

Efectos en la Dinámica Marina de las Pulsaciones Atmosféricas y la Fricción en el Fondo

The effect of Atmospheric Pulses
and Bottom Friction
on Ocean Dynamics

Tesis Doctoral

Elena Quevedo Baquerizo

Grupo de Puertos y Costas

Dept. Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

CEAMA - Universidad de Granada

Efectos en la Dinámica Marina de las Pulsaciones Atmosféricas y la Fricción en el Fondo

The effect of Atmospheric Pulses and Bottom Friction on Ocean Dynamics

Tesis Doctoral

Doctorando: Elena Quevedo Baquerizo

Directores: Profa. Dra. Asunción Baquerizo Azofra
Prof. Dr. Miguel A. Losada Rodríguez
Prof. Dr. Paolo Blondeaux

Grupo de Puertos y Costas

Dpto. de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

Centro Andaluz de Medio Ambiente (CEAMA)

Universidad de Granada

Avda. del Mediterráneo, s/n.

18006 Granada

2007

A mis padres ...

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que me han apoyado en la elaboración de este trabajo, sin cuya ayuda no habría sido posible.

En primer lugar, quería agradecer a mi familia su dedicación, su apoyo y sus palabras de ánimo, y a Gonzalo por soportarme y cocinarme estos últimos meses difíciles.

Me gustaría agradecer especialmente la formación recibida y la dedicación de los profesores Miguel Ángel Losada, por su inestimable apoyo, tanto en el aspecto académico como humano, a Asunción Baquerizo, que me ha hecho aprender el rigor matemático y la disciplina personal, y a Paolo Blondeaux, que me ha acogido en su grupo de investigación y me ha mostrado otra forma de trabajar.

Quiero dar las gracias también a todos los componentes del Grupo de Dinámica de Flujos Ambientales y en especial a Migue, que se ha ocupado él solo de las estaciones ARGUS en los últimos meses y me ha prestado gran ayuda, a Alberto por su gran apoyo técnico, a María, Guille, Sergio, Tino, Alex, Dulce, Simona, Javi, Sandra, Isa, Chris y Juan por su amistad, sus buenos consejos y porque son muy buenos compañeros.

Por otro lado quiero dar las gracias a todos mis compañeros de la Universidad de Génova, que me han hecho sentir como en casa, y en especial a Giovanni y Michele.

Por último, debo agradecer el apoyo del Grupo de Puertos y Costas por la financiación recibida a través de la Fundación Empresa Universidad de Granada y al Ministerio de Ciencia y Tecnología por la beca BES-2004-5483, asociada al proyecto MORFEO (REN2002-01038). Debo agradecer también a Puertos del Estado, la Dirección General de Costas, el Faro de Sacratif y la Autoridad Portuaria de Motril, que han hecho posible la instalación de la Estación de Monitorización ARGUS en el Cabo de Sacratif.

Resumen

En esta tesis doctoral se han estudiado algunas modificaciones de las características hidrodinámicas de las oscilaciones marinas inducidas por acciones en los contornos.

La tesis se ha dividido en dos partes, en las que se estudian, respectivamente, el efecto de la fricción con el fondo en ondas de gravedad de Stokes-II, y la generación de ondas de borde por la acción de pulsaciones barométricas sobre la superficie del mar. El forzamiento de ambos procesos actúa en la frontera del cuerpo fluido, el primero en el fondo, y el segundo en la superficie; y en ambos casos se modifica la hidrodinámica marina en sentidos opuestos: en el primer caso la interacción del agua con el fondo produce la disipación de energía del oleaje, y en el segundo caso, la interacción con la atmósfera produce la generación de una oscilación.

En la primera parte de la tesis se han analizado los procesos que tienen lugar en la capa límite del fondo, bajo ondas no-lineales sin rotura. El análisis se ha centrado en las características hidrodinámicas más relevantes en el estudio del transporte de sedimentos y en la atenuación de las ondas, es decir, en la corriente estacionaria y la tensión tangencial en el fondo, la energía cinética turbulenta y la disipación de energía debido a la fricción viscosa y turbulenta.

Se ha desarrollado un modelo no-lineal que incluye la atenuación de la altura de ola, y en el que las tensiones turbulentas han sido descritas siguiendo el modelo de dos ecuaciones de Saffman (1970, 1974). Así, se ha resuelto el flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite para el caso laminar (analíticamente) y para el caso de flujo turbulento en la capa límite (numéricamente).

Se ha aplicado dicho modelo a una serie de casos de ondas de igual periodo y propagándose sobre la misma profundidad, pero con diferentes valores del peralte y la rugosidad de lecho de Nikuradse, con el fin de estudiar el efecto de estos dos parámetros en las características hidrodinámicas analizadas. Se ha encontrado que dicho modelo describe satisfactoriamente el flujo en la capa límite laminar y turbulenta, para los regímenes hidráulicos liso y rugoso.

En la segunda parte de la tesis se ha desarrollado un modelo hidrodinámico que predice la generación de puntas y ensenadas en la plataforma continental interior, como consecuencia de los vórtices turbulentos de viento actuando sobre la superficie del mar a sotavento de un obstáculo geográfico como un cabo, una isla o una construcción humana.

Para ello se ha modelado el campo de presiones a sotavento de un obstáculo en condiciones de viento intensas, teniendo en cuenta los vórtices emitidos y atrapados, y se ha obtenido que la respuesta del agua a dicho forzamiento es una combinación de ondas de borde progresivas y estacionarias capaces de generar formas litorales de gran escala en la línea de costa. Se ha encontrado también que la morfología resultante refuerza la oscilación estacionaria, produciendo una retroalimentación positiva del sistema, que resulta auto-forzado.

Este modelo ha sido aplicado a las puntas y ensenadas de la playa de Carchuna (Granada). Por un lado, se han analizado las imágenes correspondientes a los días en los que se dan las condiciones atmosféricas propicias para la emisión de vórtices desde el Cabo de Sacratif,

encontrándose en ellas patrones que sostienen el modelo analítico desarrollado. Por otro lado, se ha descompuesto la línea de costa en dos sistemas morfológicos regulares, y se ha encontrado que las longitudes de onda de los sistemas morfológicos observados y predichos son concordantes.

Por lo tanto, se puede concluir que el mecanismo analizado da una explicación plausible de cómo han sido generadas las puntas y ensenadas de Carchuna, y que la presencia de obstáculos geográficos o construcciones humanas cerca de una playa puede causar la generación de formas de gran escala en su línea de costa, alterando significativamente la anchura de playa.

Summary

In this PhD Thesis, some modifications of the ocean waves hydrodynamics induced on the boundaries have been studied.

The thesis consists of two parts, where the effect of bottom friction on Stokes-II gravitatory waves and the generation of edge waves due to barometric pulses acting on the sea surface have been studied respectively. The forcing of both processes acts on the boundary of the fluid body, the first one on the bottom and the second one on the sea surface; and in both cases the ocean hydrodynamics is altered, in opposite directions: in the first case the interaction of the water with the bottom produces the dissipation of wave energy, while in the second case the air-sea interaction leads to the generation of an oscillation.

In the first part of the thesis, the processes that take place in the bottom boundary layer under non-linear non-breaking water waves have been analysed. The analysis focuses on the most relevant hydrodynamic features for the study of sediment transport and wave damping, that is, on the bottom shear stress, the steady streaming, the turbulent kinetic energy and the dissipation of energy due to viscous and turbulent friction.

A non-linear model that includes the wave height attenuation has been developed, in which the turbulent shear stresses have been described following the two-equation model of Saffman (1970, 1974). Then, it has been solved the wave motion in the core region of the fluid and in the bottom boundary layer for the laminar case (analytically) and for the turbulent case (numerically).

The model has been applied to a number of wave cases with the same period and propagating over the same depth, but with different values of the wave steepness and the Nikuradse roughness height, in order to study the effect of these two parameters on the analysed hydrodynamic features. It has been found that such model describes satisfactorily the flow in the laminar and turbulent bottom boundary layer, and for both the smooth and rough hydraulic regimes.

In the second part of the thesis, it has been developed a hydrodynamic model that predicts the generation of horns and coves on the inner continental shelf, resulting from turbulent wind vortices blowing over the sea surface on the lee side of geographic obstacles (e.g. capes, islands, skyscrapers etc.).

Thus, the pressure field on the lee side of an obstacle has been modelled under intense wind conditions, taking into account the vortex shedding and the reattachment of the flow, to find that the sea response for that forcing is a combination of progressive and stationary edge waves that are capable of generating large-scale coastal features on the coastline. It has also been found that the resulting morphology reinforces the standing edge wave pattern, produces positive feedback, and exhibits self-forcing behavior.

This model has been applied to the horns and embayments found at Carchuna Beach (Spain). On one hand, it has been analysed the set of images corresponding to the days in which the atmospheric conditions were propitious for the production of wind vortices on the lee side of Cape Sacratif, to find patterns of pulses on the sea surface that sustain the

developed model. On the other hand, Carchuna's coastline has been decomposed into two regular patterns of features, and it has been found a good agreement between the wavelengths of the observed and predicted morphologic systems.

Therefore, it can be concluded that the analysed mechanism offers a plausible explanation of how the points and coves of Carchuna Beach have been generated, and that the presence of geographic obstacles or human constructions close to a beach may cause the formation of large-scale features on its coastline, significantly altering the beach width.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Summary	ix
Índice general	xi
Índice de figuras	xiii
Índice de tablas	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción y objetivos	1
1.1.1. Objetivos	1
1.2. Planteamiento y formulación del problema	2
1.3. Organización de la tesis	2
1.4. Conclusiones generales	3
Referencias	3
2. Formas litorales de gran escala generadas por pulsos barométricos	5
2.1. Abstract	7
2.2. Introduction	8
2.3. Field Site	10
2.4. Methodology	11
2.4.1. Video-images	11
2.4.2. Physical processes	12
2.4.3. The Model	15
2.5. Results	16
2.6. Conclusions	20
2.7. Figure Captions	22
2.8. Tables	24
2.9. Figures	25
References	35
3. Capa límite turbulenta bajo una onda de Stokes II	39
3.1. Introducción	39
3.2. Conceptos y definiciones	40
3.2.1. Definiciones de variables y monomios adimensionales	40
3.2.2. Influencia del régimen hidráulico en el coeficiente de fricción	42
3.2.3. Influencia del régimen hidráulico en la disipación de energía	44

3.2.4.	Influencia del régimen hidráulico en la corriente media euleriana . . .	45
3.3.	Revisión del estado del arte	46
3.3.1.	Problema de cierre turbulento	46
3.3.2.	Corriente media euleriana	47
3.4.	Planteamiento y formulación	48
3.4.1.	Introducción	48
3.4.2.	Formulación del problema. Ecuaciones del flujo en la capa límite turbulenta	48
3.4.3.	Modelo de turbulencia de Saffman	50
3.4.4.	Resolución del problema	51
3.4.5.	Aplicaciones del estudio	54
3.5.	Resultados	57
3.5.1.	Casos estudiados	57
3.5.2.	Resultados y análisis	59
3.6.	Conclusiones	87
	Referencias	88
4.	Conclusiones y futuras líneas de trabajo	91
4.1.	Conclusiones	91
4.1.1.	Forzamiento de ondas de borde por la acción del viento	91
4.1.2.	Interacción con el fondo de un tren de ondas de amplitud finita	92
4.2.	Futuras Líneas de Trabajo	93
4.2.1.	Forzamiento de ondas de borde por la acción del viento	93
4.2.2.	Interacción con el fondo de un tren de ondas de amplitud finita	93
	Referencias	94
A.	Hidrodinámica bajo ondas de Stokes-II	95
A.1.	Introducción. Metodología	95
A.2.	Ecuaciones adimensionalizadas del movimiento	96
A.3.	Movimiento en el núcleo del fluido	97
A.4.	Flujo en la capa límite. Caso laminar	99
A.5.	Flujo en la capa límite. Caso turbulento	101
A.5.1.	Modelo de turbulencia de Saffman	102
A.5.2.	Ecuaciones de Reynolds	104
A.5.3.	Problema resultante	105
A.5.4.	Método numérico	108
	Referencias	110
	Bibliografía	111

Índice de figuras

2.1. Location and general bathymetry of Carchuna beach (Granada, Southern Spain)	25
2.2. Average wind velocity and direction 10 meters above the mean sea water level	26
2.3. Examples of “timex” images from the different ARGUS-cameras visualizing the beach	27
2.4. Air flow affected by a geographic obstacle for a wind blowing laterally past a geographic obstacle and a wind blowing over an obstacle; and the coupling between the pressure field and the generated oscillation	28
2.5. Beach profile similar to that of Carchuna	29
2.6. Snapshot of the free surface, the velocity field and the net mass transport and its balance due to a progressive forcing	30
2.7. Solutions of the edge waves dispersion relation	31
2.8. Snapshot of the free surface, the velocity field and the net mass transport and its balance for a partially standing edge wave	32
2.9. ARGUS planform images of the beach where two different systems of pressure pulses can be seen. Subdivision of the coastline in three sectors and scheme of the two systems of coastal formations in sector I	33
2.10. Summary of the theoretically predicted pressure pulses, edge waves and coastal features. Accordance between predictions and data.	34
3.1. Diagrama de flujo general del código numérico	54
3.2. Esquema de los casos analizados y relaciones entre ellos	58
3.3. Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos con los teóricos para flujo laminar	59
3.4. Perfil de la velocidad media euleriana para los casos <i>LAM</i>	60
3.5. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>LAM-A</i>	61
3.6. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>LAM-B</i>	62
3.7. Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos <i>LIN-B</i> y <i>LIN-HR</i>	63
3.8. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>LIN-B</i>	64
3.9. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>LIN-HR</i>	65
3.10. Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos <i>ST2-HL</i> , <i>ST2-A</i> , <i>ST2-B</i> y <i>ST2-HR</i>	67
3.11. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>ST2-HL</i>	68
3.12. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>ST2-A</i>	69

3.13. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>ST2-B</i>	70
3.14. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>ST2-HR</i>	71
3.15. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>ST2-HL</i>	72
3.16. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>ST2-A</i>	73
3.17. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>ST2-B</i>	74
3.18. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>ST2-HR</i>	75
3.19. Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos <i>STM-HL</i> y <i>STM-A</i>	77
3.20. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>STM-HL</i>	78
3.21. Perfiles de las características hidrodinámicas al primer y segundo orden para el caso <i>STM-A</i>	79
3.22. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>STM-HL</i>	80
3.23. Evolución temporal de las variables hidrodinámicas a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = 30k_N^*$ para el caso <i>STM-A</i>	81
3.24. Comparación de los perfiles de la velocidad media euleriana y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>ST2-HL</i> y <i>STM-HL</i>	83
3.25. Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>LIN-B</i> y <i>ST2-B</i>	83
3.26. Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>LIN-HR</i> y <i>ST2-RUCOSO</i>	84
3.27. Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>LIN-B</i> y <i>LIN-HR</i>	84
3.28. Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>ST2-HL</i> , <i>ST2-A</i> , <i>ST2-B</i> y <i>ST2-HR</i>	85
3.29. Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos <i>STM-HL</i> , <i>STM-A</i> y <i>STM-B</i>	85

Índice de tablas

2.1. Characteristics of the progressive pulsating pressure field, the resulting edge waves and the morphology induced by vortex shedding at Carchuna Beach. .	24
2.2. Characteristics of the standing pulsating pressure field, the resulting edge waves and the morphology induced by flow reattachment on the lee side of Cape Sacratif.	24
3.1. Casos estudiados. Parámetros físicos (dimensionales) y parámetros adimensionales de entrada del código.	57
3.2. Resultados. Espesor máximo de la capa límite y velocidad media euleriana en el extremo superior de la capa límite.	82
3.3. Resultados. Tensión tangencial media en el fondo, coeficiente de fricción y desfase entre la velocidad horizontal en el extremo superior de la capa límite y la tensión tangencial en el fondo.	86
3.4. Resultados. Coeficiente equivalente de disipación y módulo del parámetro c_c .	87

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción y objetivos

La ocupación de la zona litoral, donde vive aproximadamente un tercio de la población mundial, no siempre ha respetado las zonas de influencia de los agentes climáticos marítimos y en muchas ocasiones se ha realizado sobre formaciones litorales de acumulación, como flechas litorales, deltas, cordones dunares e incluso en terrenos ganados al mar.

Este uso incontrolado desde el punto de vista de la gestión costera, de los recursos naturales está forzando la evolución del litoral sin contar con los agentes ambientales, lo que puede tener consecuencias socio-económicas a corto, medio y largo plazo.

En España, y muy en particular en Andalucía, esta tendencia resulta especialmente grave, puesto que las actividades económicas desarrolladas en torno al litoral son fuentes de ingresos importantes para el sector terciario.

La morfología costera es el resultado de las interacciones entre las oscilaciones marinas, las corrientes, el transporte de sedimentos y la morfología y geología de la costa en sí. Por lo tanto, la descripción, caracterización y modelado de los procesos hidrodinámicos que tienen lugar en la franja litoral resulta fundamental para la predicción de la evolución de la costa y, por lo tanto, para la correcta gestión de la misma.

1.1.1. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es describir y modelar dos procesos físicos que modifican la hidrodinámica marina por transmisión o disipación de la energía del fluido en sus fronteras: (1) el forzamiento de ondas de borde por acciones atmosféricas en la superficie del mar durante el paso de borrascas, y (2) la interacción de una oscilación progresiva de amplitud finita con el fondo del mar, cuyo resultado es la atenuación de la amplitud de la onda. A continuación se exponen los objetivos específicos relativos a cada uno de dichos procesos.

1.1.1.1. Forzamiento de ondas de borde por la acción del viento

En la primera parte de esta tesis doctoral se pretende analizar la hipótesis de que los pulsos barométricos inducidos a sotavento de un obstáculo geográfico sobre la superficie del mar sean capaces de forzar una oscilación marina de largo periodo capaz de modificar la configuración de la línea de costa.

Este tramo de costa tiene una plataforma continental interior claramente separada de la exterior, y en ella las pulsaciones atmosféricas pueden generar oscilaciones cuyo transporte de masa asociado atenúe o refuerce dichas puntas, lo que explicaría la persistencia de las mismas.

1.1.1.2. Interacción con el fondo de un tren de ondas de amplitud finita

En la segunda parte de la tesis se pretende modelar el flujo en la capa límite del fondo para un flujo turbulento completamente desarrollado producido por un tren de ondas de amplitud finita (dentro del régimen de Stokes-II).

En ondas sin rotura, la producción y disipación instantánea de energía está restringida a la capa límite del fondo. La puesta en movimiento del sedimento, la tasa de transporte de sedimentos y la atenuación de la altura de ola dependen de la tensión tangencial en el fondo y de la turbulencia del movimiento oscilatorio. Por otro lado, la variación del espesor de la capa límite en la dirección de propagación de la onda induce una corriente estacionaria adicional que determina la dirección del transporte neto de sedimentos.

Por lo tanto, para comprender el transporte de sedimentos bajo olas de amplitud finita sin rotura es necesario un estudio detallado del flujo en la capa límite del fondo, que es frecuentemente turbulento.

1.2. Planteamiento y formulación del problema

El modelado de ambos fenómenos ha sido abordado desde un punto de vista analítico, planteando un problema de contorno derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el caso de las oscilaciones de largo periodo inducidas por las pulsaciones de presión, se han empleado las ecuaciones de aguas someras, que proceden de integrar en la columna de agua las ecuaciones de Navier-Stokes, aplicando las hipótesis de ondas largas. El forzamiento meteorológico sobre la superficie del mar ha sido modelado esquemáticamente a partir de las características de los vórtices que lo producen.

En el caso de la capa límite del fondo, al ser el flujo turbulento, se han empleado las ecuaciones de Navier-Stokes en su versión promediada en un periodo de onda (ecuaciones de Reynolds), y dado que las ondas a estudiar son de amplitud finita, el problema se ha desarrollado hasta el segundo orden de aproximación. El problema así planteado no se puede resolver, ya que en él intervienen unos términos relacionados con la turbulencia, que son las tensiones de Reynolds. Para modelar dichas tensiones, se ha empleado un modelo de turbulencia (Saffman, 1970; Saffman and Wilcox, 1974) que introduce dos nuevas variables en el problema. la energía cinética turbulenta y la pseudo-vorticidad, a partir de las cuales se define la viscosidad de remolino o viscosidad turbulenta. La resolución del problema resultante requiere la elaboración de un modelo numérico sencillo en diferencias finitas.

1.3. Organización de la tesis

La tesis se ha organizado como sigue:

En el primer capítulo se expone la motivación, los objetivos y el planteamiento general de la tesis.

En el segundo capítulo se estudia y modela el mecanismo de generación de formas litorales desencadenado porque la presencia de un obstáculo geográfico cerca de una playa, en determinadas condiciones de viento, modifica el flujo de aire a sotavento emitiendo unos sistemas de vórtices que, actuando sobre la superficie del mar, inducen una oscilación de largo periodo capaz de modificar la morfología de la playa.

En el tercer capítulo se presenta el desarrollo del modelo hidrodinámico de la capa límite turbulenta bajo ondas de amplitud finita (Stokes-II), capaz de explicar las características fundamentales del movimiento que intervienen en el transporte de sedimentos y la atenuación de la energía del oleaje debido a la fricción viscosa y turbulenta con el fondo, incluyendo la corriente estacionaria del fondo.

En el cuarto capítulo se presentan las conclusiones generales de la tesis.

En el apéndice A se presenta el desarrollo matemático completo del flujo bajo ondas de Stokes-II, incluyendo la atenuación de la altura de ola debido a la fricción viscosa y turbulenta en la capa límite. Incluye la solución analítica del movimiento en el núcleo del fluido y el flujo en la capa límite para los casos laminar y turbulento.

1.4. Conclusiones generales

En la primera parte de la tesis se ha presentado un mecanismo de generación de formas litorales, se han modelado en primer lugar las pulsaciones de presión asociadas a un obstáculo geográfico de determinadas dimensiones, después se ha obtenido que la respuesta del mar a dicho forzamiento es una serie de ondas de borde que interaccionan entre ellas dando lugar a un sistema determinado de formas de gran escala en la línea de costa. Este modelo ha sido aplicado a un caso real, la playa de Carchuna, en Granada, y se han encontrado concordancia entre los datos de los pulsos barométricos observados en las video-imágenes y los predichos por el modelo, y entre las formas litorales observadas en la playa y las predichas por el modelo para dichas pulsaciones.

En la segunda parte de la tesis se ha obtenido un modelo capaz de describir el movimiento en la capa límite del fondo bajo ondas de amplitud finita válido para los regímenes laminar, transitorio, turbulento liso y turbulento rugoso. A partir de este modelo se ha obtenido la variación de la corriente estacionaria, las tensiones tangenciales en el fondo y la disipación de energía con el peralte y la rugosidad del lecho, sin tener en cuenta variaciones en la profundidad relativa.

Referencias

- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London*, A317: 417–433, 1970.
- P.G. Saffman and P.C. Wilcox. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 12:541–546, 1974.

Capítulo 2

Formas litorales de gran escala generadas por pulsos barométricos y sus ondas de borde asociadas

Accepted Manuscript

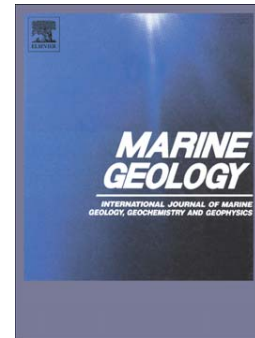
Large-scale coastal features generated by atmospheric pulses and associated edge waves

Elena Quevedo, Asunción Baquerizo, Miguel A. Losada, M. Ortega-Sánchez

PII: S0025-3227(07)00229-0
DOI: doi: [10.1016/j.margeo.2007.10.005](https://doi.org/10.1016/j.margeo.2007.10.005)
Reference: MARGO 4103

To appear in: *Marine Geology*

Received date: 10 April 2007
Revised date: 6 September 2007
Accepted date: 2 October 2007



Please cite this article as: Quevedo, Elena, Baquerizo, Asunción, Losada, Miguel A., Ortega-Sánchez, M., Large-scale coastal features generated by atmospheric pulses and associated edge waves, *Marine Geology* (2007), doi: [10.1016/j.margeo.2007.10.005](https://doi.org/10.1016/j.margeo.2007.10.005)

This is a PDF file of an unedited manuscript that has been accepted for publication. As a service to our customers we are providing this early version of the manuscript. The manuscript will undergo copyediting, typesetting, and review of the resulting proof before it is published in its final form. Please note that during the production process errors may be discovered which could affect the content, and all legal disclaimers that apply to the journal pertain.

1 **LARGE-SCALE COASTAL FEATURES GENERATED BY ATMOSPHERIC**
2 **PULSES AND ASSOCIATED EDGE WAVES**

3
4 Elena Quevedo, Asunción Baquerizo, Miguel A. Losada and M. Ortega-Sánchez

5

6 Grupo de Puertos y Costas. Centro Andaluz de Medio Ambiente. Universidad de
7 Granada. Avda. del Mediterráneo, s/n. 18006 Granada. E-mail: equevedo@ugr.es;

8 abaqueri@ugr.es; mlosada@ugr.es; miguelos@ugr.es

9

10 **ABSTRACT**

11 This article presents a hydrodynamic model that predicts the generation of horns and
12 coves on the inner continental shelf, resulting from turbulent wind vortices blowing
13 over the sea surface on the lee side of geographic obstacles (e.g. capes, islands,
14 skyscrapers etc.). Such vortices generate edge waves whose net bedload sediment
15 transport leads to the formation of such features. The resulting morphology reinforces
16 the standing edge wave pattern, produces positive feedback, and exhibits self-forcing
17 behavior. This model is applied to the horns and embayments found at Carchuna Beach
18 (Spain), and offers a plausible explanation of how they have been generated. The results
19 show that the presence of geographic obstacles or human constructions close to a beach
20 may cause the formation of large-scale features on its coastline, significantly altering
21 the beach width.

22

23 **KEYWORDS**

24 Large-scale features, wind vortices, edge waves, numerical modeling, video-images

25 1. INTRODUCTION

26

27 The morphology of the coast is determined by complicated interactions between waves,
28 currents, sediment transport and the coastal geology and morphology itself. This
29 complexity is increased due to the wide range of scales covered by the landforms, which
30 include from small-scale features such as beach cusps (few meters) to large-scale
31 features (even hundreds of kilometers) that may configure the coastline itself (Pethick,
32 1984). Between the different coastline morphological features, approximately 40% of
33 the world's coastline is formed by beaches consisting of unconsolidated deposits of sand
34 and gravel on the shore (Bird, 2000), which are by definition dominated by waves,
35 being amongst the most dynamical physical systems on earth (Short, 1999).

36

37 Beaches commonly show projections of sediment that trend at right angles to the
38 shoreline and are known with different nomenclatures such as beach cusps, shoreline
39 sand waves, rhythmic features or giant cusps (Komar, 1998). They commonly occur in
40 series with a fairly uniform spacing (defined as the horizontal distance between
41 successive cusps), although they can also appear isolated or not uniformly spaced
42 (Ortega-Sánchez et al. 2003). Numerous competing hypotheses and models based on
43 diverse conceptions of the important forces and interactions have been advanced to
44 explain such beach morphological features (Komar, 1998; Short, 1999). Although
45 different research studies have focused on the generation of coastal morphology due to
46 ocean dynamics in the form of wind waves (Ashton et al. 2001; Dalrymple and Lanan,
47 1976; Dean and Maurmeyer, 1980; Ortega-Sánchez et al. 2003), the main studies have

48 focused on trapped long waves (Bowen and Inman, 1971; Guza and Inman, 1975) and
49 shelf organization (Werner and Fink, 1993).

50

51 The beach planform has received an intensive study during last decades, particularly,
52 through the so-called one-line modeling, a well known tool to predict changes in the
53 shoreline position due to its simplicity (Pelnard-Considère, 1956; Komar, 1998). In the
54 simplest version of those models, the governing equation for the small deviations of the
55 coastline position with respect to its linear trend is a linear diffusion equation. Ashton et
56 al. (2001) explained the formation of coastline features by large instabilities induced by
57 high-angle waves showing that when the wave angle in deep water is larger than about
58 42° the rectilinear coastline is unstable. Falqués (2003) pointed out that the traditional
59 one-line model neglects the changes in wave height and angle at breaking caused by the
60 changes in coastline orientation. However, these intrinsic weaknesses can be relaxed by
61 numerical models (Payo et al. 2007).

62

63 Carchuna, located in the Spanish Mediterranean Coast, is a 4 km long reflective
64 beach (Wright and Short 1984) characterized by the presence of large scale shoreline
65 features (horns) which do not appear to be periodically spaced. A leading hypothesis for
66 their formation is the generation of circulation patterns associated with highly oblique
67 wave propagation over submarine canyons present in the bathymetry (Ortega-Sánchez
68 et al. 2003). However, there are still certain large-scale features that cannot be explained
69 by these theories. Ortega-Sánchez et al. (2003) studied the main mechanisms that can be
70 responsible of the formation of the large scale cusped features present at Carchuna
71 beach. The formation of the main horns seems to be produced due to the wave refraction

72 patterns over a system of submarine fluvial valleys; however, the existence of rhythmic
73 features between them is not sufficiently explained. Their possible formation due to the
74 existence of trapped long waves was studied by Ortega-Sánchez et al. (2003), although
75 Ortega-Sánchez et al. (2004) pointed out the need to study other possible generating
76 mechanisms, particularly, the circulation induced by the predominant wind.

77

78 This paper explores the possible generation of horns and coves on the inner
79 continental shelf resulting from turbulent wind vortices blowing over the sea surface on
80 the lee side of geographic obstacles and its applicability to Carchuna beach, following
81 the open theories proposed by Ortega-Sánchez et al. (2004).

82

83 **2. FIELD SITE**

84

85 Carchuna, located in the SE Mediterranean coast of Spain, is a 3900 m long beach with
86 the shoreline oriented E-W and bounded on its West side by Cape Sacratif and on its
87 East side by Punta del Llano (figure 1). The beach is reflective with a narrow inner
88 shelf; the sediment is heterogeneous varying from fine ($D_{50} \sim 0.3\text{mm}$) to very coarse
89 ($D_{50} \sim 50\text{mm}$) (Ortega-Sánchez et al. 2003).

90

91 Figure 1

92

93 The main wave-incoming directions are W and E, and the mean tidal range is 0.60 m.

94 The most intense winds at the study site are associated to the passage of North-Atlantic

95 and South-Atlantic cyclones, which often cross Spain from west to east (along latitude
96 40°N). The main directions of these winds are W, WNW, WSW, E and ENE (figure 2).

97

98 Figure 2

99

100 Its plan form commonly shows five cusps with horns (figure 1, H-1 to H-6). The
101 extent of the horns seaward may depend on the wave climate (Ortega-Sánchez et al.
102 2004). The analysis of aerial photographs since 1956 and images from video-camera
103 station installed in November 2002 does not reveal a significant change on the
104 alongshore location of the horns, although their cross shore length and width may vary
105 in time (Ortega-Sánchez et al. 2003).

106

107 3. METHODOLOGY

108

109 3.1. Video - images

110

111 In November 2002 a video-image monitoring station based on ARGUS technique
112 (Aarninkhof and Holman, 1999) was settled on Cape Sacratif. The station is located 90
113 m above the mean sea water level and includes 3 video-cameras that are collecting
114 images during the first 10 minutes of each daylight hour at a frequency of 2 Hz. Video-
115 images consist on an instantaneous image (snapshot), a time-averaged image (timex)
116 over a 10 minute period and a variance image over the same period. Hourly images
117 from each day were themselves averaged to create a “daytimex”, a composite image that
118 reveals the daily mean morphology.

119

120

Figure 3

121

122 After installation, the location of the cameras and a number of clearly visible ground
123 control points (GCPs) were surveyed relative to a known benchmark. From comparison
124 of the image and world location of the GCPs, the photogrammetric transformation from
125 image to world space was computed using the technique presented by Holland et al.
126 (1997) to allow georeferenced digitization of morphological features. Accuracy of this
127 process is typically one pixel. At midbeach, one pixel corresponds to a ground accuracy
128 of 1.5 and 3.4 m in the cross-shore and alongshore directions, respectively, worsening to
129 6.49 and 11.59 m at the far end of the beach.

130

131 3.2. Physical processes

132

133 It is quite frequent to find geographic landforms (e.g. capes reefs, islands) as well as
134 urban structures near beaches, which shelter the beach from the wind and force it to
135 blow over and around them. This evidently perturbs the leeward air flow.

136

137 The air flow around a geographic obstacle is very turbulent, as its Reynolds
138 number is relatively high ($Re \sim 10^8$). Since the eddy viscosity is $\varepsilon_{\text{air}} \sim 10\text{m}^2/\text{s}$, the
139 effective Reynolds number is $Re_{\text{eff}} \sim 500$. As a result, a large-scale Von Kármán vortex
140 street ($30 < Re_{\text{eff}} < 5000$) can occur leeward of the obstacle. Figure 4 (A-F) shows a
141 scheme of how the air flow is affected by a geographic obstacle. When the wind blows
142 laterally past a geographic obstacle (A), vortex shedding occurs and a progressive,

143 oscillatory pressure field arises leeward of the obstacle. When the wind blows over an
144 obstacle (B), it subsequently reattaches the boundary, producing a wake where the
145 vortices are trapped and where the associated maximum pressures always act on the
146 same position. C to F represents the coupling between the forcing system (pressure
147 field) and the oscillation generated in four possible situations: the fluctuating pressure
148 can be associated with vortex shedding (C and D) or the reattached flow (E and F); and
149 edge waves can be standing (C and E) or progressive (D and F). For both systems to be
150 coupled, the following must hold: $L_w = L_{py} = L_p \sin \theta_p$.

151

152 These vortices travel over the sea with a basic frequency f_v that can be obtained
153 from the Strouhal number, $S = Df_v/U_{10}$, whose value (usually 0.20 – 0.25) depends on
154 the geometry of the obstacle and the Reynolds number, and where D is the principal
155 dimension of the obstacle and U_{10} is the general flow velocity. This vortex system
156 propagates in a direction θ_v , with a velocity C_v , a wavelength L_v , and a frequency f_v ,
157 creating pressure and shear stress fields on the sea surface with the same kinematic
158 characteristics.

159

160 Figure 4

161

162 Furthermore, the air flow over the obstacle (figure 4B) reattaches to the sea
163 surface within a distance of 13-15 wind break heights (H), forming a wake of trapped
164 vortices (Good, 1968; Nezu and Nakagawa, 1987; Nakagawa and Nezu, 1987). It
165 induces a quasi-standing pressure field with maximum suction separated by a distance

166 $L \sim 4 - 6H$. It thus results in a pulsating pressure field on the sea surface associated with
167 both vortex shedding and re-attached flow behind geographic obstacles.

168

169 On the other hand, edge waves are oscillations trapped on the inner continental
170 shelf that propagate alongshore with an amplitude that decreases seawards in the cross-
171 shore direction. This phenomenon was first mathematically described by Stokes (1847)
172 and afterwards revised by Ursell (1952). These waves have periods between a few
173 seconds and several hours. Large-scale edge waves can be forced by the stress of the
174 wind over the sea surface or by the pressure associated with a storm traveling parallel to
175 the coastline (Munk et al., 1956; Greenspan, 1956). The waves of periods between 30
176 seconds and 5 minutes can be forced by the non-linear interaction of wave groups
177 (Gallagher, 1971; Schäffer, 1990) or by a non-linear subharmonic resonance mechanism
178 (Guza and Bowen, 1976; Minzoni and Whitman, 1977).

179

180 This article explains how pulsating pressure fields with periods of 30 – 90 s,
181 associated with vortex shedding and re-attached flow, can generate edge waves on the
182 inner continental shelf with the kinematic characteristics of the pressure field
183 fluctuations. For this reason, on the coast there may be a discrete spectrum of edge
184 waves of different periods and modes generated by this mechanism, traveling in the
185 same or opposite directions.

186

187 The superposition of edge waves of the same period produces standing or
188 partially standing oscillations, whose net mass transport might create a complex
189 rhythmic morphology (Bowen and Inman, 1971; Guza and Inman, 1975; Holman and

190 Bowen, 1982) (i.e. coves and horns). Once the morphodynamic process has begun, edge
 191 waves are reflected between the horns (Baquerizo et al. 2002). This reinforces the
 192 generation of these coastal features and acts as positive feedback.

193

194 3.3. The model

195

196 The coordinate system is located on the coastline at the still water level. The z axis is
 197 vertical and positive in the upwards direction; the y axis is located along the main
 198 coastline alignment; the x axis is perpendicular to it and positive in the seaward
 199 direction; and t represents the time.

200

201 The forcing induced by the vortex system is $\vec{F} = \frac{1}{\rho_w} \left(\frac{\vec{\tau}_s}{h} - \nabla p_s \right)$, and includes

202 the pressure (p_s) and the shear stress $\vec{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})$ fields acting on the free surface

203 $z = \eta(x, y)$; $h(x, y)$ is the depth; and ρ_w is the water density.

