2_i^k) ocurre trivialmente por haber sido obtenida F_i^k a partir de F_{i-1}^k mediante una transformación de López-Ros sobre la base S_i^k . Por el otro lado, (a6.1_i^k) ocurre como consecuencia de (b5.1). En efecto, dicha propiedad garantiza que dado $p \in \varpi_i^k$ con $\|X(p) - \beta_k(P_k(p))\| \geq 1/\sqrt{N}$, entonces¹

$$\|(X(p) - \beta_k(P_k(p)))_{(*, S_i^k)}\| \leq \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right) \cdot \|X(p) - \beta_k(P_k(p))\| \leq \frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \cdot r < \frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}},$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (5.1); podemos usarla puesto que $\varpi_i^k \subset \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^{2/N})$. También hemos usado que para $x > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $\operatorname{sen}(x) \leq x$.

Finalmente, probemos la Propiedad (a4_i^k). Utilizando cómo es la proyección estereográfica, de la Propiedad (b5.2) deducimos que

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 + \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)} \leq |g^{i-1,k}| \leq \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 - \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)} \quad \text{en } \varpi_i^k, \quad (5.5)$$

Ahora, es fácil comprobar que si tomamos N suficientemente grande, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 + \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 - \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}.$$

Además, la función $z(x) := \frac{x}{1+x^2}$ es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$. De este modo, cuando $|g^{i-1,k}| < 1$, tendremos

$$\frac{|g^{i-1,k}|}{1 + |g^{i-1,k}|^2} = z(|g^{i-1,k}|) \geq z \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 + \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right),$$

donde hemos tenido en cuenta la primera desigualdad de (5.5). Análogamente, cuando sea $|g^{i-1,k}| > 1$, tendremos

$$\frac{|g^{i-1,k}|}{1 + |g^{i-1,k}|^2} = z(|g^{i-1,k}|) \geq z \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)}{1 - \cos \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right)} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{cte}}{\sqrt{N}} \right),$$

¹Aquí estamos usando la notación que fue introducida en los preliminares para denotar las dos primeras coordenadas de un vector respecto de una base (véase la Notación 2 en la página 19).

habiendo usado esta vez la segunda desigualdad de (5.5). En cualquier caso, tenemos

$$\frac{|g^{i-1,k}|}{1 + |g^{i-1,k}|^2} \geq \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} \right) \quad \text{en } \varpi_i^k .$$

Por tanto, teniendo además en cuenta (b2) concluimos que (siempre que N sea suficientemente grande)

$$\begin{aligned} \|\phi^{i,k}\| &\geq |\phi_3^{i,k}| = |\phi_3^{i-1,k}| \geq \sqrt{2} \|\phi^{i-1,k}\| \frac{|g^{i-1,k}|}{1 + |g^{i-1,k}|^2} \geq \\ &\text{cte} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} \right) \geq \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} \quad \text{en } \varpi_i^k . \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que, para $x > 0$ pequeño, se tiene $\operatorname{sen}(x) \geq x/2$.

Esto termina la construcción de la familia de inmersiones minimales y conformes $\{F_i^k \mid (i, k) \in I\}$, satisfaciendo las propiedades de la Afirmación 5.2. Salvo una restricción de su dominio, la inmersión final que hemos obtenido, esto es, F_{2N}^E , debe demostrar el Lema 5.1. Veamos algunas de las propiedades que cumple.

Proposición 5.1. *Si N fue escogido suficientemente grande, entonces*

(c1) $2s < \operatorname{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J})}, F_{2N}^E)}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^{\zeta_0})$.

(c2) $\|F_{2N}^E - X(p)\| \leq \frac{\text{cte}}{N}$, $\forall p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \left(\bigcup_{(i,k) \in I} \varpi_i^k \right)$.

(c3) *Existe un multicyclo $\tilde{\mathcal{J}} = \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_E\}$ satisfaciendo*

(c3.1) $\mathcal{J}^{\zeta_0} < \tilde{\mathcal{J}} < \mathcal{J}$.

(c3.2) $s < \operatorname{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J})}, F_{2N}^E)}(p, M(\mathcal{J}^{\zeta_0})) < 2s$, $\forall p \in \tilde{\mathcal{J}}$.

(c3.3) *La curva $\tilde{\gamma}_k$ está contenida en $\mathcal{T}(\Sigma_k)$, para todo $k = 1, \dots, E$.*

(c3.4) $\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbb{P}_k(p))\| < R = \sqrt{4s^2 + r^2} + \epsilon$, $\forall p \in \tilde{\gamma}_k$, $\forall k = 1, \dots, E$.

Demostración. Empezaremos comprobando la Propiedad (c1). Para hacerlo usaremos de manera fuerte que

$$\|\phi^{2N,E}\| \geq \begin{cases} \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} & \text{en } M(\mathcal{J}) \\ \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} N^4 & \text{en } \Omega_N . \end{cases} \quad (5.6)$$

Así, comprobemos esta desigualdad. Vayamos por partes. Para $p \in M(\mathcal{J}) \setminus (\bigcup_{(i,k) \in I} \varpi_i^k)$ podemos razonar como cuando demostramos (b2) de la Afirmación 5.3 concluyendo que

$\|\phi^{2N,E}(p)\| \geq \text{cte}$. Consideremos ahora $p \in \omega_i^k$ para cierto $(i, k) \in I$. Entonces

$$\|\phi^{2N,E}(p)\| \geq \|\phi^{i,k}(p)\| - \sum_{(j,l)=(i,k)}^{2N-1,E} \|\phi^{j+1,l}(p) - \phi^{j,l}(p)\| \geq N^{7/2} - \frac{2NE}{N^2} > \text{cte} N^{7/2},$$

donde asumimos que N fue tomado tan grande como para que ocurra la última desigualdad. Para obtener la penúltima desigualdad hemos usado (a3_i^k) y (a2_j^l), $(j, l) > (i, k)$. Finalmente, tomemos $p \in \omega_i^k$ para cierto $(i, k) \in I$. Razonando de modo similar al caso anterior pero usando (a4_i^k) en lugar de (a3_i^k) concluimos

$$\|\phi^{2N,E}(p)\| \geq \|\phi^{i,k}(p)\| - \|\phi^{2N,E}(p) - \phi^{i,k}(p)\| \geq \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} - \frac{2E}{N} > \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}.$$

Con esto damos por demostrado (5.6). Ahora, recordemos que $ds_{F_{2N}^E}^2 = \lambda^2 \cdot ds^2$, siendo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi^{2N,E}\| \geq \begin{cases} \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} & \text{en } M(\mathcal{J}) \\ \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} N^4 & \text{en } \Omega_N, \end{cases}$$

donde hemos usado (5.6). En consecuencia la Propiedad (2) de la Afirmación 5.1 (página 95) garantiza que para toda curva α en $\overline{M(\mathcal{J})}$ conectando \mathcal{J}^{ζ_0} y \mathcal{J} , se tiene

$$\text{long}_{(M', ds_{F_{2N}^E}^2)}(\alpha) \geq \text{cte} \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} N = \text{cte} \sqrt{N},$$

esto es,

$$\text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J})}, F_{2N}^E)}(\mathcal{J}, \mathcal{J}^{\zeta_0}) \geq \text{cte} \sqrt{N} > 2s,$$

asumiendo que N fue tomado suficientemente grande en términos de s para que ocurra la última desigualdad. Así, hemos probado (c1).

Ahora (c2) es una consecuencia evidente de aplicar sucesivamente (a7_i^k), $(i, k) \in I$.

Construyamos el multiciclo $\tilde{\mathcal{J}}$ de la Propiedad (c3). Consideramos el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^{\zeta_0}) \mid s < \text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J})}, F_{2N}^E)}(p, M(\mathcal{J}^{\zeta_0})) < 2s \right\}.$$

Gracias a (c1) sabemos que toda curva en $M(\mathcal{J})$ conectando \mathcal{J} y \mathcal{J}^{ζ_0} corta a \mathcal{D} . Además, \mathcal{D} es claramente abierto en $M(\mathcal{J})$ y los multiciclos \mathcal{J} y $\mathcal{J}^\epsilon (< \mathcal{J}^{\zeta_0})$ están contenidos en diferentes componentes conexas de $M' \setminus \mathcal{D}$. Así, existen multiciclos en \mathcal{D} y cualquiera de ellos que escojamos, $\tilde{\mathcal{J}}$, satisface (c3.1), (c3.2) y (c3.3). Para ver que (c3.3) ocurre, revítese la definición de ζ_0 en la página 92.

Comprobar que se cumple (c3.4) es más complicado. Consideremos $k \in \{1, \dots, E\}$ y $p \in \tilde{\omega}_k$. Terminaríamos la demostración si probásemos que $\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(P_k(p))\| < R$. Hagámoslo. Asumamos que $F_{2N}^E(p) \neq \beta_k(P_k(p))$, en otro caso no habría nada que probar. Estudiemos por separado los dos siguientes casos posibles.

Caso 1. Supongamos que $p \notin \cup_{(i,k) \in I} \varpi_i^k$. Este es el caso más sencillo. La Propiedad (c2) garantiza que $\|F_{2N}^E(p) - X(p)\| \leq \text{cte}/N$. Por tanto,

$$\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| < \|F_{2N}^E(p) - X(p)\| + \|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| < \frac{\text{cte}}{N} + r < R,$$

donde hemos tenido en cuenta (5.1) y hemos asumido que N fue tomado suficientemente grande para que se cumpla la última desigualdad.

Caso 2. Asumamos que $p \in \varpi_i^k$, para cierto $(i, k) \in I$. Entonces, (c3.2) asegura la existencia de una curva $\zeta : [0, 1] \rightarrow M(\mathcal{J})$ de manera que

- $\zeta(0) \in \mathcal{J}^{\zeta_0}$.
- $\zeta(1) = p$.
- $\text{long}_{(M', F_{2N}^E)}(\zeta) < 2s$.

Definamos

$$\bar{t} := \sup\{t \in [0, 1] \mid \zeta(t) \in \varpi_i^k\} \quad \text{y} \quad \bar{p} := \zeta(\bar{t}).$$

Nótese que tal supremo existe por ser $\varpi_i^k \subset \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^{\zeta_0})$. Entonces, teniendo en cuenta las Propiedades (a7_j^l), $(j, l) > (i, k)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|F_i^k(\bar{p}) - F_i^k(p)\| &\leq \|F_i^k(\bar{p}) - F_{2N}^E(\bar{p})\| + \|F_{2N}^E(\bar{p}) - F_{2N}^E(p)\| + \\ \|F_{2N}^E(p) - F_i^k(p)\| &\leq \frac{\text{cte}}{N} + \text{long}_{(M', F_{2N}^E)}(\zeta) + \frac{\text{cte}}{N} \leq \frac{\text{cte}}{N} + 2s. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por otro lado, gracias a las mismas propiedades, concluimos

$$\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \leq \|F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| + \frac{\text{cte}}{N}. \quad (5.8)$$

Llegados a este punto debemos volver a distinguir casos.

Caso 2.1. Supongamos que $\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \leq 1/\sqrt{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| &\leq \|F_i^k(p) - F_i^k(\bar{p})\| + \|F_i^k(\bar{p}) - F_{i-1}^k(\bar{p})\| + \\ \|F_{i-1}^k(\bar{p}) - F_{i-1}^k(p)\| &+ \|F_{i-1}^k(p) - X(p)\| + \|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \leq \\ \frac{\text{cte}}{N} + 2s + \frac{\text{cte}}{N^2} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{\text{cte}}{N} + \frac{1}{\sqrt{N}} &< \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} + 2s. \end{aligned}$$

Aquí, hemos usado (5.7) para acotar el primer sumando, (a7_i^k) para el segundo (nótese que $\bar{q} \notin \varpi_i^k$), (b3) para el tercero, (a7_j^l), $(j, l) < (i, k)$ para acotar el cuarto y, finalmente, nuestra hipótesis en este caso para el último sumando. Además, hemos supuesto que N fue tomado tan grande como para que ocurra la última desigualdad. Uniendo la anterior ecuación con (5.8) obtenemos

$$\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| \leq \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}} + 2s + \frac{\text{cte}}{N} < R,$$

siempre que N fuese tomado suficientemente grande. Así, hemos probado (c3.4) en este caso.

Caso 2.2. Asumamos ahora que $\|X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| > 1/\sqrt{N}$. Este es el caso más complicado. Lo que vamos a hacer es calcular una cota más fina de la norma de $F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))$. Para ello acotaremos por separado el módulo de su tercera coordenada y la norma de las dos primeras. Así, usamos (a6.2_i^k), (a7_j^l), $(j, l) < (i, k)$ y (5.1) para obtener

$$\begin{aligned} |(F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(3, S_i^k)}| &= |(F_{i-1}^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(3, S_i^k)}| \leq \\ |(F_i^k(p) - X(p))_{(3, S_i^k)}| + |(X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(3, S_i^k)}| &\leq \frac{\text{cte}}{N} + r. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por el otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \|(F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(*, S_i^k)}\| &\leq \|(F_i^k(p) - F_i^k(\bar{p}))_{(*, S_i^k)}\| + \|(F_i^k(\bar{p}) - F_{i-1}^k(\bar{p}))_{(*, S_i^k)}\| + \\ \|(F_{i-1}^k(\bar{p}) - F_{i-1}^k(p))_{(*, S_i^k)}\| + \|(F_{i-1}^k(p) - X(p))_{(*, S_i^k)}\| + \|(X(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(*, S_i^k)}\| &\leq \\ \frac{\text{cte}}{N} + 2s + \frac{\text{cte}}{N^2} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{\text{cte}}{N} + \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

En este caso hemos utilizado (5.7) para acotar el primer sumando, (a7_i^k) para el segundo, (b3) para el tercero, (a7_j^l), $(j, l) < (i, k)$, para acotar el cuarto sumando y (a6.1_i^k) para el último. Si además suponemos que N fue escogido suficientemente grande, entonces de la anterior ecuación deducimos que

$$\|(F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p)))_{(*, S_i^k)}\| \leq 2s + \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}. \quad (5.10)$$

Ahora, como consecuencia de (5.9) y (5.10) obtenemos

$$\|F_i^k(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| < \sqrt{\left(2s + \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(r + \frac{\text{cte}}{N}\right)^2}.$$

Luego usando esta cota y la desigualdad (5.8) concluimos

$$\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| < \sqrt{\left(2s + \frac{\text{cte}}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(r + \frac{\text{cte}}{N}\right)^2} + \frac{\text{cte}}{N}.$$

De este modo, para N suficientemente grande, es evidente que $\|F_{2N}^E(p) - \beta_k(\mathbf{P}_k(p))\| < R$ en este último caso.

Esto demuestra (c3.4) y concluye la prueba de la Proposición 5.1. ■

A partir de la anterior proposición es inmediato comprobar que la inmersión

$$\tilde{X} := F_{2N}^E : \overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

resuelve el Lema 5.1.

5.2

Lema Principal

Lema 5.2. Sean $\mathcal{J} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_E\}$ un multicyclo en M' , $X : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme y $p_0 \in M(\mathcal{J})$ un punto con $X(p_0) = 0$. Entonces, para cada $\lambda > 0$ y para cada $\mu > 0$ de manera que $p_0 \in M(\mathcal{J}^\mu)$, existen un multicyclo $\widehat{\mathcal{J}} = \{\widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_E\}$ y una inmersión minimal conforme $\widehat{X} : \overline{M(\widehat{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\widehat{X}(p_0) = 0$ y

$$(L5.2.a) \quad \mathcal{J}^\mu < \widehat{\mathcal{J}} < \mathcal{J}.$$

$$(L5.2.b) \quad \text{dist}_{(\overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}, \widehat{X})}(p, \widehat{\mathcal{J}}) > \lambda, \text{ para todo } p \in \mathcal{J}^\mu.$$

$$(L5.2.c) \quad \|X - \widehat{X}\| < \mu, \text{ en } M(\widehat{\mathcal{J}}).$$

$$(L5.2.d) \quad \delta^H \left(X(\overline{M(\mathcal{J})}), \widehat{X}(\overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}) \right) < \mu.$$

El que acabamos de enunciar es el lema de completitud más fino al que podemos aspirar. Partiendo de una inmersión minimal cualquiera (con topología finita arbitraria), construimos otra inmersión definida en un dominio muy poco más pequeño que el de la original (Propiedad (L5.2.a)), cuyo diámetro intrínseco es tan grande como queramos (Propiedad (L5.2.b)) y que se parece tanto como se quiera a la inmersión original en todo su dominio de definición (Propiedad (L5.2.c)).

Para demostrarlo usaremos reiteradamente el Lema 5.1. Lo que haremos será, empezando por la inmersión original, construir una sucesión de inmersiones con diámetro intrínseco cada vez mayor y que se parecen mucho (y cada vez más) entre sí. De este modo, a partir de un término en adelante, cualquiera de esta sucesión será solución del Lema 5.2.

5.2.1

Demostración del Lema 5.2

Consideremos c_0 , r_1 y ρ_1 tres constantes positivas que serán especificadas un poco más adelante. A partir de ellas, definamos, $\forall n \geq 2$,

$$r_n := \sqrt{r_{n-1}^2 + \left(\frac{2c_0}{n}\right)^2} + \frac{c_0}{n^2},$$

$$\rho_n := \rho_1 + \sum_{i=2}^n \frac{c_0}{i}.$$

La sucesión $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es claramente creciente y divergente. En cambio, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es creciente pero convergente. Además, fijado un positivo ϵ , existen $r_1 > 0$ y $c_0 > 0$

suficientemente pequeños para que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \epsilon$. En efecto, veamos primero que la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente independientemente de la elección de r_1 y c_0 . Supongamos que existe un primer término $r_{n'}$ mayor que $1/2$. De lo contrario no habría nada que demostrar. Para $n > n'$, usando que $r_{n-1} > 1/2$, tenemos

$$r_n = \sqrt{r_{n-1}^2 + \left(\frac{2c_0}{n}\right)^2} + \frac{c_0}{n^2} \leq \sqrt{r_{n-1}^2 + 2r_{n-1} \left(\frac{2c_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{2c_0}{n}\right)^4} + \frac{c_0}{n^2} =$$

$$r_{n-1} + \left(\frac{2c_0}{n}\right)^2 + \frac{c_0}{n^2} = r_{n-1} + \frac{4c_0^2 + c_0}{n^2}.$$

Aplicando sucesivamente esta desigualdad, obtenemos

$$r_n \leq r_{n'} + \sum_{i=2}^n \frac{4c_0^2 + c_0}{i^2} < r_{n'} + 4c_0^2 + c_0.$$

Por tanto, la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, luego, convergente.

Comprobemos ahora que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $r_1 > 0$ y $c_0 > 0$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \epsilon$. De la propia definición de r_n obtenemos que, $\forall n \geq 2$,

$$\left(r_n - \frac{c_0}{n^2}\right)^2 = r_{n-1}^2 + 4\left(\frac{c_0}{n}\right)^2,$$

luego, operando trivialmente, tenemos

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 = 2r_n \frac{c_0}{n^2} + 3\left(\frac{c_0}{n^2}\right)^2. \quad (5.11)$$

Recordemos que ya hemos probado la convergencia de la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además, es claro que para $r'_1 < r_1$ y $c'_0 < c_0$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n$, luego, si asumimos que $r_1 < 1$ y $c_0 < 1$, encontramos una constante $C > 0$ que no depende de r_1 ni de c_0 y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < C$. Teniendo además en cuenta que $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, (5.11) continúa

$$r_n^2 - r_{n-1}^2 < 2C \frac{c_0}{n^2} + 3\left(\frac{c_0}{n^2}\right)^2 = \frac{c_0}{n^2} \left(2C + 3\frac{c_0}{n^2}\right) < C' \frac{c_0}{n^2},$$

siendo $C' > 0$ una nueva constante independiente de r_1 y c_0 . De aquí se sigue que

$$r_n - r_{n-1} < \frac{c_0}{r_n + r_{n-1}} \frac{C'}{n^2} \leq \frac{c_0}{r_1} \frac{C'}{2n^2},$$

donde hemos usado que r_n y r_{n-1} son mayores o iguales que r_1 . Ahora, aplicando sucesivamente esta desigualdad concluimos que

$$r_n < r_1 + \frac{c_0}{r_1} \sum_{k=2}^n \frac{C'}{2k^2} < r_1 + \frac{c_0}{r_1} C', \quad \forall n \geq 2.$$

En consecuencia, la demostración termina tomando $r_1 \in]0, 1[$ y $c_0 \in]0, 1[$ suficientemente pequeños para $r_1 + C'c_0/r_1 < \epsilon$.

Este es el momento de fijar las constantes r_1 y c_0 . Lo hacemos de manera que ocurran

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \frac{\mu}{2}, \quad (5.12)$$

$$c_0 < \mu. \quad (5.13)$$

Más adelante veremos que estas elecciones son realmente necesarias.

El siguiente paso tras fijar estas constantes es considerar una familia, Σ_i , $i = 1, \dots, E$, de ciclos analíticos en M . Definimos $\Sigma_i := \gamma_i$, $\forall i = 1, \dots, E$. De este modo es evidente que $\gamma_i \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, para cada $i = 1, \dots, E$, donde, recordamos, $\mathcal{T}(\Sigma_i)$ es un entorno tubular de la curva Σ_i . Tales entornos fueron descritos al principio de este capítulo. Recordemos también que denotamos por $P_i : \mathcal{T}(\Sigma_i) \rightarrow \Sigma_i$ a la proyección natural.

Además, necesitaremos un conjunto de curvas de Jordan analíticas $\beta_i : \Sigma_i \rightarrow \Gamma_i$. Tomaremos $\beta_i := X|_{\Sigma_i}$, $\forall i = 1, \dots, E$.

Ahora, usando el Lema 5.1 construiremos para cada natural n una familia $\chi_n = \{\mathcal{J}_n, X_n, \epsilon_n\}$ consistente en:

(a_n) $\mathcal{J}_n = \{\gamma_{n,1}, \dots, \gamma_{n,E}\}$ es un multicyclo en M con $\gamma_{n,i} \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, para cada $i = 1, \dots, E$.

(b_n) $X_n : \overline{M(\mathcal{J}_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión minimal y conforme.

(c_n) $\{\epsilon_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos tales que $\epsilon_n < c_0/n^2$.

(d_n) $X_n(p_0) = 0$.

Construiremos la sucesión $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ para que ocurran las siguientes propiedades.

Afirmación 5.4.

(A_n) $\mathcal{J}^\mu < \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} < \mathcal{J}_n < \mathcal{J}_{n-1}$ (solo se cumple para $n \geq 2$).

(B_n) $\text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J}_n)}, X_n)}(p, \mathcal{J}_n) > \rho_n$, para todo $p \in \mathcal{J}^\mu$.

(C_n) $\|X_n(p) - X(P_k(p))\| < r_n$, para todo $p \in \gamma_{n,k}$, para todo $k = 1, \dots, E$.

Demostración. Una vez más, la sucesión será construida siguiendo un método inductivo. Para el primer término, escogemos $X_1 = X$ y $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$. En este momento es cuando hemos de fijar definitivamente la constante ρ_1 . Lo hacemos de forma que, para todo $p \in \mathcal{J}^\mu$, se tenga

$$\rho_1 < \text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J}_1)}, X_1)}(p, \mathcal{J}_1).$$

Con esta definición ya tenemos garantizada la Propiedad (B1). Finalmente, la constante ϵ_1 ha de ser tomada

$$\epsilon_1 < \min\{c_0, r_1\}$$

y suficientemente pequeña para que $\gamma_i^{\epsilon_1} \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, $i = 1, \dots, E$, y para que para cualquier punto $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^{\epsilon_1})$ contenido en la componente conexa alrededor de γ_k , $\forall k = 1, \dots, E$, se tenga

$$\|X(p) - X(P_k(p))\| < r_1 < \frac{\mu}{2}. \quad (5.14)$$

Nótese que esta elección es posible por ser $\Sigma_k = \gamma_k$ y por la continuidad uniforme de X . Además, esta elección garantiza trivialmente (C1).

Por otro lado, la Propiedad (A1) no tiene sentido, luego podemos dar por concluida la construcción de la familia χ_1 verificando las condiciones de la Afirmación 5.4.

Asumamos ahora que ya hemos construido las familias $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$. Para definir χ_n lo primero que hacemos es fijar un positivo ξ de manera que

$$\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_{n-1}), X_{n-1})}}(p, \mathcal{J}_{n-1}^\xi) > \rho_{n-1}, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{J}^\mu. \quad (5.15)$$

Esta elección es posible gracias a (B_{n-1}). Ahora, tomemos

$$\epsilon_n < \min\{\epsilon_{n-1}, \frac{c_0}{n^2}, \xi\}. \quad (5.16)$$

Esta elección garantiza la Propiedad (c_n) de la familia χ_n . Posteriormente supondremos que hemos tomado ϵ_n suficientemente pequeño para que se cumplan ciertas condiciones.

Entonces, consideramos el multiciclo \mathcal{J}_n y la inmersión minimal y conforme $X_n : \overline{M(\mathcal{J}_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (lo que prueba la Propiedad (b_n)) dada por el Lema 5.1 para los datos

$$X = X_{n-1}, \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_{n-1}, \quad r = r_{n-1}, \quad s = \frac{c_0}{n}, \quad \epsilon = \epsilon_n.$$

Nótese que dicho lema puede ser aplicado gracias a las Propiedades (a_{n-1}), (d_{n-1}) y (C_{n-1}) de la familia χ_n . En consecuencia, sin más que traducir a esta notación las tesis del Lema 5.1, obtenemos que la familia $\chi_n = \{\mathcal{J}_n, X_n, \epsilon_n\}$ así definida, satisface $X_n(p_0) = 0$, esto es (d_n), y además:

- (I) $\gamma_{n,i} \subset \mathcal{T}(\Sigma_i)$, para $i = 1, \dots, E$.
- (II) $\mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} < \mathcal{J}_n < \mathcal{J}_{n-1}$.
- (III) $\frac{c_0}{n} < \text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_n)$, para cada $p \in \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n}$.
- (IV) $\|X_n(p) - X(P_i(p))\| < \sqrt{r_{n-1}^2 + \left(\frac{2c_0}{n}\right)^2} + \epsilon_n, \forall p \in \gamma_{n,i}, \forall i = 1, \dots, E$.
- (V) $\|X_n(p) - X_{n-1}(p)\| < \epsilon_n$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n})}$.

