Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

DESCRIPCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO UTILIZADO POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA AL RESOLVER TAREAS RELACIONADAS CON SUCESIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

María Consuelo Cañadas Santiago

Granada, 2007

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: María Consuelo Cañadas Santiago
D.L.: Gr. 1562 - 2007
ISBN: 978-84-338-4406

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

DESCRIPCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO UTILIZADO POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA AL RESOLVER TAREAS RELACIONADAS CON SUCESIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los Doctores Encarnación Castro Martínez y Enrique Castro Martínez, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta la Licenciada María Consuelo Cañadas Santiago para optar al grado de Doctora en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: María Consuelo Cañadas Santiago

VºBº de los Directores

Fdo.: Encarnación Castro Martínez   Fdo.: Enrique Castro Martínez

Este trabajo ha sido realizado en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM-0193).

Igualmente, dentro del proyecto del plan nacional de I + D + I *Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática*, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con referencia SEJ2006-09056.

A

Manuel Cañadas y María Santiago,

mis padres

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a Encarnación Castro, la directora de este trabajo, quien me ha guiado y apoyado desde el comienzo de la investigación. A ella se deben la mayor parte de las ideas que recojo en esta memoria.

A Enrique Castro, cuya contribución como director del trabajo, ha enriquecido el contenido de este documento. Le agradezco, en particular, su asesoramiento en el análisis de datos.

A los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en especial a los del área de Didáctica de la Matemática, quienes me han dado la oportunidad de realizar diversas estancias en la Universidad de Granada para avanzar en mi investigación.

A Pedro Gómez, con quien he compartido numerosas conversaciones durante el desarrollo del trabajo. De ellas, siempre surgieron ideas interesantes sobre las que reflexionar y consejos a tener en cuenta.

A Nuria Rico y Ana E. Marín, quienes me iniciaron y guiaron en el análisis estadístico.

A los profesores que colaboraron en la realización del estudio empírico.

A mis padres, a quienes debo gran parte de mis logros. La ilusión por la realización de este trabajo se ha visto reforzada por su apoyo incondicional. A Samuel, a mi abuela María y a Antonio, quienes han compartido conmigo muchos momentos de mi camino como investigadora. A todos les agradezco el ánimo que continuamente me han transmitido.

ÍNDICE

ÍNDICE DE ANEXOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

La memoria de investigación que presentamos en este documento, surge de la investigación realizada por la autora para obtener el título de doctora en Matemáticas por la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática correspondiente al bienio 2000-2002.

Tras la realización del periodo docente (cursos de doctorado), durante el curso 2000-2001, llevamos a cabo el Período de Investigación Tutelada. Dicha etapa dio lugar al Trabajo de Investigación Tutelada cuyo título es “Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria” (Cañadas, 2002), trabajo que constituye un estudio piloto de la investigación que ahora presentamos. En dicho trabajo se analiza el proceso de razonamiento inductivo que llevan a cabo estudiantes de Educación Secundaria cuando se enfrentan a unas tareas concretas. Lo presentaremos con más detalle en los antecedentes del trabajo actual.

Esta investigación ha sido dirigida desde sus inicios por la Dra. Encarnación Castro Martínez, incorporándose posteriormente en las tareas de dirección el Dr. Enrique Castro Martínez. Se ha llevado a cabo dentro del grupo de investigación “FQM-0193: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del III Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, cuyo director es el Dr. Luis Rico Romero. El trabajo queda enmarcado en el Proyecto de Investigación “Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática-SEJ2006-09056” cuyo director es el Dr. Enrique Castro Martínez.

La investigación llevada a cabo para la realización de la Tesis Doctoral, se ha desarrollado en el período en el que la doctoranda ha trabajado como Profesora

Ayudante del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. La concesión de diversos permisos de investigación para la realización de tesis doctoral por parte de dicha universidad ha facilitado el progreso del trabajo en los plazos que se detallarán más adelante.

Para desarrollar la parte empírica de la investigación, hemos contado con la participación activa de 359 estudiantes, 211 de 3º y 148 de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Estos estudiantes eran alumnos de uno de los cuatro centros públicos españoles siguientes: IES Dionisio Aguado (Madrid), IES Francés de Aranda (Teruel), IES Severo Ochoa (Granada) e IES Arabuleila (Cúllar Vega, Granada). Estos centros, así como los profesores de matemáticas de los estudiantes participantes han accedido a colaborar en nuestra investigación, dándonos permiso y cediéndonos una hora de su tiempo lectivo para realizar una prueba que nos ha permitido recoger la información para el estudio empírico del trabajo que presentamos.

Una vez recogidos y organizados los datos, hemos realizado un análisis de los mismos mediante tratamiento estadístico, para ello hemos contado con la inestimable ayuda de la Dra. Nuria Rico Castro, profesora del área de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada.

TEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES MÁS PRÓXIMOS

El tema de investigación por el que nos interesamos es el Razonamiento Inductivo y se enmarca dentro de la línea de investigación de Pensamiento Numérico. Dicha línea se ocupa de estudiar los procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Castro, 1995). En el seno de dicho grupo se han realizado diferentes investigaciones relacionadas con el razonamiento inductivo, lo que pone de manifiesto el interés de los integrantes del grupo por este tema. Repasando dichos trabajos, se aprecia que la preocupación se inicia con Ortiz (1993), el cual realiza un estudio piloto sobre el comportamiento inductivo de alumnos de educación primaria en tareas de continuación de series numéricas básicas, trabajo que tuvo continuación en la tesis doctoral realizada y defendida en 1997, e hizo que otros miembros del grupo también se interesan en el tema. Los trabajos realizados, a los que estamos haciendo referencia sobre razonamiento inductivo, han sido realizados con estudiantes de varios niveles educativos por diferentes investigadores: en educación infantil por Fernández (2001), en su tesis doctoral; en educación primaria por Ortiz (1997), en su tesis doctoral; en educación secundaria por Castro (1995), en su tesis doctoral; Cañadas (2002), en el Trabajo de Investigación Tutelada; y en niveles universitarios por Barrera (2004), en el Trabajo de Investigación Tutelada.

En el Capítulo 4 describiremos cada uno de estos trabajos como antecedentes del nuestro. Por ahora, adelantamos que la investigación que presentamos es continuación del Trabajo de Investigación Tutelada (Cañadas, 2002) y que, como en este caso, está centrado en estudiar la utilización que hacen los estudiantes de 3º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria del razonamiento inductivo al resolver problemas en los que este proceso puede ser empleado.

En los trabajos del grupo de Pensamiento Numérico anteriormente citados, la resolución de problemas, los sistemas de representación y la estructura numérica son elementos constantes que aparecen asociados al proceso de razonamiento inductivo.

En lo referente al contenido matemático, en capítulos sucesivos de esta memoria se expondrán las razones que nos han llevado a centrar en las sucesiones de números naturales, el contenido matemático sobre el que trabajen los alumnos con el fin de observar su razonamiento inductivo. En el Capítulo 4, en el que se recogen los antecedentes de nuestro trabajo, se aprecia que las sucesiones son el contenido matemático empleado habitualmente para trabajar el razonamiento inductivo, particularmente, las sucesiones lineales y cuadráticos están presentes en estudios dirigidos a los niveles medios. El estudio más detallado de las sucesiones, que se presenta en el Capítulo 3, a su vez, nos lleva a seleccionar las sucesiones de números naturales cuyos términos generales se pueden expresar mediante polinomios de grado uno o de grado dos, *sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas* o, equivalentemente, *progresiones aritméticas de números naturales de órdenes uno y dos,* como contenido matemático adecuado para conseguir los objetivos que perseguimos.

Así mismo, tanto los antecedentes (Capítulo 4) como la propia naturaleza del razonamiento inductivo presentada en el Capítulo 2, aconsejan la resolución de problemas como contexto adecuado para recoger datos acerca de las manifestaciones de los estudiantes en relación con el razonamiento inductivo. Nuestro interés está centrado en analizar las producciones de los estudiantes al resolver unos problemas concretos y observar si utilizan procesos inductivos en el sentido de Pólya (1945) y si dichos procesos son regulares entre los estudiantes o presentan variaciones.

Como ocurriera con los trabajos de nuestros compañeros del grupo de Pensamiento Numérico, vamos a considerar que los problemas planteados recojan situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante una sucesión, la estructura numérica asociada a los mismos sea la de los números naturales, y vamos a contemplar la presencia de diferentes sistemas de representación.

CALENDARIO DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado recogemos nuestro calendario de investigación, que se resume en la Tabla 0 - 1. El inicio lo situamos en los cursos de doctorado, continuando con el Trabajo de Investigación Tutelada. Se señalan las fechas más significativas para el desarrollo de la investigación, así como las diferentes fases por las que ésta ha ido evolucionando.

Tabla 0 - 1. Calendario de la investigación

FECHA	FASE
Octubre, 2000-Julio, 2001	Cursos de doctorado
Julio, 2001-Agosto, 2002	Período de Investigación Tutelada
Septiembre, 2002	Presentación del Trabajo de Investigación Tutelada
Octubre, 2002-Agosto, 2003	Revisión bibliográfica
Septiembre-Diciembre, 2003	Determinación de los objetivos de investigación
Enero-Septiembre, 2004	Diseño general de la investigación
Octubre, 2004-Diciembre, 2004	Elaboración del instrumento de recogida de datos
Enero-Marzo, 2005	Recogida de datos
Abril-Diciembre, 2005	Análisis de datos
Diciembre, 2005	Presentación proyecto de tesis doctoral
Diciembre-Febrero, 2006	Revisión del análisis de datos
Marzo, 2006-Mayo,2007	Redacción de la Memoria de Tesis Doctoral

APORTACIONES DE INVESTIGADORES EXTERNOS

A lo largo de esta investigación hemos tenido la oportunidad de debatir el estado y la evolución de nuestro trabajo con reconocidos investigadores en Educación Matemática. Hacemos mención a los grupos de investigación y a los encuentros, que nos brindaron la oportunidad de estar en contacto con la comunidad investigadora y que permitieron dar a conocer y debatir nuestro trabajo con investigadores experimentados externos al mismo.

Grupos de Investigación

La pertenencia a dos grupos de investigación ha sido un factor importante a tener en cuenta en el desarrollo de este trabajo. Por un lado, el grupo de investigación "FQM-0193: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del III Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, coordinado por el Dr. Luis Rico de la Universidad de Granada, nos ha brindado la oportunidad de estar en contacto con profesores de las universidades de Almería, Córdoba y Granada, y poder contar con sus aportaciones. En los últimos años, se han realizado diversos encuentros en los que se han expuesto diferentes trabajos de investigación en curso y se han llevado a cabo seminarios especializados sobre temas de interés para los investigadores de nuestro grupo. Los temas tratados han sido: *Análisis didáctico* en el seminario celebrado en Málaga, en Diciembre 2005; *Guías y normas para la publicación de artículos*, celebrado en Granada, en Febrero de 2006; y *Metodologías de investigación de trabajos en curso*, celebrado en Almería, en Diciembre 2006. Estos seminarios especializados se han caracterizado por la exposición de trabajos por parte de algunos miembros del grupo sobre el tema específico del seminario y por el posterior debate sobre el contenido de la exposición.

Por otro lado, mencionamos el grupo de investigación "EMA. Educación Matemática en Aragón", de la Diputación General de Aragón, y coordinado por el Dr. José María Gairín. A los miembros de este grupo debemos diversas sugerencias para la mejora de nuestro trabajo en diversas reuniones mantenidas en los últimos años a las que han asistido profesores de la Universidad de Zaragoza pertenecientes a los campus de Huesca, Zaragoza y Teruel.

Profesores Visitantes en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

La realización del doctorado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, nos ha permitido asistir a seminarios ofrecidos por los profesores Jeremy Kilpatrick de la Universidad de Georgia de Estados Unidos (Octubre, 2001); Teresa Rojano del CINVESTAV-IPN de México (Abril, 2005); Luis Radford de la Université Laurentienne de Canadá (Abril, 2005) y John Mason de la Open University de Inglaterra (Abril, 2006). Estos investigadores, invitados por el citado departamento, han dirigido seminarios en los que se han presentado parte de los trabajos en los que estaban inmersos en el momento de la visita y se ofrecieron para debatir los trabajos de investigación en curso de los doctorandos del Grupo de Pensamiento Numérico. Esto nos dio la oportunidad de contar con sus opiniones y sugerencias sobre nuestra investigación. Entre sus aportaciones, destacamos:

1. Información sobre trabajos de investigación en curso relacionados con el nuestro que se están llevando a cabo en otras universidades y centros de investigación.
2. Opiniones personales sobre las aportaciones que consideraban que nuestro trabajo puede hacer a la investigación en educación matemática.
3. Recomendaciones sobre referencias bibliográficas.
4. Sugerencias generales para la elaboración y la redacción de la memoria de investigación.

Presencia en Congresos Nacionales e Internacionales

La presentación de nuestro trabajo en diferentes congresos nos ha permitido obtener opiniones y participar debates con otros investigadores. Entre estos congresos, destacamos a nivel nacional los encuentros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Por un lado, asistimos a los siguientes simposios generales:

- V Simposio de la SEIEM (Almería, 2001).
- VII Simposio de la SEIEM (Granada, 2003).
- VIII Simposio de la SEIEM (A Coruña, 2004).

- X Simposio de la SEIEM (Huesca, 2006).

Por otro lado, se han celebrado seminarios del grupo de investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En ellos, se han debatido cuestiones específicas sobre temas de investigación más relacionados con los intereses de este grupo. Destacamos nuestra asistencia a los siguientes seminarios:

- V Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (Palencia, 2001).
- VII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (Madrid, 2006).

A nivel internacional, destacamos dos congresos que fueron enriquecedores para nuestra investigación: el PME 26 y el IV CERME.

El PME 26 se llevó a cabo en Norwich (Inglaterra), en Julio de 2002. En él iniciamos contacto con investigadores que habían trabajado sobre el razonamiento inductivo y la justificación o prueba. Destacamos a David Reid y Larry Sowder, con los que tuvimos ocasión de comentar algunas cuestiones relativas al razonamiento inductivo, los procesos de validación y la inducción matemática.

El VI CERME se celebró en Sant Feliu de Guixols (España), en Febrero de 2005. Nuestra investigación se enmarcó en el grupo de trabajo sobre demostración y argumentación. En este grupo se debatieron, entre otros, nuestro trabajo, dentro del núcleo dedicado a conjeturas y razonamiento. La discusión se centró en la propuesta de *pasos* para el proceso de razonamiento inductivo en estudiantes de educación secundaria. Los participantes en este grupo de trabajo fueron: Richard Cabassut, Jordi Deulofeu, Viviane Durand-Guerrier, Lourdes Figueiras, Hans Niels Jahnke, Christine Knipping, Dietmar Küchemann, Clas Löfwall, Maria Alexandra Mariotti, Kirsti Nordström, David Reid, Suzane Thiry, Shlomo Vinner y Oleksiy Yevdokimov.

NUESTRAS APORTACIONES PREVIAS

Durante la realización de esta investigación, hemos presentado diferentes aportaciones en diversos foros relacionados con la Didáctica de la Matemática, previas a la redacción de este documento. Algunas de dichas aportaciones han sido presentadas y debatidas en los encuentros mencionados en el epígrafe anterior. En la Tabla 0 - 2, recogemos los títulos de estas aportaciones, la fecha y el foro en el que se dieron a conocer.

Tabla 0 - 2. Nuestras aportaciones previas

TÍTULO	AÑO	FORO
El valor de la demostración en la Educación Secundaria.	2000	Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI.
Demostraciones del Teorema de Pitágoras para todos.	2001	Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad.
Didactical reflections about some proofs of the Pythagorean proposition.	2002	26 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.	2002	Trabajo de Investigación Tutelada.
Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo.	2002	Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas.
Algunas reflexiones sobre la resolución del “Problema del Tablero de Ajedrez”.	2003	XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
Justificando el resultado de la suma de dos números pares. Dificultades y Errores.	2003	XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
Evaluación en un proceso de razonamiento inductivo.	2003	Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. La evaluación.
La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores.	2003	Jornadas sobre El prácticum en la formación inicial del profesorado de Magisterio y Educación Secundaria: Avances de Investigación, fundamentos y programas de formación.
Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático.	2004	VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo.	2006	Revista Indivisa, IV.
A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning.	2007	Revista PNA, 1(2).

ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN Y DE LA MEMORIA

En este apartado destacamos los principales pasos que hemos seguido en el desarrollo de nuestro trabajo y que quedarán recogidos en los diferentes capítulos de esta memoria.

