EL PRINCIPIO DE INVARIANCIA GAUGE EN LA GRAVITACIÓN Y LA MEZCLA DE INTERACCIONES

Eduardo Sánchez Sastre
Instituto de Astrofísica de Andalucía (CSIC)
Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada

Tesis Doctoral
2007

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Eduardo Sánchez Sastre
D.L.: Gr. 2555 - 2007
ISBN: 978-84-338-4658-7

La presente memoria titulada “El Principio de Invariancia Gauge en la Gravitación y la Mezcla de Interacciones” constituye la tesis doctoral que he realizado bajo la dirección de Víctor Aldaya Valverde, Investigador Científico del CSIC, y la presento para optar al grado de doctor en Ciencias Físicas.

Granada, a 30 de octubre de 2007.

Fdo. Eduardo Sánchez Sastre.

Víctor Aldaya Valverde, Investigador Científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en el Instituto de Astrofísica de Andalucía, autoriza la presentación de esta Tesis para su defensa y mantenimiento de acuerdo con lo previsto en el Real Decreto 56/2005, de 21 de enero, emitiendo el siguiente informe:

La memoria que presenta Eduardo Sánchez Sastre para optar al grado de doctor recoge con precisión el trabajo realizado bajo mi tutela en relación con el título "El Principio de Invariancia Gauge en la Gravitación y la Mezcla de Interacciones" y cuenta con mi entera aprobación.

Y para que así conste y surta sus efectos en el expediente correspondiente, presento ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada la referida Tesis.

Granada, a 30 de octubre de 2007.

Fdo. Víctor Aldaya Valverde.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de la Relatividad General (TRG) de Einstein desde su formulación a comienzos del siglo XX, a pesar de ciertos problemas internos (e.g. el problema de la energía del campo gravitatorio), se consolidó como la teoría (clásica) más precisa que describía la interacción gravitatoria constituyendo en sí misma una teoría completa que difícilmente podía imaginarse modificada. Este hecho contribuyó a que los esfuerzos de las investigaciones se invirtieran en la incipiente teoría cuántica, y los campos de la física nuclear y de partículas comenzaron a adquirir un interés generalizado. La situación no cambiaría hasta los años 60, época en la que descubrimientos como el de la radiación cósmica de fondo (1964), los cuásares y los púlsares (1967) así como el intento de descubrir radiación gravitatoria hicieron que la TRG volviera a examinarse a la luz de la floreciente nueva fenomenología.

Por otra parte, culminando los primeros pasos dados por Weyl [1] hacia 1918, en 1954 Yang y Mills [2] sentaron las bases del *Principio de invariancia gauge* y del *Principio de Acoplamiento Mínimo* en sus trabajos sobre el isospin. Poco después, Ryoyu Utiyama [3] en 1956 generalizó el procedimiento de Yang-Mills a grupos de Lie arbitrarios asociados a simetrías internas, asentando así el esquema general que describe la formulación de las interacciones fundamentales internas y, asimismo, esbozó su extensión a grupos de simetrías espacio-temporales.

Nos gustaría indicar que la noción de grupo de Lie surge a finales del siglo XIX en el ámbito de estudio de las ecuaciones diferenciales como una valiosa herramienta para describir las simetrías de estas ecuaciones como un grupo continuo de transformaciones. No obstante, el significado de los grupos de Lie con el tiempo ha superado su mera utilidad a la hora de resolver ecuaciones complicadas y desde el trabajo de Utiyama ha quedado establecida su relevancia en la estructura simétrica de las teorías gauge.

De acuerdo con el Principio de Invariancia Gauge, un campo de materia ψ descrito por un Lagrangiano invariante bajo un cierto grupo de simetría G, que actúa unitariamente sobre sus estados internos[1], puede extender esta simetría *rígida* original a una simetría *local* o "gauge" , generada por el grupo de "corrientes" $G(\vec{x}, t)$, a cambio de introducir en la teoría nuevos potenciales A_μ, denominados campos "compensadores" o gauge. El acoplamiento específico a los campos de materia resulta de corregir todas las derivadas de ψ que aparezcan en el Lagrangiano con un término aditivo de la forma $qA_\mu\psi$ donde q es una constante de acoplamiento. Esta forma particular de introducir la interacción constituye el llamado Principio de Acoplamiento Mínimo.

El contexto matemático donde se describe la teoría gauge de interacciones asociadas con simetrías internas está basado en el formalismo Lagrangiano, definido sobre el fibrado de los 1-jets $J^1(E)$ de un fibrado E sobre el espacio-tiempo de Minkowski M. En el Capítulo 2 se presentan los aspectos básicos del cálculo de variaciones sobre fibrados jets, prestando especial atención a todas las nociones que son necesarias en el desarrollo del presente trabajo.

Como es bien sabido, el proceso mediante el que se promueve una simetría rígida subyacente dada a local[2] requiere la introducción de una ley de derivación o conexión sobre el módulo $\Gamma(E)$ de las secciones de E. Dicha conexión se interpreta como un potencial que proporciona la correspondiente interacción gauge. Esta construcción culmina en el Teorema de Utiyama[3], que es el objeto central del Capítulo 3 de esta memoria, estableciendo que el nuevo Lagrangiano asociado con los campos de materia que resulta después de sustituir las derivadas ordinarias por derivadas covariantes en el Lagrangiano de partida es invariante bajo el grupo local, asumiendo que los campos compensadores transforman como conexiones. Con respecto a la dinámica de los potenciales gauge, el teorema también establece que cualquier función escalar del tensor de curvatura es un Lagrangiano invariante gauge.

La invariancia gauge interna permite asociar interacciones con grupos de simetría, hecho fundamental de cara a la unificación de las fuerzas fundamentales de la Naturaleza. Desde este punto de vista, el problema de la unificación de las interacciones básicas se convierte en el problema de encontrar grupos de simetría rígida que contengan subgrupos de modo no trivial,

[1] Esto es, $\psi'^\alpha = U^\alpha{}_\beta \psi^\beta$, donde U es una representación matricial unitaria del grupo de Lie de simetría del sistema.

[2] En términos matemáticos dicho proceso supone extender la correspondiente álgebra de Lie de partida considerando su producto tensorial por el álgebra de funciones reales diferenciables (C^∞) definidas sobre M.

[3] Este término parece haberse consolidado más recientemente en la bibliografía de carácter más estrictamente matemático [4, 5].

es decir, no como producto directo. Así pues, este contexto sirvió como escenario para la unificación de la interacción electromagnética y débil en el modelo de Weinberg-Salam (1967)[4] mediante el producto semidirecto de grupos $SU(2) \otimes U(1)$ (módulo Z_2) y es la pieza clave en los modelos de *Gran Unificación* que incluyen la interacción fuerte. No obstante, la elección final de un "grupo de Gran Unificacion" para simetrías internas, tales como $SU(5)$ [6] o $SU(10)$ [7], todavía es una cuestión abierta, más bien de naturaleza fenomenológica.

En definitiva, se puede afirmar que durante el siglo XX se ha logrado un gran avance en la comprensión de los procesos físicos fundamentales. Todos los fenómenos observados se pueden reducir a cuatro fuerzas fundamentales. Tres de ellas, la electromagnética, la débil y la fuerte constituyen los pilares del Modelo Estándar y se describen mediante teorías de campos gauge, que son corroboradas por las experiencia. De hecho, la teoría de la electrodinámica cuántica es el modelo más detalladamente elaborado de todas las teorías de campos. Por su parte, la revisión de los modelos de la interacción débil ha permitido eliminar la interacción de cuatro fermiones, introducida fenomenológicamente, adquiriendo pues una formulación elegante en el marco de las teorías gauge, de modo que la predicción de las corrientes débiles neutras y de los números cuánticos de los hadrones es consecuencia de la concordancia de los datos experimentales con la invariancia gauge. En relación con la interacción fuerte, la cromodinámica cuántica ofrece la fundamentación más apropiada de los modelos fenomenológicos de quarks y proporciona la posibilidad de explicar el fenómeno de la libertad asintótica en el contexto de la teoría cuántica de campos.[5] La cuarta fuerza, la gravedad, está descrita por la TRG, que es una teoría muy diferente a las anteriores tanto desde el punto de vista conceptual como por las evidencias fenomenológicas existentes. De hecho, a pesar de los esfuerzos, la TRG todavía no se ha logrado reconciliar satisfactoriamente con la teoría cuántica, y, hasta el momento, los métodos de cuantización usuales han fracasado en la formulación de una teoría consistente de gravedad cuántica.[6] Además, experimentalmente, la TRG sólo se ha podido testar directamente a escalas muy superiores a la de Planck (longi-

[4]Aproximadamente, unos cien años después de que Maxwell consiguiera unificar las ramas de la electricidad y el magnetismo en su teoría del electromagnetismo.

[5]No así ocurre, sin embargo, con la explicación del confinamiento de quarks, cuestión que todavía no está muy clara.

[6]Las aproximaciones más recientes a la cuantización de la gravedad están basadas en la suposición de que la TRG es un límite a bajas energías de una teoría más fundamental subyacente, como la Teoría de Cuerdas, la Gravedad Cuántica de Lazos, etc. También existe la posibilidad de que la gravedad sea esencialmente una teoría no cuantizable, y, en tal caso, la TRG sería una teoría emergente que provendría de una teoría subyacente desconocida.

tudes mayores de 1 mm). Estas dificultades técnicas obviamente suponen un problema adicional, a saber, la unificación de la gravitación y las interacciones internas. En la actualidad la búsqueda de una teoría que describa las cuatro interacciones fundamentales a partir de un único principio es una cuestión abierta. Así pues, los trabajos pioneros de la teoría gauge de la gravitación surgieron como un intento natural de formular la interacción gravitatoria en el marco de las teorías gauge de modo análogo al resto de las interacciones fundamentales. El trabajo de Utiyama de 1956, además de sus logros en lo que respecta a las interacciones internas, aportó el primer modelo de teoría gauge de gravedad, basándose en el grupo de Lorentz, poniendo en pie de igualdad a la gravitación y el resto de interacciones fundamentales. Sin embargo, existían ciertas dificultades, entre las que hay que destacar el hecho de que las tétradas con las que se construye el tensor métrico fueron introducidas por Utiyama *ad hoc* mediante la consideración de un sistema de coordenadas curvilíneas sin atender al principio de invariancia gauge, que prescribe la forma precisa en que es necesario introducir los campos gauge. Fue precisamente esta peculiaridad la que motivó a Kibble a construir su teoría gauge del grupo de Poincaré (1961) [8] con el fin de corregir la "deficiencia" de la teoría de Utiyama, aunque Kibble tampoco trata en pie de igualdad a los potenciales translacionales y a los Lorentzianos. También hay que resaltar que mientras que Utiyama anula a mano las componentes no simétricas de la conexión tal y como ocurre en la TRG, en la teoría de Kibble la conexión es no simétrica y, por tanto, admite torsión además de curvatura. El trabajo de Kibble supuso la vuelta a ideas tales como las de Cartan, quien hacia 1922 había ya propuesto un modelo gravitatorio caracterizado por una conexión no simétrica dando lugar a la *geometría de Riemann-Cartan*, caracterizada por curvatura y torsión[7]. Tras los pioneros trabajos de Utiyama y Kibble, se ha dedicado un gran esfuerzo por tratar de alcanzar una comprensión clara de la gravedad como teoría gauge (e.g. [9]- [34]), aunque completamente desconectada de las otras interacciones.

En esta memoria revisamos la formulación del Principio de Acoplamiento Mínimo incluyendo el caso en que el grupo de simetría rígida también actúe sobre el espacio-tiempo, permitiendo así la generalización del Teorema de Utiyama para simetrías gauge espacio-temporales (Capítulo 4). En este proceso, como veremos, la interpretación (válida en el caso de simetrías internas) de los bosones vectoriales mediadores de la interacción como conexiones deja de ser tan nítida. Este contexto permite la revisión de las teorías gauge de

[7]Es interesante notar que Cartan adicionalmente intuía que la fuente de dicha torsión estaría relacionada con la densidad de momento angular interno. Sin embargo, en aquella época no se tenía conocimiento del spin y su teoría quedó al margen.

la gravedad en el Capítulo 5, donde se estudian las teorías gravitacionales asociadas a diversas simetrías espacio-temporales locales.

Como se dijo antes, el deseo de construir un esquema unificado de la gravitación y las demás fuerzas fue precisamente lo que despertó el interés de la formulación de la teoría gauge de la gravedad. En este sentido, hay que indicar que Weyl junto con Cartan, Kaluza y Eddington, hacia los años 20 del siglo pasado, fueron los autores de las primeras teorías que trataron el problema de la unificación de la gravedad con otras interacciones. Dicha unficación supondría la mezcla no trivial de un grupo de simetrías espacio-temporales y algún grupo de simetrías internas, pero este hecho está explícitamente prohibido por los llamados teoremas "no-go" debidos a O'Raifeartaigh, Coleman, Mandula, Michel, etc. ([35]- [40]). Estos teoremas establecen que *no existe ningún grupo de Lie de dimensión finita conteniendo al grupo de Poincaré, actuando como difeomorfismos del espacio-tiempo de Minkowski, y a cualquier grupo interno de tipo $SU(n)$, salvo el producto directo.* De hecho, la noción de *supersimetría* fue desarrollada originariamente en los años 70, principalmente por Salam y Strathdee [41], como una salida a los mencionados teoremas "no-go", aunque tal tentativa parece haber resultado infructuosa hasta el momento presente. Sin embargo, existe una manera simple aunque no trivial de salvar tales teoremas, a saber, recurrir a las extensiones de grupos de Lie y a la teoría de representaciones irreducibles de grupos de Lie ordinarios pero de dimensión infinita. En particular, en esta memoria en el Capítulo 6 se reemplaza el grupo de Poincaré por el grupo de simetría espacio-temporal de la partícula cuántica relativista, esto es, la extensión central del grupo de Poincaré por $U(1)$. La simetría propuesta ya ha sido explotada con éxito para describir el problema análogo al de la unificación de la gravedad y el electromagnetismo [42] en el contexto de la mecánica clásica de una partícula usando las técnicas de la llamada *Cuantización Sobre Grupos* (CSG) [43]. La CSG originalmente fue formulada como un esquema de cuantización grupo-teórico designado a obtener la dinámica cuántica de un sistema a partir de un grupo de Lie centralmente extendido. No obstante, este método también describe de modo natural el límite clásico en la formulación de Hamilton-Jacobi.

A pesar del éxito de la teoría gauge en la descripción de muchos aspectos del Modelo Estándar (ME) de partículas, uno de los problemas fundamentales que aún persiste hoy día es la ausencia de un mecanismo dinámico de generación de masa. Como es bien sabido, la implementación de la invariancia gauge implica la existencia de campos gauge sin masa. Si en el Lagrangiano de la teoría se introducen explícitamente términos de masa para los bosones gauge entonces se viola la invariancia gauge y, en consecuencia, el comportamiento de la teoría para altas energías deja ser renormalizable.

La salida del ME a este problema pasa por la consideración de la posibilidad del fenómeno de *rotura espontánea de la simetría* descrita por el Mecanismo de Higgs-Kibble. Sin embargo, la extrapolación del mecanismo de ruptura de la simetría, propio de la física de la materia condensada no relativista[8], al caso de la interacción electrodébil no parece obvia en un principio, más aún teniendo en cuenta la ausencia de evidencias fenomenológicas a favor de la existencia del bosón de Higgs. Consecuentemente, uno de los propósitos de esta memoria es la formulación Lagrangiana de la teoría gauge de modo que la masa de los campos gauge surja de manera "natural" preservando la invariancia gauge. En este sentido, el Capítulo 7 se dedica a la construcción de la correspondiente versión del Teorema de Utiyama incorporando la dinámica del propio grupo de gauge como alternativa al mecanismo de Higgs, de modo que se generaliza el llamado Modelo de Stueckelberg de la Electrodinámica [44] al caso de simetrías no Abelianas. En esta formulación el mecanismo de generación de masa no exige la existencia del bosón de Higgs y el modo específico para dotar de masa al resto de las partículas está basado en la mezcla no trivial de la gravedad y el electromagnetismo. Asimismo se aplica el esquema seguido para el caso de simetrías espacio-temporales, lo cual, como argumentaremos, puede tener cierta relevancia para dar cuenta de cierto sector de la *materia oscura* del Universo. En nuestra aproximación se codifica la información externa esencial en el grupo de simetría, y, por tanto, los parámetros del grupo de gauge, que vendrán descritos por Lagrangianos de tipo modelo σ no lineal ([45]- [47]), adquirirán contenido dinámico. La teoría se construye sobre la estructura matemática asociada a la noción de *grupo de los jets del grupo de gauge*. En este contexto, contrariamente a como ocurre en la teoría estándar con rotura espontánea de la simetría, no será necesario suponer de entrada la existencia de campos escalares de materia con masa imaginaria gobernados por un potencial específico.

Merece la pena hacer notar que la incorporación de los parámetros de grupo con carácter dinámico en algunos modelos ya ha sido considerada[9]. Especialmente destacamos que la relevancia de los parámetros de grupo en la teoría cuántica se hace más patente en el método de la Cuantización sobre Grupos. En la CSG cuantizar (no perturbativamente) un sistema físico consiste en obtener las representaciones irreducibles unitarias del correspondiente grupo de Lie (o en su caso del álgebra de Poisson) que describe la simetría del sistema. Es importante enfatizar que, a diferencia de la Cuanti-

[8]Recuérdese que la rotura espontánea de la simetría es la clave de la explicación del efecto Meissner.

[9]Por ejemplo, en [48] la Mecánica Euleriana de Fluidos convencional se extiende incorporando las variables de grupo con el fin de lograr describir un estado de plasma de quarks y gluones producido como resultado de colisiones a alta energía de núcleos pesados [49].

zación Canónica, en este contexto grupo-teórico no se asume la existencia de un sistema físico clásico de partida que resolver y posteriormente cuantizar. Por lo tanto, algunos de los problemas que surgen al aplicar las técnicas de la Cuantización Canónica estándar, tales como la rotura espontánea de una simetría gauge o la aparición de *anomalías*, dejan de ser vistos como tales problemas desde el punto de vista de la CSG y, de hecho, se convierten en situaciones no extrañas en el marco de la cuantización grupo-teórica.

En el Capítulo 8 se generaliza la noción de grupo de los jets del grupo de gauge para estudiar la gravedad. En este caso, el nuevo enfoque se basa en la idea de *grupo de los jets del grupo de difeomorfismos* de la variedad espacio-temporal. En particular, se formula la Teoría de la Relatividad General en su versión conocida como *Teleparalelismo*.

Durante el desarrollo de esta memoria se han realizado los trabajos [50]-[56].

Capítulo 2

Formalismo Lagrangiano sobre fibrados jet

En este capítulo se presentan las nociones básicas de fibrados jets que se requieren para el resto de capítulos de esta memoria. El concepto de *fibrado jet* fue introducido por Ehresmann [57] (otras referencias relevantes a este respecto son las siguientes [58–63]). Originariamente, los fibrados jets fueron concebidos como construcciones matemáticas donde es posible escribir ecuaciones diferenciales sobre las secciones de un fibrado de modo invariante. Más recientemente, los fibrados jets han resultado ser de un gran interés en el cálculo de variaciones. De hecho, la teoría clásica de campos puede ser formulada sobre el *fibrado de 1-jets* $J^1(E)$ de un fibrado vectorial

$$E \xrightarrow{\pi} M \tag{2.1}$$

sobre el espacio-tiempo de Minkowski o cualquier otra variedad espacio-temporal, usualmente una variedad orientada de dimensión 4 y volumen de integración ω (véase, por ejemplo, [58,64–66]). Las secciones de E, i.e. aplicaciones φ de la variedad base M en el espacio total E de modo que $\pi \circ \varphi = I_M$, constituyen los campos, y el fibrado de 1-jets generaliza a la teoría de campos el espacio de definición de los Lagrangianos de la Mecánica Analítica ordinaria, esto es, $T(R^3) \times R \to R$, donde R está parametrizado por el tiempo t y $T(R^3)$ por $(q^i, \dot{q}^j)$. Comenzaremos con la construcción formal del fibrado jet de un fibrado genérico E, no necesariamente un fibrado vectorial. [1]

[1] La notación de índices que usaremos a lo largo de esta memoria es la siguiente: emplearemos la primera mitad del alfabeto griego $\alpha, \beta, \gamma, ...(= 1, ..., N)$ para denotar las componentes internas de los campos de materia, la segunda mitad $\mu, \nu, \lambda, ...(= 0, ..., 3)$ denotará los índices espacio-temporales. Finalmente, usaremos la primera mitad del alfa-

2.1. Fibrado de los 1-jets $J^1(E)$

Consideremos un fibrado diferenciable E,

$$\pi : E \to M \ , \tag{2.2}$$

y nombremos $\Gamma_x(E)$ al espacio de todas las secciones locales de E cuyo dominio contiene el punto $x \in M$. Se define el *jet de primer orden*, $J^1_x(E)$, de secciones en el punto x como la clase de equivalencia de aquellas secciones que están relacionadas por la relación (de equivalencia) $\stackrel{1}{\sim}$ dada por:

$$\psi \stackrel{1}{\sim} \psi' \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \psi(x) & = & \psi'(x) \\ \partial_\mu \psi(x) & = & \partial_\mu \psi'(x). \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Consideremos el conjunto $J^1(E) \equiv \bigcup_x J^1_x(E)$. La proyección cartesiana

$$(\psi, x) \mapsto x \tag{2.4}$$

define una proyección natural

$$\pi^1 : J^1(E) \to M \tag{2.5}$$

que proporciona a $J^1(E)$ la estructura de fibrado sobre M. $J^1(E)$ es llamado *fibrado de 1-jets.* [2]

Localmente, E está parametrizado por las coordenadas $(x^\mu,\ \varphi^\alpha)$ definidas sobre $\pi^{-1}(U) \subset E$, $U \subset M$. Para el conjunto de secciones locales $\Gamma(\pi^{-1}(U))$ la relación de equivalencia $\stackrel{1}{\sim}$ puede ser expresada en la forma

$$(\psi, x) \stackrel{1}{\sim} (\psi', x') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' \\ \varphi^\alpha(\psi(x)) & = & \varphi^\alpha(\psi'(x)) \\ \partial_\mu \varphi^\alpha(\psi(x)) & = & \partial_\mu \varphi^\alpha(\psi'(x)). \end{array} \right. \tag{2.7}$$

beto latino entre paréntesis $(a), (b), (c), ...(= 1, ..., \mathrm{dimG})$ para etiquetar los índices de las álgebras de Lie. Enfatizamos que aquí los paréntesis en los índices no indican simetrización o antisimetrización. Se omitirán los paréntesis al denotar las componentes en el grupo de cualquier objeto de la teoría.

[2]Si E es el fibrado trivial se puede definir el fibrado de 1-jets como el espacio cociente

$$J^1(E) \equiv \frac{\Gamma(E) \times M}{\stackrel{1}{\sim}}, \tag{2.6}$$

siendo $\Gamma(E)$ el espacio de secciones globales de E (nótese que para fibrados triviales, las secciones locales coinciden con las secciones globales). Esta definición es la esencia de los conceptos de *1-jets del grupo de gauge* y *1-jets del grupo de difeomorfismos*, que serán introducidos más tarde.

Definamos las siguientes funciones sobre $\Gamma(\pi^{-1}(U)) \times U$:

$$\begin{aligned} \varphi^\alpha : (\psi, x) &\mapsto \varphi^\alpha(\psi(x)) \\ \varphi^\alpha_\mu : (\psi, x) &\mapsto \partial_\mu \varphi^\alpha(\psi(x)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dichas funciones son compatibles con la relación de equivalencia $\overset{1}{\sim}$ y, por tanto, pasan al cociente definiendo las correspondientes funciones sobre $J^1(\pi^{-1}(U))$, también denotadas como $(\varphi^\alpha,\ \varphi^\alpha_\mu)$. Por $(x^\mu, \varphi^\alpha,\ \varphi^\alpha_\mu)$ denotaremos un sistema de coordenadas apropiadas para $J^1(\pi^{-1}(U))$.[3]

2.2. Principios variacionales

2.2.1. Densidad Lagrangiana, extensiones jet y funcional de acción

El punto de partida de la formulación geométrica de los principios variacionales es la definición de la densidad Lagrangiana como una función real

$$\mathcal{L} : J^1(E) \to R \tag{2.9}$$

sobre el fibrado $J^1(E)$ de un fibrado vectorial E. Por tanto, $\mathcal{L}$ depende localmente de los argumentos $(x^\mu, \varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)$, aunque usualmente, debido a la invariancia Poincaré, $\mathcal{L}$ no dependerá explicitamente de x^μ.

Sea φ una sección local de E sobre $U \subset M$. La *extension 1-jet* de φ, $j^1(\varphi) \equiv \overline{\varphi}$, es la única sección de $J^1(E)$ tal que j^1 es una inyección local de $\Gamma(E)$ en $\Gamma(J^1(E))$ y

$$\theta^\alpha \mid_{j^1(\varphi)(M)} = 0 \ , \tag{2.10}$$

donde θ^α son las *1-formas de estructura* sobre $J^1(\pi^{-1}(U))$ definidas por

$$\theta^\alpha = d\varphi^\alpha - \varphi^\alpha_\mu dx^\mu. \tag{2.11}$$

Dado un campo de vectores arbitrario X sobre E, $X \in \Gamma(T(E)) \equiv \mathcal{X}(E)$, con expresión local

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \ , \tag{2.12}$$

[3]Como es usual, y dado que no debería surgir confusión, no se distinguirá entre φ^α, $\varphi^\alpha(\psi)$ o ψ^α.

su extensión 1-jet a través de la inyección j^1 es el único campo de vectores $j^1(X) \equiv \bar{X}$ sobre $J^1(E)$ tal que $\bar{X}$ proyecta sobre X, esto es,

$$\bar{X} = X + \overline{X}^{\alpha}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} \,, \tag{2.13}$$

y es una *transformación de contacto infinitesimal*, i.e.

$$L_{\overline{X}} \theta^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta} \theta^{\beta} \,, \tag{2.14}$$

donde $L_{\overline{X}}$ es la derivada de Lie con respecto al campo de vectores $\overline{X}$. Esta segunda condición representa la estabilidad del sistema de Pfaff $\{\theta^{\alpha}\}$ bajo $\overline{X}$ y garantiza que las imágenes de extensiones 1-jets son también extensiones 1-jets. Este requerimiento permite determinar explícitamente $\overline{X}$ así como C^{α}_{β} (véase Apéndice 10.1):

$$C^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} - \varphi^{\alpha}_{\mu} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \varphi^{\beta}}, \tag{2.15}$$

$$\overline{X}^{\alpha}_{\mu} = \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \varphi^{\alpha}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} - \varphi^{\alpha}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \varphi^{\beta}} \right) \varphi^{\beta}_{\mu} \,. \tag{2.16}$$

Hay que remarcar que j^1 es un isomorfismo entre álgebras de Lie definido por los campos sobre E y sus imágenes sobre $J^1(E)$, ya que j^1 es una inyección y

$$j^1([X,Y]) = [j^1(X), j^1(Y)], \tag{2.17}$$

como se puede comprobar por computación directa. Gracias a esta propiedad las relaciones estructurales entre los generadores sobre E no se pierden en el proceso de extender su acción a $J^1(E)$.

Dada una densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$, el funcional de acción $\mathcal{S}$ es la aplicación de $\Gamma(E)$ en R definida por

$$\mathcal{S} : \Gamma(E) \to R$$

$$\mathcal{S}(\varphi) = \int_{j^1(\varphi)(M)} \mathcal{L}(j^1(\varphi)) \pi^{1^*} \omega \,, \tag{2.18}$$

$\forall \varphi \in \Gamma(E)$, donde ω (= $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ sobre el espacio-tiempo de Minkowski) es la 4-forma de volumen sobre M y π^{1^*} su pull-back a $J^1(E)$ (aunque en lo sucesivo se denotará sencillamente ω)[4]. Para una exposición

[4]Como ya se mencionó, M es una variedad orientable tetradimensional sin frontera con la condición asintótica de que los campos se anulan cuando $x \to \infty$ (e.g. espacio-tiempo de Minkowski). Sin embargo, los resultados aquí presentados podrían ser extendidos a otras variedades base.

más rigurosa de las definiciones y propiedades de los funcionales variacionales que son introducidos en este capítulo pueden consultarse las referencias [58, 61] (véase también [64, 66]).

2.2.2. Principio de Hamilton ordinario

El Principio de Hamilton Ordinario establece que las secciones críticas (trayectorias) del problema variacional son las soluciones $\varphi \in \Gamma(E)$ de

$$(\delta \mathcal{S})_{j^1(\varphi)}(X) \equiv \int_{j^1(\varphi)(M)} L_{\overline{X}}(\mathcal{L}(j^1(\varphi))\omega) = 0\,,$$

donde X es un campo de vectores arbitrario sobre E.

Como es bien sabido, este principio conduce a las usuales ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} - \frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}\right) = 0\,. \tag{2.19}$$

2.2.3. Principio de Hamilton modificado

Quisiéramos terminar este breve Capítulo con la introducción de algunas nociones relativas a la generalización del cálculo variacional mediante el llamado *Principio de Hamilton Modificado*, de acuerdo con el cual se varían secciones de $J^1(E)$. Si bien este punto de vista no es necesario para la presente memoria, este formalismo es ciertamente útil cuando se consideran jets de orden r arbitrario en el tratamiento de teorías de campos que dependen de derivadas de orden superior o para el estudio de teorías que presentan un carácter no local [64]. Se define la *acción modificada de Hamilton*

$$\mathcal{S}^1 : \Gamma(J^1(E)) \to R \tag{2.20}$$

como:

$$\mathcal{S}^1(\varphi^1) = \int_{\varphi^1(M)} \Theta_{PC}\,, \tag{2.21}$$

donde Θ_{PC}, la forma de Poincaré-Cartan(-Hilbert), es una $n \equiv \dim M$ forma que generaliza la de la Mecánica $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(dq^i - \dot{q}^i dt) + L dt$ ($= p_i dq^i - H dt$, si se da la condición de regularidad, i.e. $det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}) \neq 0$):

$$\begin{aligned} \Theta_{PC} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}(d\varphi^\alpha - \varphi^\alpha_\nu dx^\nu) \wedge \theta_\mu + \mathcal{L}\omega \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} d\varphi^\alpha \wedge \theta_\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} \varphi^\alpha_\mu - \mathcal{L} \right) \omega \,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $\theta_\mu \equiv i_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \omega$, siendo $i_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}$ el *roducto interior* con respecto a $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. En el caso de regularidad, i.e. $det(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_\nu}) \neq 0$, $\Theta_{PC} = \pi^\mu_\alpha d\varphi^\alpha \wedge \theta_\mu - \mathcal{H}\omega$ donde $\mathcal{H} = \pi^\mu_\alpha \varphi^\alpha_\mu - \mathcal{L}$ es el Hamiltoniano *covariante* [5] y $\pi^\mu_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}$ representan los n momentos *covariantes*.

El Principio de Hamilton Modificado establece que las trayectorias físicas son aquellas secciones de $J^1(E)$, puntos de $\Gamma(J^1(E))$, donde la derivada de la acción (2.21) es cero:

$$\begin{aligned} (\delta \mathcal{S}^1)_{\varphi^1}(X^1) &\equiv \int_{\varphi^1(M)} L_{X^1} \Theta_{PC} = 0 \,, \quad \forall X^1 \in \mathcal{X}(J^1(E)) \\ &\Rightarrow \quad i_{X^1} d\Theta_{PC}|_{\varphi^1} = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Las ecuaciones (2.23) generalizan las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.19) y, en el caso de regularidad, las reproducen y proporcionan las ecuaciones de Hamilton *covariantes* [66]:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\mu_\alpha} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu} \,, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^\alpha} = -\frac{\partial \pi^\mu_\alpha}{\partial x^\mu} \,. \tag{2.24}$$

[5] En este contexto, *covariante* se refiere al hecho de ser escalar o en general un tensor bajo isometrías de M. En particular, para el espacio-tiempo de Minkowski deberiamos hablar de covariancia Lorentz.

Capítulo 3

Teoría gauge para simetrías internas

Los orígenes de la teoría gauge se remontan hasta la segunda mitad del siglo XIX. Desde un principio ya se observó la invariancia de las ecuaciones de Maxwell bajo transformaciones del potencial vector electromagnético de la forma

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f(x) \ , \tag{3.1}$$

donde f es una función arbitraria de la posición. Para cada punto x del espacio-tiempo M, estas transformaciones forman el grupo Abeliano local $U(1)(M)$, conocido como el grupo de las fases locales $e^{if(x)}$, con parámetro continuo $f(x)$. Bajo la transformación (3.1) los campos físicos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ quedan inalterados. Este rasgo resulta ser precisamente la caracterización más general que se tiene del concepto de simetría gauge, a saber, aquella transformación que preserva la variedad de soluciones punto a punto. No obstante, como se explicará luego, en el lenguaje estándar de la teoría gauge, una simetría gauge se asocia con el grupo de las aplicaciones definidas sobre el espacio-tiempo con valores en un grupo de Lie G. Con frecuencia, transformaciones gauge en este sentido conducen directamente a simetrías gauge en el sentido descrito primeramente.

Sin embargo, en un principio esta simetría de las ecuaciones de Maxwell fue considerada sin más como una simetría accidental y se relegó a una mera curiosidad. Fue Weyl quien en 1918 acuñó por primera vez el término *gauge* (escala o calibre; *Eich* en alemán) en su intento por lograr la unificación de la gravitación y el electromagnetismo [1]. Del mismo modo que el campo gravitatorio se introduce en la teoría de la Relatividad General con objeto de garantizar la covariancia general de la teoría, Weyl trató de geometrizar el campo electromagnético considerando la invariancia de su teoría bajo el grupo de transformaciones de escala locales. No obstante, la teoría de Weyl no condujo a la descripción del electromagnetismo sino a la llamada teoría conforme de la gravitación. Así pues, en un principio la noción de transformación gauge se identificó con transformaciones de escala dependientes del punto del espacio-tiempo pero en 1941 Pauli [67] generalizó el enfoque de Weyl para el grupo $U(1)$, es decir, en lugar de transformaciones de escala consideró transformaciones de fase locales, $\varphi \to exp(ief(x))\varphi$, consiguiendo esta vez con éxito la introducción del campo electromagnético[1]. Este paso supuso una primera aproximación hacia el significado actual de lo que se entiende por teoría gauge. Sin embargo, este modo de introducir el campo electromagnético no aportó esencialmente nada nuevo en la descripción de la electrodinámica y, por tanto, no se le dio especial importancia. El primer ejemplo de teoría gauge no abeliana apareció en 1954 en un trabajo de Yang y Mills donde se generaliza el principio de invariancia gauge de la interacción entre cargas eléctricas al caso de la interacción entre spines isotópicos. Poco después, Utiyama presentó en 1956 un trabajo donde generalizó el procedimiento introducido por Yang y Mills aportando una prescripción especifica para formular las interacciones asociadas a grupos de Lie arbitrarios de simetría interna, es decir, grupos que actúan sólo sobre las componentes internas de los campos de materia dejando fijo el espacio-tiempo. Este esquema está basado en el llamado Principio de Invariancia Gauge (o local) (PIG) mediante el que se generalizó la noción de transformacion gauge de la electrodinámica al caso de simetrías internas arbitrarias no abelianas y, por tanto, descubrió la posibilidad de una nueva fenomenología sin análogos electromagnéticos en la que tienen cabida términos de interacción entre los propios campos gauge del tipo A^4, $A^2\partial_\mu A$, que dotan a la teoría resultante de un carácter altamente no lineal. El descubrimiento de la teoría gauge supuso un avance fundamental en la física de partículas, la cual hasta entonces sólo daba cuenta de su clasificación sin ocuparse de la dinámica de sus interacciones. El éxito de la teoría gauge no Abeliana fue puesto de relieve en la década de los años 70 con el descubrimiento de los bosones vectoriales W^+, W^-, Z mediadores de la interacción electrodébil asociada al grupo $SU(2) \otimes U(1)$ en el marco del modelo de Weinberg-Salam. Asimismo, con la teoría gauge del grupo $SU(3)$ de color los éxitos concernientes a la interacción fuerte se materializarían en la teoría de la cromodinámica cuántica. En vista del buen ajuste

[1]Nótese que la variación local de la fase del campo de materia, la cual puede ser considerada como coordenada en el espacio de cargas, origina la aparición de un campo electromagnético en la teoría, de modo análogo a como el principio de equivalencia débil en la teoría de la gravedad de Einstein prescribe la aparición de un campo gravitatorio al pasar de un sistema de referencia a otro.

entre las predicciones teóricas y los resultados experimentales, el requisito de la invariancia gauge es elevado a la categoría de principio fundamental de la física de partículas.

3.1. Formulación del Principio de Invariancia Gauge

El trabajo pionero de Utiyama ofrece un mecanismo sistemático para introducir campos mediadores de interacciones fundamentales. Dicho método se construye en base al PIG, que puede ser enunciado como sigue:

Si un sistema físico material elemental es invariante bajo un cierto grupo de transformaciones internas con n parámetros $f^{(a)}$ $(a = 1, ..., n)$ entonces dicho sistema también debe ser invariante bajo el mismo grupo de transformaciones con los parámetros $f^{(a)}(x)$ dependiendo de la posición.

Las transformaciones internas con parámetros constantes constituyen la simetría global o rígida del sistema de campos de materia y desde el punto de vista matemático se pueden describir mediante una representación apropiada de un álgebra de Lie unitaria de dimensión n. Al hacer depender a los parámetros de dicha representación de los puntos del espacio-tiempo M, formalmente se obtiene la representación que caracteriza a la simetría gauge (o local). Así pues, el PIG establece que la hipótesis de invariancia del sistema de campos materiales bajo la representación del álgebra global se extiende a la invariancia bajo la representación “gaugeada”. Técnicamente la invariancia local se garantiza mediante la introducción de nuevos campos cuyas leyes de transformación son tales que eliminan todos los términos que involucran a las derivadas de los parámetros del álgebra local y que, por tanto, violan la requerida invariancia gauge. Por razones obvias, las nuevas variables de la teoría reciben el nombre de campos *compensadores*, genéricamente conocidos como campos *gauge*, y son interpretados como los potenciales de la correspondiente interacción fundamental interna.

Gracias al avance de las técnicas matemáticas la formulación compensadora original de Utiyama encontró más tarde su lectura en términos de la geometría de variedades fibradas, cuyas herramientas son de gran utilidad especialmente cuando se consideran variedades con topología no trivial. El contexto moderno donde se describe la teoría gauge asociada a interacciones internas es el formalismo de fibrados jets ([5, 57–66, 68–72]). La teoría se formula en un fibrado principal sobre el espacio-tiempo de Minkowski[2]

$$\pi : P \to M, \tag{3.2}$$

siendo el grupo estructural del fibrado un grupo de Lie de simetría interna[3] G. Asímismo se considera un fibrado asociado a P (fibrado de *materia*)

$$E \to M \tag{3.3}$$

con espacio total $E = (P \times V)/G$, donde V es la fibra típica sobre la que actúa el grupo G por medio de una representacion lineal (irreducible). Las secciones globales del fibrado de materia son interpretadas como los campos de materia de la teoría. Localmente, E se puede parametrizar con las coordenadas (x^μ, φ^α) definidas sobre $\pi^{-1}(U) \subset E$, $U \subset M$. Por $(x^\mu, \varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)$ denotaremos el correspondiente sistema coordenado adaptado para $J^1(\pi^{-1}(U)) \subset J^1(E)$. En este marco geométrico una densidad Lagrangiana de materia se define como una funcion real

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} : J^1(E) \to R \tag{3.4}$$

sobre el fibrado de 1-jets $J^1(E)$. Localmente $\mathcal{L}_{\text{matt}}$ depende[4] de los campos de materia φ^α y sus “derivadas” de primer orden φ^α_μ [5]. La correspondiente acción de materia

$$\mathcal{S}_{\text{mat}} = \int \mathcal{L}_{\text{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)\, d^4x\,, \tag{3.5}$$

de acuerdo con el PIG, se asume invariante bajo el grupo de Lie global G, i.e.,

$$L_{\overline{X}_{(a)}} \left(\mathcal{L}_{\text{mat}}\, d^4x \right) = 0, \tag{3.6}$$

[2]En principio podría emplearse como base del fibrado cualquier otra variedad orientable tetradimensional M.

[3]Los grupos que describen las propiedades internas de los campos y partículas son los grupos unitarios $U(n)$, que forman un subgrupo del grupo $GL(n, C)$ de matrices complejas de orden n con determinante no nulo. A su vez el grupo de matrices unitarias admite el importante subgrupo $SU(n)$ de matrices unitarias con $det = 1$. Por su parte, las simetrías externas o espacio-temporales se describen mediante los grupos reales $GL(n, R)$ y sus subgrupos (e.g. el subgrupo de rotaciones pseudoortogonales de Lorentz $SO(3, 1)$, etc.).

[4]La dependencia explícita de $\mathcal{L}$ en x^μ queda prohibida al requerir la invariancia bajo el grupo Poincaré.

[5]φ^α_μ eventualmente evolucionará como $\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\mu}$ si la densidad Lagrangiana es regular. Por otra parte, en el principio de Hamilton ordinario el integrando del funcional de acción siempre se define sobre extensiones jet de secciones.

donde $L_{\overline{X}_{(a)}}$ es la derivada de Lie con respecto a la extensión 1-jet $\overline{X}_{(a)}$ del generador

$$X_{(a)} = X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} = X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \tag{3.7}$$

de G, cuyas componentes $X^{\mu}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ son nulas ya que hemos supuesto que G no actúa sobre la variedad base M. $X^{\alpha}_{(a)\beta}$ denota una realización matricial de la acción infinitesimal de los generadores del grupo de Lie sobre los campos de materia. Se siguen las relaciones de conmutación

$$([X_{(a)}, X_{(b)}])^{\alpha}_{\beta} = (X_{(a)} X_{(b)} - X_{(b)} X_{(a)})^{\alpha}_{\beta} = C_{a\ b}^{\ c} X^{\alpha}_{(c)\beta}, \tag{3.8}$$

donde $C_{a\ b}^{\ c}$ son las constantes de estructura[6] del grupo:

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = C_{a\ b}^{\ c} X_{(c)} \ . \tag{3.10}$$

Dado que el grupo G no actúa sobre M,

$$L_{\overline{X}_{(a)}} d^4x = (\partial_{\mu} X^{\mu}_{(a)}) d^4x = 0 \ , \tag{3.11}$$

y la condición de invariancia rígida (3.6) se reduce a

$$\overline{X}_{(a)} \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} = 0. \tag{3.12}$$

Usando la expresion general para la extensión jet de campos de vectores se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{(a)} \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu}) &= X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}} (\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu}) + \overline{X}^{\alpha}_{(a)\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} (\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu}) \\ &= X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}} (\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu}) + X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta}_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} (\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu}) = 0 \, . \end{aligned} \tag{3.13}$$

A continuación describiremos el proceso de implementación de la invariancia gauge o local. Un automorfismo de un fibrado principal P es un difeomorfismo

$$\Phi : P \to P \tag{3.14}$$

[6]Recordamos que estas constantes $C_{a\ b}^{\ c}$ tienen las siguientes propiedades:

$$C_{a\ b}^{\ c} = -C_{b\ a}^{\ c} \ , \ C_{a\ b}^{\ c} C_{c\ d}^{\ e} + C_{b\ d}^{\ c} C_{c\ a}^{\ e} + C_{d\ a}^{\ c} C_{c\ b}^{\ e} = 0 \, . \tag{3.9}$$

que es equivariante con respecto a la acción canónica[7] de G sobre P, i.e.

$$\Phi(g \cdot p) = g \cdot \Phi(p), \tag{3.15}$$

$p \in P$, $g \in G$. Dicho automorfismo Φ induce un difeomorfismo ξ de la variedad base M tal que

$$\pi \circ \Phi = \xi \circ \pi. \tag{3.16}$$

Si ξ es la aplicación identidad, entonces Φ recibe el nombre de *transformación gauge* o *automorfismo principal*. El conjunto Aut$P$ de todos los automorfismos de P es un grupo de Lie infinito-dimensional con la composición de aplicaciones como multiplicación. Gau$P$, el conjunto de transformaciones gauge, es un subgrupo normal infinito-dimensional llamado *grupo de gauge*. Por aut$P$ denotaremos el álgebra de campos de vectores sobre P invariantes bajo G y el *álgebra de gauge*, gau$P$, es la subálgebra de campos de vectores verticales sobre P invariantes bajo G (también llamados *campos de vectores principales* sobre P). Para el fibrado trivial $P = G \times M$ todo automorfismo Φ se puede escribir en la forma

$$\Phi(g, x) = (g \cdot \psi(x), \xi(x)), \tag{3.17}$$

$x \in M$, $g \in G$, donde $\xi \in \mathrm{Diff}(M)$ y $\psi : M \to G$ es una aplicación diferenciable. Al considerar en este caso transformaciones gauge (i.e. $\xi = Id_M$) se obtiene como grupo de gauge[8], $G(M)$, el grupo de las aplicaciones definidas sobre el espacio-tiempo con valores en el grupo de simetría rígido:

$$G(M) \equiv \{\psi : M \to G\} \equiv Map(M, G). \tag{3.18}$$

La correspondiente álgebra de Lie $\mathcal{G}(M)$ es el producto tensorial

$$\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G} \equiv \{f^{(a)} X_{(a)}\}\,, \tag{3.19}$$

donde $\mathcal{F}(M)$ es el álgebra multiplicativa de las funciones diferenciables (C^∞) sobre M, y $\mathcal{G}$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie G. Las relaciones de conmutación de este álgebra local rezan

$$[f^{(a)} X_{(a)}, g^{(b)} X_{(b)}] = f^{(a)} g^{(b)} [X_{(a)}, X_{(b)}] = f^{(a)} g^{(b)} C_{a\ b}^{\ c} X_{(c)}\ . \tag{3.20}$$

[7]Adoptaremos la acción izquierda pues usualmente los operadores físicos son representados por campos de vectores invariantes bajo la acción derecha, los cuales generan la acción finita izquierda del grupo de simetría.

[8]En la literatura $G(M)$ también recibe los apelativos de grupo *local* o de *corrientes*.

La extensión jet de los generadores de esta nueva álgebra adquiere la forma:

$$\overline{f^{(a)}X_{(a)}} = f^{(a)}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\alpha}} + \left(f^{(a)}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}_{\mu} + X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi^{\alpha}_{\mu}}. \quad (3.21)$$

Obsérvese que la extensión jet de un generador de $\mathcal{F}(M)\otimes\mathcal{G}$ no es un producto tensorial, sino que adquiere términos extras no tensoriales que involucran derivadas de los parámetros $f^{(a)}(x)$ del álgebra gauge:

$$\overline{f^{(a)}X_{(a)}} = f^{(a)}\overline{X}_{(a)} + X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\alpha}_{\mu}}\,. \quad (3.22)$$

Por lo tanto,

$$\overline{f^{(a)}X_{(a)}}\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{\mu}) \neq 0 \quad (3.23)$$

y, con el fin de restaurar la invariancia, hay que introducir $4n(= dimM \times dimG)$ componentes $A^{(a)}_{\mu}$ de nuevos campos denominados *campos compensadores* o *campos gauge*. La ley de transformación infinitesimal de los campos $A^{(a)}_{\mu}$ bajo $G(M)$ se compone de una parte tensorial, correspondiente a la representación adjunta del grupo rígido, y una contribución no tensorial que involucra al gradiente de los parámetros gauge, esto es:

$$X_{A^{(a)}_{\mu}} \equiv \delta A^{(a)}_{\mu} = f^{(b)}C_{b\ c}^{\ a}A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}}\,. \quad (3.24)$$

Por ello, estos campos $A^{(a)}_{\mu}$ son identificados con conexiones principales sobre el fibrado principal P. Más aún, existe una correspondencia uno a uno entre las conexiones principales sobre un fibrado principal $P \to M$ con grupo estructural G y las secciones globales del fibrado

$$J^1P/G \to M\ , \quad (3.25)$$

denominado *fibrado de las conexiones principales*[9] (véase el Apéndice 10.2).