204 This forcing can be expressed as a spectrum of frequencies, wave numbers and
 205 directions:

$$206 \quad \vec{F}_T(x, y, t) = \sum_i \sum_j \sum_k \vec{f}_{ijk}(x, y) \cdot \exp \left[i \left(k_{p,i} \vec{v}_k \cdot \vec{x} - \sigma_{p,j} t \right) \right] \quad (1)$$

207 where $\sigma_{p,j} = 2\pi f_{p,j}$ is the angular frequency; $k_{p,i}$ is the complex wave number, whose

208 real part is $\text{Re}\{k_{p,i}\} = 2\pi / L_{p,i}$ and whose imaginary part, $\text{Im}\{k_{p,i}\}$, is the damping

209 coefficient and \vec{v}_k is a unit vector in the direction and sense of the propagation of the

210 pressure pulses. A standing forcing is modeled as the superposition of two components

211 traveling in opposite directions.

212

213 The sea response to a single component of characteristics (k_p, σ_p, \vec{v}) ,

214
$$\vec{F}(x, y, t) = \vec{f}(x, y) \exp\left[i(k_p \vec{v} \cdot \vec{x} - \sigma_p t)\right] \quad (2)$$

215 is obtained on the basis of linear long-wave equations, without taking into account the

216 Earth's rotation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(U h)}{\partial x} + \frac{\partial(V h)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \lambda U + F_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \lambda V + F_y \\ p_w &= \rho_w g(\eta - z) + p_s \end{aligned} \quad (3)$$

218 where p_w is the hydrodynamic pressure; (U, V) is the depth-averaged velocity; λ is a219 linear friction coefficient; (F_x, F_y) are the components of vector \vec{F} ; ρ_w is the water220 density; and g is the gravity. The boundary conditions are $U(x=0, y, t) = 0$ (non-flux221 across the coastline) and $\lim_{x \rightarrow \infty} \eta = 0$ (free surface vanishes far from the coast).

222

223 **4. RESULTS**

224

225 The previous model has been applied to a semi-infinite beach bounded by a 100 m high

226 cape that projects 200 m out to sea. The profile of the beach is presented in figure 5,

227 which represents a similar geometry to that of Carchuna Beach. The annual maximum

228 average winds on the beach have been considered. They come from the third quadrant

229 (S-W), are mainly associated with the passage of Atlantic storms towards the

230 Mediterranean Sea (Ortega-Sánchez et al. 2003), have an average velocity of 14-18 m/s
231 and their probability of occurrence is 0,6%.

232

233 Figure 5

234

235 If the domain is semi-infinite, it holds that the principal sea oscillation mode is
236 an edge wave with a period equal to that of the forcing that produces it, and its wave
237 number equals the longitudinal component of its wave number (see figure 6). Since the
238 model is linear, the response to the total forcing can be obtained by superposition, based
239 on the sea response to each component. Within the spectrum of forced sea surface
240 oscillations, only certain waves satisfy the edge wave dispersion equation for the inner
241 continental shelf morphology (points where the red and blue curves coalesce in figure
242 7).

243

244 Figure 6

245

246 Figure 7

247

248 The superposition of two edge wave modes with the same period results in a
249 partially standing wave. Under the hypothesis of bedload sediment transport, the net
250 mass transport in the boundary layer may generate a rhythmic morphology (see figure
251 8) with a spatial periodicity of $L_f = \left| 2\pi / (k_m - k_r) \right|$, where k_m and k_r are the wave
252 numbers of the superimposed modes (Holman and Bowen, 1982).

253

254 Figure 8

255

256 Based on data in maps and photographs, the coastline is composed of different
257 landforms, and is divided into three sectors (I, II, III) (see figure 9C). Sector III includes
258 the western part of Punta del Llano at the far end of the beach. In Sector II, the forms
259 are neither permanent nor fixed, but migrate along the coast.

260

261 In Sector I, which is the closest to Cabo de Sacratif, the most predominant
262 landforms are permanent, sharply-defined horns that increase and decrease in the cross-
263 shore direction throughout the year, but do not migrate alongshore. In this sector, the
264 shoreline can be decomposed into two quasi-regular patterns of features, starting at
265 Cape Sacratif, which include four and two horns respectively. The first system has
266 horns with distances of 1300 m between them (see figure 9C in blue). The second
267 system, superimposed on the first, has horns of 600 m between them (see figure 9C in
268 red).

269

270 Figure 9

271

272 Under such wind conditions, following the described model, vortex shedding
273 would occur from Cabo de Sacratif with distances of 1000 m between vortices, which
274 would force progressive edge waves with wavelengths of 550–2000 m and wave periods
275 of 53 – 68 s (see table 1). By mode interaction (Bowen and Inman, 1971; Guza and
276 Inman, 1975; Holman and Bowen, 1982), these waves can generate horns inter-spaced
277 at 1100-1300 m (see table 1, figure 8). This explains the first set of coastal landforms

278 initially observed (see figure 9C in blue). In analogy to Phillips' (1957) theory, for this
279 vortex system to be resonant with the resulting edge waves, the following must hold: Lv
280 $\sin \theta v = Lw$. In this case, the relation is fulfilled with an annual average frequency
281 0,1%, when the wind blows obliquely at angles within 35° - 55° (see table 1).

282

283 Moreover, the pressure field associated with flow reattachment would have
284 maximum values every 400–600 m along a distance of approximately 1500 m (Good,
285 1968; Nezu and Nakagawa, 1987; Nakagawa and Nezu, 1987), which would force
286 partially standing edge waves with wavelengths of 800–1200 m (see table 2). Such
287 waves can generate horns on their antinodes (Bowen and Inman, 1971) every 400–600
288 m., such as the second set of forms (see figure 9C in red). Horn H3 is reinforced by both
289 phenomena, and is thus the most robust and sharply defined.

290

291 Table 1

292

293 Table 2

294

295 The edge waves induced by both mechanisms can couple, mutually reinforcing
296 each other within a wide range of wave periods and wavelengths ($T \sim 53 - 68$ s, $L \sim$
297 800–1200 m) (see tables 1 and 2, figure 7). Furthermore, as the obtained damping
298 coefficient is $k_I \sim 10^{-5}$ rad/m, it indicates a low dissipation rate, and thus, these waves
299 can last for several hours after the forcing agent has disappeared in a similar way to
300 wind waves that continue propagating after the passage of the storm (Phillips, 1957).

301

302 Visual inspection and the application of ARGUS techniques to the complete data
303 record of video-images captured during storms, over a period of 2 years, allowed
304 identifying two types of pressure pulses. The first type, close to the cape, has vortices
305 distanced 300 – 500 m from each other (see figure 9B, taken on 21-Jan-03 at 17 GMT
306 during a North Atlantic storm with a wind of 11 m/s from the W), so they could be
307 related to the flow reattachment to the boundary. The second type, occurring all along
308 the beach, has vortices distanced 1000 m. from each other (see figure 9A, taken on 28-
309 Dec-03 at 09 GMT during a North Atlantic storm with a wind of 10 m/s from the
310 WNW), so they could be associated with vortex shedding at Cabo de Sacratif.

311
312 Under mild sea state conditions the nearshore circulation generated by the wind
313 waves (Ortega-Sánchez, 2004; Ortega-Sánchez et al. 2004) may reinforce the present
314 mechanism. Erosion of the horns under heavy sea states and strong winds (Ortega-
315 Sánchez et al. 2004), could possibly be the negative feedback which stabilizes the
316 sedimentation regime resulting in equilibrium. Thus, the persistent large features (i.e.
317 horns and coves) observed at Carchuna beach seem to be a good example of self-
318 organization theory.

319

320 Figure 10

321

322 5. CONCLUSIONS

323

324 It has been conjectured that the presence of a geographic obstacle or a human
325 construction near the coast may induce the generation of edge waves on its lee side,

326 under strong wind conditions. These edge waves may as well form large-scale coastal
327 features. Thus, the presence of an obstacle near the beach, under certain conditions, may
328 have some influence on its morphology. A hydrodynamic model that reproduces this
329 process was developed and applied to Carchuna beach, an approximately 4 km long
330 beach characterized by the presence of large scale shoreline features (horns).

331

332 It was found that the model predicts the presence of pressure pulses on the free surface
333 with the same characteristics as those observed on the video-images. Besides that, for
334 these conditions the model predicts the generation of horns and coves with length scales
335 that coincide with those observed on the beach. In summary, the application of this
336 model to Carchuna Beach shows results that are in accordance with the observed data,
337 concluding that the analyzed conjecture seems to be plausible.

338

339 **6. ACKNOWLEDGMENTS**

340

341 The Spanish Ministry of Science and Education (Project BORRASCAS CTM2005-
342 06583), Junta de Andalucía (PAI Research Group TEP-209) and Project RNM-153
343 supported this research. The first author was also supported by Ph.D. Grant BES-2004-
344 5483 (MEC, Spain). The authors thank Francisco J. de los Santos for support during the
345 installation of the video-imaging station. We appreciate the very helpful comments and
346 suggestions by two anonymous referees.

347

348

349

444 FIGURE CAPTIONS

445

446 Figure 1. Location and general bathymetry of Carchuna beach (Granada, Southern
447 Spain). The photo on the right shows an aerial view of the area.

448 Figure 2. Average wind velocity and direction 10 meters above the mean sea water
449 level.

450 Figure 3. Examples of timex images from (a) camera 1 showing the part of the beach
451 closest to Sacratif Cape; (b) camera 2 looking to the middle of the beach, and (c) camera
452 3 visualizing the western part of the beach.

453 Figure 4. Air flow affected by a geographic obstacle for A) wind blows laterally past a
454 geographic obstacle, B) wind blows over an obstacle. C) to F) represents the coupling
455 between the forcing system (pressure field) and the oscillation generated in four
456 possible situations: vortex shedding (C and D) or the reattached flow (E and F).

457 Figure 5. Beach profile similar to that of Carchuna.

458 Figure 6. Snapshot of the free surface and velocity field (A) and the net mass transport
459 and its balance (B) due to a progressive forcing with $T = 53$ s and $L = 1100$ m.

460 Figure 7: Solutions of the real (red curves) and the imaginary part (blue curves) of the
461 edge waves dispersion relation, in function of σ and $k_R = \text{Re}\{k\}$ for (left) $k_I =$
462 $\text{Im}\{k\} = 10^{-5}$, and (right) $k_I = 10^{-4}$. The horizontal and vertical sectors are the (k_R, σ)
463 values obtained for vortex shedding (table 1) and flow reattachment (table 2)
464 respectively. The shaded area represents where coupling occurs.

465 Figure 8. Partially standing edge wave obtained by the superposition of modes $L_{w1} =$
466 550 m and $L_{w2} = 1100$ m, of $T_w = 53$ s (the latter represented in figure 6). A represents a
467 snapshot of the free surface and velocity field and B the net mass transport and its

468 balance. The bed trend indicates the formation of horns spaced at $L_f = 1/(L_1^{-1} - L_2^{-1}) =$
469 1100m.

470 Figure 9. Planform images of the beach based on three snapshots from the ARGUS
471 station at the Sacratif lighthouse, where two different systems of pressure pulses can be
472 seen (A and B). The lower figure C shows the subdivision of the coastline in three
473 sectors and the presence of two systems of coastal formations in sector I.

474 Figure 10. Summary of the theoretically predicted pressure pulses, edge waves and
475 coastal features caused by vortex shedding and reattached flow. The theoretical
476 predictions are in accordance with data.

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490

491

492 TABLES

493

494 Table 1: Characteristics of the progressive pulsating pressure field (period T_p , pulse
 495 spacing D_p); the resulting edge waves (period T_w , wavelength L_w); and the morphology
 496 (wavelength L_f) induced by vortex shedding at Carchuna Beach.

497

U_{10} (m/s)	T_p (s)	D_p (m)	T_w (s)	L_w (m)	$\theta_{v,coup}$ (°)	L_f (m)
14	68	952	68	733, 1692	52, -	1300
18	53	952	53	550, 1100, 1955	34, -, -	1100, 2515, 765

498

499

500 Table 2. Characteristics of the standing pulsating pressure field (pulse spacing D_p); the
 501 resulting edge waves (period T_w , wavelength L_w); and the morphology (wavelength L_f)
 502 induced by flow reattachment. D_{tot} is the scope of flow reattachment on the lee side of

503 Cape Sacratif.

504

505

D_{tot} (m)	D_p (m)	L_w (m)	T_w (s)	L_f (m)
1500	400	800	70, 44, 35	400
1500	600	1200	94, 57, 45	600

506

507

508

509

510

511

512

513

514

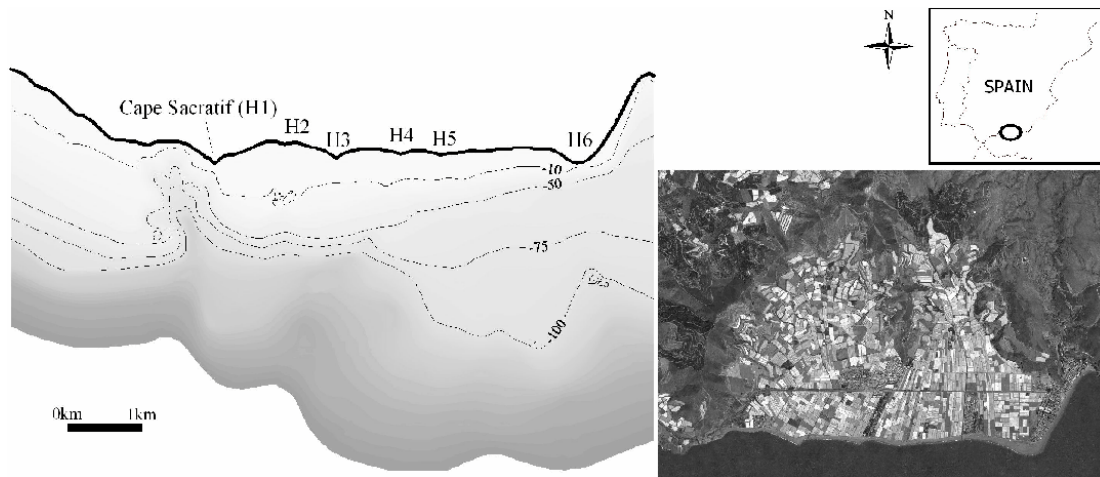
515

516

517

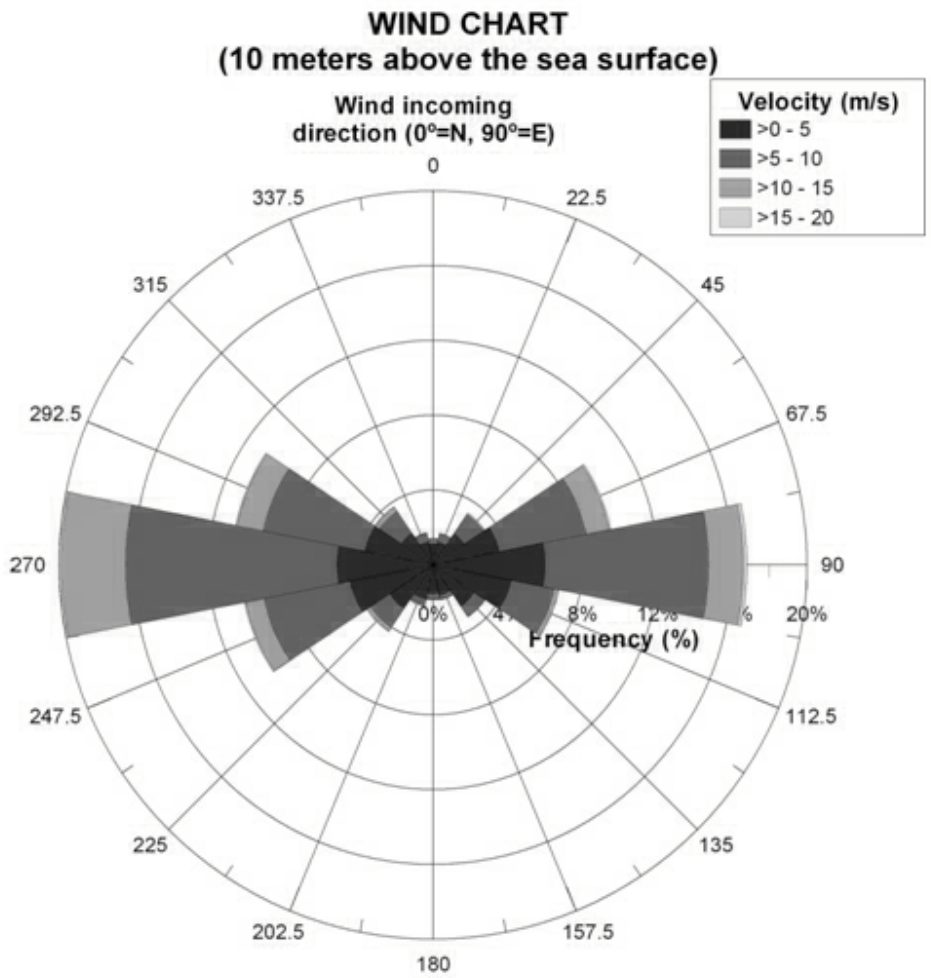
518

519



520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554

ACCEPTED MANUSCRIPT



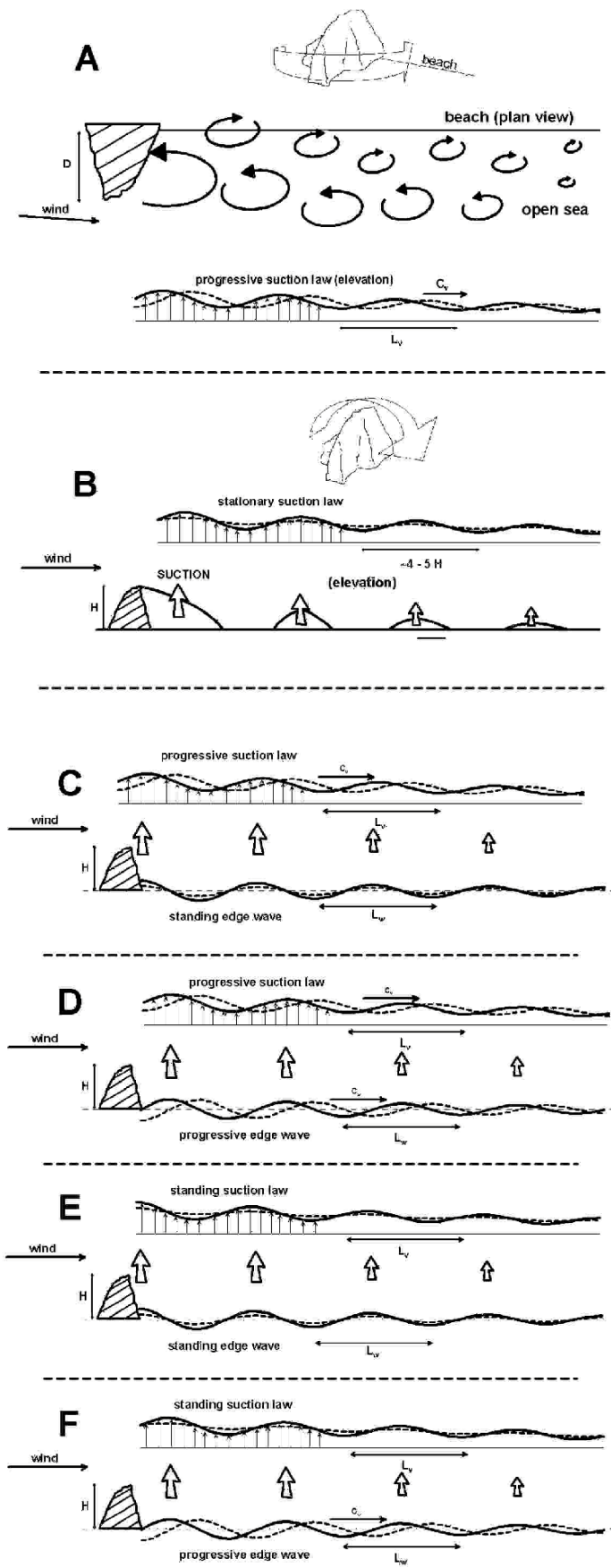
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574

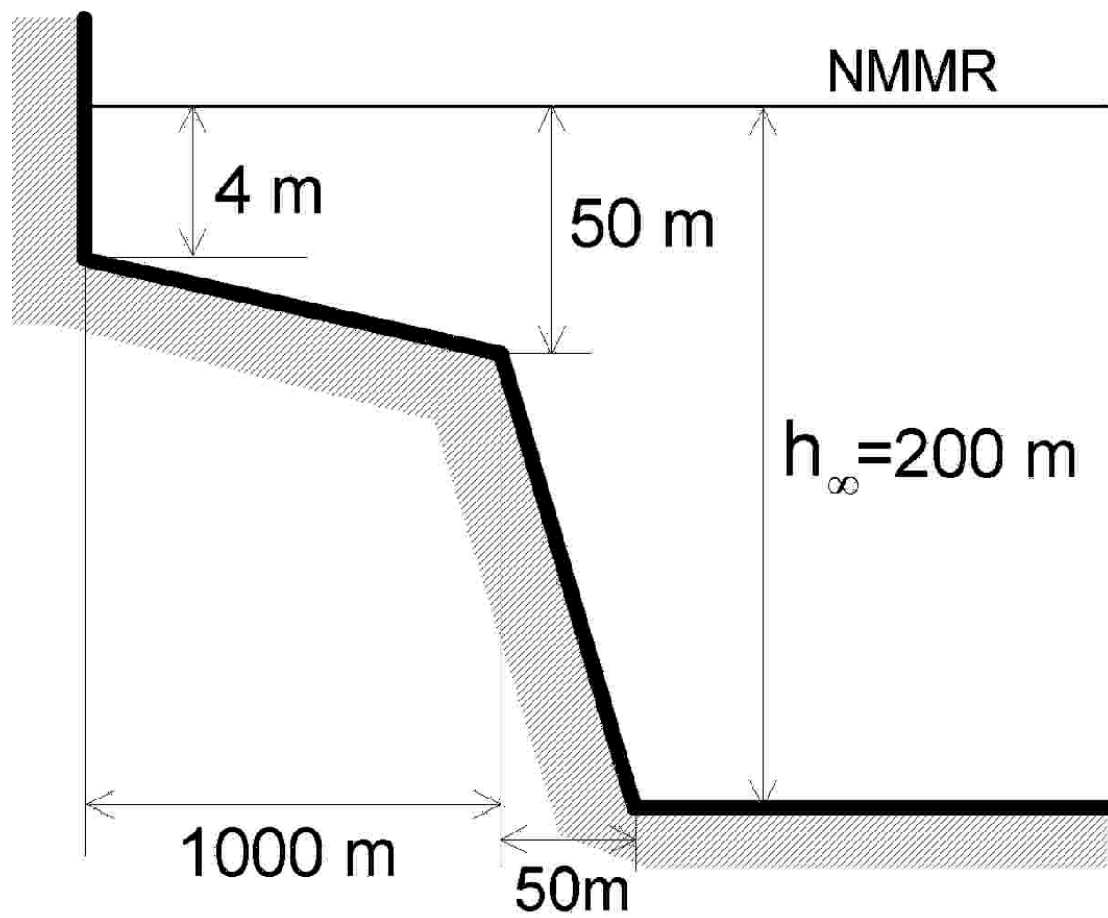
ACC



575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615

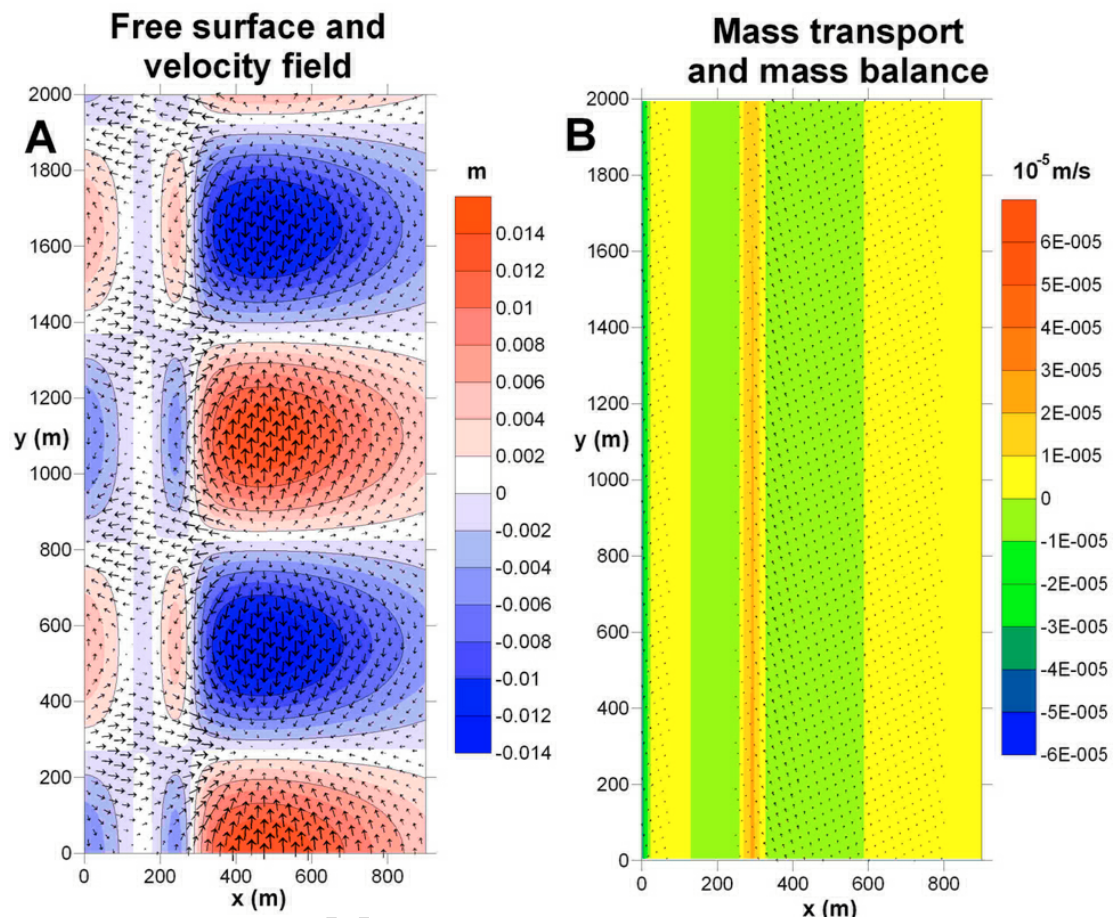
ACCEPTED MANUSCRIPT





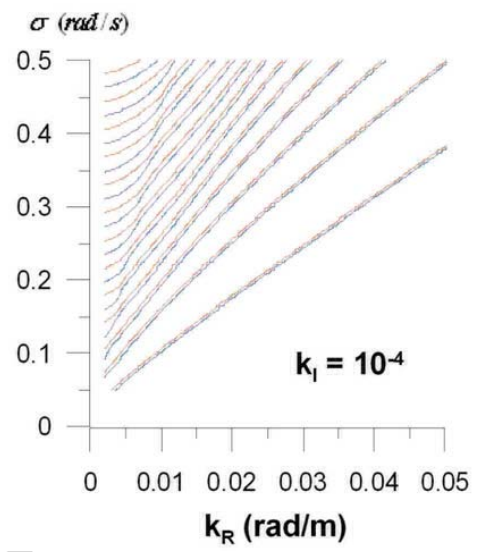
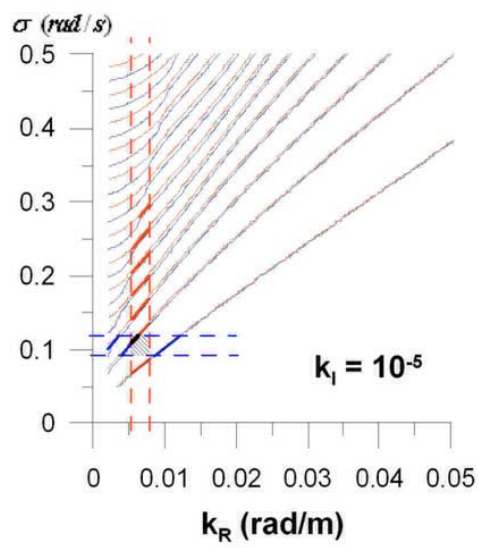
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639

ACCEP



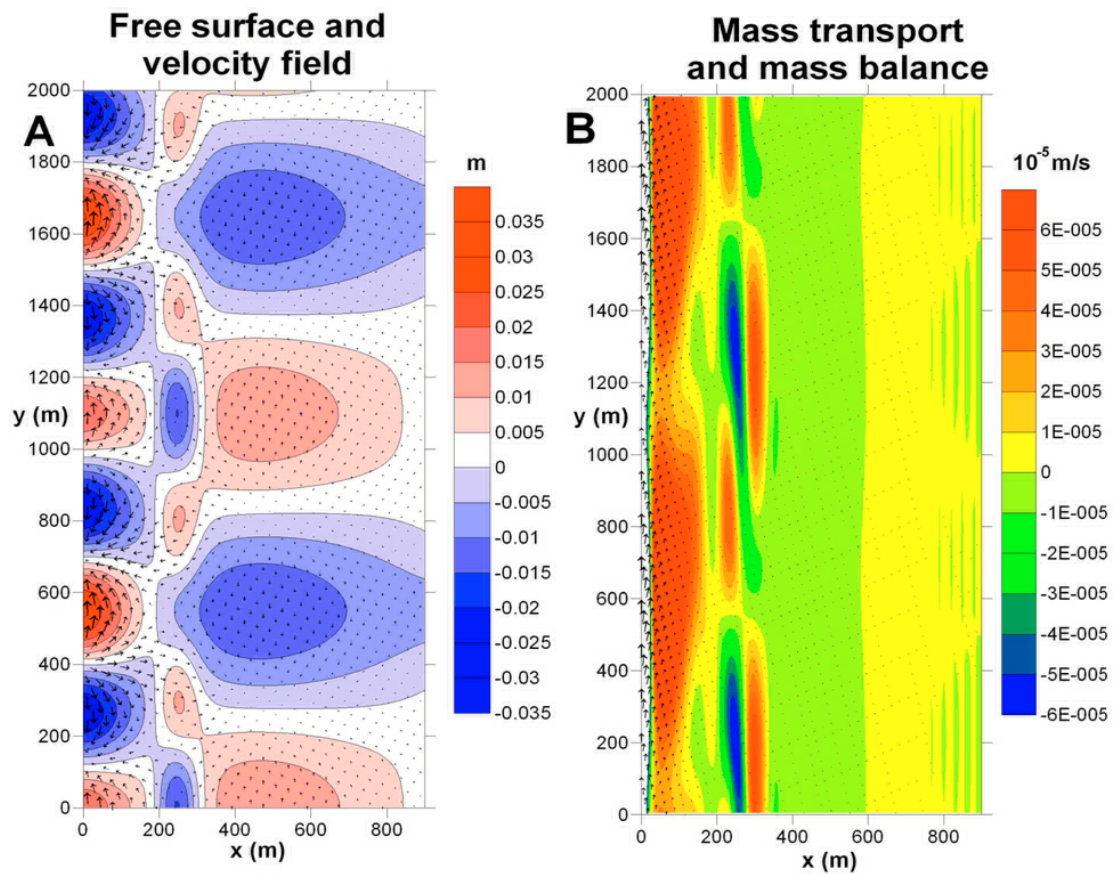
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662

ACCEPT

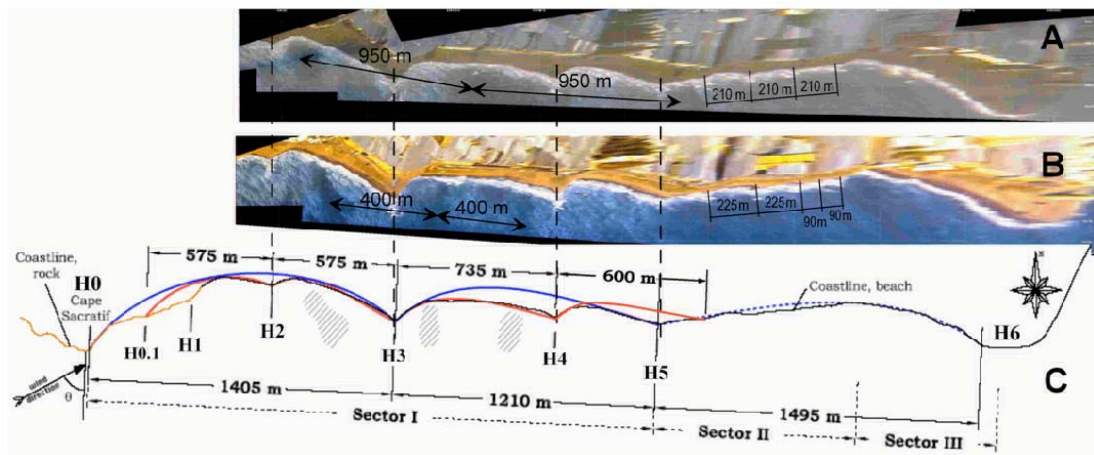


663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695

ACCEPTED MANUSCRIPT

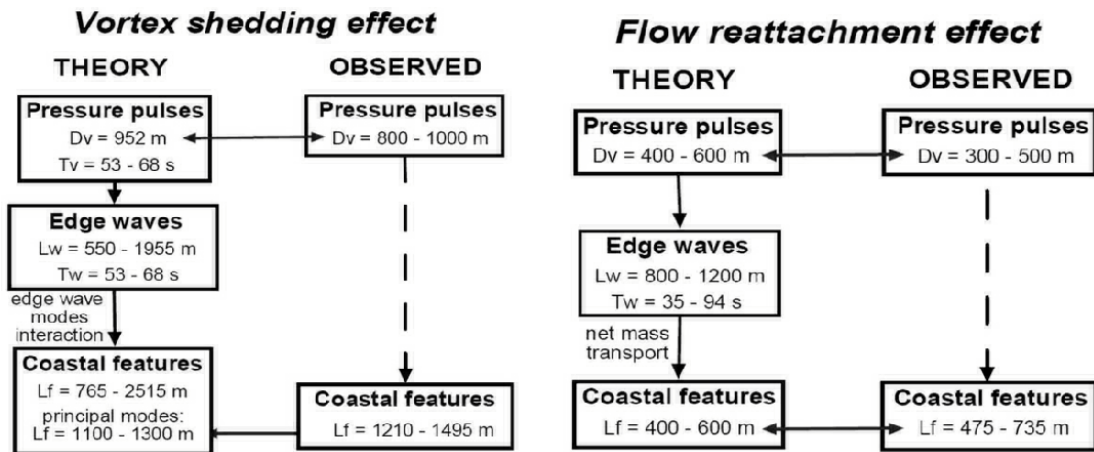


696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719



720
 721
 722
 723
 724
 725
 726
 727
 728
 729
 730
 731
 732
 733
 734
 735
 736
 737
 738
 739
 740
 741
 742
 743
 744
 745
 746
 747
 748
 749
 750
 751
 752
 753
 754

ACCEPTED MANUSCRIPT



755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770

ACCEPTED MANUSCRIPT

References

- S.G.J Aarninkhof and R.A. Holman. Monitoring the nearshore with video. *Backscatter*, 10: 8–11, 1999.
- A. Ashton, A.B. Murray, and O. Arnoult. Formation of coastline features by large-scale instabilities induced by high-angle waves. *Nature*, 414:296–300, 2001.
- A. Baquerizo, M.A. Losada, and I.J. Losada. Edge wave scattering by a coastal structure. *Fluid Dyn. Res.*, 31:275–287, 2002.
- E. Bird. *Coastal Geomorphology: an Introduction*. John Wiley and Sons., 2000.
- A.J. Bowen and D.L. Inman. Edge waves and crescentic bars. *J. Geophys. Res.*, 76(36): 8662–8671, 1971.
- R.A. Dalrymple and G.A. Lanan. Beach cusps formed by intersecting waves. *Bull. Geol. Soc. America*, 87:57–60, 1976.
- R.G. Dean and E.M. Maurmeyer. Beach cusps at point reyes and drakes bay beaches, california. In *Proc. of the 17th Int. Conf. of Coastal Eng., ASCE, Sydney, Australia*, pages 863–885, 1980.
- A. Falqués. On the diffusivity in coastline dynamics. *Geophys. Res. Lett.*, 30(21):2119, 2003.
- A. Falqués and D. Calvete. Large-scale dynamics of sandy coastlines: diffusivity and instability. *J. Geophys. Res.*, 110(C03007), 2005.
- B. Gallagher. Generation of surf beat by non-linear wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 49: 1–20, 1971.
- M.C. Good and P.N. Joubert. The form drag of two-dimensional bluff plates immersed in turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 31:547–582, 1968.
- H.P. Greenspan. The generation of edge waves by moving pressure distributions. *J. Fluid Mech.*, 1(6):574–592, 1956.
- R.T. Guza and A.J. Bowen. Finite amplitude stokes edge waves. *J. Mar. Res.*, 34:269–293, 1976.
- R.T. Guza and D.L. Inman. Edge waves and beach cusps. *J. Geophys. Res.*, 80:2997–3012, 1975.
- K.T. Holland, R.A. Holman, T.C. Lippmann, J. Stanley, and N. Plant. Practical use of video imagery in nearshore oceanographic field studies. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 22(1):81–92, 1997.
- R.A. Holman and A.J. Bowen. Bars, bumps, and holes: Models for the generation of complex beach topography. *J. Geophys. Res.*, 87:457–468, 1982.
- J.A. Jiménez and O.S. Madsen. A simple formula to estimate settling velocity of natural sediments. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 129(2):70–78, 2003.
- P.D. Komar. *Beach Processes and Sedimentation*. Prentice Hall. New Jersey, 2nd edition, 1998.