Antes que nada, notemos que (I) asegura la Propiedad (a_n) de la familia χ_n , luego, damos dicha familia por bien definida. Comprobemos ahora que χ_n satisface las condiciones de la Afirmación 5.4.

Teniendo en cuenta (II), para comprobar (A_n) basta con demostrar que $\mathcal{J}^\mu < \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n}$. Para hacerlo usamos primero (II) que garantiza

$$\mathcal{J}_n > \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n}. \quad (5.17)$$

Ahora, por la Propiedad (A_{n-1}) sabemos que $\mathcal{J}_{n-2}^{\epsilon_{n-1}} < \mathcal{J}_{n-1}$, luego, $\mathcal{J}_{n-2}^{\epsilon_n + \epsilon_{n-1}} < \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n}$. Así, podemos alargar la cadena (5.17) hasta obtener

$$\mathcal{J}_n > \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} > \mathcal{J}_{n-2}^{\epsilon_n + \epsilon_{n-1}}.$$

Argumentando del mismo modo con las Propiedades $(A_{n-2}), \dots, (A_2)$ concluimos que

$$\mathcal{J}_n > \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} > \mathcal{J}_{n-2}^{\epsilon_n + \epsilon_{n-1}} > \mathcal{J}_{n-3}^{\epsilon_n + \epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2}} > \dots > \mathcal{J}_1^{\sum_{i=2}^n \epsilon_i} = \mathcal{J}^{\sum_{i=2}^n \epsilon_i}, \quad (5.18)$$

donde hemos usado que definimos $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$. Ahora, teniendo en cuenta (5.16) y (5.13), tenemos

$$\sum_{i=2}^n \epsilon_i < \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon_i < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{c_0}{i^2} < c_0 < \mu.$$

En consecuencia, $\mathcal{J}^{\sum_{i=2}^n \epsilon_i} > \mathcal{J}^\mu$, luego, de (5.18) se sigue que $\mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} > \mathcal{J}^\mu$, con lo que queda probada (A_n) .

Probemos ahora (B_n) . De (V) concluimos que la inmersión X_n converge a X_{n-1} uniformemente en $M(\mathcal{J}_{n-1}^\xi)$ cuando ϵ_n tiende a cero, por tanto, gracias a la desigualdad (5.15) podemos asumir también que ϵ_n se eligió lo bastante pequeño para que

$$\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_{n-1}^\xi) > \rho_{n-1}, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{J}^\mu. \quad (5.19)$$

Por otro lado, recordemos que $\mathcal{J}^\mu < \mathcal{J}_{n-1}^\xi < \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} < \mathcal{J}_n$, luego, para cada $p \in \mathcal{J}^\mu$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_n) &\geq \text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_{n-1}^\xi) + \min_{q \in \mathcal{J}_{n-1}^\xi} (\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(q, \mathcal{J}_n)) \geq \\ &\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_{n-1}^\xi) + \min_{q \in \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n}} (\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(q, \mathcal{J}_n)) > \\ &\rho_{n-1} + \frac{c_0}{n} = \rho_n, \end{aligned}$$

donde para la segunda desigualdad hemos tenido en cuenta (5.19) y (III). De este modo, hemos probado (B_n) .

Finalmente, la Propiedad (C_n) es una consecuencia obvia de (IV), (5.16) y la definición de r_n . Por tanto, damos por concluida la construcción de la sucesión de familias $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ satisfaciendo las condiciones de la Afirmación 5.4. ■

Definamos por fin la inmersión que resuelve el Lema 5.2. Para ello observemos que gracias a las Propiedades (B_n) , $n \in \mathbb{N}$, y al hecho de que la sucesión $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, podemos encontrar un natural n_0 de manera que

$$\text{dist}_{\overline{(M(\mathcal{J}_n), X_n)}}(p, \mathcal{J}_n) > \lambda, \quad \forall p \in \mathcal{J}^\mu, \quad \forall n \geq n_0. \quad (5.20)$$

Tomemos $\widehat{X} := X_{n_0}$ y $\widehat{\mathcal{J}} := \mathcal{J}_{n_0}$. Así, (d_{n_0}) asegura que $\widehat{X}(p_0) = 0$. La Propiedad (L5.2.a) del Lema 5.2 se deduce trivialmente¹ de (A_{n_0}) . Por otro lado, (L5.2.b) viene garantizada por (5.20).

Comprobemos ahora (L5.2.c). Para hacerlo, escribimos

$$\begin{aligned} \|X(p) - \widehat{X}(p)\| &\leq \|X(p) - X(P_k(p))\| + \|X(P_k(p)) - \widehat{X}(p)\| < \\ r_1 + r_{n_0} &< \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu, \quad \forall p \in \widehat{\gamma}_k, \quad \forall k = 1, \dots, E, \end{aligned}$$

¹Nótese que las Propiedades (A_n) , $n > 1$, garantizan que $\mathcal{J}_k < \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$, $\forall k \geq 2$.

donde hemos tenido en cuenta (5.14), (C_{n_0}) y (5.12). En consecuencia,

$$\|X(p) - \widehat{X}(p)\| < \mu, \quad \text{para cada } p \in \widehat{\mathcal{J}}.$$

Finalmente, el Principio del Máximo para funciones armónicas garantiza que esta desigualdad ocurre para todo punto p en $\overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}$, quedando así probada (L5.2.c).

Por último, demostraremos (L5.2.d) en dos partes. Tomemos $p \in \overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}$, entonces (L5.2.c) garantiza que $\|X(p) - \widehat{X}(p)\| < \mu$, con lo que la cota de la distancia se tiene en este caso. Por otro lado, si escogemos $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}$, entonces terminaríamos encontrando $q \in \widehat{\mathcal{J}}$ de manera que $\|X(p) - \widehat{X}(q)\| < \mu$. Nótese que $p \in \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \overline{M(\widehat{\mathcal{J}})} \subset \overline{M(\mathcal{J})} \setminus \overline{M(\mathcal{J}^{\epsilon_1})}$, luego, (5.14) garantiza que

$$\|X(p) - X(P_k(p))\| < \frac{\mu}{2},$$

siendo $k \in \{1, \dots, E\}$ el que corresponda. Tomemos $q \in \widehat{\mathcal{J}}$ de manera que $P_k(q) = P_k(p)$. Entonces (C_{n_0}) asegura que

$$\|\widehat{X}(q) - X(P_k(p))\| = \|\widehat{X}(q) - X(P_k(q))\| < \frac{\mu}{2}.$$

Estas dos últimas ecuaciones dan la cota en este caso con lo que queda demostrado (L5.2.d).

Esto concluye la demostración del Lema 5.2.

6

Uniendo ser propia y completitud

Como indica su título, en este capítulo uniremos la información obtenida en los dos capítulos precedentes con el fin de precisar el lema que, definitivamente, usaremos en la demostración de los teoremas principales de esta parte de la memoria.

Partiendo de unas hipótesis similares a las del Lema 4.1, lo que haremos será usar primero el Lema 5.2 (completitud) para aumentar el diámetro intrínseco de la superficie sin aumentar en exceso el extrínseco. Además, seguiremos estando en disposición de aplicar el Lema 4.1 (ser propia). Lo usaremos de manera que, sin apenas perder diámetro intrínseco, deformaremos el borde de la superficie para llevarlo hasta un entorno del borde del dominio convexo con el que estamos trabajando. Lógicamente, la inmersión resultante después de este proceso será muy similar a la inmersión original fuera de un entorno del borde del dominio de definición de ambas inmersiones.

Cuando además supongamos que estamos trabajando sobre un dominio estricta-

mente convexo, entonces haremos uso de la Proposición 4.1 para afinar una cota de la diferencia entre las inmersiones original y resultante, en todo el dominio de definición de ésta última. Esta cota mejorará sensiblemente los teoremas principales para el caso de convexidad estricta.

En concreto, vamos a probar el siguiente resultado:

Lema 6.1. Sean \mathcal{J} un multiciclo en M' , $p_0 \in M(\mathcal{J})$ y $X : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme con $X(p_0) = 0$. Consideremos E y E' dos dominios convexos, regulares, acotados y tales que $0 \in E \subset \overline{E} \subset E'$. Supongamos que a y ϵ son dos constantes positivas de manera que $p_0 \in M(\mathcal{J}^\epsilon)$ y

$$X(\overline{M(\mathcal{J})} \setminus M(\mathcal{J}^\epsilon)) \subset E \setminus \overline{E}_{-a}. \quad (6.1)$$

Entonces, para cada $b > 0$ existen un multiciclo $\tilde{\mathcal{J}}$ y una inmersión minimal y conforme $Y : \overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $Y(p_0) = 0$ y

$$(L6.1.a) \quad \mathcal{J}^\epsilon < \tilde{\mathcal{J}} < \mathcal{J}.$$

$$(L6.1.b) \quad \text{dist}_{(\overline{M(\tilde{\mathcal{J}})}, Y)}(p, \mathcal{J}^\epsilon) > 1/\epsilon, \forall p \in \tilde{\mathcal{J}}.$$

$$(L6.1.c) \quad Y(\tilde{\mathcal{J}}) \subset E' \setminus \overline{E'}_{-b}.$$

$$(L6.1.d) \quad Y(\overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \setminus M(\mathcal{J}^\epsilon)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus E_{-2b-a}.$$

$$(L6.1.e) \quad \|X - Y\| < \epsilon \text{ en } M(\mathcal{J}^\epsilon).$$

Además, si E es estrictamente convexo, entonces la inmersión Y también satisface:

$$(L6.1.f) \quad \|X - Y\| < m(a, b, \epsilon, E, E') \text{ en } M(\tilde{\mathcal{J}}), \text{ siendo}$$

$$m(a, b, \epsilon, E, E') := \epsilon + \sqrt{\frac{2(\delta^H(E, E') + a + 2b)}{\kappa_1(\partial E)} + (\delta^H(E, E') + a)^2}.$$

Demostración. Como ya anticipamos, el primer paso de la demostración consiste en la utilización del Lema 5.2. Para ello, fijamos una constante $\lambda > 1/\epsilon$ y consideramos otra constante positiva $\mu < \epsilon$, que será especificada después. Es inmediato comprobar que en estas condiciones, podemos aplicar el Lema 5.2 a los datos

$$\mathcal{J}, \quad X, \quad \lambda, \quad \mu.$$

De este modo, obtenemos un multiciclo $\hat{\mathcal{J}}$ y una inmersión minimal y conforme $\hat{X} : \overline{M(\hat{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que $\hat{X}(p_0) = 0$ y

(a) $\mathcal{J}^\epsilon < \mathcal{J}^\mu < \hat{\mathcal{J}} < \mathcal{J}$. Nótese que la primera de las desigualdades no proviene del Lema 5.2 sino de la elección de la constante μ .

(b) $\text{dist}_{(\overline{M(\widehat{\mathcal{J}})}, \widehat{X})}(\widehat{\mathcal{J}}, \mathcal{J}^\mu) > \lambda$.

(c) $\|X - \widehat{X}\| < \mu$ en $M(\widehat{\mathcal{J}})$.

Supongamos ahora que $\mu > 0$ fue escogido suficientemente pequeño para que

$$\widehat{X}(\widehat{\mathcal{J}}) \subset E \setminus \overline{E_{-a}}.$$

Nótese que esta elección es posible debido a (6.1), las Propiedades (a) y (c) y a que $E \setminus \overline{E_{-a}}$ es un conjunto abierto. Como consecuencia, podemos asegurar la existencia de una constante $\nu > 0$ tal que

$$\mathcal{J}^\mu < \widehat{\mathcal{J}}^\nu \tag{6.2}$$

y además

$$\widehat{X}(\overline{M(\widehat{\mathcal{J}})} \setminus M(\widehat{\mathcal{J}}^\nu)) \subset E \setminus \overline{E_{-a}}. \tag{6.3}$$

Nuevamente hemos tenido en cuenta que $E \setminus \overline{E_{-a}}$ es abierto y la continuidad uniforme de \widehat{X} . Ahora, gracias a la Propiedad (b) podemos suponer que ν además verifica

$$\text{dist}_{(\overline{M(\widehat{\mathcal{J}}^\nu)}, \widehat{X})}(\widehat{\mathcal{J}}^\nu, \mathcal{J}^\mu) > \lambda. \tag{6.4}$$

Llegados a este punto, la ecuación (6.3) garantiza que podemos aplicar el Lema 4.1 a los datos

$$X = \widehat{X}, \quad E = E_{-a}, \quad E', \quad \mathcal{J}_0 = \widehat{\mathcal{J}}, \quad \mathcal{J}' = \widehat{\mathcal{J}}^\nu, \quad b_2 = b,$$

y $b_1 > 0$ que será especificado después. Nótese que para poder aplicar dicho lema, suponemos que $b > 0$ es suficientemente pequeño para que E'_{-b} y E_{-a-2b} existan. Si esto no fuese así, simplemente aplicaríamos el lema para $b_2 < b$ suficientemente pequeño.

Por consiguiente, obtenemos un multiciclo $\widetilde{\mathcal{J}}$ y una inmersión minimal y conforme $Y : M(\widetilde{\mathcal{J}}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $Y(p_0) = 0$ y satisfaciendo:

(A) $\widehat{\mathcal{J}}^\nu < \widetilde{\mathcal{J}} < \widehat{\mathcal{J}}$.

(B) $\|Y - \widehat{X}\| < b_1$ en $\overline{M(\widetilde{\mathcal{J}}^\nu)}$.

(C) $Y(\widetilde{\mathcal{J}}) \subset E' \setminus \overline{E'_{-b}}$.

(D) $Y(\overline{M(\widetilde{\mathcal{J}})} \setminus M(\widetilde{\mathcal{J}}^\nu)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus E_{-a-2b}$.

Además, si E es estrictamente convexo, también lo será E_{-a} , luego teniendo en cuenta la Proposición 4.1 que afina el Lema 4.1, concluimos que

(E) En $\overline{M(\widetilde{\mathcal{J}})} \setminus M(\widetilde{\mathcal{J}}^\nu)$, se tiene

$$\|Y - \widehat{X}\| < m(b, E_{-a}, E') \leq \sqrt{\frac{2(\delta^H(E, E') + a + 2b)}{\kappa_1(\partial E)} + (\delta^H(E, E') + a)^2},$$

donde, recordemos, m fue definida en la Proposición 4.1 en la página 86.

Comprobemos que el multiciclo $\tilde{\mathcal{J}}$ y la inmersión $Y : \overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ resuelven el Lema 6.1. En primer lugar, las Propiedades (a) y (A) y la ecuación (6.2) aseguran

$$\mathcal{J}^\epsilon < \mathcal{J}^\mu < \hat{\mathcal{J}}^\nu < \tilde{\mathcal{J}} < \hat{\mathcal{J}} < \mathcal{J}.$$

En particular, tenemos (L6.1.a).

La Propiedad (B) nos dice que Y converge a \hat{X} uniformemente en $\overline{M(\hat{\mathcal{J}}^\nu)}$, cuando b_1 converge a cero. En consecuencia y teniendo en cuenta (6.4), podemos suponer que b_1 fue escogido suficientemente pequeño para que

$$\text{dist}_{(\overline{M(\hat{\mathcal{J}}^\nu)}, Y)}(\hat{\mathcal{J}}^\nu, \mathcal{J}^\mu) > \lambda.$$

Recordemos ahora que $\lambda > 1/\epsilon$ y que $\mathcal{J}^\epsilon < \mathcal{J}^\mu < \hat{\mathcal{J}}^\nu < \tilde{\mathcal{J}}$, luego la anterior desigualdad garantiza la Propiedad (L6.1.b).

La Propiedad (L6.1.c) se sigue directamente de (C).

Para comprobar (L6.1.d) lo primero que haremos es observar que (6.1) y las Propiedades (a) y (c) implican que

$$\hat{X}(\overline{M(\tilde{\mathcal{J}})} \setminus M(\mathcal{J}^\epsilon)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{E_{-a}}.$$

Aquí hemos supuesto que $\mu > 0$ fue elegido suficientemente pequeño. En consecuencia, si b_1 se tomó lo bastante pequeño, la Propiedad (B) garantiza que

$$Y(\overline{M(\hat{\mathcal{J}}^\nu)} \setminus M(\mathcal{J}^\epsilon)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{E_{-a}}.$$

Esta inclusión y la Propiedad (D) demuestran (L6.1.d).

La Propiedad (L6.1.e) se obtiene como consecuencia de (c) y (B) a condición de que μ y b_1 se tomasen suficientemente pequeños para que $\mu + b_1 < \epsilon$.

Finalmente, si E es estrictamente convexo, entonces podemos usar la Propiedad (E). Ésta junto con (c) y (B) implican (L6.1.f), asumiendo que μ y b_1 se escogieron suficientemente pequeños. ■

7

Teoremas de Densidad para Superficies Minimales Completas en \mathbb{R}^3

En este capítulo usaremos los lemas que hemos demostrado en los dos capítulos anteriores para demostrar los teoremas principales de esta parte de la memoria.

A pesar de que todos los teoremas que demostraremos están presentados en términos de superficies de Riemann con borde que son regiones abiertas de superficies de Riemann compactas, esto no supondrá ninguna restricción sobre nuestro trabajo. Nótese que para generalizar al caso de cualquier superficie de Riemann con topología finita y borde analítico, no debemos más que observar que éstas pueden verse como el cierre de una región abierta de una superficie de Riemann compacta [FaKr].

Teniendo en cuenta el párrafo anterior, en este capítulo demostraremos el siguiente

resultado (Teoremas 7.2 y 7.3).

Teorema de Densidad. *Las superficies minimales hiperbólicas, con topología finita y propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 son densas en el espacio de todas las superficies minimales propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 , dotado con la topología de convergencia diferenciable sobre conjuntos compactos.*

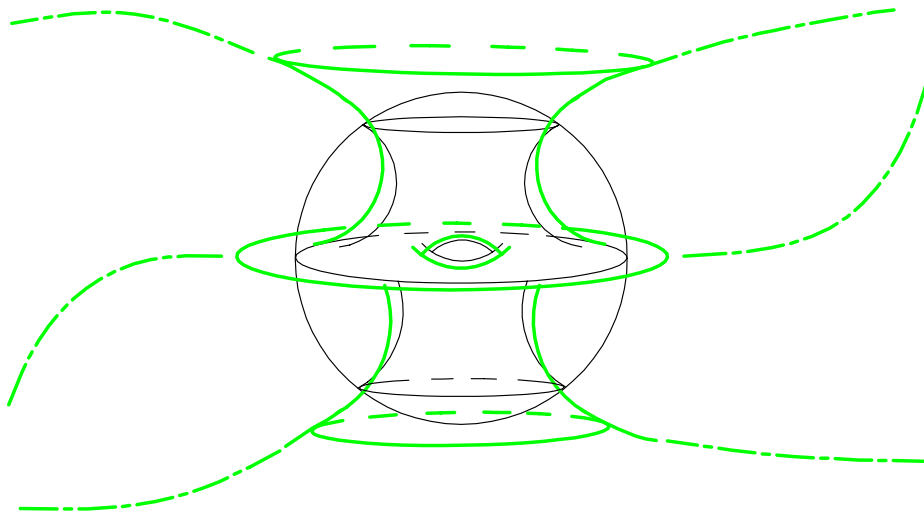


Figura 7.1: Teorema de densidad.

Nótese que las familias más estudiadas de superficies minimales en \mathbb{R}^3 (propiamente embebidas, periódicas, curvatura total finita, tipo finito,...) están incluidas en el enunciado del Teorema de Densidad.

Por otro lado, si nos despreocupamos de la cualidad de ser propia, entonces podemos demostrar este otro resultado (Teorema 7.1).

Teorema. *Las superficies minimales completas (e hiperbólicas) son densas en el espacio de todas las superficies minimales (sin borde) en \mathbb{R}^3 , dotado de la topología de convergencia diferenciable sobre conjuntos compactos.*

En particular, obtendremos el siguiente resultado de existencia (Teorema 7.4).

Teorema. *Para cualquier dominio convexo D en \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable) existe una inmersión minimal completa y propia $\psi : M \rightarrow D$, donde M es una superficie de Riemann abierta y con topología finita arbitraria.*

A lo largo del capítulo usaremos en varias ocasiones la existencia de la sucesión objeto del siguiente resultado. Su demostración es inmediata.

Proposición 7.1. *La sucesión de números reales dada por*

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}e^{1/2}, \quad \alpha_n := e^{-1/2^n}, \quad \text{para cada } n > 1,$$

satisface:

- $0 < \alpha_n < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- La sucesión $\left\{ \prod_{i=1}^n \alpha_i \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $1/2$.

7.1

Complejidad

El resultado que vamos a presentar y demostrar en esta sección muestra la densidad del espacio de superficies minimales completas en el de todas las minimales de \mathbb{R}^3 . En esencia lo que haremos será, fijada una superficie minimal y un trozo compacto de ella, construir una superficie minimal completa que en ese compacto se parece a la superficie original tanto como se desee. Además, lo haremos de forma que la distancia de Hausdorff entre ambas superficies sea tan pequeña como se quiera.

La herramienta principal para la demostración de este resultado será el lema de completitud (Lema 5.2) que probamos en el Capítulo 5. Lo utilizaremos recursivamente para construir una sucesión de inmersiones cuyo límite resuelva el Teorema.

Teorema 7.1. *Sean Γ un multiciclo en M y $\varphi : \overline{M(\Gamma)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme.*

Entonces, para cada $\mu > 0$ existe un dominio M_μ en M con $\overline{M(\Gamma)} \subset M_\mu$ y existe una inmersión minimal y completa $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- (a) $\|\varphi_\mu - \varphi\| < \mu$ en $\overline{M(\Gamma)}$.
- (b) $\delta^H(\varphi(\overline{M(\Gamma)}), \varphi_\mu(\overline{M_\mu})) < \mu$.

Demostración. Para cada natural n contruyamos una familia

$$\chi_n = \{\Gamma_n, \varphi_n, \varepsilon_n, \xi_n\},$$

siendo

- Γ_n un multiciclo en M con $p_0 \in M(\Gamma_n)$.
- $\varphi_n : \overline{M(\Gamma_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme con $\varphi_n(p_0) = 0$.
- $\{\varepsilon_n\}$ y $\{\xi_n\}$ son dos sucesiones decrecientes de números positivos de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \mu$.

Además, construiremos dichas familias de forma que cumplan la siguiente lista de propiedades:

$$(A_n) \quad \Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}} < \Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n} < \Gamma_n^{\xi_n} < \Gamma_n < \Gamma_{n-1}.$$

$$(B_n) \quad \text{dist}_{\left(\overline{M(\Gamma_n^{\xi_n})}, \varphi_n\right)}(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \Gamma_n^{\xi_n}) > 1/\varepsilon_n.$$

$$(C_n) \quad \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| < \varepsilon_n \text{ en } \overline{M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})}.$$

$$(D_n) \quad \delta^H(\varphi_{n-1}(\overline{M(\Gamma_{n-1})}), \varphi_n(\overline{M(\Gamma_n)})) < \varepsilon_n.$$

$$(E_n) \quad ds_{\varphi_n}(p) \geq \alpha_n \cdot ds_{\varphi_{n-1}}(p), \quad \forall p \in \overline{M(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}})}, \text{ siendo } \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ la sucesión descrita en la Proposición 7.1. Recordemos también que estamos denotando por } ds_{\varphi_n} \text{ a la métrica riemanniana inducida por la inmersión } \varphi_n.$$

Explicaremos brevemente la utilidad de estas condiciones. (C_n) aseguran que la sucesión de inmersiones tiene límite. Su dominio de definición nos lo proporcionarán las Propiedades (A_n) . Además, este límite será una inmersión minimal y conforme. La regularidad¹ de dicha inmersión vendrá garantizada por las Propiedades (E_n) . Gracias a (B_n) la inmersión límite será completa y, finalmente, (C_n) y (D_n) nos permitirán comprobar las afirmaciones (a) y (b) del Teorema 7.1.

En consecuencia, el límite de esta sucesión de familias constituirá la prueba de dicho teorema.

Construiremos la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo recursivo. Para definir χ_1 tomamos $0 < \xi_1 < \mu$ suficientemente pequeño para que el multiciclo $\Gamma^{-\xi_1}$ esté bien definido y para que φ pueda ser extendida a $\overline{M(\Gamma^{-\xi_1})}$. Consideramos

$$\chi_1 = \{\Gamma_1 = \Gamma^{-\xi_1}, \varphi_1 = \varphi : \overline{M(\Gamma^{-\xi_1})} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varepsilon_1, \xi_1\},$$

siendo $\varepsilon_1 < \xi_1$ cualquiera. De este modo, es inmediato comprobar que la familia χ_1 está bien definida. Además, ninguna de las Propiedades $(A_1), \dots, (E_1)$ tiene sentido, luego, damos por construida χ_1 .