De acuerdo con lo anterior, un generador arbitrario del álgebra gauge es un campo de vectores principal sobre el producto fibrado $E \times J^1P/G$:

$$\begin{aligned} f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)} &= f^{(a)}X^{\alpha}_{(a)}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\alpha}} + X_{A^{(a)}_{\mu}}\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_{\mu}} \quad (3.26)\\ &= f^{(a)}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial}{\partial\varphi^{\alpha}} + \left(f^{(b)}C_{b\ c}^{\ a}A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_{\mu}}\,. \end{aligned}$$

[9]Sin embargo, desde el punto de vista del método de la cuantización sobre grupos (CSG) la estructura relevante para la teoría gauge cuántica es $J^1(P)$ (véase el Capítulo 7).

3.2. Teorema de Utiyama

$J^1(E) \times J^1(J^1P/G)$ es el espacio de configuración total sobre el que se define la densidad Lagrangiana invariante gauge de la teoría:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_0. \tag{3.27}$$

Los nuevos campos $A_\mu^{(a)}$ son introducidos con el fin de modificar la forma de la densidad Lagrangiana de materia original. En consecuencia, por un lado hay que especificar la expresión de la nueva densidad Lagrangiana $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}}$ dando cuenta de los campos de materia y su interacción con los campos $A_\mu^{(a)}$ y, por otra parte, hay que determinar la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_0$ de los campos gauge libres, que dependerá de las nuevas variables así como de sus primeras "derivadas", i.e. $A_\mu^{(a)}$, $A_{\nu,\sigma}^{(a)}$. A continuación establecemos el proceso requerido en dos pasos sucesivos que en conjunto constituyen (como se ha sugerido en la literatura de carácter más estrictamente matemático, e.g. [4,5]) el Teorema de Utiyama.

3.2.1. Estructura de la densidad Lagrangiana para los campos de materia y su interacción con los campos gauge: Principio de Acoplamiento Mínimo

La nueva densidad Lagrangiana que describe la dinámica de los campos de materia φ^α así como su interacción con los campos compensadores $A_\nu^{(a)}$,

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A_\nu^{(a)}) \equiv \mathcal{L}_{\text{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu + A_\mu^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta), \tag{3.28}$$

es invariante bajo el grupo local $G(M)$, i.e.

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}\widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A_\nu^{(a)}) = 0. \tag{3.29}$$

Demostración: Consideremos el siguiente cambio de variables χ:

$$\begin{aligned} \phi^\alpha &= \varphi^\alpha \\ \phi^\alpha_\mu &= \varphi^\alpha_\mu + A_\mu^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \\ B_\mu^{(a)} &= A_\mu^{(a)} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Entonces, las derivadas parciales relativas a las antiguas variables pueden ser expresadas en términos de las nuevas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\phi^\alpha} + B_\mu^{(a)} X^\beta_{(a)\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi^\beta_\mu} \\
\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha_\mu} &= \frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} \\
\frac{\partial}{\partial A_\mu^{(a)}} &= \frac{\partial}{\partial B_\mu^{(a)}} + X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu}\,.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A_\nu^{(a)}) &\equiv \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu + A_\mu^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) = \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\phi^\alpha,\phi^\alpha_\mu) \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}\circ\chi(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A_\nu^{(a)})\,,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} &= \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} + \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta_\mu + X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha_\mu} \\
&+ (f^{(b)}C_b{}^a{}_c A_\mu^{(c)} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu})\frac{\partial}{\partial A_\mu^{(a)}}\Big)\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A_\nu^{(a)}) \\
&= \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\Big(\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha} + B_\mu^{(b)}X^\gamma_{(b)\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi^\gamma_\mu}\Big) + \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}(\phi^\beta_\mu \\
&- B_\mu^{(b)}X^\beta_{(b)\gamma}\phi^\gamma) + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\Big)\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} + \Big(f^{(b)}C_b{}^a{}_c B^c_\mu \\
&- \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial B_\mu^{(a)}} + X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu}\Big)\Big)\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\phi^\alpha,\phi^\alpha_\mu) \\
&= \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha} + f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta_\mu\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} + \Big(f^{(b)}C_b{}^a{}_c B^c_\mu \\
&- \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial B_\mu^{(a)}} + \Big(f^{(a)}B_\mu^{(b)}(X_{(b)}X_{(a)})^\gamma_\beta\phi^\beta \\
&- f^{(a)}B_\mu^{(b)}(X_{(a)}X_{(b)})^\gamma_\beta\phi^\beta\Big)\frac{\partial}{\partial\phi^\gamma_\mu} + f^{(b)}C_b{}^a{}_c B_\mu^{(c)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} \\
&+ \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu}\Big)\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\phi^\alpha,\phi^\alpha_\mu) \\
&= \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha} + f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta_\mu\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha_\mu} + \Big(f^{(b)}C_b{}^a{}_c B_\mu^{(c)} \\
&- \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial B_\mu^{(a)}}\Big)\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\phi^\alpha,\phi^\alpha_\mu) = \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\phi^\beta\frac{\partial}{\partial\phi^\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$+ \quad f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} \Big) \mathcal{L}_{\text{mat}}(\phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{\mu}) = f^{(a)} \overline{X}_{(a)} \mathcal{L}_{\text{mat}}(\phi^{\alpha}, \phi^{\alpha}_{\mu}) = 0 \,,$$

igualdad que resulta de hacer uso de las relaciones de conmutación (3.8) y de la hipótesis de invariancia bajo el grupo rígido.$\diamondsuit$

Notese, como corolario del resultado previo, que los campos de materia interaccionan con los campos compensadores y no con sus derivadas, de ahí que tal interacción sea llamada *acoplamiento mínimo*[10]. El término de interacción aparece en el Lagrangiano a través de la combinación

$$D_{\mu} \varphi^{\alpha} \equiv \varphi^{\alpha}_{\mu} + A^{(a)}_{\mu} X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta}, \tag{3.34}$$

que transforma de modo covariante bajo $G(M)$, i.e

$$\delta(D_{\mu} \varphi^{\alpha}) = f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} D_{\mu} \varphi^{\beta} \tag{3.35}$$

y es interpretada[11] como la *derivada covariante* de los campos de materia (de ahí la notación D_{μ}). Cabe entonces formular la siguiente prescripción para las interacciones fundamentales asociadas a grupos de simetría interna:

Principio de Acoplamiento Mínimo:

La densidad Lagrangiana invariante gauge de campos de materia que contiene los términos de interacción se obtiene de la densidad Lagrangiana de partida relizando la sustitución de todas las derivadas ordinarias de los campos materiales por derivadas covariantes:

$$\varphi^{\alpha}_{\mu} \to D_{\mu} \varphi^{\alpha} \,. \tag{3.36}$$

3.2.2. Estructura de la densidad Lagrangiana para los campos gauge libres

Con el fin de describir la dinámica de los campos compensadores introducidos hay que considerar una densidad Lagrangiana asociada $\mathcal{L}_0(A^{(c)}_{\mu}, A^{(b)}_{\nu,\sigma})$, de tal modo que la acción total

$$\mathcal{S}_{\text{tot}} = \int (\widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_0) d^4 x \tag{3.37}$$

[10]Acoplamientos no mínimos, es decir, que involucren derivadas de los campos gauge, no son lícitos por violar la renormalizabilidad de la teoría.

[11]Véase la sección 3.5.

sea invariante gauge. Como se acaba de demostrar, $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{mat}} \equiv \int \widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}}\, d^4x$ es invariante bajo $G(M)$. Por lo tanto, del requerimiento de invariancia gauge de $\mathcal{S}_{\text{tot}}$ se sigue la condición de invariancia de $\mathcal{L}_0$ bajo el grupo de gauge:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}\mathcal{L}_0(A^{(c)}_\mu, A^{(b)}_{\nu,\sigma}) = 0\,, \tag{3.38}$$

que determina la estructura de la densidad Lagrangiana de los campos compensadores libres.

La condición necesaria para que $\mathcal{L}_0$ sea invariante bajo el grupo de corrientes $G(M)$ es que $\mathcal{L}_0$ dependa de los campos $A^{(a)}_\mu$ y de sus derivadas $A^{(a)}_{\mu,\nu}$ sólo a través del llamado tensor de intensidad del campo $A^{(a)}_\mu$:

$$F^{(a)}_{\mu\nu} \equiv A^{(a)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}C_b{}^a{}_c(A^{(b)}_\mu A^{(c)}_\nu - A^{(b)}_\nu A^{(c)}_\mu)\,. \tag{3.39}$$

Demostración: Hay que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}
\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}\mathcal{L}_0 &= X_{A^{(a)}_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_\mu} + \overline{X}_{A^{(a)}_{\mu,\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} \\
&= \left(f^{(b)}C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\mu - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_\mu} \\
&+ \left(f^{(b)}C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu,\nu} + C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\mu\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Las funciones f son arbitrarias e independientes entre sí, por lo tanto, los coeficientes de $f^{(b)}(x)$ y sus dos primeras derivadas deben ser cero, de modo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{aligned}
&a) \quad f^{(b)}: \quad C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_\mu} + C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu,\nu}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} = 0 \\
&b) \quad \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}: \quad \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(b)}_\mu} - C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\nu,\mu}} = 0 \\
&c) \quad \frac{\partial^2 f^{(b)}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}: \quad \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(b)}_{\mu,\nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(b)}_{\nu,\mu}} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

La ecuación (3.41a) obviamente establece que $\mathcal{L}_0$ debe ser invariante bajo el grupo rígido G. De la ecuación (3.41c) se sigue que $\mathcal{L}_0$ depende de $A^{(b)}_{\mu,\nu}$ sólo a través de la combinación $A^{(b)}_{\mu,\nu} - A^{(b)}_{\nu,\mu}$. Usando este resultado, la ecuación (3.41b) se puede reescribir como

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(b)}_\mu} = -C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (A^{(a)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\nu,\mu})}. \tag{3.42}$$

La forma de esta ecuación es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kx\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{3.43}$$

cuya solución general viene dada por

$$f = f(y + \frac{1}{2}kx^2). \tag{3.44}$$

Con lo cual se demuestra el resultado deseado:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(F^{(a)}_{\mu\nu}).\diamondsuit \tag{3.45}$$

Este resultado, determinado por las ecuaciones (3.41b) y (3.41c), se puede deducir también evaluando el conmutador de las derivadas covariantes de los campos de materia. Por el carácter covariante gauge de la ley de transformación (3.35) de $D_\mu\varphi^\alpha$ es plausible construir su derivada covariante de modo estructuralmente análogo a la derivada covariante de φ^α, esto es:

$$D_\nu(D_\mu\varphi^\alpha) = (D_\mu\varphi^\alpha)_{,\nu} + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta} D_\mu\varphi^\beta \ . \tag{3.46}$$

Así pues se obtiene fácilmente:

$$[D_\mu, D_\nu]\varphi^\alpha = F^{(a)}_{\nu\mu} X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \ . \tag{3.47}$$

Toda la información covariante gauge de este conmutador está codificada en el tensor de intensidad, por tanto, una densidad Lagrangiana invariante gauge que describa la dinámica de los campos gauge libres debe ser una función (escalar bajo G) de $F^{(a)}_{\mu\nu}$. A propósito, la ley de transformación de $F^{(a)}_{\mu\nu}$ presenta la forma:

$$\delta F^{(a)}_{\mu\nu} = f^{(b)} C_b{}^a{}_c F^{(c)}_{\mu\nu} \ , \tag{3.48}$$

y en consecuencia su derivada covariante viene dada por:

$$D_\sigma F^{(a)}_{\mu\nu} = F^{(a)}_{\mu\nu,\sigma} + A^{(b)}_\sigma C_b{}^a{}_c F^{(c)}_{\mu\nu}. \tag{3.49}$$

Se satisface la identidad cíclica:

$$D_\rho F^{(a)}_{\mu\nu} + D_\mu F^{(a)}_{\nu\rho} + D_\nu F^{(a)}_{\rho\mu} = 0 \ . \tag{3.50}$$

Hay que subrayar que la dependencia de $\mathcal{L}_0$ en el tensor $F^{(a)}_{\mu\nu}$ debe ser compatible con la condición (3.41a). Asimismo, se puede recurrir a otros criterios adicionales naturales, como por ejemplo, la invariancia bajo el grupo de Poincaré rigido. En particular, la densidad Lagrangiana de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{Y-M}} = -\frac{1}{4} g_{ab} F^{(a)}_{\mu\nu} F^{(b)}_{\sigma\rho} \eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu} = -\frac{1}{4} F^{(a)}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{(a)} \,. \tag{3.51}$$

resulta ser la de orden más bajo. En esta expresión los índices tensoriales espacio-temporales son subidos con la métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ y los índices de grupo (a) son bajados con la métrica simétrica de Cartan $g_{ab} = C_{a\ d}^{\ c} C_{c\ b}^{\ d}$ asociada con el grupo de Lie G (semisimple, pues de lo contrario g_{ab} sería singular).

Formulación alternativa del Teorema de Utiyama

Una vía alternativa [58], pero equivalente, para formular el Teorema de Utiyama consiste en mantener fija la densidad Lagrangiana de materia de partida mientras que la estructura del fibrado jet se modifica definiendo la relación de equivalencia (2.3) en términos de derivadas covariantes y modificando en consecuencia las 1-formas de estructura (2.11):

$$\theta^\alpha_\Gamma = d\phi^\alpha - \phi^\alpha_\mu dx^\mu = d\varphi^\alpha - (\varphi^\alpha_\mu + A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) dx^\mu \,. \tag{3.52}$$

En el fibrado jet resultante la expresión de la extensión jet de los campos de vectores también varía, así como el aspecto de las ecuaciones de Euler-Lagrange, aunque se recupera el resultado referente a la forma de $\mathcal{L}_0$. Los detalles se pueden ver en el Apéndice 10.3.

3.3. Ecuaciones de los campos: ecuaciones de Yang-Mills

Consideremos la densidad Lagrangiana total invariante gauge de la teoría

$$\mathcal{L}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu + A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) + \mathcal{L}_0(F^{(a)}_{\mu\nu}). \tag{3.53}$$

En términos de las variables $\{\phi^\alpha, B^{(a)}_\mu\}$ (introducidas en la subseccion 3.2.1) las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma de las ecuaciones de movimiento de una teoría "libre" [12]. Más explícitamente, las ecuaciones de los campos $\{\varphi^\alpha, A^{(a)}_\mu\}$ se escriben respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha} - A^{(a)}_\mu X^\beta_{(a)\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\beta_\mu} - \frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}\right) &= 0 && (3.54)\\
A^{(d)}_\nu C_d{}^b{}_a \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^{(b)}_{\nu\mu}} + \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^{(a)}_{\mu\nu}}\right) &= \frac{1}{2} X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} \,. && (3.55)
\end{aligned}$$

En particular, para la densidad Lagrangiana (3.51) se obtienen las ecuaciones de Yang-Mills:

$$F^{\mu\nu}_{(a),\nu} + A^{(d)}_\nu C_d{}^b{}_a F^{\nu\mu}_{(b)} = -X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} \,. \tag{3.56}$$

Empleando la notación de derivadas covariantes las ecuaciones (3.54) y (3.56) se escriben respectivamente en la forma manifiestamente covariante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha} - D_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial D_\mu \varphi^\alpha}\right) &= 0 && (3.57)\\
D_\nu F^{\mu\nu}_{(a)} &= \widehat{J}^\mu_{(a)} \,, && (3.58)
\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{J}^\mu_{(a)} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial A^{(a)}_\mu} = -X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial D_\mu \varphi^\alpha} = -X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} \tag{3.59}$$

son las corrientes covariantes de los campos de materia. Bajo $G(M)$ dichas corrientes se transforman de acuerdo con la ley

$$\delta \widehat{J}^\mu_{(a)} = -f^{(b)} C_b{}^c{}_a \widehat{J}^\mu_{(c)}. \tag{3.60}$$

Consecuentemente, se define su derivada covariante

$$D_\nu \widehat{J}^\mu_{(a)} = \widehat{J}^\mu_{(a),\nu} - A^{(b)}_\nu C_b{}^c{}_a \widehat{J}^\mu_{(c)} \,. \tag{3.61}$$

[12] La demostración de la parte del Teorema de Utiyama referente al acoplamiento mínimo se lleva a cabo mediante un cambio de variables que convierte la teoría con interacción en una teoría libre de campos de materia y campos gauge. Sin embargo, esto puede resultar extraño si se piensa en la cromodinámica cuántica pues en la naturaleza no se han observado quarks libres. Lo que ocurre es que el cambio de variables realizado es local mientras que el confinamiento de quarks está relacionado con cuestiones topológicas del grupo. En otras palabras, localmente el quark puede ser libre y no interactuante, cosa que no ocurre globalmente debido a que el mencionado cambio de variables no es exponenciable.

En virtud de las ecuaciones de movimiento y la condición de invariancia rígida (3.14) se deduce que $\widehat{J}^{\mu}_{(a)}$ tiene divergencia covariante nula[13]:

$$D_\mu \widehat{J}^{\mu}_{(a)} = 0. \tag{3.62}$$

Pero en general, (salvo para grupos abelianos) $\widehat{J}^{\mu}_{(a)}$ no son corrientes estrictamente conservadas.

El sistema descrito por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu + A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) - \frac{1}{4}F^{(a)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(a)} \tag{3.63}$$

de la que se obtienen las ecuaciones (3.57) y (3.58), tiene las características de un sistema de campos materiales φ^α en interacción mediante los campos gauge $A^{(a)}_\mu$, ahora interpretados como los correspondientes potenciales de interacción, cuyas fuentes, de acuerdo con la ecuación (3.58), son las corrientes covariantes $\widehat{J}^{\mu}_{(a)}$ de los campos materiales. Como vemos, el Principio de Invariancia Gauge resulta ser un instrumento universal para la construcción de potenciales de interacción.

3.4. Leyes de conservación

Comencemos con la obtención de las corrientes conservadas sobre soluciones, que de acuerdo con el Teorema de Noether, se derivan de la hipótesis de partida de invariancia bajo el grupo global G. Usando dicha condición (3.14) y las ecuaciones de los campos de materia libres

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha} - \frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}\right) = 0\ , \tag{3.64}$$

se obtienen las corrientes asociadas al grupo de simetría rígido

$$J^{\mu(\text{rigido})}_{(a)} = -X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu}(\varphi^\gamma, \varphi^\gamma_\nu) \equiv \widehat{J}^{\mu}_{(a)} \tag{3.65}$$

con divergencia nula sobre soluciones:

$$J^{\mu(\text{rigido})}_{(a),\mu} = 0\ . \tag{3.66}$$

[13]Nótese la analogía con la ley de conservación (no integral) del tensor energía-momento de un sistema material en un campo gravitatorio.

Consideremos ahora las corrientes asociadas a la invariancia bajo el grupo local $G(M)$. Escribiendo la ecuación (3.58) en la forma

$$F^{\mu\nu}_{(a),\nu} = \widehat{J}^{\mu}_{(a)} + A^{(d)}_{\nu} C_{d}{}^{b}{}_{a} F^{\mu\nu}_{(b)} \ . \tag{3.67}$$

y gracias a la antisimetría de $F^{\mu\nu}_{(a)}$ se sigue

$$\frac{d^2 F^{\mu\nu}_{(a)}}{dx^{\mu}\, dx^{\nu}} = \frac{d}{dx^{\mu}} (\widehat{J}^{\mu}_{(a)} + A^{(d)}_{\nu} C_{d}{}^{b}{}_{a} F^{\mu\nu}_{(b)}) = 0 \ , \tag{3.68}$$

definiendo así las corrientes estrictamente conservadas (aunque no covariantes gauge) asociadas a la simetría local:

$$J^{\mu(\mathrm{local})}_{(a)} = \widehat{J}^{\mu}_{(a)} + j^{\mu}_{(a)} \equiv J^{\mu(\mathrm{rigido})}_{(a)} + j^{\mu}_{(a)} \ , \tag{3.69}$$

donde se ha usado la notación

$$j^{\mu}_{(a)} \quad \equiv \quad A^{(d)}_{\nu} C_{d}{}^{b}{}_{a} F^{\mu\nu}_{(b)} \ . \tag{3.70}$$

Este término puede verse como la corriente de los campos $A^{(a)}_{\mu}$ ya que $j^{\mu}_{(a)}$ puede escribirse en la forma:

$$j^{\mu}_{(a)} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}^{Y-M}_{0}}{\partial A^{(a)}_{\mu}} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}^{Y-M}_{0}}{\partial A^{(b)}_{\nu,\mu}} C_{a}{}^{b}{}_{c} A^{(c)}_{\nu} \ . \tag{3.71}$$

3.5. Interpretación geométrica

La inclusión de los campos $A^{(a)}_{\mu}$ en la estructura de la derivada *compensadora*

$$D_{\mu}\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha}_{\mu} + A^{(a)}_{\mu} X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta}$$

le proporciona una estructura análoga a la de la derivada covariante en la teoría de la Relatividad General. Recuérdese que la derivada covariante $v^{\nu}_{;\mu}$ de un campo vectorial espacio-temporal v adopta la forma:

$$v^{\nu}_{;\mu} = v^{\nu}_{,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu} v^{\sigma} \ . \tag{3.72}$$

Parece natural observar que la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^{\alpha}, D_{\mu}\varphi^{\alpha})$ y la ecuación (3.57) describen campos de materia libres φ^{α} en el marco de una geometría con derivadas covariantes construidas con conexiones

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \equiv A^{(a)}_{\mu} X^{\alpha}_{(a)\beta} \ . \tag{3.73}$$

Mientras que en el caso de la gravitación la conexión ${\Gamma^{\nu}}_{\sigma\mu}$ está asociada a la geometría del espacio-tiempo, la geometría que determina la conexión ${\Gamma^{\alpha}}_{\mu\beta}$ es la de un espacio fibrado. Por tanto, estos coeficientes de conexión describen el transporte paralelo de los vectores de la fibra V. De acuerdo con esta interpretación, el tensor de intensidad $F^{(a)}_{\mu\nu}$ resulta ser la *curvatura* de la conexión. En estos términos, la segunda parte del Teorema de Utiyama (subsección 3.2.2) se puede reformular diciendo que *la densidad Lagrangiana para las conexiones debe ser una función de la curvatura*. Asimismo se puede definir el tensor de curvatura

$$ {R^{\alpha}}_{\mu\nu\beta} \equiv F^{(a)}_{\mu\nu} X^{\alpha}_{(a)\beta} \,, \tag{3.74} $$

que mediante las relaciones de conmutación (3.8) adopta la expresión típica de un tensor de curvatura expresado en función de la conexión asociada, esto es:

$$ {R^{\alpha}}_{\mu\nu\beta} = {\Gamma^{\alpha}}_{\mu\beta,\nu} - {\Gamma^{\alpha}}_{\nu\beta,\mu} - ({\Gamma^{\alpha}}_{\mu\gamma}{\Gamma^{\gamma}}_{\nu\beta} - {\Gamma^{\alpha}}_{\nu\gamma}{\Gamma^{\gamma}}_{\mu\beta}) \,. \tag{3.75} $$

El conmutador de las derivadas covariantes, de modo análogo a como ocurre en la teoría de la Relatividad General, determina el tensor de curvatura:

$$ [D_\mu, D_\nu]\varphi^\alpha = {R^{\alpha}}_{\nu\mu\beta}\varphi^\beta \,. \tag{3.76} $$

Es interesante observar que del mismo modo que la ley transformación de los campos compensadores $A^{(a)}_{\mu}$ bajo $G(M)$ puede interpretarse como la ley de transformación de los coeficientes de la conexión del fibrado correspondiente bajo un cambio de sistema de referencia (atlas del $T(M)$), el Principio de Invariancia Gauge puede verse desde el punto de vista de la construcción sobre fibrados como un principio de invariancia bajo sistemas de referencia, esto es, como un *principio de relatividad*, de acuerdo con el cual a la verdadera configuración física de los campos le corresponde no sólo un cierto conjunto de campos sino toda una clase de configuraciones equivalentes respecto a las transformaciones gauge. Este principio de relatividad se realiza dinámicamente en el espacio interno mediante la introducción de la derivada covariante, de modo que las configuraciones de los campos φ^α y $A^{(a)}_{\mu}$ y las de los campos transformados bajo el grupo de gauge $G(M)$ describen la misma situación física. Dicho de otro modo, en el espacio interno no existe una base fija especial que se pueda distinguir de las demás y respecto a la cual los campos de materia observados se representen como un conjunto $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$. Tal base puede ser introducida en cada punto del espacio-tiempo pero no existe una razón física para fijar su situación. Entonces, el cambio local de la base se interpreta como un cambio de campo gauge, que desempeña un papel similar al del campo gravitatorio.

En la práctica, para realizar cálculos explícitos con las clases de configuraciones equivalentes es necesario parametrizarlas de alguna manera, es decir, elegir en cada clase representantes únicos. En general, esto se logra imponiendo una condición adicional denominada *condicion de gauge*, o simplemente *gauge*, que elimine la arbitrariedad gauge. Los gauges más utilizados son el de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$), el de Coulomb ($\partial_i A^i = 0$), el de Hamilton ($A_0 = 0$) y el gauge axial ($A_3 = 0$).

Capítulo 4

Teoría gauge para simetrías espacio-temporales

La formulación de la teoría gauge asociada con un grupo de Lie de simetría espacio-temporal tiene como motivación principal la descripción de la gravitación en un contexto análogo al del resto de interacciones fundamentales (asociadas a simetrías internas). Poner en pie de igualdad a la interacción gravitatoria con el resto de interacciones permitiría en primera instancia un replanteamiento de cuestiones fundamentales como la unificación de la gravitación y las demás interacciones. Tanto la formulación de la teoría gauge de la gravitación como el problema de la unificación serán estudiados en capítulos posteriores. En el presente capítulo exponemos la generalización del método compensador de Utiyama cuando se consideran simetrías espacio-temporales, o lo que es lo mismo, la generalización del Teorema de Utiyama. Recordemos que en el caso de simetrías internas, una transformación gauge es un automorfismo de un fibrado principal $\pi : P \to M$ cuyo grupo estructural es un grupo de simetrías internas y, en consecuencia, no mueve los puntos de M. Por otra parte, es bien sabido que la Relatividad General es una teoría invariante bajo difeomorfismos del espacio-tiempo y, por tanto, cualquier intento por desarrollar una teoría gauge de la gravedad, de alguna manera, debe tener en consideración el algebra de difeomorfismos de la variedad base espacio-temporal. De este modo, la teoría gauge para simetrías espacio-temporales debe lidiar con dos tipos de transformaciones locales: las transformaciones verticales, tradicionalmente gauge, asociadas a la fibra y las *transformaciones covariantes generales*, asociadas a los difeomorfismos de la variedad base M.[1]

[1]De modo equivalente, en el contexto de fibrados, la teoría gauge para grupos de simetría espacio-temporal se puede construir sobre el fibrado principal de las referencias $F(M)$ (véase, por ejemplo, [65]), cuyo grupo estructural, sobre una variedad espacio-

Por este motivo, cuando hablamos de teoria gauge para simetrías espacio-temporales se debe sobreentender, en general, la mencionada distinción de transformaciones involucradas.

4.1. Generalización del Principio de Invariancia Gauge

El procedimiento que seguiremos para generalizar la formulación del PIG al caso de transformaciones que muevan los puntos del espacio-tiempo, de acuerdo con la idea primigenia del método compensador de Utiyama, consiste esencialmente en "gaugear" una representación de los generadores de un álgebra de Lie arbitraria de simetrías espacio-temporales. Para garantizar la invariancia local es necesario introducir dos tipos de campos compensadores con el fin de eliminar los términos no invariantes procedentes tanto de las transformaciones gauge verticales sobre la fibra, como de los difeomorfismos del espacio-tiempo .

Sea $\mathcal{L}_{\text{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)$ la densidad Lagrangiana de un sistema de campos materiales φ^α. Consideremos una realización de los generadores de un álgebra de Lie rígida $\mathcal{G}$ con acción sobre los campos de materia y sobre el espacio-tiempo:

$$X_{(a)} = X^\mu_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\alpha_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}\,, \tag{4.2}$$

donde $X^\mu_{(a)}$ es, en general, una función de la posición y $X^\alpha_{(a)}$ presenta la misma forma que en el caso de simetrías internas, i.e. $X^\alpha_{(a)} = X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta$. Los conmutadores de este álgebra tienen la forma:

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = \left(X^\nu_{(a)} \frac{\partial X^\mu_{(b)}}{\partial x^\nu} - X^\nu_{(b)} \frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + C_a{}^c{}_b X^\alpha_{(c)\beta} \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}. \tag{4.3}$$

---

temporal tetradimensional, es el grupo general lineal $GL(4, R)$, ya que tiene la propiedad de que cualquier difeomorfismo infinitesimal de M admite un levantado canónico, aspecto sobre el que volveremos mas tarde en el Capítulo 8. Por completitud, se recuerda que el fibrado de las referencias, siendo M la variedad base con dimension n, viene dado por el siguiente espacio total

$$F(M) = \{(x, a_1, a_2, ..., a_n) \;/\; x \in M,\; (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ base de } T_m(M)\}\,, \tag{4.1}$$

donde $T_m(M)$ es el espacio tangente a M en el punto m y el grupo estructural es $GL(n, R)$.

Como en el caso de simetrías internas el punto de partida de la teoría es la hipótesis de invariancia global de $\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu)$, que en el caso espacio-temporal adopta la forma:

$$\overline{X}_{(a)}\mathcal{L}_{\rm mat}+\mathcal{L}_{\rm mat}\frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\mu}=0. \tag{4.4}$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned}X^\mu_{(a)}\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial x^\mu} &+ X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial\varphi^\alpha}+\left(X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta_\mu-\varphi^\alpha_\nu\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial\varphi^\alpha_\mu}+\\ \mathcal{L}_{\rm mat}\frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\mu} &= 0. \end{aligned}\tag{4.5}$$

En esta expresión, con respecto al caso de simetrías internas, hay que subrayar la aparición del término $-\varphi^\alpha_\nu\partial_\mu X^\nu_{(a)}$ en la ley de transformación de φ^α_μ bajo el grupo rígido, así como la presencia del término $\mathcal{L}_{\rm matt}\partial_\mu X^\mu_{(a)}$ como consecuencia de la variación del volumen de integración de la acción de materia.

Los generadores del álgebra local ("gaugeada") $\mathcal{G}(M)$ vienen dados por

$$f^{(a)}(x)X_{(a)}=f^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+f^{(a)}X^\alpha_{(a)}\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha}\,, \tag{4.6}$$

y las nuevas relaciones de conmutación ahora adquieren términos extras con respecto a los conmutadores del álgebra local (3.20) para simetrías internas, i.e:

$$\begin{aligned}&[f^{(a)}X_{(a)},g^{(b)}X_{(b)}]=f^{(a)}g^{(b)}[X_{(a)},X_{(b)}]+f^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial g^{(b)}}{\partial x^\mu}X_{(b)}-g^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}X_{(b)}\\ &=\Big(f^{(a)}g^{(b)}\Big(X^\nu_{(a)}\frac{\partial X^\mu_{(b)}}{\partial x^\nu}-X^\nu_{(b)}\frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\nu}\Big)+\Big(f^{(a)}\frac{\partial g^{(b)}}{\partial x^\nu}-g^{(a)}\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\nu}\Big)X^\nu_{(a)}X^\mu_{(b)}\Big)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\\ &\quad+\Big(f^{(a)}g^{(b)}C_a{}^c{}_b+\Big(f^{(a)}\frac{\partial g^{(c)}}{\partial x^\nu}-g^{(a)}\frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\nu}\Big)X^\nu_{(a)}\Big)X^\alpha_{(c)}\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha}\,.\end{aligned}$$

Nótese que el hecho de que $X^\mu_{(a)}$ pueda ser función de x no implica, en nuestra formulación, que dicha dependencia sea *gauge*, esto es, el álgebra local se obtiene al multiplicar el álgebra de partida por funciones arbitrarias de la posición. Como se dijo antes, la teoría gauge para simetrías espacio-temporales está caracterizada por dos tipos de transformaciones de distinta naturaleza, es decir, la acción de $f^{(a)}(x)X_{(a)}$ sobre el espacio-tiempo viene modelada por el álgebra $diff(M)$ de difeomorfismos infinitesimales de M con generadores de la forma

$$f^{(a)}(x)X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\equiv f^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \tag{4.7}$$

mientras que sobre la fibra los generadores de las tranformaciones gauge formalmente tienen el aspecto de los generadores de las simetrías internas y en consecuencia se puede usar la notación:

$$\mathcal{G}(M)^{\text{vertical}} \equiv \left\{ f^{(a)}(x) X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \right\} . \tag{4.8}$$

Por lo tanto, el álgebra total que describe la simetría espacio-temporal local resulta ser el producto semidirecto de álgebras:

$$\mathcal{G}(M) = diff(M) \otimes_S \mathcal{G}(M)^{\text{vertical}} , \tag{4.9}$$

con relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
\left[f^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, g^{\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right] &= \left(f^{\nu} \frac{\partial g^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - g^{\nu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \\
\left[f^{(a)}(x) X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}}, g^{(b)}(x) X^{\beta}_{(b)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\beta}} \right] &= f^{(a)} g^{(b)} C_{a\ b}^{\ c} X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \\
\left[f^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, f^{(a)}(x) X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \right] &= f^{\mu} \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} X^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A continuación introducimos los campos compensadores

$$\{ A^{(a)}_{\mu}, h^{(a)\nu}_{\mu\rho} \} \tag{4.11}$$

para construir la teoría invariante local. Del mismo modo que en el caso de simetrías internas, consideramos campos “tipo” $A^{(a)}_{\mu}$, pero además los campos adicionales $h^{(a)\nu}_{\mu\rho}$. Subrayaremos que el aspecto relevante y novedoso de nuestro enfoque es que todos los campos compensadores introducidos, incluidos los nuevos campos $h^{(a)\nu}_{\mu\rho}$, están etiquetados con los índices (a) del álgebra y de esta forma se logra generalizar de modo directo el caso de simetrías internas. Sus correspondientes leyes de transformación bajo $\mathcal{G}(M)$ deben ser:

$$\begin{aligned}
X_{A^{(a)}_{\mu}} \equiv \delta A^{(a)}_{\mu} &= f^{(b)} C_{b\ c}^{\ a} A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} - A^{(a)}_{\nu} X^{\nu}_{(b)} \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\mu}} - f^{(b)} A^{(a)}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} \\
&= f^{(b)} C_{b\ c}^{\ a} A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} - A^{(a)}_{\nu} \partial_{\mu} (f^{(b)} X^{\nu}_{(b)}) ,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
X_{h^{(a)\nu}_{\mu\rho}} \equiv \delta h^{(a)\nu}_{\mu\rho} &= \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} \delta^{\nu}_{\rho} + \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\sigma}} h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} X^{\nu}_{(b)} + f^{(b)} \left(\frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\sigma}} h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} - \frac{\partial X^{\sigma}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} h^{(a)\nu}_{\sigma\rho} \right) \\
&= \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} \delta^{\nu}_{\rho} + h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} \partial_{\sigma} (f^{(b)} X^{\nu}_{(b)}) - f^{(b)} \frac{\partial X^{\sigma}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} h^{(a)\nu}_{\sigma\rho} .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Nótese que debido a la acción del grupo sobre el espacio-tiempo la ley de transformación de los campos $A_\mu^{(a)}$ presenta un término adicional con respecto a la del caso de simetrías internas puras (3.24). La ley de transformación de $h_{\mu\rho}^{(a)\nu}$ se puede reescribir como:

$$X_{h_{\mu\rho}^{(a)\nu}} \equiv \delta h_{\mu\rho}^{(a)\nu} = \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\delta_\rho^\nu + M_\sigma^\nu h_{\mu\rho}^{(a)\sigma} - M_\mu^\sigma h_{\sigma\rho}^{(a)\nu} + \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu} X_{(b)}^\sigma h_{\sigma\rho}^{(a)\nu}, \quad (4.14)$$

donde

$$M_\sigma^\nu \equiv \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\sigma} X_{(b)}^\nu + f^{(b)} \frac{\partial X_{(b)}^\nu}{\partial x^\sigma}, \quad (4.15)$$

es la matriz de transformación que se esperaría para un índice tensorial. Entonces se concluye que los índices espacio-temporales μ, ρ de $h_{\mu\rho}^{(a)\nu}$ no transforman tensorialmente mientras que ν sí se transforma como un tensor bajo $\mathcal{G}(M)$. Análogamente el índice μ de $A_\mu^{(a)}$ tampoco transforma como un tensor.

La forma de un generador arbitrario del álgebra local, actuando sobre el espacio-tiempo, los campos de materia y los campos compensadores, viene dado por:

$$\begin{aligned} f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)} &= f^{(a)}X_{(a)} + X_{A_\mu^{(a)}}\frac{\partial}{\partial A_\mu^{(a)}} + X_{h_{\mu\rho}^{(a)\nu}}\frac{\partial}{\partial h_{\mu\rho}^{(a)\nu}} \\ &= f^{(a)}X_{(a)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + f^{(a)}X_{(a)\beta}^\alpha \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \\ &+ \left(f^{(b)} C_b{}^a{}_c A_\mu^{(c)} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} - A_\nu^{(a)} X_{(b)}^\nu \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu} - f^{(b)} A_\nu^{(a)} \frac{\partial X_{(b)}^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A_\mu^{(a)}} \quad (4.16) \\ &+ \left(\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\delta_\rho^\nu + \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\sigma} h_{\mu\rho}^{(a)\sigma} X_{(b)}^\nu + f^{(b)} \Big(\frac{\partial X_{(b)}^\nu}{\partial x^\sigma} h_{\mu\rho}^{(a)\sigma} - \frac{\partial X_{(b)}^\sigma}{\partial x^\mu} h_{\sigma\rho}^{(a)\nu} \Big) \right) \frac{\partial}{\partial h_{\mu\rho}^{(a)\nu}} . \end{aligned}$$

4.2. Generalización del Teorema de Utiyama

En este apartado se generalizan los resultados del Teorema de Utiyama para el caso de simetrías espacio-temporales. Primero se determina la estructura de la densidad Lagrangiana que describe la interacción entre los campos materiales y los campos compensadores y se formula la correspondiente prescripción de acoplamiento mínimo generalizado. Después se estudia la forma de la densidad Lagrangiana de los campos compensadores libres.

4.2.1. Estructura de la densidad Lagrangiana para los campos de materia y su interacción con los campos compensadores: Generalización del Principio de Acoplamiento Mínimo

La nueva densidad Lagrangiana $\widehat{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\mu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho})$*, invariante bajo el álgebra local* $\mathcal{G}(M)$*, que describe la dinámica de los campos de materia* φ^α *así como su interacción con los campos compensadores* $\{A^{(a)}_\mu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}\}$ *presenta la siguiente estructura:*

$$\widehat{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\mu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) \equiv \Lambda\widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\nu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) \; , \tag{4.17}$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\mu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) &\equiv \mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta)), & (4.18)\\ k^\nu_\mu &\equiv \delta^\nu_\mu + h^{(a)\nu}_{\mu\sigma} X^\sigma_{(a)} \; , & (4.19)\\ \Lambda &\equiv det(q^\mu_\nu) \; , & (4.20) \end{aligned}$$

siendo q^μ_ν *los campos inversos de* k^ν_μ, i.e:

$$\begin{aligned} k^\nu_\mu q^\mu_\sigma &= \delta^\nu_\sigma, \\ k^\nu_\mu q^\sigma_\nu &= \delta^\sigma_\mu \; . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Demostración: Hay que probar que

$$\widehat{S}_{\rm mat} \equiv \int \Lambda\widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\mu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) d^4x \tag{4.22}$$

es invariante bajo $\mathcal{G}(M)$, esto es,

$$L_{\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}}\widehat{S}_{\rm mat} = 0 \; , \tag{4.23}$$

o equivalentemente que $\widehat{L}_{\rm mat} \equiv \Lambda\widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}$ debe cumplir la condición:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}(\Lambda\widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}) + \Lambda\widehat{\mathcal{L}}_{\rm mat}\partial_\mu(f^{(a)}X^\mu_{(a)}) = 0. \tag{4.24}$$

El esquema de la demostración es el mismo que en el caso de simetrías internas: haciendo uso de la condición de invariancia rígida de $\mathcal{L}_{\rm mat}$ y mediante un cambio de variables adecuado, la teoría con interacción se llevara a la forma de una teoría de campos libres. Finalmente se obtendrá la forma del factor multiplicativo Λ.

Sea el cambio de variables χ:

$$
\begin{aligned}
\Phi^\alpha &= \varphi^\alpha \\
\Phi^\alpha_\mu &= k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) = (\delta^\nu_\mu + h^{(b)\nu}_{\mu\sigma} X^\sigma_{(b)})(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) \\
B^{(a)}_\mu &= A^{(a)}_\mu \\
H^{(a)\sigma}_{\mu\nu} &= h^{(a)\sigma}_{\mu\nu} \; .
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Entonces, el cambio correspondiente en las derivadas parciales reza:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha} + k^\nu_\mu B^{(a)}_\nu X^\beta_{(a)\alpha}\frac{\partial}{\partial\Phi^\beta_\mu} \\
\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha_\mu} &= k^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\nu} \\
\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} &= \frac{\partial}{\partial B^{(a)}_\mu} + k^\mu_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu} \\
\frac{\partial}{\partial h^{(a)\sigma}_{\mu\nu}} &= \frac{\partial}{\partial H^{(a)\sigma}_{\mu\nu}} + X^\nu_{(a)} q^\rho_\sigma \Phi^\alpha_\rho \frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu}.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

En consecuencia:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\nu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) &\equiv \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^\alpha, k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta)) = \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\Phi^\alpha, \Phi^\alpha_\mu) \\
&= \mathcal{L}_{\mathrm{mat}} \circ \chi(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\nu, h^{(a)\nu}_{\mu\rho}) \; ,
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f^{(a)}\mathcal{X}_{(a)}}\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mat}} &= \Big(f^{(a)} X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\Big(\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha} + k^\nu_\mu B^{(b)}_\nu X^\gamma_{(b)\alpha}\frac{\partial}{\partial\Phi^\gamma_\mu}\Big) \\
&+ \Big(f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta}(q^\nu_\mu\Phi^\beta_\nu - B^{(b)}_\mu X^\beta_{(b)\gamma}\Phi^\gamma) - f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\mu}(q^\sigma_\nu\Phi^\alpha_\sigma \\
&- B^{(b)}_\nu X^\alpha_{(b)\gamma}\Phi^\gamma) - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\nu_{(a)}(q^\sigma_\nu\Phi^\alpha_\sigma - B^{(b)}_\nu X^\alpha_{(b)\gamma}\Phi^\gamma) \\
&+ \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\Big) k^\mu_\rho\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\rho} + (f^{(b)} C_b{}^a{}_c B^{(c)}_\mu - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu} X^\nu_{(b)} B^{(a)}_\nu \\
&- f^{(b)}\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\mu} B^{(a)}_\nu)\frac{\partial}{\partial B^{(a)}_\mu} + (f^{(b)} C_b{}^a{}_c B^{(c)}_\mu - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu} X^\nu_{(b)} B^{(a)}_\nu \\
&- f^{(b)}\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\mu} B^{(a)}_\nu) k^\mu_\rho X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\rho} + (\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}\delta^\nu_\rho + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma} H^{(b)\sigma}_{\mu\rho} X^\nu_{(a)} \\
&+ f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma} H^{(b)\sigma}_{\mu\rho} - f^{(a)}\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu} H^{(b)\nu}_{\sigma\rho})\frac{\partial}{\partial H^{(b)\nu}_{\mu\rho}} + (\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}\delta^\nu_\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma} H^{(b)\sigma}_{\mu\rho} X^\nu_{(a)} + f^{(a)} \frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma} H^{(b)\sigma}_{\mu\rho} \\
&- \quad f^{(a)} \frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu} H^{(b)\nu}_{\sigma\rho}) X^\rho_{(b)} q^\kappa_\nu \Phi^\alpha_\kappa \frac{\partial}{\partial \Phi^\gamma_\mu} \Big) \mathcal{L}_{\text{mat}}(\Phi^\alpha, \Phi^\alpha_\mu) = \Big(f^{(a)} X^\mu_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&+ \quad f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \Phi^\beta \frac{\partial}{\partial \Phi^\alpha} + (f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \Phi^\beta_\mu \qquad (4.28) \\
&- \quad f^{(a)} \frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu} \Phi^\alpha_\sigma) \frac{\partial}{\partial \Phi^\alpha_\mu} \Big) \mathcal{L}_{\text{mat}}(\Phi^\alpha, \Phi^\alpha_\mu) = f^{(a)} \overline{X}_{(a)} \mathcal{L}_{\text{mat}}(\Phi^\alpha, \Phi^\alpha_\mu) \; .
\end{aligned}
$$

En virtud de la condición de invariancia rígida (4.4) se sigue:

$$
\overline{f^{(a)} \mathcal{X}_{(a)}} \widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}} = -f^{(a)} \widehat{\mathcal{L}}_{\text{mat}} \frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\mu} \; , \tag{4.29}
$$

y llevando este resultado a (4.24) se obtiene la ecuación que debe satisfacer Λ, a saber:

$$
\overline{f^{(a)} \mathcal{X}_{(a)}} \Lambda + \Lambda \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\mu_{(a)} = 0 \; . \tag{4.30}
$$

Por sencillez, asumiremos que Λ depende sólo de los campos compensadores $h^{(a)\nu}_{\mu\rho}$ pero no de sus derivadas, con lo cual la ecuación previa se reduce a:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} \delta^\nu_\rho \quad &+ \quad \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\sigma} h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} X^\nu_{(b)} + f^{(b)} \big(\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\sigma} h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} - \frac{\partial X^\sigma_{(b)}}{\partial x^\mu} h^{(a)\nu}_{\sigma\rho} \big) \Big) \frac{\partial \Lambda}{\partial h^{(a)\nu}_{\mu\rho}} \\
&+ \quad \Lambda \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\mu_{(a)} = 0 \; .
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Dado que las funciones $f^{(a)}$ son arbitrarias e independientes entre sí los coeficientes de $f^{(a)}$ y de sus primeras derivadas deben ser nulos:

$$
a) \qquad f^{(b)} : \quad \big(\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\sigma} h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} - \frac{\partial X^\sigma_{(b)}}{\partial x^\mu} h^{(a)\nu}_{\sigma\rho} \big) \frac{\partial \Lambda}{\partial h^{(a)\nu}_{\mu\rho}} = 0 \; , \tag{4.32}
$$

$$
b) \qquad \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\sigma} : \quad (\delta^\sigma_\mu \delta^a_b \delta^\nu_\rho + h^{(a)\sigma}_{\mu\rho} X^\nu_{(b)}) \frac{\partial \Lambda}{\partial h^{(a)\nu}_{\mu\rho}} + \Lambda X^\sigma_{(b)} = 0 \; . \tag{4.33}
$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial \Lambda}{\partial h^{(a)\nu}_{\mu\rho}} = X^\rho_{(a)} \frac{\partial \Lambda}{\partial k^\nu_\mu}$, las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma:

$$
a) \qquad f^{(b)} : \big(k^\sigma_\mu \frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\sigma} - k^\nu_\sigma \frac{\partial X^\sigma_{(b)}}{\partial x^\mu} \big) \frac{\partial \Lambda}{\partial k^\nu_\mu} = 0 \tag{4.34}
$$

$$
b) \qquad \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\sigma} : X^\nu_{(b)} k^\sigma_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial k^\nu_\mu} + \Lambda X^\sigma_{(b)} = 0, \tag{4.35}
$$

y la solución general para este sistema de ecuaciones (salvo constante multiplicativa) es:

$$\Lambda = det(q_\mu^\nu). \tag{4.36}$$

Nótese que si $k_\mu^\nu \to \delta_\mu^\nu$ (caso de simetrías internas) entonces $\Lambda \to 1.\diamondsuit$

La generalización de la primera parte del Teorema de Utiyama pone de manifiesto que los campos de materia interaccionan con los campos compensadores $\{A_\mu^{(a)}, h_{\mu\rho}^{(a)\nu}\}$ pero no con sus derivadas, de manera que se generaliza el acoplamiento mínimo de las simetrías internas. La interacción ocurre a través de la *derivada compensadora generalizada*:

$$\mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha \equiv \varphi_\mu^\alpha + A_\mu^{(a)} X_{(a)\beta}^\alpha \varphi^\beta + h_{\mu\sigma}^{(a)\nu} X_{(a)}^\sigma \varphi_\nu^\alpha + h_{\mu\sigma}^{(a)\nu} X_{(a)}^\sigma A_\nu^{(b)} X_{(b)\beta}^\alpha \varphi^\beta \ , \tag{4.37}$$

donde aparecen términos nuevos con respecto al caso de simetrías internas y no se puede interpretar como una derivada covariante. La expresión anterior se puede reescribir en la forma:

$$\mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha \equiv \varphi_\mu^\alpha + \mathcal{A}_\mu^{(a)} X_{(a)\beta}^\alpha \varphi^\beta + h_{\mu\sigma}^{(a)\nu} X_{(a)}^\sigma \varphi_\nu^\alpha \ , \tag{4.38}$$

donde se han introducido los campos

$$\mathcal{A}_\mu^{(a)} \equiv k_\mu^\nu A_\nu^{(a)} \ . \tag{4.39}$$

De un modo poco riguroso se puede decir que la expresión (4.38) tiene la forma de una derivada "covariante" con "conexiones" $\mathcal{A}_\mu^{(a)}$ que se acoplan a los campos materiales y con "conexiones" $h_{\mu\sigma}^{(a)\nu}$ que se acoplan a las derivadas de los campos materiales.