Estructura de la Investigación

Tras la determinación del razonamiento inductivo como tema de investigación, la contextualización y el encuadre del mismo, junto con nuestro interés personal, llegamos a definir el objetivo general de investigación, que queda expresado en la Figura 0 - 1. En el objetivo general, se identifican cuatro elementos clave:

1. Razonamiento inductivo.
2. Estudiantes de 3º y 4º curso de ESO, españoles.
3. Progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2.
4. Resolución de problemas.

Cada uno de estos elementos clave ha sido descrito en detalle en diferentes apartados de esta memoria de investigación. La relación entre estos elementos, así como la relación entre ellos y el objetivo general de investigación han permitido determinar unos objetivos específicos y unas preguntas de investigación concretas. Estos objetivos y preguntas de investigación, junto con los antecedentes a este trabajo, han permitido diseñar el instrumento de recogida de información para recoger información de los estudiantes de la muestra. El análisis de las producciones de estos estudiantes ha permitido responder a los interrogantes de investigación propuestos, a la vez que se han conseguido otros hallazgos que mencionaremos.

En la Figura 0 - 1 resumimos estas ideas.

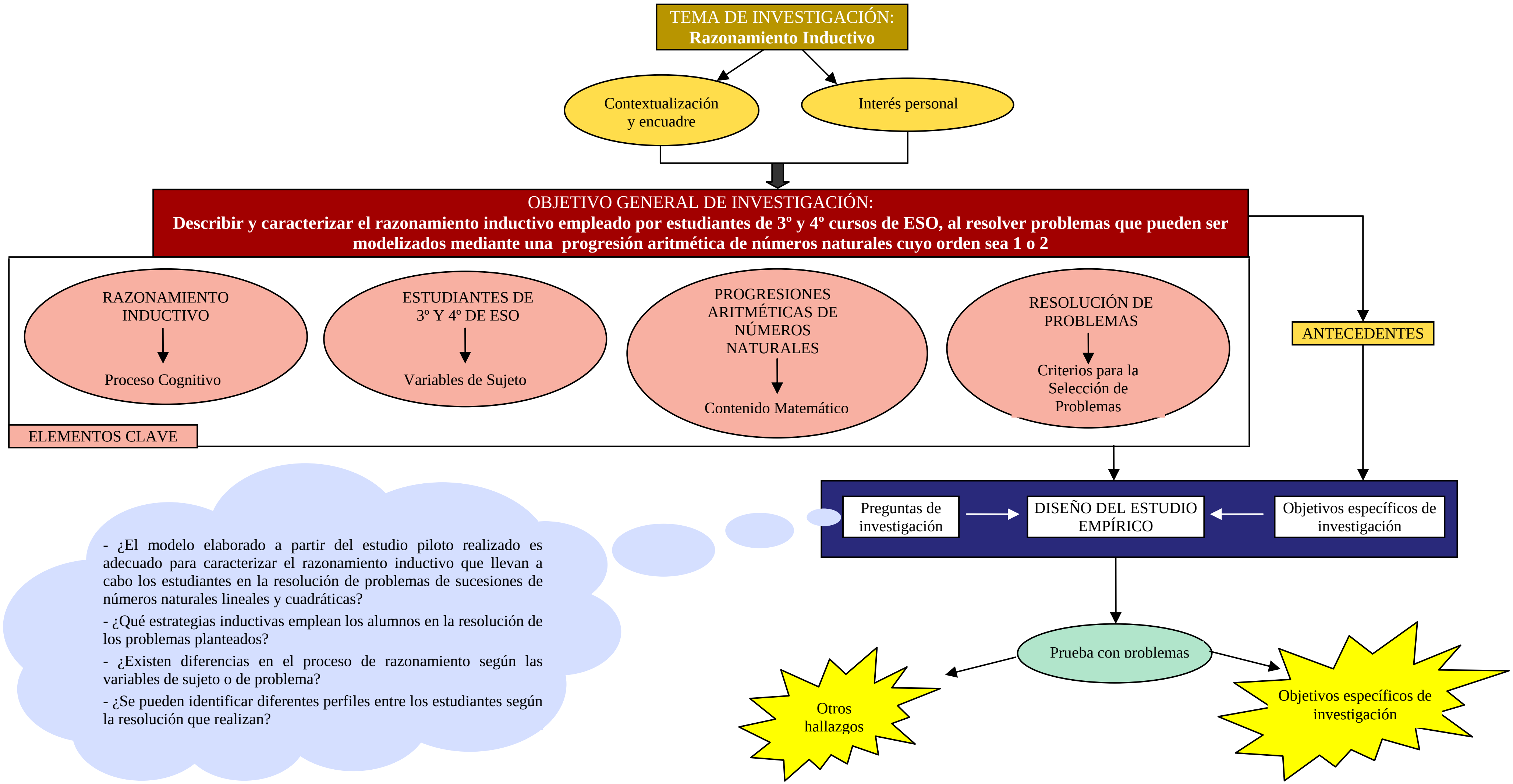


Figura 0 - 1. Estructura de la investigación

Estructura de la Memoria de Investigación

Las ideas descritas en el epígrafe anterior son desarrolladas en esta memoria, que se encuentra estructurada en capítulos. A continuación presentamos un resumen del contenido de cada capítulo.

Dedicamos el Capítulo 1 a la presentación del problema de investigación. Partiendo de la importancia del razonamiento inductivo en la adquisición de conocimiento y, en particular del conocimiento matemático, nos centramos en los niveles de secundaria y planteamos el objetivo general de investigación: *describir y caracterizar el razonamiento inductivo que emplean estudiantes de 3º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria*. Finalmente, desglosamos este objetivo en doce objetivos específicos.

Los capítulos 2 y 3 constituyen el marco teórico de este trabajo. En el Capítulo 2 describimos el razonamiento inductivo desde sus orígenes. Comenzamos con las perspectivas que ofrecen disciplinas generales de las que se nutre la Didáctica de la Matemática, como son la Filosofía, la Psicología o la Matemática. Concluimos este recorrido con algunas consideraciones para nuestra disciplina, que tratan el razonamiento inductivo desde el contexto de la resolución de problemas y tienen el cuenta la importancia del contenido matemático específico y otros aspectos relacionados con éste. En el Capítulo 3 nos centramos en el contenido matemático seleccionado para esta investigación, las progresiones aritméticas de números naturales de orden 1 y 2. Recogemos un análisis basado en dos pilares centrales. Uno referente al propio contenido, basado en la estructura conceptual, los sistemas de representación y algunos aspectos históricos y fenomenológicos. Y otro, relativo a los procedimientos que se pueden realizar en las tareas seleccionadas en esta investigación.

Como pilares fundamentales del marco teórico del trabajo, destacamos la consideración de un *modelo teórico de razonamiento inductivo* compuesto por una serie de pasos, y de las *estrategias inductivas* como un tipo particular de estrategia de resolución de problemas que se puede utilizar en contextos donde la inducción puede ser una estrategia general. Tanto el mencionado modelo como las estrategias inductivas, son expresados en términos del contenido matemático seleccionado para esta investigación.

El Capítulo 4 incluye los principales antecedentes de esta investigación. Destacamos investigaciones relacionadas con el modelo teórico de razonamiento inductivo que hemos considerado y los resultados obtenidos en investigaciones que abordan diferentes pasos de este modelo. Concluimos este capítulo con algunas reflexiones sobre los diseños de los trabajos relacionados con el razonamiento inductivo y presentamos algunos interrogantes que se suscitan tras la revisión realizada.

En el Capítulo 5 presentamos el marco metodológico de esta investigación. Partiendo del objetivo general y del marco teórico del trabajo, detallamos el estudio exploratorio y el diseño de la investigación definitiva. Describimos las variables, la muestra, el instrumento de recogida de datos, así como el modo en que se codifica y se organiza la información para el posterior análisis de datos.

Los capítulos 6, 7 y 8 contienen los análisis de datos que permiten dar respuesta a nuestros objetivos de investigación. Combinamos diferentes técnicas estadísticas, que incluyen el análisis de frecuencias y diversos tipos de contrastes de hipótesis cuyos objetivos son el análisis de independencia y los efectos de los tipos de problemas, el curso y el centro de los estudiantes en el razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes en la resolución de problemas.

En el Capítulo 6 recogemos la primera parte del análisis de datos, que está centrada en los Pasos de Razonamiento Inductivo y que permite dar respuesta a los objetivos específicos relativos a éste. Se realiza una descripción de los pasos que se observan en las producciones de todos los estudiantes en los diferentes tipos de problemas propuestos en la prueba. Posteriormente, presentamos un análisis de cada uno de los problemas sobre frecuencias y relaciones de dependencia entre los diferentes pasos considerados dentro del proceso inductivo. Finalizamos este capítulo con un análisis de los Pasos según el curso y el centro a los que pertenecen los estudiantes.

El Capítulo 7 se centra en las estrategias inductivas, lo cual nos debe permitir dar respuesta a los objetivos específicos de investigación relativos a ellas. Para ello, recogemos los resultados referentes a las estrategias inductivas empleadas por los estudiantes en cada uno de los problemas. Tras la determinación de las estrategias inductivas predominantes en cada uno de ellos, pasamos a la comparación de las frecuencias de empleo de cada estrategia según el curso y el centro al que pertenecen los estudiantes.

En el Capítulo 8, a partir de las estrategias inductivas predominantes, seleccionamos a siete estudiantes para hacer una descripción en profundidad de sus producciones con base en los pasos del razonamiento inductivo y en las estrategias inductivas empleadas. Finalmente, presentamos un proceso para la determinación de los perfiles de estos estudiantes y cómo, en función del modelo teórico de razonamiento inductivo utilizado en esta investigación, se puede determinar si los perfiles son más o menos completos.

El Capítulo 9, el último de esta memoria de investigación, recoge la información que permite dar respuesta a nuestros objetivos específicos de investigación, presentamos la relación con los antecedentes de esta investigación, algunas implicaciones que pueden tener los resultados presentados para la enseñanza y, a partir de las limitaciones reconocidas en este trabajo, dejamos abiertas algunas líneas de investigación para su continuación en un futuro.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la teoría de los números sucede con bastante frecuencia que las verdades más bellas brotan por inducción. (Gauss)

El razonamiento es un proceso de pensamiento que permite a los sujetos obtener conclusiones a partir de premisas establecidas previamente. A este proceso también se le denomina inferencia y se suele distinguir entre razonamiento deductivo e inductivo. En el razonamiento deductivo la conclusión se infiere necesariamente de las premisas y la verdad de las conclusiones depende de la verdad de las premisas. Sin embargo, en el razonamiento inductivo sólo se pueden extraer conclusiones probables, pues la verdad de las premisas no garantiza la verdad de la conclusión. El razonamiento inductivo permite obtener reglas generalizando lo observado en unos pocos casos concretos.

El razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que se inicia con el trabajo de casos particulares con la pretensión de llegar a nuevas conclusiones. También permite evaluar conclusiones ya formuladas comprobándolas con nuevos casos particulares (Johnson-Laird y Byrne, 1993; Pólya, 1966). Pólya, uno de los autores más influyente en el campo de la resolución de problemas en educación matemática, considera que para llevar a cabo un proceso de razonamiento inductivo de manera adecuada, se debe iniciar el proceso trabajando con casos particulares y, pasando por la formulación de conjeturas, se debe llegar a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares.

La importancia del razonamiento inductivo, tanto en Matemáticas como en Educación Matemática ha sido destacada, al menos, desde el trabajo de Pólya de 1945. Sin embargo, Ortiz (1993) señala el poco eco que tiene el tema en Educación Matemática como objeto de investigación. Esta escasez de investigaciones es mencionada por Smith (2002), al asegurar que las investigaciones que se centran en el proceso de razonamiento inductivo en Educación Matemática son insuficientes. Parece que la tendencia puede estar cambiando, ya que en los últimos años, se han llevado a cabo diversas investigaciones en el ámbito de la Didáctica de la Matemática relacionadas con el tema que nos ocupa.

El razonamiento inductivo (también el deductivo) está en el centro de la labor del quehacer matemático y científico en general y, como todo proceso de generalización, tiene gran importancia en la vida cotidiana de los seres humanos (García y Carretero, 1986). Así mismo, el estudio del razonamiento inductivo está justificado por las dos grandes aplicaciones que se le atribuyen y que tienen implicaciones en la Educación Matemática. En primer lugar, el razonamiento inductivo permite el descubrimiento de conocimiento nuevo mediante la formulación de conjeturas basadas en casos particulares y, en segundo lugar, el razonamiento inductivo se puede utilizar para validar conjeturas con base en casos particulares.

A continuación nos centramos en estas dos aplicaciones del razonamiento inductivo (descubrimiento y validación) para fundamentar la justificación del interés de nuestro trabajo desde las perspectivas que ofrecen diversos autores. Reseñamos la importancia del tema en la investigación psicológica y en el aprendizaje y, por último, recogemos la importancia que se le está dando al razonamiento inductivo en el ámbito curricular, resaltando la presencia de dicho razonamiento en documentos curriculares de varios países, entre los que se encuentra España.

INDUCCIÓN Y ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Brown (1999), citando a Russell, considera que la actitud inductiva es necesaria para el avance del conocimiento en todas las ciencias. El razonamiento inductivo es el razonamiento natural que da lugar al conocimiento científico a través del descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares (Neubert y Binko, 1992; Pólya, 1945, 1962-1965, 1966). Según esta concepción, la evidencia inductiva juega un papel primordial en el descubrimiento de leyes generales.

Matemáticos clásicos de prestigio como Hermite (véase Polya, 1962-65), Poincaré (1902) o Pólya, 1945, 1962-1965, 1966); autores de textos matemáticos (Jones, 1969), y asociaciones profesionales como la National Council of Teachers of Mathematics (2003) argumentan sobre la trascendencia e importancia de la inducción y del razonamiento inductivo para el quehacer matemático. Consideran que la inducción es un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico.

Pólya (1966) critica la consideración de la matemática como una disciplina formal y deductiva, defendiendo la necesidad de la actitud inductiva, en la que se requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones. Da tal importancia a la actitud inductiva, que considera que uno se encuentra ante un científico cuando éste trata *de extraer de una experiencia determinada las conclusiones más correctas y acumular las experiencias más útiles para establecer la mejor línea de investigación respecto a una cuestión dada* (p. 26). Por su parte Poincaré (1902) considera la inducción como la vía para llegar al conocimiento en cualquier ciencia y por extensión al conocimiento matemático, hay que partir de situaciones particulares, observar las regularidades para alcanzar la generalización, *las matemáticas pueden, pues, como las otras ciencias, proceder de lo particular a lo general* (p. 38).

La inducción es el término rescatado por Poincaré al responder a la pregunta de la verdadera naturaleza del razonamiento matemático. Poincaré defiende que el interés de lo deductivo radica precisamente en *que participa de la naturaleza del razonamiento inductivo y que por eso es fecundo* (p.15). La generalización es la intención de las matemáticas y se presenta en éstas como generadora de conocimiento (Lakatos, 1978).

El descubrimiento se reconoce, en el caso de las matemáticas, como uno de sus principales compromisos y

> *aunque los matemáticos se complacen en publicar su materia como desarrollos de ciencia deductiva, admitirán sin reservas que detrás de sus postulados y teoremas existen métodos de descubrimiento que son, en su mayor parte, de orden inductivo. (...) el descubrimiento de los resultados correctos a menudo sigue la secuencia: una suposición sobre la base del experimento, un intento en la prueba que falla, pero sugiere una suposición modificada, que lleva a otro intento de prueba, y así sucesivamente. Una de las atracciones de la matemática es el espíritu profundo de descubrimiento* (Jones, 1969, p. 5).

Vislumbrar más allá de lo que se percibe, ver alguna regularidad y plantear conjeturas es el “corazón” de la inducción, *hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 60).

Aunque el razonamiento inductivo no es exclusivo de las matemáticas, sí ocupa un lugar destacado dentro de esta ciencia, donde la actitud inductiva es fundamental para la construcción del conocimiento matemático debido a que permite establecer relaciones entre diferentes elementos a través del descubrimiento.