Supongamos que tenemos construidos los n primeros términos χ_1, \dots, χ_n . Mostremos como construir χ_{n+1} . Tomemos una sucesión $\{\widehat{\varepsilon}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ decreciente, convergente a cero y tal que $\widehat{\varepsilon}_m < \xi_n, \forall m \in \mathbb{N}$. Ahora es el momento de aplicar el Lema 5.2. Para cada natural m , consideremos el multiciclo \mathcal{J}_m y la inmersión minimal conforme $Y_m : \overline{M(\mathcal{J}_m)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se obtienen al aplicar dicho lema a los datos

$$\mathcal{J} = \Gamma_n, \quad X = \varphi_n, \quad \lambda = 1/\widehat{\varepsilon}_m, \quad \mu = \widehat{\varepsilon}_m.$$

¹i.e., la ausencia de puntos de ramificación.

Como consecuencia, tenemos $Y_m(p_0) = 0$ y

- (I) $\Gamma_n^{\hat{\varepsilon}_m} < \mathcal{J}_m < \Gamma_n$.
- (II) $\text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J}_m)}, Y_m)}(\Gamma_n^{\hat{\varepsilon}_m}, \mathcal{J}_m) > 1/\hat{\varepsilon}_m$.
- (III) $\|Y_m - \varphi_n\| < \hat{\varepsilon}_m$ en $M(\mathcal{J}_m)$.
- (IV) $\delta^H(\varphi_n(\overline{M(\Gamma_n)}), Y_m(\overline{M(\mathcal{J}_m)})) < \hat{\varepsilon}_m$.

Gracias a (I) y a que $\hat{\varepsilon}_m < \xi_n$ tenemos $\Gamma_n^{\xi_n} < \mathcal{J}_m$. Además, de (III) concluimos que la sucesión $\{Y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a φ_n en $M(\Gamma_n^{\xi_n})$. En particular, la sucesión de métricas $\{ds_{Y_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a ds_{φ_n} en $M(\Gamma_n^{\xi_n})$. En consecuencia, existe un natural m_0 de manera que

$$ds_{Y_{m_0}} \geq \alpha_{n+1} \cdot ds_{\varphi_n} \quad \text{en } M(\Gamma_n^{\xi_n}). \quad (7.1)$$

Aquí hemos tenido en cuenta que $0 < \alpha_{n+1} < 1$. Definimos

$$\Gamma_{n+1} = \mathcal{J}_{m_0}, \quad \varphi_{n+1} = Y_{m_0}, \quad \varepsilon_{n+1} = \hat{\varepsilon}_{m_0}.$$

Con esta notación, las Propiedades (I), ..., (IV) implican

- (I') $\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}} < \Gamma_{n+1} < \Gamma_n$.
- (II') $\text{dist}_{(\overline{M(\Gamma_{n+1})}, \varphi_{n+1})}(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}}, \Gamma_{n+1}) > 1/\varepsilon_{n+1}$.
- (III') $\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < \varepsilon_{n+1}$ en $M(\Gamma_{n+1})$.
- (IV') $\delta^H(\varphi_n(\overline{M(\Gamma_n)}), \varphi_{n+1}(\overline{M(\Gamma_{n+1})})) < \varepsilon_{n+1}$.

De la primera desigualdad de (I') se deduce que eligiendo ξ_{n+1} suficientemente pequeño, también se tiene

$$\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}} < \Gamma_{n+1}^{\xi_{n+1}} < \Gamma_{n+1}.$$

Finalmente, por ser $\varepsilon_{n+1} < \xi_n$ tenemos

$$\Gamma_n^{\xi_n} < \Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}}.$$

Como consecuencia de (I') y estas dos últimas ecuaciones, con este ξ_{n+1} , la familia χ_{n+1} satisface (A_{n+1}). Además, usando (II') y (A_{n+1}) podemos escoger ξ_{n+1} suficientemente pequeño para que también ocurra (B_{n+1}). Veamos que χ_{n+1} también cumple el resto de propiedades. Trivialmente (III') y (IV') implican (C_{n+1}) y (D_{n+1}), respectivamente. Por último, (E_{n+1}) es consecuencia de (7.1).

De este modo damos por terminado el proceso recurrente de construcción de la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definamos ahora el dominio M_μ donde está definida la inmersión que demuestra el teorema. Tomamos

$$M_\mu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\Gamma_n^{\xi_n}).$$

Nótese que ambas expresiones describen el mismo dominio gracias a las Propiedades (A_n) , $n \in \mathbb{N}$. Usando esas mismas propiedades, observamos que M_μ es una unión creciente de dominios, esto es, una unión de dominios de manera que cada uno está contenido en el siguiente. Además, todos estos dominios tienen el mismo tipo topológico: el de $M(\Gamma)$. En estas condiciones, [Br, Th. 19.1] argumentos topológicos elementales garantizan que M_μ es un dominio y tiene el mismo tipo topológico que $M(\Gamma)$.

El siguiente paso consiste en definir la inmersión límite. Para ello notemos que la sucesión de inmersiones $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre los subconjuntos compactos de M_μ . Esto se debe a las Propiedades (C_n) , $n \in \mathbb{N}$, y a la misma definición de M_μ . Ahora, el Teorema de Harnack [Cn1] asegura que el espacio de funciones holomorfas definidas sobre un abierto de una superficie de Riemann, es completo con la topología uniforme sobre los compactos de dicho abierto. En particular, garantiza que nuestra sucesión de inmersiones converge uniformemente sobre los compactos de M_μ a una aplicación armónica $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Comprobemos que M_μ y φ_μ resuelven el Teorema 7.1.

- $\overline{M(\Gamma)} \subset M_\mu$.

Esta condición es evidente por construcción, nótese que $\Gamma = \Gamma_1^{\xi_1}$.

- φ_μ es una inmersión.

Lo único que debemos probar es que φ_μ no tiene puntos de ramificación. Para hacerloelijamos $p \in M_\mu$ cualquiera y veamos que, en efecto, p no es punto de ramificación de φ_μ . Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $p \in M(\Gamma_{n_0}^{\xi_{n_0}})$ para cada $n \geq n_0$. Observemos que aplicando sucesivamente las Propiedades (E_k) , $k \in \mathbb{N}$, para cada $n > n_0$ tenemos

$$ds_{\varphi_n}(p) \geq \alpha_n ds_{\varphi_{n-1}}(p) \geq \cdots \geq \alpha_n \cdots \alpha_{n_0+1} ds_{\varphi_{n_0}}(p) \geq \alpha_n \cdots \alpha_1 ds_{\varphi_{n_0}}(p).$$

Recordemos en este momento que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1/2$. Luego, tomando límite en la anterior expresión cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos

$$ds_{\varphi_\mu}(p) \geq \frac{1}{2} ds_{\varphi_{n_0}}(p) > 0. \quad (7.2)$$

por tanto, p no es de ramificación de φ_μ como queríamos demostrar.

- φ_μ es minimal y conforme.

La minimalidad es evidente por ser φ_μ una aplicación armónica. Por otro lado, φ_μ es conforme por ser límite de una sucesión de inmersiones conformes, nótese que también hay convergencia de las derivadas parciales.

- φ_μ es completa.

Para comprobarlo bastará con demostrar que la distancia en M_μ con la métrica ds_{φ_μ} de Γ al borde de M_μ es infinito. Para cada natural n , una cota inferior de dicha distancia

viene dada por

$$\text{dist}_{(M_\mu, \varphi_\mu)}(\Gamma, \partial M_\mu) \geq \text{dist}_{(M(\Gamma_n^{\xi_n}), \varphi_\mu)}(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \Gamma_n^{\xi_n}) \geq$$

usando (7.2) y (B_n),

$$\geq \frac{1}{2} \text{dist}_{(M(\Gamma_n^{\xi_n}), \varphi_n)}(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \Gamma_n^{\xi_n}) > \frac{1}{\varepsilon_n}.$$

Por consiguiente, la divergencia de la sucesión $\{1/\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ implica la completitud de φ_μ .

- Propiedad (a): $\|\varphi_\mu - \varphi\| < \mu$ en $\overline{M(\Gamma)}$.

Observese que para cada natural n se tiene $\overline{M(\Gamma)} \subset \overline{M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})}$, luego, sobre $\overline{M(\Gamma)}$ se pueden utilizar todas las Propiedades (C_n). Así, en dicho conjunto tenemos

$$\|\varphi_\mu - \varphi\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \mu,$$

como queríamos demostrar.

- Propiedad (b): $\delta^H(\varphi(\overline{M(\Gamma)}), \overline{\varphi_\mu(M_\mu)}) < \mu$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de las Propiedades (D_n), $n \in \mathbb{N}$, y de la desigualdad triangular para la distancia de Hausdorff.

En definitiva, $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$ demuestra el Teorema 7.1. ■

7.2

Completitud y ser propia

Ahora nos dedicaremos a la construcción de ejemplos propios en diferentes tipos de dominios convexos. Los resultados serán más o menos finos dependiendo de las cualidades de los convexos con los que estemos tratando: convexidad estricta, regularidad y acotación.

7.2.1

Dominios convexos, regulares y acotados

Para el caso de dominios convexos, regulares y acotados tenemos otro Teorema de Densidad. Dada una superficie minimal cualquiera y fijado un trozo compacto de ella que se quede en el interior de un dominio convexo, regular y acotado, entonces podremos construir una superficie minimal completa y propiamente inmersa en dicho dominio de forma que, en el compacto, es tan parecida a la superficie original como queramos.

La técnica de demostración es muy similar a la del resultado anterior por lo que omitiremos parte de los detalles. Nuevamente, construiremos, de modo recursivo, una sucesión de inmersiones cuyo límite prueba el teorema. En este caso, la herramienta que usaremos será el Lema 6.1 demostrado en el capítulo 6. Recordemos que dicho lema era el resultado de compatibilizar los lemas de ser propia y de completitud probados en los capítulos anteriores.

En concreto, demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 7.2. Sean D y D' dos dominios regulares, convexos, acotados y satisfaciendo $0 \in D \subset \overline{D} \subset D'$. Sean Γ un multiciclo en M y $\varphi : \overline{M(\Gamma)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme. Consideremos p_0 un punto en $M(\Gamma)$ y d una constante positiva y asumamos que $\varphi(p_0) = 0$ y que $\varphi(\Gamma) \subset D \setminus \overline{D}_{-d}$. Entonces, para cada $\mu > 0$ existe un dominio M_μ en M con $\overline{M(\Gamma)} \subset M_\mu$ y existe una inmersión minimal completa y propia $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow D'$ tal que

- (a) $\|\varphi_\mu - \varphi\| < \mu$ en $\overline{M(\Gamma)}$.
 (b) $\varphi_\mu(M_\mu \setminus M(\Gamma)) \subset D' \setminus \overline{D}_{-2d-\mu}$.

Demostración. Consideremos $\tilde{\nu} = \sum_{k=2}^{\infty} \nu/k^2$, siendo $\nu > 0$ una constante suficientemente pequeña para que $D'_{-\tilde{\nu}}$ esté bien definido y $\overline{D} \subset D'_{-\tilde{\nu}}$.

Apoyándonos en la constante ν , definimos la siguiente sucesión $\{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de dominios convexos, regulares y acotados:

$$E^1 := D, \quad E^n := D'_{-\sum_{k=2}^{\infty} \nu/k^2}, \quad n \geq 2.$$

Nótese que $0 \in E^n \subset \overline{E^n} \subset E^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Consideremos además una sucesión decreciente de reales positivos $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$b_1 = d, \quad b_n < \min \left\{ \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^3}(\partial E^n, \partial E^{n+1})}{2}, \frac{d}{2} \right\}, \quad n \geq 2.$$

El siguiente paso de la demostración es usar el Lema 6.1 para construir una sucesión de familias

$$\chi_n = \{\Gamma_n, \varphi_n, \varepsilon_n, \xi_n\},$$

siendo

- Γ_n un multiciclo en M con $p_0 \in M(\Gamma_n)$.
- $\varphi_n : \overline{M(\Gamma_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal conforme con $\varphi_n(p_0) = 0$.
- $\{\varepsilon_n\}$ y $\{\xi_n\}$ son dos sucesiones decrecientes de números positivos de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k < \mu$.

Además, construiremos dicha sucesión de familias para que se cumpla la siguiente lista de propiedades:

- (A_n) $\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}} < \Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n} < \Gamma_n^{\xi_n} < \Gamma_n < \Gamma_{n-1}$.
- (B_n) $\text{dist}_{(\overline{M(\Gamma_n^{\xi_n})}, \varphi_n)}(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \Gamma_n^{\xi_n}) > 1/\varepsilon_n$.
- (C_n) $\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| < \varepsilon_n$ en $\overline{M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})}$.
- (D_n) $ds_{\varphi_n}(p) \geq \alpha_n \cdot ds_{\varphi_{n-1}}(p)$, $\forall p \in \overline{M(\Gamma_{n-1}^{\xi_{n-1}})}$, siendo $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión descrita en la Proposición 7.1. Recordemos también que estamos denotando por ds_{φ_n} a la métrica riemanniana inducida por la inmersión φ_n .
- (E_n) $\varphi_n(p) \in E^n \setminus \overline{(E^n)_{-b_n}}$, para todo p en Γ_n .
- (F_n) $\varphi_n(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{(E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n}}$, para todo $p \in \overline{M(\Gamma_n)} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})$.

Como ya anticipamos, debido a la similitud con los razonamientos en la demostración del anterior teorema, omitiremos parte de los detalles. En este caso, pondremos mayor atención a las propiedades de esta sucesión de familias que no estaban presentes en la correspondiente para el Teorema 7.1. Esto es, las Propiedades (E_n) y (F_n). La utilidad de estas dos propiedades será demostrar la condición (b) del Teorema 7.2 y que la inmersión φ_μ es propia en D' .

Igual que antes, la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será construida de modo recursivo. Para definir χ_1 en este caso tomamos $0 < \xi_1 < \mu$ suficientemente pequeño para que, como antes, $\Gamma^{-\xi_1}$ esté bien definido, φ pueda ser extendida a $\overline{M(\Gamma^{-\xi_1})}$ y, además,

$$\varphi\left(\overline{M(\Gamma^{-\xi_1})} \setminus M(\Gamma)\right) \subset D \setminus \overline{D_{-d}}. \quad (7.3)$$

Nótese que esta elección es posible ya que, por hipótesis del teorema, $\varphi(\Gamma) \subset D \setminus \overline{D_{-d}}$, que es un conjunto abierto. Definimos

$$\chi_1 = \{\Gamma_1 = \Gamma^{-\xi_1}, \varphi_1 = \varphi : \overline{M(\Gamma_1)} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varepsilon_1, \xi_1\},$$

donde $\varepsilon_1 < \xi_1$ es cualquiera. De este modo la familia χ_1 está bien definida y la ecuación (7.3) garantiza la Propiedad (E₁). El resto de propiedades no tienen sentido para $n = 1$. Así, damos por concluida la definición de la primera de las familias.

Supongamos que tenemos construidas χ_1, \dots, χ_n . Mostremos como construir χ_{n+1} . La Propiedad (E_n) asegura que $\varphi_n(\Gamma_n) \subset E^n \setminus \overline{(E^n)_{-b_n}}$. Entonces, es un cálculo directo comprobar que existe una constante $\aleph > 0$ tal que el Lema 6.1 puede ser aplicado para los datos

$$\mathcal{J} = \Gamma, \quad X = \varphi_n, \quad E = E^n, \quad E' = E^{n+1}, \quad a = b_n, \quad \epsilon,$$

siendo $0 < \epsilon < \aleph$ cualquiera. Aplicando el Lema 6.1 del mismo modo que lo hicimos con el Lema 5.2 en la demostración anterior, concluimos la construcción de la familia χ_{n+1} . En este caso, las Propiedades (E_{n+1}) y (F_{n+1}) son consecuencia de las tesis (L6.1.c) y (L6.1.d) del Lema 6.1, respectivamente.

Una vez construida la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ consideremos $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inmersión límite de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, siendo, como antes, $M_\mu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\Gamma_n^{\xi_n})$.

Siguiendo los argumentos de la prueba del Teorema 7.1 se demuestra que $\overline{M(\Gamma)} \subset M_\mu$ y que φ_μ es una inmersión minimal, completa y con $\|\varphi_\mu - \varphi\| < \mu$ en $\overline{M(\Gamma)}$. Por tanto, para concluir la demostración del Teorema 7.2 solo nos queda comprobar que φ_μ es propia en D' y la tesis (b) de dicho teorema.

- $\varphi_\mu : M_\mu \rightarrow D'$ es propia.

Antes que nada, comprobemos que $\varphi_\mu(M_\mu) \subset D'$. Dado $p \in M_\mu$ existe un natural n_0 de manera que $p \in M(\Gamma_n^{\xi_n})$, $\forall n \geq n_0$. Así, las Propiedades (E_n) y la propiedad de la envolvente convexa garantizan que $\varphi_n(p) \in E^n$, $\forall n \geq n_0$. Teniendo en cuenta la definición de los dominios E^n concluimos que $\varphi_\mu(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(p) \in D'$.

Para comprobar que φ_μ es propia en D' lo que haremos será tomar K un subconjunto compacto cualquiera de D' y demostrar que $\varphi_\mu^{-1}(K)$ es un compacto de M_μ . Consideremos n_0 un natural de manera que

$$K \subset (E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n-\sum_{k>n} \varepsilon_k}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (7.4)$$

La existencia de tal n_0 se debe a que estos conjuntos forman una sucesión creciente que recubre a D' . Ahora, la Propiedad (F_n) garantiza que

$$\varphi_n(\overline{M(\Gamma_n)} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n}.$$

En particular,

$$\varphi_n(\overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n}. \quad (7.5)$$

Por otro lado, de las Propiedades (A_k) deducimos que $\overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})} \subset \overline{M(\Gamma_k^{\varepsilon_{k+1}})}$, $\forall k > n$, luego, en el conjunto $\overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})}$ podemos aplicar todas las Propiedades (B_k), $k > n$. Al hacerlo y teniendo en cuenta (7.5) concluimos

$$\varphi_\mu(\overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n-\sum_{k>n} \varepsilon_k}. \quad (7.6)$$

Usando esta última ecuación y (7.4) obtenemos

$$\varphi_\mu^{-1}(K) \cap (\overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})) = \emptyset, \quad \forall n \geq n_0.$$

Esto implica que $\varphi_\mu^{-1}(K) \subset M(\Gamma_{n_0-1}^{\varepsilon_{n_0}})$, por tanto, $\varphi_\mu^{-1}(K)$ es un compacto de M_μ .

- Propiedad (b): $\varphi_\mu(M_\mu \setminus M(\Gamma)) \subset D' \setminus \overline{D_{-2d-\mu}}$.

Consideremos $p \in M_\mu \setminus M(\Gamma)$. Por ser $\varphi_\mu(M_\mu) \subset D'$, terminaremos probando que $\varphi_\mu(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_{-2d-\mu}}$. Para hacerlo distinguiremos dos casos según la posición del punto p .

- Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \overline{M(\Gamma_n^{\varepsilon_{n+1}})} \setminus M(\Gamma_{n-1}^{\varepsilon_n})$. Entonces (7.6) implica que $\varphi_\mu(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_{-2d-\mu}}$. Recordemos que $b_1 = d$, $b_k < d/2$, $\forall k > 1$, $\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k < \mu$, y que $D \subset E^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Asumamos que $p \in \overline{M(\Gamma_1^{\varepsilon_2})} \setminus M(\Gamma)$. Nótese que $\Gamma_1^{\varepsilon_2} < \Gamma_1 = \Gamma^{-\xi_1}$, luego, $p \in \overline{M(\Gamma_1^{\varepsilon_2})} \setminus M(\Gamma) \subset \overline{M(\Gamma^{-\xi_1})} \setminus M(\Gamma)$. Por tanto, (7.3) asegura que

$$\varphi(p) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_{-d}}.$$

Aplicando ahora las Propiedades (B_k) , $k > 1$, deducimos que

$$\varphi_\mu(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_{-d-\sum_{k>1} \varepsilon_k}} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_{-2d-\mu}}.$$

Esto termina la demostración del Teorema 7.2. ■

7.2.2

Dominios estrictamente convexos, regulares y acotados

El siguiente teorema representa un refinamiento del Teorema 7.2 para el caso de dominios estrictamente convexos, regulares y acotados. La mejora consiste en que, en este caso, la superficie que construimos se parece a la original en todo su dominio de definición mientras que en el resultado anterior solo podíamos demostrar la similitud en un trozo compacto de dicho dominio.

Para demostrar el Teorema 7.3 seguiremos los argumentos de la prueba del resultado precedente y, además, tendremos en cuenta la tesis (L6.1.f) del Lema 6.1.

Teorema 7.3. *Sea C un dominio estrictamente convexo, regular y acotado de \mathbb{R}^3 . Consideremos un multiciclo Γ en la superficie de Riemann M y una inmersión minimal y conforme $\varphi : \overline{M(\Gamma)} \rightarrow \overline{C}$ con $\varphi(\Gamma) \subset \partial C$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un subdominio M_ε con el mismo tipo topológico que $M(\Gamma)$ y con $\overline{M(\Gamma^\varepsilon)} \subset M_\varepsilon \subset \overline{M_\varepsilon} \subset M(\Gamma)$, y existe una inmersión minimal completa, conforme y propia $\varphi_\varepsilon : M_\varepsilon \rightarrow C$ de manera que*

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\| < \varepsilon \quad \text{en } M_\varepsilon.$$

Demostración. Consideremos $t_0 > 0$ una constante suficientemente pequeña para que, para cada $t \in]-t_0, 0[$, tengamos

- C_t es un dominio estrictamente convexo bien definido.
- La familia de curvas $\Gamma_t := \varphi^{-1}((\partial C_t) \cap \varphi(M(\Gamma)))$ es un multiciclo en M y $\Gamma^\varepsilon < \Gamma_t$.

Seguidamente, tomemos otra constante positiva c_1 (que será fijada más adelante) tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1^2}{k^4} < \min\{t_0, \varepsilon\}.$$

Ahora, para cada natural n , definimos la constante

$$t_n := \sum_{k \geq n} \frac{c_1^2}{k^4}$$

y el dominio estrictamente convexo, regular y acotado

$$E^n := C_{-t_n}.$$

Por último, consideramos una sucesión decreciente de reales positivos $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, siendo

$$b_n < \frac{c_1^2}{n^4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.7)$$

Llegados a este punto, aplicaremos el Lema 6.1 para construir, para cada $n \in \mathbb{N}$, una familia $\chi_n = \{\mathcal{J}_n, X_n, \epsilon_n, \xi_n\}$, siendo

- \mathcal{J}_n un multicyclo en M .
- $X_n : \overline{M(\mathcal{J}_n)} \rightarrow C$ una inmersión minimal conforme.
- $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales positivos tales que

$$\epsilon_n < \xi_n < \frac{c_1}{n^2}. \quad (7.8)$$

Además, la sucesión de familias $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será construida de forma que ocurra la siguiente lista de propiedades:

- (A_n) $\mathcal{J}_{n-1}^{\xi_{n-1}} < \mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n} < \mathcal{J}_n^{\xi_n} < \mathcal{J}_n < \mathcal{J}_{n-1}$.
- (B_n) $\text{dist}_{\left(\overline{M(\mathcal{J}_n^{\xi_n}), X_n}\right)}(\mathcal{J}_{n-1}^{\xi_{n-1}}, \mathcal{J}_n^{\xi_n}) > 1/\epsilon_n$.
- (C_n) $\|X_n - X_{n-1}\| < \epsilon_n$ en $\overline{M(\mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n})}$.
- (D_n) $ds_{X_n}(p) \geq \alpha_n \cdot ds_{X_{n-1}}(p)$, $\forall p \in \overline{M(\mathcal{J}_{n-1}^{\xi_{n-1}})}$, siendo $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión mostrada en la Proposición 7.1.
- (E_n) $X_n(p) \in E^n \setminus \overline{(E^n)_{-b_n}}$, para todo p en \mathcal{J}_n .
- (F_n) $X_n(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus (E^{n-1})_{-b_{n-1}-2b_n}$, para todo $p \in \overline{M(\mathcal{J}_n)} \setminus M(\mathcal{J}_{n-1}^{\epsilon_n})$.
- (G_n) $\|X_n - X_{n-1}\| < m(b_{n-1}, b_n, \epsilon_n, E^{n-1}, E^n)$ en $M(\mathcal{J}_n)$, siendo la aplicación m la descrita en el enunciado del Lema 6.1, página 114.

La construcción de la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se hace de forma idéntica a como se hizo en la demostración del Teorema 7.2. Las Propiedades (G_n) son consecuencia del uso sucesivo de la tesis (L6.1.f) en el Lema 6.1. Nótese que dicha tesis puede ser utilizada por ser los dominios E^n estrictamente convexos, regulares y acotados. Para definir χ_1 , tomamos $X_1 = \varphi$, $\mathcal{J}_1 = \Gamma_{t_1}$ y ϵ_1 suficientemente pequeño. Además, elegimos ξ_1 para que $\Gamma^\epsilon < \mathcal{J}_1^{\xi_1}$.