- M.A. Losada and J.M. Desiré. Incipient motion on a horizontal granular bed in non-breaking water waves. *Coast. Eng.*, 9:357–370, 1985.
- A.A. Minzoni and G.B Whitham. On the excitation of edge waves on beaches. *J. Fluid Mech.*, 79(Part 2):273–287, 1977.
- W.H. Munk, F.E. Snodgrass, and G.F. Carrier. Edge waves on the continental shelf. *Science*, 123:127–132, 1956.
- H. Nakagawa and I. Nezu. Experimental investigation on turbulent structure of backward-facing step flow in an open channel. *J. Hydr. Res.*, 25(1):67–88, 1987.
- I. Nezu and H. Nakagawa. Turbulent structure of backward-facing step flow and coherent vortex shedding from reattachment in open-channel flows. In *Turbulent shear flows 6; International Symposium, 6th, Toulouse, France, Sept. 7-9, 1987, Selected Papers (A89-52943 23-34)*. Berlin and New York, Springer-Verlag, 1989, p. 313–337., pages 313–337, 1989.
- M. Ortega-Sánchez. *Procesos hidrodinámicos y sedimentarios en formas litorales de gran escala*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2004. 247 pp.
- M. Ortega-Sánchez, M.A. Losada, and A. Baquerizo. On the development of large-scale cusped features on a semi-reflective beach: Carchuna Beach, Southern Spain. *Mar. Geol.*, 198(3-4):209–223, 2003.
- M. Ortega-Sánchez, M.A. Losada, and A. Baquerizo. Reply to Comment on “On the development of large-scale cusped features on a semi-reflective beach: Carchuna Beach, Southern Spain” by A. Ashton and A. Brad Murray. *Mar. Geol.*, 206:285–288, 2004.
- A. Payo, A. Baquerizo, and M.A. Losada. Uncertainty assesment: application to the shoreline. *Journal of hydraulic research (in press)*, 2007.
- R. Pelnard-Considère. Essai de theorie de lévolution des formes de rivage en plages de sable et de galets. In *4th Journees de l’Hydraulique, Les Energies de la Mer, Paris, Société Hydrotechnique de France*, volume III, 1956.
- J. Pethick. *An introduction to coastal geomorphology*. Edward Arnold. Baltimore, 1984.
- O.M. Phillips. On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.*, 2:417–445, 1957.
- H.A. Schäffer. *Infragravity water waves induced by short-wave groups*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1990. 168 pp.
- A.D. Short. *Handbook of beach and shoreface morphodynamics*. John Wiley and Sons. Chichester, 2000.
- G.G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. volume 8, pages 441–455. Trans. Cambridge Philos. Soc., 1847. Reprinted in Math. Phys. Papers. Cambridge Univ. Press, London, Vol 1, 314–326.
- F. Ursell. Edge waves on a sloping beach. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 214, pages 79–97, 1952.
- B.T. Werner and T.M. Fink. Beach cusps as self-organized patterns. *Science*, pages 968–971, 1993.

-
- L.D. Wright and A.D. Short. Morphodynamic variability of surf zones and beaches. *Mar. Geol.*, 56:93–118, 1984.

Capítulo 3

Capa límite turbulenta bajo una onda de Stokes II

3.1. Introducción

En ondas gravitatorias sin rotura, la producción y disipación instantánea de energía está restringida a la capa límite del fondo. La puesta en movimiento del sedimento, la tasa de transporte de sedimentos y la atenuación de la altura de ola dependen de la tensión tangencial en el fondo y de la turbulencia del movimiento oscilatorio. Por otro lado, la variación del espesor de la capa límite en la dirección de propagación de la onda induce una corriente estacionaria adicional, llamada corriente media euleriana, que determina la dirección del transporte neto de sedimentos. Por lo tanto, un análisis detallado del flujo en la capa límite turbulenta es fundamental para entender el transporte de sedimentos bajo oleaje sin rotura.

La hidrodinámica de la capa límite bajo una onda depende del régimen de oscilación (Stokes y Boussinesq) y del régimen hidráulico (laminar, de transición, turbulento liso y turbulento rugoso). Las variables hidrodinámicas que influyen en la corriente estacionaria del fondo son el peralte de la onda, H^*/L^* , la profundidad relativa, $k^*h_0^*$, el número de Reynolds y la rugosidad del fondo, z_r .

El objetivo de este capítulo es describir detalladamente el flujo en la capa límite turbulenta completamente desarrollada debida a un tren de ondas de amplitud finita para analizar: (1) la importancia de la asimetría del oleaje en el desarrollo de la capa límite, (2) la influencia de la rugosidad del fondo y del régimen hidráulico en la misma, y (3) las cantidades medias asociadas al flujo en la capa límite, como la velocidad media euleriana y la disipación media. Como objetivo secundario, se estudiará en qué casos es importante emplear una teoría de segundo orden para evaluar la tensión tangencial en el fondo y la corriente media euleriana.

Las características turbulentas se han determinado a partir del modelo de cierre de la turbulencia de dos ecuaciones propuesto por Saffman (1970), cuyas características principales se describen en el apartado 3.4.3. Este modelo es capaz de describir la turbulencia en régimen hidráulico liso, rugoso e intermedio, donde dichas características dependen no sólo de la rugosidad del lecho, sino también del número de Reynolds. Además, dicho modelo es capaz de describir la subcapa viscosa y permite imponer la condición de no deslizamiento en el fondo. El modelo de turbulencia de Saffman (1970) ha sido empleado anteriormente para modelar la capa límite oscilatoria bajo ondas gravitatorias por Jacobs (1984) y Blondeaux (1987).

Sin embargo, el análisis de Jacobs (1984) es válido sólo para valores muy altos del número de Reynolds y, por tanto, no considera explícitamente la subcapa viscosa. Por otro lado, Blondeaux (1987) analizó sólo la capa límite oscilatoria uniforme, sin tener en cuenta la velocidad media euleriana que se genera bajo ondas marinas progresivas.

Este capítulo se centra en el estudio de la capa límite del fondo turbulenta, no homogénea y no estacionaria bajo ondas gravitatorias, teniendo en cuenta los efectos no-lineales debidos al peralte de la onda.

3.2. Conceptos y definiciones

En este apartado se presenta una revisión de los conceptos que se van a analizar posteriormente.

Para valores pequeños de la viscosidad, los gradientes de velocidad cerca de los contornos (donde se cumple la condición de no-deslizamiento) son muy altos, de manera que las tensiones viscosas tienen valores significativos solamente en una región cercana al contorno de espesor muy fino llamada capa límite.

En el caso de ondas marinas, el flujo en la capa límite es frecuentemente turbulento y por lo tanto, hay que tener en cuenta además las tensiones de Reynolds. En este capítulo se analiza el caso de un fondo rígido e impermeable.

3.2.1. Definiciones de variables y monomios adimensionales

3.2.1.1. Número de Reynolds, R_E , velocidad orbital, U_{0m}^* , amplitud orbital, a_b , y rugosidad relativa del fondo, $\frac{a_b^*}{k_N^*}$

La velocidad de las partículas del fondo en el extremo superior de la capa límite, $u_\infty^*(x, t)$, es oscilatoria, y su valor máximo se llama velocidad orbital, U_{0m}^* . En teoría lineal se puede expresar como:

$$u_{0\infty}^* = -U_{0m}^* \cos(k^* x^* + \omega^* t^*), \quad (3.1)$$

donde $\omega^* = 2\pi/T^*$ es la frecuencia angular, $k^* = 2\pi/L^*$ es el número de onda, T^* es el periodo y L^* la longitud de onda.

Por lo tanto, la amplitud orbital del movimiento de las partículas del fondo, en el extremo superior de la capa límite es

$$a_b^* = \frac{U_{0m}^*}{\omega^*} \quad (3.2)$$

Así, para el análisis hidrodinámico de la capa límite, se ha definido el número de Reynolds como:

$$R_E = \frac{U_{0m}^* a_b^*}{\nu^*} = \frac{U_{0m}^{*2}}{\omega^* \nu^*}, \quad (3.3)$$

donde ν^* es la viscosidad cinemática, y se ha definido la rugosidad relativa del fondo como

$$\frac{a_b^*}{k_N^*} \quad (3.4)$$

donde k_N^* es la altura de rugosidad de Nikuradse.

3.2.1.2. Espesor de la capa límite, δ_{cl}^* y longitud de Stokes, δ^*

El espesor de la capa límite, δ_{cl}^* , es la distancia desde el fondo en la que se aprecia la influencia de la viscosidad, y se puede evaluar como la distancia desde el fondo en la que la velocidad instantánea del fluido pasa de ser nula a tener el valor de la velocidad en el exterior, u_∞^* :

$$u^*(x^*, y_0^* + \delta_{cl}^*, t^*) = u_\infty^*(x^*, t^*) \quad (3.5)$$

En una capa límite oscilatoria no-uniforme esta cantidad varía en el tiempo y en la dirección de propagación de las ondas.

La longitud de Stokes representa el orden de magnitud del espesor de la capa límite para el caso de régimen laminar, y su valor es:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{2\nu^*}{\omega^*}} \quad (3.6)$$

3.2.1.3. Tensión tangencial en el fondo, τ_b^* , y viscosidad de remolino, ν_T^*

La tensión tangencial en el fondo, τ_b^* , es un parámetro determinante para el inicio del movimiento de las partículas de sedimento. En el caso de flujo turbulento, se calcula como la suma de las tensiones viscosas y turbulentas evaluadas en el fondo:

$$\tau_b^* = \left[\rho^* \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \rho^* \overline{u^{*'} v^{*'}} \right]_{y^*=y_0^*} \quad (3.7)$$

donde ρ^* es la densidad del agua y $(u^{*'} v^{*'})$ son las velocidades de fluctuación.

Las tensiones turbulentas de Reynolds se suelen modelar análogamente a las tensiones viscosas, definiendo una viscosidad equivalente, ν_T^* , llamada viscosidad de remolino. Por lo tanto, la tensión tangencial en el fondo queda como sigue:

$$\tau_b^* = \rho^* [\nu^* + \nu_T^*(y^*=y_0^*)] \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=y_0^*} \quad (3.8)$$

Dado que el flujo

La tensión tangencial en el fondo asociada a un flujo oscilatorio es también oscilatoria, y presenta un desfase con respecto a la velocidad orbital, ϕ . Este desfase es de 45° para la capa límite laminar, y del orden de 10° para el caso turbulento.

En el caso de ondas de amplitud finita, la tensión tangencial en el fondo es asimétrica, de manera que existe una tensión tangencial neta que puede estar dirigida en el sentido de propagación de las ondas o en el sentido opuesto. Esta tensión neta se calcula promediando la tensión en el fondo en un ciclo de onda:

$$\overline{\tau_b^*} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \tau_b^* dt^* \quad (3.9)$$

3.2.1.4. Factor de fricción bajo ondas, f_w , y velocidad de corte, U_f^*

El factor de fricción bajo ondas marinas, f_w , se define análogamente al factor de fricción de Darcy-Weissbach para flujo en canales aboertos:

$$\tau_{b,\max}^* = \frac{1}{2} \rho^* f_w U_{0m}^{*2} \quad (3.10)$$

En el caso de flujo en régimen laminar o turbulento liso, el factor de fricción depende sólo del número de Reynolds, R_E ; en el caso de régimen turbulento rugoso depende sólo de la rugosidad relativa, $\frac{a_b^*}{k_N^*}$; y en el caso de régimen turbulento intermedio depende de ambos parámetros.

La velocidad de corte, U_f^* , se define a partir de la tensión tangencial en el fondo, como la velocidad que satisface la siguiente relación:

$$\tau_b^* = \rho^* U_f^{*2} \quad (3.11)$$

3.2.1.5. Energía cinética turbulenta, e^*

La energía cinética turbulenta, e^* , se define como la energía cinética por unidad de masa del movimiento de fluctuación turbulenta:

$$e^* = \frac{1}{2} \left(\overline{u^{*2}} + \overline{v^{*2}} + \overline{w^{*2}} \right) \quad (3.12)$$

3.2.1.6. Corriente media euleriana, u_S^*

En un movimiento oscilatorio no uniforme, cerca del fondo existe una corriente estacionaria de segundo orden, u_S^* como resultado al gradiente de la presión dinámica y las tensiones de Reynolds debidas a las velocidades de fluctuación.

La velocidad media euleriana, u_S^* , se puede obtener resolviendo las ecuaciones promediadas de Reynolds hasta el segundo orden de aproximación.

3.2.1.7. Disipación de energía, \mathcal{D}^*

En olas sin romper, la energía se disipa en la capa límite del fondo debido a las tensiones viscosas y a la turbulencia. La turbulencia extrae energía del movimiento del flujo medio y la emplea en generar energía cinética turbulenta (e) en la capa límite. Esta energía se va cediendo a movimientos de escalas espaciales cada vez menores (vórtices), y finalmente se disipa mediante fricción viscosa en forma de calor. Así, la disipación de energía se puede calcular como el trabajo realizado por las tensiones tangenciales viscosas y turbulentas en la capa límite. La disipación de energía promediada en un ciclo de onda es:

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \int_0^\infty \tau^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} dy^* dt^* \quad (3.13)$$

3.2.1.8. Factor de pérdida de energía, f_e

El factor de pérdida de energía, f_e , se define como el valor constante que satisface la siguiente relación:

$$\mathcal{D}^* = \frac{2}{3\pi} \rho^* f_e U_{0m}^{*3} \quad (3.14)$$

3.2.1.9. Coeficiente de atenuación de la altura de ola, A^*

El coeficiente de atenuación, $A^* = f(h^*, \omega^*, \nu^*)$, se define asumiendo que la altura de ola, H^* , varía como una función exponencial negativa del tiempo:

$$H^* = H_0^* \exp(-A^* x^*). \quad (3.15)$$

La distancia que debe viajar una onda para reducir su altura de ola a la mitad es x_h^* , y la distancia en la que la altura de ola pasa de ser H_0^* a H_0^*/e es x_e^* . Para la expresión anterior, estas distancias resultan:

$$x_h^* = \frac{\ln 2}{A^*} \quad \text{y} \quad x_e^* = \frac{1}{A^*} \quad (3.16)$$

3.2.2. Influencia del régimen hidráulico en el coeficiente de fricción

A la luz de la teoría lineal (véase Fredsøe and Deigaard (1992)), se presenta un breve resumen de cómo el régimen hidráulico afecta al coeficiente de fricción.

En un flujo oscilatorio uniforme, al primer orden de aproximación, o según la teoría lineal de ondas, la velocidad en el extremo superior de la capa límite se puede escribir como:

$$u_\infty^* = U_{0m}^* \sin(\omega^* t^*) \quad (3.17)$$

3.2.2.1. Régimen laminar, $R_E < 5 \cdot 10^4$

En el caso de flujo laminar en la capa límite, el perfil vertical de la velocidad instantánea horizontal es:

$$u^* = U_{0m}^* \sin(\omega^* t^*) - U_{0m}^* \exp\left(-\frac{y^*}{\delta^*}\right) \sin\left(\omega^* t^* - \frac{y^*}{\delta^*}\right). \quad (3.18)$$

Así, el espesor de la capa límite es del orden de magnitud de la longitud de Stokes, δ^* .

La tensión tangencial en el fondo resulta:

$$\tau_b^* = \rho^* \nu^* \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*/\delta^*=0} = \rho^* \nu^* \frac{U_{0m}^*}{\delta^*} [\sin(\omega^* t^*) + \cos(\omega^* t^*)] = \sqrt{2} \rho^* \nu^* \frac{U_{0m}^*}{\delta^*} \sin(\omega^* t^* + \pi/4), \quad (3.19)$$

que tiene un desfase de $\phi = 45^\circ$ con el flujo en el exterior de la capa límite. Por lo tanto, en la capa límite laminar, el factor de fricción depende sólo del número de Reynolds:

$$f_w = \frac{2}{\sqrt{R_E}}. \quad (3.20)$$

3.2.2.2. Régimen turbulento liso, $R_E > 2 \cdot 10^5$ y $a_b^*/k_N^* > 3000$

En el caso de flujo estacionario en canales abiertos, en régimen turbulento liso, el perfil de velocidades es logarítmico, también llamado “perfil de la pared”:

$$\frac{u^*}{U_f^*} = 5,7 + \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y^*}{\nu^*/U_f^*}\right) \quad (3.21)$$

Resolviendo numéricamente el flujo mediante el método integral de la cantidad de movimiento, el espesor de la capa límite se ajusta a la siguiente expresión:

$$\frac{\delta_{cl}^*}{a_b^*} = 0,086 R_E^{-0,11} \quad \text{en} \quad \omega^* t^* = \pi/2. \quad (3.22)$$

Se obtiene además que el factor de fricción depende sólo del número de Reynolds R_E y se ajusta a la siguiente expresión:

$$f_w = 0,035 R_E^{-0,16} \quad (3.23)$$

3.2.2.3. Régimen turbulento rugoso, $R_E > 2 \cdot 10^5$ y $a_b^*/k_N^* < 3000$

En el caso de flujo estacionario en canales abiertos, en régimen turbulento rugoso, el perfil de velocidades es también logarítmico:

$$\frac{u^*}{U_f^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y^*}{y_0^*}\right), \quad (3.24)$$

donde $y_0^* = k_N^*/30$.

A partir de los resultados numéricos obtenidos mediante el método integral de la cantidad de movimiento, se tiene que el espesor de la capa límite, δ_{cl}^* , se ajusta a la expresión:

$$\frac{\delta_{cl}^*}{k_N^*} = 0,09 \left(\frac{a_b^*}{k_N^*}\right)^{0,82} \quad \text{en} \quad \omega^* t^* = \pi/2. \quad (3.25)$$

Además, se obtiene que el factor de fricción depende sólo de la rugosidad relativa, a_b^*/k_N^* , y se ajusta a la siguiente expresión:

$$f_w = 0,04 \left(\frac{a_b^*}{k_N^*}\right)^{-1/4} \quad \text{para} \quad \frac{a_b^*}{k_N^*} > 50 \quad (3.26)$$

Sin embargo, ninguna teoría predice apropiadamente el factor de fricción en el caso de flujo turbulento rugoso con rugosidades relativas menores de 10^2 . Kamphuis (1975) obtuvo la siguiente relación empírica para estos casos:

$$f_w = 0,4 \left(\frac{a_b^*}{k_N^*} \right)^{-0,75} \quad \text{para} \quad \frac{a_b^*}{k_N^*} < 50 \quad (3.27)$$

3.2.2.4. Régimen turbulento intermedio, $R_E > 2 \cdot 10^5$ y $a_b^*/k_N^* \approx 3000$

Como se ha explicado antes, en régimen turbulento liso el parámetro que determina el espesor de la capa límite y el factor de fricción es el número de Reynolds, R_E , mientras que en régimen turbulento rugoso es la rugosidad relativa, a_b^*/k_N^* , la que determina dichas características. En el caso de flujo turbulento intermedio entre ambos regímenes, ambos parámetros son relevantes.

3.2.3. Influencia del régimen hidráulico en la disipación de energía

A la luz de la teoría lineal (véase Fredsøe and Deigaard (1992)), se presenta un breve resumen de cómo el régimen hidráulico afecta a la disipación de energía, en una capa límite oscilatoria uniforme. En este caso, la disipación de energía, integrada en vertical en la capa límite y promediada en un ciclo de onda, es:

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \int_0^\infty \tau^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} dy^* dt^* = \overline{\tau_b^* u_\infty^*} = \rho^* \overline{U_f^* |U_f^*| u_\infty^*} \quad (3.28)$$

3.2.3.1. Régimen laminar, $R_E < 5 \cdot 10^4$

En el caso de flujo laminar en la capa límite, la disipación resulta:

$$\mathcal{D}^* = \overline{\tau_b^* u_\infty^*} = \rho^* \frac{\sqrt{\nu^* \omega^*}}{2\sqrt{2}} U_{0m}^{*2} \quad (3.29)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación de continuidad:

$$-\mathcal{D}^* = \frac{dE_f^*}{dx^*} = \frac{d(E^* c_g^*)}{dx^*} = \frac{d}{dx^*} \left(\frac{1}{8} \rho^* g^* H^{*2} c_g^* \right), \quad (3.30)$$

donde E_f^* es el flujo de energía, $E^* = \frac{1}{8} \rho^* g^* H^{*2}$ es la energía de la oscilación por longitud de onda y por unidad de anchura, c_g^* es la celeridad de grupo y g^* es la aceleración de la gravedad.

Para ondas en profundidades reducidas, con profundidad constante h^* , la celeridad de grupo es $c_g^* = c^* = \sqrt{g^* h^*}$, donde $c^* = L^*/T^*$ es la celeridad de la onda, y la velocidad orbital es $U_{0m}^* = H^* c^*/2h^*$, por lo tanto:

$$H^* = H_0^* \exp \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^* \nu^*}{2g^* h^*}} \frac{x^*}{h^*} \right) \quad (3.31)$$

Por lo tanto, x_h^* resulta:

$$x_h^* = h^* \sqrt{\frac{2g^* h^*}{\omega^* \nu^*}} \ln 4 \quad (3.32)$$

3.2.3.2. Régimen turbulento, $R_E > 2 \cdot 10^5$

En el caso de flujo en régimen turbulento en la capa límite, la disipación de energía se suele calcular a partir del coeficiente de pérdida de energía, f_e :

$$\mathcal{D}^* = \frac{2}{3\pi} \rho^* f_e U_{0m}^{*3} \quad (3.33)$$

Entonces, a partir de la ecuación de continuidad:

$$-\mathcal{D}^* = \frac{dE_f^*}{dx^*} = \frac{d(E^* c_g^*)}{dx^*} = \frac{d}{dx^*} \left(\frac{1}{8} \rho^* g^* H^{*2} c_g^* \right) \quad (3.34)$$

Para ondas en profundidades reducidas, con profundidad constante h^* , la celeridad de grupo es $C_g^* = c^* = \sqrt{g^* h^*}$, y la velocidad orbital $U_{0m}^* = H^* c^* / 2h^*$, por lo tanto:

$$-\frac{2}{3\pi} \rho^* f_e \left(\frac{H^* c^*}{2h^*} \right)^3 = \frac{d}{dx^*} \left(\frac{1}{8} \rho^* g^* H^{*2} c^* \right) \quad (3.35)$$

Así, la variación espacial de la altura de ola es:

$$\frac{dH^*}{dx^*} = \frac{-f_e}{3\pi h^{*2}} H^{*2} \quad (3.36)$$

3.2.4. Influencia del régimen hidráulico en la corriente media euleriana

En este apartado se presenta un breve resumen de cómo el régimen hidráulico afecta a la corriente media euleriana (véase Fredsøe and Deigaard (1992)), en una capa límite oscilatoria no-uniforme.

3.2.4.1. Régimen laminar, Longuet-Higgins, 1958, $R_E < 5 \cdot 10^4$

Para el caso de una capa límite laminar bajo ondas marinas de superficie, Longuet-Higgins (1958) obtuvo la siguiente expresión de la corriente media euleriana:

$$u_{S,\infty}^* = \frac{3}{4} \frac{U_{0m}^{*2}}{c^*} \quad (3.37)$$

donde se puede observar que su magnitud depende de la celeridad de la onda que la produce y de su velocidad orbital. A pesar de ser una consecuencia de los efectos viscosos, la magnitud de la corriente media euleriana es independiente de la viscosidad ν^* .

3.2.4.2. Régimen turbulento rugoso, Brøker, 1985, $R_E > 2 \cdot 10^5$ y $a_b^*/k_N^* < 3000$

La corriente media euleriana en el caso de una capa límite turbulenta resulta ser más débil que en el caso laminar, ya que la capa límite suele ser más ancha y la velocidad de déficit menor. Su valor en el extremo superior de la capa límite depende de la rugosidad relativa, a_b^*/k_N^* . Brøker (1985) obtuvo la siguiente expresión para el caso de flujo turbulento:

$$u_{S,\infty}^* = f \left(\frac{a_b^*}{k_N^*} \right) \frac{U_{0m}^{*2}}{c^*} \quad (3.38)$$

donde $f(a_b^*/k_N^*)$ es del orden de 0,4.

3.3. Revisión del estado del arte

Los trabajos descritos anteriormente se fundamentan en teoría lineal y describen en su mayoría la capa límite oscilatoria asociada al paso de ondas marinas por medio de un flujo oscilatorio uniforme. Por otra parte, dichos trabajos emplean modelos de turbulencia en los que la viscosidad de remolino no varía en el tiempo.

El objetivo de este capítulo es explorar la variabilidad del coeficiente de fricción, la tensión tangencial en el fondo, la disipación de energía y la velocidad media euleriana en la capa límite del fondo con la no-linealidad de la onda, teniendo en cuenta que el flujo, y por lo tanto su viscosidad de remolino, es no estacionario y no uniforme. A continuación se presenta una revisión del estado del arte en estos temas.

El caso de la capa límite laminar se empezó a estudiar en el siglo XIX, con el primer trabajo de Stokes (1855), y actualmente su comprensión es razonablemente completa. El primer intento de describir el régimen turbulento de manera sencilla fue desarrollado por Jonsson (1963, 1966) y Jonsson and Carlsen (1976), que emplearon la forma integrada de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y asumieron un perfil de velocidades logarítmico.

3.3.1. Problema de cierre turbulento

Sin embargo, para analizar el flujo turbulento con rigor, se debe emplear un modelo de turbulencia que permita cerrar el problema de contorno formado por las ecuaciones del flujo medio (ecuaciones de Reynolds) y las condiciones de contorno. Dicho modelo debe describir las tensiones de Reynolds, dependientes de las velocidades de fluctuación turbulentas, en función de otras características del flujo medio. En este sentido, los modelos más utilizados se basan en modelar dichas tensiones de manera análoga a las tensiones viscosas, introduciendo en lugar de la viscosidad cinemática, una nueva característica dependiente de la turbulencia llamada “viscosidad de remolino”, ν_T^* . Esta nueva característica se puede modelar mediante una expresión que la evalúa directamente (modelos de cero ecuaciones), o a partir de otras variables turbulentas, como la energía cinética turbulenta (e^*), la disipación (ε^*) o la pseudo-vorticidad (Ω^*).

Los primeros modelos de cero ecuaciones, como el de la longitud de mezcla de Prandtl (1926), suponían que la viscosidad de remolino era invariante en el tiempo, y que su valor aumentaba con la distancia al fondo. Kajiuura (1964, 1968) y Tanaka (1989) aplicaron el siguiente modelo en presencia de ondas marinas y de ondas con corriente respectivamente:

$$\nu_T^* = \kappa U_{f,\max}^* y^*. \quad (3.39)$$

Grant and Madsen (1979); Brevik (1981) y Long (1981) desarrollaron modelos similares.

Sin embargo, Trowbridge and Madsen (1984a,b) y Davies (1986) llegaron a la conclusión de que en la capa límite oscilatoria asociada a las ondas gravitatorias era fundamental tener en cuenta la variación en el tiempo de la viscosidad de remolino. El modelo de Davies (1986) propone que:

$$\nu_T^* = \kappa U_{f,\max}^* y^* \left[\frac{1 - \cos(2\omega^* t^*)}{2} \right], \quad (3.40)$$

expresión que sobreestima la variación temporal de la viscosidad de remolino. A pesar de que los modelos de cero ecuaciones se han empleado mucho por su simplicidad, su aplicación sólo está bien fundada cuando la turbulencia está en equilibrio local y los procesos de convección y difusión no son importantes. El flujo oscilatorio en la capa límite asociada a ondas marinas es fuertemente no-estacionario, y en principio estos modelos no son apropiados para su análisis.

Los modelos de una ecuación describen la viscosidad de remolino, ν_T^* , en función de la energía cinética turbulenta, e^* (también llamada k). Por lo tanto, incluyen una ecuación extra

que describe la variación de la nueva variable, donde se suele incluir la difusión, producción y disipación de la misma; sus correspondientes condiciones de contorno y una expresión que permita obtener la viscosidad de remolino a partir de la energía cinética turbulenta, e^* . Este tipo de modelos predicen un valor máximo de la energía turbulenta en el fondo, donde se produce la turbulencia, y describe cómo dicha energía se propaga alejándose del fondo.

Los modelos de dos ecuaciones describen la viscosidad de remolino, ν_T^* , en función de la energía cinética turbulenta, e^* y la disipación, ε^* (modelos $k - \varepsilon$), o en función de la energía turbulenta y la pseudo-vorticidad (modelos de $k - \Omega$), como el modelo de Saffman (1970). Estos modelos incluyen dos ecuaciones que describen la variación de cada una de las nuevas variables, y sus correspondientes condiciones de contorno, y una expresión que relaciona la viscosidad de remolino con dichas variables. Con estos modelos se obtienen resultados ligeramente mejores que con los modelos de una ecuación. Justesen (1988) y Blondeaux (1987) emplearon respectivamente los modelos $k - \varepsilon$ y $k - \Omega$ en el estudio de la capa límite bajo ondas marinas.

3.3.2. Corriente media euleriana

Un gran número de investigaciones teóricas y experimentales se han llevado a cabo considerando una capa límite oscilatoria en la que las velocidades son uniformes en la dirección del flujo. Sin embargo, el flujo real en la capa límite del fondo asociada a las ondas marinas varía en dicha coordenada, y esta dependencia induce fenómenos adicionales como la generación de una corriente estacionaria en el fondo (la corriente euleriana), que no se puede apreciar en el caso de flujo uniforme.

Longuet-Higgins (1953) analizó el flujo laminar en la capa límite oscilatoria bajo ondas progresivas, y proporcionó una solución analítica para la velocidad media euleriana ($u_S^* = 0,75(U_0^*)^2/c^*$, en el sentido de avance de las ondas). Más adelante, Longuet-Higgins (1958) determinó la velocidad media euleriana para el caso turbulento, mediante un modelo simplificado en el que se asumía que las características turbulentas no variaban en un ciclo de onda, y obtuvo que la expresión obtenida para el caso laminar no variaba debido a la turbulencia.

Sin embargo, los datos experimentales muestran, en algunos casos de flujo turbulento, discrepancias significativas con los resultados teóricos de Longuet-Higgins (1953, 1958). En particular, Collins (1963) observó diferencias para valores muy altos del número de Reynolds, y las atribuyó a la presencia de la turbulencia. Por otro lado, Brebner et al. (1966) investigaron el efecto de la rugosidad en el transporte de masa y mostraron valores de la velocidad media euleriana menores que los teóricos, para números de Reynolds mayores de 160.

Trowbridge and Madsen (1984a,b), empleando un modelo de viscosidad de remolino variante en el tiempo, predijeron una inversión del sentido de la velocidad media euleriana bajo ondas largas. Por otra parte, obtuvieron una reducción de dicha velocidad para valores pequeños de la rugosidad, aunque para valores altos de la rugosidad encontraron velocidades medias eulerianas mucho mayores que la teórica de Longuet-Higgins (1958). Sin embargo, aún existen considerables diferencias entre sus perfiles verticales de la velocidad media euleriana y los obtenidos por Doorn (1981).

Por otro lado, Jacobs (1984) empleó el modelo de dos ecuaciones de Saffman (1970) y obtuvo una solución asintótica del transporte de masa en el extremo superior de la capa límite para valores muy altos del número de Reynolds y por lo tanto, para flujo turbulento liso. Sus resultados se ajustan bien a los datos experimentales para números de Reynolds grandes, y explican la reducción del transporte de masa en el extremo superior de la capa límite para régimen liso.

Hsu and Ou (1994) evaluaron el transporte de masa en la capa límite turbulenta por medio de un modelo simple que empleaba una viscosidad invariante en el tiempo. Sus resultados

presentan una concordancia razonable con los datos empíricos de Doorn (1981), y mostraban que la velocidad media euleriana invertía su sentido para valores de la profundidad relativa menores de un valor umbral que dependía de la rugosidad relativa del fondo. Sin embargo, esta influencia de la rugosidad del fondo en la velocidad media euleriana era débil.

Más recientemente, Chowdhury et al. (1997) han evaluado el flujo medio en la capa límite considerando un modelo de turbulencia de una ecuación. Presentan un análisis detallado de los perfiles de la velocidad media euleriana, que invierte su sentido para ondas relativamente largas, al igual que sucede en los trabajos previos. También encontraron que el espesor de la capa límite crece gradualmente cuando aumenta la rugosidad del fondo.

A la luz de las diferencias obtenidas mediante el empleo de distintos modelos de turbulencia, Chowdhury et al. (1997) subrayaron la conveniencia de emplear modelos de cierre sofisticados basados en las ecuaciones de transporte de las características turbulentas. La comparación entre los resultados obtenidos empleando modelos de turbulencia de una ecuación y de dos ecuaciones con los resultados experimentales de Justesen (1991) muestra que los modelos de dos ecuaciones proporcionan mejores predicciones de la viscosidad de remolino y describen mejor las características turbulentas de la capa límite.

3.4. Planteamiento y formulación del flujo turbulento en la capa límite para ondas de amplitud finita

3.4.1. Introducción

En este apartado se pretende analizar el flujo turbulento en la capa límite de una onda no-lineal del régimen de Stokes-II. Para ello ha planteado y resuelto primero el problema en el núcleo del fluido, donde las tensiones viscosas son despreciables frente a las fuerzas inerciales (véanse apartados A.2 y A.3). Por otro lado, se ha planteado el problema del flujo en la capa límite, donde las tensiones viscosas y turbulentas cobran importancia.

Dado que se han querido modelar las ondas gravitatorias en el marco de la teoría de Stokes-II, se ha formulado el problema siguiendo un método de perturbaciones hasta el segundo orden de aproximación. Se ha tenido en cuenta la variación de la altura de ola debido a la disipación viscosa y turbulenta.

Tanto el movimiento en el núcleo del fluido como el flujo laminar en la capa límite se han planteado y se han resuelto analíticamente en los apartados A.3 y A.4. En este apartado se muestra la formulación del flujo en la capa límite para el caso turbulento.

3.4.2. Formulación del problema. Ecuaciones del flujo en la capa límite turbulenta

Se ha considerado el caso de una onda gravitatoria monocromática que se propaga sobre una profundidad constante h_0^* . La onda se ha caracterizado por su periodo, $T^* = 2\pi/\omega^*$, su longitud de onda, $L^* = 2\pi/k^*$, y su amplitud inicial a_0^* ; donde ω^* es la frecuencia angular, y k es el número de onda. Los símbolos que llevan el superíndice * son cantidades dimensionales.

Para modelar el movimiento medio del fluido en la capa límite se ha recurrido a las ecuaciones promediadas de Reynolds que, una vez adimensionalizadas del modo descrito en el apartado A.2 y haciendo los mismos cambios de variable, quedan como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + O(\delta^2) = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right) = \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
& -2\pi \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{t}} - \delta \frac{\partial P_e}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) - \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right) \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right) \right] \right\} + O(\delta^2) \\
& \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right) = \tag{3.43} \\
& \frac{-1}{\delta} \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right) \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right] \right\} + O(\delta^2)
\end{aligned}$$

Donde, (u, v) son las componentes de la velocidad del flujo medio.

El flujo debe además satisfacer las mismas condiciones de contorno que en el caso de capa límite laminar:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p} = 0 \tag{3.44}$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} u_{\text{núcleo}} = \tag{3.45}$$

$$\frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + \delta \left\{ U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_\delta}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c.$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} v_{\text{núcleo}} = \tag{3.46}$$

$$0 + \delta \left\{ V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c.$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \tag{3.47}$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \tag{3.48}$$

con $\delta \tilde{y} \ll 1$

El desarrollo de las ecuaciones de gobierno del flujo en la capa límite turbulenta están descritas con más detalle en el apéndice A, apartado A.5.2 .

Se puede observar que en las ecuaciones de Reynolds el efecto de la turbulencia aparece en unos términos que se llaman tensiones turbulentas o tensiones de Reynolds, ya que actúan como consumidores de cantidad de movimiento del flujo medio.

En este caso, dichos términos se han modelado análogamente a las tensiones viscosas, empleando el modelo de turbulencia de Saffman (1970,1974).

3.4.3. Modelo de turbulencia de Saffman

El modelo de turbulencia de Saffman (1970,1974) es un modelo de dos ecuaciones que expresa la viscosidad de remolino en función de la energía cinética turbulenta, e^* , y una pseudo-vorticidad, Ω^* . Patel and Yoon (1995) obtuvo que los modelos $k - \Omega$, como el de Saffman, proporcionaban mejores resultados que los modelos $k - \varepsilon$ para flujos separados sobre paredes rugosas.