En matemáticas, los logros recaen en la evidencia deductiva, aunque la práctica matemática se basa directamente en la evidencia inductiva (Brown, 1999). Pero incluso las demostraciones deductivas están basadas en axiomas o primeros principios, cuyo origen desconocemos y que no tenemos porqué creer. La evidencia en sí misma puede ser una posible justificación de los axiomas pero no hay más. Brown (1999) rescata las ideas de Russell y afirma que

> *tendemos a creer las premisas porque podemos ver que sus consecuencias son verdad, en vez de creer las consecuencias porque conocemos que las premisas son verdad. Pero la inferencia de premisas a partir de consecuencias es la esencia de la inducción; así el método de investigación de los principios matemáticos es realmente el método*

> *inductivo y sustancialmente es el mismo método de descubrimiento de leyes generales en cualquier otra ciencia* (pp. 273-274).

El trabajo con casos particulares, la búsqueda de patrón, la generalización y la justificación de conjeturas son algunas de las tareas que Pólya (1945) considera asociadas al razonamiento inductivo y que permiten cumplir uno de los principales compromisos de las matemáticas: el descubrimiento.

EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO DESDE LA PSICOLOGÍA

La visión del razonamiento inductivo como descubrimiento de conocimiento está estrechamente ligada a las investigaciones psicológicas que plantean experimentos dirigidos a conocer cómo las personas realizan inferencias con base en el conocimiento de ciertas premisas.

Klauer (1996) subraya que desde los trabajos de Spearman, en 1923, los psicólogos han estado interesados en el razonamiento inductivo o en alguna de sus componentes. Spearman le otorga un papel destacado al razonamiento inductivo en su factor de inteligencia general. Posteriormente el enfoque factorial de la inteligencia recoge también algunos componentes relacionados con el razonamiento inductivo. En la década de 1970-80 los psicólogos cognitivos comenzaron a investigar los procesos mentales que ocurren cuando los sujetos resuelven problemas inductivos. Los autores de esta corriente, más próximos a la inteligencia artificial, trataron de construir y testar programas de ordenador capaces de resolver ciertos tipos de problemas de razonamiento inductivo.

Sternberg (1986) llega a considerar que si una persona recupera automáticamente una solución a un problema, ahí no se lleva a cabo un proceso de razonamiento desde el punto de vista psicológico. En este sentido, la resolución de problemas se debe analizar desde la perspectiva del proceso y no exclusivamente de la solución que se presenta.

Aunque nuestro enfoque responde a una aproximación psicológica muy concreta, queremos hacer mención a otras aproximaciones existentes que consideran el importante papel que juega el razonamiento en general, y el razonamiento inductivo, en particular. Se trata de algunas aproximaciones en las que no entraremos en este trabajo pero que han sido relevantes en Psicología.

El razonamiento es tratado desde la Psicología en la teoría del pensamiento, una rama que se preocupa por el estudio del proceso de inferencias, donde el razonamiento se investiga relacionado con otros aspectos como el aprendizaje, la memoria, la comprensión o el lenguaje (González, 1998). En la teoría del pensamiento, al razonamiento se le pueden asignar procesos de pensamiento diferentes, según sean las proposiciones desde las que se parta, la inferencia que se realice y el objetivo de la misma (Duval, 1999).

En una psicología cada vez más especializada, cuando se alude a los procesos de pensamiento se hace referencia, generalmente, a procesos de inferencia en tareas de razonamiento deductivo e inductivo y al marco más global en el que se insertan estas inferencias como son la toma de decisiones y la resolución de problemas (González, 1998).

Gilhooly (2005) considera que el razonamiento comporta procesos de pensamiento secuenciales explícitos que son equivalentes a la aplicación de una secuencia de reglas de algún sistema formal. Los sistemas formales proporcionan conjuntos de reglas generales para lograr conclusiones correctas a partir de afirmaciones dadas. Entre los principales sistemas formales que Gilhooly menciona, se encuentran la lógica deductiva y, entre aquéllos menos formalizados está la lógica inductiva.

En las perspectivas mencionadas en este epígrafe, destacamos una fuerte componente lógica basada en la lógica de las proposiciones y en el tipo de premisas de las que parte el proceso inductivo, que se ponen explícitamente de manifiesto en los trabajos de Espino (2004) y Johnson-Laird y Byrne (1991).

RAZONAMIENTO INDUCTIVO Y APRENDIZAJE

El papel del razonamiento inductivo en los procesos de aprendizaje ha sido reconocido por diversos autores (De Koning y Hamers, 1999; Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard, 1986; Klauer, 1996; Sternberg, 1998; Sternberg y Gardner, 1983). Este enfoque destaca la importancia del razonamiento inductivo en el aprendizaje de los escolares. Esta importancia viene justificada por razones relacionadas con el desarrollo de la inteligencia, la resolución de problemas, la lectura o la escritura y ha llevado a considerar el proceso de razonamiento inductivo como un dominio específico de conocimiento (De Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer, 2002).

Diversos estudios han puesto de manifiesto que la puesta en práctica de programas de entrenamiento sobre el razonamiento inductivo, han llevado a producir mejoras en el trabajo de los estudiantes (Christou y Papageorgiou, en prensa; Manavopoulos y Tzouriadou, 1998; Klauer, 1996; Tomic y Kingma, 1997). De Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer (2002) llevan a la práctica un proceso de enseñanza de razonamiento inductivo en educación primaria y destacan los avances que pusieron de manifiesto los estudiantes en diferentes áreas del currículo al finalizar la instrucción. Estos investigadores resaltan el interés de realizar investigaciones sobre el razonamiento inductivo en los últimos cursos de educación primaria y en educación secundaria que ofrezcan información del proceso y que se pueda utilizar para desarrollar programas y elaborar materiales didácticos para el trabajo del razonamiento inductivo.

Trabajos como los de Heller, Heller, Henderson, Kuo y Yerushalmi (2001), Kinshuk, Lin y McNab (2006) y Wexler (1999) ponen de manifiesto la aplicabilidad específica del razonamiento inductivo a variados contextos como la resolución de problemas en física o la adaptación de los estudiantes a los modelos de aprendizaje virtuales y que pueden resolver algunas dificultades del proceso de enseñanza y aprendizaje.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO Y PROCESOS DE VALIDACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

En las últimas décadas se ha producido en Didáctica de la Matemática un cambio en la visión de los procesos de validación[1]. En la actualidad se consideran diferentes procesos de validación a los que se le pueden asignar diferentes funciones.

---

[1] Hacemos referencia aquí a los procesos de validación que considera Balacheff (2000), quien hace una distinción entre la explicación, la prueba y la demostración. Esta distinción es necesaria en el campo de la investigación aunque se lleguen a considerar sinónimos en otros ámbitos.

La demostración ha sido, en los últimos tiempos, el único proceso de validación admitido. Sin embargo, autores como De Villiers (1993) y Hanna (2000) han identificado otras funciones para los procesos de validación, entre los que tienen cabida los procesos inductivos. De Villiers considera la función de verificación/convicción, junto con la explicación, la sistematización, el descubrimiento y la comunicación. Hanna añade tres funciones más al modelo presentado por De Villiers y considera las siguientes funciones para los procesos de validación:

- Verificación
- Explicación
- Sistematización
- Descubrimiento
- Comunicación
- Construcción de una teoría empírica
- Exploración del significado de una definición
- Incorporación de un hecho conocido a una nueva estructura de conocimiento

Una de las funciones del razonamiento inductivo es la verificación o la explicación mediante casos particulares de una determinada conjetura. Este tipo de razonamiento parece adecuado introducirlo y trabajarlo como modo de validación previamente al razonamiento deductivo propio de los procesos de validación formal. *Parece razonable y natural que la fase inductiva preceda a la fase demostrativa. Primero intuir; luego probar* (Pólya, 1966, p. 125).

Desde esta perspectiva señalada por Pólya, algunos investigadores destacan el interés de trabajar el razonamiento inductivo para ayudar a desarrollar ciertas capacidades y hábitos de trabajo que faciliten a los estudiantes el avance en la utilización y manejo de los procesos de validación formales.

Resultados de algunas investigaciones centradas en los procesos de validación formal (Baker, 1996; Battista y Clements, 1995; Fischbein, 1982; Martin y Harel, 1989; Martínez, 2000; Radford, 1994; Ron y Dreyfus, 2004) indican la existencia de dificultades en la realización de estos procesos por parte de los estudiantes de los niveles medios. Algunas de esas dificultades se han atribuido a que los estudiantes no pueden adquirir las habilidades de razonamiento necesarias para llegar a hacer y comprender una demostración matemática formal de repente, sino que los alumnos necesitan un período de tiempo para adaptarse y es conveniente que sigan una progresión lógica en el desarrollo de su razonamiento desde los razonamientos cotidianos hasta los razonamientos matemáticos formales (Almeida, 1996a; Bell, 1976; Jones, 1996). Algunos de los autores citados sugieren la importancia de trabajar con procesos de validación informales como puente hacia las demostraciones formales.

Para potenciar esta evolución desde los tipos de procesos de validación informales a otros formales, se aconseja preparar situaciones basadas en la resolución de problemas que utilizan el razonamiento inductivo (Allen, 2001; Bell, Burkhardt, Crust, Pead y Swan, 2004; Fernández y Anhalt, 2001; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985; Miyazaki, 2000; Shell Centre for Mathematical Education, 1984; Stacey y Groves, 1999).

Sin embargo, pese a la importancia reconocida del razonamiento inductivo como proceso de validación informal, no está clara la relación entre este tipo de razonamiento y el avance respecto a los procesos de validación formal. Investigaciones como las de Allen (2001) y Callejo (2004) ponen de manifiesto dificultades en la realización de demostraciones formales, más concretamente, en la inducción matemática, aunque los estudiantes hayan trabajado previamente el razonamiento inductivo.

UNA PERSPECTIVA CURRICULAR INTERNACIONAL DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

La importancia que se da en los currícula al razonamiento inductivo, queda reflejada en los documentos curriculares de diferentes países, donde el razonamiento inductivo suele aparecer, de una manera transversal, vinculado a los niveles educativos medios.

La progresión natural en el trabajo de los procesos de validación, como ya se ha mencionado en el epígrafe anterior, es comenzar por el razonamiento inductivo y los procesos de prueba basados en lo empírico, para llegar a la generalización y a la demostración de la misma. En algunos países como Francia e Italia, se sigue esta progresión natural, se introduce la explicación o la justificación en educación primaria por medio de razonamientos basados en los casos particulares y se llega a trabajar la demostración formal en la educación secundaria no obligatoria (Mariotti, 2006).

En Taiwan, por ejemplo, se observa un enfoque más práctico. Los estudiantes aprenden a generalizar trabajando con patrones a partir de las series numéricas y trabajan en álgebra la resolución de ecuaciones, mediante problemas verbales. En este país, la exploración de patrones geométricos juega un papel fundamental y no siempre aparece vinculada a un tema matemático concreto ni a una actividad curricular determinada (Fou-Lai y Kai-Lin, 2004).

En otros países como Alemania, España o Suiza se observa una falta de precisión curricular en el tipo de razonamiento y de procesos de validación que se trabajan en la educación secundaria. Esto significa que no existe una obligación de trabajar cierto tipo de razonamiento en un nivel educativo determinado. El tipo de razonamiento y los procesos de validación que se trabajan se vislumbran de manera difusa[2].

En el Reino Unido, desde la publicación del Informe Cockcroft (1982), el aprendizaje de la demostración formal transmitido por los profesores fue reemplazado por la implicación del aprendiz en investigaciones y tareas de resolución de problemas como catálisis de la que deben emerger procesos de conjeturar, generalizar y justificar (Almeida, 1996a).

Prestamos especial atención a los Estándares Curriculares de Estados Unidos, referencia obligada cuando se trata de documentos curriculares desde una perspectiva internacional. La importancia del razonamiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se pone de manifiesto de manera específica mediante el estándar Razonamiento y Demostración, y aparece de manera transversal en otros estándares como el de Resolución de Problemas.

El razonamiento sistemático es una de las características que definen a las matemáticas. Se encuentra en todos los contenidos y, con distintos grados de

[2] Estas ideas surgen de los debates que se llevaron a cabo con investigadores de diferentes países en el Grupo de Trabajo de Demostración y Argumentación del CERME IV.

rigor, en todos los niveles (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 60). *Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:*

1. *Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas*
2. *Formular e investigar conjeturas matemáticas*
3. *Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones*
4. *Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración*

(National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 59)

Se considera fundamental que los estudiantes realicen algunas tareas propias del razonamiento inductivo como son: (a) la formulación de conjeturas apoyadas en evidencias, (b) la elaboración de argumentos sobre la validez de una conjetura y (c) la generalización de ideas matemáticas. Los patrones juegan un papel destacado en el proceso de razonamiento de los estudiantes, ya que proporcionan oportunidades importantes para formular conjeturas y dar razones de su validez. La descripción y representación de patrones geométricos y numéricos aparecen asociadas a la generalización y al lenguaje algebraico y verbal como formas de expresar las generalizaciones.

En educación secundaria, los Estándares Curriculares consideran que los alumnos *deberían agudizar y ampliar sus destrezas de razonamiento para profundizar en las valoraciones de sus afirmaciones y conjeturas, y utilizar los razonamientos inductivo y deductivo para formular argumentos matemáticos* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 266). El razonamiento matemático en estos niveles se asocia a tareas como:

1. Examen de regularidades y estructuras para detectar patrones
2. Formulación de generalizaciones y conjeturas acerca de las regularidades observadas
3. Evaluación de conjeturas
4. Construcción y evaluación de argumentos matemáticos

En los primeros cursos de educación secundaria, el estándar de Razonamiento y Demostración incluye algunas características propias del razonamiento deductivo en las tareas de comprobación, *aunque el argumento matemático en estos niveles carece del formalismo y el rigor frecuentemente asociados a la demostración matemática* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 268). Posteriormente, *las oportunidades para razonar y demostrar matemáticamente impregnan el currículo de la escuela secundaria* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 348). Mientras que en cursos anteriores, las tareas que pretenden fomentar el razonamiento de los estudiantes se centran en la teoría de números, propiedades de las figuras geométricas y la probabilidad; en los últimos cursos de la educación secundaria, *el razonamiento y la demostración no son actividades especiales reservadas para momentos determinados o temas específicos del currículo* (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 348).

EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

El razonamiento inductivo se puede trabajar en diferentes niveles del sistema educativo español. Las investigaciones que se han llevado a cabo dentro de nuestra línea de investigación dejan constancia de ello. En cuanto a su presencia en el currículo, en España se hace referencia a las posibilidades de razonamiento y de aprendizaje que posean los alumnos en los distintos niveles de su desarrollo evolutivo (Ministerio de Educación y Ciencia, 1989). Se considera fundamental la necesidad de partir del nivel de desarrollo del alumno y, por lo tanto, es importante conocer las capacidades que caracterizan al alumno de cada nivel.

Los objetivos generales que propone el Diseño Curricular Base para educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 1989) consideran que los alumnos:

- Habrán incorporado al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica) con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa.
- Mostrarán actitudes propias de la actividad matemática tales como la exploración sistemática de alternativas, tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad para cambiar de punto de vista, gusto

por la precisión del lenguaje, etc.), percibiendo el papel que juegan como lenguaje e instrumento en situaciones muy diversas.

- Utilizarán las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

En general, queda reflejada la importancia del razonamiento inductivo y del razonamiento deductivo pero no de una manera directa, sino por medio de tareas como la formulación y la comprobación de conjeturas. Ambos tipos de razonamiento deben ser vistos como unidades relacionadas que permiten avanzar en la capacidad de razonamiento matemático.

El tratamiento que recibe el razonamiento tanto inductivo como deductivo en España, en los diferentes niveles educativos, es variado. Se observa un cambio significativo desde los primeros niveles educativos, donde la mayor parte del aprendizaje de la matemática elemental está condicionada a los argumentos inductivos utilizados por los alumnos (Castro, 2002; Ortiz, 1997), hasta el bachillerato, donde la asignatura de matemáticas requiere

> *alcanzar el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los procesos lógicos deductivos que les permitan, por ejemplo, seguir, interpretar y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas, plantear conjeturas, analizar procesos lógicos y obtener conclusiones y generalizaciones* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2003, p. 26098).

El nivel de educación secundaria aparece como período de transición entre lo inductivo y lo deductivo, donde la finalidad fundamental de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de la facultad de razonamiento. Esta transición pone de manifiesto el proceso lógico que se apuntaba en algunas investigaciones en el paso de lo inductivo a lo deductivo y sigue el desarrollo histórico de la construcción del conocimiento matemático (Ministerio de Educación y Ciencia, 2004).