El hecho es que el término de interacción se escribe de modo explícito en función de los campos $\{A_\mu^{(a)}, k_\mu^\nu\}$:

$$\mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha = k_\mu^\nu(\varphi_\nu^\alpha + A_\nu^{(a)} X_{(a)\beta}^\alpha \varphi^\beta) \equiv k_\mu^\nu D_\nu \varphi^\alpha \ . \tag{4.40}$$

Por la sencillez de esta expresión, que generaliza el caso de simetrías internas simplemente multiplicando por el factor k_μ^ν, parece natural tratar de describir la teoría sustituyendo los campos $h_{\mu\sigma}^{(a)\nu}$ por los campos k_μ^ν, lo cual asimismo supondría una reducción considerable de los grados de libertad efectivos de la teoría. Como demostraremos luego, los campos k_μ^ν de hecho pueden considerarse campos compensadores (aunque ya no etiquetados con índices del álgebra) con ley de transformacion bajo $\mathcal{G}(M)$ dada por:

$$\begin{aligned} X_{k_\mu^\nu} \equiv \delta k_\mu^\nu &= X_{(a)}^\nu k_\mu^\sigma \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma} + f^{(a)}\left(k_\mu^\sigma \frac{\partial X_{(a)}^\nu}{\partial x^\sigma} - k_\sigma^\nu \frac{\partial X_{(a)}^\sigma}{\partial x^\mu}\right) \\ &= k_\mu^\sigma \partial_\sigma (f^{(a)} X_{(a)}^\nu) - k_\sigma^\nu f^{(a)} \frac{\partial X_{(a)}^\sigma}{\partial x^\mu} \ . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Nótese que los dos índices de k_μ^ν transforman de modo diferente, esto es, mientras que el índice ν transforma como un tensor, el índice μ hereda el carácter no-tensorial de los campos $h_{\mu\sigma}^{(a)\nu}$.

La ley de transformación de $\mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha$ bajo $\mathcal{G}(M)$ reza:

$$\delta(\mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha) = f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta}\mathcal{D}_\mu\varphi^\beta - f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\mu}\mathcal{D}_\nu\varphi^\alpha \ . \tag{4.42}$$

Por completitud, escribimos también la ley de transformación de los campos q_μ^ν:

$$\begin{aligned} X_{q_\mu^\nu} \equiv \delta q_\mu^\nu &= -q_\sigma^\nu X^\sigma_{(a)}\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} - f^{(a)}\left(q_\sigma^\nu\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu} - q_\mu^\sigma\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma}\right) \\ &= -q_\sigma^\nu\partial_\mu(f^{(a)}X^\sigma_{(a)}) + q_\mu^\sigma f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma} \ , \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde se observa que el índice tensorial de q_μ^ν es el subíndice μ, mientras que el superíndice ν no transforma tensorialmente. En cuanto a $\mathcal{A}_\mu^{(a)}$:

$$X_{\mathcal{A}_\mu^{(a)}} \equiv \delta\mathcal{A}_\mu^{(a)} = f^{(b)}C_b{}^a{}_c\mathcal{A}_\mu^{(c)} - k_\mu^\nu\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\nu} - f^{(b)}\mathcal{A}_\sigma^{(a)}\frac{\partial X^\sigma_{(b)}}{\partial x^\mu} \ . \tag{4.44}$$

Cabe formular la siguiente prescripción:

Principio de Acoplamiento Mínimo Generalizado:

La densidad Lagrangiana invariante bajo las transformaciones espacio-temporales locales que contiene los términos de interacción se obtiene de la densidad Lagrangiana de partida realizando la sustitución de todas las derivadas ordinarias de los campos materiales por derivadas compensadoras generalizadas:

$$\varphi_\mu^\alpha \to \mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha \ , \tag{4.45}$$

y multiplicando el resultado por el factor $\Lambda \equiv det(q_\mu^\nu)$ *para compensar la variación del volumen de integración debida a la divergencia no nula de los generadores del grupo local de simetría espacio-temporal.*

A continuación demostraremos la equivalencia de las descripciones en términos de los campos $\{A_\mu^{(a)}, h_{\mu\rho}^{(a)\nu}\}$ y $\{A_\mu^{(a)}, k_\mu^\nu\}$ reformulando el Teorema de Utiyama.

Un generador arbitrario del álgebra local actuando sobre el espacio-tiempo, los campos de materia y los campos compensadores $\{A^{(a)}_\mu, k^\nu_\mu\}$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)} &= f^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta\frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} \\ &+ \Big(f^{(b)}C_b{}^a{}_c A^{(c)}_\mu - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} - A^{(a)}_\nu X^\nu_{(b)}\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu} - f^{(b)}A^{(a)}_\nu\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \\ &+ \Big(X^\nu_{(a)}k^\sigma_\mu\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma} + f^{(a)}\Big(k^\sigma_\mu\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma} - k^\nu_\sigma\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial k^\nu_\mu} \ . \end{aligned} \tag{4.46}$$

La nueva densidad Lagrangiana $\widetilde{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\mu,k^\nu_\mu)$ *invariante bajo el álgebra local* $\mathcal{G}(M)$ *que describe la dinámica de los campos de materia* φ^α *así como su interacción con los campos compensadores* $\{A^{(a)}_\mu, k^\nu_\mu\}$ *presenta la siguiente estructura:*

$$\widetilde{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\mu,k^\nu_\mu) \equiv \Lambda\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\mu,k^\nu_\mu) \ , \tag{4.47}$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\mu,k^\nu_\mu) \equiv \mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta)) \ . \tag{4.48}$$

y Λ *viene dado por la expresión* (4.20).

Demostración: Se trata de probar que $\widetilde{L}_{\rm mat} \equiv \Lambda\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}$ satisface el requerimiento:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}(\Lambda\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}) + \Lambda\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}\partial_\mu(f^{(a)}X^\mu_{(a)}) = 0 \ . \tag{4.49}$$

Sea el cambio de variables χ:

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha &= \varphi^\alpha \\ \Phi^\alpha_\mu &= k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta) \\ B^{(a)}_\mu &= A^{(a)}_\mu \\ K^\nu_\mu &= k^\nu_\mu \ . \end{aligned} \tag{4.50}$$

Entonces, el cambio correspondiente en las derivadas parciales reza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha} + k^\nu_\mu B^{(a)}_\nu X^\beta_{(a)\alpha}\frac{\partial}{\partial\Phi^\beta_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha_\mu} &= k^\mu_\nu\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\nu} \\ \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} &= \frac{\partial}{\partial B^{(a)}_\mu} + k^\mu_\nu X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial k^\nu_\mu} &= \frac{\partial}{\partial K^\nu_\mu} + q^\sigma_\nu\Phi^\alpha_\sigma\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\nu,k^\nu_\mu) &\equiv \mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha,k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu+A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta))=\mathcal{L}_{\rm mat}(\Phi^\alpha,\Phi^\alpha_\mu)\\ &= \mathcal{L}_{\rm mat}\circ\chi(\varphi^\alpha,\varphi^\alpha_\mu,A^{(a)}_\nu,k^\nu_\mu)\ , \qquad (4.52)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat} &= \Big(f^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}+f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\Big(\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha}+k^\nu_\mu B^{(b)}_\nu X^\gamma_{(b)\alpha}\frac{\partial}{\partial\Phi^\gamma_\mu}\Big)\\ &+ \Big(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}(q^\nu_\mu\Phi^\beta_\nu-B^{(b)}_\mu X^\beta_{(b)\gamma}\Phi^\gamma)-f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\mu}(q^\sigma_\nu\Phi^\alpha_\sigma\\ &- B^{(b)}_\nu X^\alpha_{(b)\gamma}\Phi^\gamma)-\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\nu_{(a)}(q^\sigma_\nu\Phi^\alpha_\sigma-B^{(b)}_\nu X^\alpha_{(b)\gamma}\Phi^\gamma)\\ &+ \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\Big)k^\mu_\rho\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\rho}+(f^{(b)}C_b{}^a{}_cB^{(c)}_\mu-\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}X^\nu_{(b)}B^{(a)}_\nu\\ &- f^{(b)}\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\mu}B^{(a)}_\nu)\frac{\partial}{\partial B^{(a)}_\mu}+(f^{(b)}C_b{}^a{}_cB^{(c)}_\mu-\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^\mu}X^\nu_{(b)}B^{(a)}_\nu\\ &- f^{(b)}\frac{\partial X^\nu_{(b)}}{\partial x^\mu}B^{(a)}_\nu)k^\mu_\rho X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\rho}+(\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma}k^\sigma_\mu X^\nu_{(a)}+f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma}k^\sigma_\mu\\ &- f^{(a)}\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu}k^\nu_\sigma)\frac{\partial}{\partial k^\nu_\mu}+(\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma}k^\sigma_\mu X^\nu_{(a)}+f^{(a)}\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma}k^\sigma_\mu\\ &- f^{(a)}\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu}k^\nu_\sigma)q^\rho_\nu\Phi^\alpha_\rho\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu}\Big)\mathcal{L}_{\rm mat}(\Phi^\alpha,\Phi^\alpha_\mu)=\Big(f^{(a)}X^\mu_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\\ &+ f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha}+(f^{(a)}X^\alpha_{(a)\beta}\Phi^\beta_\mu \qquad (4.53)\\ &- f^{(a)}\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu}\Phi^\alpha_\sigma)\frac{\partial}{\partial\Phi^\alpha_\mu}\Big)\mathcal{L}_{\rm mat}(\Phi^\alpha,\Phi^\alpha_\mu)=f^{(a)}\overline{X}_{(a)}\mathcal{L}_{\rm mat}(\Phi^\alpha,\Phi^\alpha_\mu)\ .\end{aligned}$$

En virtud de la condición de invariancia rígida se sigue:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}=-f^{(a)}\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm mat}\frac{\partial X^\mu_{(a)}}{\partial x^\mu}\ , \qquad (4.54)$$

y llevando este resultado a (4.49) se obtiene la ecuación que debe satisfacer Λ, a saber:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}\Lambda+\Lambda\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\mu_{(a)}=0\ . \qquad (4.55)$$

Por sencillez, asumiremos que Λ depende sólo de los campos compensadores k^ν_μ pero no de sus derivadas, con lo que la ecuación previa se reduce a:

$$\Big(X^\nu_{(a)}k^\sigma_\mu\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\sigma}+f^{(a)}\Big(k^\sigma_\mu\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\sigma}-k^\nu_\sigma\frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\mu}\Big)\Big)\frac{\partial\Lambda}{\partial k^\nu_\mu}+\Lambda\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}X^\mu_{(a)}=0 \quad (4.56)$$

De aquí se sigue el sistema de ecuaciones (4.34),(4.35) y, por tanto, se demuestra el resultado deseado.$\diamondsuit$

Aunque la teoría es formalmente equivalente, en el sentido de que la interacción con la materia es descrita únicamente por la combinación $k^{\nu}_{\mu} \equiv \delta^{\nu}_{\mu} + h^{(a)\nu}_{\mu\sigma} X^{\sigma}_{(a)}$, nos gustaría recordar que la asociación de "potenciales gauge" $h^{(a)\sigma}_{\mu\nu}$ con generadores del grupo generaliza de modo mas directo el caso de simetrías internas. No obstante, en lo sucesivo consideraremos como campos compensadores a los campos $\{A^{(a)}_{\mu}, k^{\nu}_{\mu}\}$.

4.2.2. Estructura de la densidad Lagrangiana para los campos compensadores libres

La densidad Lagrangiana $L_0(A^{(a)}_{\mu}, A^{(a)}_{\mu,\nu}, k^{\nu}_{\mu}, k^{\nu}_{\mu,\sigma})$ *de los campos compensadores libres invariante bajo el álgebra espacio-temporal local debe ser* $\Lambda(\equiv det(q^{\nu}_{\mu}))$ *veces una función* $\mathcal{L}_0$ *de los objetos* $\mathcal{T}^{\sigma}_{\ \mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\mu}$*:*

$$L_0(A^{(a)}_{\mu}, A^{(a)}_{\mu,\nu}, k^{\nu}_{\mu}, k^{\nu}_{\mu,\sigma}) = \Lambda \mathcal{L}_0(\mathcal{T}^{\sigma}_{\ \mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\mu}) \ , \tag{4.57}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\sigma}_{\ \mu\nu} &\equiv T^{\sigma}_{\ \nu\mu} - A^{(a)}_{\rho}(k^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}X^{\sigma}_{(a)} - k^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}X^{\sigma}_{(a)}) && (4.58)\\ T^{\sigma}_{\ \nu\mu} &\equiv q^{\sigma}_{\rho}(k^{\rho}_{\nu,\tau}k^{\tau}_{\mu} - k^{\rho}_{\mu,\tau}k^{\tau}_{\nu}) && (4.59)\\ \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\mu} &\equiv k^{\rho}_{\nu}k^{\sigma}_{\mu}F^{(a)}_{\rho\sigma} \ , && (4.60) \end{aligned}$$

teniendo $F^{(a)}_{\mu\nu}$ la expresión habitual (3.39) en términos de los campos $A^{(a)}_{\mu}$.

Demostración: Hay que probar que se satisface la condición:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}(\Lambda\mathcal{L}_0) + \Lambda\mathcal{L}_0\partial_{\mu}(f^{(a)}X^{\mu}_{(a)}) = 0 \ . \tag{4.61}$$

Para ello, primero determinaremos la estructura de la función $\mathcal{L}_0$ a partir de la condición:

$$\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0 f^{(a)}\frac{\partial X^{\mu}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} = 0 \ , \tag{4.62}$$

que explícitamente reza:

$$X_{A^{(a)}_{\mu}}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu}} \ + \ X_{k^{\nu}_{\mu}}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu}} + \overline{X}_{A^{(a)}_{\mu,\nu}}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} + \overline{X}_{k^{\nu}_{\mu,\sigma}}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\sigma}}$$

$$
\begin{aligned}
+ & \quad \mathcal{L}_0 f^{(a)} \frac{\partial X^{\mu}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} = \Big(f^{(b)} C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} - A^{(a)}_{\nu} X^{\nu}_{(b)} \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\mu}} \\
- & \quad f^{(b)} A^{(a)}_{\nu} \frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu}} + \Big(X^{\nu}_{(a)} k^{\sigma}_{\mu} \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\sigma}} + f^{(a)} \Big(k^{\sigma}_{\mu} \frac{\partial X^{\nu}_{(a)}}{\partial x^{\sigma}} \\
- & \quad k^{\nu}_{\sigma} \frac{\partial X^{\sigma}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu}} + \Big(\frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\nu}} C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu} - \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - A^{(a)}_{\theta} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\mu}} \\
- & \quad A^{(a)}_{\theta} X^{\theta}_{(b)} \frac{\partial^2 f^{(b)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\nu}} A^{(a)}_{\theta} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} - f^{(b)} A^{(a)}_{\theta} \frac{\partial^2 X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \\
+ & \quad f^{(b)} \Big(C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu,\nu} - \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} A^{(a)}_{\theta,\nu} \Big) - \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\mu}} X^{\theta}_{(b)} A^{(a)}_{\theta,\nu} - \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\nu}} X^{\rho}_{(b)} A^{(a)}_{\mu,\rho} \\
- & \quad f^{(b)} \frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\nu}} A^{(a)}_{\mu,\rho} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} + \Big(\frac{\partial X^{\nu}_{(a)}}{\partial x^{\sigma}} k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\theta}} + X^{\nu}_{(a)} k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\sigma}} \\
+ & \quad \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\sigma}} \Big(k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial X^{\nu}_{(a)}}{\partial x^{\theta}} - k^{\nu}_{\theta} \frac{\partial X^{\theta}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} \Big) + f^{(a)} \Big(k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial^2 X^{\nu}_{(a)}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\sigma}} - k^{\nu}_{\theta} \frac{\partial^2 X^{\theta}_{(a)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\sigma}} \Big) \\
+ & \quad k^{\theta}_{\mu,\sigma} X^{\nu}_{(a)} \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\theta}} + f^{(a)} \Big(k^{\theta}_{\mu,\sigma} \frac{\partial X^{\nu}_{(a)}}{\partial x^{\theta}} - k^{\nu}_{\theta,\sigma} \frac{\partial X^{\theta}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} \Big) - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\sigma}} X^{\rho}_{(a)} k^{\nu}_{\mu,\rho} \\
- & \quad f^{(a)} \frac{\partial X^{\rho}_{(a)}}{\partial x^{\sigma}} k^{\nu}_{\mu,\rho} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\sigma}} + \mathcal{L}_0 f^{(a)} \frac{\partial X^{\mu}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} = 0 \; , \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

donde, de acuerdo con la expresión de la extensión 1-jet de campos de vectores, las expresiones respectivas de $\overline{X}_{A^{(a)}_{\mu,\nu}}$ y $\overline{X}_{k^{\nu}_{\mu,\sigma}}$ vienen dadas por:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_{k^{\nu}_{\mu,\sigma}} &= \frac{\partial X_{k^{\nu}_{\mu}}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial X_{k^{\nu}_{\mu}}}{\partial k^{\rho}_{\xi}} k^{\rho}_{\xi,\sigma} - \frac{\partial (f^{(a)} X^{\rho}_{(a)})}{\partial x^{\sigma}} k^{\nu}_{\mu,\rho} \\
\overline{X}_{A^{(a)}_{\mu,\nu}} &= \frac{\partial X_{A^{(a)}_{\mu}}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial X_{A^{(a)}_{\mu}}}{\partial A^{(b)}_{\rho}} A^{(b)}_{\rho,\nu} - \frac{\partial (f^{(b)} X^{\rho}_{(b)})}{\partial x^{\nu}} A^{(a)}_{\mu,\rho} \, .
\end{aligned}
$$

Ya que las funciones $f^{(a)}$ son arbitrarias e independientes entre sí, de la ecuación (4.62) se sigue el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que determina la estructura de $\mathcal{L}_0$:

$$
\begin{aligned}
(a) \quad f^{(b)} \quad : \quad & \Big(C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu} - A^{(a)}_{\theta} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu}} + \Big(k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\theta}} - k^{\nu}_{\theta} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu}} \\
+ & \quad \Big(C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\theta,\nu} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} - A^{(a)}_{\mu,\rho} \frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\nu}} - A^{(a)}_{\theta} \frac{\partial^2 X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \Big) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} \\
+ & \quad \Big(k^{\theta}_{\mu} \frac{\partial^2 X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\sigma}} - k^{\nu}_{\theta} \frac{\partial^2 X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\sigma}} + k^{\theta}_{\mu,\sigma} \frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\theta}} - k^{\nu}_{\theta,\sigma} \frac{\partial X^{\theta}_{(b)}}{\partial x^{\mu}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \quad k^{\nu}_{\mu,\rho}\frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\sigma}}\Big)\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\sigma}} + \mathcal{L}_0\frac{\partial X^{\mu}_{(a)}}{\partial x^{\mu}} = 0 \\
(b)\ \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\theta}} \quad & : \quad (\delta^a_b - A^{(a)}_{\nu}X^{\nu}_{(b)})\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\theta}} + k^{\theta}_{\mu}X^{\nu}_{(b)}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu}} \qquad (4.64)\\
& + \quad \Big(\delta^{\theta}_{\nu}C_b{}^a{}_c A^{(c)}_{\mu} - \delta^{\theta}_{\mu}A^{(a)}_{\rho}\frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\nu}} - \delta^{\theta}_{\nu}A^{(a)}_{\rho}\frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\mu}} - \delta^{\theta}_{\mu}A^{(a)}_{\rho,\nu}X^{\rho}_{(b)} \\
& - \quad \delta^{\theta}_{\nu}A^{(a)}_{\mu,\rho}X^{\rho}_{(b)}\Big)\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} + \Big(k^{\theta}_{\mu}\frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\sigma}} + \delta^{\theta}_{\sigma}\Big(k^{\rho}_{\mu}\frac{\partial X^{\nu}_{(b)}}{\partial x^{\rho}} - k^{\nu}_{\rho}\frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\mu}}\Big) \\
& + \quad k^{\theta}_{\mu,\sigma}X^{\nu}_{(b)} - \delta^{\theta}_{\sigma}k^{\nu}_{\mu,\rho}X^{\rho}_{(b)}\Big)\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\sigma}} = 0 \\
(c)\ \frac{\partial^2 f^{(b)}}{\partial x^{\theta}\partial x^{\sigma}} \quad & : \quad (\delta^a_b + A^{(a)}_{\rho}X^{\rho}_{(b)})\Big(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\theta,\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{(a)}_{\sigma,\theta}}\Big) - k^{\theta}_{\mu}X^{\nu}_{(b)}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\sigma}} \\
& - \quad k^{\sigma}_{\mu}X^{\nu}_{(b)}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial k^{\nu}_{\mu,\theta}} = 0\ .
\end{aligned}
$$

La ecuación (4.64a) establece la invariancia de $\mathcal{L}_0$ bajo el grupo rígido espacio-temporal. Usando la ecuación (4.64c) y luego la ecuación (4.64b), se demuestra por cálculo directo que: $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu})$.

De acuerdo con la ley de transformación (4.42) se puede definir la derivada compensadora generalizada de $\mathcal{D}_{\nu}\varphi^{\alpha}$ como sigue:

$$
\mathcal{D}_{\mu}(\mathcal{D}_{\nu}\varphi^{\alpha}) = k^{\sigma}_{\mu}((\mathcal{D}_{\nu}\varphi^{\alpha})_{,\sigma} + A^{(a)}_{\sigma}X^{\alpha}_{(a)\beta}\mathcal{D}_{\nu}\varphi^{\beta} - A^{(a)}_{\sigma}\partial_{\nu}X^{\rho}_{(a)}\mathcal{D}_{\rho}\varphi^{\alpha})\ . \quad (4.65)
$$

Se obtiene entonces el conmutador de derivadas compensadoras generalizadas:

$$
[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}]\varphi^{\alpha} = \mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\mathcal{D}_{\sigma}\varphi^{\alpha} + \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\mu}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\ , \quad (4.66)
$$

que confirma la estructura de $\mathcal{L}_0$. Al satisfacerse la ecuación (4.62) el requisito de invariancia local (4.61) se reduce a la ecuación

$$
\overline{f^{(a)}\mathcal{Y}_{(a)}}\Lambda + \Lambda\partial_{\mu}f^{(a)}X^{\mu}_{(a)} = 0\ ,
$$

que determina la forma del factor multiplicativo Λ cuyo resultado es conocido de demostraciones anteriores, a saber, $\Lambda = det(q^{\nu}_{\mu})$. De este modo queda demostrado que la acción que describe los campos compensadores asociados a simetrías espacio-temporales locales tiene la forma:

$$
\mathcal{S}_0 = \int L_0\, d^4x \equiv \int \Lambda\mathcal{L}_0(\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu})\, d^4x\ . \quad (4.67)
$$

$\diamondsuit$

Comentarios

I. Obsérvese que $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ generaliza la expresión del tensor de intensidad $F^{(a)}_{\mu\nu}$ para el caso de grupos de simetrías que también actúan sobre el espacio-tiempo. Por su parte $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ es de origen puramente espacio-temporal y no tiene análogo en el caso de simetrías internas. Las leyes de transformacion bajo $\mathcal{G}(M)$ de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ vienen dadas por:

$$\delta\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = f^{(a)}(x)\left(\frac{\partial X^{\sigma}_{(a)}}{\partial x^{\rho}}\mathcal{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} - \frac{\partial X^{\rho}_{(a)}}{\partial x^{\mu}}\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \frac{\partial X^{\rho}_{(a)}}{\partial x^{\nu}}\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\rho}\right), \tag{4.68}$$

$$\delta\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu} = f^{(b)}(x)\left(C_b{}^a{}_c\mathcal{F}^{(c)}_{\mu\nu} - \frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\mu}}\mathcal{F}^{(a)}_{\rho\nu} - \frac{\partial X^{\rho}_{(b)}}{\partial x^{\nu}}\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\rho}\right). \tag{4.69}$$

II. La estructura de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$, debido a la presencia de la derivada de $X^{\sigma}_{(a)}$, presenta una fuerte dependencia en la realización del grupo sobre el espacio-tiempo, a diferencia de $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$, que se construye exclusivamente con los campos compensadores. Nótese que la aparición de $\partial_\nu X^{\sigma}_{(a)}$ en la expresión de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ es consecuencia directa de la existencia de tales términos en la ley de transformación (4.41) de los campos k^{ν}_{μ}.

III. En términos de los campos $\{\mathcal{A}^{(a)}_{\mu}, k^{\nu}_{\mu}\}$ las expresiones respectivas de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ adoptan la forma:

$$\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = T^{\sigma}{}_{\nu\mu} - \mathcal{A}^{(a)}_{\mu}\partial_\nu X^{\sigma}_{(a)} + \mathcal{A}^{(a)}_{\nu}\partial_\mu X^{\sigma}_{(a)}, \tag{4.70}$$

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu} = \mathcal{A}^{(a)}_{\mu,\sigma}k^{\sigma}_{\nu} - \mathcal{A}^{(a)}_{\nu,\sigma}k^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}C_b{}^a{}_c(\mathcal{A}^{(b)}_{\mu}\mathcal{A}^{(c)}_{\nu} - \mathcal{A}^{(b)}_{\nu}\mathcal{A}^{(c)}_{\mu}) - \mathcal{A}^{(a)}_{\sigma}T^{\sigma}{}_{\mu\nu}.$$

Debemos señalar que en [56] se trabaja con las variables $\{\mathcal{A}^{(a)}_{\mu}, k^{\nu}_{\mu}\}$ pero en dicha referencia sólo se presenta $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ como objeto relevante pues allí más bien se tiene presente la idea de construir una teoría gauge de la gravitación equivalente a la Relatividad General. En esta memoria se completa la descripción anterior dando cuenta de la interpretación geométrica de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ como torsión.

4.3. Interpretación geométrica

4.3.1. Tensores de curvatura y torsión

Las transformaciones locales que mueven los puntos del espacio-tiempo definidas por $\delta x^{\mu} \equiv f^{(a)}X^{\mu}_{(a)}$ son transformaciones generales de coordenadas, bajo las cuales el índice μ de los campos k^{μ}_{ν} transforma como el índice de un vector contravariante mientras que en el caso de los campos q^{ν}_{μ} y $A^{(a)}_{\mu}$ el índice μ transforma como el de un vector covariante (véase las expresiones (4.41), (4.43), (4.12)). La teoría gauge asociada a grupos de simetría espacio-temporal da pie a considerar una geometría métrico-afín dotada de un tensor métrico

$$g_{\mu\nu} \equiv q^{\sigma}_{\mu} q^{\rho}_{\nu} \eta_{\sigma\rho} \tag{4.71}$$

y una conexión afín compatible con la métrica (véase el siguiente apartado) dada por la expresión

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \equiv q^{\rho}_{\mu}(A^{(a)}_{\nu} \partial_{\rho} X^{\theta}_{(a)} k^{\sigma}_{\theta} - k^{\sigma}_{\rho,\nu}) \ , \tag{4.72}$$

con la que se construye la correspondiente derivada covariante de vectores y tensores espacio-temporales, que denotaremos por “;” como es habitual.

Nótese que en general $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ no es simétrica en μ y ν, y, por tanto, no es la conexión de Levi-Civita (o de Christoffel) asociada a la métrica $g_{\mu\nu}$. Dependiendo del grupo espacio-temporal considerado la estructura de $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ involucra a distintos campos compensadores y cada $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ concreta define distintas geometrías. Ejemplos importantes de las cuales son el espacio de Weitzenbock, el de Riemann-Cartan o el de Weyl-Cartan, asociados respectivamente con la teoría gauge del grupo de translaciones, Poincaré y Weyl respectivamente (ver Capítulo siguiente).

Es fácil ver que la inversa de la métrica viene dada por la expresión

$$g^{\mu\nu} \equiv k^{\mu}_{\sigma} k^{\nu}_{\rho} \eta^{\sigma\rho} \ , \tag{4.73}$$

y su ley de transformación bajo $\mathcal{G}(M)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= \partial_{\sigma}(f^{(a)} X^{\mu}_{(a)}) g^{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}(f^{(a)} X^{\nu}_{(a)}) g^{\sigma\mu} \\ &- f^{(a)} \partial_{\sigma} X^{\lambda}_{(a)} \eta^{\sigma\rho}(k^{\mu}_{\lambda} k^{\nu}_{\rho} + k^{\nu}_{\lambda} k^{\mu}_{\rho}) \ . \end{aligned} \tag{4.74}$$

Los campos compensadores k^{μ}_{ν} y sus inversos q^{ν}_{μ} constituyen respectivamente las componentes contravariantes y covariantes de un sistema de *tétradas* o *vierbeins*[2] de un espacio pseudoriemanniano. Asimismo, la densidad escalar Λ puede escribirse en la forma

$$\Lambda = det(q^{\nu}_{\mu}) = \sqrt{-det(g_{\mu\nu})} \equiv \sqrt{-g} \ . \tag{4.75}$$

[2]Nótese que, a diferencia de la literatura estándar, no hacemos distinción entre índices coordenados y locales (los cuales usualmente se denotan con letras griegas y latinas respectivamente), pero a cambio distinguimos la notación de los campos k de la de sus inversos q.

Asociados a la conexión $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ se pueden construir los correspondientes tensores de curvatura (o de Riemann) y de torsión respectivos:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu} , \tag{4.76}$$

$$\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} . \tag{4.77}$$

Estos tensores se pueden relacionar con los objetos de los que depende el Lagrangiano de los campos compensadores libres:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = k^{\rho}_{\theta} q^{\lambda}_{\sigma} q^{\omega}_{\mu} q^{\xi}_{\nu} \mathcal{F}^{(a)}_{\omega\xi} \partial_{\lambda} X^{\theta}_{(a)} , \tag{4.78}$$

$$\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} = k^{\sigma}_{\theta} q^{\rho}_{\mu} q^{\lambda}_{\nu} \mathcal{T}^{\theta}{}_{\rho\lambda} . \tag{4.79}$$

Nótese la dependencia de $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ en la representación del álgebra (debido a la presencia del término $\partial_{\lambda} X^{\theta}_{(a)}$) de modo similar a como en el caso de simetrías internas el tensor de curvatura de la geometría subyacente depende de la realización del álgebra, en este caso, sobre la fibra (véase (3.74)).

4.3.2. Implementación de la Condición de Metricidad

Es conveniente no confundir las derivadas covariantes ; y D_{μ}. Como explicaremos a continuación, la derivada ; permite extender la definición de D_{μ} de objetos en cuya ley de tranformación se ven involucradas derivadas de los parámetros del álgebra gauge, esto es, derivadas de las funciones $f^{(a)}$. Como es natural, D_{μ} está definida para φ^{α} y, por tanto, se puede trivialmente extender su definición para cualquier objeto que sea invariante bajo la acción del grupo sobre el espacio-tiempo, y que se comporte bajo las transformaciones en fibra como φ^{α}. Dándose este último requisito y aún cuando pueda haber términos de la forma $\partial_{\nu}(f^{(a)} X^{\mu}_{(a)})$ en la regla de transformación del objeto en cuestión, un modo de extender la forma de D_{μ} consiste en ignorar precisamente las contribuciones procedentes de $\partial_{\nu}(f^{(a)} X^{\mu}_{(a)})$. Así, por ejemplo, en el caso de los campos k^{μ}_{σ}, $\delta k^{\mu}_{\sigma} = \partial_{\nu}(f^{(a)} X^{\mu}_{(a)}) k^{\nu}_{\sigma} - f^{(a)} \partial_{\sigma} X^{\lambda}_{(a)} k^{\mu}_{\lambda}$, se tendra:

$$D_{\nu} k^{\mu}_{\sigma} = k^{\mu}_{\sigma,\nu} - A^{(a)}_{\nu} \partial_{\sigma} X^{\lambda}_{(a)} k^{\mu}_{\lambda} . \tag{4.80}$$

Para los campos q^{σ}_{λ}, dado que $\delta q^{\sigma}_{\lambda} = f^{(a)} \partial_{\theta} X^{\sigma}_{(a)} q^{\theta}_{\lambda} - q^{\sigma}_{\theta} \partial_{\lambda}(f^{(a)} X^{\theta}_{(a)})$, se sigue

$$D_{\rho} q^{\sigma}_{\lambda} = q^{\sigma}_{\lambda,\rho} + A^{(a)}_{\rho} \partial_{\theta} X^{\sigma}_{(a)} q^{\theta}_{\lambda} \tag{4.81}$$

y fácilmente se llega a la siguiente expresión de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ en función de $D_{\rho} q^{\sigma}_{\lambda}$:

$$\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = k^{\lambda}_{\mu} k^{\rho}_{\nu} (D_{\rho} q^{\sigma}_{\lambda} - D_{\lambda} q^{\sigma}_{\rho}) . \tag{4.82}$$

De acuerdo con este criterio se puede calcular el conmutador de derivadas D_μ. Para ello hay que examinar la regla de transformación

$$\delta(D_\mu\varphi^\alpha) = f^{(a)}(x)X^\alpha_{(a)\beta}D_\mu\varphi^\beta - \partial_\mu(f^{(a)}(x)X^\nu_{(a)})D_\nu\varphi^\alpha \ , \tag{4.83}$$

de donde, ignorando el último término, se sigue

$$D_\nu(D_\mu\varphi^\alpha) = (D_\mu\varphi^\alpha)_{,\nu} + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}D_\mu\varphi^\beta \tag{4.84}$$

y, por tanto, se puede calcular el conmutador de derivadas D_ν

$$[D_\nu, D_\mu]\varphi^\alpha = F^{(a)}_{\mu\nu}X^\alpha_{(a)\beta}\varphi^\beta \ , \tag{4.85}$$

el cual presenta formalmente la misma estructura que en el caso de simetrías internas puras.

Con el fin de dar cuenta de la contribución debida a la existencia de términos del tipo $\partial_\nu(f^{(a)}X^\mu_{(a)})$ es necesario introducir la derivada covariante ; del modo siguiente. Sea ξ un objeto genérico con ley de transformación (como, por ejemplo, k^μ_ν)

$$\delta\xi = f^{(a)}X_{(a)}\xi + \partial_\mu(f^{(a)}(x)X^\nu_{(a)})\Sigma^\mu_\nu\xi \ . \tag{4.86}$$

De acuerdo con [73] si no se ignora en $\delta\xi$ el término que contiene $\partial_\mu(f^{(a)}(x)X^\nu_{(a)})$ la generalización de D_μ viene dada por

$$\xi_{;\mu} \equiv \xi_{,\mu} + A^{(a)}_\mu X_{(a)}\xi + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\Sigma^\nu_\sigma\xi = D_\mu\xi + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\Sigma^\nu_\sigma\xi \ , \tag{4.87}$$

donde la conexion $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ en principio es independiente de los campos k^ν_μ y $A^{(a)}_\mu$.[3] El modo más sencillo de relacionar $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ con los campos compensadores es imponer la condición $k^\mu_{\rho;\nu} = 0$, que explícitamente se escribe en la forma

$$k^\mu_{\rho;\nu} = k^\mu_{\rho,\nu} - A^{(a)}_\nu \frac{\partial X^\sigma_{(a)}}{\partial x^\rho}k^\mu_\sigma + \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}k^\sigma_\rho = D_\nu k^\mu_\rho + \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}k^\sigma_\rho = 0 \ . \tag{4.89}$$

De aquí se puede despejar $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$, recuperándose así la expresión (4.72). Asimismo se sigue la condición de *metricidad* o de *compatibilidad* entre la métrica y la conexión

$$g_{\mu\nu;\sigma} = 0 \ . \tag{4.90}$$

[3] En particular, para los campos de materia se cumple $D_\mu\varphi^\alpha = \varphi^\alpha_{;\mu}$ pero $(\varphi^\alpha_{;\mu})_{;\nu} \neq D_\nu D_\mu\varphi^\alpha$. Más concretamente:

$$\begin{aligned}(\varphi^\alpha_{;\mu})_{;\nu} \equiv \varphi^\alpha_{;\mu\nu} &= (D_\mu\varphi^\alpha)_{,\nu} + A^{(a)}_\nu X^\alpha_{(a)\beta}D_\mu\varphi^\beta + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}D_\sigma\varphi^\alpha \\ &= D_\nu D_\mu\varphi^\alpha + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}D_\sigma\varphi^\alpha \ .\end{aligned} \tag{4.88}$$

La derivada covariante introducida actuando sobre vectores y tensores espacio-temporales tiene la forma estándar, e.g.

$$v^{\mu}_{;\nu} = v^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} v^{\sigma} \ .$$

No obstante, hay que subrayar que se trata de una derivada covariante con respecto a la conexión espacio-temporal "total" $\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}$ construida con todos los campos compensadores de la teoría (ver (4.72)). Que la conexión espacio-temporal tenga esta forma equivale a decir que, en el caso más general, dicha conexión contiene en su estructura los llamados coeficientes de no metricidad de la teoría estándar de la gravitación. Por tanto, la ecuación (4.90) no contradice el hecho de que en geometrías más generales que la pseudoriemanniana (de la TRG) se puede violar[4] la condición de metricidad expresada en términos de una derivada covariante construida con una conexión espacio-temporal que sólo involucra campos tetrádicos y conexiones de spin (los campos compensadores del subgrupo de Lorentz).

Finalmente, el conmutador de derivadas covariantes espacio-temporales sucesivas tiene la forma siguiente:

$$\xi_{;\mu\nu} - \xi_{;\nu\mu} = F^{(a)}_{\mu\nu} X_{(a)} \xi + R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \Sigma^{\sigma}_{\rho} \xi - \theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} \xi_{;\sigma} \ . \qquad (4.91)$$

4.4. Ecuaciones de los campos compensadores

Dada la densidad Lagrangiana total invariante bajo $\mathcal{G}(M)$

$$L_{\text{tot}} = \widetilde{L}_{\text{mat}} + L_0 \ , \qquad (4.92)$$

donde $\widetilde{L}_{\text{mat}} = \Lambda \mathcal{L}_{\text{mat}}(\varphi^{\alpha}, \mathcal{D}_{\mu}\varphi^{\alpha} \equiv k^{\nu}_{\mu}(\varphi^{\alpha}_{\nu} + A^{(a)}_{\mu} X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}))$, $L_0 = \Lambda \mathcal{L}_0(\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu})$, $\Lambda \equiv det(q^{\nu}_{\mu}), \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial k^{\mu}_{\nu}} = -\Lambda q^{\nu}_{\mu}\right)$, las ecuaciones para los campos k^{μ}_{ν} y $A^{(a)}_{\mu}$ se escriben respectivamente en la forma:

$$2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\sigma}} k^{\lambda}_{\sigma} F^{(a)}_{\mu\lambda} \quad - \quad \Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{T}^{\sigma}{}_{\rho\lambda}} q^{\sigma}_{\mu} T^{\nu}{}_{\lambda\rho} + 2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{T}^{\sigma}{}_{\rho\nu}} q^{\sigma}_{\theta} k^{\lambda}_{\rho} \Gamma^{\theta}{}_{\lambda\mu} \qquad (4.93)$$

[4] De hecho, en un espacio de Riemann-Cartan se sigue cumpliendo la condición de metricidad estándar, cosa que deja de ocurrir, por ejemplo, en un espacio de Weyl donde se permite el cambio de longitud de vectores bajo la operación geométrica de *transporte paralelo*. En este último caso la conexión que aparece en la estructura de la derivada covariante no involucra al campo compensador dilatónico que determina el cambio en las longitudes.

$$
\begin{aligned}
& - \frac{d}{dx^\sigma}\left(2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{T}^\lambda_{\ \rho\nu}} q^\lambda_\mu k^\sigma_\rho\right) - q^\nu_\mu \Lambda \mathcal{L}_0 = -\mathcal{T}^\nu_\mu \\
2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}^{(e)}_{\sigma\rho}} k^\mu_\rho k^\lambda_\sigma C_a{}^e{}_b A^{(b)}_\lambda & + 2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{T}^\theta_{\ \sigma\rho}} k^\mu_\rho \partial_\sigma X^\theta_{(a)} - \frac{d}{dx^\nu}\left(2\Lambda \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}}\right) \\
& = \mathcal{S}^\mu_{(a)} \ , \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

donde las corrientes de materia vienen dadas por las expresiones:

$$
\mathcal{T}^\nu_\mu \equiv \frac{\partial \widetilde{L}_{\rm mat}}{\partial k^\mu_\nu} = \Lambda q^\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \mathcal{D}_\nu \varphi^\alpha} \mathcal{D}_\sigma \varphi^\alpha - \delta^\nu_\sigma \mathcal{L}_{\rm mat}\right) \ , \qquad (4.95)
$$

$$
\mathcal{S}^\mu_{(a)} \equiv -\frac{\partial \widetilde{L}_{\rm mat}}{\partial A^{(a)}_\mu} = -\Lambda k^\mu_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \mathcal{D}_\sigma \varphi^\alpha} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta \ . \qquad (4.96)
$$

Si se elige $L_0 = \Lambda \mathcal{L}_0(\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu})$, entonces la ecuacion (4.93) se simplifica y generaliza las ecuaciones de Einstein para Lagrangianos no lineales,

$$
\frac{\partial L_0}{\partial \mathcal{F}^{(a)}_{\nu\sigma}} k^\lambda_\sigma F^{(a)}_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} q^\nu_\mu L_0 = -\frac{1}{2}\mathcal{T}^\nu_\mu \ . \qquad (4.97)
$$

4.5. Leyes de conservación

Dada la densidad Lagrangiana de materia $\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)$, invariante bajo el álgebra rígida de simetrías espacio-temporales $\mathcal{G}$, usando las ecuaciones de los campos φ^α y la condición de invariancia rígida (4.5) se obtienen n corrientes estrictamente conservadas de la forma:

$$
\mathcal{J}^{\mu({\rm rigido})}_{(a)} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta + X^\nu_{(a)} \varphi^\alpha_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm mat}}{\partial \varphi^\alpha_\mu} - X^\mu_{(a)} \mathcal{L}_{\rm mat} \ . \qquad (4.98)
$$

Al implementar la simetría local $\mathcal{G}(M)$ son de interés las corrientes de materia $\mathcal{T}^\nu_\mu$ y $\mathcal{S}^\mu_{(a)}$. Con ayuda de (4.5) y escribiendo la ecuación de los campos de materia en forma manifiestamente covariante se obtienen las leyes de conservación que satisfacen $\mathcal{T}^\nu_\mu$ y $\mathcal{S}^\mu_{(a)}$ (en concordancia con [8, 22]):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{T}}^\mu_{\nu;\mu} - \theta_\mu \widetilde{\mathcal{T}}^\mu_\nu + \theta^\sigma{}_{\nu\mu} \widetilde{\mathcal{T}}^\mu_\sigma &= F^{(a)}_{\nu\sigma} \mathcal{S}^\sigma_{(a)} \qquad (4.99) \\
\mathcal{S}^\mu_{(a);\mu} - \theta_\mu \mathcal{S}^\mu_{(a)} &= \widetilde{\mathcal{T}}^\mu_\sigma q^\nu_\mu \partial_\nu X^\rho_{(a)} k^\sigma_\rho \ , \qquad (4.100)
\end{aligned}
$$

donde $\widetilde{\mathcal{T}}^\mu_\nu \equiv k^\mu_\rho \mathcal{T}^\rho_\nu$, $\theta_\mu \equiv \theta^\sigma{}_{\mu\sigma}$.