Argumentando como en el Teorema 7.2, encontramos un dominio

$$M_\epsilon := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\mathcal{J}_n^{\epsilon_{n+1}}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\mathcal{J}_n^{\xi_n}),$$

y una inmersión minimal completa, conforme y propia $\varphi_\epsilon : M_\epsilon \rightarrow C$ satisfaciendo

$$\|\varphi_\epsilon - \varphi\| < \epsilon \quad \text{en } \overline{M(\Gamma^\epsilon)}.$$

En consecuencia, terminaremos la demostración probando que $\|\varphi - \varphi_\epsilon\| < \epsilon$ en M_ϵ . Para hacerlo, notemos que

$$\delta^H(E^{n-1}, E^n) = \frac{c_1^2}{n^4}.$$

Por otro lado, la convexidad estricta de C implica que

$$\kappa_1(\partial E^{n-1}) > \kappa_1(\partial C), \quad \forall n \geq 2.$$

Así, estas dos últimas ecuaciones y las desigualdades (7.7) y (7.8) garantizan

$$\mathfrak{m}(b_n, b_{n+1}, \epsilon_{n+1}, E^n, E^{n+1}) < \frac{c_1}{n^2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{c_1^2}{n^4} + \frac{2}{\kappa_1(\partial C)}} \right) < c_1 \cdot \frac{\text{cte}}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

siendo cte una constante que solo depende de C y de ϵ . Por tanto, podemos suponer que c_1 se eligió suficientemente pequeña para que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathfrak{m}(b_{n-1}, b_n, \epsilon_n, E^{n-1}, E^n) < \epsilon.$$

Esta última desigualdad y las Propiedades (G_n) , $n \in \mathbb{N}$, prueban que $\|\varphi - \varphi_\epsilon\| < \epsilon$ en M_ϵ . Con esto damos por demostrado el Teorema 7.3. ■

7.2.3

Dominios convexos

Finalmente, demostramos el teorema análogo a los anteriores para el caso de un dominio convexo arbitrario (no necesariamente acotado ni diferenciable). Este resultado se obtendrá como corolario del Teorema 7.2. La técnica de demostración es similar a las anteriores.

Teorema 7.4. *Sea D' un dominio convexo en \mathbb{R}^3 (no necesariamente acotado ni diferenciable). Consideremos \mathcal{J} un multicyclo en M y $\varphi : \overline{M(\mathcal{J})} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y conforme satisfaciendo*

$$\varphi(\mathcal{J}) \subset D \setminus \overline{D_{-d}}, \quad (7.9)$$

siendo d una constante positiva y D un dominio convexo, regular y acotado con $\overline{D} \subset D'$.

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un subdominio M_ϵ con $\overline{M(\mathcal{J})} \subset M_\epsilon \subset \overline{M_\epsilon} \subset M(\mathcal{J}^{-\epsilon})$, y existe una inmersión minimal completa, conforme y propia $\varphi_\epsilon : M_\epsilon \rightarrow D'$ cumpliendo

(a) $\|\varphi_\epsilon - \varphi\| < \epsilon$ en $\overline{M(\mathcal{J})}$.

(b) $\varphi_\epsilon(M_\epsilon \setminus M(\mathcal{J})) \subset \mathbb{R}^3 \setminus D_{-2d-\epsilon}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in D$ y $\varphi(p_0) = 0$, para cierto $p_0 \in M(\mathcal{J})$. Para cada natural n consideramos el dominio convexo y acotado

$$V^n = [(1 - 1/n) \cdot D'] \cap \mathbb{B}(0, n),$$

donde $\mathbb{B}(0, n) \subset \mathbb{R}^3$ es la bola euclídea centrada en 0 y de radio n y

$$[(1 - 1/n) \cdot D'] = \{(1 - 1/n) \cdot x \mid x \in D'\}.$$

Ahora, el Teorema de Minkowski (Teorema 19, página 24) garantiza, para cada natural n , la existencia de un dominio convexo, acotado y regular W^n en \mathbb{R}^3 de manera que

$$\overline{V^n} \subset W^n \subset \overline{W^n} \subset V^{n+1}.$$

Nótese que $\{W^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión expansiva de dominios convexos, regulares y acotados cuyo límite es D' . En consecuencia, existe un natural k tal que $\overline{D} \subset W^m$ para cada $m \geq k$. Teniendo en cuenta todos estos argumentos, definimos la siguiente sucesión de dominios abiertos y convexos:

$$E^1 := D, \quad E^n := W^{n+k-2}, \quad n \geq 2.$$

Siguiendo los argumentos de las demostraciones anteriores, construimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una familia

$$\chi_n = (\mathcal{J}_n, \varphi_n : \overline{M(\mathcal{J}_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varepsilon_n, d_n),$$

donde

- \mathcal{J}_n es un multiciclo en M .
- φ_n es una inmersión minimal y conforme.
- $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones decrecientes a cero de números reales positivos. Tomaremos $\varepsilon_n < \varepsilon/n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De este modo, tendremos que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$.

El límite de la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nos deparará la inmersión que prueba el teorema. Para que esto ocurra, hemos de garantizar que la familia χ_n satisface la siguiente lista de propiedades.

(A_n) $\mathcal{J}_{n-1} < \mathcal{J}_n$.

(B_n) $\text{dist}_{(\overline{M(\mathcal{J}_n)}, \varphi_n)}(p_0, \mathcal{J}_n) > n - 1$.

(C_n) $\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| < \varepsilon_n$ en $\overline{M(\mathcal{J}_{n-1})}$.

(D_n) $ds_{\varphi_n}(p) \geq \alpha_n \cdot ds_{\varphi_{n-1}}(p)$, $\forall p \in \overline{M(\mathcal{J}_{n-1})}$, siendo $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión descrita en la Proposición 7.1.

(E_n) $\varphi_n(\mathcal{J}_n) \subset E^n \setminus \overline{(E^n)_{-d_n}}$.

(F_n) $\varphi_n(\overline{M(\mathcal{J}_n)} \setminus \overline{M(\mathcal{J}_{n-1})}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{(E^{n-1})_{-2d_{n-1} - \varepsilon_n}}$.

Una vez más, la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ será definida mediante un proceso inductivo. Para el primer elemento elegimos

$$\chi_1 = (\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}, \varphi_1 = \varphi, \varepsilon_1, d_1 = d),$$

siendo $\varepsilon_1 < \varepsilon$ cualquiera. Las únicas condiciones que tienen sentido para $n = 1$ son (B_1) , que ocurre trivialmente, y (E_1) , que se debe a la hipótesis (7.9) en el enunciado del teorema.

Asumamos ahora que ya hemos definido χ_1, \dots, χ_n y mostremos como construir χ_{n+1} . Apliquemos el Teorema 7.2 a los datos

$$D = E^n, \quad D' = E^{n+1}, \quad \varphi = \varphi_n : \overline{M(\mathcal{J}_n)} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad d = d_n, \quad \mu = \varepsilon_{n+1},$$

donde $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon/(n+1)^2$ será especificado luego. Así, obtenemos un dominio $M_{\varepsilon_{n+1}}$ en M , con $\overline{M(\mathcal{J}_n)} \subset M_{\varepsilon_{n+1}}$, y una inmersión minimal, completa y propia $\varphi_{n+1} : M_{\varepsilon_{n+1}} \rightarrow E^{n+1}$ satisfaciendo

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < \varepsilon_{n+1} \text{ en } \overline{M(\mathcal{J}_n)}. \quad (7.10)$$

$$\varphi_{n+1}(M_{\varepsilon_{n+1}} \setminus M(\mathcal{J}_n)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (E^n)_{-2d_n - \varepsilon_{n+1}}. \quad (7.11)$$

Supongamos que ε_{n+1} fue tomado suficientemente pequeño para que (7.10) implique (D_{n+1}) . Como siempre, esto es posible gracias a que φ_{n+1} converge uniformemente en $\overline{M(\mathcal{J}_n)}$ a φ_n cuando ε_{n+1} tiende a cero. Ahora, φ_{n+1} es completa, luego, existe un multiciclo \mathcal{J}_{n+1} en $M_{\varepsilon_{n+1}}$ satisfaciendo (A_{n+1}) y (B_{n+1}) . Además, φ_{n+1} es propia en E^{n+1} , por tanto, podemos asumir que dicho multiciclo también verifica (E_{n+1}) .

Con estas definiciones, la familia $\chi_{n+1} = (\mathcal{J}_{n+1}, \varphi_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, d_{n+1})$ satisface todas las condiciones excepto (C_{n+1}) y (F_{n+1}) , que son consecuencia de (7.10) y (7.11), respectivamente. Con esto damos por concluida la construcción de la sucesión $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Llegados a este punto definimos $M_\varepsilon := \cup_{n=1}^{\infty} M(\mathcal{J}_n)$ y $\varphi_\varepsilon : M_\varepsilon \rightarrow D'$ como el límite uniforme de la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Siguiendo razonamientos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 7.2, es fácil comprobar que φ_ε es la inmersión minimal que prueba el Teorema 7.4. ■

8

Una Superficie Minimal Completa y Propia en \mathbb{R}^3 con una Cantidad no Numerable de Finales

Una de las aplicaciones más interesantes de los resultados exhibidos en el capítulo anterior es la construcción de los primeros ejemplos de superficies minimales, propiamente inmersas en \mathbb{R}^3 (luego completas) y con una cantidad no numerable de finales. La inmersión que construiremos estará definida sobre un dominio acotado de \mathbb{C} cuyo conjunto de finales contiene a un conjunto de Cantor. Nos gustaría resaltar que la técnica que vamos a utilizar también puede ser aplicada para la construcción de ejemplos de superficies minimales, completas, propias en \mathbb{R}^3 , con género k , $k \in \mathbb{N}$, y con una cantidad de finales no numerable. Por simplicidad, en esta memoria mostraremos solamente

la construcción para el caso de género cero.

Una vez más, la propiedad de ser embebida crea una dicotomía en la teoría global de superficies minimales. Es importante notar que una superficie minimal, completa, propia en \mathbb{R}^3 y embebida tiene que tener una cantidad numerable de finales [CoKuMeR].

Nuestra construcción de una superficie minimal con una cantidad no numerable de finales consiste en modificar, de modo recurrente en una cantidad numerable de pasos, una superficie minimal en \mathbb{R}^3 dada. En cada etapa de este procedimiento añadimos dos finales nuevos en un entorno de cada final de la superficie anterior. El modo de añadir

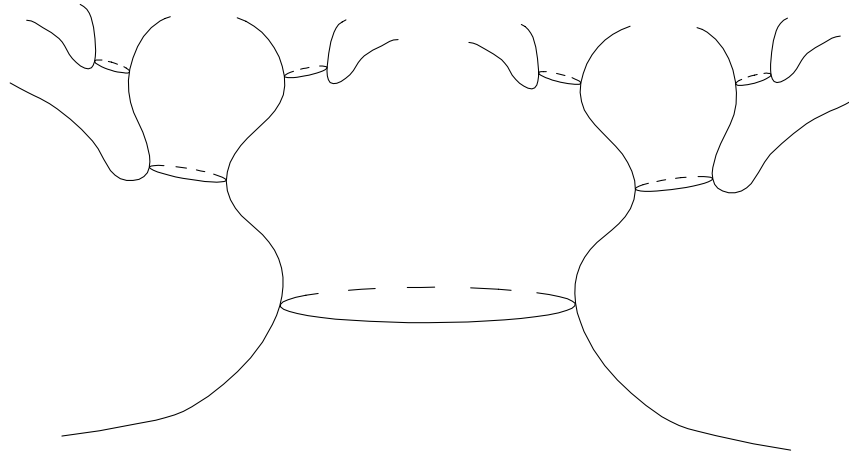


Figura 8.1: La construcción de nuestro ejemplo consiste en modificar una superficie minimal en \mathbb{R}^3 dada, añadiéndolo finales. En cada paso de este procedimiento, se añaden dos nuevos finales en un entorno de cada final de la superficie anterior.

finales es quitar discos al dominio de definición y aproximar lo que queda de superficie por una propia en \mathbb{R}^3 . Para hacerlo nos valdremos del Teorema de Densidad demostrado en el capítulo anterior (Teorema 7.4). Además, siguiendo razonamientos similares a los usados en las demostraciones de los teoremas del Capítulo 7, haremos la construcción de manera que obtengamos una inmersión límite. Dicha inmersión será la que pruebe el resultado.

Teorema 8.1. Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y existe una inmersión minimal, completa y propia $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene una cantidad no numerable de finales.

8.1

Demostración del Teorema 8.1

Antes que nada, fijemos algo de notación. Dados $p \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, denotaremos $\mathbb{D}(p, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - p| < r\}$. Como es habitual, escribiremos \mathbb{D} en lugar de $\mathbb{D}(0, 1)$. Por otro lado, dada α una curva de Jordan en \mathbb{C} , denotaremos por $I(\alpha)$ a la componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \alpha$.

La inmersión que necesitamos será obtenida como límite de una sucesión de inmersiones minimales, completas y propias en \mathbb{R}^3 , definidas sobre subdominios del plano complejo. Para garantizar la existencia de dicha inmersión, construiremos, $\forall n \in \mathbb{N}$, una familia

$$\chi_n = (\Gamma_n, M_n, X_n, d_n, \epsilon_n, r_n),$$

siendo:

- (a) $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones decrecientes a cero de números reales positivos. Además, ocurrirá

$$\sum_{i=n}^{\infty} \epsilon_i < r_n.$$

- (b) $\Gamma_n = \{\beta_n\} \cup \{\gamma_n(k_1, \dots, k_j) \mid k_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq n\} \subset \mathbb{C}$ una familia de curvas de Jordan de manera que:

(b.1) $\beta_n \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$, y $\overline{I(\beta_{n-1})} \subset I(\beta_n)$.

(b.2) $\gamma_n(k_1, \dots, k_j) \subset I(\beta_n)$ y satisfacen las propiedades siguientes:

(b.2.1) Cuando $j \neq n$, entonces $\overline{\gamma_n(k_1, \dots, k_j)}$ es un ciclo en la clase de homología de $\overline{\gamma_{n-1}(k_1, \dots, k_j)}$ y $\overline{I(\gamma_n(k_1, \dots, k_j))} \subset I(\overline{\gamma_{n-1}(k_1, \dots, k_j)})$. Nótese que $\overline{\gamma_{n-1}(k_1, \dots, k_j)}$ está bien definido justamente por ser $j < n$.

(b.2.2) $\gamma_n(k_1, \dots, k_n) = \partial \mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_n), r_n)$, donde

$$c(k_1, \dots, k_n) = c(k_1, \dots, k_{n-1}) + (-1)^{k_n} \epsilon(n) \rho(k_1, \dots, k_n),$$

siendo $\epsilon(n) = i$ si n es impar, $\epsilon(n) = 1$ si n es par, y $\rho(k_1, \dots, k_n)$ números reales positivos suficientemente pequeños para que ocurra

$$\overline{\mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_n), r_n)} \subset \mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_{n-1}), r_{n-1}) \setminus \overline{I(\gamma_n(k_1, \dots, k_{n-1}))}.$$

Equivalentemente,

$$\overline{I(\gamma_n(k_1, \dots, k_n))} \subset I(\overline{\gamma_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-1})}) \setminus \overline{I(\gamma_n(k_1, \dots, k_{n-1}))}. \quad (8.1)$$

- (c) M_n es un dominio en \mathbb{C} , topológicamente equivalente a $M(\Gamma_n)$ y tal que $\overline{M(\Gamma_n)} \subset M_n \subset M(\Gamma_n^{-\epsilon_n})$.

- (d) $X_n : M_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión minimal, conforme, completa y propia.

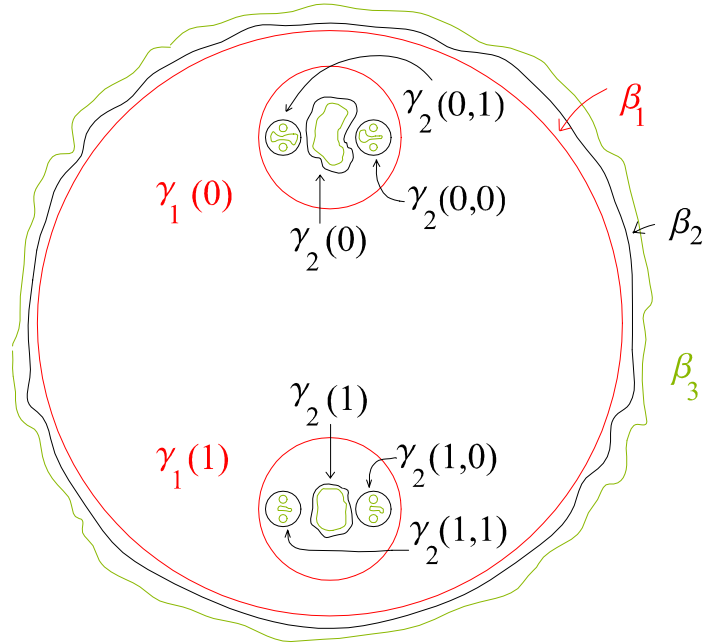


Figura 8.2: Los multicyclos Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 .

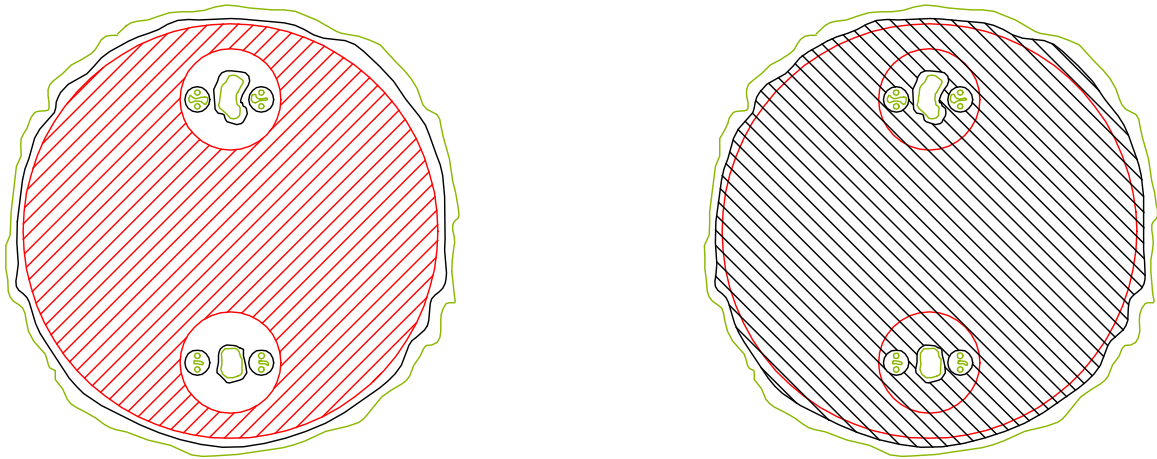


Figura 8.3: Los dominios $M(\Gamma_1)$ y $M(\Gamma_2)$.

Observemos que Γ_n es un multicyclo en $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con exactamente $\sum_{k=0}^n 2^k$ ciclos. Además, el disco $\text{Int}(\beta_n)$ coincide con $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\text{I}(\beta_n)}$ y $\text{Int}(\gamma_n(k_1, \dots, k_j)) = \text{I}(\gamma_n(k_1, \dots, k_j))$. Nótese también que $\overline{M(\Gamma_{n-1})} \subset M(\Gamma_n)$.

Por comodidad, de aquí en adelante dejaremos de escribir $k_i \in \{0, 1\}$ cuando hagamos

referencia a la familia de curvas $\{\gamma_n(k_1, \dots, k_j) \mid k_i \in \{0, 1\}\}$.

De esta descripción concluimos que la inmersión X_n tiene $\sum_{k=0}^n 2^k$ finales. Además, $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ de ellos están asociados a los finales de la inmersión anterior, X_{n-1} , mientras que los 2^n restantes son nuevos en cierto sentido. Éstos se corresponden con los ciclos $\gamma_n(k_1, \dots, k_n)$ y están emplazados, estratégicamente, cada dos de ellos en un entorno de uno de los finales asociados a los ciclos $\gamma_n(k_1, \dots, k_{n-1})$. Esta distribución de los finales será fundamental a la hora del recuento de finales de la inmersión límite.

Veamos que la sucesión de familias $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puede ser construida de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

(A_n) $\|X_n - X_{n-1}\| < \epsilon_n$ en $M(\Gamma_n)$.

(B_n) $X_n(M_n \setminus M(\Gamma_n)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus B(n - 2d_n - \epsilon_n)$, siendo $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < r\}$.

(C_n) $X_n(\Gamma_n) \subset B(n + \epsilon_n) \setminus \overline{B(n - d_n - \epsilon_n)}$.

(D_n) $\lambda_{X_n} \geq \alpha_n \cdot \lambda_{X_{n-1}}$ en $M(\Gamma_n)$, donde λ_{X_n} es el coeficiente conforme de la métrica riemanniana inducida por la inmersión X_n , esto es, $ds_{X_n} = \lambda_{X_n} \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$. Además, $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión descrita en la Proposición 7.1 del capítulo anterior.

Mostremos primero el primer término de la sucesión: la familia χ_1 . Nótese que para esta familia carecen de sentido las Propiedades (A₁) y (D₁). Consideremos $X : \mathbb{D} \rightarrow B(0, 1)$ la inmersión dada por la inclusión. Tomemos también $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones decrecientes a cero de números reales positivos, de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < 1/32$. Finalmente, definimos β_1 como el círculo centrado en 0 y de radio $1 - 1/32$, y $\gamma_1(0)$ y $\gamma_1(1)$ como los círculos de radio $r_1 = 1/16$ y centros $c(0) = 7i/8$ y $c(1) = -7i/8$, respectivamente.

Ahora, comprobemos que estamos en disposición de aplicar el Teorema 7.4 a los datos:

$$D' = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{J} = \Gamma_1 = \{\beta_1\} \cup \{\gamma_1(0), \gamma_1(1)\}, \quad \varphi = X,$$

$$d = d_1 = \frac{1}{4}, \quad D = B(1), \quad \varepsilon = \epsilon_1.$$

Para poder usar dicho resultado, se ha de satisfacer (7.9) para estos datos, esto es, $\Gamma_1 \subset B(1) \setminus \overline{B(3/4)}$. Esta inclusión ocurre trivialmente por las definiciones.

Al aplicar el Teorema 7.4 a estos datos, obtenemos

- M_1 un dominio con $\overline{M(\Gamma_1)} \subset M_1 \subset \overline{M_1} \subset M(\Gamma_1^{-\epsilon_1})$.
- $X_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal completa, conforme y propia, cumpliendo
 - $X_1(M_1 \setminus M(\Gamma_1)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus B(\frac{1}{2} - \epsilon_1)$. Esto es exactamente (B₁).
 - $\|X_1 - X\| < \epsilon_1$ en $\overline{M(\Gamma_1)}$.

Ahora, teniendo en cuenta esta última propiedad y el hecho de que $X(\Gamma_1) = \Gamma_1 \subset B(1) \setminus \overline{B(3/4)}$, concluimos la Propiedad (C₁). Así, damos por terminada la construcción de la familia χ_1 .

Supongamos que hemos construido las familias $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ cumpliendo las correspondientes definiciones y propiedades. Construyamos χ_{n+1} . Para ello lo primero será describir el multicyclo Γ_{n+1} . Gracias a la Propiedad (d), tenemos que X_n es una inmersión propia en \mathbb{R}^3 . Luego, teniendo en cuenta (C_n), podemos asegurar la existencia de ciclos β_{n+1} y $\gamma_{n+1}(k_1, \dots, k_j)$, $j < n + 1$, satisfaciendo las condiciones (b.1) y (b.2.1), respectivamente, y tales que

$$X_n(\beta_{n+1} \cup (\cup_{j=1}^n \gamma_{n+1}(k_1, \dots, k_j))) \subset B(n+1) \setminus \overline{B(n+1-d_{n+1})}.$$

De nuevo gracias al carácter propio de X_n , podemos encontrar dos reales positivos $\rho(k_1, \dots, k_{n+1})$ y r_{n+1} tales que las curvas $\gamma_{n+1}(k_1, \dots, k_{n+1})$ descritas en (b.2.2) para $n+1$, cumplan la inclusión (8.1) y además

$$X_n(\gamma_{n+1}(k_1, \dots, k_{n+1})) \subset B(n+1) \setminus \overline{B(n+1-d_{n+1})}.$$

Por tanto, uniendo estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$X_n(\Gamma_{n+1}) \subset B(n+1) \setminus \overline{B(n+1-d_{n+1})}. \quad (8.2)$$

Antes de aplicar el Teorema 7.4, notemos que para la condición (a) necesitamos que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon_k < r_{n+1}$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que esto ocurre. Si no fuese así, trabajaríamos con una nueva sucesión $\{\epsilon'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $\epsilon'_k = \epsilon_k$ para cada $k \leq n$, y $\epsilon'_k = \epsilon_k r_{n+1}$ para $k \geq n+1$.

Ahora, veamos que el Teorema 7.4 puede ser usado para los datos

$$\begin{aligned} D' &= \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{J} = \Gamma_{n+1}, \quad \varphi = X_n, \\ d &= d_{n+1}, \quad D = B(n+1), \quad \varepsilon = \epsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

En efecto, la única comprobación que debemos hacer es que ocurre $X_n(\Gamma_{n+1}) \subset B(n+1) \setminus \overline{B(n+1-d_{n+1})}$, que viene asegurada por (8.2). Apliquemos el teorema. Al hacerlo obtenemos

- M_{n+1} un dominio con $\overline{M(\Gamma_{n+1})} \subset M_{n+1} \subset \overline{M_{n+1}} \subset M(\Gamma_{n+1}^{-\epsilon_{n+1}})$.
- $X_{n+1} : M_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal completa, conforme y propia satisfaciendo
 - $\|X_{n+1} - X_n\| < \epsilon_{n+1}$ en $\overline{M(\Gamma_n)}$, esto es, (A_{n+1}).
 - $X_{n+1}(M_{n+1} \setminus M(\Gamma_{n+1})) \subset \mathbb{R}^3 \setminus B(n+1-2d_{n+1}-\epsilon_{n+1})$, que es exactamente (B_{n+1}).

Además, si ϵ_{n+1} es suficientemente pequeño, entonces (A_{n+1}) implica (D_{n+1}). Finalmente (A_{n+1}) y (8.2) garantizan (C_{n+1}). En consecuencia, damos por concluida la construcción de la sucesión de familias $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Este es el momento de definir la inmersión límite de la sucesión. Lo haremos del modo habitual. Denotemos

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(\Gamma_n).$$

Dicho conjunto es un dominio por ser unión de dominios con intersección no vacía. Además, de las Propiedades (A_n) deducimos que la sucesión de inmersiones $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω . En consecuencia, el Teorema de Harnack garantiza la existencia de una aplicación armónica ψ límite de la sucesión, esto es,

$$\psi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty, k \geq n} X_k(z) \quad \text{para cada } z \in M(\Gamma_n).$$

Veamos que esta aplicación ψ prueba el Teorema 8.1.