Entre los objetivos generales de la educación secundaria se encuentran referencias al razonamiento, al pensamiento lógico y a la resolución de problemas. Se buscan problemas que estimulen la curiosidad y la reflexión de los alumnos, facilitando el desarrollo de ciertos hábitos de trabajo que les permitan desarrollar estrategias para defender sus argumentos. La introducción de los conceptos se debe hacer de forma intuitiva y buscar poco a poco el rigor matemático, adecuando siempre la metodología utilizada a la capacidad de formalización que a lo largo de la etapa irá desarrollando el alumno (Ministerio de Educación y Ciencia, 2004).

PLANTEAMIENTO DE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En los epígrafes anteriores de este capítulo se deja constancia de la importancia del razonamiento inductivo desde el punto de vista de las matemáticas, en general; y de la educación matemática, en particular. El razonamiento inductivo se considera fundamental en la construcción del conocimiento matemático a través del descubrimiento de patrones que pueden llevar a la formulación de propiedades y leyes generales. También se ha puesto de manifiesto que el razonamiento inductivo se puede considerar como un proceso de validación informal.

El razonamiento inductivo ha jugado un papel importante y activo en la generación de nuevo conocimiento. Mediante el razonamiento inductivo, al igual que los investigadores matemáticos, los estudiantes pueden actuar por tanteo, tomar ejemplos y contra-ejemplos, buscar regularidades y llegar a la formulación de leyes generales.

Los documentos curriculares actuales resaltan la importancia del razonamiento inductivo en la adquisición del conocimiento matemático, partiendo de lo particular hasta llegar a lo general. Además, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se deben tener en cuenta tanto las capacidades de los alumnos, como la naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad matemática (Ministerio de Educación y Ciencia, 1989).

Conocer y tomar conciencia de la etapa evolutiva en la que se encuentran los alumnos puede guiar a los educadores a hacer que sus alumnos avancen en los procesos de razonamiento (Balacheff, 2000).

Gran parte de las investigaciones previas sobre razonamiento inductivo se han realizado en el campo de la psicología pero, en muchos casos, desligadas del aprendizaje escolar. Es preciso realizar investigaciones sobre el razonamiento inductivo cuyo enfoque lo contemple formando parte del aprendizaje escolar de las matemáticas.

Por las razones que se han expuesto en este capítulo, consideramos de interés abordar un trabajo para describir y caracterizar el razonamiento inductivo que emplean estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria. Las progresiones de orden 1 o 2, como se tratará en el capítulo 3 de esta memoria, son tareas apropiadas para que los estudiantes de secundaria pongan en práctica y manifiesten aspectos relacionados con el razonamiento inductivo. Como se justificará, la resolución de problemas es un método acorde con nuestras pretensiones investigadoras.

Con base en estas razones enunciamos el objetivo general del trabajo como sigue.

Objetivo General

Describir y caracterizar el razonamiento inductivo empleado por estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria, al resolver problemas que pueden ser modelizados mediante una progresión aritmética de números naturales cuyo orden sea 1 o 2.

Objetivos Específicos

Para la descripción del razonamiento inductivo de los estudiantes, se requieren instrumentos que permitan la observación de la forma de actuar de los alumnos. Para ello, utilizamos un modelo *teórico* que elaboramos con los datos obtenidos en el estudio piloto (Cañadas, 2002), compuesto por una serie de *pasos*[3]. En relación con el estudio de estos pasos que pueden seguir los estudiantes, determinamos los objetivos siguientes:

- O_1. Detectar la existencia de regularidades en el empleo de los pasos del razonamiento inductivo por parte de los estudiantes.

[3] Damos el nombre de *pasos* a los diferentes elementos individuales que se pueden diferenciar en todo el proceso del razonamiento inductivo

- O_2. Identificar si existen, o no, relaciones de dependencia entre la realización de los pasos del modelo teórico del razonamiento inductivo, por parte de los estudiantes.

Como instrumento de recogida de información, hemos elaborado una prueba constituida por diferentes problemas con los que pretendemos analizar el razonamiento inductivo de los estudiantes. Los siguientes objetivos surgen de este hecho y se concretan en:

- O_3. Estudiar las estrategias empleadas por los estudiantes en los problemas planteados en la prueba.
- O_4. Identificar y describir, en caso de que existan, tendencias en el razonamiento inductivo que emplean los estudiantes en la resolución de los diferentes problemas y si éstas dependen del tipo de problema que resuelven.

Nuestro interés por estudiar la influencia de la representación en el trabajo de los alumnos al resolver problemas, nos ha conducido a considerar diferentes sistemas de representación para el contenido matemático sobre el que se sustenta este trabajo. La determinación de *estrategias inductivas*, entendidas como posibles estrategias que pueden utilizar los estudiantes en la resolución de los problemas, permite determinar los objetivos siguientes:

- O_5. Analizar el uso que hacen los sujetos de las diferentes representaciones posibles para los problemas planteados, así como las relaciones y las transformaciones que efectúan entre las mismas.
- O_6. Analizar si la estrategia de resolución se presenta influenciada por el sistema de representación en el que se trabaja.

La descripción del razonamiento inductivo de los estudiantes con base en el modelo teórico de pasos considerado, así como de las estrategias inductivas que utilizan en la resolución de los problemas, nos permite determinar el siguiente objetivo:

- O_7. Estudiar la existencia de diferentes tipologías o perfiles de alumnos en la resolución de problemas utilizando procesos inductivos.

Para el trabajo empírico, hemos considerado un grupo de estudiantes españoles de dos cursos diferentes, 3º y 4º de ESO, y pertenecientes a diferentes centros.

Queremos conocer si el desempeño de los alumnos de uno y otro curso, y de alumnos de uno y otros centros es significativamente diferente o si, por el contrario, las respuestas no dependen del curso ni del centro. De aquí que consideremos los siguientes objetivos:

- O_8. Analizar si existen, entre las producciones de los estudiantes, diferencias significativas, por cursos, en la realización de los pasos del razonamiento inductivo.
- O_9. Analizar si existen, entre las producciones de los estudiantes, diferencias significativas, por cursos, en la utilización de estrategias inductivas.
- O_{10}. Analizar si existen, entre las producciones de los estudiantes, diferencias significativas, por centros, en la realización de los pasos del razonamiento inductivo.
- O_{11}. Analizar si existen, entre las producciones de los estudiantes, diferencias significativas, por centros, en la utilización de estrategias inductivas.

Detectamos, en el estudio piloto, que pese al interés dado al tema del Razonamiento Inductivo en el enseñanza de las matemáticas (esta idea se pone de manifiesto al hablar de la racionalidad de la investigación tanto en el Trabajo de Investigación Tutelada como en éste) no había un modelo de actuación (satisfactorio para nosotros) que permitiera contrastar el desempeño de los sujetos. Tal situación nos llevó a la identificación de unas componentes, o pasos, y a la organización de los mismos en una estructura algorítmica que llamamos modelo para desarrollar el proceso se razonamiento inductivo. Del interés por contrastar este modelo con el comportamiento de un número mayor de alumnos, para validarlo o seguir refinándolo, surge un nuevo objetivo.

- O_{12}. Estudiar la adecuación del modelo teórico elaborado sobre el proceso de razonamiento inductivo para el análisis de las producciones de los estudiantes, con objeto de validarlo o modificarlo para afinarlo y ajustarlo a dicho proceso.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Las soluciones más sencillas son las más comunes y este es el fundamento en que descansa la inducción. (Laplace)

En este capítulo ofrecemos una visión general del razonamiento inductivo desde distintas perspectivas y tratamos aspectos relacionados con él que son importantes en esta investigación. Comenzamos por los orígenes de la inducción y hacemos una revisión desde diferentes disciplinas en las que aparece la inducción o el razonamiento inductivo y que están relacionadas con la Educación Matemática como son la Filosofía, la Matemática y la Psicología. En la segunda parte de este capítulo nos centramos en las aportaciones de estas disciplinas que atañen a la Educación Matemática y aquéllas que, desde el seno de nuestra propia disciplina, están relacionadas con el razonamiento inductivo. Entre estos aspectos, destacamos la resolución de problemas y las representaciones.

Dedicamos la tercera parte del capítulo a la determinación de dos pilares fundamentales de esta investigación. Por un lado, presentamos una primera aproximación a un *modelo teórico de razonamiento inductivo* basado en pasos. Por otro lado, identificamos las *estrategias inductivas* como los procedimientos específicos a un contenido matemático que llevan a cado los estudiantes en la resolución de problemas y que se enmarcan dentro de la inducción como heurístico.

Concluimos el capítulo con la ubicación de nuestro interés investigador dentro del contexto de la resolución de problemas que hemos considerado.

ORÍGENES DE LA INDUCCIÓN

La inducción aparece con Aristóteles (384-322 a.C.), quien habló de la inducción con una significación precisa e insistió en la importancia de establecer la diferencia entre *silogismo* e *inducción*. En esta distinción, el silogismo se mueve de lo más universal a lo menos universal, y la inducción se mueve en el sentido opuesto (Ferrater, 1988).

La inducción proviene del término griego *epagogé*, creado por Aristóteles para denotar al establecimiento de proposiciones universales mediante la utilización de casos particulares que pudieran estar contenidos en ella. En una primera definición, se consideró que la inducción es un tránsito de las cosas individuales a los conceptos universales. Esta definición fue criticada puesto que no contiene los casos en los que un argumento inductivo puede llevar de casos particulares a casos particulares o de lo menos general a lo más general. Se plantea entonces, otra definición por negación de lo considerado como argumento deductivo en la época. Dicha definición considera el argumento inductivo como aquel que no es de carácter demostrativo. Por su carácter negativo, esta definición de argumento inductivo, fue nuevamente criticada y se llegó a aceptar una nueva definición que define la inferencia inductiva como la que permite ir de lo conocido a lo desconocido. En este sentido, mediante la inducción se obtiene más información de la contenida en las premisas.

Aristóteles distingue dos formas de razonamiento inductivo:

1. El *razonamiento inductivo perfecto* como el caso límite del razonamiento inductivo general. Sólo es posible con objetos que pueden ser enumerados por entero y con propiedades fácilmente obtenibles por abstracción. Se establece una conexión racional efectiva entre un concepto y otro inferido por este concepto.
2. El *razonamiento inductivo imperfecto*, que expresa los razonamientos inductivos habituales. Opera a base de una especie de “mediación psicológica” hecha posible por una revisión de los casos particulares.

(Ferrater, 1988)

Para Aristóteles, llegar a una inducción perfecta requiere de una inducción imperfecta previa. Este filósofo estableció analogías entre la inducción y la abstracción y anticipó algunas de las conclusiones que más tarde se recogerían en el empirismo, acentuando la necesidad de complementar la metodología inductiva por medio de la experimentación activa.

Aristóteles concedió un papel preponderante al papel del razonamiento deductivo como forma de adquisición de conocimiento, ya que es el camino seguro para llegar a la verdad. Sin embargo, también considera la importancia del razonamiento inductivo como otra forma de llegar al conocimiento que agrada más al sentido común.

A lo largo de los siglos, desde que Aristóteles estableciera la diferencia entre el silogismo y la inducción, han aparecido diferentes concepciones relacionadas con el proceso inductivo. Una de ellas, la más destacada entre las que han considerado la importancia de lo inductivo, es la liderada por Francis Bacon.

BACON Y LA FILOSOFÍA INDUCTIVA

Para la escolástica medieval, que consideraba a Aristóteles la máxima autoridad filosófica, el proceso inductivo parte de entes singulares para llegar a lo *universal*. Sin embargo, no todos los pensadores posteriores fueron seguidores de Aristóteles. Un ejemplo significativo de los opositores de Aristóteles es Roger Bacon (c. 1214-1294), quien se posicionó en contra de esta filosofía y cuestionó el tipo de enumeración que debía considerarse propio del proceso inductivo científico. Con Bacon se inicia el esfuerzo por codificar en *cánones o patrones formales los procedimientos que seguimos en el razonamiento inductivo* (Black, 1979, p. 18). La importancia del trabajo de Bacon no está en descubrimientos concretos, sino en la interpretación del hacer científico con su *método inductivo*, como una *lógica del descubrimiento*.

El método inductivo de Bacon parte de los casos particulares para llegar a los axiomas. Primeramente, se pasa de los casos particulares a lo que Bacon llama *axiomas menores*. Posteriormente, pasa de éstos a los *axiomas medios* y, finalmente, a las *proposiciones más generales*. Los pasos deben ser sucesivos, de forma que no haya interrupciones o pasos vacíos y se lleve a cabo un proceso sistemático. Para ello, el autor fundamenta el trabajo de lo que él llama la *verdadera inducción* en la utilización de *la tabla de presencia, la tabla de*

ausencia y *la tabla de grados*. El objetivo de estas tablas es seleccionar los casos particulares que sean realmente representativos de lo que se pretende generalizar.
El trabajo de Bacon es uno de los más influyentes en la visión actual del razonamiento matemático.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

En la actualidad, se reconoce que el análisis del razonamiento matemático es inaccesible para la silogística tradicional. Los trabajos de Bacon, Descartes y Galileo destacan la existencia de otros tipos de argumentos en matemáticas, además de los deductivos.
Desde la época de Descartes, el razonamiento matemático no se puede reducir a una deducción puramente formal. En el trabajo de Descartes se observa la introducción de una fase intermedia entre las premisas y la conclusión, consistente en la contemplación de un objeto individual (Piaget y Beth, 1980). Esta fase intermedia apela a la intuición y es la que planteó el problema de introducir un *objeto concreto* para obtener una generalización. Este problema ha sido ampliamente debatido por autores como Locke, Berkeley, Hume y Kant, quienes se esfuerzan en aclarar el significado del objeto concreto considerado y su papel en la inducción. La concepción de Kant constituye una fusión de las soluciones de Descartes y de Locke con la de Berkeley. Kant considera que el objeto individual es la expresión de una noción que, a priori, se trata de una noción universal puesto que requiere de una intuición no empírica del objeto, de forma que no se perjudica su generalidad.
Descartes y Kant están de acuerdo en colocar, junto al razonamiento formal o silogístico, un tipo nuevo de razonamiento llamado razonamiento intuitivo o constructivo (Piaget y Beth, 1980, p. 25).
La nueva lógica surge de la aplicación de los métodos matemáticos a la lógica antigua. Se puede decir que se abre un nuevo período cuando las matemáticas se convierten en objeto de la Lógica, donde lo deductivo vuelve a primar sobre lo inductivo.

Razonamiento en la Lógica Matemática

Peano (1858-1932) es el primero en utilizar la expresión *lógica matemática* porque vio en la lógica un instrumento para lograr la sistematización y fundamentación de las matemáticas, ya que se ocupa de estudiar la validez de los razonamientos que se llevan a cabo. Esta lógica se inicia con Boole, quien indica cómo la lógica aparece como un cálculo algebraico y desarrolla la lógica de clases y la lógica proposicional. El cálculo que crea Boole (1815-1864) es totalmente artificial. Se utilizan lenguajes formales que permiten enunciar prácticamente todas las tesis principales de las matemáticas modernas.

El objeto principal de estudio en la lógica matemática comprende: (a) lenguaje formal del cálculo, (b) axiomas del cálculo y (c) reglas de deducción (Ershov y Paliutin, 1990). La lógica se preocupa por perfeccionar lo deductivo y destruye lo inductivo (Lakatos, 1978). Estudia las estructuras formales del razonamiento, que consisten en una serie de proposiciones o enunciados, normalmente conectados mediante expresiones auxiliares, en el que uno de ellos llamado *conclusión* se supone que se sigue o se infiere de los restantes llamados *premisas*. Las *reglas de inferencia* son las expresiones del metalenguaje, que constituye la lógica, que ayudan a comprobar la validez del razonamiento. Estas reglas son:

- Regla de Conjunción.
- Regla de Simplificación.
- Regla de la Doble Negación.
- Regla del Absurdo.
- Regla del Modus Ponens.
- Regla del Modus Tollens.
- Regla del Silogismo Disyuntivo.
- Regla del Silogismo Hipotético.

Más tarde, Peirce hará aportaciones: la lógica de relaciones, el método de matrices (o tablas de verdad) y nuevos desarrollos de la lógica proposicional. Aunque realizó notables contribuciones a la lógica matemática considerada, para Peirce la lógica es más *teoría del razonamiento* y se dedicó principalmente a lo que él llama la *lógica de la ciencia*.

Lógica de la Ciencia

Dentro de la *lógica de la ciencia*, Peirce incluye dos de los tres modos de inferencia que considera: la inducción y la *abducción* (la deducción es para este autor parte de la lógica matemática). Su intento de aplicar las reglas de la deducción para explicar la inducción le sugiere un tercer tipo de inferencia, la inferencia abductiva (Peirce, 1918).