Este modelo describe la turbulencia por medio de dos “densidades”: la “densidad de energía cinética turbulenta”, e^* , y la “densidad de pseudo-vorticidad”, Ω^* , que deben satisfacer unas ecuaciones no-lineales de difusión. La difusión de dichas variables y del campo de velocidades medio se describe a partir de una viscosidad de remolino, ν_T^* , que depende a su vez de dichas densidades de la siguiente manera:

$$\nu_T^* = \frac{e^*}{\rho^* \Omega^*} \quad (3.49)$$

Las variables e^* y Ω^* se han adimensionalizado como sigue:

$$e = \frac{e^*}{\rho^* a_0^* (\omega^*)^2 \delta^* / S} \quad y \quad \Omega = \frac{\Omega^*}{\frac{a_0^* \omega^*}{\delta^* S}},$$

y la viscosidad de remolino, adimensionalizada con la viscosidad cinemática, queda:

$$\nu_T = \frac{\nu_T^*}{\nu^*} = \frac{2e}{\Omega}$$

Las ecuaciones del modelo de Saffman adimensionalizadas quedan:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left[u \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial e}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} \right] = \quad (3.50) \\ & = \frac{R_\delta}{2} e \left\{ \alpha_e \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_e \Omega \right\} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{y}} \right] \right\} \\ & \quad \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} \right) = \quad (3.51) \\ & = \frac{R_\delta}{2} \Omega^2 \left\{ \alpha_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_\Omega \Omega \right\} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{y}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Donde $\alpha_e, \alpha_\Omega, \beta_e, \beta_\Omega, \sigma_e, \sigma_\Omega$ son constantes universales.

Y las variables e y Ω deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$e = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.52)$$

$$\Omega = \frac{R_\delta}{\alpha_e} T_{xy} f \left(R_\delta z_r \sqrt{T_{xy}} \right) \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.53)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e = 0 \quad (3.54)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega = 0 \quad (3.55)$$

Donde $z_r = k_N^*/\delta^*$ es la altura de rugosidad de Nikuradse adimensionalizada con la longitud de Stokes, y donde se ha empleado la expresión analítica de la función $f(Z_0)$ obtenida para este modelo por Blondeaux and Colombini (1985):

$$\log_{10} f(Z_0) = \begin{cases} 5,354 - 4,59 \log_{10}(Z_0) & \text{si } Z_0 \leq 5 \\ 7,521 - 11,43 \log_{10}(Z_0) + 6,205(\log_{10}(Z_0))^2 - 1,256(\log_{10}(Z_0))^3 & \text{si } 5 < Z_0 < 65 \\ 1,44 - 0,9535 \log_{10}(Z_0) & \text{si } Z_0 \geq 65 \end{cases} \quad (3.56)$$

El modelo de Saffman está descrito con más detalle en el apéndice A, apartado A.5.1.

3.4.4. Resolución del problema

A la vista de los apartados anteriores, el flujo en la capa límite del fondo asociada a una onda progresiva de amplitud finita viene descrito por las ecuaciones (3.41)-(3.43), (3.50)-(3.51), y las condiciones de contorno (3.44)-(3.48) y (3.52)-(3.55).

Las variables se han desarrollado en función del parámetro de la perturbación, $\delta \ll 1$:

$$(u, v, \tilde{p}, e, \Omega) = (u_0, v_0, \tilde{p}_0, e_0, \Omega_0) + \delta (u_1, v_1, \tilde{p}_1, e_1, \Omega_1) \quad (3.57)$$

y se ha descompuesto el problema de contorno en un problema al primer orden de aproximación $O(\delta^0)$, otro problema al segundo orden de aproximación $O(\delta^1)$ y otro problema de orden superior $O(\delta^3)$.

Teniendo en cuenta que no existe ningún forzamiento capaz de inducir variaciones en \tilde{x} , y resolviendo el primer orden de las ecuaciones (3.41) y (3.43) junto con las condiciones de contorno correspondientes (véase apartado A.5.3 del apéndice A para más detalles), se han obtenido los valores de v_0 y \tilde{p}_0 :

$$v_0 = 0; \quad (3.58)$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{-2}{3} e_0. \quad (3.59)$$

Por lo tanto, el problema de contorno al primer orden, $O(\delta^0)$, en función de las variables restantes (u_0, e_0, Ω_0) , queda como sigue:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{-i}{2} a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] + O(\delta^2) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{R_\delta}{2} \alpha_e e_0 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| - \frac{R_\delta}{2} \beta_e \Omega_0 e_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{t}} = \frac{R_\delta}{2} \alpha_\Omega \Omega_0^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| - \frac{R_\delta}{2} \beta_\Omega \Omega_0^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (3.62)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_0 = \frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (3.63)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e_0 = 0 \quad (3.64)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega_0 = 0 \quad (3.65)$$

$$u_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.66)$$

$$e_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.67)$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\alpha_e} \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} f \left(\frac{z_r}{\sqrt{R_\delta}} \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}} \right) \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.68)$$

Por otro lado, el problema al segundo orden de aproximación, $O(\delta^1)$, queda como sigue:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + 2\pi \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} \right) &= \frac{i R_\delta \pi}{4} \left(1 - \frac{3}{S^2}\right) a^2(\chi) e^{2i\tilde{t}} + c.c. + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{t}} = (-\pi \tilde{y} + i c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. - \quad (3.71)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{p}_1 + \frac{2}{3} e_1 \right) + \pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} \right]$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} \right) = \frac{R_\delta}{2} \alpha_e \left(e_0 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + e_1 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| \right) - \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} - \frac{R_\delta}{2} \beta_e (e_0 \Omega_1 + e_1 \Omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial e_1}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2\sigma_e \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} \right] \\ 2 \frac{\partial(\Omega_0 \Omega_1)}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{t}} \right) = \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} = \frac{R_\delta}{2} \alpha_\Omega \left(\Omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + 2\Omega_0 \Omega_1 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| \right) - \frac{3 R_\delta}{2} \beta_\Omega \Omega_0^2 \Omega_1 + \\ + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e_0}{\Omega_0}\right) \frac{\partial(\Omega_0 \Omega_1)}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2\sigma_\Omega \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}_1 = 0 \quad (3.74)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_1 = U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_\delta}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c. \quad (3.75)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v_1 = V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (3.76)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e_1 = 0 \quad (3.77)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega_1 = 0 \quad (3.78)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.79)$$

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.80)$$

$$e_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \frac{1}{\alpha_e} \left\{ \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \frac{A_1}{A_0} f(A_0) df(A_0) + \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} f(A_0) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} f(A_0) \right\} \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde

$$A_0 = \frac{z_r}{\sqrt{R_\delta}} \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}}, \quad (3.83)$$

$$A_1 = \frac{z_r}{\sqrt{R_\delta}} \frac{2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}}}{2 \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}}}, \quad (3.84)$$

y donde se ha desarrollado la función $f(Z_0)$ (ecuación 3.56) así:

$$f(A_0 + \delta A_1) = f(A_0) + \delta \frac{A_1}{A_0} f(A_0) df(A_0), \quad (3.85)$$

con

$$df(Z_0) = \begin{cases} -4,59 & \text{si } Z_0 \leq 5 \\ -11,43 + 2 \cdot 6,205 \log Z_0 - 3 \cdot 1,256 \log^2 Z_0 & \text{si } 5 < Z_0 < 65 \\ -0,9535 & \text{si } Z_0 \geq 65. \end{cases} \quad (3.86)$$

La resolución del problema al primer orden ($O(\delta^0)$) proporciona la descripción del flujo de teoría lineal, la resolución del problema al segundo orden proporciona la contribución al flujo de los fenómenos no-lineales de segundo orden, y la superposición de ambas soluciones nos da el movimiento del fluido al segundo orden de aproximación. El problema de contorno conjunto planteado no se puede resolver analíticamente, y por lo tanto se ha implementado numéricamente empleando un esquema explícito en dos etapas, con diferencias adelantadas en el tiempo y centradas en el espacio. El diagrama de flujo básico del código se presenta en la figura 3.1. Los detalles del código numérico se encuentran en el apéndice A, apartado A.5.4.

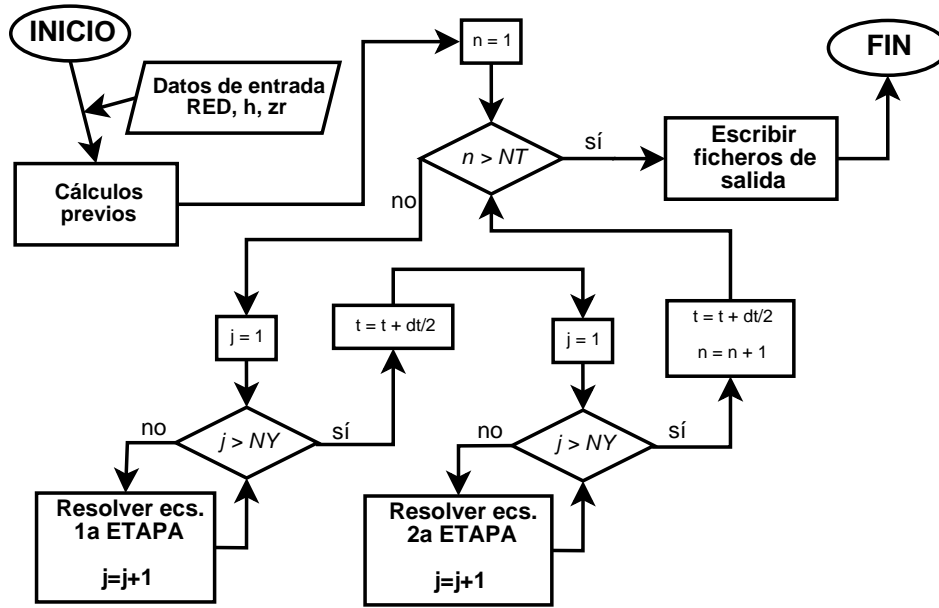


Figura 3.1: Diagrama de flujo del código numérico desarrollado para la resolución del problema de la capa límite del fondo en régimen turbulento.

3.4.5. Aplicaciones del estudio

Una vez resuelto el problema de la capa límite turbulenta hasta el segundo orden de aproximación, se pueden analizar algunas características del flujo, como la fricción con el fondo, la disipación de energía, el “steady streaming” y las características turbulentas, para lo cual hay que adaptar al caso no-lineal algunos de los conceptos antes descritos para teoría lineal.

3.4.5.1. Espesor de la capa límite

Se ha definido el espesor de la capa límite como la altura sobre el fondo donde la velocidad alcanza un valor del 99 % de su valor en el exterior de la capa límite, teniendo en cuenta la no-linealidad:

$$\delta_{cl}(\tilde{t}) = \frac{\delta_{cl}^*(\tilde{t})}{\delta^*} = \text{máx}(\tilde{y}) \quad / \quad (3.87)$$

$$|(u_{0,\infty}(\tilde{t}) + \delta u_{1,\infty}(\tilde{t})) - (u_0(\tilde{y}, \tilde{t}) + \delta u_1(\tilde{y}, \tilde{t}))| < 0,01 (u_{0,\infty}(\tilde{t}) + \delta u_{1,\infty}(\tilde{t}))$$

3.4.5.2. Velocidad media Euleriana, u_{1S}

La velocidad media euleriana es una cantidad de segundo orden, y adimensionalizada queda:

$$u_S = \frac{u_S^*}{U_0^*} = u_{0S} + \delta u_{1S} = \delta u_{1S}. \quad (3.88)$$

Una vez resuelto el problema de contorno en la capa límite, se ha obtenido la velocidad media euleriana promediando la velocidad horizontal en un ciclo de onda.

3.4.5.3. Fricción en el fondo

Tensión tangencial en el fondo, τ_b

Para el caso no-lineal, la tensión tangencial en el fondo, adimensionalizada, será

$$\begin{aligned} \tau_b &= \frac{\tau_b^*}{\rho^* U_0^{*2}} = \frac{1}{R_\delta} \left[(1 + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right]_{\tilde{y}=\tilde{y}_0} = \frac{1}{R_\delta} \left[(1 + \nu_{T_0}) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right]_{\tilde{y}=\tilde{y}_0} + \\ &+ \frac{\delta}{R_\delta} \left[(1 + \nu_{T_0}) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + \nu_{T_1} \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right]_{\tilde{y}=\tilde{y}_0} + O(\delta^2) = \tau_{0b} + \delta \tau_{1b} + O(\delta^2), \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde $\nu_{T_0} = \frac{2e_0}{\Omega_0}$ y $\nu_{T_1} = \left(\frac{2e_1}{\Omega_0} - \frac{2e_0\Omega_1}{\Omega_0^2} \right)$.

El desfase entre la tensión tangencial en el fondo y la velocidad horizontal exterior, ϕ , se ha definido como

$$\phi = \tilde{t}_{\text{cresta}, u_\infty} - \tilde{t}_{\text{cresta}, \tau_b} \quad \text{ó} \quad \phi = \tilde{t}_{\text{seno}, u_\infty} - \tilde{t}_{\text{seno}, \tau_b} \quad (3.90)$$

Coefficiente de fricción, f_w

Partiendo de la definición del coeficiente de fricción (ecuación 3.10), se obtiene, para el caso no lineal:

$$f_w = \frac{2\tau_{b,\text{max}}^*}{\rho^* U_{0m}^{*2}} = 2\tau_{b,\text{max}} \quad (3.91)$$

Tensión neta en el fondo, $\overline{\tau_b}$

En el caso de ondas no-lineales, la tensión tangencial en el fondo es asimétrica y, por lo tanto, existe una tensión neta en el fondo, que puede estar dirigida en el sentido de avance de la onda o en sentido contrario. Su expresión resulta:

$$\overline{\tau_b} = \frac{\overline{\tau_b^*}}{\rho^* U_0^{*2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tau_{0b} + \delta \tau_{1b}) d\tilde{t} = \overline{\tau_{0b}} + \delta \overline{\tau_{1b}} \quad (3.92)$$

3.4.5.4. Características turbulentas

Las características turbulentas del flujo se han definido siguiendo lo expuesto en el apartado correspondiente al modelo de turbulencia de Saffman.

Energía cinética turbulenta, e

La energía cinética turbulenta, para el caso no lineal y adimensionalada, se puede expresar:

$$e = \frac{e^*}{\rho^* a_0^* (\omega^*)^2 \delta^* / S} = e_0 + \delta e_1 \quad (3.93)$$

Viscosidad de remolino, ν_T

Para el caso no lineal, la viscosidad de remolino, ν_T , descompuesta en términos de δ , queda:

$$\nu_T = \frac{\nu_T^*}{\nu^*} = 2 \left(\frac{e_0}{\Omega_0} + \delta \frac{e_1 \Omega_0 - e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right); \quad (3.94)$$

3.4.5.5. Disipación de energía y atenuación de la onda

Disipación media de energía, \mathcal{D}

En el caso no-lineal, la disipación media de energía en la capa límite queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{\mathcal{D}^*}{\tau_0^* U_0^*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tau \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} d\tilde{t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tau_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} d\tilde{t} + \frac{\delta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\tau_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + \tau_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} \right) d\tilde{y} d\tilde{t} + O(\delta^2) \\ &= \mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}_1 + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Factor de pérdida de energía, f_e

En el caso no-lineal, el valor de f_e , hasta el segundo orden de aproximación, sería:

$$\begin{aligned} f_e &= \frac{3\pi}{2\rho^*} \frac{\mathcal{D}_0^* + \delta \mathcal{D}_1^*}{(U_{0m}^* + \delta \Delta U_{1m}^*)^3} = \\ &= \frac{3\pi}{2\rho^*} \frac{\tau_0^* U_0^*}{U_0^{*3}} \frac{\mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}_1}{(1 + \delta \Delta U_{1m})^3} = \frac{3\pi}{2} \frac{\mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}_1}{1 + \delta(3\Delta U_{1m})} = \\ &= \frac{3\pi}{2} (\mathcal{D}_0 + \delta (\mathcal{D}_1 + 3\mathcal{D}_0 \Delta U_{1m}) + O(\delta^2)) \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde ΔU_{1m}^* es la contribución de la velocidad horizontal de segundo orden a la velocidad orbital, de manera que $u_{\max}^* = U_{0m}^* + \delta \Delta U_{1m}^* = U_0^*(1 + \delta \Delta U_{1m})$.

En cualquier caso, resulta mas interesante definir un *factor de pérdida de energía equivalente*, $f_{e,eq}$, que permita obtener la disipación de energía (incluyendo los efectos no lineales) a partir de la velocidad orbital de primer orden, es decir:

$$f_{e,eq} = \frac{3\pi}{2\rho^*} \frac{\mathcal{D}_0^* + \delta \mathcal{D}_1^*}{U_{0m}^{*3}} = \frac{3\pi}{2} (\mathcal{D}_0 + \delta \mathcal{D}_1) \quad (3.97)$$

Atenuación de la altura de ola

En el caso de capa límite en el fondo para ondas de amplitud finita y empleando el modelo de turbulencia de Saffman, se ha obtenido que la amplitud de la onda varía así:

$$a = \exp K^* \chi \quad \rightarrow \quad a^* = a_0^* \exp \left(K^* \frac{\delta}{L^*} x^* \right), \quad (3.98)$$

donde $K^* = \frac{-8\pi c_c}{4\pi h_0^*/L^* + \sinh(4\pi h_0^*/L^*)}$, y por tanto, el coeficiente de atenuación de la onda será:

$$A = K^* \frac{\delta}{L^*} = \frac{-8\pi c_c}{4\pi h_0^*/L^* + \sinh(4\pi h_0^*/L^*)} \frac{\delta}{L^*}. \quad (3.99)$$

Por lo tanto, la distancia en que la onda divide su amplitud por dos será:

$$\chi_h = \frac{-\ln 2}{K^*} \quad (3.100)$$

y como $\chi = \frac{\delta x^*}{L^*} = \frac{x^* \delta^*}{L^{*2}}$, entonces

$$x_h = \frac{x_h^*}{L^*} = \frac{\chi_h}{\delta} = \frac{-\ln 2}{\delta K^*} = \frac{\ln 2(4\pi h_0^*/L^* + \sinh(4\pi h_0^*/L^*))}{8\pi c_c \delta}. \quad (3.101)$$

3.5. Resultados

3.5.1. Casos estudiados

En este apartado se presentan los resultados del perfil de velocidades, el espesor de la capa límite, la velocidad media euleriana, la tensión tangencial en el fondo, la tensión neta en el fondo, el coeficiente de fricción, la energía cinética turbulenta, la viscosidad de remolino y la disipación, en función del peralte de la onda y de la rugosidad del fondo.

Los resultados se presentan distinguiendo el régimen de onda lineal, Stokes-II y Stokes de orden superior; y en función del régimen hidráulico distinguiendo entre laminar, transición, turbulento liso y turbulento rugoso, caracterizados en función de su número de Reynolds.

Para facilitar la comprensión del desarrollo, se ha utilizado siempre el mismo periodo $T = 10$ s, y la misma profundidad, $h = 10$ m. El paso de régimen de onda lineal a no lineal se ha obtenido aumentando la altura de ola, y la transición entre regímenes hidráulicos variando la rugosidad y la altura de ola. En la tabla 3.1 se resumen los casos analizados, y en la figura 3.2 se ilustra la relación entre los casos.

	Valores físicos				Datos de entrada del código			
	$T(s)$	$h(m)$	$H^*(m)$	a_b^*/k_N^*	R_δ	h_0^*/L^*	z_r^*/δ^*	H_0^*/L^*
LAM-A	10	10	0,15	287,5	114,5	0,1083	0,2	$8,123 \cdot 10^{-4}$
LAM-B	10	10	0,15	191	114,5	0,1083	0,3	$8,123 \cdot 10^{-4}$
LIN-B	10	10	0,5	191	382	0,1083	1	0,0054
LIN-HR	10	10	0,5	95,5	382	0,1083	2	0,0054
ST2-HL	10	10	1,0	76400	764	0,1083	$5 \cdot 10^{-3}$	0,0108
ST2-A	10	10	1,0	955	764	0,1083	0,4	0,0108
ST2-B	10	10	1,0	191	764	0,1083	2	0,0108
ST2-HR	10	10	1,0	95,5	764	0,1083	4	0,0108
STM-HL	10	10	2,0	76400	1528	0,1083	0,01	0,0216
STM-A	10	10	2,0	382	1528	0,1083	2	0,0216

Tabla 3.1: Casos estudiados. Parámetros físicos (dimensionales) y parámetros adimensionales de entrada del código.

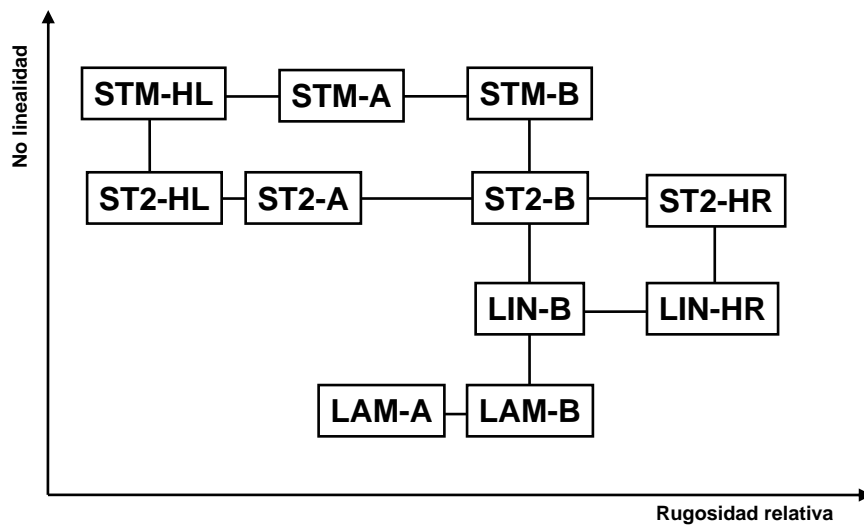


Figura 3.2: Esquema de los casos analizados y relaciones entre ellos. La rugosidad relativa de los casos aumenta de izquierda a derecha, y la no-linealidad de abajo a arriba. Los casos unidos por una línea vertical u horizontal tienen el mismo valor de rugosidad relativa o número de Reynolds y peralte, respectivamente.

3.5.2. Resultados y análisis

3.5.2.1. Capa límite laminar para ondas lineales. Casos *LAM*

Los casos *LAM-A* y *LAM-B* representan ondas con una altura de ola $H = 0,15\text{m}$ y los valores de la rugosidad relativa ($a_b^*/k_N^* = 287,5$ y 191) respectivamente, y corresponden a ondas en régimen lineal con flujo laminar en su capa límite del fondo.

En primer lugar se ha comprobado que en la capa límite laminar para una onda lineal el modelo reproduce adecuadamente las soluciones teóricas clásicas. Así, se ha obtenido que la velocidad media euleriana en el extremo superior de la capa límite coincide exactamente con la predicha por Longuet-Higgins, y los perfiles de velocidades encajan perfectamente con los teóricos (véase figura 3.3).

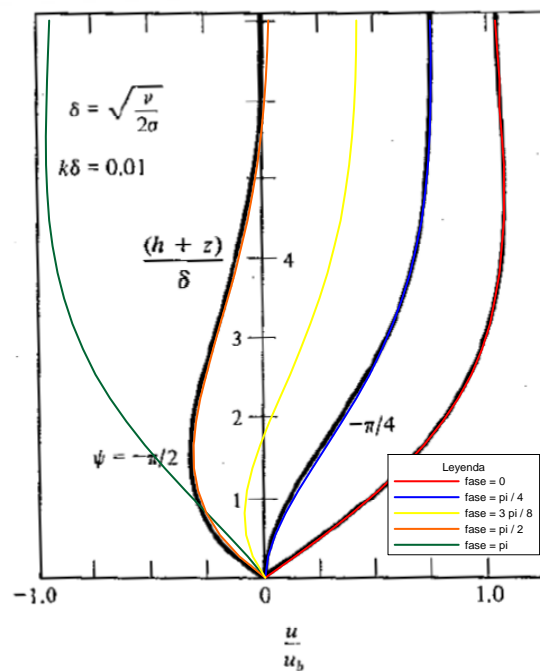


Figura 3.3: Comparación de los perfiles de velocidad horizontal obtenidos con los teóricos para flujo laminar. Figura tomada de Dean and Dalrymple (1991).

Se ha comprobado que, dado que el flujo en la capa límite está en régimen laminar, el valor de la rugosidad relativa no influye en los resultados, como se puede observar en las tablas 3.2, 3.3 y 3.4 y en las figuras 3.5 y 3.6.

En las figuras 3.5 y 3.6 se han representado los perfiles de las características hidrodinámicas del flujo en 16 fases de onda diferentes ($\hat{t} = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2, 5\pi/8, 3\pi/4 \dots$). El eje vertical representa la coordenada vertical $\tilde{y} = y^*/\delta^*$, y en el eje horizontal se representan, de izquierda a derecha, las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta respectivamente. En la primera fila se presentan los perfiles de las soluciones al primer orden de dichas variables (u_0, v_0, τ_0, e_0), en la segunda fila las contribuciones del segundo orden (u_1, v_1, τ_1, e_1) y en la tercera fila los perfiles totales, en su forma dimensional (u^*, v^*, τ^*, e^*).

Se puede observar además que los efectos de segundo orden son prácticamente despreciables (la contribución del segundo orden a la velocidad orbital es del 0,7%), ya que se trata de ondas en régimen lineal.

En la figura 3.4 se presenta el perfil de la velocidad media euleriana para ambos casos. Se puede observar que dicho perfil presenta en la región más próxima al fondo un máximo de corriente en el sentido de avance de la onda, y en la parte superior tiende a un valor estable (igual al predicho por Longuet-Higgins).

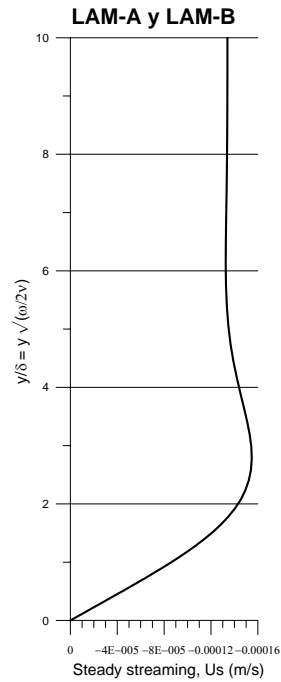


Figura 3.4: Perfil de la velocidad media euleriana para los casos *LAM*.

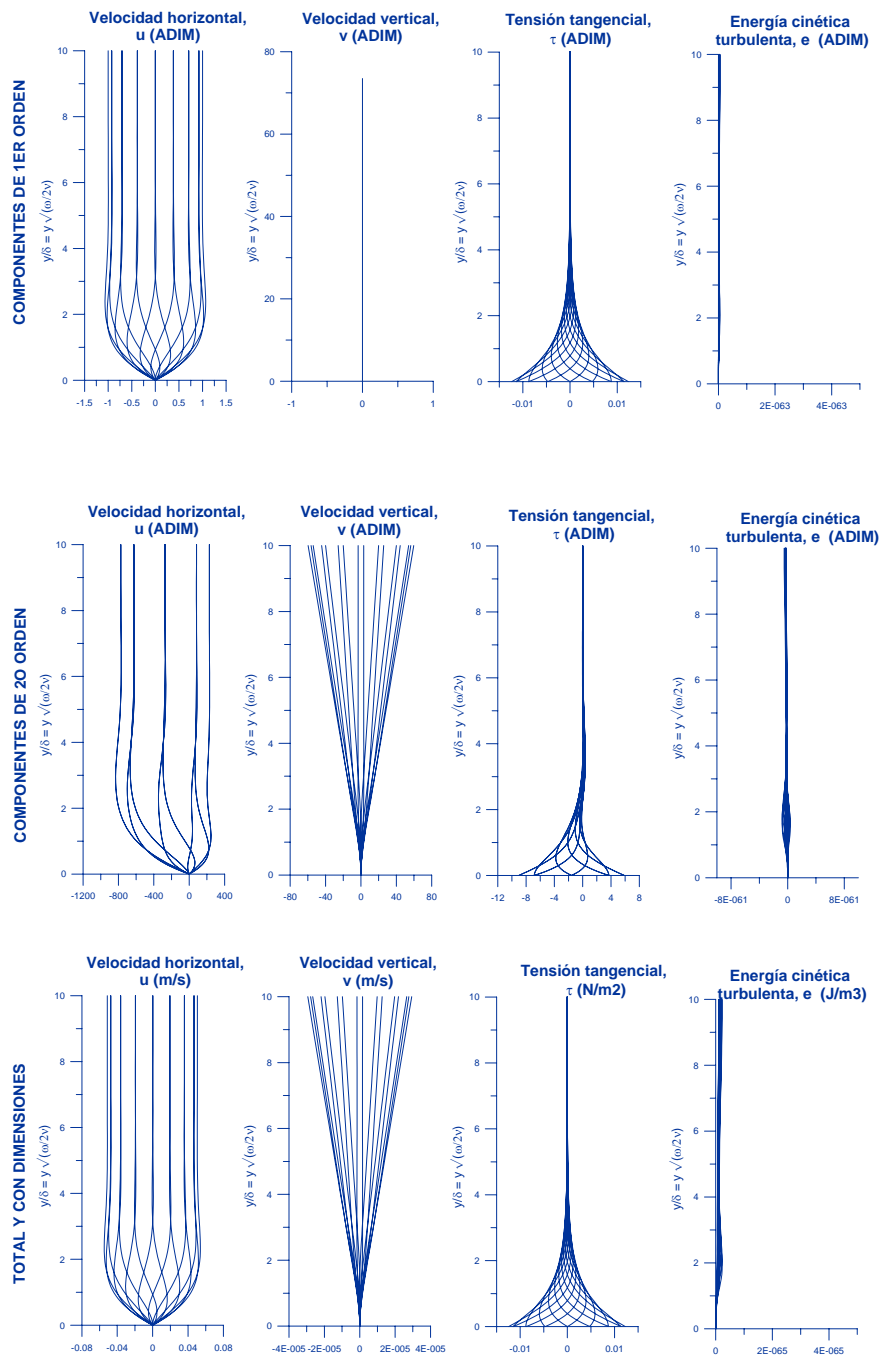


Figura 3.5: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *LAM-A*.

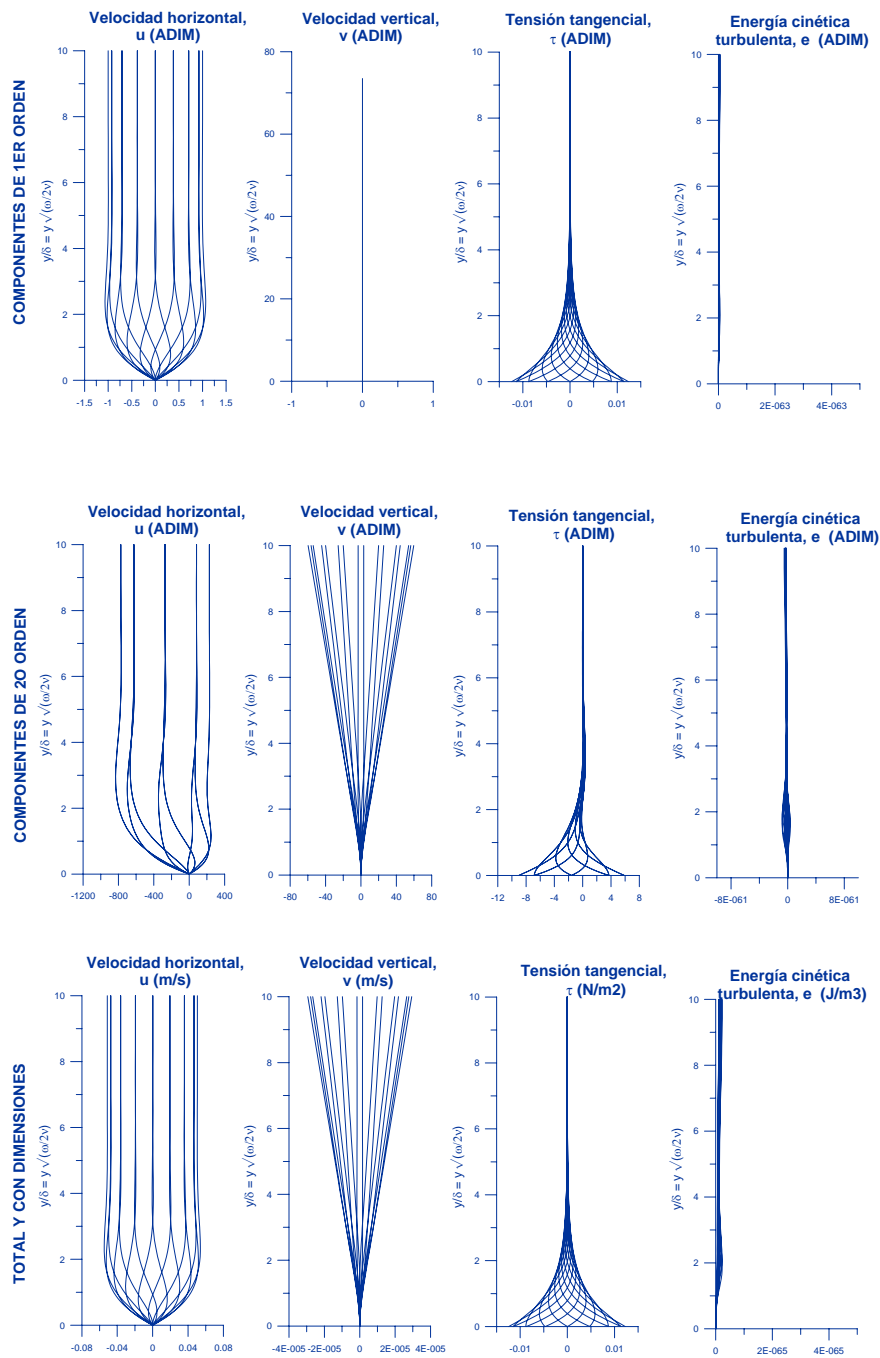


Figura 3.6: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *LAM-B*.

3.5.2.2. Ondas lineales. Casos *LIN*

Los casos *LIN-B* y *LIN-HR* representan ondas con una altura de ola $H = 0,5\text{m}$ con valores de la rugosidad relativa ($a_b^*/k_N^* = 191$ y $95,5$) respectivamente, y corresponden a ondas en régimen lineal cuyo flujo en la capa límite está en régimen de transición entre laminar y turbulento.

En las figuras 3.8 y 3.9 se han representado los perfiles verticales de las características hidrodinámicas del flujo en 16 fases de onda diferentes para los casos *LIN-B* y *LIN-HR*.

Se puede observar además en dichas figuras que los efectos de segundo orden son prácticamente despreciables (la contribución del segundo orden a la velocidad orbital es del 3,2% y del 3,3%, respectivamente), ya que se trata de ondas en régimen lineal.

A la vista de las figuras 3.8 y 3.9, se puede decir que al primer orden, la tensión tangencial en el fondo es mayor para el caso más rugoso, y la energía cinética turbulenta es también mayor.

Por otro lado, en la figura 3.7 se puede observar que el perfil de la velocidad media euleriana se puede dividir en dos regiones: una zona más cercana del fondo, donde se puede observar la presencia de un máximo de corriente que se dirige en el sentido de avance de la onda (valor negativo, ya que la onda avanza en el sentido negativo del eje x^*), de mayor magnitud en el caso más rugoso. En la región superior, sin embargo, se produce una transición hacia un valor estable que, en el caso más rugoso es prácticamente cero, y en el caso menos rugoso invierte el sentido, es decir, la corriente media euleriana en el caso *LIN-B* se dirige en el sentido opuesto al de avance de la onda.

En la figura 3.27 se puede observar que el perfil de la energía cinética turbulenta media es mayor en todo el perfil para el caso más rugoso.

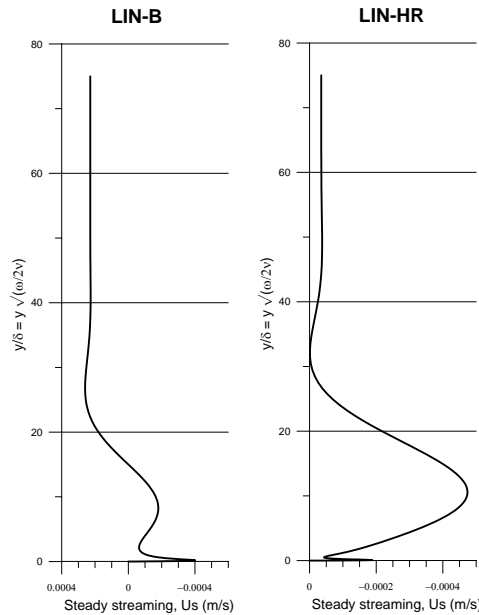


Figura 3.7: Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos *LIN-B* y *LIN-HR*.