- ψ es minimal y conforme. En efecto, ya que es una aplicación armónica.
- ψ es inmersión. Dado $z \in \Omega$ existe un natural n de manera que $z \in M(\Gamma_n)$. Por tanto, para cada $m \geq n$, teniendo en cuenta las Propiedades (D_k), $n \leq k \leq m$, tenemos

$$\lambda_{X_m} \geq \alpha_m \cdot \lambda_{X_{m-1}} \geq \cdots \geq \left(\prod_{k=n}^m \alpha_k \right) \cdot \lambda_{X_{n-1}}.$$

Tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$, concluimos

$$\lambda_\psi(z) \geq \frac{1}{2} \lambda_{X_{n-1}}(z) > 0,$$

luego ψ es una inmersión.

- ψ es propia en \mathbb{R}^3 (y, por tanto, completa). Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un compacto. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset B(n - 2d_n - \epsilon_n - \sum_{k \geq n} \epsilon_k) \quad \forall n \geq n_0.$$

Teniendo en cuenta las Propiedades (A_n) y (B_n), $n \geq n_0$, obtenemos

$$\psi(M_n \setminus M(\Gamma_n)) \subset \mathbb{R}^3 \setminus B(n - 2d_n - \epsilon_n - \sum_{k \geq n} \epsilon_k) \quad \forall n \geq n_0,$$

equivalentemente, $\psi(M_n \setminus M(\Gamma_n)) \cap K = \emptyset$, para cada $n \geq n_0$. Por consiguiente, $\psi^{-1}(K) \subset M(\Gamma_{n_0})$ es un compacto en Ω .

- ψ tiene una cantidad no numerable de finales. Denotemos por Q a una sucesión $Q = \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, siendo $k_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}$. Para cada una de estas sucesiones, consideremos una curva $\sigma_Q : [0, +\infty[\rightarrow \Omega$ de manera que

$$\sigma_Q([m, +\infty[) \subset \mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_m), r_m), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (8.3)$$

Nótese que dicha elección es posible gracias a (8.1).

Tomemos ahora $Q = \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $Q' = \{k'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos distintas de estas sucesiones. Llamemos $m_0 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid k_m \neq k'_m\}$. Entonces, por construcción, tenemos

$$\overline{\mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_{m_0}), r_{m_0})} \cap \overline{\mathbb{D}(c(k'_1, \dots, k'_{m_0}), r_{m_0})} = \emptyset,$$

mientras que (8.3) garantiza que

$$\sigma_Q([m_0, +\infty]) \subset \mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_{m_0}), r_{m_0}), \quad \sigma_{Q'}([m_0, +\infty]) \subset \mathbb{D}(c(k'_1, \dots, k'_{m_0}), r_{m_0}).$$

En consecuencia, el conjunto $\partial(\mathbb{D}(c(k_1, \dots, k_{m_0}), r_{m_0}))$ es un compacto de Ω que separa $\sigma_Q([m_0, +\infty])$ y $\sigma_{Q'}([m_0, +\infty])$. Este hecho implica que σ_Q y $\sigma_{Q'}$ son finales topológicos distintos. Al existir una cantidad no numerable de sucesiones distintas Q , deducimos que ψ tiene una cantidad no numerable de finales.

Con esto damos por finalizada la demostración del Teorema 8.1.

Parte II

El Helicoide Simplemente Periódico de Género Uno

Esta parte de la memoria está dedicada al estudio del helicoides simplemente periódico de género uno. En 1999, D. Hoffman, H. Karcher y F. Wei [HKW2] demostraron la existencia de una superficie minimal simplemente periódica, completa, embebida y cuyo cociente por traslaciones verticales tiene género uno y dos finales. Sus finales en el cociente son de tipo helicoidal y, como el helicoides, contiene una línea vertical. Módulo traslaciones verticales, contiene dos líneas paralelas horizontales que cortan al eje vertical. Las simetrías no triviales de la superficie, módulo traslaciones verticales, consisten de: la rotación de 180° alrededor de la línea vertical; la rotación de 180° sobre las líneas horizontales (producen la misma simetría); y la composición de éstas. Dicha superficie se conoce en la literatura como el helicoides simplemente periódico de género uno.

Esta parte está dividida en dos capítulos. El primero de ellos lo emplearemos para introducir el helicoides simplemente periódico de género uno y mostrar la repercusión que ha tenido su descubrimiento en algunos de los últimos avances en la teoría de superficies minimales. Además, describiremos las características fundamentales de esta superficie y citaremos los principales resultados existentes sobre ella. Por último, explicaremos como conseguir una representación gráfica usando el programa informático Mathematica.

Posteriormente, en el Capítulo 10 detallaremos la aportación que el doctorando, junto con Leonor Ferrer y Francisco Martín, ha realizado a la teoría sobre esta superficie [AFM1]. El resultado principal de esta parte de la memoria consiste en un Teorema de Unicidad para el helicoides simplemente periódico de género uno.

Nota. *En esta parte de la memoria usaremos siempre la base canónica de \mathbb{R}^3 como base de las representaciones de Weierstrass con las que trabajemos. Así, omitiremos la base a la hora de describir una representación de Weierstrass.*

9

Introducción

En los últimos años, uno de los focos más activos en el estudio de las superficies minimales ha sido el helicoides de género uno. Se conoce por ese nombre a una superficie que tenga las siguientes propiedades:

- Es una superficie minimal propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 .
- Tiene género uno y un final asintótico al helicoides.
- Contiene una única línea vertical (el eje de coordenadas) y una única línea horizontal.

La existencia de una tal superficie fue probada por D. Hoffman, H. Karcher y F. Wei [HKW1, HKW3]. En aquel momento, no prestaron atención al embebimiento de la superficie. La existencia de un helicoides de género uno embebido fue demostrada posteriormente por Hoffman, Weber y Wolf [HWeWo, We1], lo que supuso el primer ejemplo de superficie minimal propiamente embebida en \mathbb{R}^3 con topología finita y curvatura total infinita, desde que en 1776 Meusnier demostrase la minimalidad del helicoides [Mu].



Figura 9.1: Helicoide de género uno.

Uno de los pasos más importantes en el descubrimiento del helicoide de género uno fue la prueba, por parte de Hoffman, Karcher y Wei [HKW2], del siguiente resultado.

Teorema 9.1. *Existe una superficie minimal completa, propiamente embebida en \mathbb{R}^3 y con las siguientes propiedades:*

- *Es simplemente periódica e invariante por una traslación vertical.*
- *El cociente de la superficie por la traslación tiene género uno.*
- *Tiene dos finales helicoidales.*
- *El eje de coordenadas vertical está incluido en la superficie y es una línea de simetría.*
- *Módulo traslaciones verticales, tiene dos líneas paralelas horizontales que cortan al eje vertical y son líneas de simetría.*

Esta superficie minimal es conocida como el helicoide simplemente periódico de género uno y nosotros la denotaremos por \mathcal{H}_1 . Aparte del propio helicoide, \mathcal{H}_1 constituyó el primer ejemplo encontrado de superficie minimal embebida asintótica al helicoide.

Leyendo detenidamente el estudio que Hoffman, Weber y Wolf hacen de \mathcal{H}_1 [HWeWo], uno se da cuenta de que existe una estrecha relación entre \mathcal{H}_1 y una superficie minimal

con finales planos construida por F.J. López, M. Ritoré y F. Wei [LRiW] en 1997. En concreto, uno observa que una pieza fundamental de \mathcal{H}_1 puede ser obtenida deformando una pieza fundamental de la superficie de López, Ritoré y Wei, y viceversa. La deformación consiste en mover una de las componentes conexas del borde de la superficie siguiendo una traslación vertical, como sugiere la Figura 9.2.

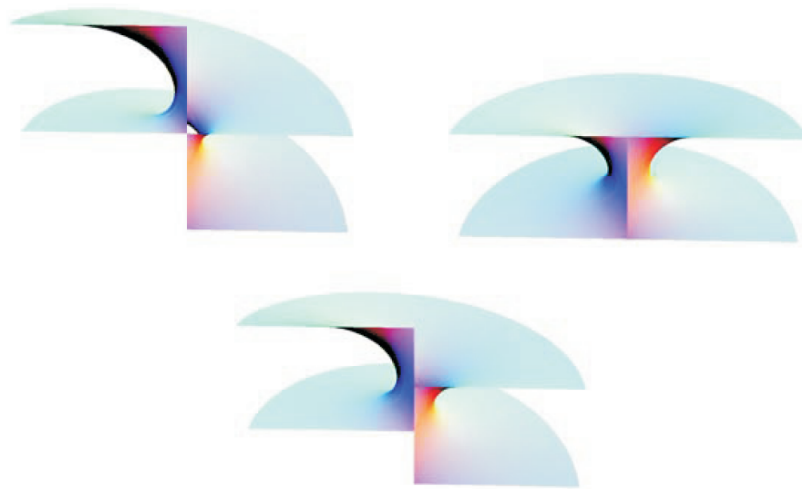


Figura 9.2: La deformación que conecta \mathcal{H}_1 con la superficie de López, Ritoré y Wei.

\mathcal{H}_1 pudo haber sido descubierta previamente. En 1989 Hoffman y Karcher observaron que una construcción de Fisher y Koch [FiKo1, FiKo2] podría ser modificada para producir ejemplos de superficies minimales simplemente periódicas, embebidas y con múltiples finales helicoidales. La superficie triplemente periódica de Fisher-Koch está formada por piezas congruentes al disco solución del problema de Plateau para el borde que se muestra en la Figura 9.3. Rotándola 180° sobre sus segmentos borde, esta superficie se extiende a una embebida triplemente periódica. La modificación necesaria para llegar hasta \mathcal{H}_1 consiste en dos simples pasos. Primero se incrementan las longitudes de a_i hasta infinito, produciéndose un grafo minimal embebido sobre una banda. Después se modifica la pieza fundamental rotando (un ángulo conveniente) los lados a_1 con respecto a los a_2 . Finalmente, la superficie resultante se extiende por rotación de 180° sobre los segmentos de su borde, hasta una superficie asintótica a tres ejes coaxiales helicoidales, y que es invariante por una traslación.

En la estrategia para la construcción del helicoides de género uno, la existencia de \mathcal{H}_1 es fundamental, puesto que resulta ser el punto inicial de una familia continua de helicoides periódicos con asas que converge al helicoides de género uno.

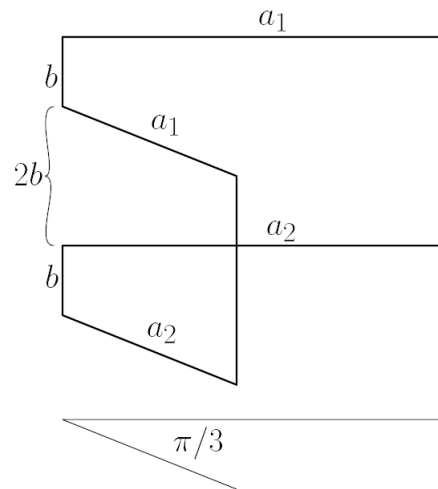


Figura 9.3: El borde de una pieza fundamental de la superficie de Fisher-Koch

Teorema 9.2. Para cada $\phi > \pi$, existe una superficie minimal completa, propiamente embebida en \mathbb{R}^3 y que tiene las siguientes propiedades.

- Es simplemente periódica e invariante por un movimiento screw vertical con ángulo de rotación $\phi = 2\pi k$.
- El cociente de la superficie por el movimiento screw tiene género uno.
- La superficie tiene dos finales helicoidales.
- El eje de coordenadas vertical está contenido en la superficie y es línea de simetría.
- En una pieza fundamental, el vector normal gira $2\pi k$ alrededor del eje vertical.
- Módulo el movimiento screw, la superficie tiene dos líneas paralelas horizontales que cortan al eje vertical y son líneas de simetría.

Esta superficie es llamada el helicoide simplemente periódico de género uno girado un ángulo ϕ , y es denotada por \mathcal{H}_k . Para un ángulo de giro $\phi = 2\pi$, tenemos $k = 1$ y \mathcal{H}_1 es realmente el helicoide simplemente periódico de género uno que hemos introducido anteriormente.

La continuidad de esta familia de superficies y el consecuente embebimiento de \mathcal{H}_1 fueron obtenidos por D. Hoffman, M. Weber y M. Wolf [HWeWo, We1]. Al hacer diverger k , encontraron una superficie límite que resulta ser un helicoide de género uno embebido.

Por otro camino, usando métodos variacionales, la existencia de un helicoide de género uno embebido (y simétrico) ha sido demostrada recientemente por D. Hoffman y B. White [HWh2].

Aunque hay evidencias numéricas de que sólo existe un helicoides embebido con género uno, a nuestro entender, este hecho aún no está probado. Además, existen pruebas computacionales de la existencia de helicoides de género uno inmersos pero no embebidos [Bo].

Conjetura 9.1. *Existe un único helicoides de género uno embebido.*

Por otro lado, un resultado de W. H. Meeks y H. Rosenberg [MeR3] asegura que toda superficie minimal propiamente inmersa con topología finita y un final debe ser asintótica a un helicoides con asas. Además, una tal superficie puede ser descrita por su representación de Weierstrass $(dg/g, dh)$ sobre una superficie de Riemann compacta.

Debido a estos argumentos, los resultados de unicidad sobre \mathcal{H}_1 y la familia de helicoides periódicos con asas derivados de él, se convierten en más interesantes.

Aún abierto sigue el problema de la existencia de helicoides de género finito mayor que uno. Por un lado, M. Traizet y M. Weber [TrWe] han dado un primer paso más allá de las evidencias numéricas, hacia la demostración de la existencia de un helicoides de género finito arbitrario. Su idea es usar razonamientos similares a los que utilizaron Hoffman, Weber y Wolf en su construcción de un helicoides de género uno, pero usando una familia distinta de superficies $\{H_g^t \mid 0 < t < \epsilon\}$. El elemento H_g^t es una superficie minimal embebida, periódica y asintótica al helicoides. Además, es invariante por un movimiento screw vertical. La superficie cociente tiene género g y dos finales helicoidales.

Por otro lado, D. Hoffman y B. White están trabajando en otro método completamente diferente. Su propuesta consiste en construir un helicoides de género g en $\mathbb{S}^2(t) \times \mathbb{R}$, siendo t el radio de la esfera. El siguiente paso sería tomar límite cuando t tiende a infinito, obteniendo así una superficie en \mathbb{R}^3 .

9.1

Descripción geométrica

El helicoides puede ser descrito por los datos

$$g = z, \quad \Phi_3 = i \frac{dz}{z},$$

sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mediante la representación de Weierstrass. La integración produce una inmersión minimal y conforme, pero que tiene periodo $(0, 0, \pm 2\pi)$ sobre cualquier curva cerrada homotópica a $\{|z| = 1\}$. Por tanto, la inmersión es multivaluada, y su imagen, el helicoides, es invariante por una traslación vertical.

Por otro lado, como decíamos, \mathcal{H}_1 es una superficie minimal simplemente periódica, completa, embebida y cuyo cociente por traslaciones verticales tiene género uno y dos finales. Además, \mathcal{H}_1 contiene una línea vertical, sus finales en el cociente son asintóticos

a los finales de un helicoides y el cociente por traslaciones verticales contiene dos líneas horizontales paralelas que se diferencian en la mitad del periodo y que intersecan a la línea vertical.

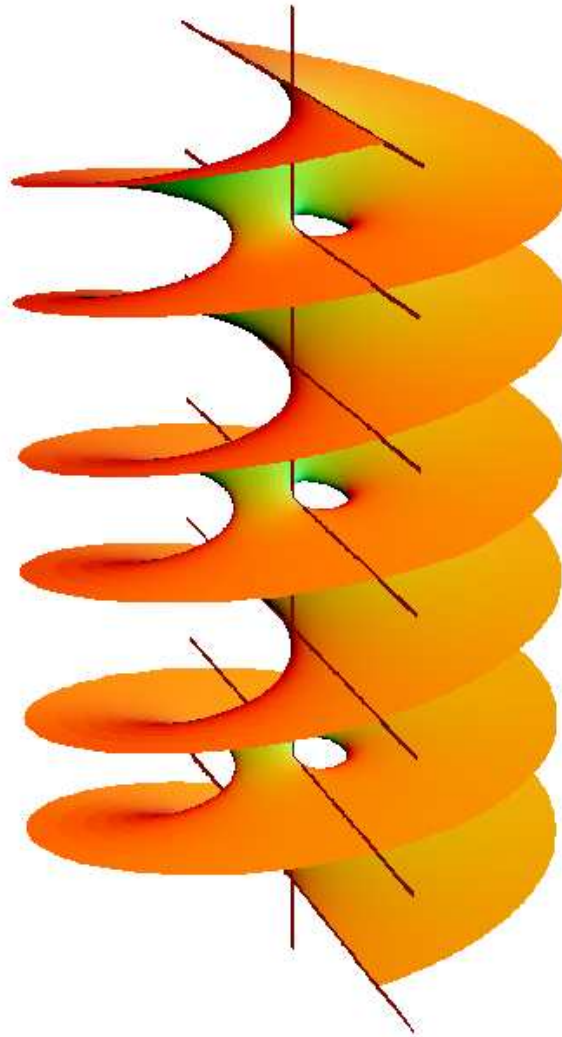


Figura 9.4: Tres piezas fundamentales de \mathcal{H}_1 y las rectas en él contenidas

Como consecuencia de la existencia de tales rectas el Principio de reflexión de Schwarz (Teorema 17 en los preliminares) asegura que la superficie, módulo traslaciones verticales, contiene las siguientes simetrías:

- Rotación de 180° alrededor de la línea vertical.
- Rotación de 180° alrededor de las líneas horizontales. Es claro que las simetrías resultantes de rotar alrededor de cada una de las dos rectas horizontales coinciden.

- La composición de las dos anteriores, que coincide con la rotación alrededor de una línea ortogonal a todas las líneas de la superficie y que corta a la superficie en el punto de intersección entre la línea vertical y la correspondiente horizontal.

9.2

Determinación de los datos de Weierstrass

\mathcal{H}_1 es simplemente periódica, tiene un final tipo helicoidal y, módulo la traslación vertical, tiene género uno. Resultados generales sobre geometría de superficies minimales periódicas [MeR2] y la descripción de la superficie que hemos dado, garantizan que \mathcal{H}_1 tiene una representación de Weierstrass sobre un toro menos dos puntos. Además, sus datos g y Φ_3 deben extenderse meromórficamente al toro compacto.

La anterior descripción geométrica permitió asegurar a Hoffman, Karcher y Wei que toda superficie que responda a ella es representable por los datos de Weierstrass¹

$$g(x, y) = \frac{y - r\sqrt{i}}{y + r\sqrt{i}}, \quad \Phi_3(x, y) = \frac{x - i\lambda}{x - \frac{i}{\lambda}} \frac{1}{x^2 - 1 + 2ix \cos \theta} \frac{dx}{y}, \quad (9.1)$$

sobre el toro rómbico

$$\overline{\mathcal{M}} \equiv \left\{ (x, y) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid y^2 = \frac{-2x \sin \theta}{x^2 - 1 + 2ix \cos \theta} \right\},$$

salvo los puntos con $x = i/\lambda$, donde $\lambda \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, \pi)$ son parámetros convenientes, y r viene dado por la ecuación

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = -2 \cos \theta + \frac{2 \sin \theta}{r^2}. \quad (9.2)$$

Este resultado puede encontrarse en [HKW2, Teorema 1].

En ese mismo artículo, en el Teorema 2, se prueba la existencia de una pareja de parámetros $\lambda \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, \pi)$ que resuelven el problema de periodos, demostrando así, la existencia de una superficie que satisface la descripción que hemos dado anteriormente.

9.3

La curvatura total de \mathcal{H}_1 es -8π

Nos conviene notar que el helicoides simplemente periódico de género uno tiene curvatura total $C = -8\pi$, ya que este hecho forma parte de las hipótesis de nuestro teorema de unicidad. Por el Teorema 16, sabemos que la curvatura total de la superficie cociente es

¹Recordemos que en esta parte de la memoria estamos usando siempre la base canónica de \mathbb{R}^3 como base de las representaciones de Weierstrass.

$C = -2\pi(W - \chi)$, donde χ denota su característica de Euler y W el número total de ramificación de sus finales [MeR2]. Ahora bien, la característica de Euler de una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos coincide con la característica de la superficie menos el número de puntos. En el caso de \mathcal{H}_1 , tenemos $\chi = -2$ por ser un toro ($\chi = 0$) menos dos puntos. Por otro lado, el número de ramificación de un final helicoidal es uno [MeR2], luego en nuestro caso ocurre $W = 2$ por tener \mathcal{H}_1 dos finales helicoidales. En consecuencia, $C = -8\pi$.

9.4

Un primer resultado de unicidad

En este ambiente, L. Ferrer y F. Martín obtuvieron el siguiente resultado sobre la unicidad de \mathcal{H}_1 .

Teorema 9.3. *\mathcal{H}_1 es la única superficie minimal completa y periódica que tiene las siguientes características:*

- *Contiene una línea vertical.*
- *Su cociente por la traslación vertical tiene género uno, dos finales helicoidales y contiene dos líneas horizontales paralelas.*
- *La curvatura total de la superficie es -8π .*

La contribución de Leonor Ferrer y Francisco Martín consiste en dar una nueva aproximación a la demostración de la unicidad del problema de periodos (véase [FM, Remark 4]). Ellos prueban que sólo hay un par de parámetros que resuelven dicho problema. Para ello, exponen la representación de Weierstrass que explicaremos a continuación. Esta representación no es la original dada por Hoffman, Karcher y Wei, sino otra alternativa que permite (entre otras cosas) obtener una demostración más simple del embebimiento de la superficie.

Dados $b \in [0, 1[$ y $\rho \in]0, \pi[$, consideramos el toro

$$\overline{\mathcal{N}} = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = z^4 + 1 - 2z^2 \cos \rho\}.$$

Este toro contiene una serie de simetrías, que nos permitirán obtener la superficie completa a partir de una pieza fundamental. Dichas simetrías son

$$S(z, w) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z^2}\right), \quad S_0^+(z, w) = \left(\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{\bar{w}}{\bar{z}^2}\right) \quad \text{y} \quad S_2^+(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}).$$

Por comodidad, cuando $z^4 + 1 - 2z^2 \cos \rho \in \mathbb{R}^+$, denotaremos

$$z_+ = \left(z, +\sqrt{z^4 + 1 - 2z^2 \cos \rho}\right) \quad \text{y} \quad z_- = \left(z, -\sqrt{z^4 + 1 - 2z^2 \cos \rho}\right).$$

Así, tomamos $\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}} \setminus \{ib_+, -ib_-, \frac{i}{b_+}, -\frac{i}{b_-}\}$. Una vez definido el toro que nos interesa, consideramos en $\overline{\mathbb{C}}$ las curvas

$$\begin{aligned} s_0^+ &= \{e^{i\frac{t}{2}} \mid t \in [\rho, \pi]\}, \quad s_0^- = \{e^{i\frac{t}{2}} \mid t \in [-\pi, -\rho]\}, \\ s_1^+ &= \{\lambda i \mid \lambda \in]b, 1]\}, \quad s_1^- = \{\lambda i \mid \lambda \in [-1, b]\}, \\ s_2^+ &= \{\lambda i \mid \lambda \in [1, \infty[\cup]-\infty, -1/b]\} \cup \{\infty\} \quad \text{y} \quad s_2^- = \{\lambda i \mid \lambda \in]-1/b, -1]\}. \end{aligned}$$

Llamamos también $\gamma_i^+ = z^{-1}(s_i^+)$, $\gamma_i^- = z^{-1}(s_i^-)$, $i = 0, 1, 2$ y definimos un dominio $M_{b,\rho} \subset \mathcal{N}$ como la componente conexa de $z^{-1}(\overline{\mathbb{C}} \setminus (\cup_{i=0}^2 (s_i^+ \cup s_i^-)))$ que contiene el punto 1_+ .

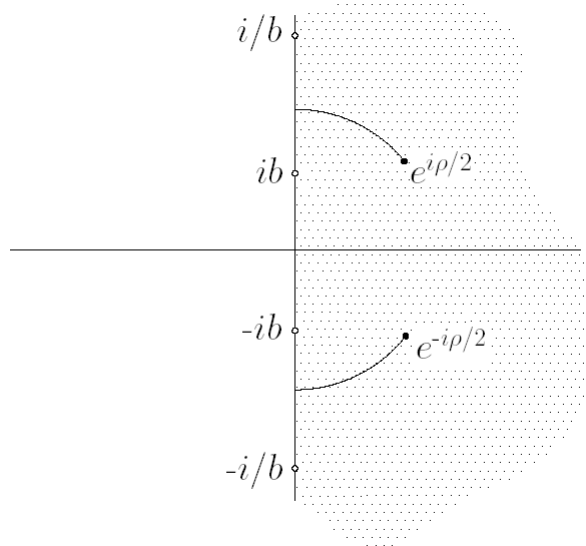


Figura 9.5: Proyección sobre \mathbb{C} por z de $M_{b,\rho}$

De este modo, la curva γ_0^+ consiste en dos copias, δ_1 y δ_2 , de s_0^+ . Asumamos que $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ son los dos levantamientos a $M_{b,\rho}$ de la curva $e^{it/2}$, $t \in [\rho, \pi]$, con $\delta_1(\pi) \in \gamma_1^+$ y $\delta_2(\pi) \in \gamma_2^+$. Llamamos también $\delta(t)$ al levantamiento a $M_{b,\rho}$ de la curva $e^{it/2}$, $t \in [0, \rho]$. Finalmente, definimos γ_1 una curva en \mathcal{N} como $\gamma_1 = \alpha_1 - (S_0^+)_*(\alpha_1)$, donde $\alpha_1 = -S_*(\delta) + \delta$.