La abducción constituye la preferencia por una hipótesis sobre otras, previa a todo conocimiento de su verdad y a cualquier examen a que pueda ser sometida. La abducción requiere de la formulación y comprobación de conjeturas basadas en casos particulares. Incluso cuando la regla y el caso particular del que se parte sean verdad, el caso particular inferido es una de las posibilidades, no es definitivamente verdadero.

Según Peirce, la validez del proceso mental por el que el hombre llega a construir teorías correctas sobre el universo, lo inferimos por inducción y todas ellas fueron en su origen meras conjeturas abductivas. Peirce considera cuatro pasos en el razonamiento abductivo para constituir una "lógica de descubrimiento":

1. Observación de una anomalía.
2. Abducción de hipótesis con la intención de explicar la anomalía.
3. Prueba inductiva de las hipótesis en experimentos.
4. Confirmación deductiva de que la hipótesis seleccionada predice la anomalía original.

Estas reglas tienen sentido para el razonamiento deductivo pero, sin embargo, no es posible encontrar unas reglas similares para el razonamiento inductivo, lo cual representa el aspecto lógico del problema de la inducción.

EL PROBLEMA DE LA INDUCCIÓN

El problema de la inducción tiene dos aspectos, el lógico y el epistemológico. Desde la perspectiva lógica el problema surge de la necesidad de justificar las inferencias inductivas, o bajo qué condiciones están justificadas.

Planteamiento de Hume

El aspecto epistemológico del problema de la inducción es planteado por David Hume en 1739 y se centra en la justificación de las conjeturas. El argumento de Hume, obligaría a rechazar una de las tres premisas siguientes:

1. La ciencia (caso de ser verdadera) proporciona creencia justificada.
2. La ciencia usa inferencias ampliativas.
3. La justificación preserva la verdad.

El argumento seguido por Hume rechaza la primera premisa. Tras refutar la doctrina lógica de la inducción, se enfrentó con el problema de ¿cómo obtenemos realmente nuestro conocimiento, como hecho psicológico, si la inducción es un procedimiento que carece de validez lógica y es racionalmente injustificable? Hume da dos respuestas posibles:

1. Obtenemos nuestro conocimiento por un procedimiento no inductivo.
2. Obtenemos nuestro conocimiento por repetición e inducción y, por lo tanto, por un procedimiento que carece de validez lógica y es racionalmente injustificable.

Hume defiende que todo el conocimiento procede de impresiones recibidas por los sentidos o que surgen internamente en nosotros en forma de sentimientos. El punto de vista de Hume duda de la capacidad del hombre para conocer las causas de una manera racional (Díez y Moulines, 1997). Hume identifica la experiencia como la base del razonamiento inductivo y acepta que la ciencia proceda inductivamente, sin embargo, lo considera insuficiente para justificar las inferencias (Holyoak y Morrison, 2005).

La respuesta de los lógicos al problema de la inducción se basa en la distinción entre dos tipos de argumentos: deductivos e inductivos. Los argumentos inductivos se califican de fuertes o débiles, en función de la verificación que produzcan. Una proposición es verificable en sentido fuerte si su verdad se establece concluyentemente mediante la experiencia; el sentido débil se da si es posible para la experiencia hacerla probable.

El planteamiento de Hume ha sido rechazado, por su tercera premisa por algunos filósofos. Popper rechaza la segunda de las premisas es *el único filósofo influyente* *que rechaza, o dice rechazar, que la ciencia es inductiva* (Díez y Moulines, 1997, p. 407).

Falsacionismo de Popper como Respuesta a Hume

Popper aborda el problema de la inducción a través de las argumentaciones presentadas por Hume y afirma que es *superfluo todo principio de inducción, y que lleva forzosamente a incoherencias (incompatibilidades) lógicas* (Popper, 1985, p. 28).

Al parecer, y según Popper (1967), Hume no consideró seriamente la primera alternativa y admitió humildemente la inducción por repetición. Esto implicaría que hasta el conocimiento científico es irracional, de modo que el racionalismo sería absurdo y debería ser abandonado (Popper, 1967).

Lo que propone Popper es invertir la teoría de Hume: en vez de explicar nuestra propensión a esperar regularidades como resultado de la repetición, propone explicar la repetición para nosotros como el resultado de nuestra propensión a esperar regularidades y buscarlas. La idea es tratar activamente de imponer regularidades al mundo, saltar a conclusiones sin esperar el descubrimiento de premisas. Se trata de una teoría de ensayo y error, de conjeturas y refutaciones. Las conjeturas deben ser eliminadas si entran en conflicto con observaciones que serán elegidas con la intención de someter a prueba una teoría para obtener, si es posible, una refutación decisiva. El lema del falsacionismo de Popper es que el método científico no es inductivo, el método de la ciencia es el de conjeturas y refutaciones. De este modo, da respuesta al problema de la inducción y propone una metodología de validación basada en la falsación (Díez y Moulines, 1997).

La inducción presenta, por tanto, un problema desde la perspectiva filosófica. A este problema se le trata de dar solución desde la matemática mediante la introducción de una variable estadística que aporte una medida de la fiabilidad del razonamiento, se habla de razonamiento probabilístico.

Razonamiento Probabilístico

En el siglo XX se introduce una variable estadística al estudio de la inducción, ya que se vincula con esta ciencia y, más concretamente, con el campo de la probabilidad y la inferencia. Existen dos escuelas: para una de ellas, el problema de la inducción debe tratarse desde el punto de vista de la teoría frecuencial de la probabilidad y las inferencias inductivas son inferencias estadísticas. Para la otra, a la que pertenecen la mayor parte de los autores (Keynes, Carnap, Hempel y Goodman, entre otros), la probabilidad es un grado de confirmación (Ferrater, 1988). Actualmente, la inducción sigue apareciendo vinculada con la probabilidad (Espino, 2004).

El razonamiento probabilístico se considera un tipo de razonamiento no deductivo (Bueno y Pérez, 2006; Espino, 2004) y se basa en el uso de la información probabilística para realizar buenas predicciones o tomar decisiones correctas (Stenning y Monaghan, 2005). El razonamiento probabilístico se considera de gran importancia en muchos aspectos de la rutina diaria, algunos de los cuales están vinculados a la toma de decisiones (Fisk, 2005).

Espino (2004) sitúa el inicio de la investigación psicológica sobre la emisión de juicios bajo incertidumbre en los años 60. Los investigadores parten de que, con frecuencia, la mayoría de nuestras decisiones y conductas se articulan a partir de juicios probabilísticos más que a partir de juicios certeros. En la actualidad, hay diferentes modelos de razonamiento probabilístico con percepciones teóricas totalmente diferentes. Se asume que nuestro sistema cognitivo no realiza los cálculos estadísticos tal y como se prescribe en los libros de texto, aunque dispone de procedimientos, que permiten al sistema comportarse de forma competente.

El razonamiento probabilístico, así como otros tipos de razonamiento mencionados hasta el momento, se han visto relacionados con procesos cognitivos y, en general, con investigaciones psicológicas. Dedicamos el siguiente apartado a la visión del razonamiento que ofrece la Psicología.

RAZONAMIENTO EN PSICOLOGÍA

El razonamiento es un proceso tratado desde la Psicología en la rama que estudia el pensamiento. Esta rama trata el proceso de inferencias y este proceso comprende muchos aspectos del campo de la investigación psicológica como el razonamiento, el aprendizaje, la memoria, la comprensión o el lenguaje (González, 1998).

En este contexto, al razonamiento se le asignan procesos de pensamiento diferentes. Por una parte, los procesos que conllevan una inferencia explícita, son aquellos en los que de una o varias proposiciones se infiere otra y que están intrínsecamente ligados al lenguaje. Por otra parte, los procesos inherentes a un acto de exploración se efectúan con objeto de adaptar una situación nueva, se trata de problemas para cuya solución es suficiente una manipulación, bien de objetos o de instrumentos (Duval, 1999).

En general, cuando los estudios psicológicos tratan el razonamiento deductivo, suelen aparecer experiencias relacionadas con la resolución de problemas y, cuando tratan el razonamiento inductivo, suelen aparecer ligados a la toma de decisiones, a la formación de conceptos, a la adquisición de conocimiento, al aprendizaje o al razonamiento informal (Santamaría, 1998).

Razonamiento Inductivo y Adquisición de Conocimiento

La adquisición del conocimiento ha sido una cuestión que ha preocupado a diferentes investigadores desde hace siglos. John Stuart Mill (1806-1873) plantea en su principal obra, Sistema de Lógica Racional e Inductiva, un método inductivo para llegar al conocimiento científico. La operación central en el sistema de Mill es la inducción (va más allá de la mera inducción enumerativa), que descansa en el principio fundamental de la uniformidad de la naturaleza. Postula que lo ocurrido una vez, ocurrirá cuando las circunstancias sean suficientemente semejantes (Mill, 1858). El autor describe para ello, los cinco *cánones de la inducción* sobre los que se basan los métodos para la investigación experimental:

1. *Canon 1. Método de Concordancia*.

Si dos o más casos de un fenómeno investigado poseen una sola circunstancia en común, esta única circunstancia, presente en todos los casos, es la causa (o el efecto) del fenómeno mencionado.

2. *Canon 2. Método de Diferencia*.

Si un caso en el que ocurre un fenómeno en investigación, y otro caso en el que no ocurre, poseen todas las circunstancias en común excepto una, que sólo se presenta en la primera situación, entonces esta circunstancia es el efecto, la causa o una parte indispensable de la causa del fenómeno mencionado.

3. *Canon 3. Método Combinado: Concordancia + Diferencia*.

Si dos o más casos en los que el fenómeno ocurre muestran una sola circunstancia en común, mientras que dos o más situaciones en las que el fenómeno no ocurre sólo comparten la ausencia de la circunstancia mencionada, entonces esa única circunstancia en que difieren los casos, es el efecto, la causa, o una parte indispensable de la causa del fenómeno estudiado.

4. *Canon 4. Método de los Residuos*.

Cuando se resta o sustrae de cualquier fenómeno la parte que por inducciones previas se sabe que es el efecto de ciertos antecedentes, el residuo del fenómeno es el efecto de los antecedentes restantes.

5. *Canon 5. Método de las Variaciones Concomitantes*.

Cuanto un fenómeno varía de alguna manera particular, es causa o efecto de otro fenómeno que varía de la misma manera, pero concomitantemente.

Mill (1858) describe en detalle cómo se puede utilizar este método en todas las ciencias y, especialmente en Psicología.

Pese a la presencia del razonamiento en los estudios psicológicos, ha sido un proceso cognitivo al que se ha prestado atención más como objeto de investigación experimental (Espino, 2004). Se suelen citar como pioneros, los trabajos de Spearman y de Hull. Spearman obtuvo el llamado *Factor g* de inteligencia, partiendo de una serie de tareas de carácter inductivo.

La investigación de Clark Leonard Hull (1884-1952) se considera el primer intento sistemático de estudiar los procesos inductivos. Pese a que es el primer antecedente en el que se aproximan los procesos de pensamiento al área de psicología experimental, fue un avance ignorado por el ámbito académico de la época. Hull utilizó una serie de caracteres chinos en los que se encontraban, repetidos, 12 radicales (*conceptos*) diferentes. La experiencia consistía en enfrentar al sujeto a los símbolos con el objetivo de que identifique los símbolos que comparten un mismo radical, denominándolos de una misma forma. La conclusión de Hull es que los sujetos, tras una serie de ensayos, abstraen los radicales (conceptos) a partir de detectar los elementos comunes en las distintas presentaciones de caracteres chinos. A partir de observaciones particulares, se identifican patrones. Según esta teoría, los conceptos (lo general) *se adquieren por abstracción de rasgos comunes* tras una serie de experiencias particulares.

Posteriormente, en los años 50, destacamos los trabajos de Jerome Bruner, Jacqueline Goodnow y George Austin. A partir de sus experiencias, estos investigadores afirman que el proceso de adquisición de conceptos *es producto de un proceso de comprobación de hipótesis que tiene estrecha relación con una forma de inducción llamada inducción enumerativa.* A partir de estos trabajos resaltamos, por un lado, la consideración de un tipo de inducción (la "inducción enumerativa") que permite al sujeto recopilar datos a partir de casos particulares para llegar a una generalización que se querrá poner a prueba. Por otro lado, estos trabajos incorporan las nociones de *hipótesis* y *estrategia*.

Piaget y sus colaboradores consideran la generalización como un proceso fundamental en la construcción del conocimiento, distinguiendo entre la *generalización inductiva* o *extensional* y la *generalización constructiva* o *completiva*. La generalización inductiva es un proceso que conduce de la constatación de hechos singulares repetidos a nociones, conceptos o leyes generales. La generalización constructiva consiste en un progresivo reemplazo de constataciones de hechos y de sus resultados, obtenidos a través de abstracciones empíricas, por reconstrucciones que implican inferencias y ponen en juego nuevas formas de organización que concluyen en un conjunto de relaciones encadenadas deductivamente. La reconstrucción exige una reflexión en un nivel superior (representativo o conceptual) al del dato empírico (García, 2000).

Desde el cognitivismo, se considera que el razonamiento inductivo es un instrumento que da sentido a la teoría de la discontinuidad como teoría del aprendizaje de conceptos. El procedimiento inductivo consiste en determinar una regla de forma activa y considerarla válida mientras funciona, y abandonarla cuando no funciona. De esta forma, la regla va tomando fuerza cuando aumenta el número de casos particulares para los que funciona. En esta interpretación se destaca la importancia del análisis de estrategias (Mayer, 1986).

Resolución de Problemas y Razonamiento

Las tareas de razonamiento deductivo, en Psicología, se han visto relacionadas con la resolución de problemas. Uno de los problemas más conocidos en esta disciplina es la tarea de las *tarjetas de Wason*. Esta tarea consiste en mostrarle a una persona una pila de tarjetas que presentan, por un lado, letras (vocales o consonantes) y por el otro, números (pares o impares). De la pila, se separan cuatro tarjetas y se las coloca sobre la mesa, de manera que se vea una sola de las caras de las tarjetas. Las cuatro tarjetas tienen en su lado visible una vocal, una consonante, un número par y un número impar. El jugador debe indicar la tarjeta (o tarjetas) que es necesario dar vuelta (para ver su lado oculto) como forma de saber si la siguiente regla es verdadera o falsa: "Si una carta tiene una vocal en un lado, entonces tiene un número par en el otro". Los resultados ponen de manifiesto que sólo el 10 % de las personas que aceptan solucionar el rompecabezas se da cuenta de cuáles son las tarjetas que hay que dar vuelta para resolver el problema (Wason, 1966, Legrenzi, 1998). Una de las razones que se utilizan para justificar estos resultados es que la mayoría de las personas no se percatan de la utilidad de la falsación frente a la verificación. En el caso de la tarea de las tarjetas es necesario plantearse qué ocurre con las caras ocultas de las tarjetas. Por lo tanto, en esta tarea, se pone de manifiesto la utilidad de la falsación como método de validación.

Otra característica de la tarea de las tarjetas es que, pese a que su utilización original fue enfocada al estudio del razonamiento deductivo (Evans, 1982), otros autores como Gilhooly (1983) incluye la experiencia con este problema dentro de la inducción. No significa esto que sean planteamientos opuestos. Por el contrario, una posible interpretación es que en la tarea de Wason implique procesos tanto deductivos como inductivos.

Dificultad Práctica en la Diferenciación Inductivo-Deductivo

Aún cuando pudieran establecerse fronteras filosóficas claras entre lo inductivo y lo deductivo, desde el punto de vista funcional bien podría suceder que las manifestaciones etiquetadas como inductiva o deductiva respondieran a procesos subyacentes análogos que lleven a la confusión (Santamaría, 1995). Duval (1999) apoya esta idea y trata de explicar la dificultad práctica de distinguir entre lo inductivo y lo deductivo desde un punto de vista que aúna lo psicológico y lo didáctico y apunta la posibilidad de que los dos tipos de razonamiento participen de procesos cognitivos comunes. En este mismo sentido y desde la investigación en Educación Matemática, Ibáñes (2001) corrobora la imposibilidad práctica de separar los esquemas de trabajo inductivos y deductivos. Este investigador muestra que, frecuentemente, se trata de diferenciar y separar claramente entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo y, tal y como algunos resultados indican, los esquemas inductivos y deductivos existen simultáneamente. Entre las tareas donde se pueden dar tanto procesos inductivos como deductivos, como hemos visto en el ejemplo de las tareas de Wason, es en la resolución de problemas, una de las actividades más importantes asociadas al pensamiento que los psicólogos estudian.