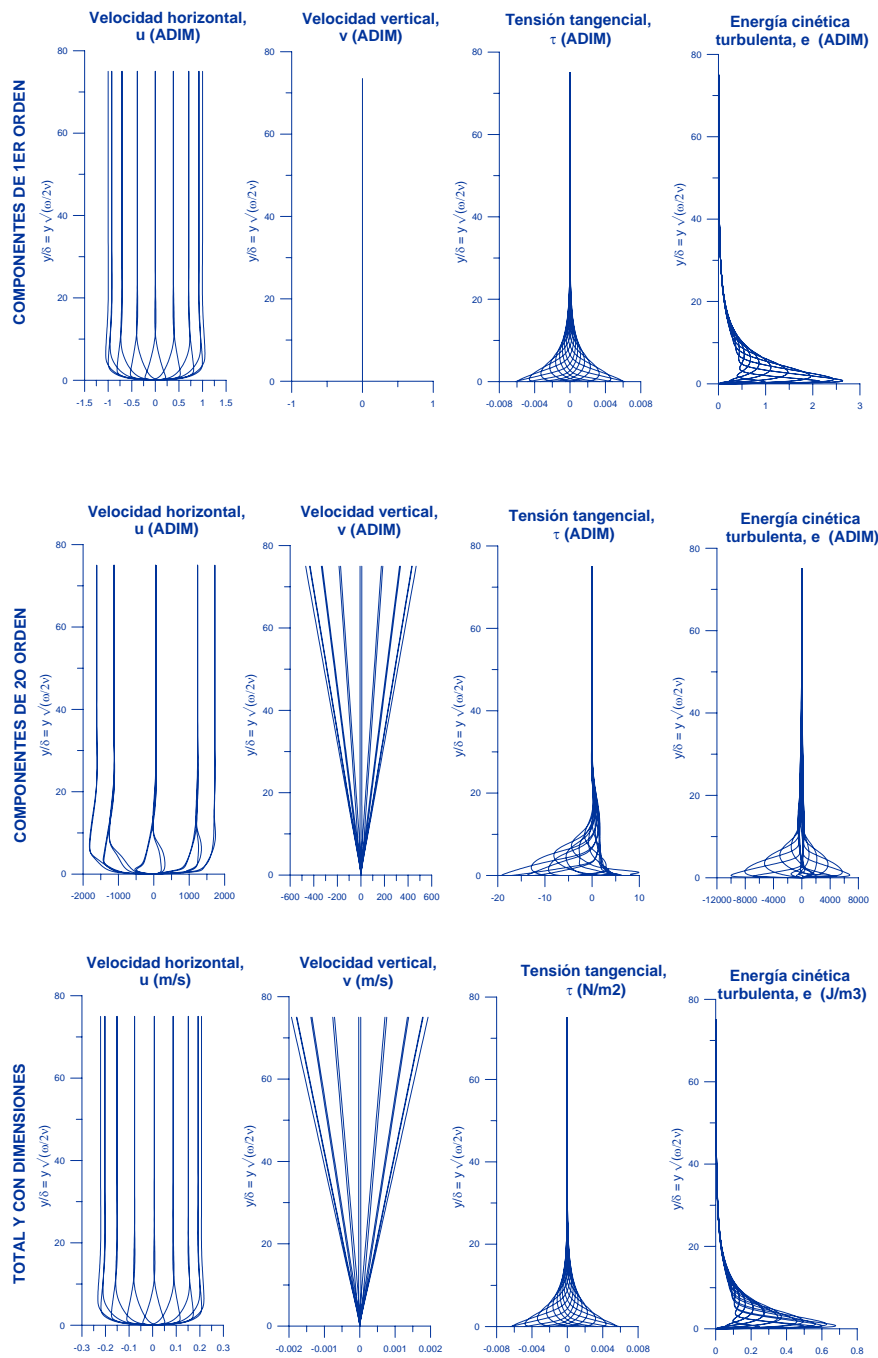


Figura 3.8: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *LIN-B*.

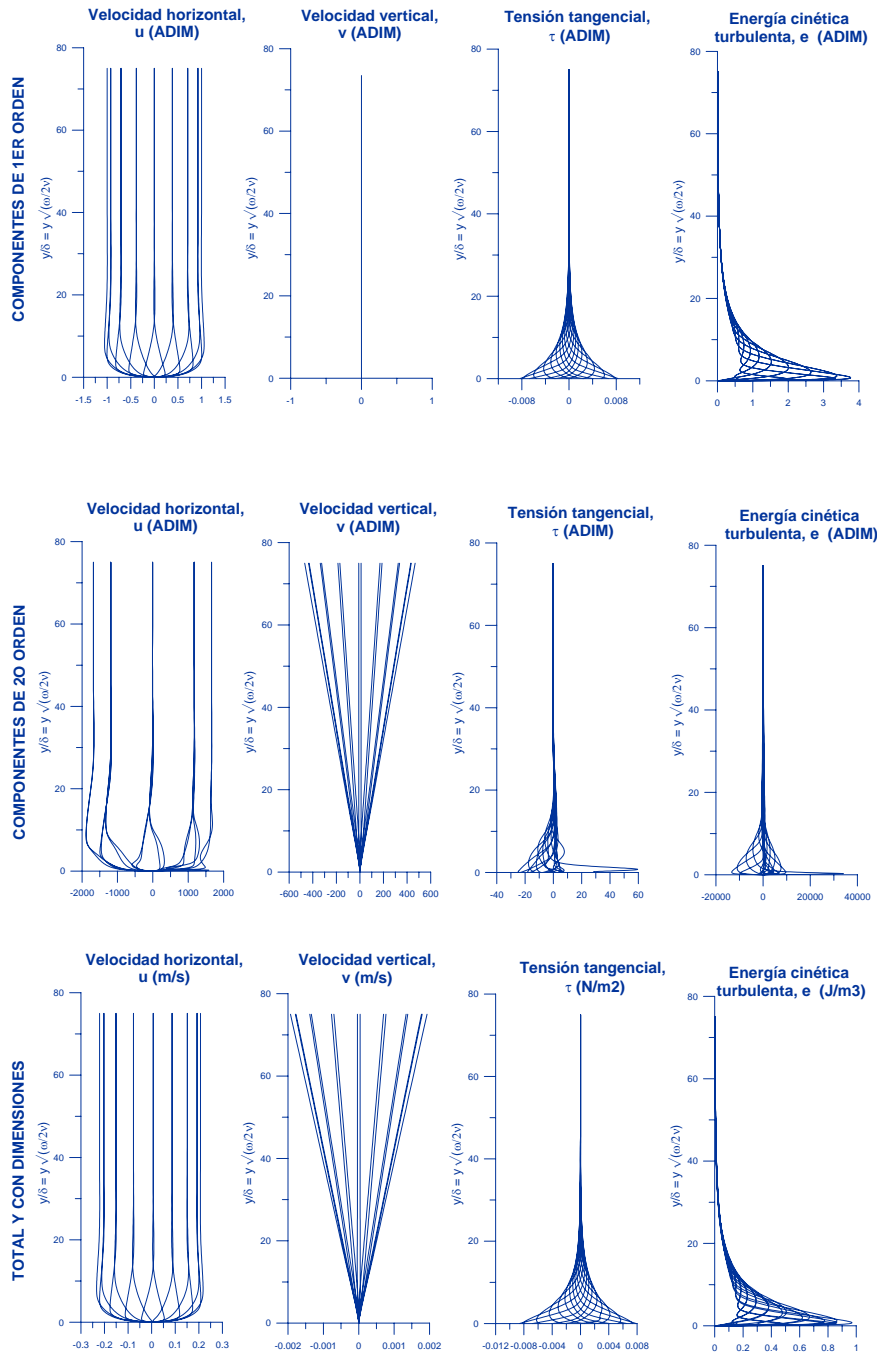


Figura 3.9: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *LIN-HR*.

3.5.2.3. Ondas en régimen de Stokes-II. Casos *ST2*

Los casos *ST2-HL*, *ST2-A*, *ST2-B* y *ST2-HR* tienen una altura de ola de $H = 1\text{m}$ con valores de la rugosidad relativa $a_b^*/k_N^* = 76400, 955, 191$ y $95, 5$ respectivamente, y corresponden a ondas en régimen de Stokes-II cuyo flujo en la capa límite está en régimen turbulento liso para los dos primeros casos, y turbulento rugoso para los dos últimos.

En las figuras 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14 se han representado los perfiles verticales de las características hidrodinámicas del flujo en 16 fases de onda diferentes para los casos *ST2-HL*, *ST2-A*, *ST2-B* y *ST2-HR*. El eje vertical representa la coordenada vertical $\tilde{y} = y^*/\delta^*$, y en el eje horizontal se representan, de izquierda a derecha, las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta respectivamente. En la primera fila se presentan los perfiles de las soluciones al primer orden de dichas variables (u_0, v_0, τ_0, e_0) , en la segunda fila las contribuciones del segundo orden (u_1, v_1, τ_1, e_1) y en la tercera fila los perfiles totales, en su forma dimensional (u^*, v^*, τ^*, e^*) .

Se puede observar además en dichas figuras que los efectos no lineales cobran importancia, sobre todo para los casos de fondo más rugoso (la contribución del segundo orden a la velocidad orbital es del 6,9%, 6,5%, 7,0% y 17,25%, respectivamente), ya que se encuentran en el régimen de Stokes-II. Estos efectos no lineales también se pueden apreciar en la asimetría de los registros de las figuras 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18, en los que se puede observar que la velocidad horizontal y la tensión tangencial presentan valores mayores en el sentido de avance de la onda, pero con menor duración que los valores en sentido contrario del de propagación de la onda, de manera que sus cantidades netas están dirigidas en el sentido de propagación de la onda, con la excepción de la velocidad horizontal en el caso *ST2-A*, en el que se invierte este efecto, dando como resultado una velocidad neta que se dirige en sentido opuesto al avance de la onda. Lo mismo ocurre con la tensión tangencial en el caso más rugoso, *ST2-HR*.

A la vista de las figuras 3.11, 3.12, 3.13 y 3.14, y de la tabla 3.3, se puede decir que tanto la tensión tangencial en el fondo como el factor de fricción f_w aumentan al aumentar la rugosidad del fondo, y por tanto, la disipación media y el factor de pérdida de energía presentan el mismo comportamiento (véase tabla 3.4).

Por otro lado, en la figura 3.10 se puede observar que el perfil de la velocidad media euleriana se puede dividir en dos regiones: una zona más cercana del fondo, donde se puede observar la presencia de un máximo de corriente que se dirige en el sentido de avance de la onda (valor negativo, ya que la onda avanza en el sentido negativo del eje x^*), cuya magnitud aumenta con la rugosidad relativa del fondo. En la región superior, sin embargo, se produce una transición hacia un valor estable que, es de $1,49 \cdot 10^{-4}\text{m/s}$ para el caso *ST2-HL*, presenta un mínimo en el caso *ST2-A* en el que la velocidad media euleriana invierte su sentido (contrario al de avance de la onda), y va aumentando a medida que aumenta la rugosidad relativa del fondo.

Por otro lado se puede observar que a medida que la rugosidad del fondo aumenta, el perfil de la velocidad media euleriana tiene menos puntos de inflexión, es decir se vuelve más homogéneo. Esto se debe a los procesos de mezcla debidos a la turbulencia, que son mucho más intensos en los casos de mayor rugosidad. En el caso extremo, *ST2-HR*, el máximo de corriente de la región próxima al fondo se vuelve inapreciable.

En la figura 3.28 se puede observar que el perfil de la energía cinética turbulenta media aumenta en todo el perfil con la rugosidad del fondo.

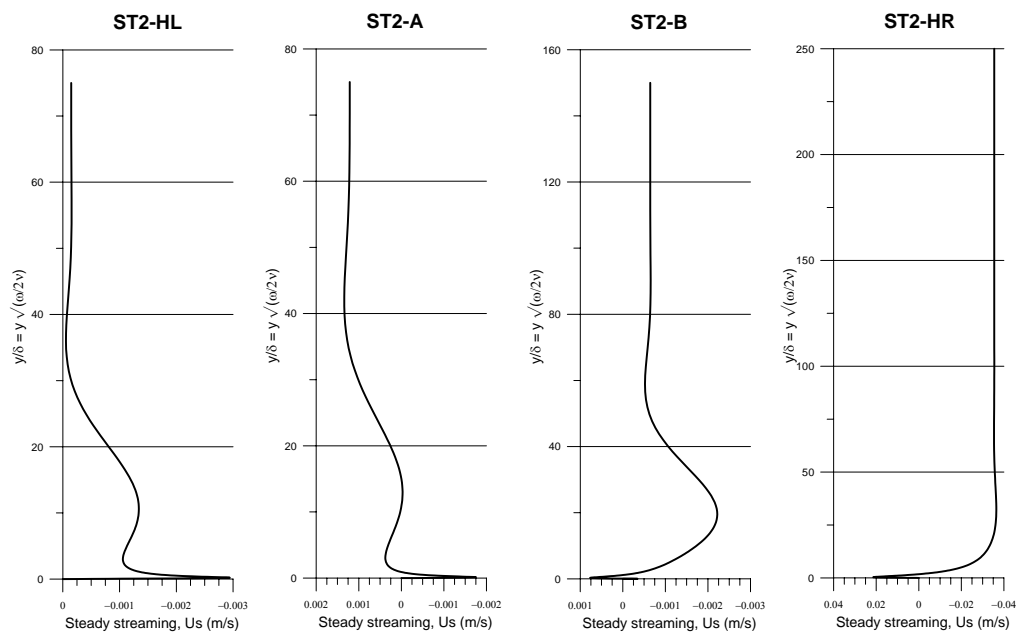


Figura 3.10: Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos *ST2-HL*, *ST2-A*, *ST2-B* y *ST2-HR*.

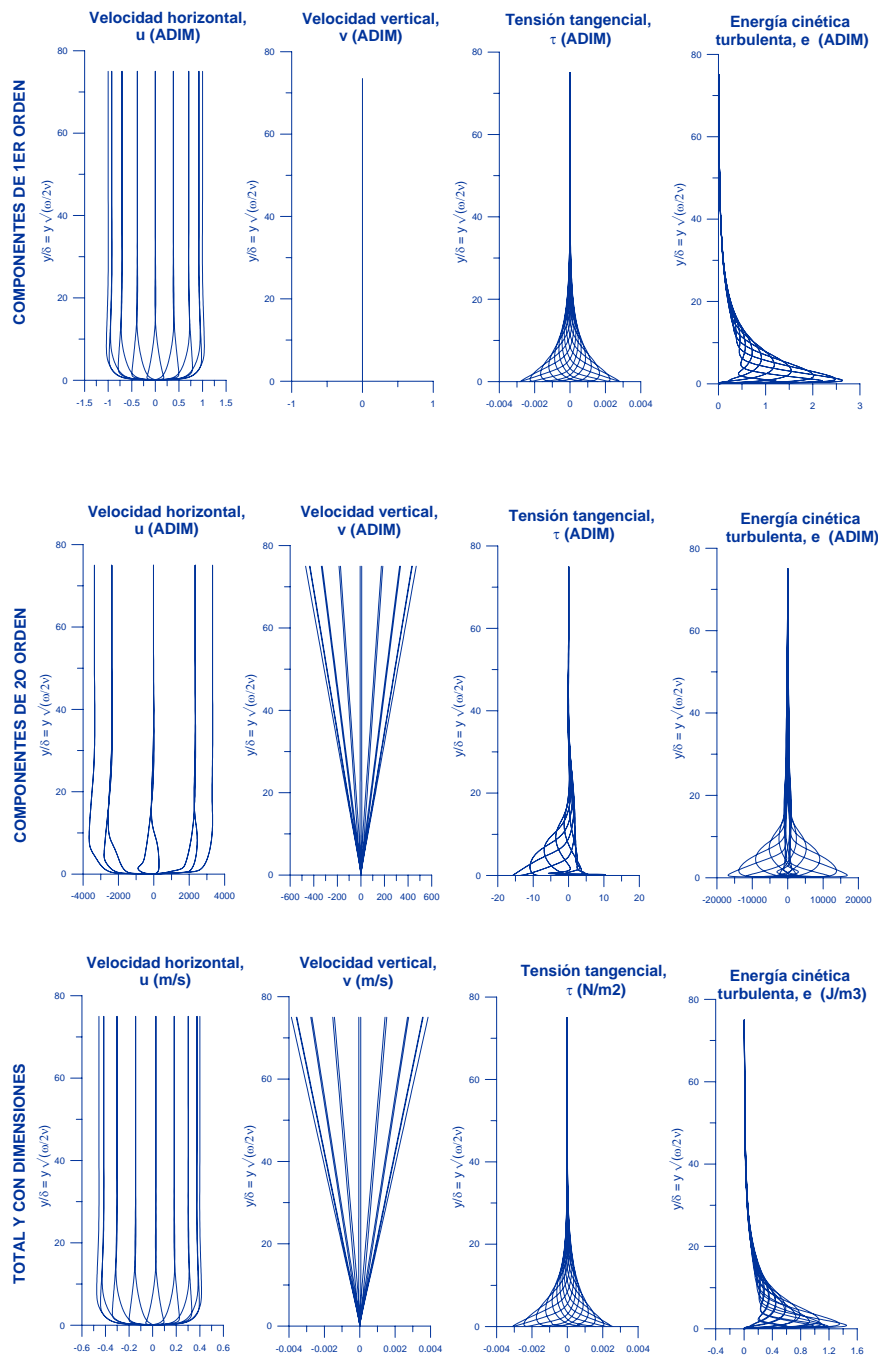


Figura 3.11: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *ST²-HL*.

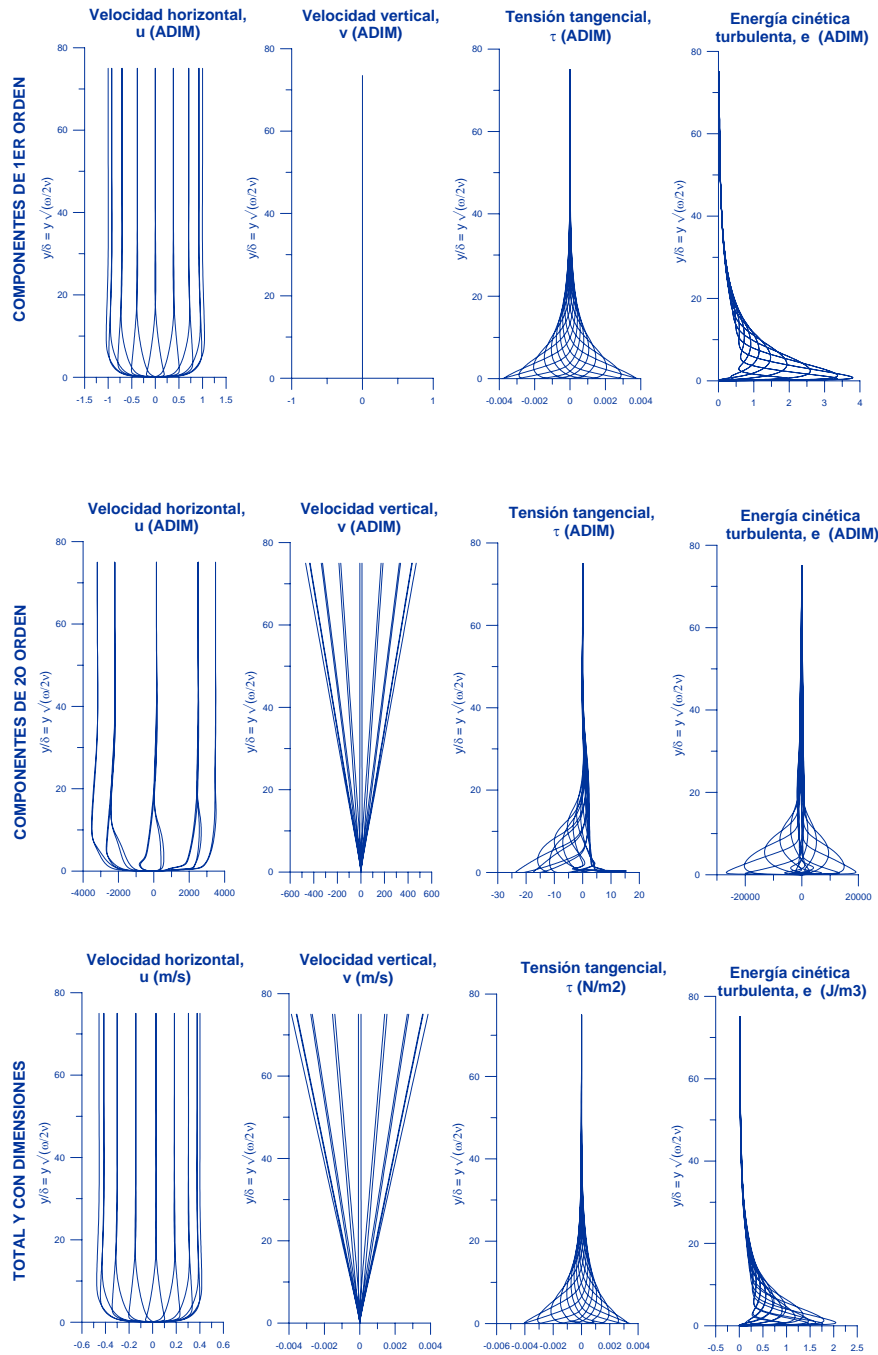


Figura 3.12: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *ST2-A*.

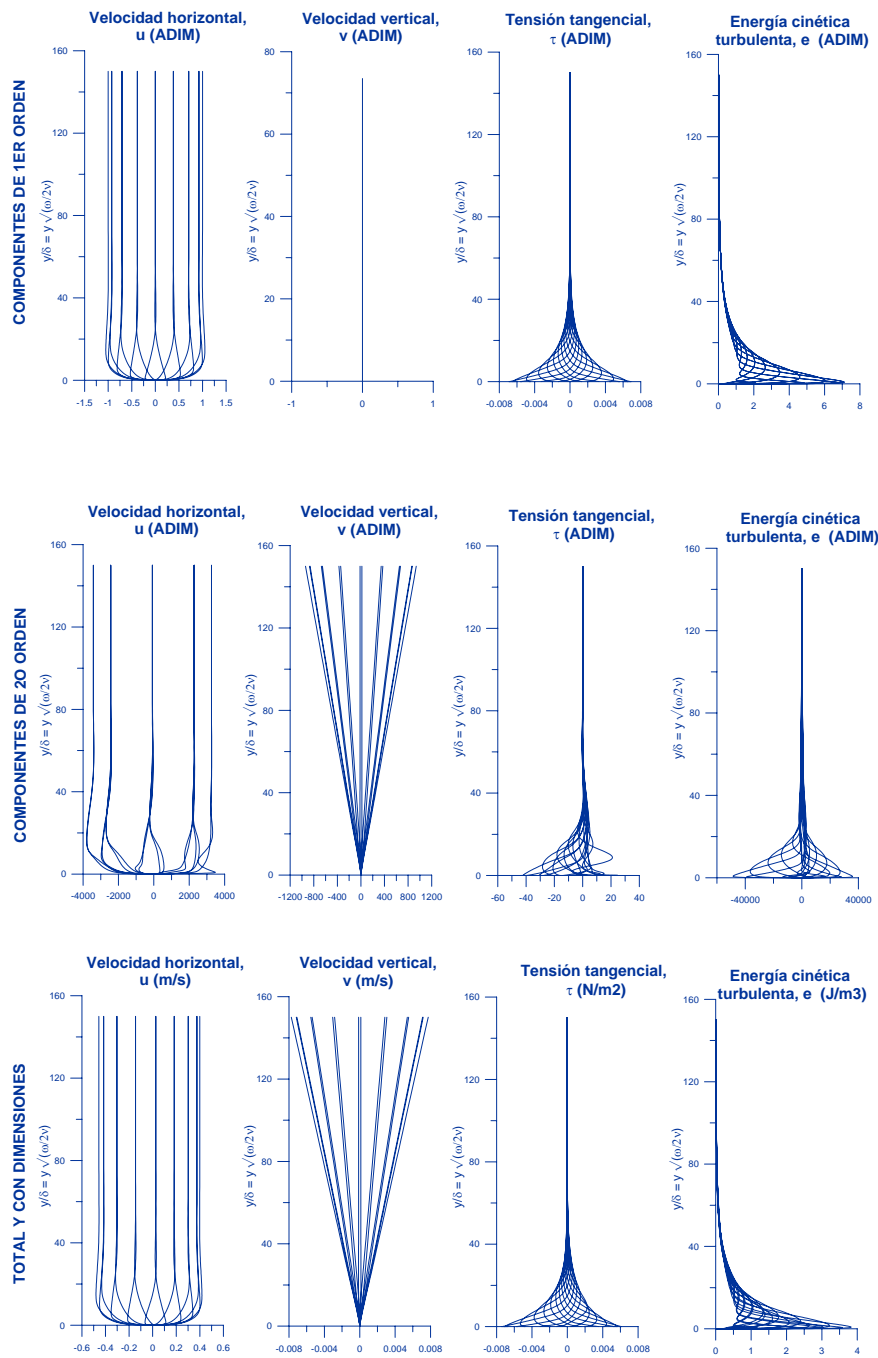


Figura 3.13: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso ST^2-B .

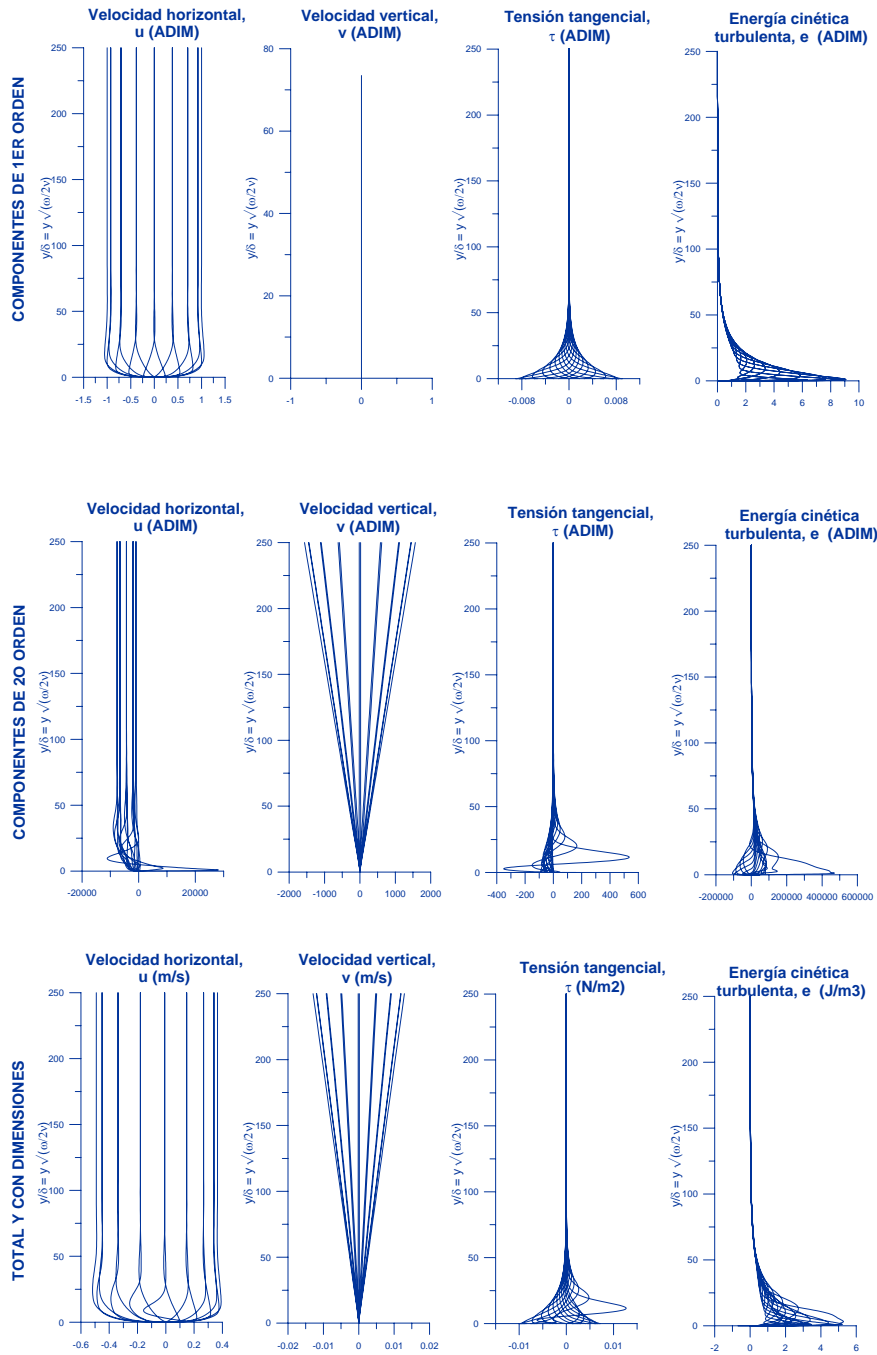


Figura 3.14: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *ST2-HR*.

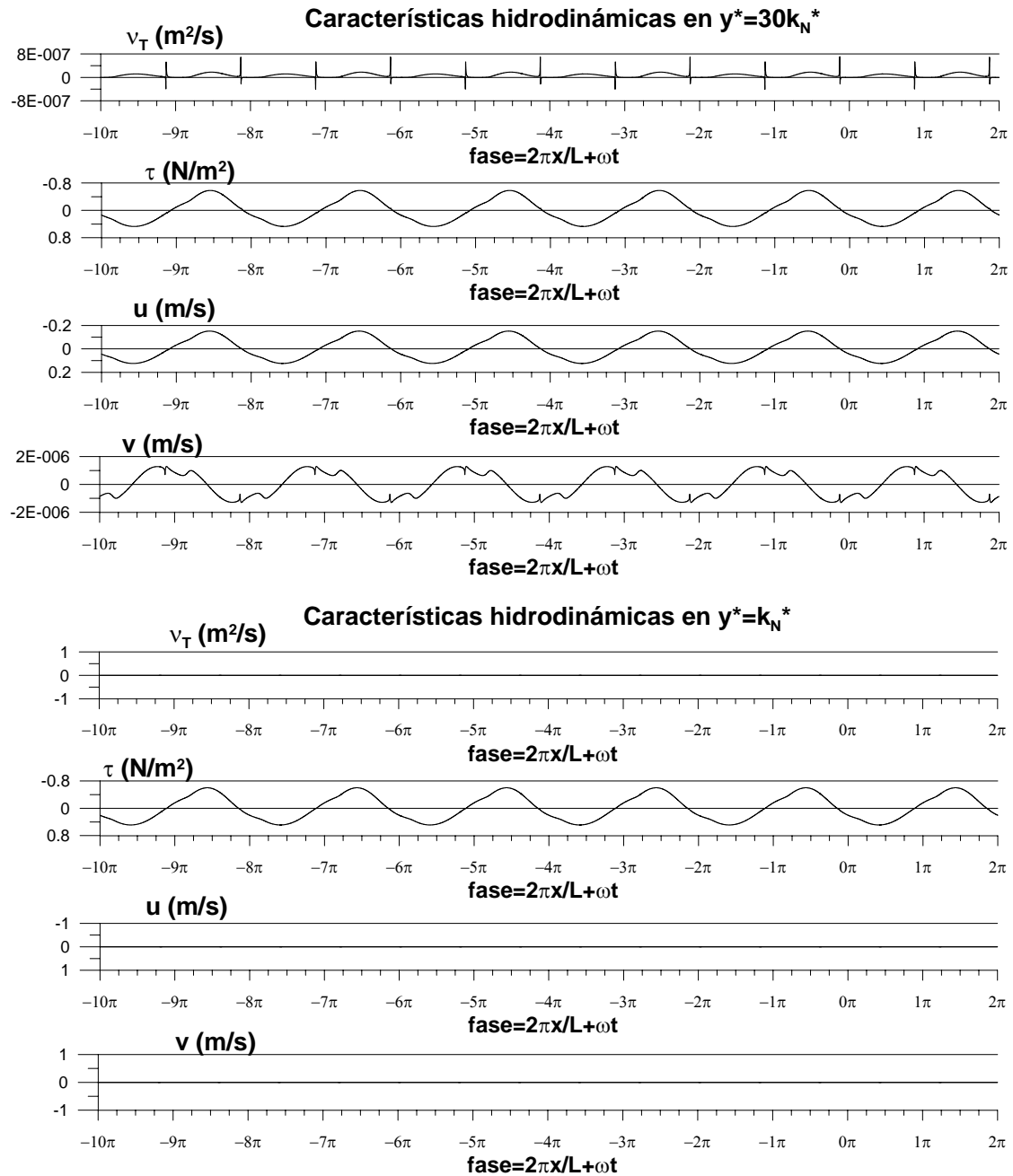


Figura 3.15: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *ST2-HL*.

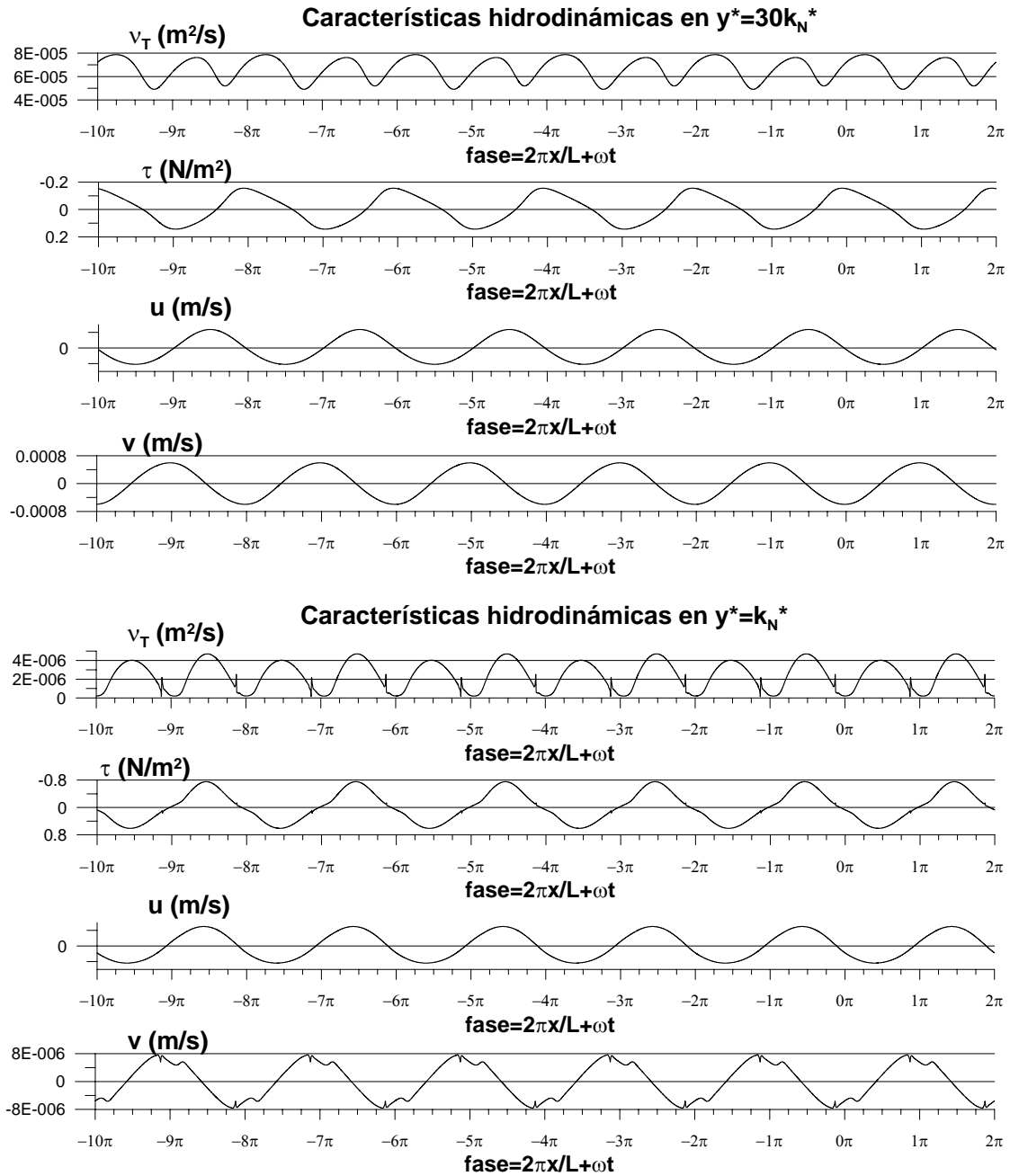


Figura 3.16: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *ST2-A*.