4.6. Observaciones

I. La generalización del procedimiento “compensador” de la teoría de Utiyama al caso de grupos de simetría que actúan también sobre el espacio-temporal requiere la introducción de campos compensadores que generalizan los coeficientes de conexión asociados a las simetrías gauge internas. Hay que subrayar que aunque un generador $X_{(a)}$ del grupo no actúe sobre la fibra, i.e. $X^{\alpha}_{(a)\beta} = 0$, pero sí sobre el espacio-tiempo ($X^{\mu}_{(a)} \neq 0$), es necesario introducir los correspondientes potenciales $A^{(a)}_{\mu}$ (aunque no contribuyan en la expresión de $\mathcal{D}_{\mu}\varphi^{\alpha}$) y, en consecuencia, la densidad Lagrangiana de los campos compensadores libres en principio también puede depender de su “curvatura” generalizada $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$. En el Capítulo siguiente se estudiará como ejemplo particular el caso del grupo de translaciones espacio-temporales puras $T(4)$.

II. La ventaja de la teoría desarrollada en este capítulo es su generalidad, de modo que basta asignar a las representaciones de los generadores $X^{\mu}_{(a)}$ y $X^{\alpha}_{(a)}$ las expresiones de cada grupo de Lie asociado a una simetría espacio-temporal (e.g. Translaciones, Lorentz, Poincaré, ect.) para obtener la correspondiente teoría gauge particular. Ésta es la tarea del siguiente Capítulo, donde se materializará la aplicacion fisica del Teorema de Utiyama generalizado para ciertos grupos espacio-temporales, estudiando en cada caso la posibilidad natural de una formulación de la interacción gravitatoria como teoría gauge, de modo análogo al resto de interacciones fundamentales.

III. Los campos $A^{(a)}_{\mu}$ y k^{μ}_{ν} tienen leyes de transformación que no se corresponden con el comportamiento estándar de los campos gauge asociados a grupos de simetría interna, de modo que se pierde el contacto con la descripción tradicional de la teoría gauge en términos de fibrados. Sin embargo, lo que sí se preserva es el carácter compensador de los campos $A^{(a)}_{\mu}$ y k^{μ}_{ν}. Esto es especialmente relevante en lo tocante al controvertido estatus de las tétradas como campos gauge, cuestión que desde los comienzos de las teorías gauge de la gravedad ha estado en entredicho. En nuestro formalismo, si bien se generaliza la forma misma de la ley de transformación de los campos “gauge”, lo que se mantiene es el espíritu de campos compensadores. Sin embargo, en la bibliografía se puede encontrar (e.g. [11, 12]) trabajos en que los grupos espacio-temporales son “tratados” como si fueran grupos internos empleando la construcción convencial de fibrados principales, de modo que pasan a ser vistos como grupos estructurales de un cierto fibrado principal y los únicos campos gauge de la teoría son del tipo $A^{(a)}_{\mu}$. No obstante, en esta aproximación siempre es necesario introducir *ad hoc* un sistema de coordenadas curvilíneo y un sistema asociado de campos tetrádicos que se relacionan posteriormente con un cierto sector de los campos $A_\mu^{(a)}$ (concretamente con los potenciales translacionales) con el fin de poner de manifiesto de algún modo la naturaleza espacio-temporal de la simetría de partida. Obviamente, en este enfoque los campos tetrádicos no son introducidos como campos compensadores propiamente dichos. Esta característica se puede considerar de hecho como un remanente de la teoría gauge del grupo de Lorentz formulada por Utiyama.

Capítulo 5

Teoría gauge de la Gravitación

El establecimiento de un principio de invariancia bajo un grupo de simetría espacio-temporal local está intrínsecamente relacionado con la esencia del Principio de Equivalencia, que (junto con el Principio de Relatividad) constituye la base de la teoría de la Relatividad General. De hecho, el Principio de Equivalencia (PE) puede interpretarse como un principio de invariancia local. Más concretamente, de acuerdo con el PE, en un campo gravitatorio siempre es posible elegir en cada punto x un sistema de referencia inercial $O(x)$. Dicho sistema de referencia localmente inercial $O(x)$ puede obtenerse a partir de un sistema de referencia fijo arbitrario $O(x_0)$ mediante translaciones y rotaciones Lorentzianas locales[1], esto es, por medio de tranformaciones locales de Poincaré. En virtud del Principio de Relatividad las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sitemas de referencia localmente inerciales y, por tanto, el grupo de Poincaré local, con acción sobre el conjunto de todos los sistemas de referencia localmente inerciales, resulta ser un grupo de transformaciones de simetría que caracteriza a cualquier campo gravitacional. En ausencia de campo gravitatorio la teoría se reduce a la Relatividad Especial y las transformaciones de simetría espacio-temporal correspondientes se reducen al grupo de Poincaré global o rígido.

No obstante, como se ha explicado en el Capítulo previo, la formulación de la teoría gauge asociada con un grupo de Lie de simetrías espacio-temporales da pie a una serie de cuestiones, que no se dan en el caso de simetrías internas, tales como el significado del carácter de "potencial gauge" del tensor métrico o la patente arbitrariedad en la elección del grupo de gauge, pues se puede mencionar, por ejemplo, el grupo de translaciones espacio-temporales puras,

[1]Los parámetros de estas tranformaciones dependen del punto x donde se define el sistema de referencia $O(x)$.

el grupo de Lorentz, Poincaré, Weyl o el grupo conforme entre otros. Como ya se comentó, el origen de tales dificultades surge como consecuencia de los "diferentes tipos" de transformaciones involucradas, responsables a su vez de la distinción de dos tipos de campos compensadores, a saber, *potenciales gauge* $A_\mu^{(a)}$ y campos *tetrádicos* k_μ^ν. La ley de transformación de las tetradas dista de seguir la regla de transformación de los campos gauge tradicionales y este hecho, de por sí, supone una cuestión sutil que ha dado lugar a diversas interpretaciones de los campos k_μ^ν en el contexto de la teoría gauge de la gravitación. Así, algunos autores identifican los campos tétradicos con la parte no trivial de los campos gauge asociados a las translaciones espacio-temporales locales, en otros enfoques se identifican con la parte translacional de una conexión afín sobre el fibrado tangente $T(M)$, y también hay posturas a favor de considerarlos campos de tipo Higgs-Goldstone ([15]). [2]

En el presente Capítulo aplicaremos la teoría gauge general incluyendo simetrías espacio-temporales, expuesta en el Capítulo anterior, para revisar en particular la teoría gauge gravitacional asociada a los grupos de translaciones puras, Lorentz, Poincaré (en este caso, recuperando los resultados fundamentales de [8]) y Weyl. Se analizan las condiciones bajo las que se recupera la teoría einsteniana y se comentan las ventajas de ciertas teorías gauge de gravedad que generalizan la Relatividad General, como por ejemplo, las llamadas *teorías de Einstein-Cartan*.

5.1. Grupo de translaciones espacio-temporales

El índice de grupo corre sobre el subgrupo $T(4)$ de translaciones espacio-temporales del grupo de Poincaré, de modo que[3] $(a) = (\mu)$. La realización de los generadores sobre el espacio-tiempo y sobre los campos materiales viene dada por las expresiones:

$$\begin{aligned} X^\nu_{(\mu)} &= \delta^\nu_\mu \\ X^\alpha_{(\mu)\beta} &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

[2]Por nuestra parte, en el Capítulo 8 ofrecemos una posible interpretación alternativa, estudiando la naturaleza de los campos k_μ^ν en el marco de la invariancia bajo el grupo de los 1-jets de los difeomorfismos de la variedad espacio-temporal.

[3]No hay que hacer distinción entre la naturaleza de la etiqueta μ correspondiente al valor del indice de grupo (a) o al índice coordenado en x^μ. Sólo el paréntesis () indica explícitamente la asociación con un generador del grupo.

y debido a la acción nula sobre la fibra los generadores de la simetría translacional rígida se reducen a la sencilla expresión:

$$X_{(\mu)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; . \tag{5.2}$$

Los conmutadores del álgebra de translaciones locales reproducen las relaciones de conmutación del álgebra de difeomorfismos infinitesimales[4]

$$\begin{aligned} [f^{(\mu)}(x)X_{(\mu)}, g^{(\nu)}(x)X_{(\nu)}] &= f^{(\mu)}(x)\partial_\mu g^{(\nu)}(x)X_{(\nu)} \\ &- g^{(\nu)}(X)\partial_\nu f^{(\mu)}(x)X_{(\mu)} \; . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hay que enfatizar que los campos compensadores $A^{(\mu)}_\nu$ pueden considerarse no triviales, a pesar de que la derivada covariante de los campos de materia coincida con la derivada ordinaria, i.e. $D_\mu \varphi^\alpha = \varphi^\alpha_{,\mu}$. Con lo cual la derivada compensadora generalizada se obtiene de la derivada ordinaria multiplicándola por campos tetrádicos:

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^\alpha \equiv k^\nu_\mu \varphi^\alpha_{,\nu} \, , \tag{5.4}$$

De acuerdo con la teoría general expuesta en el capítulo anterior, el Lagrangiano libre $\mathcal{L}_0$ debe ser una función (escalar bajo el grupo rígido) arbitraria de los objetos $\mathcal{T}^\sigma{}_{\mu\nu}$, $\mathcal{F}^{(\sigma)}_{\mu\nu}$, que en este caso particular, debido a la estructura abeliana del grupo rigido $T(4)$, tienen la forma:

$$\mathcal{T}^\sigma{}_{\mu\nu} = T^\sigma{}_{\nu\mu} \; , \tag{5.5}$$

$$\mathcal{F}^{(\sigma)}_{\mu\nu} = k^\lambda_\mu k^\rho_\nu (A^{(\sigma)}_{\lambda,\rho} - A^{(\sigma)}_{\rho,\lambda}) \; . \tag{5.6}$$

La no trivialidad de los campos gauge translacionales $A^{(\sigma)}_\mu$ no debería suponer un incremento efectivo del número de grados de libertad, por lo que está permitido imponer una cierta ligadura (compatible con las ecuaciones de movimiento) que relacione $A^{(\sigma)}_\mu$ con las tétradas. Si se asume (como se sugiere, por ejemplo, en [8], [11])

$$A^{(\sigma)}_\mu = \delta^\sigma_\mu + q^\sigma_\mu \tag{5.7}$$

se sigue

$$\mathcal{T}^\sigma{}_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{(\sigma)}_{\mu\nu} = T^\sigma{}_{\nu\mu} \; , \tag{5.8}$$

por lo que finalmente la densidad Lagrangiana L_0 invariante bajo el grupo de translaciones locales (difeomorfismos infinitesimales) tiene la forma:

$$L_0 = \Lambda \mathcal{L}_0(T^\sigma{}_{\nu\mu}) \; . \tag{5.9}$$

[4]Nótese, sin embargo, que para grupos de simetrías internas abelianas los conmutadores del álgebra local son nulos.

5.1.1. Interpretación geométrica: Espacio de Weitzenbock

Con el fin de construir una teoría gravitacional y poder compararla (en términos geométricos) con la Relatividad General, a continuación particularizamos las fórmulas geométricas del apartado 4.3 del capítulo anterior para la teoría gauge de $T(4)$. La conexión $\Gamma^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu}$ se reduce a la llamada *conexión de Cartan*:

$$\Gamma^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu} \equiv -q^{\rho}_{\mu}k^{\sigma}_{\rho,\nu} = k^{\sigma}_{\rho}q^{\rho}_{\mu,\nu} \ , \tag{5.10}$$

caracteriza por tener tensor de curvatura nulo y torsión diferente de cero:

$$R^{\sigma(T(4))}_{\mu\rho\nu} = 0 \ , \tag{5.11}$$

$$\theta^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu} = k^{\sigma}_{\rho}q^{\lambda}_{\mu}q^{\xi}_{\nu}T^{\rho}{}_{\lambda\xi} \ . \tag{5.12}$$

La geometría resultante es la de un espacio-tiempo de Weitzenbock [75]. Por otra parte, se tiene el tensor métrico $g_{\mu\nu} \equiv q^{\rho}_{\mu}q^{\sigma}_{\nu}\eta_{\rho\sigma}$ y su correspondiente conexión de Levi-Civita reza:

$$\Gamma^{\sigma(L-C)}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}) \ , \tag{5.13}$$

que es simétrica en μ y ν y, por tanto, tiene torsión nula pero tensor de curvatura $R^{\sigma(\Gamma^{(L-C)})}_{\mu\rho\nu}$ no trivial.

Se encuentra la siguiente relación entre las conexiones $\Gamma^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu}$ y $\Gamma^{\sigma(L-C)}_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma(L-C)}_{\mu\nu} + \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu}, \tag{5.14}$$

donde

$$\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\theta^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu} - \theta_{\mu}{}^{\sigma(T(4))}_{\ \ \nu} - \theta_{\nu}{}^{\sigma(T(4))}_{\ \ \mu}) \ , \tag{5.15}$$

con $\theta_{\mu}{}^{\sigma(T(4))}_{\ \ \nu} \equiv \theta^{\lambda(T(4))}_{\tau\nu}g_{\lambda\mu}g^{\tau\sigma}$. Además, también se cumple:

$$\Gamma_{\rho\lambda\mu}^{\ (T(4))} = -\Gamma_{\lambda\rho\mu}^{\ (T(4))} + g_{\rho\lambda,\mu} \ , \tag{5.16}$$

donde $\Gamma_{\rho\lambda\mu}^{\ (T(4))} = g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma(T(4))}_{\lambda\mu}$.

5.1.2. Teleparalelismo

Hasta ahora la generalización del Teorema de Utiyama aplicada al caso del grupo de translaciones espacio-temporales sólo alcanza a concebir la estructura de $\mathcal{L}_0$ como una función escalar de la torsión de Cartan $T^{\sigma}{}_{\mu\nu}$. De entre todas las densidades Lagrangianas posibles desde el punto de vista matemático, en particular, una cierta combinación específica cuadrática en $T^{\sigma}{}_{\mu\nu}$, denominada densidad Lagrangiana del *teleparalelismo*, dada por[5]

$$\begin{aligned} L_{0(\text{teleparalelismo})} &\equiv \Lambda\mathcal{L}_{0(\text{teleparalelismo})} \\ &\equiv \Lambda T^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\rho}{}_{\lambda\theta}\left(\frac{1}{4}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\sigma\theta}\eta_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\delta^{\theta}_{\mu}\eta^{\nu\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho}-\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\theta}_{\rho}\eta^{\nu\lambda}\right)\ , \end{aligned} \tag{5.18}$$

reproduce la teoría gravitacional einsteniana [74, 75]. Más concretamente, ocurre que la densidad Lagrangiana del Teleparalelismo y la densidad Lagrangiana de Hilbert-Einstein $\mathcal{L}_{H-E}$, construida a partir de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica $g_{\mu\nu} \equiv q^{\sigma}_{\mu}q^{\rho}_{\nu}\eta_{\sigma\rho}$, se diferencian en una derivada total (véase Apéndice 10.4):

$$\mathcal{L}_{H-E} = \Lambda\mathcal{L}_{0(\text{teleparalelismo})} + \text{divergencia}\ , \tag{5.19}$$

donde más explícitamente, recordamos,

$$\mathcal{L}_{H-E} \equiv \Lambda R^{(\Gamma^{(L-C)})}, \tag{5.20}$$

de la que, como es bien sabido, variando con respecto al tensor métrico, se derivan las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R^{(\Gamma^{(L-C)})}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{(\Gamma^{(L-C)})} = 0\ , \tag{5.21}$$

teniendo el tensor de Ricci $R^{(\Gamma^{(L-C)})}_{\rho\nu}$ y la curvatura escalar $R^{(\Gamma^{(L-C)})}$ las conocidas expresiones respectivas:

$$R^{(\Gamma^{(L-C)})}_{\rho\nu} \equiv R^{\mu(\Gamma^{(L-C)})}_{\rho\mu\nu}\ , \tag{5.22}$$

$$R^{(\Gamma^{(L-C)})} \equiv g^{\rho\nu}R^{(\Gamma^{(L-C)})}_{\rho\nu}\ . \tag{5.23}$$

[5] Podría reescribirse (5.7) en la forma $KA^{(\sigma)}_{\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu} + q^{\sigma}_{\mu}$ donde K es una constante. En tal caso $\mathcal{F}^{(\mu)}_{\nu\sigma} = \frac{1}{K}T^{\mu}_{\sigma\nu}$ y

$$\mathcal{L}_{0(\text{teleparalelismo})} = \frac{1}{K^2}T^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\rho}{}_{\lambda\theta}\left(\frac{1}{4}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\sigma\theta}\eta_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\delta^{\theta}_{\mu}\eta^{\nu\lambda}\delta^{\sigma}_{\rho}-\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\theta}_{\rho}\eta^{\nu\lambda}\right)\ . \tag{5.17}$$

Entonces el parámetro de acoplamiento K desempeñaría el papel de constante de gravitación universal.

La forma de $L_{0(\text{teleparalelismo})}$ se puede deducir del requisito de invariancia de $L_0(T^\sigma{}_{\mu\nu})$ bajo una simetría extra que actúa sobre el índice no tensorial de los campos k^μ_ν, con generadores

$$X_\omega \equiv \omega_{\nu\rho}(x)\eta^{\rho\sigma}k^\mu_\sigma \frac{\partial}{\partial k^\mu_\nu}, \tag{5.24}$$

donde $\omega_{\mu\nu}(x) = -\omega_{\nu\mu}(x)$ son los parámetros infinitesimales asociados. En la literatura, en general, se suele hacer referencia al grupo generado por esta subálgebra bajo el nombre de *grupo de Lorentz local*, pero nos gustaría subrayar que no se puede identificar con el subgrupo del grupo de Poincaré local que lleva el mismo nombre. Sobre este aspecto volveremos en el Capítulo 8.

En definitiva, la teoría gauge del grupo de translaciones espacio-temporales permite describir la interacción gravitatoria en un espacio-tiempo cuya geometría está caracterizada por torsión no trivial y curvatura nula. La teoría resultante, el teleparalelismo, se puede ver pues como una versión dual a la teoría de la Relatividad General y puede resultar de interés en el estudio de diversas cuestiones donde la teoría estándar tiene dificultades, como por ejemplo, la cuantización de la gravedad. Para terminar, nos gustaría poner de relieve la mencionada dualidad en el contexto referente al movimiento de partículas en un campo gravitatorio. Así, por ejemplo, en un espacio-tiempo pseudoriemanniano la trayectoria de una partícula sin spin viene codificada por la ecuación geodésica

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \Gamma^{(L-C)}_{\mu\nu,\theta} u^\theta u^\nu \ , \tag{5.25}$$

mientras que en el contexto de la teoría gauge de $T(4)$ se puede demostrar [21] que la ecuación (5.25) es equivalente a la ecuación *de fuerza*

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \Gamma^{\sigma (T(4))}_{\nu\mu} u_\sigma u^\nu \ , \tag{5.26}$$

que no es una geodésica pues $\Gamma^{\sigma (T(4))}_{\nu\mu} \equiv -q^\rho_\nu k^\sigma_{\rho,\mu}$ no es simétrica en ν y μ.

5.2. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré es el producto semidirecto del subgrupo de translaciones y el subgrupo de Lorentz, por lo que la notación del índice de grupo en este caso es la siguiente: $(a) = \{(\mu)$ translaciones, $(\nu\sigma)$ Lorentz$\}$, y una realización particular de los generadores del álgebra rígida de Poincaré tiene la forma[6] :

$$X_{(\mu)} = X^{\nu}_{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} , \tag{5.27}$$

$$X_{(\mu\nu)} = X^{\sigma}_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} + X^{\alpha}_{(\mu\nu)} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \tag{5.28}$$

con

$$X^{\nu}_{(\mu)} = \delta^{\nu}_{\mu} , \tag{5.29}$$

$$X^{\sigma}_{(\mu\nu)} = \delta^{\sigma}_{(\mu\nu),\rho} x^{\rho} \equiv (\delta^{\sigma}_{\mu}\eta_{\nu\rho} - \delta^{\sigma}_{\nu}\eta_{\mu\rho}) x^{\rho} , \tag{5.30}$$

$$X^{\alpha}_{(\mu\nu)} = X^{\alpha}_{(\mu\nu)\beta} \varphi^{\beta} \tag{5.31}$$

donde las matrices $S^{\alpha}_{(\mu\nu)\beta}$ actuando sobre las componentes internas de los campos quedan determinadas por las relaciones de conmutación del grupo de Poincaré y la antisimetría en los índices de Lorentz, $X^{\alpha}_{(\mu\nu)\beta} = -X^{\alpha}_{(\nu\mu)\beta}$.

Como consecuencia de la hipótesis de invariancia de la acción de materia bajo el grupo de Poincaré rígido se obtienen las corrientes conservadas (sobre soluciones) asociadas respectivamente con la conservación de la energía-momento y el momento angular:

$$\mathcal{J}^{\mu(\text{rigido})}_{(\nu)} = X^{\sigma}_{(\nu)} \varphi^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} - X^{\mu}_{(\nu)} \mathcal{L}_{\text{mat}} = \varphi^{\alpha}_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}_{\text{mat}} , \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\mu(\text{rigido})}_{(\sigma\rho)} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} X^{\alpha}_{(\sigma\rho)\beta} \varphi^{\beta} + X^{\nu}_{(\sigma\rho)} \varphi^{\alpha}_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} - X^{\mu}_{(\sigma\rho)} \mathcal{L}_{\text{mat}} \qquad (5.33) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} X^{\alpha}_{(\sigma\rho)\beta} \varphi^{\beta} + X^{\nu}_{(\sigma\rho)} \mathcal{J}^{\mu(\text{rigido})}_{(\nu)} . \end{aligned}$$

De acuerdo con la teoría expuesta en el Capítulo 4, al implementar la simetría local el Lagrangiano de los campos compensadores libres debe ser una función de los objetos covariantes gauge $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$. En este caso, la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_0$ de orden más bajo con la que se puede construir

[6]Nótese que la dependencia en x^{μ} de las componentes espacio-temporales $X^{\sigma}_{(\mu\nu)}$ del subgrupo de Lorentz no es "gauge". Recuérdese que la dependencia gauge o local surge del hecho de multiplicar los generadores por funciones arbitrarias $f^{(a)}(x)$. Por este motivo en la literatura se suele distinguir entre índices locales y coordenados en las tétradas. Como ya se comentó en el capítulo anterior, nosotros preferimos mantener ambos índices curvilíneos en los campos k^{ν}_{μ} y distinguimos los campos inversos con la notación q^{μ}_{σ}. En nuestra formulación los campos que sí llevan explícitamente el índice local (a) son los campos $h^{(a)\nu}_{\mu\rho}$, pero al contraer los índices del álgebra en la expresión $k^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} + h^{(a)\nu}_{\mu\sigma} X^{\sigma}_{(a)}$ el índice (a) desaparece en las tétradas.

una teoría gravitacional debe ser lineal en la *curvatura* generalizada $\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\lambda\theta}$ asociada al subgrupo de Lorentz:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\Lambda\mathcal{F}^{(\mu\nu)}_{\mu\nu} \ , \tag{5.34}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\lambda\theta} &\equiv k^\mu_\lambda k^\nu_\theta F^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu} \\ &\equiv k^\mu_\lambda k^\nu_\theta (A^{(\sigma\rho)}_{\mu,\nu} - A^{(\sigma\rho)}_{\nu,\mu} - (A^{(\sigma\kappa)}_\mu A^{(\xi\rho)}_\nu - A^{(\sigma\kappa)}_\nu A^{(\xi\rho)}_\mu)\eta_{\kappa\xi}) \ . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Con esta elección de $\mathcal{L}_0$, la densidad Lagrangiana total invariante bajo el grupo de Poincaré local tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{\rm tot} = \Lambda\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \mathcal{D}_\mu\varphi^\alpha \equiv k^\nu_\mu(\varphi^\alpha_\nu + \frac{1}{2}A^{(\sigma\rho)}_\nu X^\alpha_{(\sigma\rho)\beta}\varphi^\beta)) + \frac{1}{2}\Lambda\mathcal{F}^{(\mu\nu)}_{\mu\nu} \ , \tag{5.36}$$

y las ecuaciones respectivas de los campos compensadores k^ν_μ y $A^{(\sigma\rho)}_\mu$ son las siguientes:

$$\Lambda(\mathcal{F}^{(\mu\sigma)}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\mathcal{F}^{(\rho\sigma)}_{\rho\sigma}) = -\mathcal{T}^\mu_\sigma k^\sigma_\nu \ , \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(k^\mu_\theta T^\theta{}_{\rho\sigma} &- k^\mu_\rho T^\theta{}_{\theta\sigma} + k^\mu_\sigma T^\theta{}_{\theta\rho} + (k^\mu_\theta k^\nu_\rho - k^\mu_\rho k^\nu_\theta)A^{(\theta}{}_{\sigma)\nu} \\ &- (k^\mu_\sigma k^\nu_\theta + k^\mu_\theta k^\nu_\sigma)A^{(\theta}{}_{\rho)\nu}) = 2\mathcal{S}^\mu_{(\sigma\rho)} \ , \end{aligned} \tag{5.38}$$

donde

$$\mathcal{T}^\mu_\sigma \equiv \frac{\partial}{\partial k^\sigma_\mu}(\Lambda\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \mathcal{D}_\nu\varphi^\alpha)) \tag{5.39}$$

$$\mathcal{S}^\mu_{(\sigma\rho)} \equiv -\frac{\partial}{\partial A^{(\sigma\rho)}_\mu}(\Lambda\mathcal{L}_{\rm mat}(\varphi^\alpha, \mathcal{D}_\nu\varphi^\alpha)) \tag{5.40}$$

son las corrientes de materia definidas en (4.95) y (4.96).

En términos de $\mathcal{T}^\theta{}_{\sigma\rho}$ la ecuación (5.38) se escribe en la forma:

$$\Lambda(k^\mu_\theta\mathcal{T}^\theta{}_{\sigma\rho} - k^\mu_\rho\mathcal{T}^\theta{}_{\sigma\theta} - k^\mu_\sigma\mathcal{T}^\theta{}_{\theta\rho}) = 2\mathcal{S}^\mu_{(\sigma\rho)} \ , \tag{5.41}$$

de donde se sigue la ley de conservación

$$\frac{d}{dx^\mu}(\mathcal{S}^\mu_{(\sigma\rho)} + \int^\mu_{(\sigma\rho)}) = 0 \ , \tag{5.42}$$

donde

$$\int^\mu_{(\sigma\rho)} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{(\sigma\rho)}_\mu} \ . \tag{5.43}$$

Con la interpretación de $\mathcal{S}^\mu_{(\sigma\rho)}$ como la *densidad de spin* de la materia y de $\int^\mu_{\sigma\rho}$ como el *spin* del campo gravitacional, la ecuación (5.42) expresa la conservación del spin.

5.2.1. Interpretación geométrica: Espacio de Riemann-Cartan

La teoría gauge del grupo de Poincaré admite una geometría de Riemann-Cartan caracterizada por el tensor métrico $g_{\mu\nu} \equiv q^\rho_\mu q^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma}$ y la conexión (relacionada con la métrica a través de la condición de metricidad)

$$\begin{aligned}\Gamma^{\sigma(P)}_{\mu\nu} &\equiv q^\rho_\mu \left(\frac{1}{2}A^{(\lambda\omega)}_\nu \partial_\rho X^\theta_{(\lambda\omega)} k^\sigma_\theta - k^\sigma_{\rho,\nu}\right) = -q^\rho_\mu k^\sigma_{\rho,\nu} + q^\rho_\mu A^{(\theta\lambda)}_\nu \eta_{\lambda\rho} k^\sigma_\theta \\ &= \Gamma^{\sigma(T(4))}_{\mu\nu} + q^\rho_\mu A^{(\theta\lambda)}_\nu \eta_{\lambda\rho} k^\sigma_\theta \ , \qquad (5.44)\end{aligned}$$

que admite los tensores de curvatura y torsión respectivos:

$$R^{\rho(P)}{}_{\sigma\mu\nu} = k^\rho_\theta q^\lambda_\sigma q^\omega_\mu q^\xi_\nu \frac{1}{2}\mathcal{F}^{(\kappa\zeta)}_{\omega\xi} \partial_\lambda X^\theta_{(\kappa\zeta)} = k^\rho_\theta q^\lambda_\sigma q^\omega_\mu q^\xi_\nu \mathcal{F}^{(\theta\zeta)}_{\omega\xi} \eta_{\zeta\lambda} \ , \qquad (5.45)$$

$$\begin{aligned}\theta^{\sigma(P)}_{\mu\nu} &= k^\sigma_\theta q^\rho_\mu q^\lambda_\nu \mathcal{T}^{\theta(P)}{}_{\rho\lambda} \qquad (5.46) \\ &= k^\sigma_\theta q^\rho_\mu q^\lambda_\nu (T^\theta{}_{\lambda\rho} + A^{(\theta\zeta)}_\kappa (k^\kappa_\lambda \eta_{\zeta\rho} - k^\kappa_\rho \eta_{\zeta\lambda})) \ .\end{aligned}$$

Usando las expresiones de estos tensores e introduciendo las notaciones

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} \equiv g_{\sigma\mu}\widetilde{T}^\sigma_\nu \equiv g_{\sigma\mu} k^\sigma_\rho \widetilde{T}^\rho_\nu = q^\sigma_\mu \eta_{\rho\sigma} \mathcal{T}^\rho_\nu \qquad (5.47)$$

$$\widetilde{\mathcal{S}}^\lambda_{\mu\nu} \equiv q^\sigma_\mu q^\rho_\nu \mathcal{S}^\lambda_{(\sigma\rho)} \ , \qquad (5.48)$$

las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en la forma:

$$\Lambda(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = -\widetilde{T}_{\mu\nu} \ , \qquad (5.49)$$

$$\Lambda\theta^\lambda{}_{\mu\nu} = 2\widetilde{\mathcal{S}}^\lambda_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\mu \widetilde{\mathcal{S}}^\rho_{\rho\nu} - \delta^\lambda_\nu \widetilde{\mathcal{S}}^\rho_{\mu\rho} \ . \qquad (5.50)$$

A la vista de estas ecuaciones, un resultado importante es que la fuente material del campo de torsión es el spin de la materia.

En la siguiente sección compararemos la teoría obtenida con la teoría de la Relatividad General. Para ello distinguiremos dos casos dependiendo de la ausencia o no de campos de materia. Asimismo comentaremos la posibilidad de formular teorías gravitacionales más generales que la teoría de Einstein de la gravitación.

5.2.2. Teorías gravitacionales asociadas a la teoría gauge del grupo de Poincaré

Considerando la densidad Lagrangiana (5.36) se obtuvieron las ecuaciones (5.37) y (5.38). A continuación se estudian estas ecuaciones en función de la existencia o no de campos materiales

Ecuaciones en el vacío

Sin campos materiales la ecuación de los campos $A_\mu^{(\sigma\rho)}$,

$$k_\theta^\mu \mathcal{T}^\theta{}_{\sigma\rho} - k_\rho^\mu \mathcal{T}^\theta{}_{\sigma\theta} - k_\sigma^\mu \mathcal{T}^\theta{}_{\theta\rho} = 0 \ , \tag{5.51}$$

puede ser resuelta exactamente, obteniéndose los campos gauge asociados al subgrupo de Lorentz en términos de la torsión de Cartan $T^\sigma{}_{\mu\nu}$

$$A^{\text{vacio}}_{(\sigma\rho)\mu} = \frac{1}{2} q_\mu^\lambda (T_{\sigma\rho\lambda} + T_{\rho\lambda\sigma} - T_{\lambda\sigma\rho}) \tag{5.52}$$

con $A^{\text{vacio}}_{(\sigma\rho)\mu} \equiv A_\mu^{(\lambda\theta)\text{vacio}} \eta_{\lambda\sigma}\eta_{\theta\rho}$, $T_{\sigma\rho\lambda} \equiv T^\mu{}_{\rho\lambda}\eta_{\mu\sigma}$. Por tanto, $A^{\text{vacio}}_{(\sigma\rho)\mu}$ son los llamados coeficientes de rotación de Ricci de la teoría estándar de la gravitación.

En ausencia de materia, las ecuaciones (5.49) y (5.50) se reducen a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{5.53}$$

$$\theta^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{5.54}$$

La ecuación (5.54) implica que la conexión afín $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ es simétrica, y, por tanto, igual a la conexión de Christoffel asociada a la métrica. Entonces el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es simétrico y (5.53) resultan ser las ecuaciones de Einstein en el vacío, de modo que se recupera la geometría pseudo-riemanniana de la Relatividad General.

Observación sobre la teoría gauge del grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz no es un subgrupo invariante del grupo de Poincaré y, por tanto, al "gaugear" sus generadores y mantener la invariancia bajo el grupo rígido de translaciones espacio-temporales necesariamente se "gaugean" también las translaciones y en consecuencia el grupo de Poincaré.

Restringiéndonos exclusivamente al sector de las transformaciones de Lorentz locales se puede afirmar que la supuesta teoría gauge asociada a este subgrupo sólo requeriría la introducción de potenciales gauge de Lorentz $A_{\mu\nu}^{(\sigma\rho)}$ y tétradas k_ν^μ y el Lagrangiano de los campos compensadores libres

$\mathcal{L}_0(A^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu}, k^{\mu}_{\nu})$ sería una función de la curvatura de Lorentz generalizada $\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu}$ y de $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$. Usando la densidad Lagrangiana $L_0 = \frac{1}{2}\Lambda\mathcal{F}^{(\mu\nu)}_{\mu\nu}$ se puede recuperar, del mismo modo que en el caso descrito en la teoría gauge del grupo de Poincaré, las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Ecuaciones con materia

En el caso general en que se considere la existencia de campos materiales, la ecuación para $A^{(\sigma\rho)}_{\mu}$ admite solución analítica explícita si el Lagrangiano original de materia es de primer orden en las derivadas de los campos (como ocurre en el caso de campos fermiónicos de Dirac tales como el electrón) y viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} A_{(\sigma\rho)\mu} &= A^{\text{vacio}}_{(\sigma\rho)\mu} - \frac{1}{2}q^{\lambda}_{\mu}(\mathcal{M}_{\lambda(\sigma\rho)} - \mathcal{M}_{\sigma(\rho\lambda)} - \mathcal{M}_{\rho(\lambda\sigma)} \\ &- \eta_{\lambda\sigma}\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\nu\rho)} - \eta_{\lambda\rho}\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\sigma\nu)})\,, \end{aligned} \tag{5.55}$$

donde

$$\mathcal{M}_{\lambda(\sigma\rho)} \equiv \eta_{\lambda\nu}\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\sigma\rho)}\,, \tag{5.56}$$

$$\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\sigma\rho)} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\partial\mathcal{D}_{\nu}\varphi^{\alpha}}X^{\alpha}_{(\sigma\rho)\beta}\varphi^{\beta}\,. \tag{5.57}$$

Nótese que $\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\sigma\rho)}$ es cero para materia sin spin pero no para la materia fermiónica. Así, para un espinor de Dirac ψ, $\mathcal{M}^{\nu}{}_{(\sigma\rho)} \sim \bar{\psi}\gamma^{\nu}X_{(\sigma\rho)}\psi$.

Cuando hay materia presente, $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$ no son simétricos. La densidad tensorial de energía-momento $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ tampoco lo es y la teoría correspondiente difiere de la teoría gravitacional estándar. Esta situación generaliza la teoría de Einstein con una densidad Lagrangiana genérica dada por:

$$\Lambda\mathcal{F}^{(\mu\nu)}_{\mu\nu} = \Lambda R^{(\Gamma^{(L-C)})} + \Upsilon(\mathcal{M}^{\mu}{}_{(\sigma\rho)})\,, \tag{5.58}$$

donde la forma de la función Υ de nuevo depende de la naturaleza específica del tipo de materia fermiónica considerada. No obstante, en el caso del campo de Dirac se puede demostrar [8] que los términos que difieren de la TRG son cuadráticos en la densidad de spin, generando así una interacción spin-spin de "contacto" (tipo Fermi) de orden cuártico en los campos de materia. Sin embargo, el orden de magnitud de tal interacción es despreciable frente al resto de términos y, en consecuencia, desde el punto de vista experimental la teoría gauge de Poincaré no difiere de la TRG.

Generalizaciones de la TRG

Por un lado, a partir de argumentos relacionados con la gravedad cuántica se infiere la necesidad de Lagrangianos cuadráticos respecto de la curvatura, por lo tanto, la teoría gauge de la gravitación es un contexto adecuado[7] para la formulación de teorías de gravedad descritas por densidades Lagrangianas que generalizan la de Hilbert-Einstein (lineal en la curvatura escalar).

Asimismo, uno de los resultados importantes de la teoría gauge de la gravedad es la posibilidad de incorporar la torsión como un nuevo campo geométrico. Así, por ejemplo, en el contexto de la teoría gauge del grupo de Poincaré se pueden considerar densidades Lagrangianas gravitacionales dependiendo explícitamente de $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\sigma\rho)}$ y $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$, esto es, teorías de gravedad que involucran simultáneamente curvatura y torsión. La variante más difundida es la denominada *teoría de Einstein-Cartan*, descrita por Lagrangianos lineales en la curvatura y cuadráticos en la torsión. En este caso concreto, la relación del spin con la torsión es algebraica (no dinámica), es decir, la torsión resulta ser proporcional a la corriente espinorial fermiónica, y, por lo tanto, la torsión sólo existe donde hay partículas con spin. En ausencia de dichas partículas la teoría de Einstein-Cartan se reduce a la TRG. Otro caso interesante es de Lagrangianos gravitacionales cuadraticos en la curvatura y en la torsion (ver e.g. [76, 77])

La detección experimental de la torsión podría involucrar fenómenos tales como el desdoblamiento adicional de las líneas del electrón en el átomo o la violación CP en las desintegraciones de partículas, pero si la constante de acoplamiento de la torsión es igual a la gravitatoria entonces todos los efectos de laboratorio serían muy pequeños y no podrían comprobarse experimentalmente. No obstante, la relevancia de la torsión es más notoria en ciertos modelos cosmológicos en el sentido de que pueden detenerse colapsos gravitatorios. De hecho, tanto en la teoría de Einstein-Cartan como en modelos con torsión dinámica se obtienen soluciones cosmológicas regulares respecto a la métrica.

5.3. Grupo de Weyl

La realización de la acción del grupo de Weyl sobre el espacio-tiempo y las componentes internas de los campos de materia contiene la realización del grupo de Poincaré junto con las expresiones correspondientes al generador

[7] Otros escenarios posibles que permiten generalizar la Relatividad General son la *teoría multidimensional de Kaluza-Klein* y la *supergravedad*, en la actualidad teorías candidatas de unificar (no sin dificultades) la gravitación y el resto de interacciones.

de las dilataciones espacio-temporales

$$X^{\mu}_{(\mathrm{dil})} = x^{\mu} \tag{5.59}$$

$$X^{\alpha}_{(\mathrm{dil})} = \delta^{\alpha}_{\beta}\omega\varphi^{\beta} \tag{5.60}$$

donde ω es el *número dimensional* o *dimensión de Weyl* del campo de materia.

Al implementar la simetría local es necesario introducir los campos compensadores del grupo de Weyl, de modo que además de los campos compensadores de la teoría gauge del grupo de Poincaré hay que considerar un nuevo campo compensador $A^{(dil)}_{\mu}$ asociado a las transformaciones de escala locales. De acuerdo con el principio de acoplamiento mínimo generalizado la densidad Lagrangiana original de los campos de materia $\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}(\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{\mu})$ debe sustituirse por la densidad Lagrangiana $\Lambda\mathcal{L}(\varphi^{\alpha}, \mathcal{D}_{\mu}\varphi^{\alpha})$ donde $\Lambda = det(q^{\nu}_{\mu})$ y la derivada compensadora generalizada $\mathcal{D}_{\mu}\varphi^{\alpha}$ en este caso reza:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu}\varphi^{\alpha} &= k^{\nu}_{\mu}(\varphi^{\alpha}_{\nu} + A^{(a)}_{\mu}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}) \\ &= k^{\nu}_{\mu}(\varphi^{\alpha}_{\nu} + \frac{1}{2}A^{(\sigma\rho)}_{\nu}X^{\alpha}_{(\sigma\rho)\beta}\varphi^{\beta} + \omega A^{(dil)}_{\nu}\varphi^{\alpha}) \ .\end{aligned} \tag{5.61}$$

En lo que respecta los campos compensadores libres, su dinámica viene descrita, tal y como establece el Teorema de Utiyama generalizado, por la densidad Lagrangiana $\Lambda\mathcal{L}_0(\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}, \mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu})$ donde aparece un nuevo tensor de intensidad dilatónico

$$\mathcal{F}^{(\mathrm{dil})}_{\mu\nu} = k^{\sigma}_{\mu}k^{\rho}_{\nu}F^{(\mathrm{dil})}_{\sigma\rho} = k^{\sigma}_{\mu}k^{\rho}_{\nu}(A^{(\mathrm{dil})}_{\sigma,\rho} - A^{(\mathrm{dil})}_{\sigma,\rho}) \tag{5.62}$$

junto con

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu} &= \mathcal{T}^{\sigma\,\mathrm{P}}_{\mu\nu} - A^{(dil)}_{\rho}(k^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}X^{\sigma}_{(dil)} - k^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}X^{\sigma}_{(dil)}) \\ &= \mathcal{T}^{\sigma\,\mathrm{P}}_{\mu\nu} - A^{(dil)}_{\rho}(k^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - k^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu}) \ ,\end{aligned} \tag{5.63}$$

donde $\mathcal{T}^{\sigma\,\mathrm{P}}_{\mu\nu}$ es la contribución correspondiente al grupo de Poincaré, que denotamos por P (notación que emplearemos a lo largo de esta sección).

Como analizaremos después, las teorías de gravedad asociadas al grupo de Weyl local deben describirse mediante densidades Lagrangianas de dimensión de Weyl nula, y este requisito restringe la forma de $\mathcal{L}_0$.

5.3.1. Interpretación geométrica: Espacio de Weyl-Cartan

De acuerdo con la sección 4.3 del Capítulo previo, con los campos compensadores de la teoría gauge del grupo de Weyl se puede construir un tensor métrico $g_{\mu\nu} = q^{\sigma}_{\mu}q^{\rho}_{\nu}\eta_{\sigma\rho}$ y una conexión espacio-temporal

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = q^{\rho}_{\mu}(A^{(a)}_{\nu}\partial_{\rho}X^{\theta}_{(a)}k^{\sigma}_{\theta} - k^{\sigma}_{\rho,\nu}) = \Gamma^{\sigma\,\mathrm{P}}_{\mu\nu} + \delta^{\sigma}_{\mu}A^{(dil)}_{\nu} \ . \tag{5.64}$$

Dicha conexión, en general, no es simétrica y, por tanto, admite torsión no nula $\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}$. Es posible expresar $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ en función de los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\sigma}{}^{\mathrm{L-C}}_{\mu\nu}$, del campo compensador de escala $A^{(\mathrm{dil})}_{\mu}$ y de la torsión $\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ [78]:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\sigma}{}^{\mathrm{L-C}}_{\mu\nu} + (\delta^{\sigma}_{\mu} A^{(\mathrm{dil})}_{\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu} A^{(\mathrm{dil})}_{\mu} - g_{\mu\nu} A^{(\mathrm{dil})\sigma}) \\
&+ \frac{1}{2}(\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} + g^{\lambda\sigma}(g_{\kappa\mu}\theta^{\kappa}{}_{\nu\lambda} + g_{\kappa\nu}\theta^{\kappa}{}_{\mu\lambda}))\ .
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Luego la geometría resultante es la de un espacio de Weyl-Cartan con tensores de curvatura y torsión respectivos:

$$\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \theta^{\sigma}{}^{\mathrm{P}}_{\mu\nu} + (\delta^{\sigma}_{\mu} A^{(\mathrm{dil})}_{\nu} - \delta^{\sigma}_{\nu} A^{(\mathrm{dil})}_{\mu})\ , \tag{5.66}$$

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}{}^{\mathrm{P}}_{\sigma\mu\nu} + \delta^{\rho}_{\sigma} F^{(dil)}_{\mu\nu}\ . \tag{5.67}$$

Obsérvese que $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ no es antisimétrico con respecto a los dos primeros índices ρ y σ.

La geometría de Weyl-Cartan es un caso particular de geometría de Eddington, la cual esta asociada de modo natural a la teoría gauge del grupo general lineal $GL(4, R)$, el grupo lineal más general de simetrías de la teoría de la gravitación.

5.3.2. Teorías gravitacionales asociadas a la teoría gauge del grupo de Weyl

Como se mencionó antes, las teorías de gravedad basadas en la teoría gauge del grupo de Weyl se describen por medio de densidades Lagrangianas $L_0 = \Lambda\mathcal{L}_0$ con dimensión de Weyl ω nula. Entonces por contaje de numeros dimensionales $\omega(\Lambda) = 4$ y, por tanto, $\mathcal{L}_0$ debe tener dimensión -4. Por otro lado, $\mathcal{L}_0$ depende de los objetos covariantes $\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ cuyas dimensiones de escala se obtienen de sus leyes de transformación bajo el grupo de Weyl local. En consecuencia sólo están permitidas aquellas elecciones de $\mathcal{L}_0$ compatibles con que $\omega(\mathcal{L}_0(\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu}, \mathcal{T}^{\sigma}{}_{\mu\nu})) = -4$. Así, por ejemplo, un $\mathcal{L}_0$ lineal en la curvatura generalizada de Lorentz $\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\sigma\rho}$ no estaría permitido puesto que $\omega(\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu}) = -2$ en virtud de la ley de transformación

$$\delta\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu} = \delta^{\mathrm{P}}\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu} - 2f^{(\mathrm{dil})}(x)\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu}\ . \tag{5.68}$$

En cambio, sí están permitidas, por ejemplo, combinaciones cuadráticas[8] en $\mathcal{F}^{(\sigma\rho)}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{F}^{(\mathrm{dil})}_{\mu\nu}$ (ver, por ejemplo, [80, 85]).

[8] De hecho, en la teoría original de Weyl la densidad Lagrangiana es cuadrática [79].

Finalmente, es interesante observar que la teoría gauge del grupo de Weyl se puede relacionar con la teoría escalar-tensorial de la gravitación, en concreto, con la teoría de Brans-Dicke.

5.4. Observaciones

I. La formulación de la gravedad como una teoría derivada de un principio de invariancia gauge o local presenta cierta arbitrariedad en cuanto a la elección del grupo de simetría espacio-temporal con el que se construye la teoría. Las geometrías resultantes asociadas a cada grupo son distintas, aunque todas deben recuperar bajo ciertas condiciones la teoría de la gravedad de Einstein. Ciñéndonos a grupos lineales de simetría espacio-temporal, la situación más general consiste en considerar la teoría gauge del grupo general lineal $GL(4, R)$, cuya álgebra, además de incluir los generadores del grupo de Lorentz, contiene el generador de dilataciones y los operadores de hipermomentos. En la TRG el principio de relatividad se formula como la condición de invariancia de la teoría respecto a las transformaciones del sistema de referencia. Definir un sistema de referencia en la teoría de la gravitación equivale a fijar el atlas del fibrado tangente, y el grupo de transformaciones de atlas de los sistemas de referencia es el grupo general lineal. Por tanto, el *principio de relatividad* se puede ver como un principio de invariancia bajo el grupo $GL(4, R)$ local. En el caso de la teoría gauge de $GL(4, R)$ se puede considerar la conexión espacio-temporal más general, incorporando en su estructura los coeficientes de no-metricidad o de transporte no métrico. Como se comentó anteriormente, este espacio se dice que tiene geometría de Eddington. Un caso particular de espacio de Eddington es el de Weyl-Cartan. Cuando la torsión es nula entonces se dice que tenemos un espacio de Weyl.