En Psicología, además de los razonamientos inductivo y deductivo, con frecuencia encontramos referencias al razonamiento analógico que, como veremos, tiene algunas características comunes con el razonamiento inductivo, lo cuál ha llevado a que algunos lo consideren como un tipo particular de razonamiento inductivo.

Razonamiento Analógico

La analogía, en términos generales, es entendida como una *actividad que permite comprender un dominio de conocimiento parcial o totalmente desconocido, en función de un dominio conocido o familiar* (Espino, 2004, p. 147).

El razonamiento analógico tiene como finalidad la obtención de una conclusión a partir de premisas en las que se establece una comparación o analogía entre elementos o conjuntos de elementos distintos. Esto hace que los razonamientos analógicos sean *altamente probables cuando van de la causa al efecto o del efecto a la causa. También son altamente probables cuando la propiedad de la premisa no es causa ni efecto de la propiedad de la conclusión, pero ambos son efectos de la misma causa* (Copi, 1953, p. 408).

La analogía ha tenido un papel importante en matemáticas (Pask, 2003) y en la resolución de problemas (Novick y Basokk, 2005). En un problema en el que se ponga de manifiesto el razonamiento analógico, se trata de resolver el análogo-objetivo mediante nuestro conocimiento del análogo-base. Sierra (1995) distingue cuatro fases en una tarea de razonamiento analógico desde el punto de vista psicológico:

1. Fase correspondiente al formato representacional en el que se expresan ambos análogos.
2. Fase correspondiente a los procesos implicados en la búsqueda y recuperación del análogo-base.
3. Fase implicada en los procesos de transferencia o proyección del análogo-base sobre el análogo-objetivo.
4. Fase de aprendizaje a partir de la resolución del análogo.

Holyoak (2005) recoge los principales elementos del razonamiento analógico en la Figura 2 - 1.

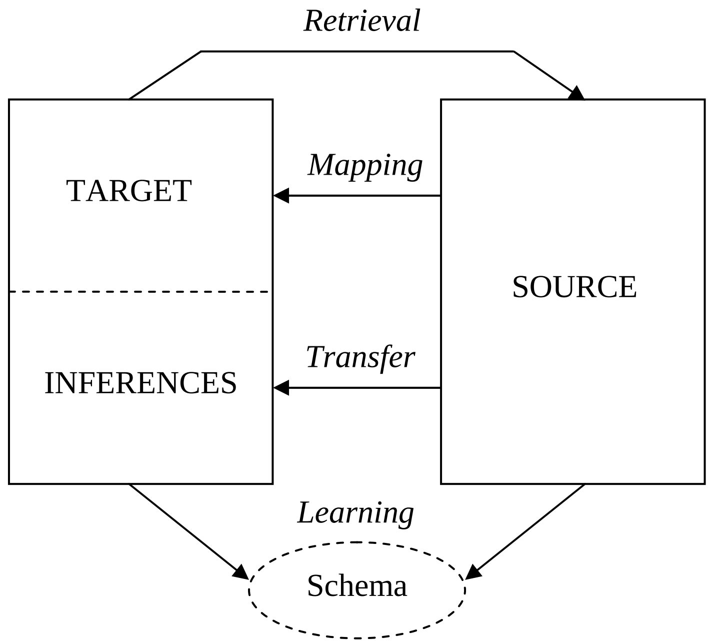


Figura 2 - 1. Principales componentes del razonamiento analógico (Holyoak, 2005, p. 118).

Generalmente, una situación objetivo (*target*) sirve para dar pie a la utilización de una herramienta de analogía útil (*source*). Es entonces necesario establecer un mapa o un conjunto de correspondencias sistemáticas (*mapping*) entre las dos partes de la analogía, que sirve para organizar los elementos de la situación objetivo y de la herramienta.

Este proceso de establecimiento de conexiones se basa en la formación de alineaciones de elementos por pares, uno de cada una de las dos situaciones (*target* y *source*) (Gick y Holyoak, 1980; Markman y Gentner, 2000).

Del proceso de realización de correspondencias sistemáticas pueden derivarse nuevas inferencias sobre la situación objetivo, elaborándose sus representaciones. Como consecuencia de un proceso de razonamiento analógico sobre un par de casos, es posible que se lleven a cabo generalizaciones, consiguiendo un esquema para una clase de situaciones, de las que la herramienta y la situación objetivo son casos particulares. El establecimiento de estas generalizaciones es el principal punto en común que comparte el razonamiento analógico con el razonamiento inductivo.

Tanto al hablar de razonamiento analógico como de los razonamientos inductivo y deductivo, han aparecido vinculaciones con la resolución de problemas. Las personas ponen en juego diferentes tipos de razonamientos cuando se enfrentan a la resolución de problemas como tarea.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Inicialmente la Psicología considera la resolución de problemas en relación con el razonamiento deductivo. Más adelante, la resolución de problemas cobra importancia como contexto para el estudio del razonamiento inductivo. Esto se debe a dos razones. Por un lado, se considera la dificultad práctica de distinguir entre ambos tipos de razonamiento y, por otro lado, se utilizan tareas cada vez menos rutinarias, en el avance del conocimiento sobre los procesos inductivos.

Desde que la resolución de problemas se constituyera como un campo de investigación para los psicólogos, se identifican varios enfoques teóricos utilizados en diferentes investigaciones y que han dado lugar a resultados relevantes. Una de esas teorías es la Teoría del Procesamiento de la Información, en la que existe una preocupación por la representación del problema y por la búsqueda de soluciones.

Representación del Problema

La importancia de las representaciones en la resolución de problemas ha sido recogida desde diferentes enfoques psicológicos. En la resolución de problemas, se suelen identificar dos fases generales: la representación del problema y la solución del mismo (Mayer, 1985; Newell y Simon, 1972). Esto refleja la importancia de la representación en la resolución de problemas. En ocasiones, el trabajo primordial en un problema se centra en encontrar la mejor representación para el mismo (Novick y Basokk, 2005).

Desde el enfoque del procesamiento de la información, la resolución de un problema se ve determinada tanto por la representación empleada, como por la calidad y la forma de representación elegida (Lester, 1977; Newell y Simon, 1972; Silver, 1987). Desde otros enfoques de la psicología cognitiva, Mayer (1986) y Bruner (1998) reconocen la importancia de las representaciones y el papel que juegan en la resolución de problemas.

En actividades de razonamiento y resolución de problemas es donde se observa con mayor claridad la interdependencia entre representaciones y procesos cognitivos, más aún cuando se requiere de las representaciones externas (Carretero y García, 1984).

Búsqueda de Solución. Estrategias y Heurística

La búsqueda de soluciones a un problema, desde el enfoque del procesamiento de la información, necesita de un procedimiento al que llaman *estrategias generales*. Una estrategia general muy importante es la búsqueda de los *operadores*. Lindsay y Norman (1972) distinguen dos tipos de operadores en resolución de problemas: algoritmos y heurísticos. En esta investigación, nos centramos en los heurísticos, que hacen referencia a procedimientos de tanteo en la búsqueda de soluciones cuando no se conocen reglas para la resolución de un problema, en el proceso que guía del estado inicial al estado final del problema.

Desde el punto de vista de la educación, la heurística busca comprender el método que conduce a la solución de problemas de cualquier tipo, su intención es estudiar los métodos y las reglas del descubrimiento y la invención (Pólya, 1945). Puig (1996) señala que cualquier descripción de la resolución de problemas desde la heurística, debe tener en cuenta los trabajos de Pólya hasta los años sesenta y los de Schoenfeld en los años ochenta.

En los trabajos de Pólya, destaca su preocupación por la enseñanza de la resolución de problemas y se plantea la identificación de fases que siguen las personas en la resolución de problemas. Otras investigaciones posteriores como las de Carrillo (1998), Cruz y Carrillo (2004), Fernández (1997), o Long y De Temple (2002) se han dirigido en ese sentido.

Schoenfeld, aunque con unos intereses relacionados con la resolución de problemas, está más vinculado a la investigación. Schoenfeld (1985) se refiere a los procedimientos que Pólya llama heurísticas como *estrategias heurísticas* y llega a considerar además una cantidad de subestrategias dentro de ellas, que son diferentes entre sí. Este autor fijó su principal objetivo en el significado de "pensar matemáticamente" y en cómo se puede ayudar a los estudiantes a hacerlo. Con esta intención, introduce cuatro categorías para el análisis del conocimiento y del comportamiento de una persona cuando se encuentra ante una situación matemática (recursos, heurísticos, control y sistemas de creencia). En esta categorización, Schoenfeld (1985, p. 44) considera que los heurísticos *son estrategias para progresar en problemas difíciles o que no son familiares*.

Inducción como Heurístico

Para Pólya (1966), la inducción es una heurístico que trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación y su principal finalidad es el descubrimiento. Según este autor, los procedimientos que utiliza la inducción son la analogía, la generalización y la particularización.

<u>Analogía</u>

Dos situaciones se dice que son análogas si comparten un patrón común de relaciones entre sus elementos constituyentes incluso si los elementos mismos difieren en ambas situaciones (Holyoak, 2005). En el caso particular de la resolución de problemas, se puede utilizar la analogía para resolver un problema porque comparta puntos comunes con la resolución de otro problema, la cual es conocida por el resolutor.

Generalización

Pólya (1945) toma la generalización como una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad. Ilustra esta idea con el siguiente ejemplo sobre el descubrimiento de una propiedad en la que se trata de mostrar la suma de los siguientes números naturales elevados al cubo y a qué es igual:

$$1^3+ 2^3+ 3^3+4^3 = 10^2$$

La pregunta inmediata es: ¿sucede en otras ocasiones que la suma de números naturales consecutivos elevados al cubo sea el cuadrado de un número? O sea ¿será cierto que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 +\ldots.+ n^3$ es un número natural elevado al cuadrado? ¿Cuál es dicho número?

Vemos con otros casos particulares sencillos, los casos $n = 2$ y $n = 3$:

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

La propiedad, se observa, se cumple para estos dos valores también. Además parece que en el segundo miembro de la igualdad va a aparecer la suma de las bases que aparecen elevadas al cubo en el primer miembro de la igualdad, elevada al cuadrado.

Luego hay ya muchas posibilidades de que sea cierta la siguiente igualdad, que constituye la generalización para las expresiones anteriores:

$$1^3+ 2^3+ 3^3+ 4^3+ 5^3\ldots\ n^3 = (1+ 2+ 3+ 4+ 5\ldots\ n)^2$$

Krutestskii (1976) habla de la habilidad para generalizar un contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

El trabajo con lo particular es un paso fundamental en la generalización. El tipo de trabajo con los casos particulares que se realice puede ayudar a caracterizar la generalización (Cañadas, 2002). Una situación particular es la generalización, que parte de un único ejemplo en el que, con la indicación que corresponda e ignorando algunas características no relevantes, sirve de *ejemplo genérico* donde se puede leer lo general. Esto se aproxima más al modo en que actúan los matemáticos en el sentido de que se está considerando un ejemplo específico como representante de su clase (Marrades y Gutiérrez, 2000; Mason y Pimm, 1984).

El proceso de generalización en las matemáticas escolares ha sido analizado por Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985), quienes identifican los siguientes pasos que conforman el ciclo de generalización: (a) percibir la generalidad, (b) expresar la generalidad, (c) elucidar una regla general, verbal o numérica para generar una secuencia, (d) expresar simbólicamente la generalidad, y (e) manipular la generalidad.

<u>Particularización</u>

Se trata del paso de una clase total a un objeto contenido en la misma. Es el caso de pasar de la consideración de una serie determinada a una serie menor contenida en la anterior. Un ejemplo que propone Pólya (1966) de particularización es dar una propiedad de los números pares y comprobar dicha propiedad con algunos pares.

La Heurística y el Contenido del Problema

El contenido del problema ha sido considerado en ocasiones como elemento diferenciador entre términos relacionados con la heurística. Así, Puig (1996, p. 38) recoge que *lo que es propio de la heurística es el estudio de los modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución*. Se deja de lado el contenido para que su presencia no oculte otros elementos. Sin embargo, una descripción de los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas, debe contener todos los elementos. Por tanto, Puig recoge la idea de heurística de Pólya al definir la *herramienta heurística* como *un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro. Cualquier herramienta heurística transforma el problema original en otro u otros* (Puig, 1996, pp. 46-47 y 50).

El contenido es, por tanto, un factor a tener en cuenta en la heurística ya que la estrategia depende del dominio específico de conocimiento (Newell y Simon, 1972). Según recoge De Guzmán (1999, p. 237), *no se puede pensar que el conocimiento de estrategias generales de pensamiento, por sofisticado que sea,* *puede suplir al conocimiento puntual del campo concreto* (De Guzmán, 1999, p. 237). Más concretamente, Rico (1997a, p. 31) hace referencia al contenido matemático al afirmar que *las estrategias son formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados*.

Una vez que se llega a la solución del problema, por medio de la heurística que se haya considerado oportuna, se debe validar la solución que se propone, lo cual constituye el último paso del proceso de resolución (Pólya, 1945).

Validación de la Solución. Razonamiento Demostrativo y Razonamiento Plausible

Pólya (1966) considera dos tipos de razonamientos asociados al trabajo matemático en general y a la resolución de problemas, en particular: el *razonamiento demostrativo* y el *razonamiento plausible*. El primero asegura el conocimiento matemático y el segundo permite apoyar las conjeturas que se formulan. El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, está más allá de toda controversia y tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica, que es la teoría del razonamiento demostrativo. El razonamiento plausible es azaroso, discutible, provisional y es la única clase de razonamiento que se utiliza en la vida cotidiana. Ambos tipos de razonamiento se complementan el uno al otro y mientras que aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible (Pólya, 1966).

En la comparación de las diferentes concepciones relacionadas con la inducción, se encuentra una fuerte vinculación entre el razonamiento plausible y el razonamiento inductivo, y entre el razonamiento demostrativo y el razonamiento deductivo. Las dos formas alternativas de argumentación que aparecen implícitamente son la deducción y la inducción (Bakker y Clark, 1998). Pero esta visión de la inducción como modo de argumentación no es la que se sigue desde la disciplina matemática, donde el significado de la inducción tiene unas connotaciones diferentes al presentado en este epígrafe.

LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Desde la Matemática, la inducción se relaciona con el *Principio de Inducción Matemática*. La *inducción matemática* o *inducción completa* es considerada como una forma de demostrar propiedades matemáticas y, por lo tanto, sólo se utiliza en la ciencia Matemática (Pólya, 1945). Según dicho autor, la coincidencia en el nombre se debe a que, a menudo, se llega a propiedades matemáticas por un proceso de inducción y, posteriormente, se demuestran por el método de inducción completa. Esta puede ser la causa de que en los problemas matemáticos se encuentren ambos procedimientos ligados a una misma tarea, la inducción previa a la generalización y la inducción matemática para probar la veracidad de la misma. *La inducción matemática es un procedimiento útil, a menudo, para verificar conjeturas matemáticas, a las que hemos llegado por algún procedimiento inductivo* (Pólya, 1966, p. 159). Se situaría así la inducción matemática como el último grado o la fase final de una investigación inductiva. Esta última fase, en la que predomina el razonamiento deductivo con frecuencia, utiliza sugerencias que habían aparecido en fases precedentes.

El principio de la inducción completa o inducción matemática fue descubierto por Pascal (Piaget y Beth, 1980). Este principio se apoya en el principio de razonamiento por recurrencia. *Se trata de un modo de inferencia que afecta a todos los individuos de una clase, C – donde C puede ser la serie de números naturales –. El primer paso de la inferencia constituye el paso O, y en él se afirma que O tiene la propiedad P. Dado un número natural cualquiera, la inferencia permite afirmar que el sucesor de N tiene la propiedad P. Puesto que todo número natural tiene un sucesor, se concluye que todo número natural tiene la propiedad P* (Ferrater, 1988, p. 1677).

Desde el punto de vista matemático, la demostración por inducción matemática se basa en dos lemas y se presenta de la siguiente forma: sea una proposición P(n) en donde *n* indica que la proposición toma valores para un número infinito de casos, todos ellos ordenados. El primer lema indica que la proposición es verdad para el primero de dichos casos. Si n hace referencia al conjunto de los números naturales, el primer caso es cuando $n = 1$. Este lema tiene una comprobación fácil. El segundo lema afirma que si la proposición es verdad para un elemento cualquiera de dichos casos, ha de ser verdad para el valor siguiente. En la situación de los números naturales que estamos considerando, si suponemos que la proposición es cierta para n, entonces, ha de ser cierta para $n + 1$. Este lema requiere apoyarse en propiedades matemáticas que lleven a su comprobación. A veces hay que realizar un razonamiento deductivo basado en propiedades que no son evidentes. Pólya considera que el razonamiento en la demostración por inducción matemática puede ser simplificado. Es suficiente saber dos cosas sobre la conjetura:

1. Es cierta para $n = 1$.
2. Siendo cierta para n, lo es igualmente para $n + 1$

(Pólya, 1966, p. 156).