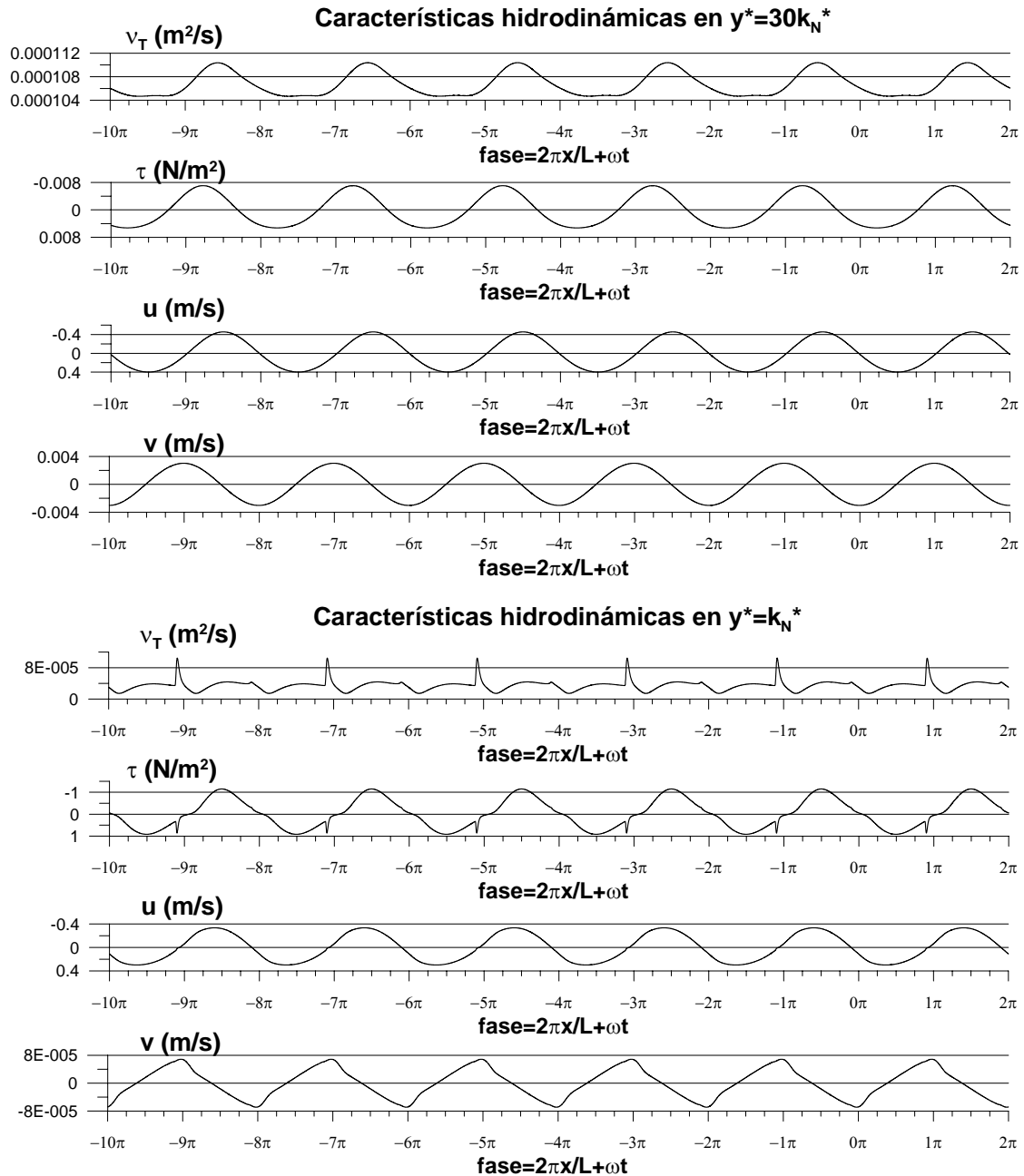


Figura 3.17: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *ST2-B*.

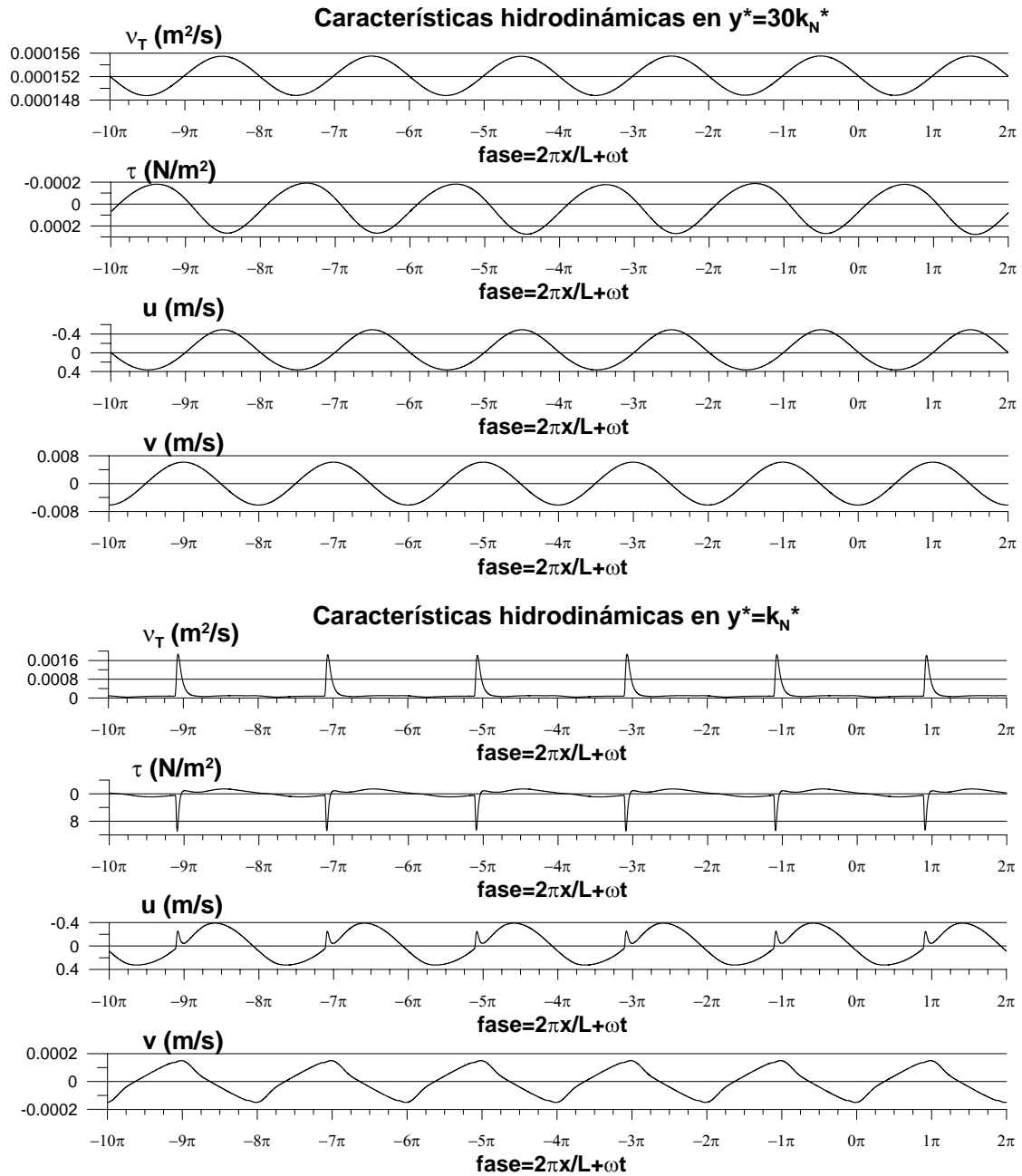


Figura 3.18: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *ST2-HR*.

3.5.2.4. Ondas en régimen de Stokes de orden superior. Casos *STM*

Los casos *STM-HL* y *STM-A* tienen una altura de ola de $H = 2\text{m}$ con valores de la rugosidad relativa $a_b^*/k_N^* = 76400, 382$ y 191 respectivamente, y corresponden a ondas en régimen de Stokes de orden superior a 2, y su flujo en la capa límite está en régimen turbulento liso para el primer caso, y en régimen turbulento hidráulicamente rugoso para los dos últimos. En este apartado se presenta la solución obtenida con el modelo descrito, que describe los efectos de segundo orden, a pesar de que para modelar estas ondas correctamente se debería emplear un modelo que resuelva las ecuaciones a un orden de aproximación superior a dos.

En las figuras 3.20 y 3.21 se han representado los perfiles verticales de las características hidrodinámicas del flujo en 16 fases de onda diferentes para los casos *STM-HL* y *STM-A*, respectivamente. El eje vertical representa la coordenada vertical $\tilde{y} = y^*/\delta^*$, y en el eje horizontal se representan, de izquierda a derecha, las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta respectivamente. En la primera fila se presentan los perfiles de las soluciones al primer orden de dichas variables (u_0, v_0, τ_0, e_0), en la segunda fila las contribuciones del segundo orden (u_1, v_1, τ_1, e_1) y en la tercera fila los perfiles totales, en su forma dimensional (u^*, v^*, τ^*, e^*).

Se puede observar además en dichas figuras que los efectos no lineales son muy relevantes, sobre todo para los casos de fondo más rugoso (la contribución del segundo orden a la velocidad orbital es del 14,65 % y 16,45 %, respectivamente), ya que se encuentran en el régimen de Stokes, de orden superior a 2. Estos efectos no lineales también se pueden apreciar en la asimetría de los registros de las figuras 3.22 y 3.23, en los que se puede observar que la velocidad horizontal y la tensión tangencial presentan valores mayores en el sentido de avance de la onda, pero con menor duración que los valores en sentido contrario del de propagación de la onda, de manera que sus cantidades netas están dirigidas en el sentido de propagación de la onda, con la excepción de la velocidad horizontal en el caso *STM-HL*, en el que se invierte este efecto, dando como resultado una velocidad neta que se dirige en sentido opuesto al avance de la onda.

A la vista de las figuras 3.20 y 3.21, y de la tabla 3.3, se puede decir que tanto la tensión tangencial en el fondo como el factor de fricción f_w aumentan al aumentar la rugosidad del fondo, y por tanto, la disipación media y el factor de pérdida de energía presentan el mismo comportamiento (véase tabla 3.4).

Por otro lado, en la figura 3.19 se puede observar que el perfil de la velocidad media euleriana se puede dividir en dos regiones: una zona más cercana del fondo, donde se puede observar la presencia de un máximo de corriente que se dirige en el sentido de avance de la onda (valor negativo, ya que la onda avanza en el sentido negativo del eje x^*), cuya magnitud aumenta con la rugosidad relativa del fondo. En la región superior, sin embargo, se produce una transición hacia un valor estable que invierte su sentido (es contrario al de propagación de la onda) en el caso *STM-HL*, y aumenta con la rugosidad relativa del fondo.

Por otro lado se puede observar que a medida que la rugosidad del fondo aumenta, el perfil de la velocidad media euleriana tiene menos puntos de inflexión, es decir se vuelve más homogéneo. Esto se debe a los procesos de mezcla debidos a la turbulencia, que son mucho más intensos en los casos de mayor rugosidad. En el caso *STM-A* el máximo de corriente de la región próxima al fondo es prácticamente inapreciable.

En la figura 3.29 se puede observar que el perfil de la energía cinética turbulenta media es mayor en todo el perfil para el caso más rugoso.

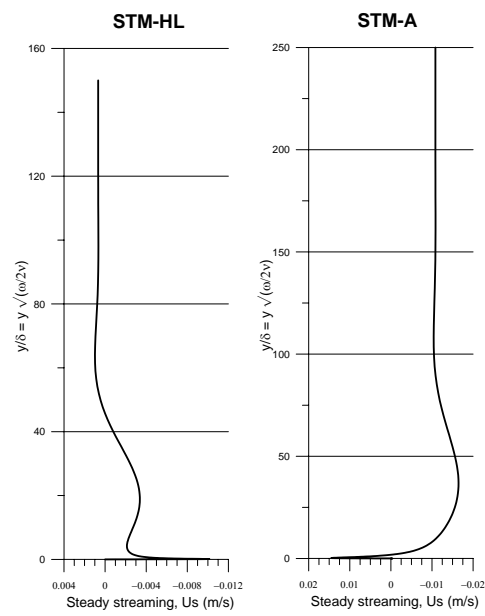


Figura 3.19: Perfiles de la velocidad media euleriana para los casos *STM-HL* y *STM-A*.

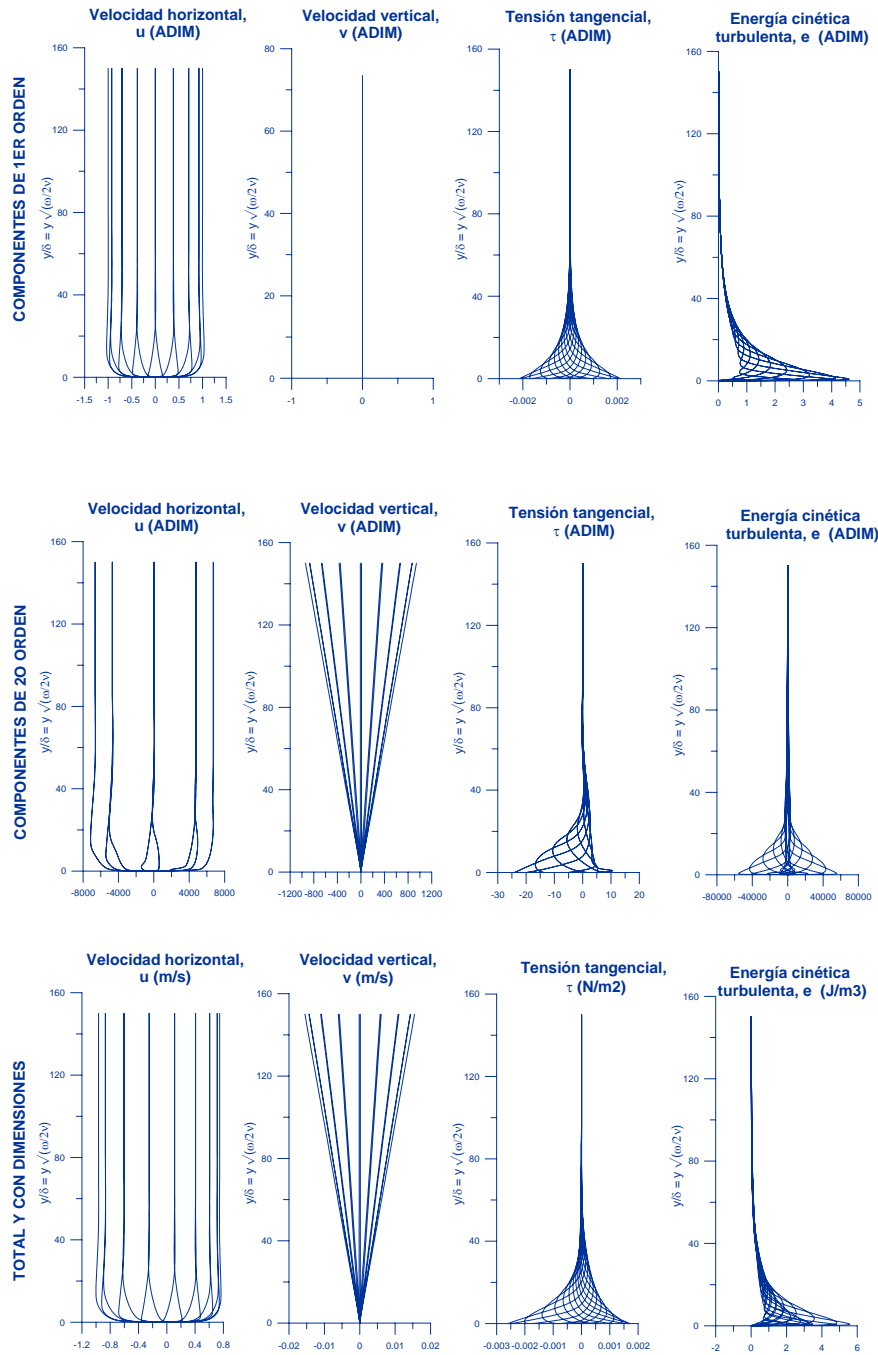


Figura 3.20: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *STM-HL*.

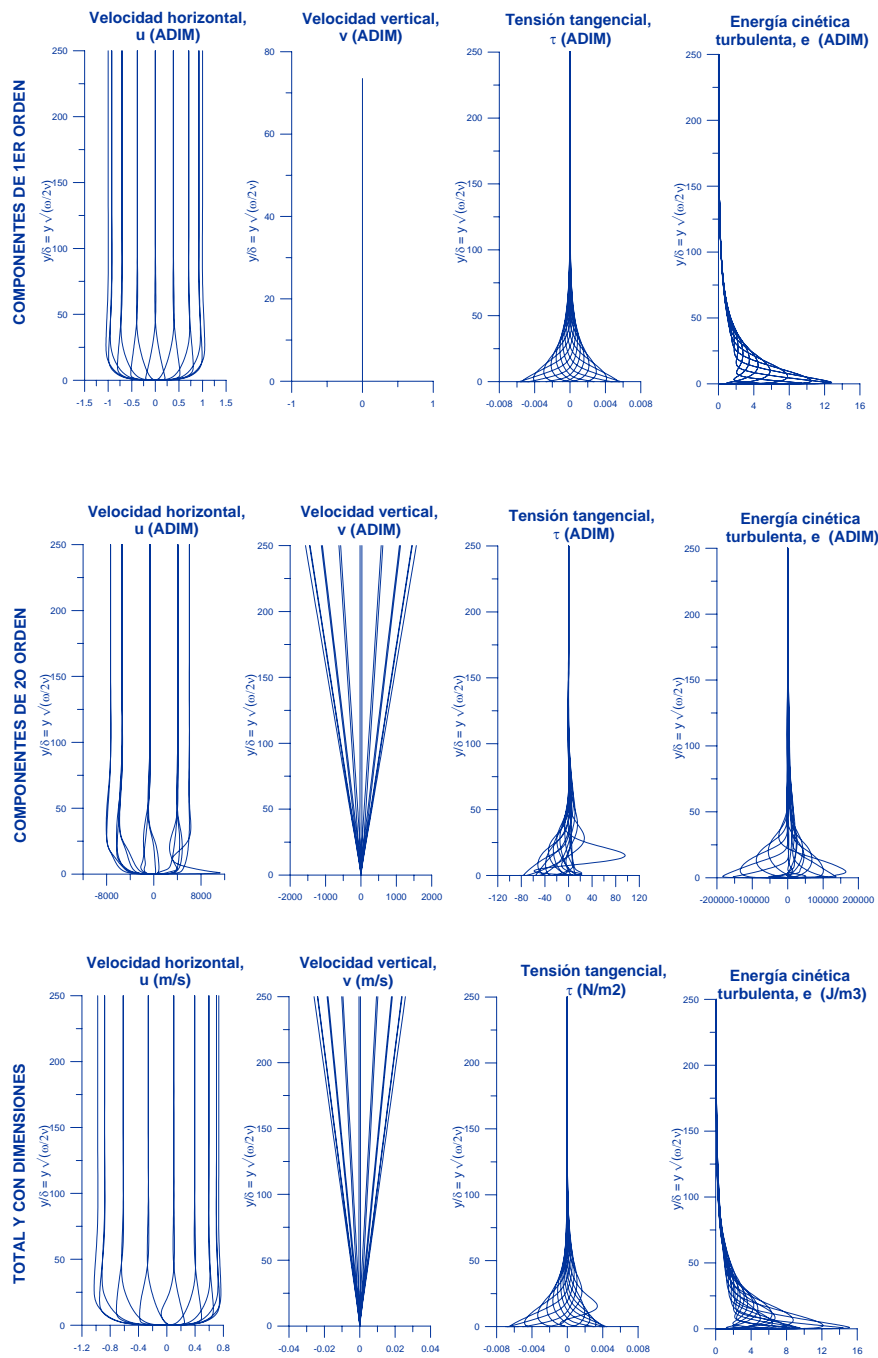


Figura 3.21: Perfiles verticales de las velocidades horizontal y vertical, la tensión tangencial y la energía cinética turbulenta al primer orden, contribución del segundo orden de aproximación y cantidades totales dimensionales, para el caso *STM-A*.

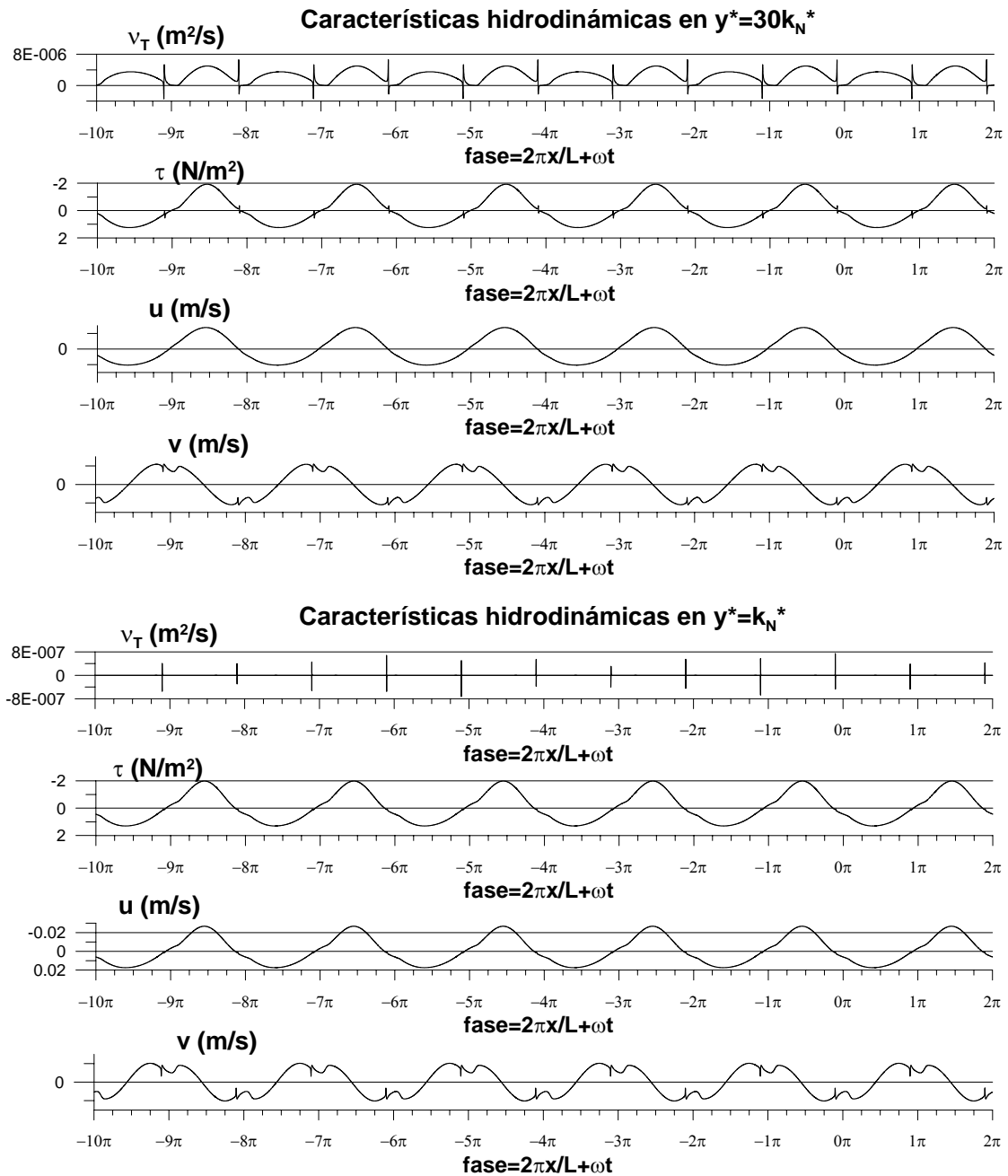


Figura 3.22: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *STM-HL*.

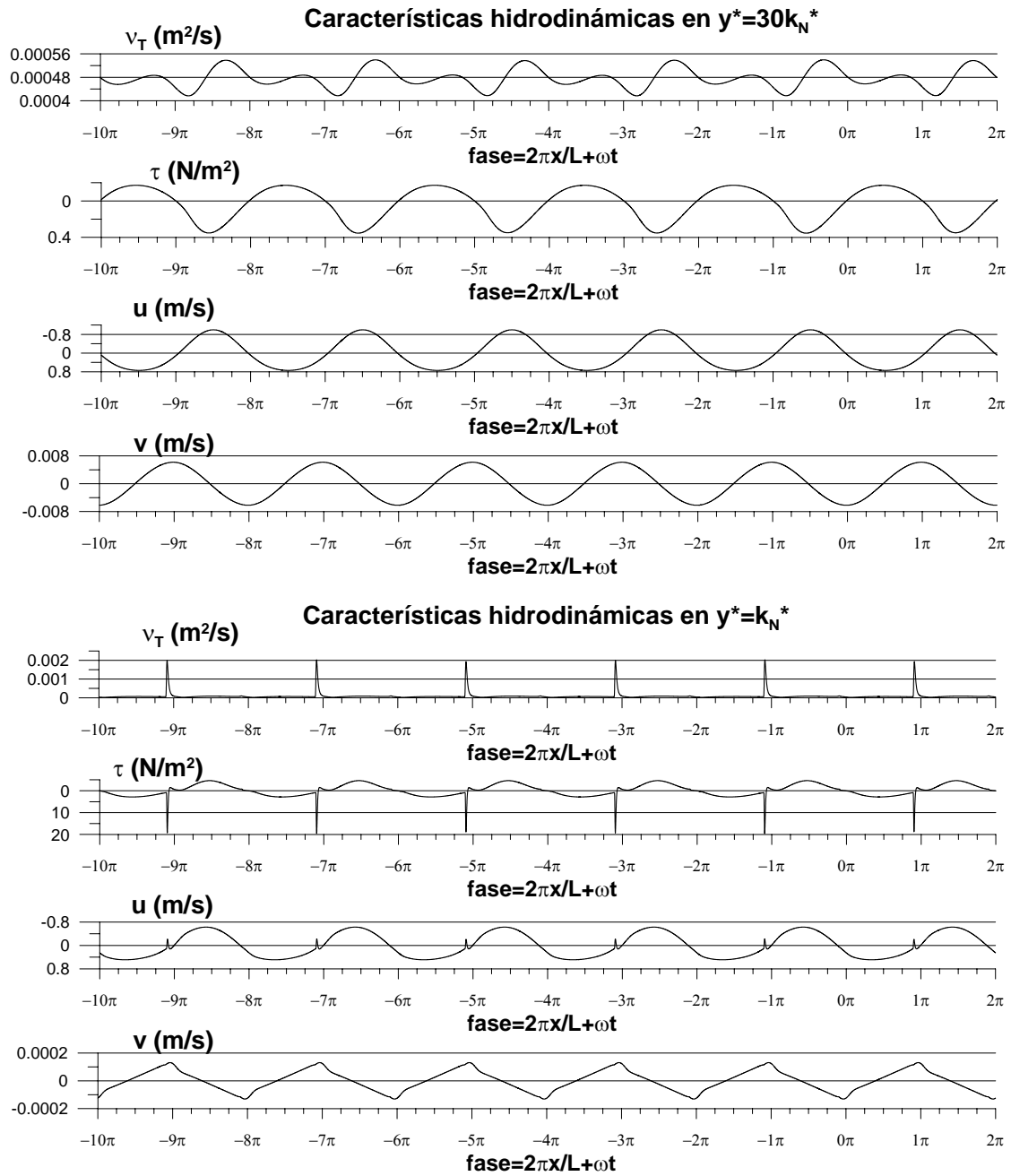


Figura 3.23: Evolución temporal de la viscosidad de remolino ν_T^* , la tensión tangencial τ^* y las velocidades horizontal u^* y vertical v^* a las alturas $y^* = 30k_N^*$ y $y^* = k_N^*$, durante 6 ciclos de onda, para el caso *STM-A*.

3.5.2.5. Espesor de la capa límite

De los resultados obtenidos, se ha deducido que, para un valor constante de la profundidad relativa, el espesor de la capa límite aumenta con el peralte y con la rugosidad del fondo.

	Entrada		Resultados	
	R_E	a_b^*/k_N^*	$\delta_{cl,0,\pi}^*(m)$	$u_{1S,\infty}^*(m/s)$
LAM-A	6555	287,5	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$-1,34 \cdot 10^{-4}$
LAM-B	6555	191	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$-1,34 \cdot 10^{-4}$
LIN-B	$7,3 \cdot 10^4$	191	$6,21 \cdot 10^{-2}$	$+2,28 \cdot 10^{-4}$
LIN-HR	$7,3 \cdot 10^4$	95,5	$7,59 \cdot 10^{-2}$	$-3,51 \cdot 10^{-5}$
ST2-HL	$2,92 \cdot 10^5$	76400	$6,21 \cdot 10^{-2}$	$-1,49 \cdot 10^{-4}$
ST2-A	$2,92 \cdot 10^5$	955	$7,34 \cdot 10^{-2}$	$+1,21 \cdot 10^{-3}$
ST2-B	$2,92 \cdot 10^5$	191	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$-6,46 \cdot 10^{-4}$
ST2-HR	$2,92 \cdot 10^5$	95,5	$1,94 \cdot 10^{-1}$	$-3,54 \cdot 10^{-2}$
STM-HL	$1,17 \cdot 10^6$	76400	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$+6,75 \cdot 10^{-4}$
STM-A	$1,17 \cdot 10^6$	382	$1,85 \cdot 10^{-1}$	$-1,08 \cdot 10^{-2}$

Tabla 3.2: Resultados. Espesor máximo de la capa límite y velocidad media euleriana en el extremo superior de la capa límite.

3.5.2.6. Velocidad media euleriana (“steady streaming”)

Efecto del peralte

Los casos *ST2-HL* y *STM-HL* tienen el mismo valor de la rugosidad relativa del fondo, y ambos casos corresponden a un régimen hidráulico liso. Los perfiles de la velocidad media euleriana tienen la misma forma para ambos casos: presentan un overshooting (un valor máximo) a una altura de aproximadamente un cuarto del espesor de la capa límite, tienen tres puntos de inflexión, dos mínimos relativos y tienden a un valor fijo en el extremo superior de la capa límite. En este caso, al aumentar el peralte, el valor de u_S^* en el extremo superior de la capa límite es menor, llegando a invertirse el flujo para el caso *STM-HL*.

Los casos *LIN-B* y *ST2-B*, corresponden un régimen hidráulico rugoso, y tienen todos el mismo valor de la rugosidad relativa ($a_b^*/k_N^* = 191$). Al aumentar el valor del peralte, el perfil se amplía abarcando valores de \tilde{y} mayores (crece el espesor de la capa límite), y además, cambia la forma del perfil: se pasa de un perfil con cuatro puntos de inflexión e inversión del flujo en el extremo superior para el caso *LIN-B* a un perfil con tres puntos de inflexión y el máximo relativo mayor para *ST2-B*.

Los casos *LIN-HR* y *ST2-HR* corresponden a un flujo turbulento rugoso, con una altura de rugosidad mayor que en los casos anteriores ($a_b^*/k_N^* = 95,5$). En este caso, al aumentar el peralte de la onda cambia la forma del perfil de la velocidad media euleriana en el mismo sentido que en los casos anteriores: se pasa de un perfil con tres puntos de inflexión para el caso *LIN-HR* a un perfil sin puntos de inflexión para el caso *ST2-HR*.

En resumen, a medida que aumenta el peralte de la onda, el perfil presenta menos puntos de inflexión, es decir, se vuelve más homogéneo.

Efecto de la rugosidad del fondo

Se ha observado que, para un determinado valor del peralte, a medida que la rugosidad del fondo aumenta, el valor máximo de la velocidad media euleriana aumenta y su posición se

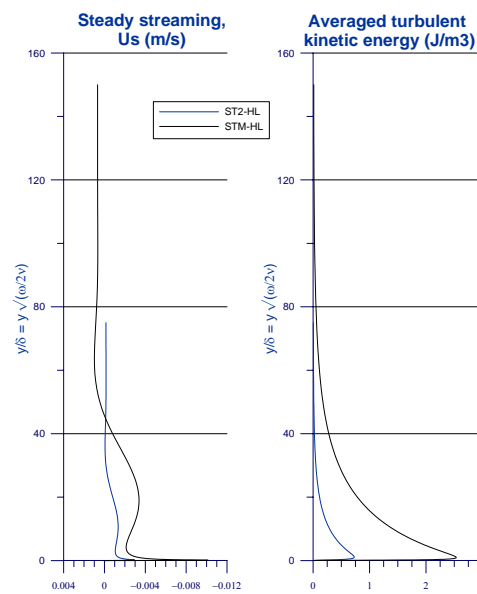


Figura 3.24: Comparación de los perfiles de la velocidad media euleriana y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *ST2-HL* y *STM-HL*.

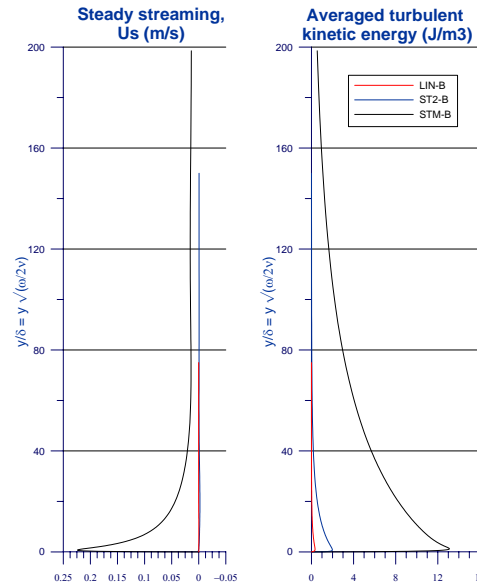


Figura 3.25: Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *LIN-B* y *ST2-B*.

aleja del fondo. Además, a medida que la rugosidad aumenta, el número de puntos de inflexión del perfil disminuye, quedando un perfil más homogéneo para los casos de flujo más rugoso.

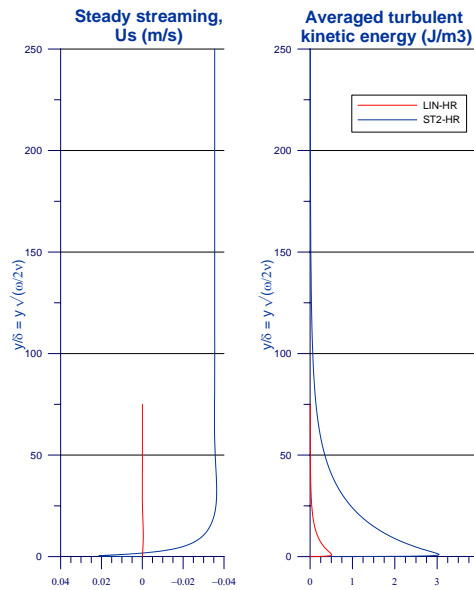


Figura 3.26: Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *LIN-HR* y *ST2-RUCOSO*.

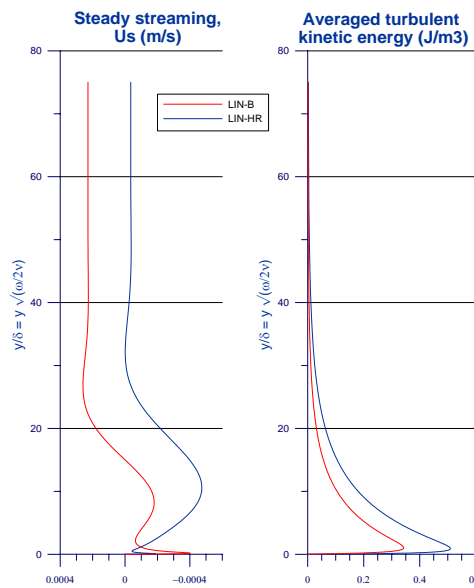


Figura 3.27: Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *LIN-B* y *LIN-HR*.

3.5.2.7. Tensión tangencial en el fondo y coeficiente de fricción

Se ha obtenido que la tensión tangencial en el fondo en función de la fase ($\tilde{t} = 2\pi x + t = 2\pi x^*/L^* + \omega^* t^*$) está compuesta de dos oscilaciones de frecuencias (k^*, ω^*) y $(2k^*, 2\omega^*)$, al

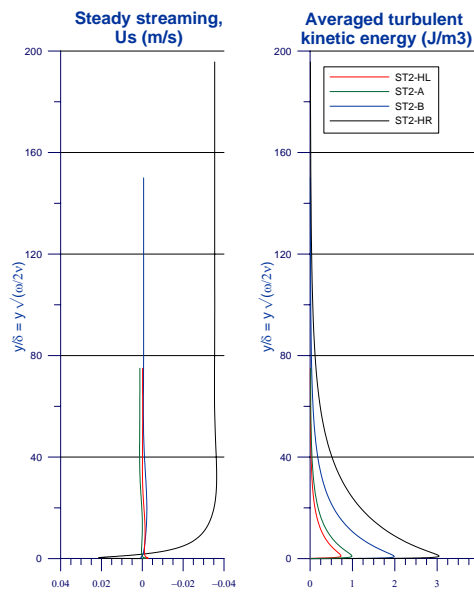


Figura 3.28: Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *ST2-HL*, *ST2-A*, *ST2-B* y *ST2-HR*.