También vimos que la geometría de Riemann-Cartan surge de modo natural al considerar la teoría gauge del grupo de Poincaré. Recordamos que el *principio de equivalencia* se puede considerar como un principio de invariancia bajo el grupo de Poincaré local. Si se impone que la torsión sea nula, la geometría de Riemann-Cartan se reduce a la geometría pseudoriemanniana de la TRG caracterizada por curvatura no trivial. Si por el contrario se hace cero la curvatura pero no la torsión, se obtiene el llamado espacio de Weitzenbock donde es posible describir la TRG en la llamada versión del Teleparalelismo, nombre con el a menudo es referida la teoría gauge del grupo de translaciones espacio-temporales $T(4)$. Finalmente, si tanto la curvatura como la torsión son nulas la teoría se reduce a la teoría de la Relatividad Especial sobre el espacio de Minkowski.

II. El punto de partida de la formulación de las teorías gauge de gravedad, al igual que en el caso de simetrías internas, usualmente consiste en suponer la existencia de ciertos campos de materia en un espacio-tiempo dado (generalmente Minkowskiano), cuya integral de acción es invariante bajo un cierto grupo de Lie de simetrías externas o espacio-temporales (e.g. el grupo de Poincaré). A continuación, el proceso sistemático que prescribe la generalización del Teorema de Utiyama permite obtener la forma general de la densidad Lagrangiana que describe la correspondiente teoría gauge de gravedad. Si bien este proceso es importante desde el mero punto de vista matemático, pudiera sin embargo ser eliminado a la luz de las ecuaciones finales para el campo gravitatorio. Dicho de otro modo, se puede considerar como un paso intermedio que a la postre puede ser obviado, de tal manera que la densidad Lagrangiana final pasa a ser el punto de partida de una teoria de gravedad invariante bajo un conjunto de transformaciones locales que mueven el espacio-tiempo, y cuya dinámica se deriva de acuerdo con el principio variacional estándar. No obstante, es obvio que las soluciones de la teoría gauge definitiva no presentarán una topología diferente a la original de partida, ya que es una propiedad que se preserva bajo difeormorfismos. De este modo, la teoría gauge de la gravitación sólo da cuenta de todos los tensores métricos compatibles con la topología de la variedad espacio-temporal de partida. Una salida a este obstáculo consistiría en tomar como punto de partida un espacio-tiempo asociado con un grupo de simetría mayor, como la simetría conforme, donde la coordenada temporal se incluye en las superficies de datos iniciales, y entonces mediante el mecanismo de rotura de la simetría podrían emerger cualquiera de las tres topologías asociadas de modo natural con la simetría conforme, i.e. Anti-de Sitter, de Sitter y Minkowski.

Capítulo 6

Mezcla de la Gravitación y el Electromagnetismo

En este Capítulo presentamos un marco simple no trivial capaz de dar cuenta de la mezcla de la gravitación y el electromagnetismo, sirviendo asimismo como una vía abierta para considerar la mezcla con el resto de interacciones fundamentales. En nuestra formulación haremos uso de dos nociones físicas importantes, a saber: el principio de invariancia gauge y el concepto de *extensión central de un grupo* (en particular se considera la extensión central, $\tilde{\mathcal{P}}$, del grupo de Poincaré, $\mathcal{P}$, por $U(1)$). Por un lado, la invariancia gauge es la clave para la formulación de las interacciones y es un requisito que ayuda a garantizar la renormalizabilidad de la teoría. Además, recordamos que uno de los intereses originales de la descripción de la gravedad como una teoría gauge es precisamente la posibilidad de su unificación con el resto de interacciones. Por otra parte, la motivación para considerar un grupo centralmente extendido está basada en la relevancia de esta noción en algunas áreas de la Física, especialmente en la teoría cuántica (también en Mecánica Clásica en la versión de Hamilton-Jacobi). De hecho, grupos espacio-temporales tradicionales como el de Galileo o Poincaré sólo dejan semi-invariante los Lagrangianos de las correspondientes partículas libres, y se requiere una extensión central para lograr la invariancia estricta. Es bien conocido también que la ecuación de Schrödinger para la partícula libre no es invariante bajo el grupo de Galileo G aunque sí lo es bajo el grupo de Galileo centralmente extendido, $\tilde{G}_{(m)}$. Análogamente, se puede considerar la simetría espacio-temporal de la partícula cuántica relativista, que viene caracterizada por el conmutador de los boosts y las translaciones modificado con el generador central Ξ asociado con $U(1)$, i.e.

$$[K^i, P_j] = \delta^i_j \left(\frac{1}{c} P_0 + \lambda^0 \Xi \right) . \tag{6.1}$$

con $\lambda^0 \equiv m$. En este caso, se ha elegido un cuadri-vector particular λ de la órbita $\lambda^2 = m^2$ en el espacio de momentos. En el límite no relativista este conmutador conduce a los conmutadores básicos del grupo de Galileo centralmente extendido, $\widetilde{G}_{(m)}$.

6.1. Extensiones centrales de grupos

En primer lugar hay que definir qué se entiende por *extensión* de un grupo por otro grupo y luego matizar el significado de extensión *central*. Como su nombre indica, la idea de extender un grupo G por otro grupo H tiene como fin añadir nuevos parámetros a G respetando la estructura de grupo, y se define como sigue:

$\tilde{G}$ es una extensión de G por H, si H es un subgrupo normal invariante de $\tilde{G}$ y se cumple que $G = \tilde{G}/H$.

Nótese que H es un subgrupo de $\tilde{G}$, pero, en general, G no lo es[1].

Se dice que la extensión de G por H es central si H es un grupo Abeliano y está contenido en el centro de $\widetilde{G}$, y por tanto, los elementos de H conmutan con cualquier elemento de $\tilde{G}$.

Un ejemplo particularmente importante de extensiones centrales, y al que nos circunscribiremos en esta memoria, son aquéllas en las que el grupo de partida G se extiende por el grupo $U(1)$ de invariancia de fase de la Mecánica Cuántica. Este caso particular de extensiones centrales de grupos de Lie (cuya clasificación fue realizada por Bargmann [86]) es muy importante desde el punto de vista físico. De hecho, se sabe que el problema de la clasificación de todas las posibles representaciones proyectivas unitarias de un grupo (que son las representaciones relevantes en Mecánica Cuántica) es equivalente al problema de la clasificación de las extensiones centrales de un grupo por $U(1)$.

En el contexto de la teoría de fibrados, el grupo centralmente extendido $\tilde{G}$ tiene estructura de fibrado principal con grupo estructural $U(1)$ y variedad

[1]En términos del álgebra, los conmutadores de los generadores de G no cierran en general.

base el grupo G, cumpliéndose[2]

$$G = \tilde{G}/U(1) \ . \tag{6.2}$$

Si trabajamos a nivel infinitesimal, dada el álgebra $\mathcal{G}$ de G caracterizada por las relaciones de conmutación

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = C_a{}^c{}_b X_{(c)} \ , \tag{6.3}$$

la nueva álgebra $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\tilde{G}$ se define modificando los conmutadores anteriores introduciendo un nuevo generador *central* (i.e. que conmuta con el resto de generadores) X_ζ asociado al parámetro ζ de $U(1)$ y unos nuevos parámetros constantes α_{ab} llamados *cargas centrales*:

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] \ = \ C_a{}^c{}_b X_{(c)} + \alpha_{ab} X_\zeta \tag{6.4}$$

$$[X_\zeta, X_{(a)}] \ = \ 0 \ , \forall X_{(a)} \in \mathcal{G} \ . \tag{6.5}$$

Los términos α_{ab} se identifican con la constante de estructura $C_a{}^\zeta{}_b$ y, por tanto, deben satisfacer la relación de Jacobi:

$$C_a{}^d{}_b C_d{}^\zeta{}_k + C_b{}^d{}_k C_d{}^\zeta{}_a + C_k{}^d{}_a C_d{}^\zeta{}_b = 0 \ . \tag{6.6}$$

A modo de observacion, puede ocurrir que un grupo pueda verse como la extensión por $U(1)$ de una variedad que no tenga estructura de grupo. Por ejemplo, el grupo semisimple $SU(2)$ es la extensión (no central) por $U(1)$ de la esfera S^2, que no es grupo, y, en este caso, es la variedad base ($S^2 = SU(2)/U(1)$) del fibrado principal.

6.1.1. Cociclos

Mediante la noción de *cociclo* se puede obtener la ley de grupo de la extensión central, $\tilde{G}$, de G por $U(1)$, respetando la ley de grupo de G pero modificando la ley de grupo de $U(1)$. Dada la ley de composición[3] $g'' = g' * g$ de los parámetros de grupo de G, la ley de grupo de $\tilde{G}$ se define como:

$$\begin{aligned} g'' \ &= \ g' * g \\ \zeta'' \ &= \ \zeta' \zeta \Delta(g', g) \ , \end{aligned} \tag{6.7}$$

[2] En general, para un fibrado principal $\pi : P \to M$ con grupo estructural G, la variedad base está dada por el cociente $P/G = M$.

[3] Por simplicidad tipográfica se puede escribir $g'' = g'g$.

que en función de los llamados *exponentes locales* [86], $\zeta = e^{i\varphi}$, $\Delta(g', g) = e^{i\xi(g',g)}$, se escribe:

$$\begin{aligned} g'' &= g' * g \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} \ \ (\Leftrightarrow \varphi'' = \varphi' + \varphi + \xi(g', g)) \ , \end{aligned} \tag{6.8}$$

donde la fase ξ es una aplicacion $\xi : G \times G \to R$ que satisface las propiedades de *2-cociclo*:

$$\xi(g'', g') + \xi(g''g', g) = \xi(g'', g'g) + \xi(g', g) \tag{6.9}$$

$$\xi(e, g) = 0 = \xi(g', e) \ , \tag{6.10}$$

donde e es el elemento neutro del grupo.

Ciertos cociclos ξ_c llamados *cobordes* tienen la forma especial:

$$\xi_c(g', g) = \eta(g'g) - \eta(g') - \eta(g) \tag{6.11}$$

donde η recibe el nombre de *funcion generatriz*. Los cobordes son también denominados cociclos triviales, pues mediante el cambio de variables

$$\hat{g} = g \tag{6.12}$$

$$\hat{\zeta} = e^{-i\eta}\zeta \tag{6.13}$$

se deshace la extensión central:

$$\hat{g}'' = \hat{g}'\hat{g} \tag{6.14}$$

$$\hat{\zeta}'' = \hat{\zeta}'\hat{\zeta} \ . \tag{6.15}$$

Se sabe, sin embargo, que los cociclos triviales pueden clasificarse en dos tipos diferentes según la estructura de sus funciones generatrices [87]. Al primer tipo pertenecen los cobordes que conducen a curvatura nula sobre el grupo y que, por tanto, son realmente triviales desde el punto de vista físico. El segundo tipo se corresponde con aquellos cobordes cuya conexión sobre el grupo tiene curvatura no trivial y, en consecuencia, son cobordes físicamente relevantes. Estos cobordes reciben el nombre de *pseudo-cociclos* y sus extensiones centrales asociadas se llaman *pseudo-extensiones*. Un ejemplo de pseudo-extensión es el caso de la extensión central del grupo de Poincaré por $U(1)$. La caracterización de las clases de pseudo-extensiones asociadas con estructuras simplécticas no equivalentes da lugar a la noción de *pseudo-cohomología*. Para un estudio detallado de las pseudo-extensiones y el papel que desempeñan en la teoría de representaciones se puede consultar la referencia [88] así como la bibliografía allí citada. El rasgo más importante de las pseudo-extensiones es que de ellas se puede derivar *estructuras simplécticas* no triviales y su correspondiente dinámica [89, 90]. De hecho, la pseudo-cohomología resulta fundamental para dotar de dinámica a grupos con cohomología trivial, como es el caso de los grupos semisimples o del grupo de Poincaré. También resulta ser una pieza clave para la formulación de la dinámica en grupos de dimensión infinita como $Diff(S^1)$ y otros grupos de difeomorfismos. Otro escenario que involucra de modo crucial el papel de los pseudocociclos es la construcción explícita del exponente local asociado con cociclos de álgebras de Lie de los correspondientes grupos de Kac-Moody [90, 91]. En cualquier caso, el contexto donde la necesidad y relevancia de la pseudocohomología es más patente es la llamada Cuantización sobre Grupos (CSG).

6.2. Grupo de Poincaré centralmente extendido por $U(1)$

El objetivo de este Capítulo es la construcción de un modelo de mezcla entre la gravedad y el electromagnetismo basado en la teoría gauge de la extensión central, $\widetilde{\mathcal{P}}$, del grupo de Poincaré por $U(1)$. El índice de grupo (a) corre sobre los índices de translaciones (μ), de Lorentz $(\nu\sigma)$ y de $U(1)$ (Φ). El conmutador de los generadores de los subgrupos de Lorentz y translaciones se modifica en la forma

$$[\widetilde{M}_{\mu\nu}, \widetilde{P}_\rho] = \eta_{\nu\rho}\widetilde{P}_\mu - \eta_{\mu\rho}\widetilde{P}_\nu - (\lambda_\mu\eta_{\nu\rho} - \lambda_\nu\eta_{\mu\rho})\Xi \equiv C_{\mu\nu\ \rho}^{\ \ \sigma}\widetilde{P}_\sigma + C_{\mu\nu\ \rho}^{\ \ \Phi}\Xi \ , \tag{6.16}$$

con

$$C_{\mu\nu\ \rho}^{\ \ \Phi} \equiv \lambda_\nu\eta_{\mu\rho} - \lambda_\mu\eta_{\nu\rho} \ , \tag{6.17}$$

donde Ξ es el generador de $U(1)$ y λ_μ es un vector de la coálgebra de Poincaré perteneciente a una cierta órbita coadjunta, y, como indicaremos después, está relacionado con la constante de acoplamiento de la mezcla.

Desde el punto de vista matemático, el grupo $\widetilde{\mathcal{P}}$ es una extensión central trivial del grupo de Poincaré por $U(1)$. De hecho, realizando el cambio

$$P_\mu \to \widetilde{P}_\mu = P_\mu + \lambda_\mu\Xi \tag{6.18}$$

es claro que $\widetilde{\mathcal{P}}$ es equivalente al producto directo $\mathcal{P} \otimes U(1)$. Por lo tanto, el cociclo asociado es un coborde y, mas concretamente, es de hecho un pseudocociclo.

Como veremos en la siguiente sección, el grupo $\tilde{\mathcal{P}}$ está asociado con una simetría gauge que, en particular, genera una *curvatura electromagnética generalizada* no trivial asociada con el índice de grupo de $U(1)$ que contiene términos de origen puramente gravitatorio, generando así la correspondiente mezcla de electro-gravedad.

6.3. Teoría gauge de $\widetilde{\mathcal{P}}$

Procediendo de acuerdo con la teoría general desarrollada en el Capítulo 4, el Lagrangiano para los campos compensadores libres debería ser una función general de $\mathcal{T}^{\sigma}_{\mu\nu}$ y las curvaturas generalizadas:

$$\mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu} \equiv k^{\sigma}_{\mu} k^{\rho}_{\nu} F^{(a)}_{\sigma\rho} \ , \tag{6.19}$$

donde

$$F^{(a)}_{\sigma\rho} \equiv A^{(a)}_{\sigma,\rho} - A^{(a)}_{\rho,\sigma} - \frac{1}{2} \widetilde{C_b{}^a{}_c} (A^{(b)}_{\sigma} A^{(c)}_{\rho} - A^{(b)}_{\rho} A^{(c)}_{\sigma}) \ . \tag{6.20}$$

Aquí, el índice (a) corre sobre todo el grupo $\widetilde{\mathcal{P}}$ y $\widetilde{C_b{}^a{}_c}$ denota sus constantes de estructura. Debido a la pseudoextensión central, hay que destacar la presencia de la constante de acoplamiento de mezcla, κ, a través de la constante $C_{\mu}{}^{\Phi}{}_{\sigma\rho}$ en la curvatura generalizada $\mathcal{F}^{(\Phi)}_{\mu\nu}$ asociada al grupo $U(1)$. Sin pérdida de generalidad se puede seleccionar una cierta dirección para λ_{μ},

$$\lambda_{\mu} = -\kappa \delta^0_{\mu} \ , \tag{6.21}$$

de donde se sigue

$$C_{\mu}{}^{\Phi}{}_{\sigma\rho} \equiv -\kappa(\eta_{\rho\mu}\delta^0_{\sigma} - \eta_{\sigma\mu}\delta^0_{\rho}) \ . \tag{6.22}$$

Con objeto de construir una teoría de electro-gravedad del modo más económico, y teniendo en cuenta los resultados de la teoría gauge del grupo de Poincaré, basta considerar la curvatura generalizada Lorentziana y la de $U(1)$. Sus expresiones respectivas son:

$$\begin{aligned} F^{(\lambda\rho)}_{\mu\nu} &= A^{(\lambda\rho)}_{\mu,\nu} - A^{(\lambda\rho)}_{\nu,\mu} - \eta_{\theta\sigma}(A^{(\lambda\theta)}_{\mu} A^{(\sigma\rho)}_{\nu} - A^{(\lambda\theta)}_{\nu} A^{(\sigma\rho)}_{\mu}) \ , \\ F^{(\Phi)}_{\mu\nu} &= A^{(\Phi)}_{\mu,\nu} - A^{(\Phi)}_{\nu,\mu} - \frac{1}{2} C_{\lambda}{}^{\Phi}{}_{\theta\rho}(A^{(\lambda)}_{\mu} A^{(\theta\rho)}_{\nu} - A^{(\lambda)}_{\nu} A^{(\theta\rho)}_{\mu}) \\ &= A^{(\Phi)}_{\mu,\nu} - A^{(\Phi)}_{\nu,\mu} + \kappa\eta_{ij}(A^{(j)}_{\mu} A^{(0i)}_{\nu} - A^{(j)}_{\nu} A^{(0i)}_{\mu}) \ , \end{aligned} \tag{6.23}$$

donde η_{ij} es la métrica de Minkowski y los índices latinos i, j corren desde 1 hasta 3. Asimismo, se establece la relación estándar entre los potenciales translaciones y las tétradas $A_\mu^{(\nu)} = \delta_\mu^\nu - q_\mu^\nu$.

A diferencia de la formulación de la teoría de Einstein-Maxwell, que en el marco de las teorías gauge se puede asociar con el producto directo del grupo de Poincaré y de $U(1)$, en nuestra presente construcción, el potencial gauge $A_\mu^{(\Phi)}$ asociado con $U(1)$ no se puede identificar con el campo electromagnético estándar $A_\mu^{(elec)}$ en presencia de un campo gravitatorio, sino que, más bien, $A_\mu^{(\Phi)}$ debe contenerlo a orden cero en la constante de acoplamiento κ para poder dar cuenta del límite de la teoría sin mezcla[4], i.e.

$$A_\mu^{(\Phi)} = A_\mu^{(elec)} + \kappa B_\mu^{(grav)} \,. \tag{6.24}$$

En esta expresión $B_\mu^{(grav)}$ es una contribución "electromagnética" de origen puramente gravitatorio (nótese que $B_\mu^{(grav)}$ debe ser una función de los potenciales gravitacionales). La teoría se puede construir trabajando a primer orden en κ, lo cual es, de hecho, una buena aproximación al problema de la mezcla de electro-gravedad debido al pequeño valor de la constante de acoplamiento κ. Sería razonable esperar que $|\kappa q| \leq m_{\text{electron}}$ y, por tanto, κ resultaría ser del orden de $\leq 6\times 10^{-12}$ Kg/C [42]. El máximo valor supuesto para κ se correspondería con la relación carga-masa del electrón. En este caso, el contenido físico del módulo de λ_μ sería esencialmente el cociente de las constantes de acoplamiento gravitacional y electromagnética. Este es un rasgo característico de las teorías gauge de unificación, por ejemplo, en la teoría electro-débil la tangente del ángulo de Weinberg da precisamente la relación entre las constantes de acoplamiento del isospin y de la hipercarga.

Entonces, en virtud de (6.24) la curvatura asociada con $U(1)$ se puede descomponer en dos pedazos: la curvatura electromagnética usual en un campo gravitatorio $F_{\mu\nu}^{(elec)}$ más una contribución construida con los potenciales gravitacionales $F_{\mu\nu}^{(grav)}$, i. e.

$$F_{\mu\nu}^{(\Phi)} = F_{\mu\nu}^{(elec)} + \kappa F_{\mu\nu}^{(grav)} \tag{6.25}$$

con

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(elec)} &= A_{\mu,\nu}^{(elec)} - A_{\nu,\mu}^{(elec)} \,, \\ F_{\mu\nu}^{(grav)} &= B_{\mu,\nu}^{(grav)} - B_{\nu,\mu}^{(grav)} + \eta_{ij}(A_\mu^{(j)} A_\nu^{(0i)} - A_\nu^{(j)} A_\mu^{(0i)}) \,. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Nos gustaría poner énfasis en que el campo $B_\mu^{(grav)}$ podría ser responsable de algún tipo de fuerza electromagnética asociada con sistemas muy masivos

[4]Esto es compatible con la modificación que produce $C_{\sigma\rho}{}^{\Phi}{}_{\mu}$ en la ley de transformación de $A_\mu^{(\Phi)}$.

en rotación, ya que $A_\mu^{(0i)}$ está relacionado de algún modo con fuerzas de tipo Coriolis[5]. Desde 1947, en base a los datos astrofísicos, se tienen indicios de un fenómeno análogo, al menos desde el punto de vista cualitativo, denominado Efecto Blackett o *magnetismo gravitacional*, que consiste en la generación de campos magnéticos a partir de objetos eléctricamente neutros en rotación. Las mediciones efectuadas conciernen a planetas del Sistema Solar (donde se incluye Mercurio a pesar de su pequeño tamaño y su baja velocidad), al Sol y otras estrellas como, por ejemplo, 78-Virginis e incluso púlsares y el campo magnético galáctico. Sin embargo, la medición de este efecto en el laboratorio depende de la habilidad para medir campos magnéticos extremadamente débiles así como para lograr el aislamiento de los mismos de otros campos magnéticos. Por lo tanto, la solución de estas dificultades requiere el desarrollo de unas técnicas de laboratorio más sofisticadas. Una presentación general sobre el magnetismo gravitacional se puede consultar en [93] y en las referencias allí dadas. Hay que subrayar que el Efecto Blackett no tiene nada que ver con el llamado campo *gravitomagnético*, que no es un campo magnético sino el campo gravitatorio que surge al escribir las ecuaciones de la Relatividad General en la forma de ecuaciones vectoriales análogas a las de Maxwell. Dicho campo gravitomagnético es responsable del bien conocido Efecto Lense-Thirring (o de “frame dragging”) producido por la materia en movimiento, y en particular, por la cuerpos (e.g. lentes) en rotación [94].

En nuestro modelo la teoría electro-gravitacional más simple viene caracterizada por la siguiente densidad Lagrangiana invariante gauge para los campos compensadores libres:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{4}\Lambda\mathcal{F}^{(\Phi)}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{(\Phi)\mu\nu} + \frac{1}{2}\Lambda\mathcal{F}^{(\mu\nu)}_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\Lambda g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}F^{(\Phi)}_{\mu\nu}F^{(\Phi)}_{\sigma\rho} + \frac{1}{2}\Lambda k^\sigma_\mu k^\rho_\nu F^{(\mu\nu)}_{\sigma\rho}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

donde $\mathcal{F}^{(\Phi)\mu\nu} \equiv \mathcal{F}^{(\Phi)}_{\mu\nu}\eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu}$, $g^{\sigma\rho} = k^\sigma_\mu k^\rho_\nu \eta^{\mu\nu}$ and $\Lambda = det(q^\nu_\mu)$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos k^ν_μ, $A^{(\sigma\rho)}_\mu$ y $A^{(\Phi)}_\mu$, hasta primer orden en la constante de mezcla κ, rezan respectivamente:

$$\Lambda(\mathcal{F}^{(\mu\sigma)}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\mathcal{F}^{(\rho\sigma)}_{\rho\sigma}) = -\check{\mathcal{T}}^\mu_\sigma k^\sigma_\nu \, , \tag{6.28}$$

$$\Lambda(k^\mu_\theta T^\theta{}_{\rho\sigma} - k^\mu_\rho T^\theta{}_{\theta\sigma} + k^\mu_\sigma T^\theta{}_{\theta\rho} \quad + \quad (k^\mu_\theta k^\nu_\rho - k^\mu_\rho k^\nu_\theta)A^{(\theta}{}_{\sigma)\nu} \tag{6.29}$$

[5]Nótese que los potenciales de Lorentz $A_\mu^{(0i)}$ se pueden relacionar con las componentes $\Gamma^i_{00}, \Gamma^i_{0k}, \Gamma^i_{jk}$ de los símbolos de Christoffel, las cuales producen una fuerza de tipo Coriolis sobre una partícula en un campo gravitatorio constante [92].

$$
\begin{aligned}
&- \quad (k^\mu_\sigma k^\nu_\theta + k^\mu_\theta k^\nu_\sigma) A^{(\theta}{}_{\rho)\nu}) = 2\check{S}^\mu_{(\sigma\rho)} \ , \\
\frac{d}{dx^\sigma}(\Lambda F^{(\Phi)\mu\sigma}) &= 0 \ , \qquad (6.30)
\end{aligned}
$$

donde se han introducido las notaciones:

$$
\begin{aligned}
\check{\mathcal{T}}^\mu_\sigma &\equiv \frac{\partial}{\partial k^\sigma_\mu}\Big(-\frac{1}{4}\Lambda \mathcal{F}^{(\Phi)}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{(\Phi)\mu\nu}\Big) = \check{\mathcal{T}}^{\mu(\mathrm{elec})}_\sigma + \kappa \check{\mathcal{T}}^{\mu(\mathrm{mezcla})}_\sigma \ , \qquad (6.31)\\
\check{\mathcal{T}}^{\mu(\mathrm{elec})}_\sigma &\equiv \frac{1}{4}\Lambda q^\mu_\sigma \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})}_{\lambda\theta}\mathcal{F}^{(\mathrm{elec})\lambda\theta} - \Lambda q^\theta_\sigma \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})}_{\theta\lambda}\mathcal{F}^{(\mathrm{elec})\mu\lambda} \ , \qquad (6.32)\\
\check{\mathcal{T}}^{\mu(\mathrm{mezcla})}_\sigma &\equiv \frac{1}{2}\Lambda q^\mu_\sigma \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})}_{\lambda\theta}\mathcal{F}^{(\mathrm{grav})\lambda\theta} - \Lambda q^\theta_\sigma \mathcal{F}^{(\mathrm{grav})}_{\theta\lambda}\mathcal{F}^{(\mathrm{elec})\mu\lambda} \qquad (6.33)\\
&- \Lambda q^\theta_\sigma \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})}_{\theta\lambda}\mathcal{F}^{(\mathrm{grav})\mu\lambda} - \Lambda \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})\theta\lambda}\eta_{\sigma j} k^\mu_\lambda k^\tau_\theta A^{(0j)}_\tau \ , \\
\check{S}^\mu_{(\sigma\rho)} &\equiv -\frac{\partial}{\partial A^{(\sigma\rho)}_\mu}\Big(-\frac{1}{4}\Lambda \mathcal{F}^{(\Phi)}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{(\Phi)\mu\nu}\Big) \qquad (6.34)\\
&= \frac{\kappa}{2}\Lambda \mathcal{F}^{(\mathrm{elec})\lambda\theta}(k^\tau_\lambda k^\mu_\theta - k^\mu_\lambda k^\tau_\theta)\delta^0_\sigma \eta_{i\rho} A^{(i)}_\tau \ ,
\end{aligned}
$$

junto con $T^\rho{}_{\nu\theta} \equiv q^\rho_\mu (k^\mu_{\nu,\tau} k^\tau_\theta - k^\mu_{\theta,\tau} k^\tau_\nu)$, $A^{(\mu}{}_{\nu)\sigma} \equiv \eta_{\nu\rho} A^{(\mu\rho)}_\sigma$ y $F^{(\Phi)\mu\nu} \equiv F^{(\Phi)}_{\rho\lambda} g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu}$.

Obsérvese que en el límite $\kappa \to 0$ las ecuaciones previas reproducen las de la teoría gauge del producto directo del grupo de Poincaré por $U(1)$, recuperando pues la teoría de Einstein-Maxwell.

Las ecuaciones (6.28) y (6.29), en términos de los tensores de curvatura y torsión de la geometría subyacente, se escriben en la forma:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) &= -q^\sigma_\mu \eta_{\rho\sigma} \check{\mathcal{T}}^\rho_\nu \ , \qquad (6.35)\\
\Lambda \theta^\lambda{}_{\mu\nu} &= 2 q^\sigma_\mu q^\rho_\nu \check{S}^\lambda_{(\sigma\rho)} - \delta^\lambda_\mu q^\theta_\rho q^\tau_\nu \check{S}^\rho_{(\theta\tau)} - \delta^\lambda_\nu q^\theta_\mu q^\tau_\rho \check{S}^\rho_{(\theta\tau)} \ . \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

El segundo miembro de la ecuación (6.35) se descompone en dos sumandos, de modo que el tensor energía-momento del campo electromagnético $-q^\sigma_\mu \eta_{\rho\sigma} \check{\mathcal{T}}^{\rho(elec)}_\nu$ de la teoría estándar de Einstein-Maxwell en el vacío aparece corregido con el término nuevo de mezcla $-\kappa q^\sigma_\mu \eta_{\rho\sigma} \check{\mathcal{T}}^{\rho(mezcla)}_\nu$. Además, la ecuación para la torsión deja de ser trivial, lo cual indica que en el problema de la unificación de la gravitación y el resto de interacciones fundamentales es plausible que la torsión deba ser tomada debidamente en consideración.

6.3.1. Geodésicas con términos de mezcla

Como aplicación simple, a continuación estudiamos los efectos del modelo propuesto de mezcla de electrogravedad en la trayectoria en el espacio-tiempo de una partícula libre sin spin de masa m, momento $p_\mu (= mu_\mu = m\frac{dx_\mu}{d\tau})$ y carga e. De acuerdo con el Principio de Acoplamiento Mínimo generalizado, el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{\text{particula}} = \frac{1}{2m} p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} \tag{6.37}$$

debe ser reemplazado por el Lagrangiano modificado

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\text{particula}} = \frac{1}{2} m u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} - e u^\mu A^{(elec)\nu} g_{\mu\nu} - \kappa e u^\mu B^{(grav)\nu} g_{\mu\nu} \ , \tag{6.38}$$

donde se ha hecho la sustitución[6]

$$p_\mu \to k^\nu_\mu (p_\nu - e A^{(\Phi)}_\nu) = k^\nu_\mu (p_\nu - e A^{(elec)}_\nu - \kappa e B^{(grav)}_\nu) \ . \tag{6.39}$$

Nótese que se ha eliminado el término $\frac{e^2}{2m} A^{(\Phi)\mu} A^{(\Phi)\nu} g_{\mu\nu}$ [7], que, por cierto, no aparece cuando se trabaja directamente con la forma de Poincaré-Cartan en lugar de con el Lagrangiano.

En cuanto a los campos compensadores, también consideramos su dinámica asociada a la densidad Lagrangiana (6.27). Con respecto a la interacción entre una partícula y un campo, en general, es necesario distinguir entre las coordenadas y^σ donde los campos están evaluados y las coordenadas para la partícula, que denotaremos por x^σ. En $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{particula}}$ los campos están evaluados en la posición de la partícula, donde ocurre la interacción, pero en L_0 los campos son evaluados en los puntos y^σ. Hecha esta observación, la ecuación de la partícula, $\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}_{\text{particula}}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}_{\text{particula}}}{\partial u^\sigma}\right) = 0$ da lugar a la ecuación usual de una partícula en presencia de un campo gravitatorio y electromagnético pero corregida por una fuerza de "tipo Lorentz", proporcional a κe, generada por los potenciales gravitatorios, i.e.

$$g_{\mu\sigma}\frac{du^\mu}{d\tau} = -u^\mu u^\nu \Gamma^{(L-C)}_{\mu\nu,\sigma} - \frac{e}{m} u^\mu F^{(elec)}_{\mu\sigma} - \frac{\kappa e}{m} u^\mu (B^{(grav)}_{\mu,\sigma} - B^{(grav)}_{\sigma,\mu}) \ , \tag{6.40}$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} u^\mu u^\nu (-g_{\mu\sigma,\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\sigma}) &= -\frac{1}{2} u^\mu u^\nu (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu}) + \frac{1}{2} u^\mu u^\nu g_{\mu\nu,\sigma} \\ &= -u^\mu u^\nu \Gamma^{(L-C)}_{\mu\nu,\sigma} \ , \end{aligned} \tag{6.41}$$

[6] Si la partícula tuviera spin, en la sustitución mínima habría que introducir los potenciales gravitacionales de Lorentz

[7] Recordamos que, ya de por sí, en la formulación estándar de la fuerza de Lorentz en un campo gravitatorio (sin mezcla) el Lagrangiano de interacción L_{int}, entre otros requisitos, debe ser lineal en la carga de la partícula y en el potencial electromagnético para garantizar la invariancia Lorentz de γL_{int} (con $\gamma \equiv (1 - (\frac{u}{c})^2)^{-\frac{1}{2}}$) como consecuencia del requerimiento de la invariancia Lorentz de la integral de acción escrita en función del tiempo propio τ [95].

con $\Gamma^{(L-C)}_{\mu\nu,\sigma} \equiv \Gamma^{\rho(\mathrm{L-C})}_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma})$, siendo $\Gamma^{\rho(\mathrm{L-C})}_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita asociada con la métrica $g_{\mu\nu} = q^{\rho}_{\mu} q^{\nu}_{\sigma} \eta_{\rho\nu}$.[8]

6.4. Observaciones

La mezcla de gravedad y electromagnetismo propuesta se puede generalizar al resto de interacciones considerando el grupo $U(1)$ como subgrupo de $SU(2) \otimes U(1)$, $SU(5)$ u otro grupo de "gran unificación", y esto conllevaria a su vez toda una fenomenologia adicional. Por ejemplo, en el caso de considerar la invariancia de fase en $SU(2) \otimes U(1)$, seria posible generar bosones vectoriales mediadores de la interaccion electrodebil a partir de gravitones. Debemos remarcar que, en cualquier caso, no nos referimos a una nueva fuerza sino a una mezcla de interacciones, de modo que el número de grados de libertad es el mismo que en el caso límite $\kappa \to 0$.

Existe la posibilidad de considerar un modelo extra de mezcla de la gravitación y el resto de interacciones cuya simetría está asociada con el producto semidirecto del grupo de difeomorfismos del espacio-tiempo y el grupo de gauge, $Diff(M) \otimes_S G(M)$. No obstante, esta mezcla resultaría ser menos drástica desde el punto de vista fenomenológico que la presentada en este Capítulo. Así, por ejemplo, la acción semi-directa $Diff(M) \otimes_S U(1)(M)$ del grupo de difeomorfismos sobre el grupo de gauge electromagnético $U(1)(M)$ daría cuenta de digramas en los que fotones y gravitones generan gravitones. En otras palabras, esta mezcla de electrogravedad se traduciría en una modificación nueva de la relación de dispersión entre gravitones y fotones. Sin embargo, en el contexto de la mezcla asociada a la teoría gauge de la extensión central del grupo de Poincaré por $U(1)$, tienen cabida diagramas en los que dos gravitones dan lugar a un fotón. Por tanto, en tal caso, sería esperable la producción de fotones en ausencia de fuentes cargadas electricamente.

Dado que el esquema de la mezcla propuesta en este Capítulo ha sido formulado sobre la noción de simetría, resulta plausible la tentativa de estudiar el problema de la cuantización de la teoría de acuerdo con el método

[8] Como ya se comentó, el estudio del problema de la mezcla basado en la pseudoextensión central del grupo Poincaré fue primeramente estudiado no en la teoría de campos sino en el contexto de la mecánica de una partícula. En tal caso, considerando el límite no relativista ($c \to \infty$) sobre el grupo de Poincaré (formulado como una contracción del álgebra de Lie de tipo Inonu-Wigner [96]) se obtienen términos adicionales análogos a los de la ecuación (6.40), en los que la forma explícita del campo $B^{(grav)}_{\mu}$ resulta ser $B^0 = -\frac{1}{8}\vec{h}^2$, $B^i = -\frac{1}{2}h^i$, con $h^i \equiv g^{0i} - \eta^{0i}$. No obstante, la comparación no deja de ser "vaga" puesto que el contexto de la teoría aquí presentada es diferente al del trabajo citado.

de la Cuantización sobre Grupos (CSG). En el marco de la CSG, la cuantización de la gravedad se podría abordar restringiéndonos a un subgrupo del supuesto grupo de simetría de la gravedad. Así pues, usando este subgrupo para parametrizar la correspondiente subvariedad de soluciones (por ejemplo, una solución de tipo Schwarzschild) se podría tratar de describir la teoría con un número menor de parámetros (hasta incluso finito) en un contexto no-perturbativo, eludiendo, por tanto, los usuales problemas de renormalizabilidad.

Capítulo 7

Dotación de dinámica al grupo de gauge

En este Capítulo se extiende la teoría clásica estándar de Utiyama con el fin de afrontar la cuestión de un posible mecanismo dinámico de generación de masa en la teoría gauge. Se presenta una formulación Lagrangiana covariante inspirada en un intento previo [97, 98] en el contexto de la teoría cuántica de campos gauge masivos abelianos y no abelianos dentro del esquema de la *Cuantización Sobre Grupos* (CSG), formalismo en el que emerge de modo natural un mecanismo *cohomológico* de generación de masa para los bosones vectoriales. Por simplicidad y por el interés físico sólo consideraremos el caso de grupos rígidos G unitarios.

La implementación de las nociones de la teoría gauge estándar en el contexto de la CSG conduce de manera natural a la consideración de los parámetros del grupo de gauge como campos dinámicos. En este proceso surgen ciertas diferencias con respecto al tratamiento estándar. En particular, la interpretación de los potenciales gauge como conexiones principales es adaptada de modo sutil al nuevo formalismo. Asimismo el significado del término *gauge* debe ser también especificado[1].

[1] Adicionalmente se recuerda que la interpretación de las transformaciones gauge en mecánica cuántica requiere ciertamente un tratamiento cuidadoso (véase, por ejemplo, [99]).

7.1. Cuantización Sobre Grupos de teorías gauge

7.1.1. Breve descripción de la CSG

Introducción

El método de la Cuantización Sobre Grupos (CSG) hace uso de las nociones de la Cuantización Geométrica y de la Mecánica Simpléctica sobre Órbitas Coadjuntas.[2]

Por un lado, la Cuantización Geométrica (CG) surge como una mejora de la Cuantización Canónica y su construcción se apoya sobre todo un conjunto de conceptos geométricos bien definidos. En esencia, el esquema de la CG se realiza en dos pasos: la *precuantización* y la *cuantización*.

En primer lugar, la *precuantización* (que se corresponde con la cuantización de Bohr-Sommerfeld) consiste en la construcción de una representación fiel unitaria del álgebra de Lie de los observables clásicos. En este proceso es necesario extender el espacio de las fases con un nuevo parámetro directamente relacionado con la invariancia de fase de la Mecánica Cuántica y, en consecuencia, surge la noción de *variedad cuántica*[3].

Posteriormente, se realiza la *cuantización*, esto es, se imponen las condiciones de *polarización* que proporcionan la irreducibilidad de la representación previamente construida.

Por otra parte, la acción coadjunta de un grupo sobre su coálgebra permite de modo natural la construcción de variedades simplécticas sobre las que se puede formular la dinámica Hamiltoniana. Por tanto, en estos sistemas los grados de libertad físicos están completamente caracterizados por una estructura de simetría. El punto clave es que ciertas nociones cohomológicas permiten clasificar no sólo dichos espacios simplécticos sino también las extensiones centrales de grupos de Lie, por lo que su relevancia en el ámbito de la cuantización es patente.

En la Cuantización Sobre Grupos se funden las dos disciplinas anteriores. Así pues, en el contexto de la CSG una teoría cuántica consiste en la construcción de una representación unitaria e irreducible del álgebra de Lie

[2] El contenido de este apartado está basado esencialmente en el material de [100].

[3] Una variedad cuantica ($\pi : Q \to M$, $U(1)$; Θ), se define como un fibrado principal $\pi : Q \to M$ con grupo estructural $U(1)$ y dotado con una 1-forma de conexión Θ, tal que la 2-forma de curvatura $\Omega = d\Theta$ define sobre la base M una estructura simpléctica.

de los observables físicos que determinan la simetría fundamental del sistema considerado. Es un rasgo fundamental de esta técnica el hecho de que tanto los grados de libertad físicos como los generadores de la evolución dinámica son determinados mediante la cohomología de grupos, esto es, los grados de libertad no son fijados desde un principio sino que son determinados de modo dinámico por la simetría. Este contexto además presenta la particularidad de que, como ya se comentó, existen cociclos triviales, denominados pseudo-cociclos, que contienen información dinámica. Hay que resaltar que en el tratamiento de la CSG también es de especial importancia la revision de conceptos tradicionales como las nociones de *anomalía* y simetría gauge. A pesar de no ser un procedimiento estándar, resulta evidente la riqueza de la CSG.

Fundamentos básicos de la CSG

El punto de partida es la construcción del *grupo de cuantización*, $\tilde{G}$, un grupo de Lie centralmente extendido por $U(1)$ que contiene toda la información física del sistema y que generaliza la noción de variedad cuántica de la Cuantización Geométrica. A continuación se introduce la 1-*forma de cuantización* Θ, que es una 1-forma sobre el fibrado principal $\tilde{G}$ (con base G y grupo estructural $U(1)$) con valores en el álgebra de Lie de $U(1)$ y generaliza la conexión de las variedades cuánticas en la Cuantización Geométrica o la 1-forma de Poincaré-Cartan en la dinámica dependiente del tiempo.

Es conveniente introducir las nociones de campos de vectores y 1-formas en un grupo de Lie. Dada una ley de grupo $g''^a = g''^a(g'^b, g^c)$ para los parámetros de un grupo de Lie G, la expresión local de los campos de vectores invariantes por la izquierda se escribe como

$$X^L_{(a)}(g) = \frac{\partial g''^b(g',g)}{\partial g^a}|_{g'=g,g=e}\frac{\partial}{\partial g^b} \equiv X^{L\,b}_{(a)}(g)\frac{\partial}{\partial g^b} \ . \tag{7.1}$$

Por su parte, los campos de vectores invariantes por la derecha rezan

$$X^R_{(a)}(g) \ = \ \frac{\partial g''^b(g',g)}{\partial g'^a}|_{g'=e,g=g}\frac{\partial}{\partial g^b} \equiv X^{R\,b}_{(a)}(g)\frac{\partial}{\partial g^b} \ . \tag{7.2}$$

Las formas duales de estos campos de vectores satisfacen las propiedades

$$\theta^{L(a)}(X^L_{(b)}) = \delta^a_b \ , \ \theta^{R(a)}(X^R_{(b)}) = \delta^a_b \ . \tag{7.3}$$

En nuestra discusión es fundamental el hecho de que tanto el conjunto de campos invariantes por la izquierda como los invariantes por la derecha constituyen una base del álgebra de Lie $\mathcal{G}$ de G. Se cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[X^L_{(a)}, X^L_{(b)}] = C_a{}^d{}_b X^L_{(d)} \ , \ [X^R_{(a)}, X^R_{(b)}] = -C_a{}^d{}_b X^R_{(d)} \ , \ [X^L_{(a)}, X^R_{(b)}] = 0 \ . \tag{7.4}$$

Estas expresiones se pueden particularizar para $\tilde{G}$, lo que permite introducir de modo preciso la 1-forma de cuantización Θ como la forma izquierda canónica asociada al parámetro ζ de $U(1)$, $\Theta = \tilde{\theta}^{L(\zeta)}$. De modo que Θ resulta ser la forma dual al generador central Ξ :

$$\Theta(\tilde{X}^L_{(a)}) = 0 \ , \ \Theta(\Xi) = 1 \ . \tag{7.5}$$

Las funciones de onda se definen sobre $\tilde{G}$ y deben satisfacer la condición de $U(1)$-función:

$$\Psi(\zeta g) = \zeta \Psi(g) \ , \tag{7.6}$$

o equivalentemente, a nivel infinitesimal,

$$\Xi \Psi = i \Psi \ , \tag{7.7}$$

donde ζ es la variable correspondiente al término central y Ξ denota al generador de la acción de $U(1)$ sobre $\tilde{G}$. De acuerdo con esta construcción las funciones de onda dependen de las variables x^i y p_j que parametrizan la variedad simpléctica (o espacio de las fases), de la variable ζ y de las variables desprovistas de dinámica, que parametrizan el *módulo característico* $\mathcal{G}_\Theta$. Nótese que $\mathcal{G}_\Theta$ está generado por los campos de vectores izquierdos que pertenecen simultáneamente al núcleo de la 1-forma de cuantización y su diferencial, $\mathrm{Ker}(\Theta) \cap \mathrm{Ker}(d\Theta)$. Es obvio que debido a (7.5) el generador central Ξ queda excluido del módulo característico. Por otra parte, teniendo en cuenta las ecuaciones de Maurer-Cartan $d\Theta = d\tilde{\Theta}^{L(\zeta)} = C_a{}^{\zeta}{}_b \, \tilde{\theta}^{L(a)} \wedge \tilde{\theta}^{L(b)}$, se sigue que la inclusión de $\mathcal{G}_\Theta$ en $\mathrm{Ker}(d\Theta)$ elimina del módulo característico a aquellos generadores que tienen variables conjugadas. En la práctica, en los conmutadores de los campos que generan $\mathcal{G}_\Theta$ no habrá términos que involucren al generador Ξ de $U(1)$.

Sin embargo, las funciones de onda deben depender sólo de la mitad de las variables que parametrizan el espacio de las fases, esto es, deben ser función sólo de las $x's$ o sólo de las $p's$ o de una mezcla de ellas. Por tanto, hay que imponer condiciones, denominadas *polarizaciones*, sobre las funciones de onda para eliminar la dependencia que no nos interesa. Estas condiciones deben ser compatibles con la acción de los operadores físicos y es uno de los incovenientes básicos en la Cuantización Geométrica. En la CSG por convención se elige el álgebra derecha para representar los operadores físicos y, en consecuencia, podemos usar los campos invariantes izquierdos para construir la polarización, lo cual es una ventaja proveniente del hecho de trabajar sobre un grupo. En la práctica, una polarización $\mathcal{P}$ es un conjunto de campos invariantes izquierdos que imponen un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como condiciones sobre las funciones de onda:

$$\tilde{X}^L_{(a)}\Psi = 0 \ , \ \forall \tilde{X}^L_{(a)} \in \mathcal{P} \ . \tag{7.8}$$

En general, una polarización (de primer orden) está formada por los campos izquierdos del módulo característico y la mitad de los simplécticos en su versión izquierda, excluyendo al generador central Ξ y, además, todos estos campos deben cerrar álgebra. Si la polarización contiene a todo el módulo característico recibe el nombre de polarización *regular* o *completa*, aunque esto no siempre es posible. Se dice que la polarización es *simpléctica* o lagrangiana cuando contiene a uno de los generadores de todos y cada uno de los pares conjugados. Hay que señalar que distintas polarizaciones, en general, conducen a representaciones no equivalentes, y, por tanto, a sistemas cuánticos diferentes.