La inducción matemática se considera una forma muy potente cuando se trata de demostrar propiedades en las que interviene el conjunto de los números naturales u otro conjunto de características similares. Esto se debe a que permite conocer el comportamiento de los infinitos elementos de dicho conjunto utilizando un "aparato" poco sofisticado en cuanto a los elementos implicados, si bien es cierto que se deben tener en cuenta dos observaciones. La primera es que la comprobación del segundo lema puede resultar altamente dificultosa. La segunda es que se deben cumplir una serie de condiciones para que una propiedad matemática se pueda demostrar por inducción completa:

1. La propiedad a demostrar se ha de conocer de antemano de una forma precisa.
2. La propiedad debe depender de los números naturales.
3. Debe estar explicitada de tal manera que permita verificar que permanece cierta cuando se pasa de un número natural n al siguiente $n + 1$.

Pero en matemáticas, no todo lo relacionado con la inducción está relacionado con el razonamiento deductivo. Lo que ocurre es que debemos diferenciar entre inducción (matemática) y razonamiento inductivo en la disciplina matemática y, como mostraremos a continuación, el panorama es acorde con las consideraciones hechas en otras disciplinas.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN MATEMÁTICAS

Hacia la mitad del siglo XIX, la Lógica y la Matemática se consideran ciencias auxiliares en el avance del conocimiento mediante la formulación de conjeturas y la justificación de las mismas. Prestamos atención a dos aspectos que han sido resaltados en el razonamiento inductivo desde diferentes disciplinas y en diferentes épocas. Por un lado, el papel del razonamiento inductivo en la adquisición de conocimiento, en particular del conocimiento matemático. Por otro lado, la función del razonamiento inductivo en la validación del conocimiento matemático.

El Razonamiento Inductivo en la Adquisición de Conocimiento Matemático

Uno de los hallazgos culturales decisivos del S. XIX fue el descubrimiento de que la matemática no es una ciencia natural, sino una creación intelectual del hombre (Boyer, 1999, p. 741). A finales del siglo XIX se reconocía la matemática como una forma de pensamiento axiomático. Russell identifica la matemática con la lógica y sigue tendencias formalizadoras iniciadas por Boole, Dedekind y Peano. Russell (1973) considera que toda la matemática se deduce de la lógica simbólica. Los logicistas, encabezados por Bertrand Russell, siendo seguidores de Frege y opositores de Peirce, identifican la matemática con la lógica. Sin embargo, estas tendencias no eran compartidas por otros matemáticos como Silvester o Poincaré, quienes se inclinaron más hacia una concepción intuicionista de la matemática, considerando *como el objetivo de la matemática pura el "desvelamiento de las leyes de la inteligencia humana"* (Boyer, 1999, p. 742). Poincaré distingue dos fases en el proceso de invención matemática y, entre ambas, existe una fase intermedia inconsciente (Piaget y Beth, 1980). Un análisis profundo de la naturaleza del razonamiento matemático muestra que es fecundo gracias al razonamiento inductivo (Poincaré, 1902). La inducción es el término rescatado por Poincaré al responder a la pregunta de la verdadera naturaleza del razonamiento matemático. Poincaré defiende que el interés de lo deductivo radica precisamente en que participa de la naturaleza del razonamiento inductivo y que por eso es fecundo. La generalización es la intención de las matemáticas y se presenta en éstas como generadora de este conocimiento (Lakatos, 1978)

Los matemáticos seguidores de Poincaré identifican la importancia de la intuición y defienden al razonamiento inductivo en matemáticas (Smith, 2002). Uno de ellos es Hadamard, quien distingue cuatro fases en la *invención* de la matemática: (a) preparación, (b) incubación, (c) iluminación y (d) verificación o comprobación (Piaget y Beth, 1980).

Para Peirce, la inducción es una de las tres modalidades de razonamiento que se emplean en la ciencia, junto con la abducción y la deducción. En concreto, la inducción desempeña un papel fundamental en el método científico (Peirce, 1918).

Desde mediados del siglo XX, *se ha ido imponiendo la sensación... de que lo que hay que hacer es avanzar en el desarrollo de la matemática* (Boyer, 1999, p. 757), sin que exista preocupación por la concepción a la que se es fiel desde la perspectiva matemática.

En la actualidad, la Matemática combina lo inductivo y lo deductivo. *Las matemáticas y la ciencia están, de modo importante, inspiradas por los hechos, por las generalizaciones fácticas y luego por este imaginativo análisis deductivo* (Lakatos, 1978, p. 137). En matemáticas, los logros recaen en la evidencia deductiva, aunque la práctica matemática se basa directamente en la evidencia inductiva (Brown, 1999). El razonamiento inductivo ocupa un lugar destacado dentro de la Matemática, donde la actitud inductiva es fundamental para la construcción del conocimiento.

El trabajo con casos particulares, la búsqueda de patrón, la generalización y la justificación de conjeturas son algunas de las tareas que Pólya (1945) considera asociadas al razonamiento inductivo y que permiten cumplir uno de los principales compromisos de las matemáticas: el descubrimiento.

El Razonamiento Inductivo en los Procesos de Validación

La inseguridad acerca de la validez de las conclusiones obtenidas mediante procesos inductivos ha hecho que el razonamiento deductivo se haya considerado la forma de razonamiento matemático preferente, lo cual no deja de ser una simplificación (Rico, 1997b). En este epígrafe ponemos de manifiesto que el razonamiento inductivo juega un papel importante, y complementario al razonamiento deductivo dentro de los procesos de validación. Este papel se pone de relevancia en la aparición de este tipo de razonamiento como característica de los procesos de validación previos a la demostración o incluso como componente de la primera parte de la inducción matemática, como demostración, tal y como señala Pólya (1966). La función de justificación de las conjeturas formuladas es atribuida al razonamiento inductivo, aunque sobre él no recae la justificación de las generalizaciones, en la que el rigor es fundamental.

Los cambios en el criterio de rigor de la prueba han propiciado grandes revoluciones en matemáticas. Las formas que se han considerado adecuadas para validar las conjeturas han sido de diferente naturaleza a lo largo de la historia. Un ejemplo de ello son las pruebas geométricas. Los pitagóricos sostenían que las pruebas rigurosas debían ser aritméticas. Cuando descubrieron una prueba rigurosa de que $\sqrt{2}$ era irracional, se cambió el criterio, ocupando su lugar la prueba geométrica. En el siglo XVIII, algunas figuras que llevaron a confusión, contribuyeron a la mala reputación de las pruebas geométricas y en el siglo XIX se volvió a cambiar el criterio de rigor (Poincaré, 1905, citado por Lakatos, 1976).

El tipo de razonamiento empleado es un criterio de rigor que utilizan los investigadores en Didáctica de la Matemática, quienes asignan diferentes funciones a los procesos de validación. Los distintos niveles que establecen diversos investigadores (Balacheff, 2000; Blum y Kirsch, 1991; Gutiérrez, 2001; Jaffe y Quinn, 1993; Martínez, 2000; Movshovitz-Hadar, 1996; Simpson, 1995; Van Asch, 1993; Van Dormolen, 1977), atienden al tipo de razonamiento empleado. En la Tabla 2 - 1 presentamos estos trabajos junto con la terminología que utilizan asociada a los procesos de validación.

Tabla 2 - 1. Expresiones relacionadas con los procesos de validación

	DOS NIVELES				TRES NIVELES			
- RIGOR +	Argument. Heurística	Prueba Informal	Argument Informal	Prueba Empírica	Nivel 0	Prueba	Prueba con dibujos o ejemplos	Explicación
					Nivel 1	Prueba Pre-formal	Prueba Pre-formal	Prueba
	Prueba Rigurosa	Prueba Formal	Argument Matemática	Prueba Deductiva	Nivel 2	Dem. Formal	Dem. Formal	Dem.
AUTORES	Jaffe y Quinn (1993)	Movshovitz -Hadar (1996)	Martínez (2000)	Gutiérrez (2001)	Van Dormolen (1977)	Blum y Kirsch (1991)	Van Asch (1993)	Balacheff (2000)

En general, se puede concluir que cuanto más razonamiento deductivo existe en un proceso de validación, mayor es el rigor atribuido a la validación y, cuanto más razonamiento inductivo requiere, menor rigor matemático aporta la validación (Cañadas, Castro y Gómez, 2002).

En este contexto, los procesos de validación, en los que predomina el razonamiento inductivo y que son considerados menos rigurosos, están ligados al trabajo con ejemplos y casos particulares.

Según lo recogido en este epígrafe, el razonamiento inductivo puede atender a la verificación de conjeturas mediante la comprobación de nuevos casos particulares como a la falsación de las mismas mediante contraejemplos que permitan rechazar una conjetura determinada.

CONSIDERACIONES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En los epígrafes anteriores hemos encontrado diferentes aspectos relacionados con el razonamiento en general y con el razonamiento inductivo en particular. También se ha puesto de manifiesto que el razonamiento inductivo y la resolución de problemas están fuertemente relacionados y se consideran elementos fundamentales en el avance del conocimiento y, en concreto, del conocimiento matemático. Por ello, en este apartado aparecerán elementos relacionados tanto con el razonamiento inductivo como con la resolución de problemas, que constituyen dos elementos clave de esta investigación.

Razonamiento

Desde la Psicología, el razonamiento está ligado al pensamiento humano, el razonamiento es estudiado en la rama de la Psicología que estudia el pensamiento (Santamaría, 1995). El razonamiento, a partir de los trabajos sobre la Teoría del Procesamiento de la Información, se considera un proceso que conlleva la realización de inferencias explícitas: de una o varias proposiciones se infiere otra. Dichos procesos, a su vez, están intrínsecamente ligados al lenguaje. Por otra parte, dichos procesos son inherentes a un acto de exploración, que se efectúa con objeto de adaptar una situación nueva, se trata de problemas para cuya solución es suficiente una manipulación, bien de objetos o de instrumentos (Duval, 1999).

Duval (1999) apunta hacia una falta de reflexión teórica sobre la pregunta ¿qué es el razonamiento? en los estudios psicológicos y didácticos que tratan del propio razonamiento. Critica, que se supone por lo general, que la lógica y la práctica de las matemáticas proporcionarán respuestas evidentes a dicha pregunta. Reconocemos la importancia y la necesidad de esta cuestión que apunta Duval, pero no vamos a entrar en dicha reflexión teórica porque consideramos que queda fuera de los límites de este trabajo.

Desde la Educación Matemática, Balacheff considera que el razonamiento es *una actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información* (Balacheff, 2000, p. 13). Rico destaca el aspecto conceptual que forma parte del razonamiento en esta disciplina y define el razonamiento como

> *la capacidad para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto y se expresa mediante una secuencia argumental. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una*

> *nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas* (Rico, 1997, p. 33).

En esta investigación consideramos el razonamiento como un proceso cognitivo mediante el que se encadenan o manipulan ideas o conceptos que llevan a una conclusión.

Tipos de Razonamiento

Recogemos diferentes tipos de razonamiento que se han trabajado en investigaciones vinculadas a la Educación Matemática. Como se detallará, en ocasiones se trata de tipos de razonamiento ya mencionados a los que se les asocia una terminología diferente, con ciertas connotaciones específicas. Comenzamos por la distinción clásica entre razonamiento inductivo y deductivo y continuamos por otros tipos de razonamiento que han surgido posteriormente.

<u>Razonamiento inductivo y razonamiento deductivo</u>

La distinción entre lo inductivo y lo deductivo se viene haciendo desde la filosofía clásica. Para esta distinción, se han considerado diferentes criterios. El más conocido de ellos es el modo de trabajo, herencia de la filosofía. Mientras que lo inductivo va de lo particular a lo general, lo deductivo opera a la inversa.

Otro criterio para distinguir entre estos dos tipos de razonamiento es atender al tipo de conclusión que se alcanza. Si en la conclusión queda incluida la información que viene dada, la inferencia será deductiva y la conclusión tendrá valor de verdad. Un razonamiento deductivo es válido sólo si es imposible que su conclusión sea falsa mientras que sus premisas sean verdaderas. Por el contrario, si la conclusión va más allá de lo dado, la inferencia es inductiva. El razonamiento inductivo tiene un carácter aumentativo en el sentido de que la conclusión contiene más información que las premisas de las que se parte (Bisanz, Bisanz y Korpan, 1994; Díez y Moulines, 1997). Un razonamiento inductivo es fuerte sólo si es improbable que su conclusión sea falsa cuando sus premisas sean verdaderas. El razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le prestan las premisas para alcanzar la conclusión.

Aunque sea frecuente la separación entre lo inductivo y lo deductivo, existen dudas respecto a una separación drástica de estos dos tipos de razonamiento, como ponen de manifiesto Pedemonte (2001) y Simon (1996) desde la Educación Matemática. Estos trabajos advierten de la imposibilidad de hacer una clara distinción entre los razonamientos inductivo y deductivo debido a que los límites entre lo deductivo y lo inductivo no están claramente definidos. Por esta razón, dichos autores han visto necesaria la diferenciación entre tres tipos de razonamiento porque, aunque en la literatura de investigación se observa una continua referencia a los razonamientos deductivo e inductivo y se distinguen teóricamente, en el trabajo con los alumnos, no es tan evidente (Ibañes, 2001, Marrades y Gutiérrez, 2000). El tercer tipo de razonamiento que incluyen Pedemonte y Simon son el razonamiento abductivo (que ya fue considerado por Peirce anteriormente) y el *razonamiento transformacional*, respectivamente. Se trata de razonamientos intermedios entre el inductivo y el deductivo que se han tratado desde la Educación Matemática y que describimos a continuación.

<u>Razonamiento abductivo</u>

Diversos autores retoman el razonamiento abductivo sugerido por Peirce en relación con la Educación Matemática. El razonamiento abductivo se relaciona con la construcción del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas (Burton, 1984; Cifarelli, 1997; Mason, 1995). Sin embargo, tanto Mason como Anderson (1995) están de acuerdo en lo transitorio y poco estable de este tipo de razonamiento, su dificultad para promoverlo en los estudiantes y la imposibilidad de enseñarlo.

La caracterización más general de la abducción como inferencia que conduce hacia la mejor explicación ha sido una interpretación posterior a la que se extrae directamente del trabajo de Peirce. Dentro de esta interpretación, Pedemonte (2001) llega a considerar la abducción como un proceso natural que surge en los alumnos durante la formulación de conjeturas y que es necesaria y previa a la demostración formal en la que prevalece la argumentación deductiva.

<u>Razonamiento transformacional</u>

Simon (1996) añade el *razonamiento transformacional* a la distinción tradicional entre razonamiento inductivo y deductivo. Este autor entiende por razonamiento transformacional *las promulgaciones mentales o físicas de una operación o* *conjunto de operaciones sobre un objeto o conjunto de objetos. Estas operaciones le permiten a uno prever las transformaciones que esos objetos sufren y el conjunto de resultados de esas operaciones* (p. 201). Simon considera central en el razonamiento transformacional la habilidad de considerar el razonamiento como un proceso dinámico por el que se genera un estado nuevo por medio de estados continuos.

Este autor presenta las siguientes características para el razonamiento transformacional:

1. *Como ocurre con otros tipos de razonamiento, los casos de razonamiento transformacional pueden abarcar desde los relativamente triviales hasta los extremadamente potentes.*
2. *El razonamiento transformacional no involucra sólo la habilidad de producir promulgaciones físicas o mentales particulares, sino también el ver si ese proceso se adecua a una situación matemática particular.*
3. *El razonamiento transformacional no sólo produce un camino diferente de pensar en situaciones matemáticas, también involucra un conjunto diferente de preguntas*

   (Simon, 1996, pp. 202 - 203).

Harel y Sowder (1998) destacan que, aunque las operaciones entre los objetos que se llevan a cabo mediante razonamiento transformacional se realizan dejando fijas ciertas relaciones del objeto, el sujeto es capaz de anticiparse a posibles cambios y además conoce las operaciones que se pueden aplicar para compensar esos cambios.