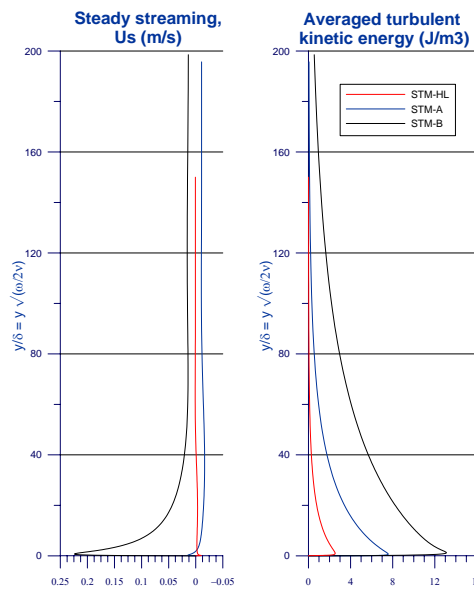


Figura 3.29: Comparación de los perfiles de la velocidad promediada y la energía cinética turbulenta promediada en un ciclo entre los casos *STM-HL*, *STM-A* y *STM-B*.

igual que la velocidad en el extremo superior de la capa límite, pero presenta un desfase con la misma. Este desfase es de 45° para los casos laminares, como predice la teoría, y menor en el resto de los casos. Se ha observado que, para un valor del peralte determinado, dicho

desfase es mínimo en el caso de régimen liso (del orden de 10°), y que crece con la rugosidad del lecho, hasta alcanzar valores del orden de 20° .

En los casos laminares estudiados la resultante neta de la tensión tangencial en el fondo es muy pequeña y está dirigida en el sentido de avance de la onda. En los casos turbulentos de bajo peralte (onda lineal: *LIN-B* y *LIN-HR*), la resultante neta también se dirige en el sentido de avance de la onda, y su módulo crece con la rugosidad del lecho. En los casos de las ondas más no-lineales (*ST2* y *STM*), de mayor peralte, la resultante neta es mayor que en el caso lineal, pero su variación con la rugosidad no está tan clara¹, llegándose a invertir el sentido de la resultante para los casos más rugoso.

Se ha observado que el coeficiente de fricción, para un valor fijo del peralte, aumenta con la rugosidad del lecho, y par aun valor fijo de la rugosidad, disminuye con el peralte².

	Entrada		Resultados		
	R_E	a_b^*/k_N^*	$\overline{\tau_b^*}(N/m^2)$	f_w	$\phi(^{\circ})$
LAM-A	6555	287,5	$-4,04 \cdot 10^{-5}$	$2,49 \cdot 10^{-2}$	44,49
LAM-B	6555	191	$-4,04 \cdot 10^{-5}$	$2,49 \cdot 10^{-2}$	44,49
LIN-B	$7,3 \cdot 10^4$	191	$-2,91 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-2}$	13,83
LIN-HR	$7,3 \cdot 10^4$	95,5	$-3,74 \cdot 10^{-3}$	$1,73 \cdot 10^{-2}$	15,71
ST2-HL	$2,92 \cdot 10^5$	76400	$-1,12 \cdot 10^{-2}$	$6,41 \cdot 10^{-3}$	11,72
ST2-A	$2,92 \cdot 10^5$	955	$-1,48 \cdot 10^{-2}$	$8,56 \cdot 10^{-3}$	12,38
ST2-B	$2,92 \cdot 10^5$	191	$-2,20 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$	14,98
ST2-HR	$2,92 \cdot 10^5$	95,5	$+1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	14,45
STM-HL	$1,17 \cdot 10^6$	76400	$-6,81 \cdot 10^{-2}$	$5,30 \cdot 10^{-3}$	9,03
STM-A	$1,17 \cdot 10^6$	382	$-8,77 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	13,14

Tabla 3.3: Resultados. Tensión tangencial media en el fondo, coeficiente de fricción y desfase entre la velocidad horizontal en el extremo superior de la capa límite y la tensión tangencial en el fondo.

3.5.2.8. Características turbulentas: Energía cinética turbulenta y viscosidad de remolino

Los perfiles de la energía cinética turbulenta promediada en un periodo (\bar{e}) tienen la misma forma para todos los casos analizados: parten de un valor nulo en el fondo, alcanzan su valor máximo muy cerca del mismo y tienden suavemente a cero a medida que se alejan del fondo. Se ha observado que al aumentar el valor del peralte o la rugosidad relativa, el valor de la energía cinética turbulenta aumenta en todo el perfil.

Se ha observado que la energía cinética turbulenta no se llega a desvanecer completamente dentro de la capa límite, de manera que parte de la turbulencia generada en el fondo es capaz de alcanzar el núcleo del fluido. Lo mismo sucede con la viscosidad de remolino, y la distancia del fondo alcanzada crece con el peralte y con la rugosidad del fondo, para los casos analizados.

3.5.2.9. Disipación de energía

La atenuación de la altura de ola depende del coeficiente c_c , que incluye el efecto de la disipación viscosa y turbulenta. Para el caso de flujo laminar, en el que la disipación es exclusivamente viscosa, el módulo de dicho coeficiente toma el valor $|c_c| = 2,22$ según la resolución analítica del problema (véase apartado A.4, ecuación A.67).

¹ojo

²extraño

En los resultados (véase tabla 3.4) se puede observar que en los casos laminares el código se ajusta al valor obtenido analíticamente, y en el resto de los casos, el valor de $|c_c|$ aumenta debido a la presencia de la turbulencia. Se ha observado que la disipación de energía del oleaje es mucho mayor en los casos de mayor número de Reynolds, y para valores de Reynolds fijos, la disipación aumenta con la rugosidad del fondo.

	Entrada		Resultados				
	R_E	a_b^*/k_N^*	$\mathcal{D}^*(J/m^2/s)$	$f_{e,eq}$	$ c_c $	$K^*(m^{-1})$	$x_h^*(m)$
LAM-A	6555	287,5	$2,79 \cdot 10^{-2}$	0,969	2,217	$-7,27 \cdot 10^{-7}$	$9,53 \cdot 10^5$
LAM-B	6555	191	$2,79 \cdot 10^{-2}$	0,969	2,217	$-7,27 \cdot 10^{-7}$	$9,53 \cdot 10^5$
LIN-B	$7,3 \cdot 10^4$	191	4,17	1,959	3,776	$-6,19 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^5$
LIN-HR	$7,3 \cdot 10^4$	95,5	5,55	2,605	5,024	$-8,24 \cdot 10^{-6}$	$8,42 \cdot 10^4$
ST2-HL	$2,92 \cdot 10^5$	76400	$1,62 \cdot 10^1$	0,951	3,463	$-5,68 \cdot 10^{-6}$	$1,22 \cdot 10^5$
ST2-A	$2,92 \cdot 10^5$	955	$2,07 \cdot 10^1$	1,217	4,696	$-7,70 \cdot 10^{-6}$	$9,01 \cdot 10^4$
ST2-B	$2,92 \cdot 10^5$	191	$3,68 \cdot 10^1$	2,162	8,239	$-1,35 \cdot 10^{-5}$	$5,13 \cdot 10^4$
ST2-HR	$2,92 \cdot 10^5$	95,5	$4,75 \cdot 10^1$	2,790	10,554	$-1,73 \cdot 10^{-5}$	$4,01 \cdot 10^4$
STM-HL	$1,17 \cdot 10^6$	76400	$9,81 \cdot 10^1$	0,720	5,200	$-8,52 \cdot 10^{-6}$	$8,13 \cdot 10^4$
STM-A	$1,17 \cdot 10^6$	382	$2,45 \cdot 10^2$	1,800	13,853	$-2,27 \cdot 10^{-5}$	$3,05 \cdot 10^4$

Tabla 3.4: Resultados. Coeficiente equivalente de disipación y módulo del parámetro c_c .

3.6. Conclusiones

En este capítulo se han analizado las características hidrodinámicas del flujo en la capa límite del fondo bajo ondas marinas de gravedad no-lineales. Para ello se han planteado las ecuaciones que gobiernan dicho flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite, las condiciones que deben satisfacerse en los contornos y las condiciones de acuerdo entre ambos dominios.

La formulación de las ecuaciones se ha realizado teniendo en cuenta la atenuación de la altura de ola debido a la disipación viscosa y turbulenta en el fondo. Asimismo, dado que en la mayoría de los casos de oleaje no-lineal el flujo en la capa límite es turbulento, se ha aplicado el modelo de turbulencia de dos ecuaciones desarrollado por Saffman (1970, 1974).

Se ha resuelto el flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite para el caso laminar de modo analítico, y se ha desarrollado un modelo numérico para la resolución del flujo turbulento en la capa límite. Así, se ha obtenido un modelo capaz de describir el flujo en dicha capa límite para cualquier valor del número de Reynolds dentro del rango de la teoría de Stokes-II, y para régimen hidráulico liso o rugoso.

Dicho modelo ha sido aplicado a una serie de casos de oleaje de igual periodo y profundidad relativa, variando sólo el peralte de la onda (y por lo tanto, el número de Reynolds) y la rugosidad del fondo. Para estos casos, se han analizado las características hidrodinámicas en el fondo más relevantes para el estudio del transporte de sedimentos, y su variación con el peralte de la onda y la rugosidad del fondo: la fricción con el fondo (tensión tangencial en el fondo y tensión tangencial neta en un ciclo de onda), que determina la puesta en movimiento y el transporte del sedimento del fondo; la velocidad media euleriana, fundamental en el análisis del transporte de masa; y las características turbulentas (energía cinética turbulenta y viscosidad cinemática), que determinan los perfiles de concentración de los sedimentos en suspensión. Por otro lado, se ha analizado el efecto del peralte y la rugosidad del lecho en la disipación de energía debido a la fricción viscosa y turbulenta en la capa límite, y la consecuente atenuación de la altura de ola.

Este modelo presenta las siguientes novedades:

1. Es capaz de modelar la capa límite de ondas de amplitud finita del régimen de Stokes-II, para cualquier régimen hidráulico: laminar, de transición, turbulento liso, turbulento rugoso y turbulento intermedio.
2. Tiene en cuenta el efecto de la atenuación de la altura de ola en la hidrodinámica, y permite evaluarla a partir de la disipación de energía por fricción viscosa y por fricción turbulenta.
3. Permite obtener una descripción detallada de la energía cinética turbulenta instantánea y promediada en un ciclo.

Referencias

- P. Blondeaux. Turbulent boundary layer at the bottom of gravity waves. *J. Hydraulic Res.*, 25(4):447–464, 1987.
- P. Blondeaux and M. Colombini. Pulsatile turbulent pipe flow. *5th Symp. on Turbulent Shear Flows. Ithaca, New York.*, 1985.
- A. Brebner, J.A. Askew, and S.W. Law. The effect of roughness on the mass-transport of progressive gravity waves. In *Proc. of the 10th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, Tokyo*, pages 175–184, 1966.
- I. Brevik. Oscillatory rough turbulent boundary layer. *J. Waterway Port Coastal Ocean Div., ASCE*, 107(WW3):175–188, 1981.
- I. Brøker. Wave-generated ripples and resulting sediment transport in waves. *Series paper No. 36, Inst. of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, ISVA, Techn. Univ. of Denmark.*, 1985.
- S.A. Chowdhury, M. Sato, and A. Ueno. Numerical model of the turbulent wave boundary layer induced by finite amplitude water waves. *Applied. Ocean Res.*, 19:201–209, 1997.
- J.I. Collins. Inception of turbulence at the bed under periodic gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 68:6007–6014, 1963.
- A.G. Davies. A model of oscillatory rough turbulent boundary flow. *Est. Coast. Shelf Sci.*, 23(3):353–374, 1986.
- R.G. Dean and R.A. Dalrymple. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991. ISBN 9810204205.
- T. Van Doorn. Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves with and without a current. Rep. MI. 423, Delft Hydraulics Lab, 1981.
- J. Fredsøe and R. Deigaard. *Mechanics of Coastal Sediment Transport*, volume 3 of *Advanced series on Ocean Engineering*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992. ISBN 9810208405.
- W.D. Grant and O.S. Madsen. Combined wave and current interaction with a rough bottom. *J. Geophys. Res.*, 84:1797–1808, 1979.
- T.W. Hsu and S.H. Ou. On the mass transport of water waves. *Ocean Engng.*, 21(2):195–206, 1994.

- S.J. Jacobs. Mass transport in a turbulent boundary layer under a progressive water wave. *J. Fluid. Mech.*, 146:303–312, 1984.
- I.J. Jonsson. Measurements in the turbulent wave boundary layer. In *Proc. 10th IAHR Congress, London*, volume 1, pages 85–92, 1963.
- I.J. Jonsson. On the existence of universal velocity distributions in an oscillatory turbulent boundary layer. Basic Res. Progr. Rep. 12, 2-10, Coastal Engng. Lab and Hydr. Lab., Tech. Univ. of Denmark, 1966.
- I.J. Jonsson and N.A. Carlsen. Experimental and theoretical investigations in an oscillatory rough turbulent boundary layer. *J. Hydraulic Res.*, 14:45–60, 1976.
- P.A. Justesen. Prediction of turbulent oscillatory flow over rough beds. *Coastal Engng.*, 12: 257–284, 1988.
- P.A. Justesen. A note on turbulence calculations in the wave boundary layer. *J. Hydraulic Res.*, 29:699–711, 1991.
- K. Kajiura. On the bottom friction in an oscillatory current. *Bull. of Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo*, 42:147–174, 1964.
- K. Kajiura. A model of the bottom boundary layer in water waves. *Bull. of Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo*, 46:75–123, 1968.
- J.W. Kamphuis. Friction factor under oscillatory waves. *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng. Div., ASCE*, 101(WW2):135–144, 1975.
- C.E. Long. A simple model for time-dependent stably stratified boundary layers. Spe. Rep. 95, Dept. Oceanogr. Univ. Wash., Seattle., 1981.
- M.S. Longuet-Higgins. Mass transport in water waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser.*, A(245):535–581, 1953.
- M.S. Longuet-Higgins. The mechanics of the boundary-layer near the bottom in a progressive wave. In *Proc. of the 6th Int. Conf. of Coastal Eng., ASCE, Miami, Florida*, pages 184–193, 1958.
- V.C. Patel and J.Y. Yoon. Applications of turbulence models to separated flow over rough surfaces. *J. Fluids Engineering, ASME*, 117:234–241, 1995.
- L. Prandtl. Über die ausgebildete turbulenz. In *Verhandlungen des II. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Zürich 1926, Füssli 1927*, pages 62–75, 1926.
- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London*, A317: 417–433, 1970.
- P.G. Saffman and P.C. Wilcox. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 12:541–546, 1974.
- G.G. Stokes. On the effects of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9, 1855.
- H. Tanaka. Bottom boundary layer under nonlinear wave motion. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, 115(1), 1989.

- J. Trowbridge and O.S. Madsen. Turbulent wave boundary layers. 1 - model formulation and first-order solution. *J. Geophys. Res.*, 89(C5):7989–7997, 1984a.
- J. Trowbridge and O.S. Madsen. Turbulent wave boundary layers. 2 - second-order theory and mass-transport. *J. Geophys. Res.*, 89(C5):7999–8007, 1984b.

Capítulo 4

Conclusiones y futuras líneas de trabajo

4.1. Conclusiones

En el Capítulo 1 se definió el objetivo global de la tesis como describir y modelar dos procesos físicos que modifican la hidrodinámica marina por transmisión o disipación de la energía del fluido en sus fronteras: (1) el forzamiento de ondas de borde por acciones atmosféricas en la superficie del mar durante el paso de borrascas, y (2) la interacción de una oscilación progresiva de amplitud finita con el fondo del mar, cuyo resultado es la atenuación de la amplitud de la onda.

Para ello se propusieron unos objetivos específicos que se evalúan a continuación.

4.1.1. Forzamiento de ondas de borde por la acción del viento

En la primera parte de la tesis se ha analizado la conjetura de que la presencia de un obstáculo geográfico o una construcción humana cerca de la costa puede inducir, bajo determinadas condiciones de viento, la generación de ondas de borde a sotavento del mismo que, a su vez, sean capaces de modificar la forma de la costa.

Para ello, se han analizado los fenómenos de emisión y atrapamiento de vórtices que tienen lugar a sotavento de un obstáculo, y se ha planteado el problema de ondas largas forzadas por agentes atmosféricos y se ha formulado el problema del movimiento del agua sometido a pulsaciones atmosféricas armónicas, en una plataforma interior estrecha.

Se ha obtenido analíticamente que la respuesta del mar a esta sollicitación es una onda cuya amplitud decrece con la distancia a la costa y viaja paralelamente a la misma (esto es, se trata de una onda de borde). Esta onda tiene el periodo y la longitud de onda del forzamiento que la genera, de manera que será resonante (estará por tanto reforzada) si cumple la ecuación de dispersión de las ondas de borde para la zona de estudio y en caso contrario, la onda cesará al cesar el forzamiento. El modelo analítico obtenido ha sido aplicado a un caso de características meteorológicas y geométricas similares a las del tramo de costa de Carchuna, con el fin de obtener los posibles sistemas de corrientes generados por el viento en dicha zona.

Para validar el modelo teórico, se ha analizado la posible presencia de ondas de borde debidas al viento en Carchuna. Se han analizado los datos meteorológicos y oceanográficos en la zona de estudio y las imágenes tomadas desde la Estación de Monitorización ARGUS del Cabo de Sacratif, que se encuentra operativa desde diciembre de 2002. Así, se han seleccionado los días en los que se dan las condiciones atmosféricas propicias para la emisión de vórtices desde el Cabo de Sacratif y se han analizado las imágenes correspondientes a esos días, encontrándose en ellas patrones que parecen sostener el modelo analítico desarrollado.

El modelo predice la presencia de pulsos barométricos en la superficie del mar con las mismas características que los patrones observados en las imágenes. Por otro lado, para dichas condiciones del forzamiento el modelo predice la generación de puntas y ensenadas con longitudes de onda que coinciden con los sistemas morfológicos observados en la playa de Carchuna.

En resumen, la aplicación de este modelo a la playa de Carchuna muestra que los resultados concuerdan con los datos observados, y se puede concluir que la conjetura analizada es plausible. Las conclusiones de dicho análisis son:

1. Se ha demostrado la existencia de un nuevo mecanismo de generación de formas litorales de gran escala: la presencia de un obstáculo cerca de una playa, bajo determinadas condiciones del régimen de viento local, puede alterar la morfología de dicho tramo de costa.
2. Las puntas de Carchuna pueden deberse a diferentes procesos actuando conjuntamente: (1) la refracción del oleaje en cauces sumergidos (Ortega et al., 2003); (2) las ondas de borde atrapadas inducidas por interacción no-lineal de ondas (Ortega et al., 2003); y (3) las ondas de borde inducidas por el viento

4.1.2. Interacción con el fondo de un tren de ondas de amplitud finita

En la segunda parte de la tesis se ha analizado el flujo en la capa límite del fondo bajo ondas marinas de amplitud finita, incluyendo la atenuación de la altura de ola debido a la fricción viscosa y turbulenta.

Para ello, se han planteado las ecuaciones que gobiernan dicho flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite, las condiciones que deben satisfacerse en los contornos y las condiciones de acuerdo entre ambos dominios. Asimismo, dado que en la mayor parte de los casos de oleaje no-lineal el flujo en la capa límite es turbulento, se ha aplicado el modelo de turbulencia de dos ecuaciones desarrollado por Saffman (1970, 1974).

Se ha resuelto el flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite para el caso laminar de modo analítico, y se ha desarrollado un modelo numérico para la resolución del flujo turbulento en la capa límite. Así, se ha obtenido un modelo capaz de describir el flujo en dicha capa límite para cualquier valor del número de Reynolds dentro del rango de la teoría de Stokes-II, y para régimen hidráulico liso o rugoso.

Dicho modelo ha sido aplicado a una serie de casos de oleaje de igual periodo y profundidad relativa, variando sólo la rugosidad del fondo y el peralte de la onda (y por lo tanto, el número de Reynolds). Para estos casos, se ha analizado la variación con el peralte de la onda y la rugosidad del fondo de las características hidrodinámicas más relevantes para el estudio del transporte de sedimentos: la fricción con el fondo (tensión tangencial en el fondo y tensión tangencial neta en un ciclo de onda), que determina la puesta en movimiento y el transporte del sedimento del fondo; la velocidad media euleriana, fundamental en el análisis del transporte de masa; y las características turbulentas (energía cinética turbulenta y viscosidad cinemática), que determinan los perfiles de concentración de los sedimentos en suspensión. Por otro lado, se ha analizado el efecto del peralte y la rugosidad del lecho en la disipación de energía debido a la fricción viscosa y turbulenta en la capa límite, y la consecuente atenuación de la altura de ola.

Este modelo presenta las siguientes novedades:

1. Es capaz de modelar la capa límite de ondas de amplitud finita del régimen de Stokes-II, para cualquier régimen hidráulico: laminar, de transición, turbulento liso y turbulento rugoso

2. Tiene en cuenta el efecto de la atenuación de la altura de ola en la hidrodinámica, y permite evaluarla a partir de la disipación de energía por fricción viscosa y por fricción turbulenta.
3. Permite obtener una descripción detallada de la energía cinética turbulenta instantánea y promediada en un ciclo.

4.2. Futuras Líneas de Trabajo

De acuerdo con los objetivos planteados en la introducción, se proponen las siguientes líneas de trabajo futuras:

4.2.1. Forzamiento de ondas de borde por la acción del viento

1. Validar el modelo analítico cuantitativamente con datos obtenidos mediante una estación meteorológica y la instrumentación de campo adecuada (sensores de presión y correntímetros).
2. Analizar la influencia que tienen las ondas de borde generadas por perturbaciones atmosféricas sobre la dinámica de la zona de rompientes, donde pueden ser capaces de modificar los sistemas circulatorios.
3. Analizar la posible interacción entre las ondas de borde obtenidas debido al viento y las generadas por la interacción no lineal entre diferentes frecuencias de oleaje que incide sobre a costa (Hasselmann, 1962).
4. Analizar otros mecanismos de generación de formas rítmicas como la radiación de ondas al paso de grupos de olas por el Cañón del Jolúcar.
5. Resolver el problema para el caso de un tramo de costa limitada por dos estructuras (o dos puntas), o por una estructura y el final abrupto (giro en la alineación) del tramo de costa.

4.2.2. Interacción con el fondo de un tren de ondas de amplitud finita

1. Analizar con el modelo descrito el efecto de la profundidad relativa en la velocidad media euleriana, la tensión tangencial en el fondo y en la disipación de energía del oleaje.
2. Obtener expresiones analíticas que relacionen el número de Reynolds, el peralte, la rugosidad de lecho y la profundidad relativa con la velocidad media euleriana fuera de la capa límite $u_{S,\infty}^*$, el coeficiente de fricción f_w y el coeficiente de pérdida de energía, f_e , bajo ondas de Stokes-II, y permitan sustituir las expresiones que se emplean actualmente, basadas en su mayoría en la teoría lineal de ondas.
3. Obtener a partir del modelo desarrollado un criterio para cada una de las variables hidrodinámicas de la capa límite oscilatoria de interés para la ingeniería (corriente estacionaria, coeficiente de fricción y coeficiente de pérdida de energía) que permita elegir en qué casos es suficiente aplicar las expresiones clásicas de teoría lineal y cuándo es necesario un análisis que tenga en cuenta un orden de aproximación mayor.

Referencias

- K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. 1. general theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:481–500, 1962.
- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London*, A317: 417–433, 1970.
- P.G. Saffman and P.C. Wilcox. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 12:541–546, 1974.

Apéndice A

Hidrodinámica bajo ondas de Stokes-II. Desarrollo matemático del problema en el cuerpo del fluido y en la capa límite

A.1. Introducción. Metodología

Se ha planteado el movimiento bajo una onda gravitatoria en dos regiones del fluido: el núcleo, donde el efecto de la viscosidad es despreciable, y la capa límite, donde los esfuerzos tangenciales cobran importancia.

Se ha formulado el problema siguiendo un método de perturbaciones, hasta el segundo orden de aproximación; y se ha resuelto analíticamente el flujo en el núcleo del fluido y en la capa límite para el caso de flujo laminar.

Sin embargo, el flujo en la capa límite bajo movimiento oscilatorio debido al oleaje es frecuentemente turbulento. Para resolverlo se ha empleado el modelo de viscosidad de remolino de Saffman (1970); Saffman and Wilcox (1974), que es un modelo de dos ecuaciones en $k - \Omega$. Este problema no se puede resolver analíticamente, y se ha recurrido al desarrollo de un modelo numérico.

Se ha considerado el caso de una onda gravitatoria monocromática que se propaga sobre una profundidad constante h_0^* . El problema es bidimensional, se ha empleado un eje horizontal, x^* , en la dirección de propagación de la onda y en sentido opuesto, y un eje vertical, y^* , con origen en el fondo y su extremo positivo hacia arriba. t^* es la variable independiente tiempo. Los símbolos que llevan el superíndice “*” son cantidades dimensionales.

La onda se ha caracterizado por su periodo, $T^* = 2\pi/\omega^*$, su longitud de onda, $L^* = 2\pi/k^*$, y su amplitud inicial a_0^* ; donde ω^* es la frecuencia angular, y k es el número de onda.

La superficie libre asociada a esta onda se ha definido como:

$$y^* = h_0^* + \eta^*(x^*, t^*) = h_0^* + \left[\frac{a^*(x^*)}{2} e^{i(k^*x^* + \omega^*t^*)} + c.c. \right] + O(\delta) \quad (\text{A.1})$$

donde $\eta^*(x^*, t^*)$ es el desplazamiento de la superficie libre, a^* es la amplitud de la oscilación de primer orden, *c.c.* indica el complejo conjugado de la cantidad compleja que le precede, y δ es el parámetro de valor muy pequeño que se ha empleado para expandir las variables en los diferentes órdenes de aproximación. La amplitud de la onda varía en x^* debido a la fricción con el fondo.

A.2. Ecuaciones adimensionalizadas del movimiento

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido son las ecuaciones de Navier-Stokes, que son, para profundidad constante:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{A.4})$$

Donde (u^*, v^*) son las componentes de la velocidad en las direcciones x^* e y^* respectivamente, ρ^* es la densidad del agua, ν^* es la viscosidad cinemática del agua, y P^* es la presión dinámica, $p^* = P^* - \rho^* g^* y^*$ (donde p^* es la presión total).

Además, se deben cumplir las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie libre. La condición de contorno cinemática en la superficie libre obliga a que una partícula que se encuentre en ella se mueva con la superficie libre:

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} - v^* + u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} = 0 \quad \text{en } y^* = h_o^* + \eta^*(x^*, t^*) \quad (\text{A.5})$$

La condición de contorno dinámica en la superficie libre (conservación de la cantidad de movimiento en la superficie libre)

$$\sum_{i=1}^2 \sigma_{ij}^* n_i = 0 \quad \text{en } y^* = h_o^* + \eta^*(x^*, t^*) \quad (\text{A.6})$$

donde σ_{ij}^* es la componente ij del tensor de tensiones, o la tensión en la dirección x_j^* que actúa sobre el plano perpendicular a x_i^* , n_i es la componente i del vector unitario perpendicular a la superficie libre.

La condición de contorno cinemática en el fondo es la condición de adherencia. Dado que el fondo es fijo, la velocidad en él debe ser nula:

$$u^* = v^* = 0 \quad \text{en } y^* = 0 \quad (\text{A.7})$$

Las variables se han adimensionalizado como sigue:

$$(x, y) = \frac{(x^*, y^*)}{L^*}, \quad t = t^* \omega^*, \quad \eta = \frac{\eta^*}{a_0^*/S} \quad (\text{A.8})$$

$$(u, v) = \frac{(u^*, v^*)}{a_0^* \omega^*/S}, \quad p = \frac{p^*}{\rho a_0^* (\omega^*)^2 L^*/S}, \quad (T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}) = \frac{(\sigma_{xx}^*, \sigma_{xy}^*, \sigma_{yy}^*)}{\rho^* \omega^{*2} L^* a_0^*/S} \quad (\text{A.9})$$

donde S es $\sinh(2\pi h_0^*/L^*)$.

El problema adimensionalizado resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\delta}{2} R_\delta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\delta}{2} R_\delta \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

donde $\delta = \frac{\delta^*}{L^*} = \frac{1}{L^*} \sqrt{\frac{2\omega^*}{\nu^*}}$ es la longitud de Stokes adimensionalizada, $R_\delta = \frac{U_0^* \delta^*}{\nu^*} = \frac{a_0^* \omega^* / S \delta^*}{\nu^*}$ es el número de Reynolds de la capa límite del fondo.

Y las condiciones de contorno quedan:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - v + \frac{\delta}{2} R_\delta u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad y = h_o^* / L^* + \frac{\delta}{2} R_\delta \eta(x, t) \quad (\text{A.13})$$

$$n_x^2 T_{xx} + 2n_x n_y T_{xy} + n_y^2 T_{yy} = 0 \quad \text{en} \quad y = h_o^* / L^* + \frac{\delta}{2} R_\delta \eta(x, t) \quad (\text{A.14})$$

$$(n_y^2 - n_x^2) T_{xy} + n_x n_y (T_{xx} - T_{yy}) = 0 \quad \text{en} \quad y = h_o^* / L^* + \frac{\delta}{2} R_\delta \eta(x, t) \quad (\text{A.15})$$

$$u = v = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (\text{A.16})$$

Dado que la amplitud del movimiento oscilatorio decae en una distancia del orden de $(L^*)^2 / \delta^*$, se introduce una nueva “variable lenta” $\chi = \delta x$ en la dirección del eje x^* .

Teniendo en cuenta que el parámetro $\delta \ll 1$, la solución del problema se puede desarrollar en función de este parámetro, según el método de las perturbaciones:

$$(u, v, P, \eta) = (U_0, V_0, P_0, \eta_0) + \delta(U_1, V_1, P_1, \eta_1) + O(\delta^2) \quad (\text{A.17})$$

donde (u_0, v_0, P_0, η_0) es la solución del problema al primer orden de aproximación y (u_1, v_1, P_1, η_1) la solución al segundo orden.

A.3. Movimiento en el núcleo del fluido

En el núcleo del fluido, los efectos viscosos se pueden despreciar al primer y segundo orden de aproximación. Sin embargo, la condición de adherencia en el fondo no se puede satisfacer sin tener en cuenta que la viscosidad cobra importancia cerca de los contornos físicos del fluido. Así, se debe formular el flujo en la capa límite del fondo y las condiciones de acuerdo entre ambas regiones.

El flujo en el núcleo interno del fluido se ha resuelto siguiendo el procedimiento seguido por Vittori and Blondeaux (1996).

La solución al primer orden de aproximación es oscilatoria con una frecuencia angular ω^* y un número de onda k^* :

$$U_0 = -\frac{a(\chi)}{2} \cosh(2\pi y) e^{i(2\pi x + t)} + c.c. \quad (\text{A.18})$$

$$V_0 = \frac{i a(\chi)}{2} \sinh(2\pi y) e^{i(2\pi x + t)} + c.c. \quad (\text{A.19})$$

$$P_0 = \frac{a(\chi)}{4\pi} \cosh(2\pi y) e^{i(2\pi x + t)} + c.c. \quad (\text{A.20})$$

$$\eta_0 = \frac{a(\chi) S}{2} e^{i(2\pi x + t)} + c.c. \quad (\text{A.21})$$

Y al segundo orden se obtiene que las variables constan de tres partes: una estacionaria, y dos componentes oscilatorias de características (ω^*, k^*) y $(2\omega^*, 2k^*)$ respectivamente. Las componentes primera y última se deben a la interacción no-lineal de la onda consigo misma, y la segunda componente se debe al amortiguamiento de la amplitud de la onda y a la condición de acuerdo con el flujo en la capa límite.

$$\begin{aligned} (U_1, V_1, W_1, P_1, \eta_1) &= (U_{1s}, V_{1s}, W_{1s}, P_{1s}, \eta_{1s}) \\ &+ (U_{1p}^{(1)}, V_{1p}^{(1)}, W_{1p}^{(1)}, P_{1p}^{(1)}, \eta_{1p}^{(1)})e^{i(2\pi x+t)} + c.c. \\ &+ (U_{1p}^{(2)}, V_{1p}^{(2)}, W_{1p}^{(2)}, P_{1p}^{(2)}, \eta_{1p}^{(2)})e^{i2(2\pi x+t)} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

El problema del flujo estacionario no se puede resolver sin las condiciones de acuerdo con la capa límite. La solución al problema oscilatorio de características (ω, k) es:

$$U_{1p}^{(1)} = \frac{i}{2} \frac{da}{d\chi} y \sinh(2\pi y) + ia(\chi)c_c \sinh(2\pi y) \quad (\text{A.23})$$

$$V_{1p}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{da}{d\chi} y \cosh(2\pi y) + a(\chi)c_c \cosh(2\pi y) \quad (\text{A.24})$$

$$P_{1p}^{(1)} = \frac{i}{4\pi} \frac{da}{d\chi} \cosh(2\pi y) \left[\frac{1}{2\pi} - y \tanh(2\pi y) \right] - \frac{i}{2\pi} a(\chi)c_c \sinh(2\pi y) \quad (\text{A.25})$$

$$\eta_{1p}^{(1)} = \frac{i}{8\pi^2} \frac{da}{d\chi} \cosh(2\pi h_0) (1 - 2\pi h_0 \tanh(2\pi h_0)) - \frac{i}{2\pi} S a(\chi)c_c, \quad (\text{A.26})$$

donde c_c procede de asumir que la velocidad vertical en la capa límite del fondo, donde la distancia al fondo es mucho mayor que δ^* , tiene la siguiente estructura: $v_{1,\text{fondo}} = a(\chi)c_c e^{i(2\pi x+t)}$. El valor de c_c se obtiene por tanto de la resolución del flujo en la capa límite del fondo.

La solución al problema oscilatorio de características $(2\omega, 2k)$ es:

$$U_{1p}^{(2)} = 2iC_1 a(\chi)^2 \cosh(4\pi y) \quad (\text{A.27})$$

$$V_{1p}^{(2)} = 2C_1 a(\chi)^2 \sinh(4\pi y) \quad (\text{A.28})$$

$$P_{1p}^{(2)} = -\frac{i}{\pi} C_1 a(\chi)^2 \cosh(4\pi y) - a(\chi)^2 \frac{R\delta}{16} \quad (\text{A.29})$$

$$\eta_{1p}^{(2)} = a(\chi)^2 \frac{R\delta}{8} \left(S^2 + \frac{3S}{2} + \frac{3 \cosh(2\pi h_0)}{2 \tanh(2\pi h_0)} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.30})$$

donde

$$C_1 = \frac{3\pi i R\delta}{16 S^2} \quad (\text{A.31})$$

A partir de las condiciones de contorno en la superficie libre se obtiene la ecuación que determina el amortiguamiento de la oscilación.

$$\frac{da}{d\chi} = \frac{-8\pi c_c}{4\pi h_0^*/L^* + \sinh(4\pi h_0^*/L^*)} a \quad (\text{A.32})$$

Por lo tanto, la constante c_c determina el amortiguamiento de la onda debido a la disipación en la capa límite del fondo.

A.4. Flujo en la capa límite. Caso laminar

Las velocidades de las partículas del fluido pasan de tener un valor finito en el núcleo del fluido a ser nulas en el fondo, en una distancia del orden de $\delta^* \ll L^*$ desde el fondo.

Dado que las escalas del movimiento varían, se introducen las variables velocidades

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{(x, y)}{\delta} \quad (\text{A.33})$$

y la variable “fase”

$$\tilde{t} = 2\pi x + t \quad (\text{A.34})$$

Por otro lado, se descompone la presión dinámica, P , en presión externa, P_e , y contribución de la capa límite, $\delta\tilde{p}$:

$$P = P_e(\tilde{y}, \tilde{t}, \chi) + \delta\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \chi)$$

Por lo tanto, las ecuaciones quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + O(\delta^2) = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right) = \\ -2\pi \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{t}} - \delta \frac{\partial P_e}{\partial \chi} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \delta 2\pi \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2} + \delta 4\pi \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \right) + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right) = \\ \frac{-1}{\delta} \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2} + \delta 4\pi \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \right) + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Y las condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p} = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} u_{\text{núcleo}} = \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + \delta \left\{ U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_\delta}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c.$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} v_{\text{núcleo}} = \quad (\text{A.40})$$

$$0 + \delta \left\{ V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c.$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0, \quad (\text{A.42})$$

con $\delta \tilde{y} \ll 1$

Donde

$$P_e = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} P_{\text{núcleo}} = \frac{a(\chi)}{4\pi} e^{i\tilde{t}} + \delta \left\{ P_{1s}(y=0) + \frac{i}{8\pi^2} \frac{da}{d\chi} e^{i\tilde{t}} + \frac{R_\delta}{16} \left(\frac{3}{S^2} - 1 \right) a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} \right\} \quad (\text{A.43})$$

$$+\delta^2 \left\{ \frac{\partial P_{1s}}{\partial y} \Big|_{y=0} \tilde{y} + \left(\frac{\pi}{2} \tilde{y}^2 - ic_c \tilde{y} \right) a(\chi) e^{i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^3) + c.c.$$

Las incógnitas se han desarrollado en función del parámetro $\delta \ll 1$:

$$(u, v, \tilde{p}) = (u_0, v_0, \tilde{p}_0) + \delta (u_1, v_1, \tilde{p}_1) \quad (\text{A.44})$$

Dado que no existe ningún forzamiento que induzca variaciones en \tilde{x} , se pueden despreciar las derivadas respecto a esta variable.