La comprobación de la irreducibilidad de la representación obtenida se debe realizar a posteriori, a menudo, mediante la imposición de condiciones de *polarización de orden superior*, esto es, polarizaciones que involucran operadores diferenciales de orden superior presentes en el álgebra envolvente de la versión izquierda del álgebra de Lie. En general, la existencia de una polarización de orden superior sólo ocurre para determinados valores de las extensiones centrales que caracterizan a la representación.

El concepto de polarización de orden superior permite enlazar con la noción de *anomalía*. En la teoría estándar, se habla de anomalía cuando una cierta simetría de un sistema clásico no se realiza o bien se deforma a nivel cuántico. En el formalismo de la CSG se dice que un grupo es *anómalo* si no admite una polarización completa de primer orden. En tal caso, algunos de los generadores clásicos no simplécticos se comportan como grados de libertad a nivel cuántico. No obstante, se puede realizar una reducción recurriendo a polarizaciones de orden superior que están asociadas con ciertos valores críticos (o *cuánticos*) de las extensiones centrales. Este punto se puede explotar para obtener nuevos grados de libertad de simetrías que en un principio carecen de contenido dinámico. Concretamente, en el caso de la gravedad la invariancia bajo difeomorfismos, tradicionalmente considerada como una simetría gauge (a nivel clásico), puede someterse al argumento previo para obtener aspectos relevantes de la física gravitacional cuántica [100].

7.1.2. Aplicación de la CSG a la teoría gauge

En la formulación estándar de las teorías gauge es necesario introducir los campos compensadores o gauge $A^{(a)}_\mu$ aunque la descripción resultante es redundante en el sentido de que no todas las variables $A^{(a)}_\mu$ tienen contenido físico. Dos componentes $A'^{(a)}_\mu$ y $A^{(a)}_\mu$ satisfaciendo la relación de equivalencia

$$A'^{(a)}_\mu \sim A^{(a)}_\mu \Leftrightarrow A'^{(a)}_\mu = UA^{(a)}_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}\ ,\ U \in G(M)\ , \tag{7.9}$$

son equivalentes desde el punto de vista físico. Al tomar cociente por esta relación de equivalencia se eliminan los grados de libertad espúreos y se obtiene el espacio de soluciones del sistema, parametrizado por los grados de libertad físicos.

El estudio de las teorías gauge en el marco de la CSG requiere la incorporación del grupo de gauge $G(M)$ en el grupo centralmente extendido total, el *grupo de cuantizacion* $\tilde{G}$, que contiene la información física. En este contexto sera la propia estructura grupo-teórica, así como sus extensiones, la que determinará el contenido dinámico de los grados de libertad involucrados. El aspecto fundamental, como veremos, es que la adquisición de carácter dinámico por parte de los parámetros del grupo de gauge produce una transferencia entre los grados de libertad físicos y los grados de libertad gauge. Una ventaja adicional del tratamiento de las teorías gauge en la CSG es la posibilidad de estudiar en un mismo modelo distintos sistemas parametrizados por los valores de las constantes de extensión central.

Como ya hemos indicado, el estudio de las teorías gauge en el marco de la CSG se ha llevado a cabo en los trabajos [97,98]. En [97] se estudia el caso abeliano, consiguiendo reproducir la dinámica del campo electromagnético y de Proca de modo unificado y en [98] se presenta el caso no abeliano correspondiente a una teoría de tipo Yang-Mills. En este apartado resumimos, sin entrar en detalles minuciosos, los principales resultados de dichas referencias. La idea clave a la hora de construir el grupo de cuantización consiste en emplear el parámetro central de la extensión para modificar la acción del grupo sobre los campos $A^{(a)}_\mu$. Más concretamente, se elimina la parte no tensorial de la acción de $G(M)$ sobre $A^{(a)}_\mu$ a cambio de introducir un cociclo en la ley de grupo del parámetro central en el grupo extendido:

$$\begin{array}{rcl} U(x) & \rightarrow & U'(x)U(x)\ , \\ A_\mu(x) & \rightarrow & U'(x)A_\mu(x)U^{-1}(x)\ , \\ \zeta & \rightarrow & \zeta e^{i\xi(g',g)}\ . \end{array} \tag{7.10}$$

donde $A_\mu = A^{(a)}_\mu X_{(a)}$ ($X_{(a)}$ base del álgebra de Lie $\mathcal{G}$) y

$$\xi(g',g) = \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J^\mu(g'|g)(x)\ , \tag{7.11}$$

siendo $J^\mu(g'|g)(x)$ una corriente (simpléctica) conservada $\partial_\mu J^\mu(g'|g)(x) = 0$ sobre las soluciones, cuya forma explícita se puede consultar en las referencias mencionadas, y $\xi(g', g)$ constituye un 2-cociclo del producto semidirecto de grupos $G(M) \otimes_s G_A$, donde G_A es el espacio con estructura de grupo abeliano de los potenciales $A_\mu^{(a)}$.

A partir de la acción (7.10) se puede construir la ley de composición del grupo de cuantización de Yang-Mills, $\tilde{G}_{YM}$, dada por [98]

$$\begin{aligned} U''(x) &= U'(x)U(x) \\ A''(X) &= A'(X) + U'(x)A(x)U^{-1}(x) \\ E''(x) &= E'(x) + U'(x)E(x)U^{-1}(x) \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} , \end{aligned} \tag{7.12}$$

donde los parámetros $E \sim \dot{A}$ y el cociclo $\xi(g', g)$ se puede escribir como suma de tres cociclos

$$\xi(g', g) = \xi_1(g', g) + \xi_2(g', g) + \xi_3(g', g) , \tag{7.13}$$

que contienen la información relevante sobre el contenido dinámico de la teoría, así como la caracterización de transformación gauge en el formalismo de la CSG. El cociclo $\xi_1(g', g)$ confiere carácter de par conjugado a $A(x)$ y $E(x)(\sim \dot{A}(x))$, $\xi_2(g', g)$ acopla los potenciales vectores con los parámetros del grupo de gauge y $\xi_3(g', g)$ sólo involucra a los parámetros del grupo de gauge.

El grupo de cuantización $\tilde{G}_{YM}$ se puede ver como la extensión no central del grupo G_A por la extensión central $\tilde{G}(M)$ del grupo de gauge. Por tanto, $\tilde{G}_{YM}$ tiene estructura de fibrado principal con grupo estructural $\tilde{G}_{YM}$ y base G_A. Obsérvese que la condición de $U(1)$-función debe ser reemplazada por la de $\tilde{G}_{YM}$-función.

Para fijar ideas vamos ahora a considerar el papel de los distintos cociclos en el caso abeliano, desarrollado en [97]. Trabajando en el espacio de momentos parametrizamos $A_\mu(x)$ y $\dot{A}_\mu(x)$ por sus coeficientes de Fourier $a_\mu(k)$ y $a_\mu^\dagger(k)$, y, análogamente, los elementos de $U(1)(M)$ por $\phi(k)$ y $\phi^\dagger(k)$. Trivializando la acción del grupo de Lorentz, los tres cociclos respectivos se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} \xi_1(g', g) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} \eta^{\mu\nu} [a_\mu(k) a_\nu^{\dagger\prime}(k) e^{ikx} - a_\mu^\dagger(k) a'_\nu(k) e^{-ikx}] && (7.14) \\ \xi_2(g', g) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} [\phi^{\dagger\prime}(k) k^\mu a_\mu(k) e^{ikx} + \phi'(k) k^\mu a_\mu^\dagger(k) e^{-ikx} && (7.15) \\ &- k^\mu a_\mu^{\dagger\prime}(k) \phi(k) e^{ikx} - k^\mu a'_\mu(k) \phi^\dagger(k) e^{-ikx}] \\ \xi_3(g', g) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^2 [\phi^{\dagger\prime}(k) \phi(k) e^{ikx} - \phi'(k) \phi^\dagger(k) e^{-ikx}] . && (7.16) \end{aligned}$$

El cociclo $\xi_1(g',g)$ dota de contenido dinámico al potencial vector, de modo que $(A, E\sim\dot{A})$, o en su caso $(a_\mu(k), a^\dagger_\mu(k))$ sea un par de varibles canónicamente conjugadas. Esta propiedad se pone de manifiesto en los conmutadores

$$[\tilde{X}^L_{a^\dagger_\mu(k)}\,,\,\tilde{X}^L_{a_\nu(k')}] = i\eta^{\mu\nu}\Delta_{kk'}\Xi\,, \tag{7.17}$$

donde $\Delta_{kk'} = 2k^0\delta^3(k-k')$ es la función delta generalizada sobre la hoja positiva del hiperboloide de masas.

El cociclo $\xi_2(g',g)$ es el cociclo de *mezcla* entre los parámetros del grupo de gauge y los potenciales vectores, lo cual se observa a nivel infinitesimal en las relaciones de conmutación

$$[\tilde{X}^L_{a_\mu(k)}\,,\,\tilde{X}^L_{\phi^\dagger(k')}] = k^\mu\Delta_{kk'}\Xi\,,\ [\tilde{X}^L_{a^\dagger_\mu(k)}\,,\,\tilde{X}^L_{\phi(k')}] = k^\mu\Delta_{kk'}\Xi\,. \tag{7.18}$$

A la luz de estos resultados se concluye que las variables del grupo local no están desprovistas de contenido dinámico. De hecho, al estudiar los campos de vectores que forman el módulo caracteristico $\mathcal{G}_\Theta$ se concluye que son las combinaciones

$$\tilde{X}^L_{c(k)} = \tilde{X}^L_{\phi(k)} + ik_\mu\tilde{X}^L_{a_\mu(k)}\,,\ \tilde{X}^L_{c^\dagger(k)} = \tilde{X}^L_{\phi^\dagger(k)} - ik_\mu\tilde{X}^L_{a^\dagger_\mu(k)} \tag{7.19}$$

las que están desprovistas de contenido dinámico y no $\tilde{X}^L_{\phi(k)}$ y $\tilde{X}^L_{\phi^\dagger(k)}$. Así pues, se produce una mezcla no trivial entre los parámetros de los campos o potenciales gauge y los parámetros del grupo de gauge, lo cual a su vez implica una reestructuración de los grados de libertad físicos y gauge.

Se llega a la misma conclusión mediante la obtención de los invariantes Noether, que son las funciones que parametrizan la variedad de soluciones. Así pues, los invariantes Noether, definidos en CSG como el producto interior de la 1-forma de cuantización Θ con respecto a los campos invariantes derechos,

$$\mathcal{N}_{a_\mu(k)} = i_{\tilde{X}^R_{a_\mu(k)}}\Theta = e^{-ikx}(k^\mu\phi^\dagger(k) - ia^{\dagger\mu}) \tag{7.20}$$

$$\mathcal{N}_{a^\dagger_\mu(k)} = i_{\tilde{X}^R_{a^\dagger_\mu(k)}}\Theta = e^{ikx}(k^\mu\phi(k) + ia^{\mu}) \tag{7.21}$$

son una mezcla de los parámetros del potencial vector y de las varibles del grupo de gauge y, por tanto, los parámetros $\phi(k)$ y $\phi^\dagger(k)$ contribuyen en la constitución del espacio de las fases, a diferencia de los parámetros $c(k)$ y $c^\dagger(k)$ asociados a los campos del módulo característico. Además se verifica $\mathcal{N}_{c_\mu(k)} = \mathcal{N}_{c^\dagger_\mu(k)} = 0$ y, en consecuencia, de acuerdo con la caracterización de simetría gauge en la CSG, los campos derechos $\tilde{X}^R_{c(k)}$ y $\tilde{X}^R_{c^\dagger(k)}$ generan las auténticas transformaciones gauge, que en versión de momentos, vienen caracterizadas por las relaciones de equivalencia

$$a_\mu(k) \sim a_\mu(k) + ik_\mu c(k) \ , \ \phi(k) \sim \phi(k) + c(k) \ . \tag{7.22}$$

Por su parte, el cociclo $\xi_3(g', g)$ está relacionado con la posibilidad de introducir una extensión central para el propio grupo de gauge. Se tienen los conmutadores

$$[\tilde{X}^L_{\phi^\dagger(k)} \ , \ \tilde{X}^L_{\phi(k')}] = ik^2 \Delta_{kk'} \Xi \ . \tag{7.23}$$

El caso $k^2 = 0$ describe la teoría cuántica del campo electromagnético y si $k^2 \neq 0$ se recupera la teoría del campo de Proca. Obsérvese que en este último caso, el propio grupo de gauge adquiere dinámica, de modo que se introducen nuevos grados de libertad en la teoría.[4]

En el caso no abeliano [98] el cociclo $\xi_3(g', g)$ es responsable de la dotación de masa de los bosones gauge, constituyendo un mecanismo dinámico de generación de masa para los bosones vectoriales en contraposición con el Mecanismo de Higgs.

7.2. Los parámetros del grupo de gauge como campos dinámicos

7.2.1. Grupo de Jets del Grupo de Gauge

Como se dijo antes, el punto de partida de la CSG es la construcción del grupo de cuantización $\widetilde{G}$, que incorpora todos los campos relevantes de la teoría como parámetros de grupo. Por lo tanto, el grupo de simetría relevante no es el grupo de gauge $G(M)$, sino el *grupo de los* 1*-jets del grupo de gauge* $G^1(M)$, noción que nos permitirá formular la teoría Lagrangiana incorporando los parámetros del grupo de gauge como campos dinámicos. A continuacion introducimos de modo preciso este concepto[5]. Se define el grupo

[4]Ésta es la manera particular de obtener dinámica de modo *anómalo* en el contexto de la CSG. Esta técnica podría aplicarse, por ejemplo, para estudiar la mezcla de interacciones asociada a la aparición de anomalías.

[5]Remitimos al lector interesado en una presentación matemática más técnica de la noción de *jets* de aplicaciones entre variedades a [69].

finito-dimensional $J^1(G(M))$ de los 1-jets del grupo de gauge $G(M)$ como el cociente

$$J^1(G(M)) \equiv \frac{G(M) \times M}{\stackrel{1}{\sim}} \tag{7.24}$$

donde $\stackrel{1}{\sim}$ es una relación de equivalencia de primer orden definida por:

$$(g,m) \stackrel{1}{\sim} (g',m') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} m & = & m' \\ g(m) & = & g'(m) \\ \partial_\mu g(m) & = & \partial_\mu g'(m) \ , \end{array} \right. \tag{7.25}$$

$\forall\, (g,m),\ (g',m') \in G(M) \times M$. Esta definición puede ser fácilmente extendida a un orden r arbitrario. $J^1(G(M))$ puede parametrizarse mediante un sistema coordenado $\{x^\mu, g^a, g^a_\mu\}$, del mismo modo que en la teoría convencional de fibrados jets. El grupo infinito-dimensional de los 1-jets del grupo de gauge, $G^1(M)$, se define como

$$G^1(M) \equiv \{M \to J^1(G(M))\} \equiv Map(M, J^1(G(M))), \tag{7.26}$$

con ley de composición (en nuestro caso, para grupos unitarios, producto de matrices)

$$g''(x) = g'(x)g(x)\ ,\ g''_\mu(x) = g'_\mu(x)g(x) + g'(x)g_\mu(x) \tag{7.27}$$

Realizando el cambio de variables

$$g_\mu \to A_\mu \equiv g^{-1} g_\mu \ , \tag{7.28}$$

se llega a

$$A''_\mu(x) = g'(x)A_\mu(x)g'(x)^{-1} + A'_\mu(x) \ , \tag{7.29}$$

que proporciona las leyes de transformación usuales de conexiones principales (potenciales gauge) cuando nos restringimos a la inmersión particular (*extensión 1-jet*)

$$j^1(G(M)) \to G^1(M)\ ,\ g \mapsto (g, g^{-1}g_{,\nu}) \equiv (g, \theta_\nu) \tag{7.30}$$

del grupo de gauge $G(M)$, donde con $\theta_\nu dx^\nu$ se denota a las 1-formas canónicas sobre el grupo invariantes por la izquierda.

Hay que subrayar que el presente enfoque no requiere tomar el cociente por el grupo de gauge (el subgrupo *característico* en CSG) en contraste con el método de *Cuantización Geométrica* estándar, donde los parámetros no-simplécticos son previamente eliminados recurriendo a la variedad de soluciones. De hecho, la inmersión natural $G(M) \subset G^1(M)$ es de una gran importancia en nuestro modelo.

7.2.2. Principio de acoplamiento mínimo entre los parámetros del grupo de gauge y los campos gauge

Teniendo en cuenta el éxito de la incorporación de las coordenadas del grupo de gauge en el formalismo de la CSG, formularemos la teoría de Utiyama para interacciones asociadas a grupos de simetría interna, poniendo en pie de igualdad a los parámetros g^a del grupo de gauge (desempeñando inicialmente el papel de campos libres de "materia" exótica) y a los campos gauge $A^{(a)}_\mu$ (ahora aunténticas conexiones). El campo de vectores generador total de las tranformaciones gauge con acción sobre los campos $g^a, A^{(a)}_\mu$ se puede escribir en la forma

$$f^{(a)}X^L_{(a)} + \left(f^{(b)}C^a_{bc}A^{(c)}_\mu - \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu}\ , \tag{7.31}$$

donde $X^L_{(a)}$ son los campos de vectores canónicos invariantes por la izquierda que constituyen los generadores infinitesimales de la translación derecha del grupo G sobre sí mismo. Siguiendo pasos similares a los de la teoría estándar de Utiyama se obtiene la prescripción de acoplamiento mínimo [6]

$$g^a_{,\mu} \to g^a_{,\mu} + A^{(b)}_\mu X^{L\,a}_{(b)}\ . \tag{7.32}$$

Multiplicando esta expresión por las componentes $\theta^{(c)}_a$ de la 1-forma canónica sobre el grupo invariante por la izquierda $\theta^{(a)}_\mu (= \theta^{(a)}_b g^b_{,\mu})$, la anterior sustitución puede ser escrita en la forma

$$\theta^{(a)}_\mu \to \theta^{(a)}_\mu + A^{(a)}_\mu\ . \tag{7.33}$$

Es claro que la combinación $\theta^{(a)}_\mu - A^{(a)}_\mu$ (donde se ha redefinido el campo gauge con signo cambiado) es invariante gauge ya que la diferencia de dos conexiones es un objeto tensorial. Nótese que la forma invariante θ^L es de hecho una conexión plana que puede tratarse como un campo gauge de vacío. La relevancia de este tipo de conexiones es patente en algunos fenómenos. Por ejemplo, en la teoría electromagnética, campos electromagnéticos de vacío dan lugar al efecto de Aharonov-Bohm y la cuantización de un flujo magnético en un anillo superconductor.

---

[6] Comparando con la prescripción de acoplamiento mínimo estándar, $\varphi^\alpha_{,\mu} \to \varphi^\alpha_{,\mu} + A^{(b)}_\mu X^\alpha_{(b)}$, se observa que el papel de φ^α y $X^\alpha_{(b)}$ lo desempeñan respectivamente g^a y $X^a_{(b)}$ en la nueva formulacion. El punto que hay que subrayar es que $X^a_{(b)} (= \theta^{-1(a)}_b)$, a diferencia de $X^\alpha_{(b)}$, es en general invertible, y gracias a esta propiedad, el nuevo acoplamiento minimo se puede escribir en la forma dada por (7.33).

7.2.3. Lagrangianos de tipo modelo sigma no lineal: una alternativa al Mecanismo de Higgs

El acoplamiento mínimo $\theta_\mu^{(a)} + A_\mu^{(a)}$ sugiere fuertemente la consideración de Lagrangianos del tipo del modelo sigma no lineal, i.e.

$$\mathcal{L}_{''\mathrm{mat}''}(\theta_\mu^L) \sim \mathrm{Tr}_G[\theta_\mu^L \theta^{L\mu}] \tag{7.34}$$

para describir los campos de "materia". Este tipo de Lagrangianos está caracterizado por la simetría *quiral*, es decir, por la simetría por la izquierda y por la derecha simultáneamente. En tal caso el correspondiente Lagrangiano de "materia" invariante gauge es de la forma

$$\hat{\mathcal{L}}_{''\mathrm{mat}''} = \mathcal{L}_{''\mathrm{mat}''}(\theta_\mu^L + A_\mu) \sim \mathrm{Tr}_G[(\theta_\mu^L + A_\mu)(\theta^{L\mu} + A^\mu)] \tag{7.35}$$

y el Lagrangiano $\mathcal{L}_0$ de los campos gauge libres, como de costumbre, debe ser una función del tensor de intensidad $F_{\mu\nu}^{(a)}$. Como consecuencia, los campos gauge $A_\mu^{(a)}$ adquieren masa, a través del término

$$\mathrm{Tr}[A_\mu A^\mu]\,, \tag{7.36}$$

sin dañar la invariancia gauge. En el Apéndice 10.5 se ilustra con detalle este mecanismo de generación de masa para campos gauge abelianos y no abelianos.

Rotura parcial de la simetría quiral

Más aún, puede explotarse el alcance del presente esquema para seleccionar direcciones especiales en el grupo de gauge a lo largo de las cuales los correspondientes bosones intermedios permanezcan sin masa. Esto se logra considerando el Lagrangiano del modelo sigma sustituyendo la traza total sobre el grupo por una *traza parcial*, de manera que sólo adquirirían masa aquellos campos gauge que "vivieran" sobre una cierta órbita (coadjunta) del grupo G, siendo el único precio a pagar la pérdida parcial de la quiralidad global. Más concretamente, si H es un subgrupo cerrado de G, con el índice (c) corriendo sobre G/H, el Lagrangiano

$$\mathrm{Tr}_{G/H}[\theta_\mu^L \theta^{L\mu}] = \theta_\mu^{L(c)} \theta_{(c)}^{L\mu} \tag{7.37}$$

es invariante por la izquierda bajo el grupo rígido G pero invariante por la derecha solamente[7] bajo H. Por ejemplo, en el modelo sigma del grupo

[7]Nótese que cualquier función de θ^L es obviamente invariante por la izquierda, pero sólo una suma escalar sobre el índice de grupo garantiza también la invariancia por la derecha.

$SU(2)$, restringiendo la traza en el Lagrangiano original a $SU(2)/U(1)$ se podría generar masa exclusivamente para dos de los tres campos gauge asociados al grupo local $SU(2)(M)$. El espíritu de este formalismo, de hecho, ha sido ya considerado en la literatura para reformular el Modelo Estándar de la interacción electrodébil. La descripción alternativa proporciona masa a los bosones vectoriales $W^{(+)}, W^{(-)}, Z$ sin la necesidad de introducir el controvertido bosón de Higgs. Nos gustaría señalar que el uso explícito de los bosones de Goldstone en la descripción de procesos físicos no es algo *nuevo* en la literatura en manera alguna. Así, por ejemplo, como consecuencia del llamado *Teorema de Equivalencia* [101,102], de acuerdo con el cual un bosón de Higgs muy pesado puede eliminarse del escenario de la simetría rota en favor de bosones de Goldstone del modelo sigma no lineal, el cómputo de los diagramas de Feynman que involucran las polarizaciones longitudinales de los bosones vectoriales (masivos) en los procesos gobernados por la interacción electrodébil puede ser resuelto en términos de los correspondientes diagramas entre los mencionados campos escalares de tipo Goldstone. Conviene comentar también que la construcción descrita también se puede aplicar en modelos fenomenológicos de bajas energías para la interacción fuerte con objeto de generar la masa de la partícula vectorial ρ preservando la invariancia gauge [103].

7.3. Revisión del Modelo Electrodébil

En primer lugar, consideremos el producto directo

$$SU(2) \otimes U(1) \tag{7.38}$$

y denotemos por

$$\{\omega^+, \omega^-, \omega^0\} \tag{7.39}$$

las coordenadas sobre $SU(2)$ adaptadas a la base esférica y sean

$$\{W_\mu^{(+)} \leftrightarrow \omega_\mu^+, W_\mu^{(-)} \leftrightarrow \omega_\mu^-, W_\mu^0 \leftrightarrow \omega_\mu^0\} \tag{7.40}$$

los correspondientes potenciales vectores. De manera análoga, sea $\{b\}$ la coordenada sobre $U(1)$ y $B_\mu = b_\mu$ el potencial vector asociado.

De modo natural se puede considerar el Lagrangiano de "materia"

$$\lambda_1\, \theta_\mu^{(+)} \theta^{(-)\mu} \;+ \lambda_2\, \theta_\mu^{(0)} \theta^{(0)\mu}\;, \tag{7.41}$$

que preserva la quiralidad bajo el subgrupo externo $U(1)$ y es invariante bajo el grupo rígido $SU(2)\otimes U(1)$, conduciendo a una teoría donde sólo los potenciales W_μ^+, W_μ^- y W_μ^0 adquieren masa (quedando B_μ sin masa) tras efectuar el acoplamiento mínimo, al mismo tiempo que se respeta la invariancia gauge.

Para dar cuenta verdaderamente de la descripción física de la interacción electrodébil, deberíamos ser capaces de elegir una base apropiada en el álgebra de Lie del grupo rígido, que pudiera ser exponenciada al grupo. Por lo tanto, para ser precisos habría que considerar el cociente por algun cierto subgrupo (cíclico) finito Z_d

$$(SU(2)\,\tilde{\otimes}\,U(1))/Z_d \tag{7.42}$$

como el auténtico grupo de simetría, o eventualmente $U(2)$. No obstante, de acuerdo con los fines de la memoria presente, se obviarán las sutilezas topológicas [**?**], cuya relevancia será más bien de interés de cara a un futuro estudio de la cuantización de la teoría que desarrollamos en esta seccion. Entonces, describiremos simplemente la teoría en un nuevo sistema coordenado tanto para los campos de "materia",

$$\{\omega^+,\, \omega^-,\, z,\, a\}\ , \tag{7.43}$$

como para los correspondientes bosones vectoriales

$$\{W_\mu^{(+)},\, W_\mu^{(-)},\, Z_\mu,\, A_\mu\}\ . \tag{7.44}$$

La base de la nueva álgebra de Lie se secribe en la forma

$$<\tilde{T}_+,\, \tilde{T}_-,\, \tilde{T}_3,\, \tilde{Y}>\ , \tag{7.45}$$

donde

$$\tilde{T}_\pm \;=\; T_\pm \tag{7.46}$$

$$\tilde{T}_3 \;=\; \frac{q'}{d}T_3 - \frac{q}{d}Y \tag{7.47}$$

$$\tilde{Y} \;=\; -\frac{p'}{d}T_3 + \frac{p}{d}Y \quad (d \equiv pq' - p'q) \tag{7.48}$$

deberia constituir una generalizacion de la relacion de GellMann-Nishijima

$$Q \;=\; T_3 \;+\; \frac{Y}{2} \quad (Q \sim \tilde{Y})\ , \tag{7.49}$$

que establece que el generador del subgrupo electromagnético $U(1)$ se mezcla del modo no trivial más simple, esto es, a través de la diagonal natural en la subálgebra de Cartan, ya que $U(1)_{T_3} \subset SU(2)$ requiere dar el *doble de vueltas* que el $U(1)_Y$ externo.

Como ya se ha comentado, por el momento descartamos aquí la clasificación de los posibles valores de los parámetros p, q, p', q' del cambio de base, y simplemente los determinaremos con vistas a recuperar el contenido físico codificado en el Lagrangiano del Modelo Estándar. Ahora las constantes de estructura $\tilde{C}^a_{bc}$ del álgebra de Lie unificada de $SU(2)\widetilde{\otimes}U(1)$ son diferentes:

$$\begin{aligned}\left[\tilde{T}_3,\ \tilde{T}_\pm\right] &= \pm\frac{2q'}{d}\tilde{T}_\pm\ , &(7.50)\\ \left[\tilde{Y},\ \tilde{T}_\mp\right] &= \pm\frac{2p'}{d}\tilde{T}_\mp\ , &(7.51)\\ \left[\tilde{T}_+,\ \tilde{T}_-\right] &= p\tilde{T}_3 + q\tilde{Y}\ . &(7.52)\end{aligned}$$

A la constante de acoplamiento *unificada* la llamaremos $\tilde{g}$. Nuestro Lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{tot}} \equiv \mathcal{L}_{\text{``matt''}} + \mathcal{L}_0$ ahora reza:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{tot}} &= \alpha\left[\theta^{(+)}_\mu - \tilde{g}W^{(+)}_\mu\right]\left[\theta^{(-)\mu} - \tilde{g}W^{(-)\mu}\right] + \beta\left[\theta^{(z)}_\mu - \tilde{g}Z_\mu\right]\left[\theta^{(z)\mu} - \tilde{g}Z^\mu\right]\\ &- \frac{1}{4}F^{\mu\nu}_{(c)}F^{(c)}_{\mu\nu} \qquad (7.53)\end{aligned}$$

donde los tensores de intensidad $F^{(c)}_{\mu\nu}$, $c = \pm, z, a$, se escriben explícitamente en la forma:

$$\begin{aligned}F^{(\pm)}_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^{(\pm)}_\nu - \partial_\nu W^{(\pm)}_\mu \mp \frac{p'}{d}\tilde{g}(A_\mu W^{(\pm)}_\nu - A_\nu W^{(\pm)}_\mu) \pm \frac{q'}{d}\tilde{g}(Z_\mu W^{(\pm)}_\nu - Z_\nu W^{(\pm)}_\mu)\\ F^{(z)}_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + \frac{p}{2}\tilde{g}(W^{(+)}_\mu W^{(-)}_\nu - W^{(+)}_\nu W^{(-)}_\mu)\\ F^{(a)}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{q}{2}\tilde{g}(W^{(+)}_\mu W^{(-)}_\nu - W^{(+)}_\nu W^{(-)}_\mu).\end{aligned}$$

Para recuperar los resultados concernientes con el sector de bosones vectoriales del Lagrangiano de Weinberg-Salam, debemos realizar las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned}p' &= -2q\cot\vartheta_W\ ,\\ q' &= 2q\cot^2\vartheta_W\ ,\\ p &= q\cot\vartheta_W\ ,\\ q &= \frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{2\tan^2\vartheta_W+1}{\sin^2\vartheta_W}}}{2+\cot^2\vartheta_W}\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{g}^2 &= M_W^2 \ , \\ \beta\tilde{g}^2 &= \frac{1}{2}M_Z^2 \ ,\end{aligned}$$

donde ϑ_W denota el ángulo de Weinberg y M_W, M_Z son las masas de los respectivos bosones vectoriales intermedios débiles. Los nuevos campos bosónicos de tipo Golstone ω^+, ω^-, z evolucionan de acuerdo con el Lagrangiano del modelo sigma no lineal

$$\alpha\theta_\mu^{(+)}\theta^{(-)\mu} + \beta\theta_\mu^{(z)}\theta^{(z)\mu} \tag{7.54}$$

acoplado a los bosones vectoriales a través de sus derivadas y los diagramas de Feynman correspondientes son de la misma forma para ambos tipos de campos. De hecho, en el contexto de la teoría de perturbaciones estándar, y con el fin de evitar los términos cuadráticos de cruce del trozo de Lagrangiano

$$(\theta_\mu^{(a)} + A_\mu^{(a)})(\theta^\mu_{(a)} + A^\mu_{(a)}) \ , \tag{7.55}$$

se deberían *redefinir los bosones vectoriales* como sigue

$$A_\mu^{(a)} \rightarrow A_\mu^{(a)} + g^a_{,\mu} \ . \tag{7.56}$$

Esto podría interpretarse como un remanente del llamado gauge *unitario* de la teoría ordinaria de rotura espontánea de la simetría. Con respecto al Lagrangiano de los campos gauge libres $\mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}^{(a)})$ la redefinición previa induce nuevos acoplamientos entre $A_\mu^{(a)}$, $g^a_{,\mu}$ y sus derivadas. Estos acoplamientos nuevos dificultan el establecimiento de la unitariedad y la renormalizabilidad de estos modelos (a pesar de que se preserva la invariancia gauge) con las técnicas de la teoría de perturbaciones (véase, por ejemplo, [104, 105]). Entonces parece natural recurrir al formalismo de la CSG donde cuestiones tales como el carácter renormalizable, finito y unitario de la teoría no están sujetos a los problemas de la teoría estándar.

Un punto conflictivo de la teoría aquí presentada, y que todavía requiere un estudio más profundo, es la cuestión de la masa fenomenológica de estos campos sigma no lineales. Entre las diversas opciones, cabría pensar en estos campos como posibles candidatos para la materia oscura, como, por ejemplo, los WIMP's (en inglés, Weakly Interacting Massive Particles). Por lo visto, hasta el momento estas raras partículas (con nombres como *fotino*) a pesar de las predicciones teóricas, no han sido detectadas. De acuerdo con las estimaciones de algunas teorías, los WIMP's serían bastante comunes en el Universo y tendrían masas comprendidas entre 10 y 100 veces la masa del protón, por lo que se considera que podrían dar cuenta de gran parte del sector total de materia oscura. Los cosmólogos prefieren los WIMP's pertenecientes a la clase de la materia oscura fría porque serían relativamente pesados y se moverían en una escala de velocidades mucho menor que la de la luz. Este hecho los podría haber convertido en las "semillas" gravitacionales alrededor de las cuales la materia ordinaria (bariónica) se hubiera congregado para formar galaxias.

7.3.1. Generación de masa para la materia fermiónica

Incorporaremos ahora en la teoría la materia fermiónica de la manera tradicional, incluyendo el acoplamiento mínimo ordinario

$$\psi_{,\mu} - \tilde{g} A_\mu \psi \,, \tag{7.57}$$

aunque el mecanismo por el cual adquirirán masa será diferente al estándar. Proponemos un mecanismo de generación de masa fermiónica que está relacionado con una mezcla física no trivial entre el grupo de Poincaré y el grupo electrodébil $SU(2)\,\tilde{\otimes}\,U(1)$ a la manera en que se procedió en el Capítulo anterior al hablar de la mezcla de interacciones. Esta mezcla ocurre a través de una combinación lineal de los generadores P_0 y Q, de modo análogo a como el generador Q se escribe como combinación lineal de T_3 y Y. Así, redefiniendo

$$\tilde{P}_0 \equiv P_0 + \kappa Q \,, \tag{7.58}$$

donde κ es una constante (la relación carga-masa, de hecho), se llega a la siguiente álgebra de Lie para el grupo de la mezcla de simetrías $\mathcal{P}\,\tilde{\otimes}\,SU(2)\,\tilde{\otimes}\,U(1)$:

$$\begin{gathered}
\left[\tilde{T}_3,\ \tilde{T}_\pm\right] = \pm\tfrac{2q'}{d}\tilde{T}_\pm \,, \qquad \left[Q,\ \tilde{T}_\pm\right] = \mp 2\tilde{T}_\pm \,, \\
\left[\tilde{T}_+,\ \tilde{T}_-\right] = p\tilde{T}_3 - \tfrac{p'}{d}Q \,, \quad \left[Q,\ \tilde{T}_3\right] = 0 \,, \\
\left[\tilde{P}_0,\ \tilde{T}_\pm\right] = \pm 2\kappa\tilde{T}_\pm \,, \quad \left[\tilde{P}_0,\ \tilde{T}_3\right] = 0 \,, \quad \left[\tilde{P}_0,\ Q\right] = 0
\end{gathered}$$

junto con el conmutador del grupo de Poincaré extendido:

$$\left[\tilde{P}_i,\ \tilde{M}_{oj}\right] = \eta_{ij}\left(\frac{1}{c^2}\tilde{P}_0 - \kappa Q\right) \tag{7.59}$$

que proporciona de hecho una mezcla no trivial entre gravedad y electromagnetismo (ver Capítulo 6) al gaugear el grupo de translaciones espacio-temporales T^4 [42, 54].

Ahora, se define el operador de masa:

$$\hat{M}^2 \equiv \tilde{P}_0^2 - \tilde{\vec{P}}^2 , \qquad (7.60)$$

y entonces se tiene

$$\hat{M}^2\psi \; = \; (m_0^2 + 2\kappa P_0 Q + \kappa^2 Q^2)\psi \qquad (7.61)$$

y, en el sistema de referencia en reposo

$$\hat{M}^2\psi \; = \; (m_0^2 + 2\kappa m_0 Q + \kappa^2 Q^2)\psi \; . \qquad (7.62)$$

Luego, para partículas que "originalmente" no tuvieran masa

$$\hat{M}^2\psi \; = \; \kappa^2 Q^2 \psi \; , \qquad (7.63)$$

de modo que se concluye que sólo las partículas cargadas adquieren masa. Esto podría ser la razón por la que no hay ninguna partícula fermiónica elemental masiva sin carga eléctrica. En esta afirmación es esencial el hecho de que la partícula considerada sea *fundamental*. Así, por ejemplo, la existencia de piones masivos con carga eléctrica nula no contradice nuestra tesis puesto que tales piones se componen de un quark y un antiquark y, por tanto, no son partículas fundamentales.

Finalmente señalaremos que todavía se podría ir más allá en la búsqueda de teorías de gravedad generalizadas dotadas de un mecanismo de generación de masa similar al aquí introducido para interacciones internas. De hecho, partiendo de una variedad Minkowskiana compactificada M (e.g. un espacio homogeneo del grupo conforme, $SO(4,2)$) se podría dar masa a aquellos difeomorfismos en la dirección de las transformaciones conformes específicas así como de las dilataciones, con lo que se dotaría de dinámica a los parámetros de los correspondientes difeomorfismos. Eventualmente el mecanismo descrito podría producir contribuciones al sector de materia oscura del Universo. En relación con este aspecto en el apartado siguiente se generaliza el modelo de Stueckelberg de las interacciones internas al caso de simetrías espacio-temporales [55].

7.4. Generalización del Modelo de Stueckelberg

Consideremos la acción infinitesimal de un grupo de Lie arbitrario G sobre las coordenadas espacio-temporales x^μ y sobre los parámetros φ^a del grupo de gauge (a los que nos referimos una vez más como campos de “materia”)[8]:

$$\delta_{(a)}x^\mu = X^\mu_{(a)} \tag{7.64}$$
$$\delta_{(a)}\varphi^b = X^b_{(a)} \ , \tag{7.65}$$

donde $X^\mu_{(a)}$ es, en general, una función de la posición. El punto de partida de la teoría es el requerimiento de la invariancia global de la acción de “materia”, i.e.

$$X^\mu_{(a)}\frac{\partial\mathcal{L}_{''\mathrm{matt}''}}{\partial x^\mu} + X^b_{(a)}\frac{\partial\mathcal{L}_{''\mathrm{matt}''}}{\partial\varphi^b} + \left(\frac{\partial X^b_{(a)}}{\partial\varphi^c}\partial_\mu\varphi^c - \partial_\nu\varphi^b\frac{\partial X^\nu_{(a)}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial\mathcal{L}_{''\mathrm{matt}''}}{\partial(\partial_\mu\varphi^b)} + \mathcal{L}_{''\mathrm{matt}''}\partial_\mu X^\mu_{(a)} = 0. \tag{7.66}$$

A continuación construiremos la teoría invariante bajo el grupo local generado por:

$$f^{(a)}(x)\delta_{(a)}x^\mu = f^{(a)}(x)X^\mu_{(a)} \tag{7.67}$$
$$f^{(a)}(x)\delta_{(a)}\varphi^b = f^{(a)}(x)X^b_{(a)} \ , \tag{7.68}$$

donde $f^{(a)}$ son funciones arbitrarias definidas sobre la variedad espacio-temporal y desempeñan el papel de parámetros del álgebra de gauge. De este modo se generalizará el llamado modelo de Stueckelberg, que ha sido reformulado en las secciones previas de este capítulo en el contexto del grupo de los 1-jets del grupo de gauge, al caso de simetrías espacio-temporales.

Para garantizar la invariancia local hay que introducir los campos compensadores $A^{(a)}_\mu$ y k^ν_μ, con las leyes de transformación dadas en la teoría general expuesta en el capítulo 4, de acuerdo con la cual se puede establecer la siguiente prescripción generalizada de acoplamiento mínimo entre los parámetros del grupo de gauge y los campos compensadores:

$$\varphi^a_{,\mu} \to k^\nu_\mu(\varphi^a_{,\nu} + A^{(b)}_\nu X^a_{(b)}) \ . \tag{7.69}$$

Es conveniente escribir esta expresión en la forma:

$$k^\nu_\mu X^a_{(b)}(\theta^{(b)}_\mu + A^{(b)}_\mu) \ , \tag{7.70}$$

pues entonces para un Lagrangiano de “materia” de tipo modelo sigma no lineal, la prescripción de acoplamiento mínimo reza:

$$\theta^{(a)}_\mu \to k^\nu_\mu(\theta^{(a)}_\nu + A^{(a)}_\nu) \ . \tag{7.71}$$

[8]Por su parte, la materia ordinaria requiere el tratamiento descrito en el Capítulo 4 y, por tanto, en esta sección se obviará.

Esta expresión generaliza la transformación de Stueckelberg para el caso de simetrías externas o espacio-temporales.

En lo que respecta a la segunda parte del Teorema de Utiyama generalizado, el Lagrangiano $\mathcal{L}_0$ de los campos compensadores libres tiene la estructura presentada en el Capítulo 4 y la acción "total" invariante local se escribe en la forma:

$$S_{\text{``tot''}} = \int \Lambda\Big(g^{\mu\nu}(\theta^{(a)}_{\mu} + A^{(a)}_{\mu})(\theta_{(a)\nu} + A_{(a)\nu}) + \mathcal{L}_0(\mathcal{T}^{\sigma}_{\mu\nu}, \mathcal{F}^{(a)}_{\mu\nu})\Big)d^4x \ , \quad (7.72)$$

donde se recuerda que $g^{\mu\nu} \equiv k^{\mu}_{\rho} k^{\nu}_{\sigma} \eta^{\rho\sigma}$ y $\Lambda \equiv det(q^{\nu}_{\mu})$.

A continuación ilustramos la teoría expuesta con un ejemplo que podría tener cierto interés en el ámbito de la cosmología.

Modelo de Stueckelberg generalizado para el grupo de Weyl

La generalización del modelo de Stueckelberg para las simetrías externas implica la existencia de campos compensadores espacio-temporales con masa. Sin embargo, no existen evidencias fenomenológicas a bajas energías que justifiquen la existencia de tales campos masivos y parece sugerente entonces la posibilidad de considerar la rotura espontánea de simetrías espacio-temporales mayores que la simetría residual de Poincaré [106], contexto que refuerza la idea de tratar de encontrar en el vacío fuentes para los grados de libertad métricos a partir de parámetros de grupos espacio-temporales locales. Estas exóticas fuentes de vacío podrían contribuir en el tensor energía-momento de las ecuaciones de Einstein. Tales modificaciones, eventualmente, podrían tener que ver con efectos típicos de la materia oscura.

Por ejemplo, la idea de una teoría capaz de describir campos compensadores masivos $A^{(\mathrm{dil})}_{\mu}$ asociados con transformaciones de escala locales presenta cierto interés desde el punto de vista cosmológico. Una masa no nula para el campo gauge dilatónico podría proporcionar una posible explicación para una salida del periodo de inflación y también podría ser una herramienta útil en la interpretación de datos observacionales sobre la base de modelos cosmológicos post-Riemannianos (véase, por ejemplo, [107, 108]). El modelo de Stueckelberg generalizado descrito antes es un marco adecuado para darle vida a tal teoría, con la ventaja de preservar la invariancia gauge. El precio a pagar es la introducción del parámetro de grupo dilatónico φ^{dil} como campo de "materia" dinámico y su interpretación física. Una posibilidad interesante sería, como se ha sugerido al principio, relacionar dicho campo con el sector de materia oscura del Universo. De hecho, la relación entre la materia oscura y la invariancia de escala, así como las ventajas que de dicha relación se derivan a la hora de discutir diversas cuestiones cosmológicas, ha sido estudiada en [108, 110]. La suposición de la existencia de una relación entre la materia oscura y la propia geometría se ha considerado en ciertas teorías que generalizan la teoría de la Relatividad General, como la llamada teoría de Weyl-Dirac, donde la geometría es tratada como fuente de la materia oscura [111].

A continuación esbozamos el modelo de Stueckelberg en cuestión. El punto de partida es un Lagrangiano de tipo sigma no lineal donde la traza se restringe al cociente W/P, denotando por W al grupo de Weyl y por P al de Poincaré. El hecho de tomar el cociente por el grupo de Poincaré minimiza el número de parámetros del grupo de gauge con carácter dinámico y permite la aparición de términos de masa para el campo gauge dilatónico. De este modo el Lagrangiano de "materia" sólo da cuenta de la forma canónica invariante $\theta_\mu^{(dil)}$ asociada con el parámetro gauge dilatónico $\varphi^{\rm dil}$ del grupo de Weyl local, i.e.

$$\mathcal{L}_{\text{``mat''}} = Tr_{W/P}(\theta_\mu \theta^\mu) = \theta_\mu^{(\rm dil)} \theta^{(\rm dil)\mu} \ . \tag{7.73}$$

La prescripción de acoplamiento mínimo generalizado (7.71) para campos σ involucrando a su vez transformaciones de simetría espacio-temporal permite obtener la densidad Lagrangiana de "materia" invariante local[9] :

$$\widehat{L}_{\text{``mat''}} = \Lambda(\theta_\mu^{(\rm dil)} + A_\mu^{(\rm dil)})(\theta_\nu^{(\rm dil)} + A_\nu^{(\rm dil)}) g^{\mu\nu} \ , \tag{7.74}$$

Por otro lado, la dinámica de los campos compensadores libres viene descrita por la densidad Lagrangiana $\Lambda\mathcal{L}_0$ de la teoría gauge del grupo de Weyl (ver Capitulo 5).

Sin entrar, por el momento, en más detalles, merece la pena subrayar que este modelo sencillo podría arrojar luz en la cuestión de la posible relación de la materia oscura y la invariancia de escala, lo que requiere todavía un estudio más profundo.

[9]Nótese que la teoría gauge del grupo de Weyl automáticamente implica el "gaugeado" del grupo conforme (la mayor simetría espacio-temporal bajo la que se preserva la covariancia de la electrodinámica).

Capítulo 8

Extensión de la simetría de difeomorfismos y gravitación

Un difeomorfismo ξ del espacio-tiempo M, $\xi : M \to M$, induce un cambio de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$, bajo el cual el tensor métrico transforma de acuerdo con la expresión

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\sigma\rho} \,. \tag{8.1}$$

Como es bien sabido, $(M, g_{\mu\nu})$ y $(M, g'_{\mu\nu})$ representan el mismo espacio-tiempo físico. Esto es, $g'_{\mu\nu}$ sigue siendo solución de las ecuaciones de Einstein si $g_{\mu\nu}$ es una solución de partida. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein tienen invariancia bajo cambios generales de coordenadas y, en consecuencia, se puede considerar que la invariancia bajo difeomorfismos es una simetría *gauge* de la gravitación, en el sentido de que deja invariante punto a punto la variedad de soluciones de la Relatividad General.