En estas condiciones, Ferrer y Martín dan una representación de \mathcal{H}_1 equivalente a la dada por Hoffman, Karcher y Wei. Ellos prueban [FM] que existen únicos parámetros $b \in [0, 1[$ y $\rho \in]0, \pi]$, tales que una pieza fundamental de \mathcal{H}_1 es representada en el disco $M_{b,\rho}$ por los datos de Weierstrass

$$g(z, w) = \frac{z^2 + b^2}{b^2 z^2 + 1} \quad \text{y} \quad \Phi_3(z, w) = \frac{w - c_1 i z}{w + c_1 i z} \frac{dz}{w}, \tag{9.3}$$

siendo $c_1 = \frac{1}{b} w(ib_+) = \frac{1}{b} \sqrt{b^4 + 1 + 2b^2 \cos \rho}$.

Para hacerlo, consideraron las funciones $h, d : [0, 1] \times]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h(b, \rho) = \int_0^1 \frac{t^4 + 1 - (c_1^2 + 2 \cos \rho)t^2}{(t^2 + b^2)(t^2 + 1/b^2)\sqrt{t^4 + 1 - 2t^2 \cos \rho}} dt ;$$

$$d(b, \rho) = -\frac{i}{2} \int_{\gamma_1} \frac{z^2}{w} dz ,$$

y observaron que el problema de periodos tiene solución si, y solamente si, $h(b, \rho) = d(b, \rho) = 0$. Finalmente, razonamientos analíticos les llevan a concluir que existen únicos parámetros en dichas condiciones.

Con esta representación de \mathcal{H}_1 , la distribución de los ceros y polos de g en $M_{b, \rho}$ es la que muestra la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|c|c|c} g & ib_+ & -ib_- & i/b_+ \\ \hline & 0^1 & 0^1 & \infty^1 \\ \hline & & & -i/b_- \\ & & & \infty^1 \end{array}$$

9.5

Otra representación de \mathcal{H}_1

En esta sección mostraremos una representación equivalente de \mathcal{H}_1 que es la que usaremos en la demostración del teorema principal de esta parte de la memoria. Para ello, consideramos el toro

$$\overline{\mathcal{Q}} = \left\{ (u, v) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid v^2 = u + \frac{1}{u} - 2 \cos \rho \right\} .$$

El toro $\overline{\mathcal{N}}$ de la anterior sección es un recubridor de dos hojas de $\overline{\mathcal{Q}}$ y una aplicación recubridora, $\mathcal{G} : \overline{\mathcal{N}} \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$, es

$$\mathcal{G}(z, w) = \left(z^2, \frac{w}{z} \right) .$$

En consecuencia, podemos inducir los datos (9.3) sobre $\overline{\mathcal{Q}}$ obteniendo

$$\tilde{g} = (\mathcal{G}_* g) = \frac{u + b^2}{b^2 u + 1} , \quad \tilde{\Phi}_3 = (\mathcal{G}_* \Phi_3) = \frac{1}{2u} \frac{v - c_1 i}{v} \frac{du}{v} . \quad (9.4)$$

El toro sobre el que vamos a definir la nueva representación es

$$\overline{\mathcal{P}} = \left\{ (z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = \frac{(z - a)(az - 1)}{(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})} \right\} ,$$

donde $a = b^2 \in \mathbb{R}$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ satisface

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\rho} + b^2}{b^2 e^{i\rho} + 1} .$$

En estas condiciones, la aplicación $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{P}} \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ dada por

$$\mathcal{F}(z, w) = \left(\frac{b^2 - z}{b^2 z - 1}, \frac{-ibc_1}{w} \right)$$

es un biholomorfismo conforme que lleva los datos (9.4) sobre $\overline{\mathcal{Q}}$ en la representación sobre $\overline{\mathcal{P}}$ con datos

$$\widehat{g} = (\mathcal{F}^* g_2) = z, \quad \widehat{\Phi}_3 = (\mathcal{F}^* \Phi_3^2) = -i \frac{a^2 - 1}{2\sqrt{a^2 + 1 + 2a \cos \rho}} \frac{w + \sqrt{a}}{w - \sqrt{a}} \tau, \quad (9.5)$$

siendo

$$\tau = \frac{1}{(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})} \frac{dz}{w},$$

la única 1-forma holomorfa sobre el toro $\overline{\mathcal{P}}$.

Estos datos se diferencian de los que obtendremos en nuestro teorema de unicidad para \mathcal{H}_1 únicamente en multiplicar $\widehat{\Phi}_3$ por una constante real, por tanto, teniendo en cuenta como se recupera una inmersión minimal a partir de su representación de Weierstrass (véase (1.3)), concluimos que ambas superficies son la misma salvo una homotecia.

Con esta representación de \mathcal{H}_1 , la distribución de los ceros y polos de g en $\overline{\mathcal{P}}$ es la que se detalla en esta tabla:

a	$1/a$	$e^{i\theta}$	$e^{-i\theta}$
g	0^1	0^1	∞^1

Con el fin de cerrar el círculo y demostrar que las tres representaciones que han aparecido de \mathcal{H}_1 determinan, en efecto, la misma superficie, vamos ahora a probar que la representación dada por Ferrer y Martín y la dada por Hoffman, Karcher y Wei son equivalentes.

Proposición 9.1. *Las representaciones de Weierstrass dadas por los datos (9.1) sobre el toro $\overline{\mathcal{M}}$ y por (9.4) sobre $\overline{\mathcal{Q}}$ son equivalentes.*

Demostración. Tomemos $\theta = \rho$ y consideremos el toro

$$\overline{\mathcal{T}} = \left\{ w^2 = (z - 1)(z + 1) \left(z - i \frac{\sin \rho}{1 + \cos \rho} \right) \left(z + i \frac{\sin \rho}{1 + \cos \rho} \right) \right\},$$

y la aplicación $\mathcal{F}_1 : \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ dada por

$$\mathcal{F}_1(z, w) = \left(i(1 + \cos \rho) \left(w + z^2 - \frac{\cos \rho}{1 + \cos \rho} \right), \sqrt{i \frac{\sin \rho}{1 + \cos \rho}} \frac{1}{z} \right).$$

Entonces, \mathcal{F}_1 es un biholomorfismo conforme que lleva los datos de Weierstrass (9.1) en los datos

$$g^1(z, w) = \frac{1 - r \sqrt{\frac{1+\cos\rho}{\sin\rho}} z}{1 + r \sqrt{\frac{1+\cos\rho}{\sin\rho}} z}, \quad \Phi_3^1(z, w) = \frac{w + z^2 - \frac{\lambda+\cos\rho}{1+\cos\rho} \tau^1}{w + z^2 - \frac{1/\lambda+\cos\rho}{1+\cos\rho} \tau^1}, \quad (9.6)$$

sobre el toro $\overline{\mathcal{T}}$, donde τ^1 es una 1-forma holomorfa en $\overline{\mathcal{T}}$.

De la misma forma, la aplicación $\mathcal{F}_2: \overline{\mathcal{T}} \rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ definida como

$$\mathcal{F}_2(z, w) = \left(\frac{1-z}{1+z}, -2i \cos(\rho/2) \frac{w}{z^2-1} \right)$$

es un biholomorfismo conforme que identifica los datos (9.4) con los datos de Weierstrass sobre $\overline{\mathcal{T}}$

$$g^2(z, w) = \frac{1 - \frac{1-b^2}{1+b^2} z}{1 + \frac{1-b^2}{1+b^2} z}, \quad \Phi_3^2(z, w) = \frac{\frac{1}{2} \frac{c_1}{\cos(\rho/2)} (z^2-1) + w}{\frac{1}{2} \frac{c_1}{\cos(\rho/2)} (z^2-1) - w} \tau^2, \quad (9.7)$$

siendo τ^2 un múltiplo real de τ^1 . En consecuencia, tomando

$$r = \frac{1-b^2}{1+b^2} \sqrt{\frac{\sin\rho}{1+\cos\rho}},$$

y usando (9.2), es un cálculo directo comprobar que $g^1 = g^2$ y $\Phi_3^1 = \lambda \frac{\tau^1}{\tau^2} \Phi_3^2$. Así, teniendo en cuenta (1.3) obtenemos que los datos de Weierstrass (9.6) y (9.7) son equivalentes. Este hecho termina la demostración. \blacksquare

Todos los cálculos mostrados en esta sección pueden encontrarse en [AFM2].

10

Un Teorema de Unicidad

El principal objetivo de esta parte de la memoria es demostrar un teorema de unicidad para el helicoides simplemente periódico de género uno \mathcal{H}_1 .

Teorema 10.1. *\mathcal{H}_1 es la única superficie minimal completa, propiamente embebida y simplemente periódica que satisface las siguientes condiciones:*

- *Es simétrica respecto a una línea vertical.*
- *Su cociente por la traslación vertical tiene género uno y dos finales helicoidales.*
- *La curvatura total de la superficie es -8π .*

Este teorema supone una generalización del resultado de unicidad probado por Ferrer y Martín (Teorema 9.3). La mejora reside en quitar una simetría. Además, en nuestro resultado suponemos que la línea vertical es de simetría y no que está conteni-

da en la superficie.

La estrategia para la demostración consiste en comprobar que toda superficie que verifique las hipótesis del Teorema 10.1 también satisface las hipótesis del Teorema 9.3. De este modo, obtendremos nuestro resultado como consecuencia directa del anterior.

Explicaremos brevemente los pasos a seguir para lograr nuestro objetivo. Antes que nada, deberemos determinar con que tipo de superficie de Riemann nos encontramos y usaremos las hipótesis del teorema para descubrir las propiedades más elementales que cumple la representación de Weierstrass de una superficie bajo dichas hipótesis. El siguiente paso consistirá en el estudio de las curvas de nivel de la superficie, esto es, describiremos como son los cortes de la superficie con planos horizontales. De dicha descripción concluiremos que el eje vertical está contenido en la superficie. Recordemos que esta es una de las hipótesis del Teorema 9.3 con la que, en principio, no contamos. Además, en ese mismo punto, podremos ver como se relacionan los datos de Weierstrass con la simetría respecto del eje vertical, lo que nos ayudará a precisarlos un poco más. Seguidamente estudiaremos los puntos de ramificación de la aplicación de Gauss. De dicho estudio y ciertas comprobaciones computacionales, obtendremos con total precisión la representación de Weierstrass de cualquier superficie con las condiciones de nuestro teorema de unicidad, lo que nos permitirá comprobar el resto de las hipótesis del teorema de Ferrer y Martín. Entonces daremos por concluida la demostración.

10.1

Demostración del Teorema 10.1

Empecemos fijando notación y conceptos. Consideremos $\tilde{X} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal, conforme y satisfaciendo las hipótesis del Teorema 10.1, donde \tilde{M} será una superficie de Riemann adecuada. Denotemos por \mathfrak{t} a la traslación vertical en \mathbb{R}^3 que hace simplemente periódica a nuestra superficie. Dicha traslación induce de forma natural un biholomorfismo τ en \tilde{M} , dado por $\tau(p) = q \Leftrightarrow \mathfrak{t}(\tilde{X}(p)) = \tilde{X}(q)$. Equivalentemente, τ es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{M} \\ \tilde{X} \downarrow & & \downarrow \tilde{X} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\mathfrak{t}} & \mathbb{R}^3. \end{array} \quad (10.1)$$

Consideremos la superficie de Riemann $M = \tilde{M}/\langle\tau\rangle$ y denotemos por $p : \tilde{M} \rightarrow M$ y $\tilde{p} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\langle\mathfrak{t}\rangle$ a las proyecciones canónicas. Entonces se induce una inmersión minimal $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3/\langle\mathfrak{t}\rangle$ tal que $X \circ p = \tilde{p} \circ \tilde{X}$, esto es, hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{X}} & \mathbb{R}^3 \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ M & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^3/\langle\mathfrak{t}\rangle. \end{array}$$

Sean (g, Φ_3) los datos de Weierstrass de la inmersión minimal \tilde{X} . La conmutatividad del diagrama (10.1) implica que dichos datos pueden ser inducidos sobre la superficie cociente M . Por comodidad, continuaremos denotando (g, Φ_3) a los datos inducidos.

La superficie cociente M tiene género uno y dos finales helicoidales, luego, resultados generales sobre la geometría de las superficies minimales periódicas [MeR2] implican que M es conformemente equivalente a un toro T menos dos puntos E_1 y E_2 . Además, los datos de Weierstrass (g, Φ_3) se extienden meromórficamente a los finales E_1 y E_2 .

Veamos qué podemos decir del divisor de Φ_3 . Por un lado, sabemos que los polos de Φ_3 son los finales de la superficie M . Además, E_1 y E_2 son finales helicoidales, luego, polos simples de Φ_3 (véase la Nota 4 en la página 23). De este modo el divisor de polos de Φ_3 es $(\Phi_3)_\infty = E_1 E_2$. Por otro lado, por ser T un toro, el divisor de cualquier 1-forma meromorfa sobre T debe tener grado cero (véase la Nota 1, página 6), por tanto, existen dos ceros V_1 y V_2 de Φ_3 en T . Por esa razón, el divisor de Φ_3 viene dado por

$$(\Phi_3) = \frac{V_1 V_2}{E_1 E_2}. \quad (10.2)$$

En lo que respecta a g , por ser -8π la curvatura total de M , usando la fórmula del Teorema 15,

$$\int_M K = -4\pi \deg(g),$$

obtenemos que el grado de g es $\deg(g) = 2$. Así, g tiene dos ceros y dos polos en T . Por un lado los ceros de Φ_3 han de ser, o bien ceros, o bien polos de g , mientras que, por el otro lado, estamos asumiendo que los finales E_1 y E_2 tienen vectores normales verticales. En consecuencia, los ceros y polos de g deben coincidir con los puntos $\{E_1, E_2, V_1, V_2\}$. Finalmente, los vectores normales en los finales tienen direcciones opuestas, por tanto, salvo renombrar los puntos, podemos asumir que el divisor de g es

$$(g) = \frac{V_1 E_1}{V_2 E_2}. \quad (10.3)$$

Como consecuencia de esta última ecuación deducimos que V_1 y V_2 son dos puntos diferentes de T , de otro modo el grado de g sería menor que 2.

Tras detallar, dentro de nuestras posibilidades actuales, los datos de Weierstrass de la superficie, el siguiente paso consiste en estudiar la intersección de $\tilde{X}(\tilde{M})$ con planos horizontales. Antes de hacerlo, necesitamos introducir algo más de notación. Recordemos que, por hipótesis, $\tilde{X}(\tilde{M})$ es simétrica respecto a una línea horizontal. Llamemos R a dicho eje de simetría y \mathcal{S}_3 a la isometría de \tilde{M} inducida por la simetría de rotación de 180° alrededor de la línea R . Finalmente, denotemos por $S_3 : T \rightarrow T$ a la involución inducida por \mathcal{S}_3 en el toro T .

En el siguiente lema describimos los cortes de nuestra superficie con planos horizontales.

Lema 10.1. Para cada $k \in \mathbb{R}$ llamemos $\alpha_k = \tilde{X}(\tilde{M}) \cap \Pi_k$ al conjunto intersección de la superficie con el plano horizontal a altura k , $\Pi_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = k\}$. Entonces ocurre una de las dos siguientes situaciones:

- α_k es una curva simple ℓ_k que diverge a ambos finales y contiene al punto $p_k = R \cap \Pi_k$.
- α_k es la unión de una tal curva ℓ_k y una curva de Jordan que corta a ℓ_k ortogonalmente en dos puntos.

Además, la segunda posibilidad ocurre exactamente una vez en cada pieza fundamental.

Demostración. En general, es bien conocido que la intersección de una superficie minimal y un plano coincide con el conjunto de ceros de cierta función armónica definida sobre la superficie. En este caso particular, α_k es exactamente el conjunto de ceros de la función armónica $x_3 - k : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora bien, la geometría de dichos conjuntos nodales está muy controlada (véase el Teorema 4 en el capítulo de preliminares o [Ch]). Así, la intersección de una minimal con un plano es, en un entorno de un punto p , un conjunto de n curvas analíticas que se cortan en el punto p formando ángulos de π/n . Además, si el plano con el que estamos intersectando es el plano tangente a la superficie en el punto p , entonces la multiplicidad de la aplicación de Gauss de la superficie en el punto p es exactamente $n - 1$, si, y solamente si, el plano corta a la superficie sobre n curvas en un entorno de p . En consecuencia, la multiplicidad de la aplicación de Gauss en un punto p es 1 si, y solamente si, el corte del plano tangente a la superficie en p con la propia superficie consiste en dos curvas ortogonales.

Pensemos ahora en nuestro caso particular. Gracias a la periodicidad de \tilde{X} basta con que estudiemos lo que ocurre en la pieza fundamental M . Supongamos que, para cierto k , el conjunto α_k contiene dos curvas que se cortan en un punto. Por lo que hemos explicado en el párrafo anterior, dicho corte será no tangencial, luego el vector normal a la superficie en dicho punto de corte debe ser ortogonal al plano con el que estamos intersectando, esto es, vertical. Además, en M existen únicamente dos puntos con vector normal vertical, a saber V_1 y V_2 . Por otro lado, el hecho de que $\tilde{X}(\tilde{M})$ sea simétrica respecto del eje vertical R implica que el conjunto α_k es simétrico respecto del punto p_k definido en el enunciado del lema. De aquí concluimos que $X(V_1)$ y $X(V_2)$ están contenidos en el mismo plano horizontal, denótese $\Pi_{k_0} = \{x_3 = k_0\}$.

En resumen,

Afirmación 10.1. El conjunto α_k consiste en un conjunto de curvas analíticas, simples y disjuntas, excepto para α_{k_0} , siendo k_0 tal que $x_3(V_1) = x_3(V_2) = k_0$.

Centrémonos ahora en observar el comportamiento de la curva α_k lejos del eje de simetría R , esto es, en el exterior de un cilindro vertical (centrado en R) suficientemente grande. Los finales son asintóticos al helicoides, luego, fuera de dicho cilindro la curva α_k

tiene dos componentes conexas que divergen a los finales. Además, dichas componentes deben ser simétricas por serlo la superficie. Como consecuencia de la Afirmación 10.1, tenemos (recordemos que nos hemos restringido al trozo fundamental $X(M)$)

Afirmación 10.2. *Fuera de un cilindro suficientemente grande, el conjunto α_k consiste en dos curvas simétricas que divergen a los finales. Además, para cada $k \neq k_0$ existe una curva $\ell_k \subset \alpha_k$ que contiene a esas dos componentes conexas (ver Figura 10.1).*

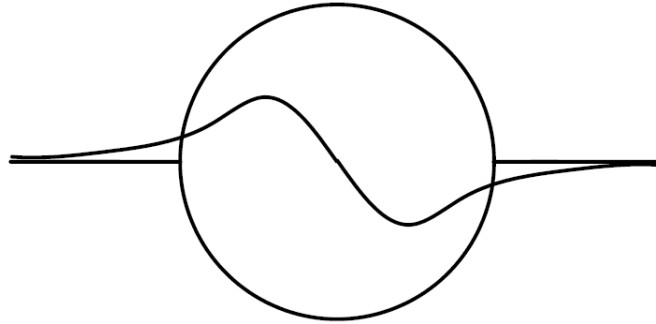


Figura 10.1: La curva ℓ_k para $k \neq k_0$.

Además, para cada $k \neq k_0$, podemos deducir que el punto p_k pertenece a la curva $\ell_k \subset X(M)$. Este hecho se debe a que la curva ℓ_k es divergente y simétrica respecto al punto p_k . Para formalizarlo, supongamos que $p_k \notin \ell_k$, entonces p_k debe estar contenido en una de las dos componentes conexas de $\Pi_k \setminus \ell_k$. Es evidente que la simetría respecto a p_k intercambia dichas componentes conexas (piénsese en puntos alejados de la curva ℓ_k), mientras que, el punto p_k y la curva ℓ_k son invariantes respecto de dicha simetría. En consecuencia, p_k también pertenece a la otra componente conexa, siendo esto una contradicción. De este modo, concluimos que $p_k \in X(M)$, $\forall k \neq k_0$. Veamos ahora que también $p_{k_0} \in X(M)$. En efecto, sabemos que los puntos de T que son preimagen por X de R son puntos fijos de la involución $S_3 : T \rightarrow T$, y acabamos de demostrar que $R \setminus \{x_3 = k_0\} \subset X(M)$, luego el conjunto de puntos fijos de S_3 contiene puntos de acumulación. En consecuencia, S_3 debe ser una involución antiholomorfa, ya que, de ser holomorfa, el principio de identidad aseguraría que S_3 es la identidad en T , siendo esto absurdo. Ahora bien, el conjunto de puntos fijos de una involución antiholomorfa es la totalidad de una curva y, por tanto, $p_{k_0} \in X(M)$.

En consecuencia queda probado el siguiente resultado.

Afirmación 10.3. *El eje vertical de simetría R está incluido en la superficie $\tilde{X}(\tilde{M})$. Nótese que esta es una de las hipótesis del Teorema 9.3, que no aparece en las hipótesis de nuestro teorema.*

Finalmente, estudiemos el comportamiento del conjunto α_k en el interior del cilindro de la Afirmación 10.2. Lo primero será probar lo siguiente.

Afirmación 10.4. *El conjunto α_k no contiene componentes conexas acotadas.*

Procedamos por reducción al absurdo. Asumamos que existe k_1 de manera que α_{k_1} tiene componentes conexas acotadas. Evidentemente, una tal componente no es posible que corte a la curva ℓ_{k_1} , puesto que entonces no sería acotada. Por tanto, la simetría del conjunto α_{k_1} implica la existencia de al menos dos componentes conexas acotadas (véase la Figura 10.2). Supongamos ahora un poco más. Asumamos que para todo k

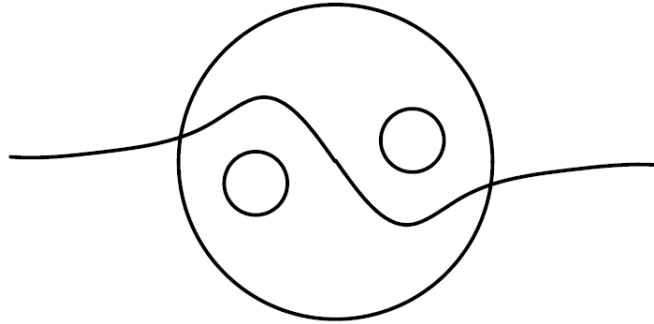


Figura 10.2: Posibles componentes conexas acotadas en α_{k_1} .

el conjunto α_k contiene tales componentes conexas acotadas. Entonces, es claro que $\tilde{X}(\tilde{M})$ divide \mathbb{R}^3 en, al menos, cuatro componentes conexas. Pero por hipótesis $\tilde{X}(\tilde{M})$ es propiamente embebida en \mathbb{R}^3 , además es conexa, luego, divide a \mathbb{R}^3 en exactamente dos componentes conexas. Esta contradicción implica la existencia de una altura k_2 tal que el conjunto α_{k_2} no tiene componentes conexas acotadas. Así, las Afirmaciones 10.2 y 10.3 garantizan que α_{k_2} consiste en una curva conexa. Por la hipótesis sobre k_1 es evidente que $k_1 \neq k_2$, luego debe existir una altura intermedia entre k_1 y k_2 que represente un punto de inflexión, en el sentido de que, en esa altura, el conjunto α_k pasa de ser conexo a tener componentes conexas acotadas (obsérvese la Figura 10.3). Ahora bien, a dicha altura encontramos (al menos) dos autointersecciones de la curva α_k , luego, dos puntos con vector normal vertical. Para hacer esta afirmación hemos usado que en el párrafo anterior demostramos que de tener componentes conexas acotadas éstas serían al menos dos, así como la simetría de la superficie. Además, hemos tenido en cuenta que el vector normal es horizontal a lo largo de la recta vertical R , lo que nos ha permitido descartar que α_k se autocorte en p_k (véase la Figura 10.4). Por otro lado, el hecho de que la superficie $\tilde{X}(\tilde{M})$ sea invariante por la traslación vertical τ , implica que esta situación de punto de inflexión, ocurre al menos dos veces en cada pieza fundamental. De este modo concluimos que la evolución de las curvas α_k es como muestra la Figura 10.5. Pero esta situación contradice el hecho comprobado de que sólo hay dos puntos con vector normal vertical en M . Esta contradicción demuestra la falsedad de nuestra hipótesis inicial, luego, α_k es conexo $\forall k$.