Al primer orden el problema queda:

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{i}{2} a(\chi) e^{i\tilde{t}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2} \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{y}^2} \quad (\text{A.47})$$

Y las condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}_0 = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_0 = \frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.49})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v_0 = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$u_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$v_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.52})$$

Y la solución al primer orden resulta:

$$u_0 = \frac{1}{2} \left(e^{-(1+i)\tilde{y}} - 1 \right) a(\chi) e^{i\tilde{t}} \quad (\text{A.53})$$

$$v_0 = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\tilde{p}_0 = 0 \quad (\text{A.55})$$

Al segundo orden, el problema queda, teniendo en cuenta la solución al primer orden:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} = -i\pi \left(e^{-(1+i)\tilde{y}} - 1 \right) a e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{R_\delta}{2} v_1 \left(\frac{(1+i)}{2} e^{-(1+i)\tilde{y}} a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \right) = \quad (\text{A.57})$$

$$\left[\frac{R_\delta \pi}{4} \left(e^{-2\tilde{y}} - e^{(i-1)\tilde{y}} \right) + \frac{R_\delta \pi}{4} (1+i) \tilde{y} e^{(i-1)\tilde{y}} \right] a(\chi)^2 - \\ - \frac{iR_\delta \pi}{4} \left(e^{-2(1+i)\tilde{y}} - 2e^{-(1+i)\tilde{y}} + \frac{3}{S^2} \right) a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c.$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tilde{y}^2} = (ic_c - \pi \tilde{y}) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.58})$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}_1 = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_1 = U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_\delta}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.60})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v_1 = V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.61})$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.63})$$

La solución al segundo orden resulta:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} a(\chi)^2 + u_{12} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c. = \quad (\text{A.64}) \\ &= \frac{-R_\delta \pi}{4} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\tilde{y}} + [-(2+i) + (i-1)\tilde{y}] e^{-(1-i)\tilde{y}} \right\} a(\chi)^2 + \\ &+ \frac{R_\delta \pi}{8} \left\{ \frac{-3}{S^2} + [2(1+i)\tilde{y} - 2] e^{-(1+i)\tilde{y}} + \left(\frac{3}{S^2} + 2 \right) e^{-\sqrt{2}(1+i)\tilde{y}} \right\} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c. \\ v_1 &= \pi \left[\frac{i+1}{2} \left(e^{-(1+i)\tilde{y}} - 1 \right) + i\tilde{y} \right] a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.65}) \end{aligned}$$

$$\tilde{p}_1 = 0 \quad (\text{A.66})$$

Y se obtiene además el valor de c_c :

$$c_c = \frac{-\pi}{2} (i+1) \quad (\text{A.67})$$

A.5. Flujo en la capa límite. Caso turbulento

Las ondas de gravedad que son capaces de modificar el régimen de transporte de sedimentos en un medio acuático tienen unas características tales que el flujo en la capa límite del fondo es turbulento.

Para modelar el movimiento medio del fluido en un flujo turbulento se recurre a las ecuaciones promediadas de Reynolds. En estas ecuaciones, el efecto de la turbulencia aparece en unos términos que se llaman tensiones turbulentas o tensiones de Reynolds, ya que actúan como consumidores de cantidad de movimiento del flujo medio.

Frecuentemente, dichas “tensiones” se modelan análogamente a las tensiones viscosas, pero empleando, en lugar de la viscosidad cinemática, una variable virtual llamada viscosidad de remolino, $\epsilon^* = \nu_T^*$. El valor de la viscosidad de remolino depende en general de la distancia al contorno sólido y del tiempo, y se determina modelando la turbulencia. En este análisis se ha empleado el modelo de turbulencia de Saffman (1970); Saffman and Wilcox (1974).

A.5.1. Modelo de turbulencia de Saffman

Este modelo describe la turbulencia por medio de dos “densidades”: la “densidad de energía cinética turbulenta”, e^* , y la “densidad de pseudo-vorticidad”, Ω^* , que deben satisfacer unas ecuaciones no-lineales de difusión que incluyen la convección según el flujo medio, una amplificación debida a una cantidad media del tensor de deformaciones, y la disipación y difusión debidas a la interacción de la turbulencia consigo misma.

La difusión de dichas variables y del campo de velocidades medio se describe a partir de una viscosidad de remolino, ν_T^* , que depende a su vez de dichas densidades. Se ha definido como sigue:

$$\nu_T^* = \frac{e^*}{\rho^* \Omega^*} \quad (\text{A.68})$$

Las ecuaciones de difusión antes descritas son:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial e^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial e^*}{\partial y^*} = \\ & = \left\{ \alpha_e \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_e \Omega^* \right\} e^* + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x^*} \left[(\nu^* + \sigma_e \nu_T^*) \frac{\partial e^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[(\nu^* + \sigma_e \nu_T^*) \frac{\partial e^*}{\partial y^*} \right] \\ & \frac{\partial (\Omega^*)^2}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial (\Omega^*)^2}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial (\Omega^*)^2}{\partial y^*} = \\ & = \left\{ \alpha_\Omega \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_\Omega \Omega^* \right\} (\Omega^*)^2 + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x^*} \left[(\nu^* + \sigma_\Omega \nu_T^*) \frac{\partial (\Omega^*)^2}{\partial x^*} \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[(\nu^* + \sigma_\Omega \nu_T^*) \frac{\partial (\Omega^*)^2}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Donde $\alpha_e, \alpha_\Omega, \beta_e, \beta_\Omega, \sigma_e, \sigma_\Omega$ son constantes universales. En este estudio se han empleado los valores que aparecen en Saffman and Wilcox (1974) para estas constantes:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= 0,3 \\ \sigma_e &= \sigma_\Omega = 0,5 \\ \beta_e &= \alpha_e^2 \\ \frac{5}{3} &\leq \frac{\beta_\Omega}{\beta_e} \leq 2 \rightarrow \beta_\Omega = 0,18 \\ \alpha_\Omega &= \alpha_e \left(\frac{\beta_\Omega}{\beta_e} - \frac{4\sigma_\Omega \kappa^2}{\alpha_e} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Las condiciones de contorno que deben cumplir las variables turbulentas han sido analizadas detalladamente por Saffman and Wilcox (1974):

$$e^* = 0 \quad \text{en} \quad y^* = 0 \quad (\text{A.72})$$

$$\Omega^* = \frac{\sigma_{xy}^*}{\alpha_e \rho^* \nu^*} f \left(\frac{k_N^*}{\nu^*} \sqrt{\frac{\sigma_{xy}^*}{\rho^*}} \right) \quad \text{en} \quad y^* = 0 \quad (\text{A.73})$$

$$\lim_{y^*/\delta^* \rightarrow \infty} e^* = 0 \quad (\text{A.74})$$

$$\lim_{y^*/\delta^* \rightarrow \infty} \Omega^* = 0, \quad (\text{A.75})$$

donde k_N^* es la altura de rugosidad de Nikuradse, y donde se ha empleado la expresión analítica de la función $f(Z_0)$ obtenida para este modelo por Blondeaux and Colombini (1985):

$$\log_{10} f(Z_0) = \begin{cases} 5,354 - 4,59 \log_{10}(Z_0) & \text{si } Z_0 \leq 5 \\ 7,521 - 11,43 \log_{10}(Z_0) + 6,205(\log_{10}(Z_0))^2 - 1,256(\log_{10}(Z_0))^3 & \text{si } 5 < Z_0 < 65 \\ 1,44 - 0,9535 \log_{10}(Z_0) & \text{si } Z_0 \geq 65 \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

Las variables e^* y Ω^* se adimensionalizan como sigue:

$$e = \frac{e^*}{\rho^* a_0^* (\omega^*)^2 \delta^* / S} \quad y \quad \Omega = \frac{\Omega^*}{\frac{a_0^* \omega^*}{\delta^* S}},$$

y la viscosidad de remolino, adimensionalizada con la viscosidad cinemática, queda:

$$\nu_T = \frac{\nu_T^*}{\nu^*} = \frac{2e}{\Omega}$$

Las ecuaciones del modelo de Saffman adimensionalizadas quedan:

$$\frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left[u \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial e}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} \right] = \quad (\text{A.77})$$

$$= \frac{R_\delta}{2} e \left\{ \alpha_e \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_e \Omega \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{t}} \right] \right. \\ \left. + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial e}{\partial \tilde{y}} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} \right) = \quad (\text{A.78})$$

$$= \frac{R_\delta}{2} \Omega^2 \left\{ \alpha_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \beta_\Omega \Omega \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{t}} \right] \right. \\ \left. + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{x}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e}{\Omega} \right) \frac{\partial \Omega^2}{\partial \tilde{y}} \right] \right\}$$

Y las variables e y Ω deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$e = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$\Omega = \frac{R_\delta}{\alpha_e} T_{xy} f \left(R_\delta z_r \sqrt{T_{xy}} \right) \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.80})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e = 0 \quad (\text{A.81})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega = 0 \quad (\text{A.82})$$

Donde $z_r = k_N^*/\delta^*$ es la altura de rugosidad de Nikuradse adimensionalizada con la longitud de Stokes.

A.5.2. Ecuaciones de Reynolds

Dado que el flujo es turbulento, se deben satisfacer las ecuaciones promediadas de Reynolds, que una vez adimensionadas del mismo modo descrito previamente y haciendo los mismos cambios de variable, quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + O(\delta^2) = 0 \quad (\text{A.83})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right) = \\ & -2\pi \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{t}} - \delta \frac{\partial P_e}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) - \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \right) \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right) \right] \right\} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + v \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \delta 2\pi u \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} \right) = \\ & \frac{-1}{\delta} \frac{\partial P_e}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{p} + \frac{2}{3}e \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \delta 2\pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right) \right] + \delta 2\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e}{\Omega} \right) 2 \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} \right] \right\} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Donde, (u, v) son las componentes de la velocidad del flujo medio.

El flujo debe además satisfacer las mismas condiciones de contorno que en el caso de capa límite laminar:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p} = 0 \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} u_{\text{núcleo}} = \\ & \frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + \delta \left\{ U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_\delta}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v = \lim_{y \rightarrow \delta \tilde{y}} v_{\text{núcleo}} = \\ & 0 + \delta \left\{ V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} \right\} + O(\delta^2) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.89})$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.90})$$

con $\delta \tilde{y} \ll 1$

A.5.3. Problema resultante

Por lo tanto, el problema a resolver consta de 5 ecuaciones con 5 incógnitas, (A.83)-(A.85), (A.77)-(A.78), y las condiciones de contorno (A.86)-(A.90) y (A.79)-(A.82).

De nuevo, las incógnitas se han desarrollado en función del parámetro $\delta \ll 1$:

$$(u, v, \tilde{p}, e, \Omega) = (u_0, v_0, \tilde{p}_0, e_0, \Omega_0) + \delta (u_1, v_1, \tilde{p}_1, e_1, \Omega_1) \quad (\text{A.91})$$

De esta manera, y teniendo en cuenta que no existe ningún forzamiento que induzca variaciones en \tilde{x} , al primer orden de aproximación, el problema resulta

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{A.92})$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = \frac{-i}{2} a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] + O(\delta^2) \quad (\text{A.93})$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{p}_0 + \frac{2}{3} e_0 \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} \right] + O(\delta^2) \quad (\text{A.94})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} &= \frac{R_\delta}{2} \alpha_e e_0 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \\ &\quad - \frac{R_\delta}{2} \beta_e \Omega_0 e_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} v_0 \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} &= \frac{R_\delta}{2} \alpha_\Omega \Omega_0^2 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right]^{1/2} - \\ &\quad - \frac{R_\delta}{2} \beta_\Omega \Omega_0^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}_0 = 0 \quad (\text{A.97})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_0 = \frac{-a(\chi)}{2} e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.98})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v_0 = 0 \quad (\text{A.99})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e_0 = 0 \quad (\text{A.100})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega_0 = 0 \quad (\text{A.101})$$

$$u_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.102})$$

$$v_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.103})$$

$$e_0 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.104})$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\alpha_e} \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} f \left(\frac{z_r}{\sqrt{R_\delta}} \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}} \right) \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.105})$$

De la ecuación (A.92) y las condiciones de contorno (A.99) y (A.103), se obtiene que

$$v_0 = 0; \quad (\text{A.106})$$

y de la ecuación (A.94) y la condición de contorno (A.97), se obtiene que:

$$\tilde{p}_0 = \frac{-2}{3} e_0. \quad (\text{A.107})$$

Esto hace que el problema quede mucho más simple:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{-i}{2} a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] + O(\delta^2) \quad (\text{A.108})$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{R_\delta}{2} \alpha_e e_0 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| - \frac{R_\delta}{2} \beta_e \Omega_0 e_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (\text{A.109})$$

$$\frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{t}} = \frac{R_\delta}{2} \alpha_\Omega \Omega_0^2 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| - \frac{R_\delta}{2} \beta_\Omega \Omega_0^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_\Omega \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (\text{A.110})$$

con las condiciones de contorno (A.98), (A.100)-(A.102) y (A.104)-(A.105).

Al segundo orden de aproximación, el problema resulta

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + 2\pi \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad (\text{A.111})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} \right) &= \frac{i R_\delta \pi}{4} \left(1 - \frac{3}{S^2} \right) a^2(\chi) e^{2i\tilde{t}} + c.c. + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{t}} &= (-\pi \tilde{y} + i c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. - \\ - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{p}_1 + \frac{2}{3} e_1 \right) &+ \pi \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} \right) = \frac{R_\delta}{2} \alpha_e \left(e_0 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + e_1 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| \right) - \quad (\text{A.114})$$

$$\begin{aligned} - \frac{R_\delta}{2} \beta_e (e_0 \Omega_1 + e_1 \Omega_0) &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_e \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial e_1}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2\sigma_e \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{y}} \right] \\ 2 \frac{\partial (\Omega_0 \Omega_1)}{\partial \tilde{t}} &+ \frac{R_\delta}{2} \left(v_1 \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} + 2\pi u_0 \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{t}} \right) = \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

$$= \frac{R_\delta}{2} \alpha_\Omega \left(\Omega_0^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + 2\Omega_0 \Omega_1 \left| \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \right| \right) - \frac{3 R_\delta}{2} \beta_\Omega \Omega_0^2 \Omega_1 +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[\left(1 + \sigma_{\Omega} \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial(\Omega_0 \Omega_1)}{\partial \tilde{y}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[2\sigma_{\Omega} \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial \tilde{y}} \right]$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \tilde{p}_1 = 0 \quad (\text{A.116})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} u_1 = U_{1s}(y=0) - \frac{3\pi}{8} \frac{R_{\delta}}{S^2} a(\chi)^2 e^{2i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.117})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} v_1 = V_{1s}(y=0) + (i\pi \tilde{y} + c_c) a(\chi) e^{i\tilde{t}} + c.c. \quad (\text{A.118})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} e_1 = 0 \quad (\text{A.119})$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} \Omega_1 = 0 \quad (\text{A.120})$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.121})$$

$$v_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.122})$$

$$e_1 = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0 \quad (\text{A.123})$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \frac{1}{\alpha_e} \left\{ \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} \frac{A_1}{A_0} f(A_0) df(A_0) + \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} f(A_0) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} f(A_0) \right\} \quad \text{en} \quad \tilde{y} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

donde

$$A_0 = \frac{z_r}{\sqrt{R_{\delta}}} \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}}, \quad (\text{A.125})$$

$$A_1 = \frac{z_r}{\sqrt{R_{\delta}}} \frac{2 \left(\frac{e_1}{\Omega_0} - \frac{e_0 \Omega_1}{\Omega_0^2} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + \left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}}}{2 \sqrt{\left(1 + \frac{2e_0}{\Omega_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}}}, \quad (\text{A.126})$$

y donde se ha desarrollado la función $f(Z_0)$ (ecuación A.76) así:

$$f(A_0 + \delta A_1) = f(A_0) + \delta \frac{A_1}{A_0} f(A_0) df(A_0), \quad (\text{A.127})$$

con

$$df(Z_0) = \begin{cases} -4,59 & \text{si } Z_0 \leq 5 \\ -11,43 + 2 \cdot 6,205 \log Z_0 - 3 \cdot 1,256 \log^2 Z_0 & \text{si } 5 < Z_0 < 65 \\ -0,9535 & \text{si } Z_0 \geq 65. \end{cases} \quad (\text{A.128})$$

A.5.4. Método numérico

A.5.4.1. Introducción. Esquema general de resolución numérica

Los problemas de contorno al primer y segundo orden de aproximación se han resuelto conjuntamente. El problema consiste entonces en ocho ecuaciones con ocho incógnitas, y tiene dos variables independientes: una de carácter espacial, \tilde{y} , y otra de carácter temporal, \tilde{t} .

La variable independiente χ no se ha introducido en el modelo numérico ya que en las ecuaciones que gobiernan el flujo en la capa límite la dependencia de χ aparece sólo dentro de la amplitud adimensional $a(\chi)$, en los términos forzadores, y una vez resueltas las condiciones de contorno en la superficie libre, se ha obtenido la variación de a con χ (véase ecuación A.32), de la que sólo se desconoce el valor del parámetro c_c , que se obtiene de las condiciones de acuerdo de la capa límite con el núcleo del fluido. Por lo tanto, una vez resuelto el problema para un valor determinado de χ y obtenido el valor del parámetro c_c , se puede introducir la dependencia de χ en todas las variables que contengan $a(\chi)$.

En la resolución se ha empleado un método numérico explícito con diferencias adelantadas en el tiempo, cuya estabilidad numérica está condicionada a la elección de un paso de tiempo suficientemente pequeño.

Tratamiento del dominio espacial. Cambio de variable

Dado que las componentes de la velocidad y la energía cinética turbulenta deben anularse en el fondo y deben tender a su valor en el exterior a medida que la distancia al fondo crece, los gradientes de dichas variables serán mucho mayores cerca de la pared que lejos y, por lo tanto, se espera que la resolución de la malla deba ser mayor para valores de $\tilde{y} \rightarrow 0$ que para $\tilde{y} \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, para optimizar el tiempo de computación del código, se ha empleado un incremento de \tilde{y} variable, creciente con la distancia a la pared. Para ello, se ha realizado el siguiente cambio de variable,

$$\zeta = \ln \frac{\tilde{y} + a}{a}, \quad (\text{A.129})$$

y se ha discretizado el nuevo eje con incrementos $\Delta\zeta$ constantes. El valor del parámetro a se ha determinado como $a = y_i^2 / (y_{\text{fin}} - 2y_i)$, donde y_{fin} es el valor máximo del dominio en \tilde{y} , e $y_i < y_{\text{fin}}/2$ es un valor intermedio de \tilde{y} tal que la mitad de los puntos de la discretización quedan por debajo de ese punto y la otra mitad quedan por encima.

Aplicando este cambio de variable, las derivadas respecto a \tilde{y} quedan:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = G(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (\text{A.130})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} = G^2(\zeta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.131})$$

donde $G(\zeta) = \frac{1}{a e^\zeta}$.

Discretización de las ecuaciones y esquema general de resolución

El dominio espacial $\zeta \in [0, \zeta_{\text{fin}}]$, se ha dividido en NY puntos espaciados una distancia $\Delta\zeta$, y en el dominio temporal, $\tilde{t} \in [0, t_{\text{fin}}]$, se ha empleado un paso de tiempo $\Delta\tilde{t}$. Las derivadas espaciales se han discretizado empleando un esquema de diferencias finitas centradas,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)^{n,j} = \frac{U^{n,j+1} - U^{n,j-1}}{2\Delta\zeta} + O(\Delta\zeta^2), \quad (\text{A.132})$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)^{n,j} = \frac{U^{n,j+1} - 2U^{n,j} + U^{n,j-1}}{\Delta \zeta^2} + O(\Delta \zeta^2); \quad (\text{A.133})$$

y las derivadas temporales mediante el siguiente esquema de diferencias finitas adelantadas:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{t}}\right)^{n,j} = \frac{U^{n+1,j} - U^{n,j}}{\Delta \tilde{t}} + O(\Delta \tilde{t}). \quad (\text{A.134})$$

El código parte del instante de tiempo cero, en el que se ha impuesto la condición inicial de fluido estático, y en cada paso de tiempo se resuelve el problema completo en todos los puntos del dominio espacial, antes de avanzar otro paso en el tiempo. Cada paso de tiempo se ha dividido en dos etapas dado que se ha empleado un método de Runge-Kutta de segundo orden.

A.5.4.2. Resolución de las ecuaciones: Dos grupos

El sistema a resolver consta de ocho ecuaciones con ocho incógnitas, que se pueden dividir en dos grupos según su estructura. El primer grupo de ecuaciones describen la variación temporal local de las variables $(u_0, u_1, e_0, e_1, g_0, g_1)$, y se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} &= f_1(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} &= f_2(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial e_0}{\partial \tilde{t}} &= f_3(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial e_1}{\partial \tilde{t}} &= f_4(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial g_0}{\partial \tilde{t}} &= f_5(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial g_1}{\partial \tilde{t}} &= f_6(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

donde $g_0 = \Omega_0^2$ y $g_1 = \Omega_0 \Omega_1$. Este grupo de ecuaciones se ha resuelto utilizando un método explícito de Runge-Kutta de segundo orden.

El segundo grupo de ecuaciones consiste en dos ecuaciones que describen el gradiente espacial de las dos variables restantes, (v_1, \tilde{p}_1) , con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} &= f_7(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}) \\ \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \zeta} &= f_8(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

y se ha resuelto avanzando en el eje ζ con un esquema de diferencias finitas no centradas.

Resolución del primer grupo de ecuaciones: Método explícito de Runge-Kutta

El primer grupo de ecuaciones se ha resuelto empleando un método explícito de Runge-Kutta de segundo orden, es decir, de dos etapas. Si la ecuación diferencial a resolver tiene la forma $\partial U / \partial t = f(U, t)$, entonces la variable U toma el siguiente valor en el instante t_{n+1} :

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t k_2 \quad (\text{A.137})$$

donde

$$k_2 = f\left(U^n + \frac{\Delta t}{2} k_1; t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad \text{y} \quad k_1 = f(U^n; t_n). \quad (\text{A.138})$$

En el fondo se han impuesto las condiciones de contorno descritas anteriormente, y en el exterior de la capa límite, en lugar de imponer las condiciones de acuerdo con el flujo en el núcleo del fluido, se ha impuesto que los gradientes verticales de las variables sean nulos. Después se ha comprobado en los casos calculados que dichas condiciones de acuerdo se satisfacen.

Resolución del segundo grupo de ecuaciones

El segundo grupo de ecuaciones se ha resuelto, evaluando el gradiente espacial de la variable en el instante de tiempo anterior, y avanzando en el eje ζ con diferencias finitas adelantadas partiendo desde un extremo donde la condición de contorno impone un valor fijo a la variable incógnita.

La variable v_1 debe tomar un valor nulo en el fondo, y \tilde{p}_1 lo hace en el exterior de la capa límite. Por lo tanto, las ecuaciones se han resuelto partiendo de $v_1^{n+\frac{1}{2},1} = 0$ y $\tilde{p}_1^{n+\frac{1}{2},NY} = 0$, y avanzando en sentidos opuestos del eje ζ , siguiendo el esquema:

$$v_1^{n,j+1} = v_1^{n,j} + \Delta\zeta \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right)^{n-\frac{1}{2},j} \quad (\text{A.139})$$

$$\tilde{p}_1^{n,j-1} = \tilde{p}_1^{n,j} - \Delta\zeta \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \zeta} \right)^{n-\frac{1}{2},j}, \quad (\text{A.140})$$

donde

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right)^{n,j} = \left(f_7 \left(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t} \right) \right)^{n,j} \quad (\text{A.141})$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \zeta} \right)^{n,j} = \left(f_8 \left(u_0, u_1, \dots; \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}, \dots; \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2}, \dots; \zeta, \tilde{t} \right) \right)^{n,j}. \quad (\text{A.142})$$

El avance en el tiempo se ha realizado en dos etapas ya que los valores de estas variables en el punto medio del paso de tiempo se requieren para resolver el primer grupo de ecuaciones.

Referencias

- P. Blondeaux and M. Colombini. Pulsatile turbulent pipe flow. *5th Symp. on Turbulent Shear Flows. Ithaca, New York.*, 1985.
- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London*, A317: 417–433, 1970.
- P.G. Saffman and P.C. Wilcox. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 12:541–546, 1974.
- G. Vittori and P. Blondeaux. Mass transport under sea waves propagating over a rippled bed. *J. Fluid Mech.*, (314):247–265, 1996.

Bibliografía

- S.G.J Aarninkhof and R.A. Holman. Monitoring the nearshore with video. *Backscatter*, 10: 8–11, 1999.
- A. Ashton, A.B. Murray, and O. Arnoult. Formation of coastline features by large-scale instabilities induced by high-angle waves. *Nature*, 414:296–300, 2001.
- A. Baquerizo. *Reflexión del Oleaje en Playas. Métodos de Evaluación y de Predicción*. PhD thesis, Universidad de Cantabria, 1995. 180 pp.
- A. Baquerizo, M.A. Losada, and I.J. Losada. Edge wave scattering by a coastal structure. *Fluid Dyn. Res.*, 31:275–287, 2002.
- E. Bird. *Coastal Geomorphology: an Introduction*. John Wiley and Sons., 2000.
- P. Blondeaux. Turbulent boundary layer at the bottom of gravity waves. *J. Hydraulic Res.*, 25(4):447–464, 1987.
- P. Blondeaux and M. Colombini. Pulsatile turbulent pipe flow. *5th Symp. on Turbulent Shear Flows. Ithaca, New York.*, 1985.
- A.J. Bowen and D.L. Inman. Edge waves and crescentic bars. *J. Geophys. Res.*, 76(36): 8662–8671, 1971.
- A. Brebner, J.A. Askew, and S.W. Law. The effect of roughness on the mass-transport of progressive gravity waves. In *Proc. of the 10th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, Tokyo*, pages 175–184, 1966.
- I. Brevik. Oscillatory rough turbulent boundary layer. *J. Waterway Port Coastal Ocean Div., ASCE*, 107(WW3):175–188, 1981.
- I. Brøker. Wave-generated ripples and resulting sediment transport in waves. *Series paper No. 36, Inst. of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, ISVA, Techn. Univ. of Denmark.*, 1985.
- S.A. Chowdhury, M. Sato, and A. Ueno. Numerical model of the turbulent wave boundary layer induced by finite amplitude water waves. *Applied. Ocean Res.*, 19:201–209, 1997.
- J.I. Collins. Inception of turbulence at the bed under periodic gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 68:6007–6014, 1963.
- R.A. Dalrymple and G.A. Lanang. Beach cusps formed by intersecting waves. *Bull. Geol. Soc. America*, 87:57–60, 1976.
- A.G. Davenport. The prediction of the response of structures to gusty wind. *Safety of Structures under Dynamic Loading - Preprints of the lectures, C-2.*, 1977.

- A.G. Davies. A model of oscillatory rough turbulent boundary flow. *Est. Coast. Shelf Sci.*, 23(3):353–374, 1986.
- R.G. Dean and R.A. Dalrymple. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991. ISBN 9810204205.
- R.G. Dean and E.M. Maurmeyer. Beach cusps at point reyes and drakes bay beaches, california. In *Proc. of the 17th Int. Conf. of Coastal Eng., ASCE, Sydney, Australia*, pages 863–885, 1980.
- T. Van Doorn. Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves with and without a current. Rep. MI. 423, Delft Hydraulics Lab, 1981.
- S. Elgar and R.T. Guza. Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, (161m):425–448, 1985.
- S. Elgar, T.H.C. Herbers, M. Ohihiro, J. Oltman-Shay, and R.T. Guza. Observations of infragravity waves. *Journal of Geophysical Research*, 1992.
- A. Falqués. On the diffusivity in coastline dynamics. *Geophys. Res. Lett.*, 30(21):2119, 2003.
- A. Falqués and D. Calvete. Large-scale dynamics of sandy coastlines: diffusivity and instability. *J. Geophys. Res.*, 110(C03007), 2005.
- J. Fredsøe and R. Deigaard. *Mechanics of Coastal Sediment Transport*, volume 3 of *Advanced series on Ocean Engineering*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992. ISBN 9810208405.
- B. Gallagher. Generation of surf beat by non-linear wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 49: 1–20, 1971.
- M.C. Good and P.N. Joubert. The form drag of two-dimensional bluff plates immersed in turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 31:547–582, 1968.
- W.D. Grant and O.S. Madsen. Combined wave and current interaction with a rough bottom. *J. Geophys. Res.*, 84:1797–1808, 1979.
- H.P. Greenspan. The generation of edge waves by moving pressure distributions. *J. Fluid Mech.*, 1(6):574–592, 1956.
- R.T. Guza and A.J. Bowen. Finite amplitude stokes edge waves. *J. Mar. Res.*, 34:269–293, 1976.
- R.T. Guza and D.L. Inman. Edge waves and beach cusps. *J. Geophys. Res.*, 80:2997–3012, 1975.
- K. Hasselmann. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. 1. general theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:481–500, 1962.
- T.H.C. Herbers, S. Elgar, and R.T. Guza. Infragravity frequency (0.005-0.05 hz) motions on the shelf. part i: Forced waves. *Journal of Marine Research*, (24):917–927, 1994.
- T.H.C. Herbers, S. Elgar, and R.T. Guza. Infragravity frequency (0.005-0.05 hz) motions on the shelf. part ii: Free waves. *Journal of Physical Oceanography*, (25):1063–1079, 1995.
- K.T. Holland, R.A. Holman, T.C. Lippmann, J. Stanley, and N. Plant. Practical use of video imagery in nearshore oceanographic field studies. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 22(1):81–92, 1997.

- R.A. Holman and A.J. Bowen. Bars, bumps, and holes: Models for the generation of complex beach topography. *J. Geophys. Res.*, 87:457–468, 1982.
- T.W. Hsu and S.H. Ou. On the mass transport of water waves. *Ocean Engng.*, 21(2):195–206, 1994.
- S.J. Jacobs. Mass transport in a turbulent boundary layer under a progressive water wave. *J. Fluid. Mech.*, 146:303–312, 1984.
- J.A. Jiménez and O.S. Madsen. A simple formula to estimate settling velocity of natural sediments. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 129(2):70–78, 2003.
- I.J. Jonsson. Measurements in the turbulent wave boundary layer. In *Proc. 10th IAHR Congress, London*, volume 1, pages 85–92, 1963.
- I.J. Jonsson. On the existence of universal velocity distributions in an oscillatory turbulent boundary layer. Basic Res. Progr. Rep. 12, 2-10, Coastal Engng. Lab and Hydr. Lab., Tech. Univ. of Denmark, 1966.
- I.J. Jonsson and N.A. Carlsen. Experimental and theoretical investigations in an oscillatory rough turbulent boundary layer. *J. Hydraulic Res.*, 14:45–60, 1976.
- P.A. Justesen. Prediction of turbulent oscillatory flow over rough beds. *Coastal Engng.*, 12: 257–284, 1988.
- P.A. Justesen. A note on turbulence calculations in the wave boundary layer. *J. Hydraulic Res.*, 29:699–711, 1991.
- P.A. Justesen and J. Fredsøe. Distribution of turbulence and suspended sediment in the wave boundary layer. Progress report 62, Inst. of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, ISVA, Techn. Univ. Denmark, 1985.
- K. Kajiura. On the bottom friction in an oscillatory current. *Bull. of Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo*, 42:147–174, 1964.
- K. Kajiura. A model of the bottom boundary layer in water waves. *Bull. of Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo*, 46:75–123, 1968.
- J.W. Kamphuis. Friction factor under oscillatory waves. *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng. Div., ASCE*, 101(WW2):135–144, 1975.
- P.D. Komar. *Beach Processes and Sedimentation*. Prentice Hall. New Jersey, 2nd edition, 1998.
- C.E. Long. A simple model for time-dependent stably stratified boundary layers. Spe. Rep. 95, Dept. Oceanogr. Univ. Wash., Seattle., 1981.
- M.S. Longuet-Higgins. Mass transport in water waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser.*, A(245):535–581, 1953.
- M.S. Longuet-Higgins. The mechanics of the boundary-layer near the bottom in a progressive wave. In *Proc. of the 6th Int. Conf. of Coastal Eng., ASCE, Miami, Florida*, pages 184–193, 1958.
- M.A. Losada and J.M. Desiré. Incipient motion on a horizontal granular bed in non-breaking water waves. *Coast. Eng.*, 9:357–370, 1985.

- A.A. Minzoni and G.B. Whitham. On the excitation of edge waves on beaches. *J. Fluid Mech.*, 79(Part 2):273–287, 1977.
- W.H. Munk, F.E. Snodgrass, and G.F. Carrier. Edge waves on the continental shelf. *Science*, 123:127–132, 1956.
- L.A. Mysak. Topographically trapped waves. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 12:45–76, 1980.
- H. Nakagawa and I. Nezu. Experimental investigation on turbulent structure of backward-facing step flow in an open channel. *J. Hydr. Res.*, 25(1):67–88, 1987.
- I. Nezu and H. Nakagawa. Turbulent structure of backward-facing step flow and coherent vortex shedding from reattachment in open-channel flows. In *Turbulent shear flows 6; International Symposium, 6th, Toulouse, France, Sept. 7-9, 1987, Selected Papers (A89-52943 23-34)*. Berlin and New York, Springer-Verlag, 1989, p. 313-337., pages 313–337, 1989.
- M. Ortega-Sánchez. *Procesos hidrodinámicos y sedimentarios en formas litorales de gran escala*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2004. 247 pp.
- M. Ortega-Sánchez, M.A. Losada, and A. Baquerizo. On the development of large-scale cusped features on a semi-reflective beach: Carchuna Beach, Southern Spain. *Mar. Geol.*, 198(3-4):209–223, 2003.
- M. Ortega-Sánchez, M.A. Losada, and A. Baquerizo. Reply to Comment on “On the development of large-scale cusped features on a semi-reflective beach: Carchuna Beach, Southern Spain” by A. Ashton and A. Brad Murray. *Mar. Geol.*, 206:285–288, 2004.
- V.C. Patel and J.Y. Yoon. Applications of turbulence models to separated flow over rough surfaces. *J. Fluids Engineering, ASME*, 117:234–241, 1995.
- A. Payo, A. Baquerizo, and M.A. Losada. Uncertainty assesment: application to the shoreline. *Journal of hydraulic research (in press)*, 2007.
- R. Pelnard-Considère. Essai de theorie de lévolution des formes de rivage en plages de sable et de galets. In *4th Journees de l’Hydraulique, Les Energies de la Mer, Paris, Société Hydrotechnique de France*, volume III, 1956.
- J. Pethick. *An introduction to coastal geomorphology*. Edward Arnold. Baltimore, 1984.
- O.M. Phillips. On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.*, 2:417–445, 1957.
- L. Prandtl. Übbber die ausgebildete turbulenz. In *Verhandlungen des II. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Zürich 1926, Füssli 1927*, pages 62–75, 1926.
- P.G. Saffman. A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London*, A317: 417–433, 1970.
- P.G. Saffman and P.C. Wilcox. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 12:541–546, 1974.
- A. Sana, H. Tanaka, and T. Suzuki. Experimental and numerical study of irregular wave boundary layers on a rough bottom. In *Proc. of the 29th Int. Conf. of Coastal Eng., ASCE, Lisboa, Portugal*, pages 521–528, 2004.

- H.A. Schäffer. *Infragravity water waves induced by short-wave groups*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1990. 168 pp.
- A.D. Short. *Handbook of beach and shoreface morphodynamics*. John Wiley and Sons. Chichester, 2000.
- E. Sánchez-Badorrey. *Procesos morfodinámicos en la proximidad de diques de abrigo y su influencia en la operatividad portuaria*. PhD thesis, Universidad de Granada, 2004. 190 pp.
- R.J. Sobey. Analytical solution of non-homogeneous wave equation. *Coastal Engineering Journal*, 44(1):1–23, 2002a.
- R.J. Sobey. Analytical solutions for storm tide codes. *Coastal Engineering*, 46:213–231, 2002b.
- G.G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. volume 8, pages 441–455. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1847. Reprinted in *Math. Phys. Papers*. Cambridge Univ. Press, London, Vol 1, 314–326.
- G.G. Stokes. On the effects of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9, 1855.
- H. Tanaka. Bottom boundary layer under nonlinear wave motion. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, 115(1), 1989.
- J. Trowbridge and O.S. Madsen. Turbulent wave boundary layers. 1 - model formulation and first-order solution. *J. Geophys. Res.*, 89(C5):7989–7997, 1984a.
- J. Trowbridge and O.S. Madsen. Turbulent wave boundary layers. 2 - second-order theory and mass-transport. *J. Geophys. Res.*, 89(C5):7999–8007, 1984b.
- F. Ursell. Edge waves on a sloping beach. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 214, pages 79–97, 1952.
- G. Vittori and P. Blondeaux. Mass transport under sea waves propagating over a rippled bed. *J. Fluid Mech.*, (314):247–265, 1996.
- B.T. Werner and T.M. Fink. Beach cusps as self-organized patterns. *Science*, pages 968–971, 1993.
- L.D. Wright and A.D. Short. Morphodynamic variability of surf zones and beaches. *Mar. Geol.*, 56:93–118, 1984.