No obstante, la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General presenta el problema de que parece imposible hacer una elección de espacio de configuración tal que en su espacio de las fases sólo estén presentes los verdaderos grados de libertad dinámicos. Así pues, la existencia de ligaduras altamente no lineales para los difeomorfismos obstruyen el proceso de la Cuantización Canónica de la gravedad. Una salida a las dificultades de la cuantización de la gravitación propias de las técnicas convencionales consiste en enfocar el problema desde el punto de vista de la CSG, que, además, tiene la ventaja adicional de garantizar tanto la unitariedad como la renormalizabilidad de la teoría. Para construir la base sobre la que con posterioridad se espera construir la teoría final debemos generalizar la noción de *grupo de los 1-jets del grupo de gauge*, introducido en el capítulo previo, al caso de simetrías externas. De tal modo, habría que considerar como simetría básica de la gravitación no sólo el grupo de difeomorfismos del espacio-tiempo M, sino también aquellas tranformaciones sobre el fibrado tangente $T(M)$ que no son la derivada de un difeomorfismo. La nueva estructura matemática subyacente que emerge recibe el nombre de *grupo de los 1-jets del grupo de difeomorfismos*. Combinando esta estructura y el esquema de la CSG cabe esperar que las ligaduras de los difeomorfismos no se impongan *a mano* sino que aparezcan de modo natural como resultado de la dinámica.

Nuestra motivación tambien está basada por otra parte en el hecho de que el grupo de simetría espacio-temporal más pequeño cuya teoría gauge, conocida como *teleparalelismo*, es capaz de reproducir la teoría de Einstein de la gravitación es el grupo de translaciones espacio-temporales $T(4)$. Como se señaló en el Capítulo 5, en este caso los únicos campos compensadores relevantes son en esencia los campos tetrádicos y, por consiguiente, esta simetría resulta de particular interés para tratar de profundizar en la naturaleza del campo gravitatorio en el marco de las teorías gauge. Asimismo, dado que los generadores de las translaciones espacio-temporales locales satisfacen el álgebra de difeomorfismos (locales), resulta natural reformular la interpretación de los campos gravitacionales tetrádicos de la teoría gauge a la Utiyama en términos de los *1-jets de los difeomorfismos*.

Se recuerda que en el caso de $T(4)$, de acuerdo con el Teorema de Utiyama generalizado, el Lagrangiano de los campos de materia debe ser modificado según la versión generalizada de la prescripción de acoplamiento mínimo, esto es, todas las derivadas de los campos materiales en el Lagrangiano de materia original deben multiplicarse por tétradas y el Lagrangiano de los campos compensadores libres debe ser una función de la torsión de Cartan $T^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ asociada con las tétradas. La densidad Lagrangiana del teleparalelismo es, de hecho, una cierta combinación cuadrática de la torsión que es igual, salvo divergencia, a la densidad Lagrangiana de Hilbert-Einstein asociada al tensor métrico construido con los campos tetrádicos.

En este capítulo reformularemos la descripción del teleparalelismo de la gravedad apoyándonos sobre la idea de los jets de difeomorfismos, un esquema que, como ya se ha comentado, podría ser útil a la hora de abordar la cuestión de la determinación de las auténticas variables dinámicas de la teoría cuántica de la gravitación.

8.1. Grupo de Jets de Difeomorfismos

Definimos el grupo de los 1-jets de los difeomorfismos de un modo análogo a la noción de grupo de los 1-jets del grupo de gauge, esto es:

$$J^1(\mathcal{D}if(M)) \equiv \frac{\mathcal{D}if(M) \times M}{\overset{1}{\sim}} \tag{8.2}$$

donde la relación de equivalencia $\overset{1}{\sim}$ se define como sigue:

$$(\xi^\mu, x) \overset{1}{\sim} (\xi'^\mu, x') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' \\ \xi^\mu(x) & = & \xi'^\mu(x) \\ \partial_\nu \xi^\mu(x) & = & \partial_\nu \xi'^\mu(x), \end{array} \right. \tag{8.3}$$

$\forall\, (\xi^\mu, x),\ (\xi'^\mu, x') \in \mathcal{D}iff(M) \times M$.

Un sistema de coordenadas para $J^1(\mathcal{D}iff(M))$ está dado por

$$\{x^\mu, \xi^\mu, \xi^\mu_\nu\}, \tag{8.4}$$

donde los objetos ξ^μ_ν parametrizan transformaciones sobre el fibrado tangente $T(M)$ que en cada punto toman el valor de la primera derivada de (diferentes) difeomorfismos, pero, en general, $\xi^\mu_\nu \neq \xi^\mu_{,\nu}$, excepto para extensiones jet. ξ^μ_ν no representan simples cambios de coordenadas, es decir, no son *gauge* en el sentido estricto de dejar invariante punto a punto la variedad de soluciones.

Desde el punto de vista de la invariancia local, el grupo relevante es el grupo infinito-dimensional cuyos elementos son las secciones de $J^1(\mathcal{D}iff(M))$ sobre M, i.e.

$$\mathcal{D}iff^1(M) \equiv \Gamma(J^1(\mathcal{D}iff(M))) = \{M \to J^1(\mathcal{D}iff(M))\}. \tag{8.5}$$

En consecuencia, cualquier difeomorfismo local generado por un campo de vectores

$$X_f = f^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{8.6}$$

puede ser levantado canónicamente al fibrado tangente de tal modo que los nuevos conmutadores reproduzcan a los originales

$$[X_f, X_g] = (f^\mu \partial_\mu g^\nu - g^\mu \partial_\mu f^\nu)\partial_\nu\ , \tag{8.7}$$

y el nuevo generador reza

$$X_f^{\mathrm{Lift}} = f^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \partial_\rho f^\mu \xi^\rho_\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu_\nu}\ . \tag{8.8}$$

8.2. Invariancia bajo $\mathcal{D}if(M)$: simetría gauge estándar

Hay que destacar que $X_f^{\rm Lift}$ es *gauge* ya que actúa sobre ξ^μ_ν a través de la derivada de un difeomorfismo. Nótese también que los objetos

$$T^\nu_\mu \equiv \xi^\rho_\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu_\nu} \tag{8.9}$$

satisfacen el álgebra $gl(4)$ con conmutadores

$$[T^\nu_\mu, T^\sigma_\rho] = \delta^\sigma_\mu T^\nu_\rho - \delta^\nu_\rho T^\sigma_\mu \ . \tag{8.10}$$

Esto implica que $X_f^{\rm Lift}$ puede verse como el levantado *natural* al fibrado de las referencias[1] que admite cualquier difeomorfismo (local) de la variedad base espacio-temporal.

Se puede definir densidades Lagrangianas $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{D}iff^1(M)$ dependiendo de los argumentos $\{x^\mu, \xi^\mu, \xi^\mu_\nu\}$ y sus derivadas de primer orden. Por el momento, se descartará la dependencia en los difeomorfismos ξ^μ. Sin embargo, desde el punto de vista de la cuantización, es conveniente hacer notar el papel de los difeomorfismos como algún tipo de bosones de Goldstone[2]. De acuerdo con nuestros propósitos, será suficiente considerar sólo las variables

$$\{x^\mu, \xi^\mu_\nu\} \tag{8.11}$$

para construir la teoría gravitacional más simple. De modo similar al procedimiento de la teoría gauge ordinaria demandaremos la invariancia de

$$\mathcal{L}(x^\mu, \xi^\mu_\nu, \xi^\mu_{\nu,\sigma}) \tag{8.12}$$

bajo la extensión jet[3] de $X_f^{\rm Lift}$, i.e.

$$\bar{X}_f^{\rm Lift}\mathcal{L} = 0 \ . \tag{8.13}$$

[1]El fibrado de las referencias es un fibrado principal cuyo grupo estructural es el grupo general lineal GL_4.

[2]En el Capítulo previo se comentó que en la teoría cuántica de interacciones internas los auténticos campos físicos no son los campos $A^{(a)}_\mu$ sino la combinacion de campos gauge y bosones de Goldstone de la forma $A^{(a)}_\mu + g^{(a)}_{,\mu}$. De modo análogo, para la gravedad cabría pensar en combinaciones del tipo $\xi^\nu_\mu + \xi^\nu_{,\mu}$.

[3]Debemos aclarar que se están manejando dos tipos diferentes de extensiones jet: por un lado, la extensión jet de $X_f \in \mathcal{D}iff(M)$ como una inclusión $X_f^{\rm Lift}$ en $\mathcal{D}iff^1(M)$, y, por otra parte, la extensión jet de los campos en el espacio de configuración $E \equiv \mathcal{D}iff^1(M)$ a $J^1(\mathcal{D}iff^1(M))$, $\bar{X}_f^{\rm Lift}$, para variar los Lagrangianos definidos en este espacio.

Más explícitamente:

$$\begin{aligned} f^\mu(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \quad &+ \quad \partial_\rho f^\mu(x)\xi^\rho_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\mu_\nu} \\ &+ \quad \left(\xi^\rho_\nu\partial_\sigma\partial_\rho f^\mu(x)+\xi^\rho_{\nu,\sigma}\partial_\rho f^\mu(x)-\xi^\mu_{\nu,\rho}\partial_\sigma f^\rho(x)\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\mu_{\nu,\sigma}}=0\ . \end{aligned} \tag{8.14}$$

Debido a la arbitrariedad y la independencia de las funciones f^μ y sus derivadas se sigue que sus coeficientes deben ser igual a cero y, por tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \partial_\nu f^\mu(x) \quad &: \qquad \xi^\nu_\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\mu_\epsilon}+(\xi^\nu_{\epsilon,\sigma}\delta^\rho_\mu-\xi^\rho_{\epsilon,\mu}\delta^\nu_\sigma)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\rho_{\epsilon,\sigma}}=0 \\ \partial_\sigma\partial_\nu f^\mu(x) \quad &: \qquad \xi^\nu_\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\mu_{\epsilon,\sigma}}+\xi^\sigma_\epsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^\mu_{\epsilon,\nu}}=0\ . \end{aligned} \tag{8.15}$$

La ecuación asociada con $\partial_\sigma\partial_\nu f^\mu(x)$ implica que $\mathcal{L}$ debe depender de ξ^μ_ν y $\xi^\mu_{\nu,\sigma}$ a través de la combinación

$$\tau^\rho_{\mu\nu}\equiv\xi^\rho_{\nu,\theta}\xi^\theta_\mu-\xi^\rho_{\mu,\theta}\xi^\theta_\nu\ . \tag{8.16}$$

LLevando este resultado a la ecuación asociada con el coeficiente de $\partial_\nu f^\mu(x)$, ésta última se puede reescribir en la forma:

$$\xi^\nu_\lambda\xi^\rho_{\theta,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau^\rho_{\lambda\theta}}+\xi^\sigma_\theta(\xi^\nu_{\lambda,\sigma}\delta^\rho_\mu-\xi^\rho_{\lambda,\mu}\delta^\nu_\sigma)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau^\rho_{\theta\lambda}}=0. \tag{8.17}$$

La solución de esta ecuación proporciona la forma general de $\mathcal{L}(\xi^\mu_\nu,\xi^\mu_{\nu,\sigma})$:

$$\mathcal{L}(\xi^\mu_\nu,\xi^\mu_{\nu,\sigma})=\mathcal{L}(T^\sigma{}_{\mu\nu}) \tag{8.18}$$

con

$$T^\sigma{}_{\mu\nu}\equiv\zeta^\sigma_\rho\tau^\rho_{\mu\nu}=\zeta^\sigma_\rho(\xi^\rho_{\nu,\theta}\xi^\theta_\mu-\xi^\rho_{\mu,\theta}\xi^\theta_\nu), \tag{8.19}$$

siendo los campos ζ^σ_ρ los inversos de ξ^ρ_ν, i.e.

$$\begin{aligned} \zeta^\sigma_\rho\xi^\rho_\nu \quad &= \quad \delta^\sigma_\nu \\ \zeta^\sigma_\rho\xi^\mu_\sigma \quad &= \quad \delta^\mu_\rho. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Como consecuencia, la invariancia bajo difeomorfismos conduce a una familia de teorías (no necesariamente métricas) que están caracterizadas por la dependencia en el objeto $T^\sigma{}_{\mu\nu}$ pero no fija la forma concreta del Lagrangiano.

Multiplicando $\mathcal{L}(T^\sigma{}_{\mu\nu})$ por el factor $\Lambda \equiv det(\zeta^\sigma_\rho)$ se obtiene la acción invariante bajo difeomorfismos

$$S_{\mathcal{D}if} = \int \hat{\mathcal{L}} d^4x \tag{8.21}$$

donde

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \Lambda \mathcal{L}(T^\sigma{}_{\mu\nu}) \ . \tag{8.22}$$

8.3. Invariancia bajo $\mathcal{D}if^1(M)$: Teleparalelismo

El siguiente paso es la construcción de una teoría gravitacional que sea equivalente a la teoría de Einstein. Para ello recurriremos a aquellas simetrías en $\mathcal{D}iff^1(M)$ que no son extensiones jet de $\mathcal{D}iff(M)$. En otras palabras, extenderemos la simetría de difeomorfismos añadiendo nuevos generadores actuando sobre el fibrado tangente a M, $T(M)$, y dando cuenta sólo de la componente *puramente jet*, i.e.

$$X^1_l \equiv l_\nu{}^\sigma(x) \xi^\mu_\sigma \frac{\partial}{\partial \xi^\mu_\nu} \tag{8.23}$$

donde $l_{\mu\nu}$ son los correspondientes parámetros infinitesimales, que no son derivadas de ningún difeomorfismo infinitesimal, y satisfacen [4] $l_{\mu\nu}(x) = -l_{\nu\mu}(x)$

[4]La antisimetría de $l_{\mu\nu}$ sugiere establecer alguna relación con el grupo de Lorentz local, cuya realización espacio-temporal

$$\omega^{(\mu\nu)}(x) X_{(\mu\nu)} = \omega^{(\mu\nu)}(x)(\delta^\sigma_\mu \eta_{\nu\rho} - \delta^\sigma_\nu \eta_{\mu\rho}) x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$$

admite el levantado (de tipo extensión jet)

$$\begin{aligned}\overline{\omega^{(\mu\nu)}(x) X_{(\mu\nu)}} &= \omega^{(\mu\nu)}(x) X_{(\mu\nu)} - \left(\omega^{(\mu\nu)}(x)\delta^\rho_\theta + \frac{\partial \omega^{(\mu\nu)}}{\partial x^\theta} x^\rho\right)(\delta^\sigma_\mu \eta_{\nu\rho} - \delta^\sigma_\nu \eta_{\mu\rho}) \xi^\kappa_\sigma \frac{\partial}{\partial \xi^\kappa_\theta} \\ &= \omega^{(\mu\nu)} \overline{X}_{(\mu\nu)} + \frac{\partial \omega^{(\mu\nu)}}{\partial x^\theta} x^\rho (\delta^\sigma_\mu \eta_{\nu\rho} - \delta^\sigma_\nu \eta_{\mu\rho}) \xi^\kappa_\sigma \frac{\partial}{\partial \xi^\kappa_\theta} .\end{aligned}$$

Como consecuencia, se puede observar que una vez que el término $\omega^{(\mu\nu)} X_{(\mu\nu)}$ es añadido a X^1_l, el campo de vectores resultante puede identificarse como $\omega^{(\mu\nu)}(x)(= l_\sigma{}^\nu(x)\eta^{\sigma\mu})$ veces la extensión jet del generador rígido de Lorentz.

and $l_\nu{}^\sigma \equiv \eta^{\sigma\mu} l_{\nu\mu}$. Nótese asimismo las diferentes reglas de transformación de los dos índices de ξ^μ_ν.

La forma precisa de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}$ será determinada en dos pasos. En primer lugar, impondremos la invariancia global de $\hat{\mathcal{L}} \equiv \Lambda\mathcal{L}(T^\sigma{}_{\mu\nu})$ bajo $X^1_{l(\text{global})}$ (es decir, con $l's$ constantes) y, a continuación, se exigirá la semi-invariancia (i.e. invariancia de la densidad Lagrangiana salvo una divergencia) bajo el generador con parámetros locales X^1_l.

La combinación más simple en $T^\sigma{}_{\mu\nu}$ que satisface la condición de invariancia rígida[5]

$$\bar{X}^1_{l(\text{global})}\hat{\mathcal{L}} = \Lambda l_\nu{}^\sigma \left(\xi^\mu_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\mu_\nu} + \xi^\mu_{\sigma,\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\mu_{\nu,\rho}} \right) = 0 \tag{8.24}$$

es la siguiente combinación cuadrática con coeficientes constantes arbitrarios

$$\mathcal{L}(T^\sigma_{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{T^2} \equiv A T^\sigma{}_{\mu\nu} T_\sigma{}^{\mu\nu} + B T^\sigma{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\sigma + C T^\sigma{}_{\sigma\mu} T_\nu{}^{\nu\mu}, \tag{8.25}$$

donde la contracción de índices está hecha con la métrica de Minkowski.[6]

Ahora determinaremos los coeficientes A, B, C con ayuda del requisito de semi-invariancia de $\Lambda\mathcal{L}_{T^2}$ bajo el generador local X^1_l. Esta condición implica la ecuación:

$$\bar{X}^1_l(\Lambda\mathcal{L}_{T^2}) = \Lambda \partial_\sigma l_\nu{}^\rho \xi^\mu_\rho \frac{\partial \mathcal{L}_{T^2}}{\partial \xi^\mu_{\nu,\sigma}} = div\lambda_l\ , \tag{8.26}$$

que puede reescribirse de la manera siguiente

$$\Lambda(4A-2B)\xi^\theta_\mu T_\nu{}^{\mu\rho}\partial_\theta l^\nu_\rho - 2B\Lambda\xi^\theta_\mu T_\nu{}^{\mu\rho}\partial_\theta l^\nu_\rho - 2C\Lambda\xi^\theta_\mu T_\nu{}^{\nu\rho}\partial_\theta l^\mu_\rho = div\lambda_l\ . \tag{8.27}$$

Definiendo los vectores (no-holonómicos) $\tilde{\partial}_\mu \equiv \xi^\nu_\mu \partial_\nu$, se llega a

$$\Lambda(4A-2B)T_\nu{}^{\mu\rho}\tilde{\partial}_\mu l^\nu_\rho - 2B\Lambda T_\nu{}^{\mu\rho}\tilde{\partial}_\mu l^\nu_\rho - 2C\Lambda T_\nu{}^{\nu\rho}\tilde{\partial}_\mu l^\mu_\rho = div\lambda_l\ . \tag{8.28}$$

Teniendo en cuenta

$$\Lambda \xi^\mu_{\nu,\mu}\tilde{\partial}_\sigma l^{\sigma\nu} + \xi^\mu_\nu(\partial_\mu\Lambda)\tilde{\partial}_\sigma l^{\sigma\nu} = -\Lambda T^\mu{}_{\nu\mu}\tilde{\partial}_\sigma l^{\sigma\nu} \tag{8.29}$$

[5] Nótese que $\bar{X}^1_l\Lambda = 0$, asi $\bar{X}^1_{l(\text{global})}\hat{\mathcal{L}} = \Lambda\bar{X}^1_{l(global)}\mathcal{L}(T^\sigma{}_{\mu\nu})$.

[6] El motivo por el que se le dota al espacio-tiempo con una estructura Lorentziana caracterizada por un tensor métrico $g_{\mu\nu} \equiv \zeta^\sigma_\mu \zeta^\rho_\nu \eta_{\sigma\rho}$ es consecuencia de la invariancia bajo el generador rígido X_l. Usando un subgrupo diferente del grupo de los 1-jets de los difeomorfismos sería posible construir tensores métricos no Lorentzianos, e.g. métricas Euclídeas $g_{\mu\nu} = \zeta^\sigma_\mu \zeta^\rho_\nu \delta_{\sigma\rho}$. Entonces, en el presente contexto, la evolución de ξ^μ_ν permitiría, de modo natural, la posibilidad de cambios en la signatura de la métrica, un propiedad que no se describe de modo satisfactorio en Relatividad General y que, de hecho, se suele asociar con situaciones singulares.

y el conmutador

$$[\tilde{\partial}_\mu, \tilde{\partial}_\nu] = T^\sigma{}_{\mu\nu}\tilde{\partial}_\sigma, \tag{8.30}$$

se sigue

$$\partial_\mu(\Lambda\xi^\mu_\nu\partial_\sigma l^{\sigma\nu}) = -\Lambda\left(\frac{1}{2}T^\mu{}_{\nu\sigma}\tilde{\partial}_\mu l^{\nu\sigma} + T^\mu{}_{\nu\mu}\tilde{\partial}_\sigma l^{\sigma\nu}\right). \tag{8.31}$$

Usando esta última expresión la ecuación (8.26) puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned}(4A-2B)2\Lambda T_\mu{}^{\nu\sigma}\tilde{\partial}_\nu l_\sigma{}^\mu - (4A+2C)\Lambda T^\mu{}_{\nu\sigma}\tilde{\partial}_\mu l_\sigma{}^\nu \quad &- \quad 4C\partial_\mu(\Lambda\xi^\mu_\nu\partial_\sigma l^{\sigma\nu}) \\ &= \quad div\lambda_l\ , \end{aligned}\tag{8.32}$$

que se cumple para elecciones de A, B, C tales que

$$\begin{aligned} A &= \frac{B}{2} \\ B &= -\frac{C}{2} \\ \lambda^\mu_l &= -4C\Lambda\xi^\mu_\nu\partial_\sigma l^{\sigma\nu}\ . \end{aligned}\tag{8.33}$$

La familia de Lagrangianos resultante da cuenta de la llamada descripción del teleparalelismo de la gravedad. Para $C = -1$, la densidad Lagrangiana $\hat{\mathcal{L}}$ toma la forma

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\text{teleparalelismo}} = \Lambda T^\mu{}_{\nu\sigma}T^\rho{}_{\xi\theta}\left(\frac{1}{4}\eta^{\xi\nu}\eta^{\sigma\theta}\eta_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\eta^\theta_\mu\eta^{\nu\xi}\eta^\sigma_\rho - \eta^\sigma_\mu\eta^\theta_\rho\eta^{\nu\xi}\right), \tag{8.34}$$

que es equivalente (salvo una derivada total) a la densidad Lagrangiana de Hilbert-Einstein asociada con la métrica $g_{\mu\nu} \equiv \zeta^\sigma_\mu\zeta^\rho_\nu\eta_{\sigma\rho}$.

8.4. Observaciones

I. A la luz de los resultados se puede afirmar que las funciones coordenadas *puramente jet* ξ^σ_μ desempeñan el papel de las tétradas k^σ_μ de la teoría gauge de grupos de simetrías espacio-temporales.

II. El interés principal de considerar $\mathcal{D}iff^1(M)$ como una simetría dinámica (o fundamental) de la Gravedad no estriba sólo en que la imposición de esta simetría fija la forma precisa del Lagrangiano gravitacional $\mathcal{L}_0$ (como ya se comentó el Teorema de Utiyama generalizado sólo fija el argumento de $\mathcal{L}_0$) sino que también permite la obtención de un conjunto infinito de invariantes Noether no nulos (no gauge) lo cual se debe a que la expresión de estos invariantes incluye las derivadas de los parámetros de la simetría local a través del término $-4\Lambda\xi^\mu_\nu\partial_\sigma l^{\sigma\nu}(x)$ asociado a la semi-invariancia de la densidad Lagrangiana $\Lambda\mathcal{L}_{T^2}$ (para $C=-1$) bajo la nueva simetría[7]. Una situación semejante es la semi-invariancia bajo boosts de la partícula libre Galileana. Este conjunto de invariantes Noether eventualmente podría usarse para parametrizar la variedad de soluciones, lo cual es de gran importancia en el proceso de cuantización de la gravedad.

III. Otra de las ventajas de este enfoque es, por ejemplo, que la invariancia bajo extensiones (centrales o no) del grupo de los jets de los difeomorfismos podría considerarse como un principio presente tanto en la gravedad no trivial de Polyakov en (1+1)D como en la versión realista de Einstein en (3+1)D. De hecho, en dos dimensiones $\mathcal{D}iff^1(S^1)$ podría emplearse para describir la teoría de cuerdas, que de hecho es una teoría de gravedad cuántica [112].

IV. Más aún, la usual acción semidirecta del grupo de Virasoro sobre un grupo de Kac-Moody en teoría de campos conforme en (1+1)D se puede generalizar ahora a

$$\Gamma(J^1(Dif(M)\otimes_s G(M))) \equiv \{M \to J^1(Dif(M)\otimes_s G(M))\}\ , \qquad (8.35)$$

que implica, como se comentó anteriormente, una mezcla particular de la gravedad y de la interacción interna asociada con el grupo de gauge $G(M)$ como resultado de la acción natural de $Dif(M)$ sobre los argumentos de los elementos de $G(M)$. Nótese que

$$\left\{X_f^{Lift} = f^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \partial_\rho f^\mu \xi^\rho_\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu_\nu}\ ,\ X_{G(M)} \equiv f^{(a)}(x)X_{(a)}\right\} \qquad (8.36)$$

(satisfaciendo $X_{(a)}$ el álgebra de Lie $\mathcal{G}$ del grupo de Lie global G) generan el producto semidirecto de grupos $Dif(M)\otimes_s G(M)$.

[7] Recuérdese que dada la acción $S=\int\mathcal{L}(x^\mu,\psi^\alpha,\psi^\alpha_{,\mu})d^4x$ estrictamente invariante bajo un grupo de Lie G con generadores $X = X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+X^\alpha\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}$, las corrientes Noether conservadas J^μ se escriben en la forma $J^\mu=(X^\nu\psi^\alpha_{,\nu}-X^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\alpha_{,\mu}}-X^\mu\mathcal{L}$. Si la densidad Lagrangiana es semi-invariante, esto es, $L_{\tilde{X}}(\mathcal{L}d^4x)=\partial_\mu\lambda^\mu$, la expresión de las corrientes Noether se obtiene substrayendo el término λ^μ a la expresión anterior de J^μ.

Capítulo 9

Conclusiones

Las conclusiones más relevantes de la presente memoria se resumen a continuación:

1. -Se ha reformulado de modo nítido la generalización del Teorema de Utiyama para grupos de Lie arbitrarios de simetría espacio-temporal, usando para ello el formalismo Lagrangiano estándar sobre fibrados jets. Se ha determinado la forma precisa que toma la densidad Lagrangiana de los campos compensadores libres así como la densidad Lagrangiana que describe la interacción de tales campos con la materia, lo cual ha supuesto la generalización de nociones tales como la de derivada covariante y tensor de intensidad de los campos compensadores para el caso de simetrías externas. El problema de la generalización de la teoría de Utiyama al caso de grupos de simetría que mueven el espacio-tiempo data de 1956, por lo que no se trata en manera alguna de una cuestión nueva en la literatura. Sin embargo, nuestra presentación, aparte de la generalidad, pues se puede aplicar a un grupo de Lie arbitrario, ofrece ciertas ventajas, o en su caso matizaciones necesarias, frente a las aproximaciones usuales. Por un lado, queda claro en nuestro contexto el uso de los índices locales de grupo en los campos compensadores $h^{(a)\mu}_{\nu\rho}$ frente a la postura estándar de la distinción de notación en los índices de los campos tetrádicos k^{ν}_{μ}. Asimismo, nuestra formulación permite la introducción de campos compensadores asociados a los generadores de translaciones locales aún cuando su realización sobre los campos de materia es trivial.

2. -El método general mencionado se ha aplicado, en particular, para la revisión de las teorías gauge de gravedad asociadas a los grupos de translaciones espacio-temporales, Poincaré y Weyl, prestando especial atención a la interpretación geométrica y a las condiciones bajo las que se recupera la teoría de Einstein.

3. -Hemos construido un modelo sencillo de mezcla de la gravitación y el electromagnetismo, que da cuenta de la existencia de fuerzas electromagnéticas de origen gravitatorio. La construcción del modelo se basa en la aplicación de la generalización del Teorema de Utiyama tomando como simetría gauge el grupo de Poincaré centralmente (pseudo-)extendido por $U(1)$. Un punto clave a la hora de obtener el tensor de intesidad electromagnético $F^{(\Phi)}_{\mu\nu}$ con términos de mezcla ha sido la existencia de los potenciales translacionales $A^{(\nu)}_{\mu}$, pues la constante de estructura que contiene a la constante de acoplamiento de la mezcla de electro-gravedad involucra los índices de translaciones. En la teoría resultante es destacable la aparición de un campo electromagnético aunque de origen gravitatorio, y, por tanto, el modelo de mezcla de electro-gravedad presentado reaviva las ideas del magnetismo gravitacional. Las ecuaciones para la métrica resultan ser del tipo Einstein-Maxwell pero corregidas por un término proporcional a la constante de mezcla, y, a diferencia de la teoría de Einstein-Maxwell, la ecuación para la torsión no es trivial. Se estudia también como caso particular la modificación que sufre la ecuación de las geodésicas de una partícula sin spin, obteniéndose un término nuevo análogo a la fuerza de Lorentz pero de origen gravitatorio.

4. -Se ha obtenido la versión del Teorema de Utiyama partiendo de los parámetros del grupo de gauge, vistos como campos de materia exotica (e.g. WIMP's) descritos por Lagrangianos del modelo sigma no lineal. La estructura matemática subyacente es el grupo de los 1-jets del grupo de gauge.

5. -La construcción anterior ha permitido revisar el modelo estándar de la interacción electrodébil sin apelar a la hipótesis de la existencia del bosón de Higgs. Este método no hace uso del algoritmo de rotura espontánea de la simetría y es una alternativa al modelo de Higgs. La generación de masa de las partículas es entonces resultado de considerar la mezcla no trivial entre electromagnetismo y gravedad.

6. -Se ha generalizado el modelo de Stueckelberg para grupos de simetría espacio-temporal y, en particular, se ha estudiado el caso del grupo de Weyl, contexto en el que la variable de grupo dilatónica adquiere contenido dinámico y podría ser responsable de cierto sector de materia oscura del Universo.

7. -Se ha formulado la teoría del teleparalelismo como una teoría de invariancia bajo el grupo de los 1-jets de los difeomorfismos del espacio-tiempo. Esta aproximación podría ser útil de cara a la cuantización de la gravedad. De hecho, este contexto proporciona una conexión con las ideas de la cuantización bidimensional de la gravedad (la gravedad inducida o de Polyakov) donde la simetría dinámica está estrechamente relacionada con las extensiones centrales del álgebra de difeomorfismos de la circunferencia S^1 [100,113].

Teniendo en cuenta los resultados del caso bidimensional, aunque en dimensiones realistas no existen extensiones centrales no triviales del álgebra de difeomorfismos, perdiendo por tanto el punto de contacto con la gravedad de Polyakov, sí que existen extensiones tensoriales no centrales [114–116] que se podrían relacionar con las extensiones del grupo de los jets de los difeomorfismos y, entonces, al amparo de la CSG, esta alternativa tal vez sería útil para indagar la naturaleza de la simetría dinámica de la gravitación.

Capítulo 10

Apéndices

10.1. Expresión de la extensión 1-jet de un campo de vectores

Sea E, $\pi : E \to M$ un fibrado diferenciable. Dado un campo de vectores arbitrario

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}$$

sobre E, su extensión 1-jet

$$\overline{X} = X + \overline{X}^\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha_\mu}$$

está determinada por la condición de transformación de contacto infinitesimal

$$L_{\overline{X}} \theta^\alpha = C^\alpha_\beta \theta^\beta \ ,$$

donde las 1-formas de estructura θ^α vienen definidas por

$$\theta^\alpha = d\varphi^\alpha - \varphi^\alpha_\mu dx^\mu \ .$$

Obtengamos la expresión explícita de C^α_β y $\bar{X}^\alpha_\mu$. Para ello recordamos que, en general, dada una 1-forma α y un campo de vectores Y, se cumple la expresión

$$L_X \alpha(Y) = X\alpha(Y) - \alpha([X, Y]) \ . \tag{10.1}$$

Por otro lado,

$$L_{\bar{X}}\theta^\alpha = \left(L_{\bar{X}}\theta^\alpha\right)_\sigma dx^\sigma + \left(L_{\bar{X}}\theta^\alpha\right)_\gamma d\varphi^\gamma \ , \tag{10.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\left(L_{\overline{X}}\theta^\alpha\right)_\sigma &= L_{\overline{X}}\theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) = \overline{X}\theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right) - \theta^\alpha\left(\left[\overline{X}, \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right]\right) \\
&= -\overline{X}\varphi^\alpha_\sigma + \theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\overline{X}\right) = -\overline{X}^\alpha_\sigma + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\sigma} \qquad (10.3) \\
\left(L_{\overline{X}}\theta^\alpha\right)_\gamma &= L_{\overline{X}}\theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^\gamma}\right) = \overline{X}\theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^\gamma}\right) - \theta^\alpha\left(\left[\overline{X}, \frac{\partial}{\partial \varphi^\gamma}\right]\right) \\
&= \theta^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^\gamma}\overline{X}\right) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial \varphi^\gamma} \ . \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

Usando la condición de transformación de contacto infinitesimal se obtienen las igualdades:

$$\begin{aligned}
-\overline{X}^\alpha_\sigma + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\sigma} &= -C^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\sigma \\
\frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial \varphi^\gamma} &= C^\alpha_\gamma \ . \qquad (10.5)
\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión para $\overline{X}^\alpha_\sigma$ reza:

$$\overline{X}^\alpha_\sigma = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\sigma} + \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} - \varphi^\alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial \varphi^\gamma}\right)\varphi^\gamma_\sigma \ . \tag{10.6}$$

10.2. Conexiones principales como secciones globales de J^1P/G

Un fibrado principal $\pi : P \to M$ con grupo estructural un grupo de Lie G, por definición, está provisto de la acción canónica (por la derecha) de G sobre P,

$$R_g : p \to pg \in P \ , \ p \in P, \ g \in G \ , \tag{10.7}$$

que a su vez induce la acción canónica

$$J^1R_g : J^1P \to J^1P \tag{10.8}$$

del mismo grupo G sobre el fibrado jet $J^1P \to M$, que es un fibrado afín aunque, en general, no es fibrado principal. Al tomar el cociente de J^1P por la acción J^1R_g se obtiene el espacio de órbitas J^1P/G con respecto a dicha acción. Se puede construir entonces el fibrado afín

$$J^1P/G \to M \ . \tag{10.9}$$

Por otro lado, una conexión principal sobre el fibrado principal $P \to M$ se define como una sección

$$A : P \to J^1P \tag{10.10}$$

que es equivariante bajo la acción R_G, esto es:

$$J^1R_g \circ A = A \circ R_g \, , \forall g \in G \ . \tag{10.11}$$

Debido a esta propiedad se puede concluir [70] que las funciones de transición de J^1P/G se corresponden con las reglas de transformación de las conexiones principales bajo cambio de trivializaciones locales del fibrado P. Por lo tanto, existe una correspondencia uno a uno entre la conexión principal sobre el fibrado principal $P \to M$ y las secciones globales del fibrado $J^1P/G \to M$, que por tanto recibe el nombre de *fibrado de las conexiones principales*.

10.3. Formulación alternativa del Teorema de Utiyama

Principio de Mínima Interacción

El presente Apéndice da cuenta de la formulación de la teoría de Utiyama desde un punto de vista distinto al utilizado en esta memoria pero puede resultar de interés para aquellos lectores con una orientación de carácter más matemático.

Sea P un fibrado principal sobre M con grupo estructural G y E un fibrado vectorial de fibra V asociado a P mediante una representación lineal R_V. Sea $J^1(E) \equiv \overline{E}$ el fibrado de los 1-jets de E, y $\theta_1^{\Gamma_E}$ la 1-forma de estructura sobre $J^1(E)$ asociada a una conexión Γ_E (por determinar). Sea $\mathcal{L}_1$ un Lagrangiano de primer orden sobre $J^1(E)$ invariante bajo G. Si ω es un volumen sobre M,

$$(\theta_1^{\Gamma_E}, \mathcal{L}_1\omega) \tag{10.12}$$

define una *estructura variacional* sobre las secciones de E.

Sea $K \equiv Hom(T(E), P_A)$, donde P_A es el fibrado adjunto a P, y $J^1(K) \equiv \overline{K}$ el fibrado de los 1-jets de K con 1-forma de estructura θ_2. Si $\mathcal{L}_2$ es un Lagrangiano de primer orden sobre $\overline{K}$ (tambien por determinar),

$$(\theta_2, \mathcal{L}_2\omega) \tag{10.13}$$

define una estructura variacional sobre las secciones de K [1].

Consideremos el producto fibrado ε de E y K, y sea $\overline{\varepsilon}$ el fibrado de los 1-jets de ε. Si $\theta \equiv \theta_1^{\Gamma_E} + \theta_2$, y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, el par

$$(\theta, \mathcal{L}\omega) \tag{10.14}$$

define una estructura variacional sobre las secciones de ε.

La estructura variacional $(\theta, \mathcal{L}\omega)$ junto con la condición de invariancia bajo el grupo de gauge con álgebra $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{G}$ constituye lo que se llama **Principio de Mínima Interacción** *del campo de materia de E con el campo de Yang-Mills de K.*

[1] Las secciones de K pueden verse como diferencia de conexiones $\Gamma - \Gamma_0$ sobre P para una conexión fija Γ_0.

Transformaciones infinitesimales de contacto y extensión jet asociada a la conexión

Decimos que X_1 sobre $\overline{\varepsilon}$ es una *transformación de contacto infinitesimal* si

$$L_{X^1}\theta = \Phi \circ \theta \tag{10.15}$$

donde Φ es un endomorfismo en el fibrado tangente vertical $T^{\mathrm{v}}(\varepsilon)$ [2].

Dado X sobre ε existe un único $\overline{X}$ sobre $\overline{\varepsilon}$ tal que proyecta sobre X y es una transformación de contacto infinitesimal. Tal $\overline{X} \equiv j^1(X)$ es la subida canónica asociada a θ.

Sea el sistema coordenado $\{x^\mu, \varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu, A^{(a)}_\mu, A^{(a)}_{\mu,\nu}\}$ del fibrado $\overline{\varepsilon}$. Consideremos el campo de vectores arbitrario

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + X^{(a)}_\mu \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \tag{10.16}$$

y escribamos $\overline{X}$ en forma general:

$$\overline{X} = X + \overline{X}^\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha_\mu} + \overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} \; . \tag{10.17}$$

Escribamos también $\theta (\equiv \theta^\Gamma)$ en coordendas[3]:

$$\theta = \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + \theta^{(a)}_\mu \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \; , \tag{10.18}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= d\varphi^\alpha - (\varphi^\alpha_\mu + A^\alpha_\mu) dx^\mu & (10.19) \\ \theta^{(a)}_\mu &= dA^{(a)}_\mu - A^{(a)}_{\mu,\nu} dx^\nu \; . & (10.20) \end{aligned}$$

con

$$A^\alpha_\mu \equiv A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta \; . \tag{10.21}$$

Obtengamos la expresión explícita de $\overline{X}$. Para ello hay que determinar $\overline{X}^\alpha_\mu$ y $\overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu}$ mediante la condición (10.15):

$$\begin{aligned} L_{\overline{X}}\theta &= (L_{\overline{X}}\theta^\alpha) \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + (L_{\overline{X}}\theta^{(a)}_\mu) \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} & (10.22) \\ &+ \theta^\alpha L_{\overline{X}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \right) + \theta^{(a)}_\mu L_{\overline{X}} \left(\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \right) \end{aligned}$$

[2] θ es una 1-forma sobre $J^1(\varepsilon)$ con valores en el $T^{\mathrm{v}}(\varepsilon)_{J^1(\varepsilon)}$, es decir, en el fibrado inducido del fibrado $T^{\mathrm{v}}(\varepsilon) \to \varepsilon$ por la aplicación $\pi^{1,0} : J^1(\varepsilon) \to J^0(\varepsilon) \equiv \varepsilon$.

[3] Compárese con la $\theta^{\Gamma_0} = (d\varphi^\alpha - \varphi^\alpha_\mu)\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}$ asociada a la conexión trivial Γ_0.

con

$$\begin{aligned}
(L_{\overline{X}}\theta^\alpha)_\mu &= -XA^{(a)}_\mu - \overline{X}^\alpha_\mu + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} - (\varphi^\alpha_\nu + A^\alpha_\nu)\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} \\
(L_{\overline{X}}\theta^\alpha)_\beta &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta} - (\varphi^\alpha_\nu + A^\alpha_\nu)\frac{\partial X^\nu}{\partial \varphi^\beta} \\
(L_{\overline{X}}\theta^{(a)}_\mu)_\nu &= -\overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\mu,\sigma}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial x^\nu} \\
(L_{\overline{X}}\theta^{(a)}_\mu)^\nu_b &= -A^{(a)}_{\mu,\sigma}\frac{\partial X^\sigma}{\partial A^{(b)}_\nu} + \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial A^{(b)}_\nu} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\overline{X}}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha}\right) &= -\frac{\partial X^\beta}{\partial \varphi^\alpha}\frac{\partial}{\partial \varphi^\beta} \\
L_{\overline{X}}\left(\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu}\right) &= -\frac{\partial X^b_\nu}{\partial A^{(a)}_\mu}\frac{\partial}{\partial A^b_\nu} \ .
\end{aligned}$$

Se sigue entonces:

$$\begin{aligned}
L_{\overline{X}}\theta &= \Big(\Big(- XA^\alpha_\mu - \overline{X}^\alpha_\mu + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} - (\varphi^\alpha_\nu + A^\alpha_\nu)\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + (\varphi^\beta_\mu + A^\beta_\mu)\frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta}\Big)dx^\mu \\
&+ \Big(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta} - \frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta} - (\varphi^\alpha_\nu + A^\alpha_\nu)\frac{\partial X^\nu}{\partial \varphi^\beta}\Big)d\varphi^\beta\Big)\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} \\
&+ \Big(\Big(- \overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\mu,\sigma}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial x^\nu} + A^{(b)}_{\sigma,\nu}\frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial A^{(b)}_\sigma}\Big)dx^\nu \\
&- A^{(a)}_{\mu,\sigma}\frac{\partial X^\sigma}{\partial A^{(b)}_\nu}dA^{(b)}_\nu\Big)\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \ .
\end{aligned} \tag{10.23}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \theta &= C^\alpha_\beta \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + C^{(a)\nu}_{\mu(b)}\theta^{(b)}_\nu \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \qquad (10.24) \\
&= C^\alpha_\beta (d\varphi^\beta - (\varphi^\beta_\mu + A^\beta_\mu)dx^\mu)\frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + C^{(a)\nu}_{\mu(b)}(dA^{(b)}_\nu - A^{(b)}_{\nu,\sigma}dx^\sigma)\frac{\partial}{\partial A^{(a)}_\mu} \ .
\end{aligned}$$

Entonces la igualdad $L_{\overline{X}}\theta = \Phi \circ \theta$ implica:

$$\begin{aligned}
C^\alpha_\beta &= -(\varphi^\alpha_\mu + A^\alpha_\mu)\frac{\partial X^\mu}{\partial \varphi^\beta} \\
-C^\alpha_\beta(\varphi^\beta_\mu + A^\beta_\mu) &= -XA^\alpha_\mu - \overline{X}^\alpha_\mu + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} - (\varphi^\alpha_\nu + A^\alpha_\nu)\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + (\varphi^\beta_\mu + A^\beta_\mu)\frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta} \\
C^{(a)\nu}_{\mu(b)} &= -A^{(a)}_{\mu,\sigma}\frac{\partial X^\sigma}{\partial A^{(b)}_\nu} \\
-C^{(a)\nu}_{\mu(b)}A^{(b)}_{\nu,\sigma} &= -\overline{X}^{(a)}_{\mu,\sigma} - A^{(a)}_{\mu,\nu}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial x^\sigma} + A^{(b)}_{\nu,\sigma}\frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial A^{(b)}_\nu} \ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{X}^{\alpha}_{\mu} &= \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - XA^{\alpha}_{\mu} - (\varphi^{\alpha}_{\nu} + A^{\alpha}_{\nu})\frac{\partial X^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + (\varphi^{\beta}_{\mu} + A^{\beta}_{\mu})\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} \\
&- (\varphi^{\beta}_{\mu} + A^{\beta}_{\mu})(\varphi^{\alpha}_{\nu} + A^{\alpha}_{\nu})\frac{\partial X^{\nu}}{\partial \varphi^{\beta}} \\
\overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu} &= \frac{\partial X^{(a)}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + A^{(b)}_{\rho,\nu}\frac{\partial X^{(a)}_{\mu}}{\partial A^{(b)}_{\rho}} - A^{(a)}_{\mu,\rho}\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\nu}} - A^{(a)}_{\mu,\rho}A^{(b)}_{\sigma,\nu}\frac{\partial X^{\rho}}{\partial A^{(b)}_{\sigma}} \ .
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma "canónica" si se utilizan las coordenadas "canónicas" adaptadas a la θ, es decir, aquellas en las que $\theta^{\alpha} = d\phi^{\alpha} - \phi^{\alpha}_{\mu}dx^{\mu}$. En nuestro caso $\phi^{\alpha}_{\mu} = \varphi^{\alpha}_{\mu} + A^{\alpha}_{\mu}$. Haciendo pues el cambio de variables:

$$
\begin{aligned}
\phi^{\alpha} &= \varphi^{\alpha} \\
\phi^{\alpha}_{\mu} &= \varphi^{\alpha}_{\mu} + A^{\alpha}_{\mu} = \varphi^{\alpha}_{\mu} + A^{(a)}_{\mu}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta} \\
B^{(a)}_{\mu} &= A^{(a)}_{\mu} \\
B^{(a)}_{\mu,\nu} &= A^{(a)}_{\mu,\nu} \ ,
\end{aligned} \tag{10.25}
$$

que implica

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} - A^{(a)}_{\mu}X^{\beta}_{(a)\alpha}\frac{\partial}{\partial \varphi^{\beta}_{\mu}} \\
\frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} \\
\frac{\partial}{\partial B^{(a)}_{\mu}} &= \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_{\mu}} - X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} \ ,
\end{aligned}
$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden presentar en la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \varphi^{\alpha}} - A^{(a)}_{\mu}X^{\beta}_{(a)\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \varphi^{\beta}_{\mu}} - \frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \varphi^{\beta}_{\mu}}\right) &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A^{(a)}_{\nu}} - X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \varphi^{\alpha}_{\nu}} - \frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial A^{(a)}_{\nu,\mu}}\right) &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Realización de $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G}$ sobre ε

Suponemos que los generadores del grupo local tienen la forma $X = X_1 + X_2$ con

$$
X_1 = f^{(a)}X^{\alpha}_{(a)\beta}\varphi^{\beta}\frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \tag{10.26}
$$

sobre E y, dado que G actúa sobre P_A por la representación adjunta, la forma del generador X_2 actuando sobre K viene dada por

$$X_2 = \left(f^{(a)} C_a{}^c{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A^{(b)}_\mu} \, . \tag{10.27}$$

Por tanto, el generador total sobre ε adopta la expresión [4]

$$X = f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + \left(f^{(a)} C_a{}^c{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A^{(c)}_\mu} \, . \tag{10.28}$$

Vamos a calcular $\overline{X}$ sobre $J^1(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\overline{X}^{(a)}_{\mu,\nu} &= \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial x^\nu} + A^{(b)}_{\rho,\nu} \frac{\partial X^{(a)}_\mu}{\partial A^{(b)}_\rho} - A^{(a)}_{\mu,\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\nu} - A^{(a)}_{\mu,\rho} A^{(b)}_{\sigma,\nu} \frac{\partial X^\rho}{\partial A^{(b)}_\sigma} \\
&= \frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\nu} C_c{}^a{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + A^{(b)}_{\mu,\nu} C_c{}^a{}_b f^{(c)} \, , \qquad (10.29) \\
\overline{X}^\alpha_\mu &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} - X_{\cdot} A^\alpha_\mu + (\varphi^\beta_\mu + A^\beta_\mu) \frac{\partial X^\alpha}{\partial \varphi^\beta} \\
&= \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta - f^{(b)} (X_{(a)} X_{(b)})^\alpha_\gamma \varphi^\gamma A^{(a)}_\mu \\
&- \left(f^{(b)} C_c{}^a{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} \right) X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta + (\varphi^\beta_\mu + A^{(a)}_\mu X^\beta_{(a)\gamma} \varphi^\gamma) f^{(b)} X^\alpha_{(b)\beta} \\
&= f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta_\mu \, . \qquad (10.30)
\end{aligned}$$

Finalmente resulta:

$$\begin{aligned}
\overline{X} \equiv \overline{X}^\Gamma &= f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha} + \left(f^{(a)} C_a{}^c{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A^{(c)}_\mu} \\
&+ f^{(a)} X^\alpha_{(a)\beta} \varphi^\beta_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi^\alpha_\mu} + \left(\frac{\partial f^{(c)}}{\partial x^\nu} C_c{}^a{}_b A^{(b)}_\mu + \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right. \\
&+ \left. A^{(b)}_{\mu,\nu} C_c{}^a{}_b f^{(c)} \right) \frac{\partial}{\partial A^{(a)}_{\mu,\nu}} \, . \qquad (10.31)
\end{aligned}$$

---

[4] La forma más general de representar $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G}$ es

$$R^{(\lambda)}(f^{(a)} \otimes X_{(a)}) = f^{(a)} R(X_{(a)}) + \lambda \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} \rho^\mu (X_{(a)})$$

donde λ es una constante arbitraria y las representaciones R y ρ^μ verifican:

$$\begin{aligned}
\left[R(X_{(a)}),\, R(X_{(b)}) \right] &= C_a{}^c{}_b R(X_{(c)}) \\
\left[R(X_{(a)}),\, \rho^\mu(X_{(b)}) \right] &= C_a{}^c{}_b \rho^\mu(X_{(c)}) \\
\left[\rho^\mu(X_{(a)}),\, \rho^\mu(X_{(b)}) \right] &= 0 \, .
\end{aligned}$$

De estas relaciones de conmutación se sigue que $\rho^\mu(\mathcal{G})$ es un ideal Abeliano.