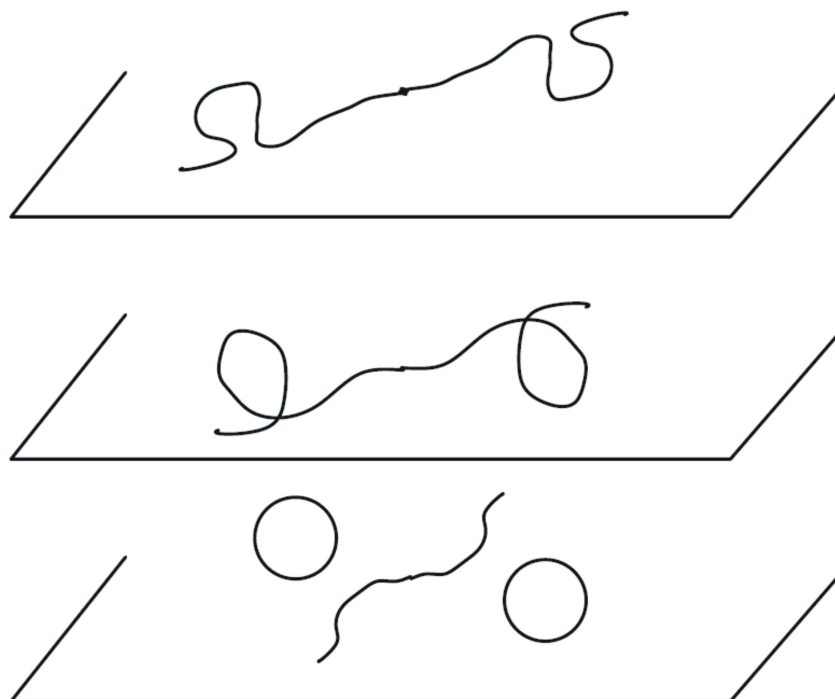


Figura 10.3: El punto de inflexión.

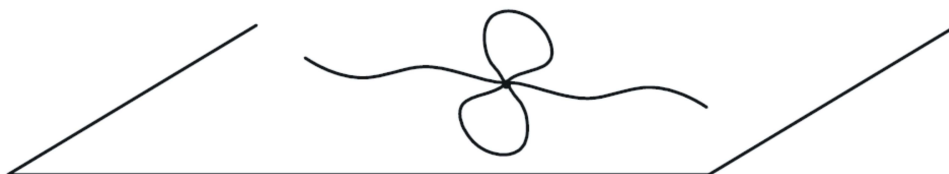


Figura 10.4: Conjunto ℓ_k no posible.

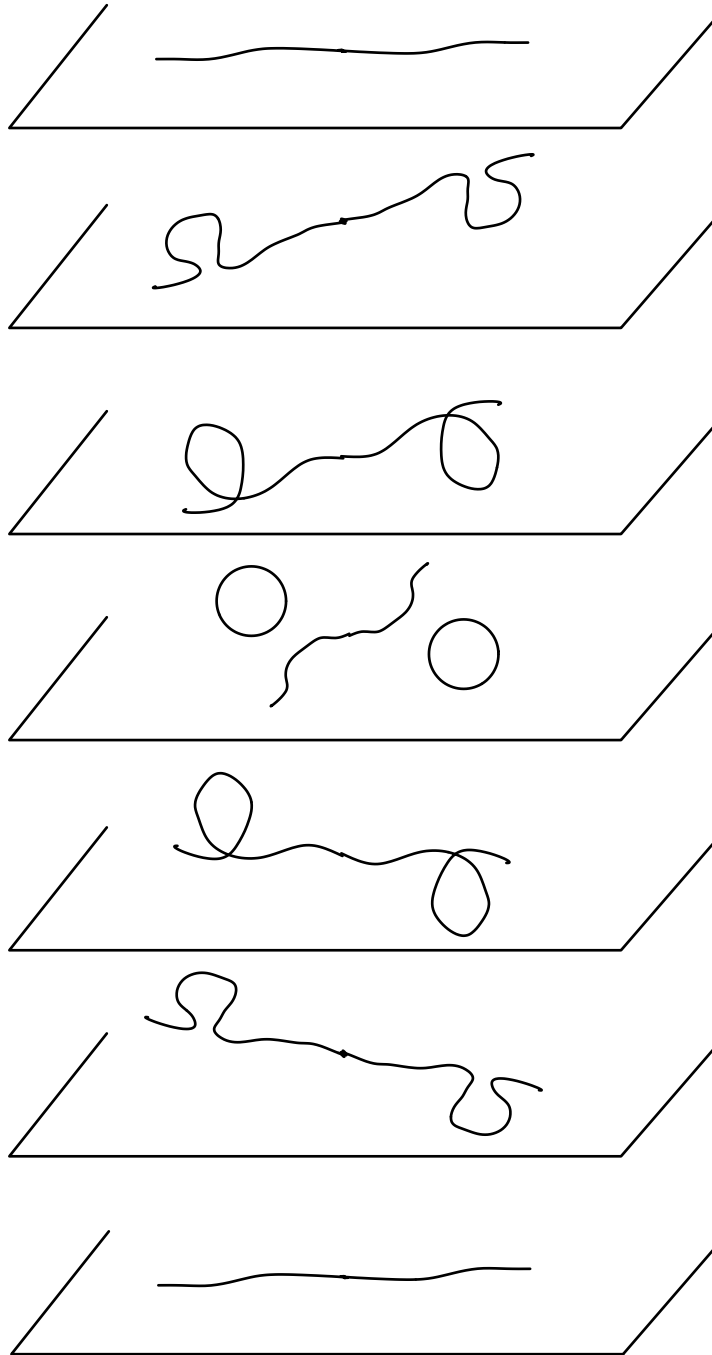


Figura 10.5: Evolución no posible de las curvas α_k .

Por tanto, para todo k excepto k_0 , el conjunto intersección α_k coincide con la curva ℓ_k , esto es, α_k es una curva simple, simétrica respecto de p_k y divergente hacia los dos finales.

Por otro lado, la curva α_{k_0} debe consistir de dos curvas: una curva ℓ_{k_0} como las anteriores, y una curva de Jordan que corta a ℓ_{k_0} ortogonalmente en los puntos V_1 y V_2 , y que es simétrica respecto de p_{k_0} . A esta última curva la denotaremos por β . De este modo, la evolución real de los conjuntos α_k es como se representa en la Figura 10.6.

Esto termina la demostración del lema. ■

Observación 10.1. *Generalmente, las curvas de nivel horizontales de un final minimal, anular y que es asintótico a un helicoides vertical, no son asintóticas a líneas rectas. No obstante, en nuestro caso es fácil comprobar que las curvas ℓ_k convergen a líneas rectas.*

Un ejemplo de la situación descrita en la primera afirmación de la anterior observación puede ser encontrado en [HMc, Remark 4]. Allí, D. Hoffman y J. McCuan muestran que los datos de Weierstrass

$$\begin{cases} g(z) = e^{z+a/z} \\ \Phi_3 = -idz, \end{cases}$$

siendo $a \neq 0$ tal que $2\sqrt{-a}$ es un cero de la primera función de Bessel [Se, pág. 534-535], dan lugar a un tal final y sus curvas de nivel horizontales no son asintóticas a líneas rectas.

Comprobemos ahora que nuestras curvas de nivel ℓ_k convergen a líneas rectas. En efecto, siguiendo el comentario que hicimos en los preliminares acerca de la geometría de los finales helicoidales (página 23), si asumimos que la aplicación de Gauss g de la superficie tiene un cero en dicho final, entonces existe una coordenada conforme z alrededor del final, de manera que los datos de Weierstrass de la superficie pueden escribirse localmente en el final como

$$g(z) = zh(z), \quad \Phi_3(z) = -\frac{i}{z} dz,$$

siendo h una función holomorfa en el final con $h(0) = a_0 \neq 0$. De este modo, teniendo en cuenta que $\operatorname{Re} \Phi_1 + i \operatorname{Re} \Phi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{\Phi_3}}{g} - g\Phi_3 \right)$, de la representación de Weierstrass obtenemos que la proyección del final sobre el (x_1, x_2) -plano viene dada por

$$(x_1 + ix_2)(z) = \frac{i}{2} \int_{\xi} \frac{dz}{z^2 h(z)},$$

donde $\xi = \partial D(0, \epsilon)$ para cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Al desarrollar en serie e integrar, encontramos que

$$(x_1 + ix_2)(z) = c + \frac{-i}{2a_0 z} + O(1/z^2), \tag{10.4}$$

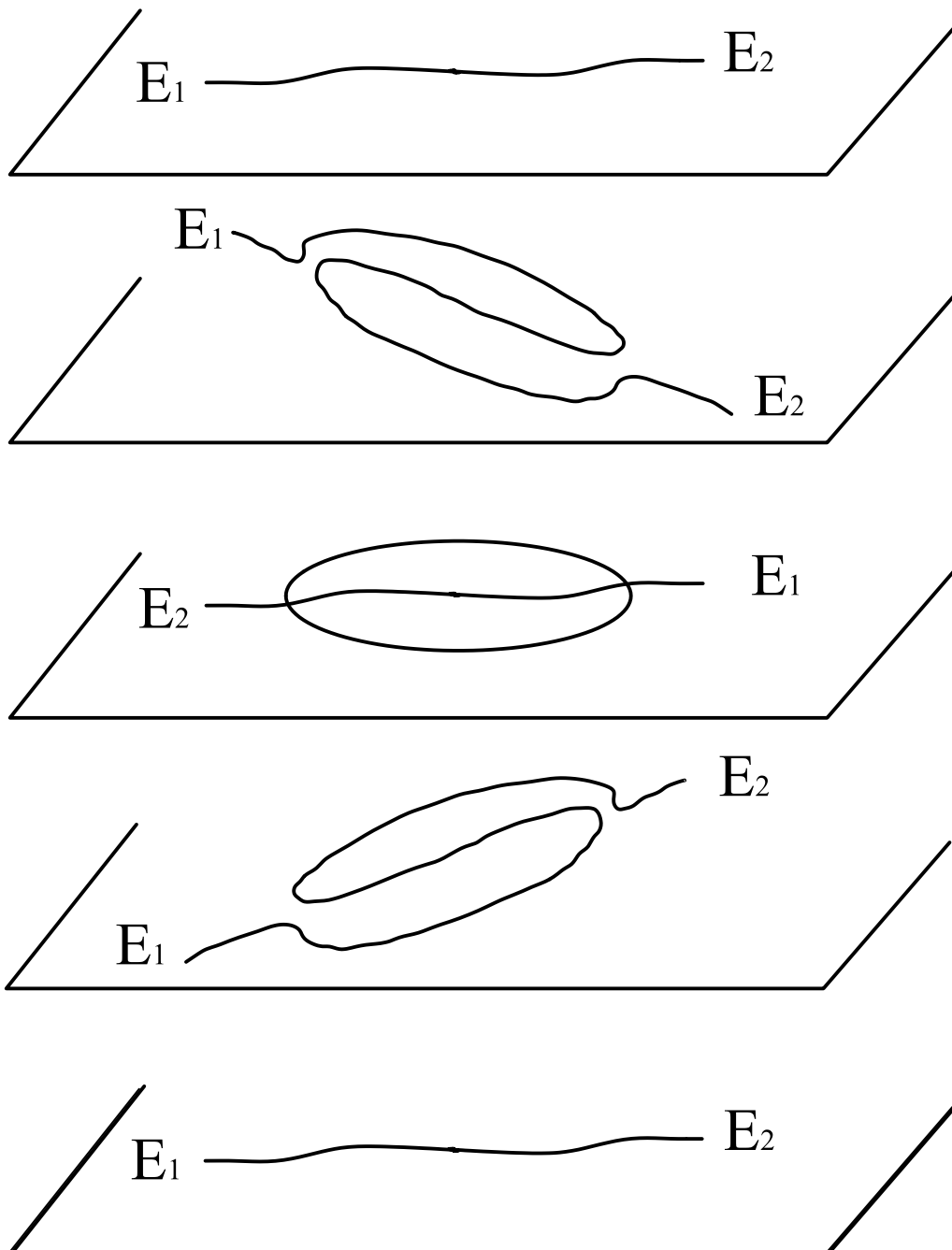


Figura 10.6: Evolución real de las curvas α_k .

siendo $c \in \mathbb{C}$ y $O(1/z^2)$ una sucesión de términos de orden mayor o igual que $1/z^2$. Ahora, $(c, 0) + \langle(0, 0, 1)\rangle$ es el eje del final helicoidal, pero recordemos que hemos asumido que dicho eje es el x_3 -eje, luego, concluimos que $c = 0$. Para más detalles sobre estos últimos cálculos consúltese [P, Sección 4].

Ahora, gracias a la sencilla expresión que tenemos de Φ_3 , es muy fácil integrar y tomar parte real, para obtener

$$x_3(z) = \arg(z) ,$$

donde por $\arg(z)$ entendemos el argumento del número complejo z . De este modo el conjunto $\{x_3(z) = k\}$ puede parametrizarse como

$$\{z \mid \arg(z) = k\} = \{re^{ik} \mid r \in]0, \varepsilon[\} ,$$

siendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que la anterior expresión esté en el dominio de parámetros de la coordenada z con la que estamos trabajando. Teniendo en cuenta esta última expresión y (10.4), obtenemos mediante un cálculo directo que la curva ℓ_k puede ser parametrizada en un entorno del final como

$$\ell_k(r) = (x_1 + ix_2)(re^{ik}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ar} \sin(k + \theta_0) + O(1/r^2) , -\frac{1}{ar} \cos(k + \theta_0) + O(1/r^2) \right) ,$$

donde $r \in]0, \varepsilon[$ y $a \in \mathbb{R}$ es tal que $a_0 = ae^{i\theta_0}$. Claramente, esta curva es asintótica a la línea recta

$$\{t \cdot (\sin(k + \theta_0), -\cos(k + \theta_0)) \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

Este argumento demuestra la segunda parte de la Observación 10.1 y muestra que la Figura 10.1 es una representación realista de las curvas ℓ_k .

Retomemos la demostración del Teorema 10.1. De ahora en adelante, asumiremos que la línea vertical contenida en $\tilde{X}(\tilde{M})$ coincide con el eje $\{x = y = 0\}$. Además, llamaremos L a la curva $L \subset M$ que satisface $X(L) = \{x = y = 0\}/\langle\mathfrak{t}\rangle$. Nótese que L es una curva cerrada debido a la periodicidad de la superficie.

En la demostración del Lema 10.1 comprobamos que la aplicación $S_3 : T \rightarrow T$ definida en la página 159 es una involución antiholomorfa. Así, teniendo en cuenta su definición, no es difícil ver que la simetría actúa sobre las 1-formas Φ_i del siguiente modo:

$$\begin{cases} S_3^*(\Phi_1) = -\overline{\Phi_1} \\ S_3^*(\Phi_2) = -\overline{\Phi_2} \\ S_3^*(\Phi_3) = \overline{\Phi_3} . \end{cases} \quad (10.5)$$

Ahora, usando (10.5) y las ecuaciones

$$g = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2} , \quad \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0 ,$$

concluimos que

$$g(S_3(p)) = -\overline{\left(\frac{\Phi_3}{\Phi_1 + i\Phi_2}\right)} = \overline{\left(\frac{\Phi_1 - i\Phi_2}{\Phi_3}\right)} = \frac{1}{g(p)} , \quad p \in T . \quad (10.6)$$

Esta información que acabamos de obtener nos será útil para nuestro próximo objetivo: estudiar la ramificación de la aplicación de Gauss.

Lema 10.2. *La aplicación de Gauss g tiene exactamente dos puntos de ramificación en la curva L .*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{G} := \{p \in M \mid |g(p)| = 1\} .$$

\mathcal{G} está formado por aquellos puntos de M que tienen vector normal horizontal. Además, \mathcal{G} es el conjunto de ceros de una función armónica, concretamente de $\log(|g|)$, luego concluimos que \mathcal{G} consiste en un conjunto de curvas analíticas (véase el Teorema 4). Además, cuando estas curvas se encuentran, lo hacen formando un sistema equiangular y los puntos de intersección coinciden con los puntos de ramificación de g .

Por otro lado, observemos que las curvas en \mathcal{G} no convergen a los finales en T , puesto que éstos tienen vector normal vertical. Además, \mathcal{G} es compacto en T . En consecuencia, el conjunto \mathcal{G} es compacto en M . Recordemos que estamos identificando la superficie de Riemann M con el toro T menos dos puntos, los finales.

La recta vertical $X(L)$ está contenida en la superficie, luego los puntos de L han de tener vector normal horizontal, esto es,

$$L \subset \mathcal{G} .$$

Consideremos además la curva β que definimos en el último párrafo de la demostración del Lema 10.1 (página 165). Recordemos que dicha curva pasa por los puntos V_1 y V_2 . Tales puntos tienen vector normal vertical y opuesto el uno del otro, luego, por continuidad de la aplicación de Gauss, existen al menos dos puntos en β diferentes de V_1 y V_2 y tales que su vector normal es horizontal. Además, la curva β no corta a L , por tanto dichos puntos no pertenecen a L . En consecuencia,

$$L \subsetneq \mathcal{G} . \tag{10.7}$$

Para demostrar el Lema 10.1 procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que no hay puntos de ramificación de g en L . En consecuencia la aplicación de Gauss $g : L \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una biyección. Tomemos ahora γ una curva cerrada en \mathcal{G} y diferente de L . Su existencia se debe a (10.7). Así, tenemos que γ no corta a L , puesto que si lo hiciera sería en un punto de ramificación de g . Por otro lado, la simetría de la superficie implica que los puntos de $S_3(\gamma)$ también tienen vector normal horizontal, luego $S_3(\gamma) \subset \mathcal{G}$. Distingamos casos.

- Asumamos que $\gamma \neq S_3(\gamma)$. Entonces la imagen de γ y $S_3(\gamma)$ por g recubriría dos veces $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Además, la imagen de L recubre \mathbb{S}^1 al menos otra vez más. Estos hechos entran en contradicción con que el grado de g sea dos (véase la Figura 10.7).
- Supongamos ahora que $\gamma = S_3(\gamma)$ (ver la Figura 10.8). Razonando como en el caso anterior, concluimos que $g : \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una biyección. Por un lado, teniendo en cuenta la ecuación (10.6) tenemos que

$$g(S_3(p)) = \frac{1}{g(p)} , \quad \forall p \in \gamma .$$

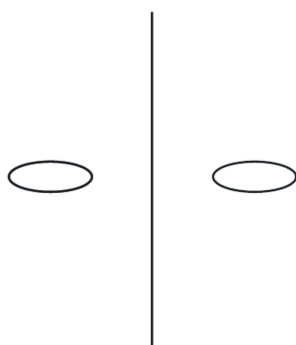


Figura 10.7: Composición no posible del conjunto \mathcal{G} .

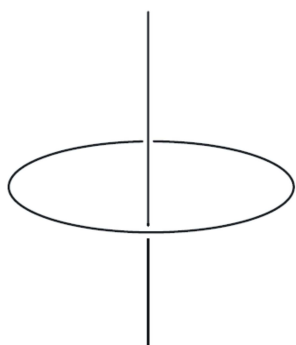


Figura 10.8: Composición no posible del conjunto \mathcal{G} .

Por otro lado, $g(p) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, luego,

$$g(p) = \frac{1}{g(p)} = g(S_3(p)),$$

contradiciendo este hecho la inyectividad de $g|_L$.

En consecuencia, existen puntos de ramificación de g en L .

Apliquemos ahora la fórmula de Riemann-Hurwitz (Teorema 9 en el capítulo de preliminares) para la aplicación de Gauss $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Teniendo en cuenta que $\deg(g) = 2$, deducimos que el índice total de ramificación de g es 4. Ahora, tenemos dos finales helicoidales luego esos puntos son de ramificación de g y con índice 1 cada uno [MeR2]. Dichos puntos no están en L , por tanto ocurre una de las tres siguientes posibilidades:

- En L hay exactamente dos puntos de ramificación de g y cada uno de ellos tiene índice de ramificación uno (véase la Figura 10.9).

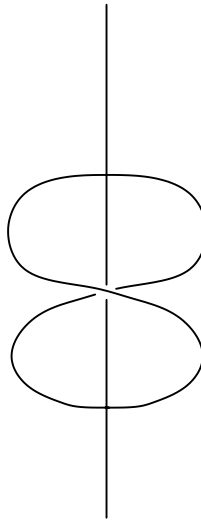


Figura 10.9: El conjunto \mathcal{G} .

- Existe un único punto de ramificación de g en L y tiene índice de ramificación uno. Esta situación no es posible por ser \mathcal{G} simétrico respecto de L .
- L solo contiene un punto de ramificación y es de índice dos. Este caso no puede ocurrir por ser g de grado dos.

En consecuencia, g tiene cuatro puntos de ramificación, cada uno de ellos con índice de ramificación uno, y además, dos de ellos están en L . ■

El siguiente paso en la demostración del Teorema 10.1 es usar toda la información que hemos recopilado para precisar el toro T y los datos de Weierstrass de X . Para describir el toro T usaremos como parámetro conforme a la aplicación de Gauss. En lo

que sigue, denotaremos $z = g : T \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. En el lema que acabamos de demostrar, hemos comprobado que z tiene cuatro puntos de ramificación en T , todos ellos con número de ramificación uno. Por tanto, el toro T es conformemente equivalente a un toro de la forma

$$\left\{ (z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)(z-d)} \right\},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son las imágenes por z de los puntos de ramificación de z [FaKr]. Identifiquemos T con este toro. El Lema 10.2 garantiza que dos de estos puntos tienen vector normal horizontal, luego su imagen por $z = g$ cae en $\mathbb{S}^1 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Por tanto, salvo una rotación, podemos asumir que

$$\begin{cases} c = e^{i\rho} \\ d = e^{-i\rho} \\ -1 \in g(L) = z(L), \end{cases}$$

siendo $\rho > 0$ (véase la Figura 10.10). Nótese que tanto L como $\mathcal{G} \setminus L$ recubren dos veces

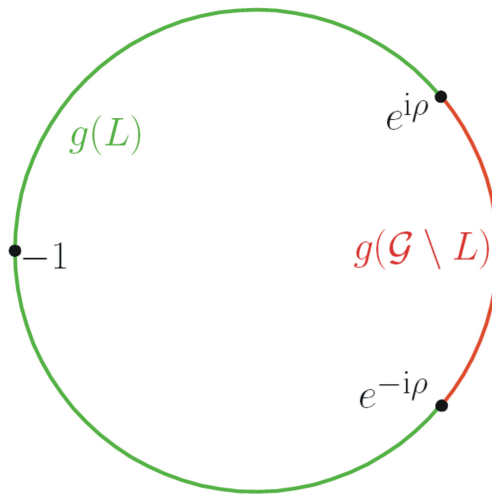


Figura 10.10: Imagen de \mathcal{G} por g .

sus respectivas imágenes por la aplicación de Gauss g . Este hecho se debe a que g es de grado dos y los puntos de ramificación que tiene en L son de índice uno.

Por otro lado, la simetría S_3 del toro T preserva los puntos de ramificación de z , luego de la ecuación (10.6) obtenemos que

$$b = \frac{1}{a}.$$

Después de estas consideraciones, w puede escribirse como

$$w^2 = \frac{(z-a)(\bar{a}z-1)}{(z-e^{i\rho})(z-e^{-i\rho})},$$

siendo $a \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\rho}, e^{-i\rho}\}$.

Por otro lado, de (10.6) obtenemos que $z \circ S_3 = 1/\bar{z}$. Además, usando la expresión que tenemos de w , un cálculo directo comprueba que $w^2(1/\bar{z}) = \overline{w^2(z)}$. En consecuencia,

$$S_3(z, w) = \left(\frac{1}{\bar{z}}, \pm \bar{w} \right).$$

Para determinar el signo apropiado en la segunda componente, usaremos que los puntos de L son fijos por la simetría S_3 . En particular, S_3 fija el punto

$$\left(-1, +\sqrt{\frac{1 + |a|^2 - 2 \operatorname{Re} a}{2 - 2 \cos \rho}} \right) \in L.$$

Por tanto, $w \circ S_3 = \bar{w}$ y la expresión correcta de S_3 es

$$S_3(z, w) = \left(\frac{1}{\bar{z}}, \bar{w} \right). \quad (10.8)$$

Ahora, teniendo en cuenta (10.3) y que estamos llamando $z = g$, salvo renombrar los puntos, concluimos que

$$\begin{cases} E_1 = (0, \sqrt{a}) \\ E_2 = (\infty, \sqrt{a}) \\ V_1 = (0, -\sqrt{a}) \\ V_2 = (\infty, -\sqrt{a}). \end{cases}$$

Lo siguiente que haremos será comprobar que a es un número real.

Proposición 10.1. *El número a es real.*

Demostración. Consideremos las funciones meromorfas $w - \sqrt{a}$, $w + \sqrt{a}$ y $w + \sqrt{\bar{a}}$. Sus divisores son

$$(w - \sqrt{a}) = \frac{E_1 P_0}{e^{i\rho} e^{-i\rho}}, \quad (w + \sqrt{a}) = \frac{V_1 P_1}{e^{i\rho} e^{-i\rho}}, \quad (w + \sqrt{\bar{a}}) = \frac{V_2 P_0}{e^{i\rho} e^{-i\rho}}, \quad (10.9)$$

siendo

$$P_0 = (z_1, +\sqrt{a}), \quad P_1 = (z_1, -\sqrt{a}), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\bar{z}_1}, -\sqrt{\bar{a}} \right),$$

donde

$$z_1 = \frac{1 + |a|^2 - 2a \cos \rho}{2 \operatorname{Im} a} i. \quad (10.10)$$

Notemos que z_1 es distinto de cero por ser a diferente de $e^{i\rho}$ y de $e^{-i\rho}$.

Además, llamaremos τ a la 1-forma holomorfa en el toro T , esto es, (nótese que el Teorema 6 de los preliminares implica la unicidad de dicha 1-forma, salvo multiplicación por una constante compleja)

$$\tau = \frac{1}{(z - e^{i\rho})(z - e^{-i\rho})} \frac{dz}{w}.$$

Finalmente, introduzcamos la 1-forma meromorfa

$$\eta = \operatorname{Im}(\sqrt{a})(z - z_1) \frac{w + \sqrt{a}}{w - \sqrt{a}} \tau.$$

Teniendo en cuenta (10.9) y que el divisor de $z - z_1$ es

$$(z - z_1) = \frac{P_0 P_1}{E_2 V_2},$$

es inmediato comprobar que el divisor de η viene dado por

$$(\eta) = \frac{P_1 P_2}{E_1 E_2}.$$

Tambi3n haciendo c3lculos sencillos comprobamos que el residuo de la 1-forma η en el polo E_1 es $\operatorname{Res}(\eta, E_1) = i$. En principio, la elecci3n que hemos hecho de la 1-forma η podr3a parecer arbitraria. En realidad, lo que hemos hecho es buscar una 1-forma meromorfa en el toro T que tenga los mismos polos y los mismos residuos en esos polos que la 1-forma Φ_3 . De este modo, obtenemos que la diferencia entre ambas 1-formas es holomorfa, luego un m3ltiplo de τ . As3, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\Phi_3 = \eta + \lambda \tau. \quad (10.11)$$

Esta relaci3n nos permitir3 precizar Φ_3 . Para hacerlo, el primer paso ser3 ver lo que sucede al aplicar S_3 a la 1-forma τ . As3,

$$S_3^* \tau = -\frac{1}{(\bar{z} - e^{i\rho})(z - e^{i\rho})} \frac{d\bar{z}}{\bar{w}} = -\bar{\tau}, \quad (10.12)$$

donde hemos tenido en cuenta la expresi3n de S_3 dada por (10.8). Comprobemos ahora lo que le ocurre a η . Usando de nuevo (10.8) y la ecuaci3n anterior, se tiene

$$\begin{aligned} S_3^* \eta &= -\operatorname{Im}(\sqrt{a}) \left(\frac{1}{\bar{z}} - z_1 \right) \frac{\bar{w} + \sqrt{a}}{\bar{w} - \sqrt{a}} \bar{\tau} = -\frac{\operatorname{Im}(\sqrt{a})}{(\bar{w} - \sqrt{a})(\bar{w} - \sqrt{a})} \left(\frac{1}{\bar{z}} - z_1 \right) (\bar{w}^2 - a) \bar{\tau} = \\ &= -\frac{\operatorname{Im}(\sqrt{a})(|a|^2 + 1 - 2a \cos \rho)}{(\bar{w} - \sqrt{a})(\bar{w} - \sqrt{a})} \left(\bar{z} - \frac{|a|^2 + 1 - 2\bar{a} \cos \rho}{2i \operatorname{Im}(a)} \right) \left(\bar{z} + \frac{2i \operatorname{Im}(a)}{|a|^2 + 1 - 2a \cos \rho} \right) \bar{\tau} = \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $2i \operatorname{Im} a = a - \bar{a}$, se sigue

$$\frac{\operatorname{Im}(\sqrt{a})}{(\bar{w} - \sqrt{a})(\bar{w} - \sqrt{a})} (\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{w}^2 - a) \bar{\tau} = \operatorname{Im}(\sqrt{a})(\bar{z} - \bar{z}_1) \frac{\bar{w} + \sqrt{a}}{\bar{w} - \sqrt{a}} \bar{\tau} = \bar{\eta}.$$

Luego,

$$S_3^* \eta = \bar{\eta}. \quad (10.13)$$

Adem3s, ya notamos en (10.5) que $S_3^* \Phi_3 = \bar{\Phi}_3$. entonces, de (10.5), (10.11), (10.12) y (10.13) deducimos que

$$\bar{\eta} - \lambda \bar{\tau} = \bar{\eta} + \bar{\lambda} \bar{\tau},$$

luego, $(\lambda + \bar{\lambda}) \bar{\tau} = 0$, y por tanto $\operatorname{Re} \lambda = 0$. As3, podemos escribir $\lambda = ir$ con $r \in \mathbb{R}$.

Ahora que tenemos una expresión amigable de Φ_3 , a saber $\Phi_3 = \eta + ir\tau$, usemos que tiene un cero en el punto V_1 . De este modo,

$$0 = \Phi_3(V_1) = \eta(V_1) + ir\tau(V_1) = \left(\operatorname{Im}(\sqrt{a})z_1 \frac{\sqrt{\bar{a}} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + ir \right) \tau(V_1).$$

Teniendo en cuenta que $\tau(V_1) \neq 0$ y simplificando en la igualdad anterior, concluimos que

$$\operatorname{Im}(\sqrt{a})z_1 \frac{\sqrt{\bar{a}} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = -ir, \quad (10.14)$$

luego, la expresión de la izquierda de esta igualdad es un número imaginario y, por tanto, coincide con el opuesto de su conjugado. En consecuencia,

$$z_1 \frac{\sqrt{\bar{a}} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = -\bar{z}_1 \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\bar{a}}}{2\sqrt{a}}. \quad (10.15)$$

Finalmente, para comprobar que $a \in \mathbb{R}$ procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\operatorname{Im} a \neq 0$. Ahora, (10.15) implica que $z_1|a| = \bar{z}_1 a$. Sustituyendo aquí la expresión de z_1 dada en (10.10) obtenemos que debe ocurrir

$$(|a| + a)(|a|^2 - 2|a| \cos \rho + 1) = 0,$$

luego, al haber supuesto $\operatorname{Im} a \neq 0$, tiene que ser

$$|a|^2 - 2|a| \cos \rho + 1 = 0.$$

Esta igualdad obliga a ser $\cos^2 \rho = 1$, lo que implica que $e^{i\rho} = e^{-i\rho}$ siendo esto absurdo. Por consiguiente, la parte imaginaria de a es cero, luego a es real. ■

Observación 10.2. Nótese que al ser $a \in \mathbb{R}$, entonces el término de la izquierda de la igualdad (10.14) es cero. Por tanto $r = 0$, luego $\lambda = 0$ y de (10.11) obtenemos que $\Phi_3 = \eta$.

Resumiendo, tenemos los datos de Weierstrass

$$g = z, \quad \Phi_3 = -i \frac{1 + a^2 - 2a \cos \rho}{2\sqrt{a}} \frac{w + \sqrt{a}}{w - \sqrt{a}} \tau,$$

sobre el toro

$$\left\{ (z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 \mid w^2 = \frac{(z - a)(az - 1)}{(z - e^{i\rho})(z - e^{-i\rho})} \right\},$$

menos los puntos $E_1 = (0, \sqrt{a})$ y $E_2 = (\infty, \sqrt{a})$, siendo $a \in \mathbb{R}$.

Como demostramos en el capítulo anterior, esta representación de Weierstrass da lugar al helicoide simplemente periódico de género uno \mathcal{H}_1 , luego aquí podríamos dar por finalizada la demostración del Teorema 10.1. Sin embargo, trabajaremos un poco más con el fin de comprobar que caemos en las hipótesis del Teorema 9.3.

Denotando por $S : T \rightarrow T$ a la simetría dada por $S(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$, es inmediato deducir de las expresiones anteriores que

$$g \circ S = \bar{g}, \quad S^*(\Phi_3) = -\overline{\Phi_3}.$$

Usando estas igualdades y la expresión de Φ_1 y Φ_2 a partir de g y Φ_3 (véase (1.8)), obtenemos

$$S^*\Phi_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{g}} - \bar{g} \right) \overline{\Phi_3} = -\frac{1}{2} \overline{\left(\frac{1}{g} - g \right) \Phi_3} = -\overline{\Phi_1},$$

$$S^*\Phi_2 = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\bar{g}} + \bar{g} \right) \overline{\Phi_3} = \frac{i}{2} \overline{\left(\frac{1}{g} - g \right) \Phi_3} = \overline{\Phi_2},$$

luego,

$$S^*(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = (-\overline{\Phi_1}, \overline{\Phi_2}, -\overline{\Phi_3}),$$

De esta forma, S es una involución antiholomorfa y su isometría asociada es una reflexión respecto de la línea horizontal $\{x_1 = x_3 = 0\}$. Además, S tiene puntos fijos en T y, recordemos, el conjunto de puntos fijos de una tal involución es o bien vacío, o bien la totalidad de una curva [HMe4]. Por consiguiente, deducimos que dicha línea horizontal está contenida en la superficie.

En consecuencia, tenemos todas las hipótesis del Teorema 9.3 y por tanto concluimos que \widetilde{M} es el helicoides simplemente periódico de género uno \mathcal{H}_1 , quedando demostrado de este modo el Teorema 10.1.

Bibliografía

- [AhS] L. V. Ahlfors y L. Sario, *Riemann Surfaces*. Princeton Mathematical Series **26**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).
- [A1] A. Alarcón, *On the existence of a proper conformal maximal disk in \mathbb{L}^3* . Aparecerá en *Differ. Geom. Appl.*
- [A2] A. Alarcón, *Recent progresses in the Calabi-Yau problem for minimal surfaces*. *Escola de Geometria Diferencial em Homenagem a Shiing-Shen Chern*. *Mat. Contemp.* **30**, 29–40 (2006).
- [A3] A. Alarcón, *On the Calabi-Yau problem for maximal surfaces in \mathbb{L}^3* . Aparecerá en *Differ. Geom. Appl.*
- [A4] A. Alarcón, *Compact complete minimal immersions in \mathbb{R}^3* . Preprint.
- [AFM1] A. Alarcón, L. Ferrer y F. Martín, *A uniqueness theorem for the singly periodic genus one helicoid*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (6), 2819–2829 (2007).
- [AFM2] A. Alarcón, L. Ferrer y F. Martín, *On the singly periodic genus one helicoid*. *The 5-th Conference of Balkan Society of Geometers*. *Differ. Geom. Dyn. Syst.* **8**, 1–7 (2006).
- [AFM3] A. Alarcón, L. Ferrer y F. Martín, *Density theorems for complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . Aparecerá en *Geom. Funct. Anal.*
- [AN] A. Alarcón y N. Nadirashvili, *Limit sets for complete minimal immersions*. *Math. Zeit.* **258** (1), 107–113 (2008).

- [Be] S. Bernstein, *Über ein geometrisches theorem und seine anwendung auf die partiellen differentialgleichungen vom elliptischen typus*. Math. Z. **26**, 551–558 (1927).
- [Bo] A. I. Bobenko, *Helicoids with handles and Baker-Akhiezer spinors*. Math. Z. **229** (1), 9–29 (1998).
- [Bn] O. Bonnet, *Memoire sur la theorie des surfaces applicables*. J. Éc. Polyt. **42**, (1867).
- [Br] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*. Graduate Text in Math., **139**, Springer-Verlag, New York (1991).
- [B] F. F. de Brito, *Power series with Hadamard gaps and hyperbolic complete minimal surfaces*. Duke Math. J. **68** (2), 297–300 (1992).
- [Ca] E. Calabi, *Problems in differential geometry*. Ed. S. Kobayashi and J. Ells, Jr., The United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965. Nippon Hyoronsha Co., Ltd., Tokyo 170 (1966).
- [ClHK] M. Callahan, D. Hoffman y H. Karcher, *A family of singly periodic minimal surfaces invariant under a screw motion*. Experiment. Math. **2** (3), 157–182 (1993).
- [ClHMe] M. Callahan, D. Hoffman y W. H. Meeks III, *The structure of singly-periodic minimal surfaces*. Invent. Math. **99** (3), 455–481 (1990).
- [CeGa] C. H. Chen y F. Gackstatter, *Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces of Enneper type*. Math. Ann. **259** (3), 359–369 (1982).
- [Ch] S. Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*. Comment. Math. Helv. **51** (1), 43–55 (1976).
- [Cr] S. S. Chern, *The geometry of G-structures*. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 167–219 (1966).
- [CMz1] T. H. Colding y W. P. Minicozzi II, *Minimal submanifolds*. Bull. London Math. Soc. **38** (3), 353–395 (2006).

- [CMz2] T. H. Colding y W. P. Minicozzi II, *The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces*. Aparecerá en *Ann. Math.*
- [Co] P. Collin, *Topologie et courbure des surfaces minimales de \mathbb{R}^3* . *Ann. Math.* (2) **145** (1), 1–31 (1997).
- [CoKuMeR] P. Collin, R. Kusner, W. H. Meeks III y H. Rosenberg, *The topology, geometry and conformal structure of properly embedded minimal surfaces*. *J. Differ. Geom.* **67** (2), 377–393 (2004).
- [CoR] P. Collin y H. Rosenberg, *Notes sur la démonstration de N. Nadirashvili des conjectures de Hadamard et Calabi-Yau*. *Bull. Sci. Math.* **123** (7), 563–576 (1999).
- [Cn1] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*. Graduate Texts in Math., **11**, Springer-Verlag, New York (1973).
- [Cn2] J. B. Conway, *Functions of one complex variable II*. Graduate Texts in Math., **159**, Springer-Verlag, New York (1995).
- [Cs] C. J. Costa, *Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends*. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **15** (1)(2), 47–54 (1984).
- [CsSi] C. J. Costa y P. A. Q. Simões, *Complete minimal surfaces of arbitrary genus in a slab of \mathbb{R}^3* . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (2), 535–546 (1996).
- [D] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **33**, 263–321 (1931).
- [E] A. Enneper, *Analytisch-geometrische untersuchungen*. *Z. Math. und Phys.* **9**, 96–125 (1864).
- [Eu] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudeates sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Harvard Univ. Press, Cambridge, MA (1969).
- [FaKr] H. M. Farkas y I. Kra, *Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, New York (1992).
- [FM] L. Ferrer y F. Martín, *Minimal surfaces with helicoidal ends*. *Math. Z.* **250** (4), 807–839 (2005).

- [FMMe] L. Ferrer, F. Martín y W. H. Meeks III, *The existence of proper minimal surfaces of arbitrary topological type*. Preprint.
- [FiKo1] W. Fisher y E. Koch, *On 3-periodic minimal surfaces*. Zeitschrift für Kristallographic **52**, 31–52 (1987).
- [FiKo2] W. Fisher y E. Koch, *On 3-periodic minimal surfaces with non-cubic symmetry*. Zeitschrift für Kristallographic **183**, 129–152 (1988).
- [G] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and nonexplosion of the brownian motion on riemannian manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36**, 135–249 (1999).
- [Ha] J. Hadamard, *Les surfaces a courbures opposees et leur lignes geodesiques*. J. Math. pure et appl. **4**, 27–73 (1898).
- [He] L. Henneberg, *Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Kurve zur geodätischen Linie haben*. Dissertation, Zürich (1875).
- [HK] D. Hoffman y H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. Geometry V, Encyclopaedia of Math. Sciences **90**, Springer-Verlag, Berlin, 5–93, 267–272 (1997).
- [HKW1] D. Hoffman, H. Karcher y F. Wei, *Adding handles to the helicoid*. Bull. Amer. Math. Soc., New Series **29** (1), 77–84 (1993).
- [HKW2] D. Hoffman, H. Karcher y F. Wei, *The singly periodic genus-one helicoid*. Comment. Math. Helv. **74** (2), 248–279 (1999).
- [HKW3] D. Hoffman, H. Karcher y F. Wei, *The genus one helicoid and the minimal surfaces that led to its discovery*. In Global Analysis and Modern Mathematics. Publish or Perish Press, K. Uhlenbeck, editor, 119–170 (1993).
- [HMc] D. Hoffman y J. McCuan, *Embedded minimal ends asymptotic to the Helicoid*. Commun. Anal. Geom. **11** (4), 721–735 (2003).
- [HMe1] D. Hoffman y W. H. Meeks III, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Invent. Math. **101** (2), 373–377 (1990).

- [HMe2] D. Hoffman y W. H. Meeks III, *A complete embedded minimal surface in \mathbb{R}^3 with genus one and three ends*. J. Differ. Geom. **21** (1), 109–127 (1985).
- [HMe3] D. Hoffman y W. H. Meeks III, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1), 134–136 (1985).
- [HMe4] D. Hoffman y W. H. Meeks III, *Embedded minimal surfaces of finite topology*. Ann. Math. (2) **131** (1), 1–34 (1990).
- [HWeWo] D. Hoffman, M. Weber y M. Wolf, *An embedded genus-one helicoid*. Aparecerá en Ann. Math.
- [HW] D. Hoffman y F. Wei, *Deforming the singly periodic genus-one helicoid*. Experiment. Math. **11** (2), 207–218 (2002).
- [HWh1] D. Hoffman y B. White, *The geometry of genus-one helicoids*. Preprint.
- [HWh2] D. Hoffman y B. White, *Genus-one helicoids from a variational point of view*. Preprint.
- [Hu] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Comment. Math. Helv. **32**, 13–72 (1957).
- [IKw] S. Iyanaga y Y. Kawada, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Cambridge, MA: MIT Press (1980).
- [JX1] L. P. Jorge y F. Xavier, *On the existence of complete bounded minimal surfaces in \mathbb{R}^n* . Bull. Braz. Math. Soc. **10** (2), 171–173 (1979).
- [JX2] L. P. Jorge y F. Xavier, *A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes*. Ann. Math. (2) **112** (1), 203–206 (1980).
- [JX3] L. P. Jorge y F. Xavier, *An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersions*. Math. Z. **178** (1), 77–82 (1981).
- [Ka] J. L. Kazdan, *Some applications of partial differential equations to problems in geometry*. Surveys in Geometry (1983/84).

- [La] J. L. Lagrange, *Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies*. Miscellanea Taurinensia 2 **325** (1), 173–199 (1760).
- [Le] A. Legendre, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partiellas*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 309–351 (1789).
- [L] F. J. López, *A nonorientable complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes*. Proc. Amer. Math. Soc. **103** (3), 913–917 (1988).
- [LM] F. J. López y F. Martín, *A survey on complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . Publ. Mat. **43** (2), 341–449 (1999).
- [LMMo1] F. J. López, F. Martín y S. Morales, *Adding handles to Nadirashvili's surfaces*. J. Differ. Geom. **60** (1), 155–175 (2002).
- [LMMo2] F. J. López, F. Martín y S. Morales, *Complete nonorientable minimal surfaces in a ball of \mathbb{R}^3* . Trans. Amer. Math. Soc. **358** (9), 3807–3820 (2006).
- [LRiW] F. J. López, M. Ritoré y F. Wei, *A characterization of Riemann's minimal surfaces*. J. Differ. Geom. **47** (2), 376–397 (1997).
- [LRo] F. J. López y A. Ros, *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*. J. Differ. Geom. **33** (1), 293–300 (1991).
- [M] F. Martín, *Density theorems and applications*. Proceedings of the workshop "Progress in surface theory", Oberwolfach, 12–15 (2007).
- [MMeN] F. Martín, W. H. Meeks III y N. Nadirashvili, *Bounded domains which are universal for minimal surfaces*. Amer. J. Math. **129** (2), 455–461 (2007).
- [MMo1] F. Martín y S. Morales, *A complete bounded minimal cylinder in \mathbb{R}^3* . Mich. Math. J. **47** (3), 499–514 (2000).
- [MMo2] F. Martín y S. Morales, *On the asymptotic behavior of a complete bounded minimal surface in \mathbb{R}^3* . Trans. Amer. Math. Soc. **356** (10), 3985–3994 (2004).
- [MMo3] F. Martín y S. Morales, *Complete proper minimal surfaces in convex bodies of \mathbb{R}^3* . Duke Math. J. **128** (3), 559–593 (2005).

- [MMo4] F. Martín y S. Morales, *Complete proper minimal surfaces in convex bodies of \mathbb{R}^3 (II): The behavior of the limit set*. Comment. Math. Helv. **81** (3), 699–725 (2006).
- [MN] F. Martín y N. Nadirashvili, *A Jordan curve spanned by a complete minimal surface*. Arch. Ration. Mech. Anal. **184** (2), 285–301 (2007).
- [MUYa] F. Martín, M. Umehara y K. Yamada, *Complete bounded null curves immersed in \mathbb{C}^3 and $SL(2, \mathbb{C})$* . Preprint.
- [Me1] W. H. Meeks III, *Global problems in Classical minimal surfaces theory*. Clay Math. Proc. **2**, 453–469 (2005).
- [Me2] W. H. Meeks III, *The geometry and topology of singly-periodic minimal surfaces*. Asian J. Math. **7** (3), 297–301 (2003).
- [MeP1] W. H. Meeks III y J. Pérez, *Conformal properties in classical minimal surface theory*. Surveys of Differential Geometry IX - Eigenvalues of Laplacian and other geometric operators, International Press, Somerville, MA, 275–335 (2004).
- [MeP2] W. H. Meeks III y J. Pérez, *Uniqueness of the helicoid and the classical theory of minimal surfaces*. Aparecerá en Bull. Amer. Math. Soc.
- [MeP3] W. H. Meeks III y J. Pérez, *O note on the uniqueness of the helicoid*. Preprint.
- [MePRo1] W. H. Meeks III, J. Pérez y A. Ros, *The Geometry of minimal surfaces of finite genus I; curvature estimates and quasiperiodicity*. J. Differ. Geom. **66** (1), 1–45 (2004).
- [MePRo2] W. H. Meeks III, J. Pérez y A. Ros, *The Geometry of minimal surfaces of finite genus IV; the Calabi-Yau conjectures*. Preprint.
- [MePRo3] W. H. Meeks III, J. Pérez y A. Ros, *Properly embedded minimal planar domains*. Preprint.
- [MeR1] W. H. Meeks III y H. Rosenberg, *The minimal lamination closure theorem*. Duke Math. J. **133** (3), 467–497 (2006).

- [MeR2] W. H. Meeks III y H. Rosenberg, *The Geometry of Periodic Minimal Surfaces*. Comment. Math. Helv. **68** (4), 538–578 (1993).
- [MeR3] W. H. Meeks III y H. Rosenberg, *The uniqueness of the helicoid*. Ann. Math. (2) **161** (2), 727–758 (2005).
- [MeWe] W. H. Meeks III y M. Weber, *Bending the Helicoid*. Preprint.
- [MeY] W. H. Meeks III y S.-T. Yau, *The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds*. Topology **21** (4), 409–442 (1982).
- [Mu] J. B. Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés. par div. Savans **10**, 477–510, (1785).
- [Mi] H. Minkowski, *Volumen und Oberfläche*. Math. Ann. **57** (4), 447–495 (1903).
- [Mn1] G. Monge, *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles*. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 118–192 (1787).
- [Mn2] G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie (5^{ème} Ed.)*. Bachelier, Paris (1850).
- [Mo1] S. Morales, *On the existence of a proper minimal surface in \mathbb{R}^3 with a conformal type of disk*. Geom. Funct. Anal. **13** (6), 1281–1301 (2003).
- [Mo2] S. Morales, *Superficies minimales completas e hiperbólicas en \mathbb{R}^3* . Tesis Doctoral, Universidad de Granada (2002).
- [N1] N. Nadirashvili, *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*. Invent. Math. **126** (3), 457–465 (1996).
- [N2] N. Nadirashvili, *An application of potential analysis to minimal surfaces*. Mosc. Math. J. **1** (4), 601–604 (2001).
- [N3] N. Nadirashvili, Trabajo sin publicar.
- [Na] R. Narasimhan, *Compact Riemann surfaces*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel (1992).

- [Ni] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces Vol 1*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).
- [O1] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications, Inc., New York (1986).
- [O2] R. Osserman, *The convex hull property of immersed manifolds*. J. Differ. Geom. **6**, 267–270 (1971/72).
- [O3] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* . Ann. Math. (2) **80**, 392–404 (1963).
- [P] J. Pérez, *Riemann bilinear relations on minimal surfaces*. Math. Ann. **310** (2), 307–332 (1998).
- [Pl] J. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-villars, Paris (1873).
- [Ra] T. Radó, *On the problem of Plateau*. Springer-Verlag, Berlin (1933).
- [Rm1] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Inauguraldissertation, Göttingen (1851).
- [Rm2] B. Riemann, *Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*. Abh. Königl. d. Wiss. Göttingen, Mathem. Cl. **13**, 3–52 (1867).
- [Rm3] B. Riemann, *Oeuvres Mathématiques de Riemann*. Gauthiers-Villars, Paris (1898).
- [RT] H. Rosenberg y E. Toubiana, *A cylindrical type complete minimal surface in a slab of \mathbb{R}^3* . Bull. Sci. Math. **111** (3), 241–245 (1987).
- [Ry] H. L. Royden, *Function theory on compact Riemann surfaces*. J. Anal. Math. **18**, 295–327 (1967).
- [Sc1] H. F. Scherk, *De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$ disquisitiones analyticae*. Actis Soc. Jablon **4**, 204–280 (1832).

- [Sc2] H. F. Scherk, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. J. R. Angew. Math. **13**, 185–208 (1835).
- [Sw] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer, Berlin (1890). Inauguraldissertation, Göttingen (1851).
- [Se] S. M. Selby, *CRC Standard Mathematical Tables, 23rd edition*. CRC Press, Cleveland (1975).
- [Th] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton, N.J.: Princeton University Press (1997).
- [TrWe] M. Traizet y M. Weber, *Hermite polynomials and helicoidal minimal surfaces*. Invent. Math. **161** (1), 113–149 (2005).
- [We1] M. Weber, *The genus one helicoid is embedded*. Habilitationsschrift, Bonn (1999).
- [We2] M. Weber, *The genus-one helicoid as a limit of screw-motion invariant helicoids with handles*. Clay Math. Proc., **2**, Global theory of minimal surfaces, 243–258, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).
- [Wt1] K. Weierstrass, *Fortsetzung der untersuchung über die minimalflächen*. Monatsbericht der Königl. Akademied. Wiss 511–518 (1887)
- [Wt2] K. Weierstrass, *Analytische bestimmung einfach zusammenhängender minimalflächen, deren begrenzung aus geradlinigen, ganz im endlichen liegenden strecken besteht*. Math. Werke **3**, 221–238 (1903).
- [X] F. Xavier, *Convex hulls of complete minimal surfaces*. Math. Ann. **269** (2), 179–182 (1984).
- [Y1] S.-T. Yau, *Problem section. Seminar on Differential Geometry*. Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. **102** 669–706 (1982).
- [Y2] S.-T. Yau, *Review of Geometry and Analysis. Mathematics: frontiers and perspectives*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 353–401 (2000).