Nótese que se obtiene la siguiente relación entre las extensiones jet asociadas a la conexiones Γ y Γ_0:

$$\overline{X}_1^{\Gamma} = f \otimes \overline{X}_1^{\Gamma_0} \,, \tag{10.32}$$

es decir, la extensión jet asociada a la conexión Γ es el producto de f por la extensión jet asociada a la conexión Γ_0 con que estaba formulado el principio variacional de los campos de materia con la conexión trivial Γ_0 sobre el espacio de Minkowski. Así pues si $\mathcal{L}_1$ era invariante bajo G, es decir,

$$L_{\overline{X}_1^{\Gamma_0}} \mathcal{L}_1 = 0 \,, \tag{10.33}$$

también es

$$L_{\overline{X}_1^{\Gamma}} \mathcal{L}_1 = 0 \,. \tag{10.34}$$

Ahora, si $L_{\overline{X}^{\Gamma}}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ ha de ser cero, necesariamente $L_{\overline{X}^{\Gamma}}\mathcal{L}_2$ tiene que ser cero también.

Expresión de $\overline{X}^{\Gamma}$ en las nuevas coordenadas

La extensión jet $\overline{X}^{\Gamma} = \overline{X}_1^{\Gamma} + \overline{X}_2^{\Gamma}$, realizando el cambio de variables (10.25), se reescribe en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1^{\Gamma} &= f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} + f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \varphi^{\beta}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}_{\mu}} = f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta} \Big(\frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}} \\
&+ B^{(b)}_{\mu} X^{\gamma}_{(b)\alpha} \frac{\partial}{\partial \phi^{\gamma}_{\mu}} \Big) + f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \Big(\phi^{\beta}_{\mu} - B^{(b)}_{\mu} X^{\beta}_{(b)\gamma} \phi^{\gamma} \Big) \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} \qquad (10.35) \\
&= f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}} + f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta}_{\mu} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} + f^{(a)} B^{(b)}_{\mu} C_{b}{}^{c}{}_{a} X^{\alpha}_{(c)\beta} \phi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} \,, \\
\overline{X}_2^{\Gamma} &= \Big(f^{(b)} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu} + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \Big(\frac{\partial}{\partial B^{(a)}_{\mu}} + X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} \Big) \\
&+ \Big(f^{(b)} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu,\nu} + \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\nu}} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu} + \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial}{\partial B^{(a)}_{\mu,\nu}} \,. \qquad (10.36)
\end{aligned}$$

En las nuevas variables $\overline{X}^{\Gamma}$ queda pues en la forma

$$\begin{aligned}
\overline{X}^{\Gamma} &= f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}} + \Big(f^{(a)} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta}_{\mu} + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} X^{\alpha}_{(a)\beta} \phi^{\beta} \Big) \frac{\partial}{\partial \phi^{\alpha}_{\mu}} \qquad (10.37) \\
&+ \Big(f^{(b)} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu} + \frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial}{\partial B^{(a)}_{\mu}} + \Big(f^{(b)} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu,\nu} + \frac{\partial f^{(b)}}{\partial x^{\nu}} C_{b}{}^{a}{}_{c} B^{(c)}_{\mu} \\
&+ \frac{\partial^2 f^{(a)}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \Big) \frac{\partial}{\partial B^{(a)}_{\mu,\nu}} \,,
\end{aligned}$$

que resulta tener la expresión de la extensión 1-jet con la conexión Γ_0, es decir, con el término no tensorial

$$\frac{\partial f^{(a)}}{\partial x^\mu} X^\alpha_{(a)\beta} \phi^\beta \frac{\partial}{\partial \phi^\alpha_\mu} \ .$$

Teorema de Utiyama

La estructura variacional definida por $(\theta_1^\Gamma + \theta_2, (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\omega)$ *es invariante por el grupo de gauge asociado al álgebra* $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G}$ *si y sólo si sobre las secciones de* $\overline{K}$, $\mathcal{L}_2$ *es función sólo de las componentes del tensor de curvatura asociado a la conexión* Γ, i.e.

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(F^{(a)}_{\mu\nu}) \ , \tag{10.38}$$

donde[5]

$$F^{(a)}_{\mu\nu} \equiv A^{(a)}_{\mu,\nu} - A^{(a)}_{\nu,\mu} - \frac{1}{2} C_b{}^a{}_c (A^{(b)}_\mu A^{(c)}_\nu - A^{(b)}_\nu A^{(c)}_\mu) \ . \tag{10.39}$$

En definitiva, vemos que se recupera la estructura del Lagrangiano de los campos compensadores tal y como se presentó en el Capítulo 3.

Por último, en el fibrado asociado es posible construir el tensor de curvatura $R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} \equiv F^{(a)}_{\mu\nu} X^\alpha_{(a)\beta}$ asociado a la conexión $\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \equiv A^{(a)}_\mu X^\alpha_{(a)\beta}$.

Replanteamiento

A modo de resumen, en el proceso meramente de carácter matemático descrito en este Apéndice se parte de un Lagrangiano de materia

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_\mu)$$

invariante bajo $\mathcal{G}$ y para conseguir la invariancia bajo $\mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{G}$ se modifica la forma de estructura

$$\theta^{\Gamma_0} = (d\varphi - \varphi_\mu dx^\mu) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

mediante la introducción de la conexión Γ. El proceso variacional tiene lugar en la estructura $(\theta^\Gamma, \mathcal{L}_1\omega)$ manteniendo la estructura del Lagrangiano original de partida $\mathcal{L}_1$. La extensión jet de los generadores $\overline{f \otimes X}$ es de tal modo que

$$\overline{f \otimes X}^\Gamma = f \otimes \overline{X}^{\Gamma_0} \ .$$

[5]Notamos que sobre secciones $A^{(a)}_{\mu,\nu} \equiv \frac{dA^{(a)}_\mu}{dx^\nu}$.

Sin embargo, y sobre todo de cara a la formulación de las interacciones fundamentales, es preferible plantear el Teorema de Utiyama desde un punto de vista más "físico" [6] tal y como precisamente desarrolló Utiyama. Éste ha sido el espíritu esencial que se ha seguido a lo largo esta memoria. En particular, en el Capítulo 3, dedicado a las simetrías internas, se parte del Lagrangiano de materia $\mathcal{L}_1$ y θ^{Γ_0}, y se modifica $\mathcal{L}_1$, con la introducción de la conexión, adoptando un nuevo Lagrangiano

$$\widehat{\mathcal{L}}_1(\varphi, \varphi_\mu, A_\mu) = \mathcal{L}_1(\varphi, \varphi_\mu + A_\mu) \; ,$$

función de nuevos campos, A_ν, junto con la θ^{Γ_0} y la extensión jet $\overline{X}^{\Gamma_0}$ y $\overline{f \otimes X}^{\Gamma_0}$ pero de un generador X que tiene componentes sobre los nuevos campos.

[6] Desde el punto de vista físico, resulta ambiguo pensar que un mismo Lagrangiano es capaz de describir dos situaciones físicas distintas.

10.4. Equivalencia entre la TRG y el Teleparalelismo

Con los campos tetrádicos se puede construir la métrica pseudoriemanniana

$$g_{\mu\nu} = q^{\sigma}_{\mu} q^{\rho}_{\nu} \eta_{\sigma\rho} \ .$$

La conexión espacio-temporal de la teoría gauge del grupo de translaciones tiene la expresión

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = -q^{\rho}_{\mu} k^{\sigma}_{\rho,\nu} = k^{\sigma}_{\rho} q^{\rho}_{\mu,\nu} \ .$$

Se cumple la siguiente relación

$$\Gamma_{\rho\lambda\mu} = -\Gamma_{\lambda\rho\mu} + g_{\rho\lambda,\mu} \ ,$$

con $\Gamma_{\rho\lambda\mu} \equiv g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}$, $g_{\rho\lambda,\mu} \equiv \partial_{\mu} g_{\rho\lambda}$.

La conexión $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ se puede escribir en términos de la conexión de Levi-Civita $\Gamma^{\sigma(\mathrm{L-C})}_{\mu\nu}$ asociada a la métrica como sigue

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma(\mathrm{L-C})}_{\mu\nu} + \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma^{\sigma(\mathrm{L-C})}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}) \ , \\ \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}(\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \theta_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} - \theta_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\mu}) \ . \end{aligned}$$

donde

$$\theta^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}$$

es la torsion de la conexion $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$.

El tensor de curvatura, sin embargo, es nulo

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = \Gamma^{\theta}{}_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^{\theta}{}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho,\nu} - \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho,\mu} = 0$$

y, por tanto,

$$R^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = R^{\theta(\mathrm{L-C})}_{\rho\mu\nu} - \mathcal{Q}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} = 0 \rightarrow R^{\theta(\mathrm{L-C})}_{\rho\mu\nu} = \mathcal{Q}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} \tag{10.40}$$

donde $R^{\theta(\text{L}-\text{C})}$ es el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita y

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\theta}{}_{\rho\mu\nu} &\equiv \mathcal{K}^{\theta}{}_{\rho\nu,\mu} - \mathcal{K}^{\theta}{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\mu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\theta}{}_{\sigma\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu} \\ &+ (\Gamma^{\sigma}{}_{\rho,\nu} - \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu})\mathcal{K}^{\theta}{}_{\sigma\mu} - (\Gamma^{\sigma}{}_{\rho,\mu} - \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu})\mathcal{K}^{\theta}{}_{\sigma\nu} \ . \end{aligned} \tag{10.41}$$

Entonces la curvatura escalar reza

$$R^{(\text{L}-\text{C})} = g^{\rho\nu} R^{\mu(\text{L}-\text{C})}_{\rho\mu\nu} = g^{\rho\nu}\mathcal{Q}^{\mu}{}_{\rho\mu\nu} \ . \tag{10.42}$$

En consecuencia la densidad Lagrangiana de Hilbert-Einstein se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H-E} \sim \Lambda R^{(\text{L}-\text{C})} &= \Lambda g^{\rho\nu}\mathcal{Q}^{\mu}{}_{\rho\mu\nu} \\ &= \Lambda g^{\rho\nu}(\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\nu,\mu} - \mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\mu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu} \\ &- (\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} - \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu})\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\nu} + (\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu})\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\mu}) \ , \end{aligned} \tag{10.43}$$

con $\Lambda = det(q^{\nu}_{\mu}) = \sqrt{-g}$. Haciendo uso de las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{\mu\nu}{}_{\nu} &= \theta_{\nu}{}^{\nu\mu} \\ \partial_{\sigma}\Lambda &= \Lambda\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma} \\ g^{\rho\nu}_{,\mu} &= -g^{\sigma\nu}g^{\rho\lambda}g_{\lambda\sigma,\mu} \\ g_{\rho\sigma,\mu} &= \Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda g^{\rho\nu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\nu,\mu} &= \partial_{\mu}(\Lambda\mathcal{K}^{\mu\nu}{}_{\nu}) - \mathcal{K}^{\mu\nu}{}_{\nu}\partial_{\mu}\Lambda - \Lambda\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\nu}g^{\rho\nu}_{,\mu} \\ &= \partial_{\mu}(\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\sigma\mu}) - \theta_{\sigma}{}^{\sigma\mu}\Lambda\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} + \Lambda\mathcal{K}^{\mu\rho\sigma}(\Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu}) \ , \end{aligned}$$

y análogamente

$$-\Lambda g^{\rho\nu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\mu,\nu} = \partial_{\mu}(\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\sigma\mu}) - \theta_{\sigma}{}^{\sigma\mu}\Lambda\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu} + \Lambda\theta_{\mu}{}^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}(\Gamma_{\rho\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho\nu}) \ .$$

Entonces, en pasos sucesivos, se tiene

$$\begin{aligned} \Lambda g^{\rho\nu}(\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\nu,\mu} &- \mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\mu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu}) = -2\partial_{\mu}(\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\mu\sigma}) - 2\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\mu\sigma}\theta^{\rho}{}_{\mu\rho} \\ &- \Lambda\theta_{\mu}{}^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\Gamma_{\rho\sigma\nu} + \Lambda\mathcal{K}^{\mu\rho\sigma}(\Gamma_{\rho\sigma\mu} + \Gamma_{\sigma\rho\mu} - \Gamma_{\sigma\mu\rho}) \\ \Lambda g^{\rho\nu}(\mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\nu,\mu} &- \mathcal{K}^{\mu}{}_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\mu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\mu}) \\ &= -2\partial_{\mu}(\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\mu\sigma}) - 2\Lambda\theta_{\sigma}{}^{\mu\sigma}\theta^{\rho}{}_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\Lambda\theta_{\sigma\mu\rho}\theta^{\sigma\mu\rho} + \Lambda\theta_{\sigma\mu\rho}\theta^{\rho\mu\sigma} \ , \end{aligned}$$

y añadiendo los dos últimos términos

$$\begin{aligned} \Lambda g^{\rho\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\mu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\nu} &= -\Lambda\left(\frac{1}{4}\theta^{\nu\sigma\mu}\theta_{\nu\sigma\mu} + \frac{1}{2}\theta^{\nu\sigma\mu}\theta_{\mu\sigma\nu}\right) \ , \\ -\Lambda g^{\rho\nu}\mathcal{K}^{\sigma}{}_{\rho\nu}\mathcal{K}^{\mu}{}_{\sigma\mu} &= \Lambda\theta^{\nu\sigma}{}_{\nu}\theta_{\mu\sigma}{}^{\mu} \ , \end{aligned}$$

finalmente se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R^{(\mathrm{L-C})} &= -2\partial_\mu(\Lambda\theta_\sigma{}^{\mu\sigma}) - 2\Lambda\theta_\sigma{}^{\mu\sigma}\theta^\rho{}_{\mu\rho} + \frac{1}{2}\Lambda\theta_{\sigma\mu\rho}\theta^{\sigma\mu\rho} + \Lambda\theta_{\sigma\mu\rho}\theta^{\rho\mu\sigma} \\
&- \frac{1}{4}\Lambda\theta^{\nu\sigma\mu}\theta_{\nu\sigma\mu} - \frac{1}{2}\Lambda\theta^{\nu\sigma\mu}\theta_{\mu\sigma\nu} + \Lambda\theta^{\nu\sigma}{}_\nu\theta_{\mu\sigma}{}^\mu \\
&= \Lambda\left(\frac{1}{4}\theta^\rho{}_{\mu\nu}\theta_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^\rho{}_{\mu\nu}\theta^{\nu\mu}{}_\rho - \theta^\rho{}_{\mu\rho}\theta^{\nu\mu}{}_\nu\right) - \partial_\mu(2\Lambda\theta_\sigma{}^{\mu\sigma})\ .
\end{aligned}
$$

Usando la relación entre $\theta^\sigma{}_{\mu\nu}$ y $T^\sigma{}_{\mu\nu}$,

$$
\theta^\sigma{}_{\mu\nu} = k^\sigma_\kappa q^\rho_\mu q^\lambda_\nu T^\kappa{}_{\lambda\rho}\ ,
$$

y teniendo en cuenta que los índices en $\theta^\sigma{}_{\mu\nu}$ los subimos y bajamos con $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$ respectivamente (e.g. $\theta^{\nu\mu}{}_\nu \equiv g^{\mu\sigma}\theta^\nu{}_{\sigma\nu}$, etc), fácilmente se llega a

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R^{(\mathrm{L-C})} &= \Lambda\left(\frac{1}{4}T^\rho{}_{\mu\nu}T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^\rho{}_{\mu\nu}T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho}T^{\nu\mu}{}_\nu\right) \\
&- \partial_\mu(2\Lambda\theta_\sigma{}^{\mu\sigma})\ , \qquad (10.44)
\end{aligned}
$$

donde los índices de $T^\sigma{}_{\mu\nu}$ se suben y bajan con $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ respectivamente (e.g. $T_\rho{}^{\mu\nu} \equiv \eta_{\rho\sigma}\eta^{\lambda\mu}\eta^{\kappa\nu}T^\sigma{}_{\lambda\kappa}$, etc). Esta última expresión indica que la densidad Lagrangiana de Hilbert-Einstein es equivalente a la del teleparalelismo salvo una divergencia.

10.5. Generación de masa para campos gauge en modelos quirales

I. Modelo σ Abeliano

El Lagrangiano del modelo σ invariante bajo el grupo $U(1)$ global viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{“mat”}} = \frac{\alpha^2}{2}\theta_\mu\theta^\mu = \frac{\alpha^2}{2}g_{,\mu}g^{,\mu} \,, \tag{10.45}$$

donde los campos son aplicaciones $g : M \to U(1)$ y α es una constante (eventualmente relacionada con la masa). La prescripción del Teorema de Utiyama formulado sobre el grupo de los 1-jets del grupo local $U(1)(M)$ conduce a un Lagrangiano invariante gauge con términos de masa para los campos gauge Abelianos:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{L}}_{\text{“mat”}} + \mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}) = \frac{\alpha^2}{2}(g_{,\mu} - qA_\mu)(g^{,\mu} - qA^\mu) + \mathcal{L}_0(F_{\mu\nu})\,, \tag{10.46}$$

donde q es una constante de acoplamiento y, como es usual, $\mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ con $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el parámetro del grupo $U(1)$ se pueden escribir en la forma

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0 \tag{10.47}$$

con $\tilde{A}^\mu \equiv \frac{1}{q}g^{,\mu} - A^\mu$. La correspondiente ecuación para A_μ reza:

$$\partial_\mu \tilde{A}^{\nu,\mu} = m^2\tilde{A}^\nu \,. \tag{10.48}$$

donde $m^2 \equiv \alpha^2 q^2$ denota la masa del campo gauge $\tilde{A}_\mu$.

Definiendo $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \tilde{A}_{\mu,\nu} - \tilde{A}_{\nu,\mu}(= F_{\mu\nu})$, se puede reescribir el Lagrangiano total invariante gauge-$U(1)$ en la forma

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}m^2\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu + \mathcal{L}_0(\tilde{F}_{\mu\nu}) \,, \tag{10.49}$$

eliminando asi los términos de masa cruzados.

Invariancia gauge “restringida” o “residual”

Surge de modo natural la cuestión de si el Lagrangiano (10.45) del modelo σ-$U(1)$ es invariante gauge, puesto que en dicho Lagrangiano los campos son aplicaciones de M en $U(1)$, y, por tanto, transformaciones gauge. La respuesta es que es semi-invariante (i.e. invariante salvo una divergencia) bajo aquellas transformaciones gauge Abelianas f que verifican $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$. Este tipo de gauge recibe el nombre de *gauge residual* (véase, por ejemplo, [92]), puesto que es el gauge remanente despues de imponer la ligadura $\partial_\mu A^\mu = 0$ (gauge de Lorentz). En el formalismo Lagrangiano estándar esto se confirma calculando la derivada de Lie del Lagrangiano (10.45) con respecto a la extension jet del generador gauge Abeliano X_f:

$$L_{\overline{X}_f} \mathcal{L}_{\text{``mat''}} = f_\mu(x) \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{``mat''}}}{\partial g_{,\mu}} = \alpha^2 f_\mu(x) g^{,\mu} \ , \tag{10.50}$$

que puede expresarse como $\partial_\mu(f^\mu g)$ si $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$.[7]

Es claro que para conseguir invariancia gauge bajo funciones f arbitrarias se requieren campos compensadores.

II. Modelo σ no Abeliano

Consideramos Lagrangianos quirales del tipo $SU(n)_L \times SU(n)_R$ para describir los parámetros de grupo. Por simplicidad, ilustramos el caso $n = 2$. Todos los cálculos se efectuan para la componente izquierda $SU(2)_L$, ya que para la derecha $SU(2)_R$ los resultados son idénticos pero con el signo opuesto en las constantes de estructura $(-\eta^a{}_{bc})$. Los campos de vectores invariantes por la izquierda $X^L_{(a)}$ generan la acción derecha y los campos invariantes por la derecha $X^R_{(a)}$ generan la acción izquierda, y, por tanto, en el modelo quiral el cambio de L por R o viceversa no tiene ninguna consecuencia nueva. El Lagrangiano de este modelo esta dado por

$$\mathcal{L}_{\text{``mat''}} = \frac{\alpha^2}{2} Tr(g^{,\mu} g^{-1}_{,\mu}) \ , \tag{10.51}$$

donde g es un elemento de

$$SU(2) = \{g = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} / z_i, z_i^* \in C, det(g) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \ . \tag{10.52}$$

La 1-forma canónica invariante por la izquierda reza

$$\begin{aligned} \theta^L(g) = g^{-1}\, dg &= \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz_1 & -dz_2^* \\ dz_2 & dz_1^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1^* dz_1 + z_2^* dz_2 & -z_1^* dz_2^* + z_2^* dz_1^* \\ -z_2 dz_1 + z_1 dz_2 & z_2 dz_2^* + z_1 dz_1^* \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{10.53}$$

[7] Análogamente, $X_{a^\dagger(k)} = e^{ikx} \frac{\partial}{\partial g}$ deja $\mathcal{L}_{\text{``mat''}}$ semi-invariante, con lo cual $X \equiv \int \frac{d^3k}{2k^0} e^{ikx} \gamma(k) \frac{\partial}{\partial g}$ + h.c. también. Pero este generador corresponde a una función $f(x)$ de gauge cuyos coeficientes de Fourier tienen soporte en la hipersuperficie de Cauchy inicial o capa de masas $k^2 = 0$, es decir, $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$.

y, análogamente, la 1-forma canónica invariante por la derecha viene dada por

$$\theta^R(g) = dg\, g^{-1} \,. \tag{10.54}$$

Sea el cambio de variables $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(z_1, z_2)$ dado por

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{z_2 - z_2^*}{2i} \\
\epsilon_2 &= -\frac{z_2 + z_2^*}{2} \\
\epsilon_3 &= \frac{z_1 - z_1^*}{2i} \,.
\end{aligned} \tag{10.55}$$

Recíprocamente

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} + i\epsilon_3 \\
z_2 &= -\epsilon_2 + i\epsilon_1 \,,
\end{aligned} \tag{10.56}$$

y sus diferenciales rezan

$$\begin{aligned}
dz_1 &= -\frac{\vec{\epsilon} \cdot d\vec{\epsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}} + id\epsilon_3 \\
dz_2 &= -d\epsilon_2 + id\epsilon_1 \,.
\end{aligned} \tag{10.57}$$

La ley de grupo en términos de los parámetros ϵ_i se escribe como

$$\vec{\epsilon}\,'' = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\; \vec{\epsilon}\,' + \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\; \vec{\epsilon} + \frac{1}{2} \vec{\epsilon}\,' \wedge \epsilon \,. \tag{10.58}$$

En función de los parámetros de grupo ϵ_i las formas invariantes por la izquierda y por la derecha así como la densidad Lagrangiana del modelo sigma no lineal adoptan la forma siguiente:

$$\vec{\theta}^L = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} d\vec{\epsilon} - d\left(\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\right) + \vec{\epsilon} \wedge d\vec{\epsilon} \tag{10.59}$$

$$\vec{\theta}^R = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}} d\vec{\epsilon} - d\left(\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\right) - \vec{\epsilon} \wedge d\vec{\epsilon} \tag{10.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{“mat''}} &= \alpha^2 \left(\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\right)_{,\mu} \left(\sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^{\,2}}{4}}\right)^{,\mu} + \alpha^2 \vec{\epsilon}_{,\mu} \vec{\epsilon}^{\,,\mu} \\
&= \alpha^2 \theta_\mu^{L(a)} \theta_\nu^{L(b)} K_{ab} \eta^{\mu\nu} \,,
\end{aligned} \tag{10.61}$$

donde se emplea la notación usual para las derivadas $(f(\vec{\epsilon}))_{,\mu} \equiv \frac{\partial f(\vec{\epsilon})}{\partial \epsilon^a}\epsilon^a_{,\mu}$ y K_{ab} es la métrica de Killing. Explícitamente, las componentes $\theta^{L(a)}_\mu$ de la forma invariante por la izquierda $\theta^{L(a)} = \theta^{L(a)}_\mu dx^\mu$ se pueden llevar a la forma

$$\theta^{L(a)}_\mu = \sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}\epsilon^a_{,\mu} + \frac{\epsilon_b \epsilon^b_{,\mu}\epsilon^a}{\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}} + \frac{1}{2}\eta^a{}_{bc}\epsilon^b\epsilon^c_{,\mu} \,. \tag{10.62}$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas con la densidad Lagrangiana (10.61) son

$$\partial_\mu\partial^\mu\vec{\epsilon} = -2\mathcal{L}_{\text{“mat''}}\vec{\epsilon}\,. \tag{10.63}$$

Haciendo uso de estas ecuaciones se tiene que

$$\eta^a{}_{bc}\epsilon^b\partial_\mu\partial^\mu\epsilon^c = -2\mathcal{L}_{\text{“mat''}}\eta^a{}_{bc}\epsilon^b\epsilon^c = 0\ ,$$

y, entonces, se llega fácilmente a que las componentes $\theta^{L(a)}_\mu$ son las corrientes Noether conservadas bajo las trayectorias soluciones:

$$\partial^\mu\theta^{L(a)}_\mu|_{\text{soluciones}} = 0\ . \tag{10.64}$$

Retomando el estudio de las simetrías de la teoría, como ya se comentó, la densidad Lagrangiana quiral es invariante bajo el grupo global $SU(2)_L \times SU(2)_R$:

$$L_{\overline{X}^L_{(a)}}\mathcal{L}_{\text{“mat''}} = \overline{X}^L_{(a)}\mathcal{L}_{\text{“mat''}} = 0\ , \tag{10.65}$$

donde los generadores izquierdos y su correspondiente extensión 1-jet tienen la forma

$$X^L_{(a)} = \left(\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}\delta^b_a + \frac{1}{2}\eta^b{}_{ac}\epsilon^c\right)\frac{\partial}{\partial\epsilon^b} \equiv X^b_{(a)}\frac{\partial}{\partial\epsilon^b}\ , \tag{10.66}$$

$$\begin{aligned}\overline{X}^L_{(a)} &= \left(\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}\delta^b_a + \frac{1}{2}\eta^b{}_{ac}\epsilon^c\right)\frac{\partial}{\partial\epsilon^b} \\ &+ \left(-\frac{\epsilon_c\epsilon^c_{,\mu}}{\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}\delta^b_a} + \frac{1}{2}\eta^b{}_{ac}\epsilon^c_{,\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\epsilon^b_{,\mu}}\ .\end{aligned} \tag{10.67}$$

Cambiando el signo en todas las constantes de estructura $\eta's$ se obtiene

$$L_{\overline{X}^R_{(a)}}\mathcal{L}_{\text{“mat''}} = \overline{X}^R_{(a)}\mathcal{L}_{\text{“mat''}} = 0\ . \tag{10.68}$$

El Lagrangiano total invariante gauge de la teoría tiene dos contribuciones: la de interacción y la correspondiente a la dinámica de los campos gauge libres descrita por el tensor de intensidad $F^{(a)}_{\mu\nu}$. En lo que respecta a la nueva prescripción de acoplamiento mínimo entre los parámetros de grupo ϵ^a y los campos gauge $A^{(a)}_\mu$ se debe realizar la sustitución

$$\epsilon^a_{,\mu} \rightarrow \epsilon^a_{,\mu} - qA^{(b)}_\mu X^a_{(b)} \tag{10.69}$$

en el Lagrangiano quiral del punto de partida de la teoría. Multiplicando (10.69) por la matriz inversa de $X^c_{(a)}$

$$\theta^{(b)}_c \equiv \sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}\delta^b_c + \frac{\epsilon_c\epsilon^b}{\sqrt{1-\frac{\vec{\epsilon}^2}{4}}} + \frac{1}{2}\eta^b{}_{ac}\epsilon^a \tag{10.70}$$

y usando que $\theta^{L(a)}_\mu = \theta^{(a)}_b \epsilon^b_{,\mu}$, el acoplamiento mínimo se reduce a

$$\theta^{L(a)}_\mu \rightarrow \theta^{L(a)}_\mu - qA^{(a)}_\mu \ , \tag{10.71}$$

y, entonces, el Lagrangiano de interacción con términos de masa para los campos gauge se escribe en la forma

$$\hat{\mathcal{L}}_{\text{“mat''}} = \alpha^2(\theta^{L(a)}_\mu - qA^{(a)}_\mu)(\theta^{L(b)}_\nu - qA^{(b)}_\nu)K_{ab}\eta^{\mu\nu} \ . \tag{10.72}$$

Capítulo 11

Agradecimientos

Quiero expresar ahora mi más preciado agradecimiento a todos los seres que han contribuido en la consecución final de este trabajo, ya sea con su presencia, con su ayuda, con su amistad o su mera existencia.[1]

Agradezco profundamente a mi director de tesis, Víctor Aldaya, por su constante apoyo, su paciencia y su contagioso entusiasmo por la comprensión de la estructura y leyes fundamentales de la Naturaleza.

Doy las gracias al Instituto de Gravitación y Cosmología de la Universidad de la Amistad de los Pueblos en Moscú por su acogida durante una estancia de dos meses. En particular, quiero destacar la amabilidad y diligencia de M. Fil'chenkov. También recuerdo aquí a los Profesores Bronnikov y Melnikov.

Manifiesto mi más sincera gratitud al Profesor Boris N. Frolov por toda su ayuda durante mi estancia en la Universidad Estatal Pedagógica de Moscú así como durante mis posteriores visitas a Rusia. Y lo mismo digo en relación con Olga Babourova. Además de lo fructífero que resultó nuestra comunicación en el terreno científico quiero subrayar que estas personas hicieron que me sintiera como en casa en un país que apenas conocía.

De la época en Rusia no puedo olvidar tampoco a un conjunto de seres que surgieron de un modo misterioso (aún lo siento así a día de hoy) y que resultaron ser auténticos regalos del Universo. Me refiero, especialmente, a Mirko, Valodia, Irina Fedrovna y Galina, que me trataron como a un miembro más de su familia. Ksiush me permitió evolucionar y tomar consciencia de nuevos valores fundamentales de la vida.

Agradezco mucho al Profesor G. Sardanashvily por su atención y valiosas sugerencias durante mi estancia en el Departamento de Matemáticas de la

[1]Incluyo aquí a los entes dadores de las becas que he disfrutado.

Universidad de Camerino en Italia. Al Profesor L. Mangiarotti por su trato cordial.

En Granada ha sido de gran valor la colaboración con Manuel Calixto y Francisco López. Agradezco también a Carlos Barceló y a José Luis Jaramillo por sus valiosas observaciones. La ayuda continua de José Antonio J. Madrid ha permitido que la relación con mi ordenador no se convirtiera en una pesadilla. Los servicios de José del centro de cálculo del IAA han sido especialmente importantes.

Durante este *camino*, sin duda, ha resultado fundamental contar con las personas que menciono a continuación: Rosi y Antonio (y familia), Conchi, Javi (El Xiko), *vuesa merced* Don Pablo (también conocido como Tito Willy, gran maestro en el arte del *Proyecto O*), Tony, Campanilla, Dana, Tatiana Chaikhieva, Victoria, Marina, los comensales (Carol, Víctor, Antonio...) de los sabrosos flamenquines (de verdad inolvidables...), Simon Verley, Gaby, Diana Rossi, La Presy, mi querida *mitra* Sil, Luis de Luis, Adrián, Pablo Santos, Regina, Chloé, Margarita Belinskaya, Natividad y Antonio, Mariya Shmonina, Teresa, Maya Ganza...

En un lugar especial de mi *templo interior* llevo conmigo a mis plantas, a mis gatos, a las montañas de Galifa, al mar de El Portús...

En los últimos tiempos he recibido el apoyo incondicional de Hermi y en estas líneas quiero expresarle toda mi gratitud y afecto $\langle\, 0\, \rangle$.

Soy consciente de que estoy en deuda con mis padres y con mi hermana y no tengo palabras para expresar la grandeza que tienen como personas. Su ejemplo y su apoyo desinteresado bajo cualquier circunstancia me ha iluminado y me ha permitido llegar hasta aquí. Os quiero.

Por supuesto, faltan más nombres, más lugares...
Gracias a todos por existir.

Me gustaría cerrar esta memoria con una letanía muy antigua del Atharvaveda que dice así:

Si había algo en el aire,
si había algo en el viento,
si había algo en los árboles o arbustos
que podía ser pronunciado y en un tiempo fue oído por los animales,
que este Conocimiento Sagrado nos sea devuelto otra vez.

Bibliografía

[1] H. Weyl, Sitzunberg. Preuss. Akad. Berlin, 465 (1918).

[2] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[3] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[4] P. L. García, J. Diff. Geom. **12**, 209 (1977).

[5] M. Castrillón López, J. Muñoz Masqué and T. Ratiu, Diff. Geom. and its Appl. **19**, 127 (2003).

[6] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[7] H. Georgi, en *Particles and Fields*, ed. C. Carlson, Amer. Inst. of Physics, New York (1975).

[8] T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[9] B. N. Frolov, Vestnik Mosk. Univ., Ser. Phys. Astron., N. 6, 48 (1963) (en Ruso); en Modern Problems of Gravitation, Proc. 2nd Soviet Grav. Conf. (Publ. House Tbilisi Univ., Tbilisi) 270 (1967) (en Ruso); *Poincaré Gauge Theory of Gravity*, Publ. House MPGU, Moscow (2003) (en Ruso); Grav. Cosmol. **10**, N. 1-2, 116 (2004).

[10] O. V. Babourova, B. N. Frolov and V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. **D74**, 64012 (2006).

[11] Y. M. Cho, Phys. Rev. **D14**, 2521 (1976).

[12] Y. M. Cho, Phys. Rev. **D14**, 3335 (1976).

[13] J. Harnard and R. B. Pettit, J. Math. Phys. **17**, 1827 (1976); *Gauge Theory of the conformal group, Group Theoretical Methods in Physics*, eds. R. T. Sharp and B. Kolman, Academic Press, N. Y., 277-302 (1977).

[14] D. Ivanenko and G. Sardanashvily, Phys. Rep. **94**, 1 (1983).

[15] G. Sardanashvily and O. Zakharov, *Gauge Gravitation Theory*, World Scientific (1992).

[16] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde and G. D. Kerlick, Rev. Modern Phys. **48**, 393 (1976).

[17] J. Nitsch and F. W. Hehl, Phys. Lett. **90B**, 98 (1980).

[18] F. W. Hehl, Y. Ne'eman, J. Nitsch and P. Von Der Heyde, Phys. Lett. **78B**, 103 (1978).

[19] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev. **D19**, 3524 (1979).

[20] F. G. Basombrio, Gen. Relat. Grav. **12**, 109 (1980).

[21] V. C. Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. **D56**, 4689 (1997); Gen. Relat. Grav. **30**, 263 (1998).

[22] A. G. Agnese and P. Calvini, Phys. Rev. **D12**, 3800 (1975); Phys. Rev. **D12**, 3804 (1975).

[23] T. Dereli and R. W. Tucker, JHEP 0203, 41 (2002).

[24] R. T. Hammond, Rep. Progr. Phys. **65**, 599 (2002).

[25] F. W. Hehl, J. D. Mc Crea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[26] R. Tresguerres and E. W. Mielke, Phys. Rev. **D62**, 44004 (2000).

[27] R. Tresguerres, Phys. Rev. **D62**, 044004, (2000), e-Print: gr-qc/0007072.

[28] R. Tresguerres, Class. Quant. Grav. **14**, 549 (1997), e-Print: gr-qc/9603023.

[29] I. Kirsch, Phys. Rev. **D72**, 24001 (2005).

[30] E. W. Mielke, Ann. Phys. (N. Y.) **219**, 78 (1992).

[31] E. W. Mielke, Phys. Rev **D69**, 128501 (2004).

[32] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, *Space-time metric from local and linear electrodynamics: a new axiomatic scheme*, gr-qc/0508024.

[33] M. Blagojevic, I. Nikolic, D. Popovic and Dj Zivanovic, Nuovo Cimento **B62**, 257 (1981).

[34] D. Bashkirov, G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, J. Phys. **A38**, 5329 (2005).

[35] L. O'Raifeartaigh, Phys. Rev. **B139**, 1052 (1965).

[36] W. D. McGlinn, Phys. Rev. Lett. **12**, 467 (1964).

[37] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).

[38] L. Michel, *Invariance in Quantum Mechanics and group extension, Group Theoretical concepts and methods in elementary particle physics*, F. Gürsey ed., Gordon & Breach, 135-200 (1964).

[39] F. J. Dyson, *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics*, Benjamin N. Y. (1996).

[40] O. Pelc and L. P. Horwitz, J. Math. Phys. **38**, 139 (1997).

[41] A. Salam and J. Strathdee, Fortschr. der Phys. **46**, 57 (1978).

[42] V. Aldaya, J. L. Jaramillo and J. Guerrero, J. Math. Phys. **44**, 5166 (2003).

[43] V. Aldaya, J. Navarro-Salas and A. Ramírez, Commun. Math. Phys. **121**, 541 (1989).

[44] E. C. G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta **11**, 225 (1938).

[45] M. Gell-Mann and M. Lévy, Rivista Nuovo Cimento **16**, 705 (1960).

[46] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan and C. Rossetti, *Currents in Hadron Physics*, North Holland, Amsterdam (1973).

[47] L. Dolan, *Kac-Moody Algebras and Exact Solvability in Hadronic Physics*, Phys. Rep. **109**, 1 (1984).

[48] R. Jackiw, *Inserting group variables in Fluid Mechanics*, hep-th/0410284.

[49] R. Ludlam and L. Mc Lerran, Phys. Today **A56**, 48 (2003).

[50] V. Aldaya and E. Sánchez-Sastre, charla preparada para *Symmetries in Gravity and Field Theory* (Homenaje al Profesor José Adolfo de Azcárraga), Salamanca (2003). Publicación en *Symmetries in Gravity and Field Theory*, Ed. Universidad de Salamanca, 251 (2004).

[51] V. Aldaya and E. Sánchez-Sastre, charla plenaria preparada para *27th International Workshop on Fundamental Problems of High-Energy Physics and Field Theory: Black Holes on Earth and in Space (HEPFT 2004): Ideas and Facts*, Protvino, Moscow region, Russia (2004); e-Print: gr-qc/0507129.

[52] V. Aldaya and E. Sánchez-Sastre, charla preparada para *Albert Einstein's Century International Conference*, Paris (2005). Publicación en AIP Conf. Proc. **861**, 269 (2006).

[53] V. Aldaya, M. Calixto, F. F. López-Ruiz and E. Sánchez-Sastre, charla preparada para *Albert Einstein's Century International Conference*, Paris (2005). Publicación en AIP Conf. Proc. **861**, 261 (2006).

[54] V. Aldaya and E. Sánchez-Sastre, J. Phys. **A39**, 1729 (2006); e-Print: math-ph/0610005.

[55] V. Aldaya, M. Calixto and E. Sánchez-Sastre, Mod. Phys. Lett. **A21**, 2813 (2006).

[56] V. Aldaya, E. Sánchez-Sastre and M. Calixto, Rept. Math. Phys. **59**, 83 (2007).

[57] M. C. Ehresmann, C. R. Acad. Sci. Paris, **233**, 598, 777, 1081 (1951).

[58] R. Hermann, *Vector Bundles in Mathematical Physics*, N. Y. (1970); *Geometry, Physics and Systems*, N. Y. (1973).

[59] R. S. Palais, *Foundations of Global Nonlinear Analysis*, N. Y. (1968).

[60] J. F. Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, New York, N. Y., and Paris (1978).

[61] D. J. Saunders, The geometry of Jet Bundles, Cambridge University Press (1989).

[62] A. V. Bocharov [et al.], *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999).

[63] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge University Press (1995).

[64] V. Aldaya and J. A. de Azcárraga, J. Math. Phys. **19**, 1869 (1978).

[65] L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore (2000).

[66] V. Aldaya and J. A. de Azcárraga, *Geometric Formulation of Classical Mechanics and Field Theory*, Rivista Nuovo Cimento, Vol. 3, N. 10 (1983).

[67] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **13**, 203-232 (1941).

[68] D. J. Eck, *Gauge-natural bundles and generalized gauge theories*, Mem. Amer. Math. Soc. 247 (1981).

[69] I. Kolár, P. W. Michor and J. Slovak, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1993).

[70] L. Fatibene and M. Francaviglia, *Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theory: A Geometric Perspective Including Spinors and Gauge Theories*, Kluwer Academic Publishers (2003).

[71] G. Sardanashvily, *Ten Lectures on Jet Manifolds in Classical and Quantum Field Theory*, e-Print: math-ph/0203040.

[72] M. Castrillón López and J. Muñoz Masqué, J. Phys. **A37**, 5211 (2004).

[73] H. Weyl, Z. Physik **56**, 330 (1929).

[74] A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuβ. Akad. d. Wiss. **17/18**, 217 (1928).

[75] R. Weitzenbock, Sitzungsber. d. Preuβ. Akad. d. Wiss. 466 (1928).

[76] K. Hayashi and T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **64**, 866 (1980).

[77] P. Von der Heyde, Phys. Lett. **A58**, 141 (1976).

[78] A. Bregman, Prog. Theor. Phys. **49**, 667 (1973).

[79] H. Weyl, *Space, Time and Matter*, Springer, Berlin (1921).

[80] M. Omote and M. Kasuya, Prog. Theor. Phys. **58**, 1627 (1977).

[81] S. L. Adler, Rev. Mod. Phys. **54**, 729 (1982).

[82] A. Zee, Ann. Phys., NY **151**, 431 (1983).

[83] I. Antoniadis, J. Iliopoulos and T. Tomaras, Nucl. Phys. **B261**, 157 (1985).

[84] Y. N. Obukhov, Phys. Lett. **A980**, 13 (1982).

[85] K. Hayashi and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **61**, 334 (1979).

[86] V. Bargmann, Ann. Math. **59**, 1 (1954).

[87] E. J. Saletan, J. Math. Phys. **2**, 1 (1961).

[88] J. Guerrero, J. L. Jaramillo and V. Aldaya, J. Math. Phys. **45**, 2051 (2004).

[89] V. Aldaya and J. A. de Azcárraga, Int. J. Theor. Phys. **24**, 141 (1985).

[90] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **113**, 375 (1987).

[91] J. Mickelsson, Phys. Rev. Lett. **55**, 2099 (1985).

[92] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2, Oxford: Pergamon; Elsevier (2004).

[93] S.-P. Sirag, "Gravitational Magnetism: an Update", International Space Sciences Organization, San Francisco, CA 94115.

[94] J. Ibáñez, "Gravitational lenses with angular momentum", Astro. Ap. **124**, 175 (1983).

[95] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York: Wiley (1975).

[96] V. Aldaya, J. L. Jaramillo and J. Guerrero, J. Phys. **A35** L1 (2002).

[97] V. Aldaya, M. Calixto and M. Navarro, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 3609 (1997).

[98] M. Calixto and V. Aldaya, J. Phys. **A32**, 7287 (1999).

[99] C. Rovelli, Phys. Rev. Lett. **80**, 4613 (1998).

[100] J. L. Jaramillo, *Extensiones del álgebra de difeomorfismos y gravedad cuántica*, tesis doctoral. Universidad de Granada (2002).

[101] A. C. Longhitano, Nucl. Phys. **B188**, 118 (1981).

[102] W. A. Bardeen and K. Shizuya, Phys. Rev. **D18**, 1969 (1978).

[103] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Nucl. Phys. **259**, 493 (1985); Phys. Rep. **164**, 217 (1988).

[104] R. Delbourgo and G. Thompson, Phys. Rev. Lett. **57**, 2610 (1986).

[105] J. Kubo, Phys. Rev. Lett. **58**, 2000 (1987).

[106] I. Kirsch, Phys. Rev. **D72**, 24001 (2005).

[107] R. W. Tucker and C. Wang, Class. Quantum Grav. **15**, 933 (1998).

[108] O. V. Babourova and B. N. Frolov, Class. Quantm Grav. **20**, 1423 (2003).

[109] O. V. Babourova and B. N. Frolov, Grav. Cosmol. **9**, 15 (2003).

[110] H. Cheng, Phys. Rev. Lett. **61**, 2182 (1988).

[111] M. Israelit, *The Weyl-Dirac Theory and Our Universe*, Nova Science (1999).

[112] P. Ginsparg and G. Moore, "Lecture on 2D gravity and 2D string theory", e-Print: hep-th/9304011.

[113] V. Aldaya and J. L. Jaramillo, Class. Quant. Grav. **17**, 1649 (2000).

[114] T. A. Larsson, "Extensions of diffeomorphism and current algebras", e-Print: math-ph/0002016.

[115] A. Dhumadil'daev, Z. Phys. **C72**, 509 (1996).

[116] T. A. Larsson, Commun. Math. Phys. **201**, 461 (1999).