En otras ocasiones, desde la Ecuación Matemática se hace una reformulación de los tipos de razonamiento ya existentes, a los que se les asocian nuevas connotaciones, como exponemos en el siguiente epígrafe.

Razonamiento plausible y razonamiento basado en experiencias previas

Partiendo de la distinción que hace Pólya (1966) entre razonamiento estricto y razonamiento plausible, Lithner (2000) distingue entre razonamiento plausible y razonamiento basado en experiencias previas. Considera razonamiento plausible a toda argumentación que verifique las dos condiciones siguientes:

1. Se basa en propiedades matemáticas de los elementos que aparecen en el razonamiento.
2. Pretende guiar hacia lo que probablemente es verdad, sin que necesariamente se haya terminado o sea cierto.

La demostración queda incluida como caso particular de razonamiento plausible y requiere un grado de certeza en la segunda condición (Lithner, 2000, p. 166).

Por otro lado, Lithner define el razonamiento basado en experiencias previas como la argumentación que verifica las dos condiciones siguientes:

- Se basa en nociones y procedimientos de experiencias individuales previas
- Pretende dirigirse hacia lo que probablemente es verdad, sin que necesariamente sea completa o correcta dicha verdad.

No se trata de aprender algo de memoria, sino de relacionar la elección de una estrategia y su implementación a algo familiar (Lithner, 2000, p. 167).

Relaciones entre los Tipos de Razonamiento Identificados

Los trabajos sobre los tipos de razonamiento consultados dejan constancia de los esfuerzos de diferentes autores por indagar sobre diversos tipos de razonamiento, partiendo de la clasificación general entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. Sin embargo, las delimitaciones de cada tipo de razonamiento no están claramente establecidas, no son exhaustivas y, por tanto, no siempre es fácil discriminar o separar claramente razonamiento inductivo y razonamiento deductivo (Stenning y Monaghan, 2005).

En general, los tipos de razonamiento identificados a lo largo de este capítulo se pueden considerar dentro del razonamiento inductivo o del razonamiento deductivo, excepto el razonamiento transformacional y el razonamiento abductivo, que son diferentes y complementarios a los anteriores.

Una forma de clasificar los razonamientos es atendiendo al contexto en el que se ponen de manifiesto. Los razonamientos inductivo y deductivo se pueden llevar a cabo fuera del contexto científico, en la Ciencia y, más específicamente, en Matemáticas. Pierce considera la abducción como un tercer tipo de razonamiento en la ciencia y algunos investigadores en Educación Matemática han considerado el razonamiento transformacional en matemáticas, un razonamiento diferente y complementario a los razonamientos inductivo y deductivo (Harel y Sowder, 1998; Simon, 1996).

Los demás tipos de razonamientos a los que hemos hecho referencia en los epígrafes anteriores de este capitulo se pueden ubicar dentro de los razonamientos inductivo o deductivo, con ciertas características que los identifican. Por ejemplo, el razonamiento demostrativo es un tipo de razonamiento deductivo que se utiliza en matemáticas y que queda caracterizado por el rigor y el formalismo propio de la matemática formal. Mientras que el razonamiento analógico se puede considerar un tipo de razonamiento inductivo que se utiliza en cualquier situación, propia de la ciencia o no.

Pese a la variedad de razonamientos y a la dificultad práctica de diferenciar entre ellos, se ha puesto de manifiesto una tendencia generalizada a establecer la diferencia entre lo inductivo y lo deductivo. En esta investigación nos hemos centrado en el razonamiento inductivo.

Una hipótesis inductiva suele obtenerse a partir de un gran número de situaciones que apoyan la plausibilidad de la formulación de la conjetura para el caso general.

Sin perder de vista las posibles interferencias que se puedan producir entre diferentes tipos de razonamiento, centramos nuestra atención en el razonamiento inductivo como proceso que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información que la que aportan los casos particulares con los que se inicia dicho proceso, en el sentido en el que Pólya (1945) habla de inducción.

Razonamiento Inductivo

Para ubicar el razonamiento inductivo en nuestra disciplina, recurrimos a algunos aspectos presentados en epígrafes anteriores de este capítulo. En la Figura 2 - 2 recogemos los dos tipos generales de razonamiento que se suelen distinguir y las disciplinas en las que se consideran, según lo mostrado en este capítulo.

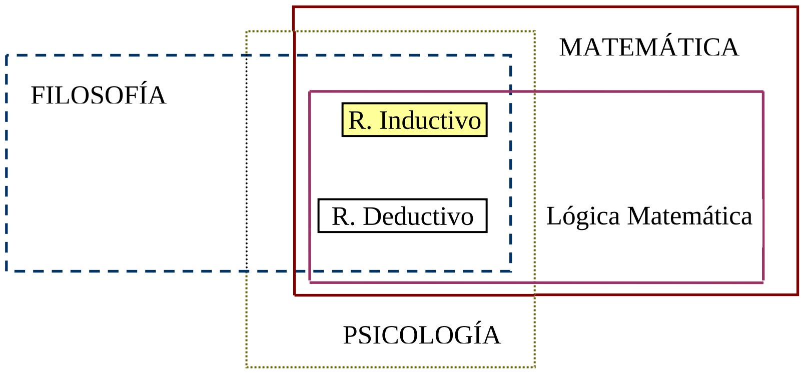


Figura 2 - 2. Razonamiento inductivo en diversas disciplinas

La importancia que se ha dado al razonamiento inductivo (o inducción) en la adquisición del conocimiento ha variado según las épocas y las disciplinas en las que se considere. Esta importancia ha dependido de la dudosa validez que se le atribuye, el problema de la inducción ha ido asociado a este tipo de razonamiento y en ocasiones, ha llevado a rechazarlo. Esto es puesto de manifiesto por Bisanz, Bisanz y Korpan (1994), de quienes tomamos tres características del razonamiento inductivo, que resumen las ideas fundamentales que se consideran asociadas al mismo:

- Da lugar a una red de conocimiento que va aumentando según se producen procesos inductivos.
- Es arriesgado, ya que puede ser, o no, verdad incluso cuando las premisas sean verdad.
- Debe ser contrastado para que produzca conclusiones válidas.

El razonamiento inductivo se considera un elemento clave en la construcción de conocimiento. Es significativa la afirmación de Klein al señalar que, en cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración (citado por Perero, 1994). Este sentido intuitivo necesario para avanzar en el conocimiento matemático es el que Pólya (1966) defiende en su trabajo al hablar de la importancia de una actitud inductiva. La inducción en el sentido que señala este autor, la consideramos equivalente al razonamiento inductivo ya que expresa el proceso cognitivo que comienza con el trabajo de casos particulares y, pasando por la formulación de conjeturas, llega a la comprobación de éstas. Siguiendo el trabajo de Pólya, en nuestra investigación, consideramos equivalentes el razonamiento inductivo y la inducción. La inducción matemática hará referencia a la demostración, de carácter deductivo, que permite validar por completo las proposiciones en las que se aplica. El razonamiento inductivo únicamente permite la comprobación de conjeturas para ciertos casos particulares.

Según la definición de inducción heredada de la Filosofía, consideramos que mediante el razonamiento inductivo se realiza una inferencia ampliativa debido a que la conclusión tiene información nueva con respecto a las premisas, se produce un paso de lo particular a lo general.

Aceptamos que el razonamiento inductivo es un proceso que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información que la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso.

En el enfoque teórico presentado, hemos mostrado la resolución de problemas en relación con diversos tipos de razonamiento, en particular con el razonamiento inductivo. El motivo que nos ha movido a ello ha sido que, para nuestra investigación, consideramos la resolución de problemas una tarea apropiada sobre la que investigar el proceso de razonamiento inductivo.

Resolución de Problemas

La importancia dada a la resolución de problemas en Psicología y en Matemáticas trasciende a la Educación Matemática, donde la resolución de problemas es considerada una actividad altamente formativa que pone de manifiesto distintos modos de razonamiento (Cañadas y Castro, 2002; Segovia y Rico, 2001).

Diversos autores (Kilpatrick, 1985; Lester, 1980; Schoenfeld, 1992) se han preocupado por realizar revisiones de trabajos sobre la resolución de problemas matemáticos. En sus conclusiones, ponen de manifiesto la evolución de la resolución de problemas como tema de investigación en Educación Matemática, desde sus inicios en los años setenta.

Actualmente, la resolución de problemas es un tema de investigación en auge en nuestro país desde diferentes perspectivas. Ha sido trabajado por diversos autores como Carrillo (1994), Cruz y Carrillo (2004), Puig (1996), Socas, Hernández y Noda (1998) y, en el grupo de investigación Pensamiento Numérico en el que se enmarca este trabajo por Castro (1995), Castro (2002); Castro, Morcillo y Castro (1999), Espinosa (2005), Fernández (1997) o Rico (1988).

Por lo general, una situación se considera problema cuando un individuo o resolutor no conoce a priori algoritmos o métodos que permitan la obtención de la solución de manera inmediata.

El resolutor es un elemento fundamental para caracterizar un problema. En este sentido, la consideración de Schoenfeld (1985, p. 74) es significativa: *ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona*. Para Yevdokimov (2003) es fundamental tener en cuenta el conocimiento previo del sujeto para que una tarea pueda decirse que es un problema para un resolutor determinado.

El proceso de resolución de problemas es *la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea* (Puig y Cerdán, 1988, p. 21). Esta actividad comienza con la percepción del problema y finaliza con la solución del mismo. Puig (1996) considera que resolución del problema es todo aquello que conduce desde el planteamiento a la conclusión. La comprensión del método que conduce a la solución de problemas de cualquier tipo es el objeto de la heurística.

Razonamiento y Representación

Desde el punto de vista psicológico, el razonamiento se ve relacionado con la resolución de problemas y con las representaciones que hacen los sujetos en el proceso de resolución (Stenning y Mohanghan, 2005). Diferentes procesos cognitivos se encuentran asociados a las representaciones. Esto se debe a que dichos procesos *se explican en relación a las representaciones que son, al tiempo, su producto y su base* (Carretero y García, 1984, p. 59).

El razonamiento, como actividad cognitiva, requiere de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes como por ejemplo, variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraica y lógica, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficas cartesianas, redes, diagramas o esquemas (Duval, 1999).

El concepto de representación ha evolucionado y se ha modificado adecuándose a las teorías del conocimiento de cada época. Hay acuerdo en que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas, de forma que la mente tenga posibilidad de operar con ellas. Para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible dicha comunicación (Castro, 1995, Hiebert y Carpenter, 1992; Rivière, 1980). En general, consideramos que los procesos cognitivos son aquellos que manipulan representaciones (Rico, Castro y Romero, 1997). Dado que la comunicación de esos procesos requiere que la representación sea externa (Hiebert y Carpenter, 1992), serán éstas en las que nos centremos para el análisis del razonamiento que perseguimos con nuestra investigación.

Representaciones externas

Rico (2000) caracteriza la noción de representación de un modo práctico para la Educación Matemática como *todas aquellas herramientas - signos o gráficos – que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican sus conocimientos sobre las matemáticas* (Rico, 2000, p. 2).

Las representaciones internas y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes desde el punto de vista genético. Las representaciones externas actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de los conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan (Duval, 1993). Para Duval (1999) las representaciones externas son, por naturaleza, representaciones semióticas, están ligadas a un estado de desarrollo y dominio de un sistema semiótico, y son accesibles a todos los sujetos que conocen el sistema semiótico utilizado. Duval no considera que exista una correspondencia directa entre las representaciones mentales y las semióticas, sino una *interacción cuya complejidad aún escapa a los métodos de investigación y a las teorías de que se dispone* (Duval, 1999, p. 36).

Nos estamos refiriendo a las representaciones externas como aquellas que tienen una traza o soporte físico tangible aun cuando dicho soporte puede tener grados de abstracción elevados (Castro y Castro, 1997).

> *Las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás* (Rico, 1997b, p. 101).

> *La comunidad matemática, en la comunicación y transmisión de ideas, suele identificar cada concepto con una de sus representaciones prioritarias y simplificar las conexiones entre los diversos sistemas de representación, dificultando así la comprensión de los aprendices* (Gairín, 1998, p. 13).

Pese a este hecho, se debe tener en cuenta que

> *cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra* (Castro y Castro, 1997, p. 103).

Las distintas formas de representación y las diferentes formas de expresar un mismo concepto matemático, permiten hablar de estructuras más generales que contienen a las representaciones, entre las que destacamos los sistemas de representación.

Sistemas de Representación

Junto a la noción de representación encontramos diferentes términos relacionados. Skemp (1980) habla de *símbolos* y, posteriormente, se han utilizado términos como *sistemas matemáticos de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992), *sistemas de registros semióticos* (Duval, 1993), *objetos ostensivos* (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999) o *sistemas de representación* (Castro y Castro, 1997; Gairín, 1998).

Debido a que las representaciones constituyen sistemas para expresar un determinado concepto matemático, son notaciones, reglas y convenios que expresan determinados aspectos y propiedades de un concepto (Castro y Castro, 1997). Siguiendo el trabajo llevado a cabo en nuestro grupo de investigación, llamaremos sistemas de representación al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización. En el caso de estructuras numéricas, Castro, Rico y Romero (1997) definen el sistema de representación como el modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados. Ninguno de los posibles sistemas de representación de un concepto agota por sí solo a dicho concepto.

Cada sistema de representación está sujeto a un conjunto de reglas que están condicionadas por las matemáticas, en general, y por el concepto matemático específico, en particular (Goldin y Shteingold, 2001). Un sistema de representación es *un sistema de reglas para: (a) identificar o crear caracteres, (b) operar sobre y con ellos; y (c) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)* (Kaput, 1992, p. 523).

Como ya se ha mencionado, los objetos matemáticos pueden expresarse mediante diferentes sistemas de representación. Esto provoca que un mismo objeto pueda estar dado mediante representaciones diferentes. Janvier (1993) llama *representaciones sinónimas* a las representaciones válidas para expresar un mismo objeto matemático. Cada representación proporciona una caracterización distinta del objeto, y no hay ninguna que recoja todas las relaciones que cada objeto matemático encierra. Además, *los procesos de traducción entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto no son una cuestión trivial, como parecía entenderse hasta fechas recientes* (Castro y Castro, 1997, p. 104).

Skemp (1980) y Duval (1999) señalan el error en que se incurre con frecuencia al confundir los objetos matemáticos con sus representaciones. Esto puede ser el resultado del hecho denunciado por Gairín (1998) sobre el uso de un único sistema de representación para trabajar un concepto determinado. Por ejemplo, en el contexto numérico, el concepto *un medio* se puede confundir con una de sus representaciones 1/2. Sin embargo, existen diferentes sistemas de representación para este concepto, tal y como se ejemplifica en la Figura 2 - 3.

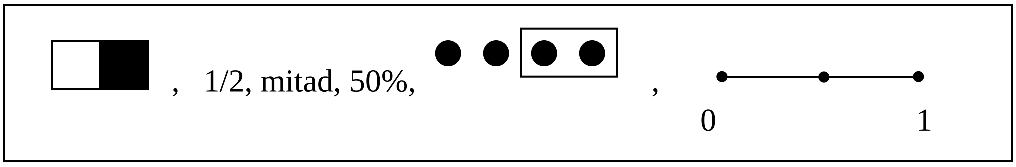


Figura 2 - 3. "Un medio" en diferentes sistemas de representación (Castro y Castro, 1997, p. 103)

<u>Transformaciones en los sistemas de representación</u>

Las diferentes representaciones y las traducciones, o conversiones, que se pueden establecer entre ellas son fundamentales en la adquisición de conceptos y en la resolución de problemas, como señalan Cifarelli (1998), García (2000), Lesh, Post y Behr (1987) o Schultz y Waters (2000). Según estos autores, las representaciones proporcionan medios para analizar, interpretar y tratar la información, así como para establecer un plan de solución, ejecutarlo y llegar a la solución del problema.

La conversión entre representaciones no siempre es evidente (Fernández, 1997). La consideración de los diferentes sistemas de representación y la habilidad en la traducción (o la falta de esta) es un factor que afecta al rendimiento en la resolución de problemas (Villegas, 2002).

Representaciones en la Resolución de Problemas

Las representaciones han jugado un papel importante en la investigación sobre resolución de problemas. Greeno (1977), por ejemplo, enfatiza esta relación. Para este autor, la comprensión es una de las componentes más importantes de la resolución de problemas y *la diferencia entre la comprensión y la no comprensión está en la naturaleza de la representación... la buena comprensión lleva consigo la realización de representaciones coherentes* (Greeno, 1977, p. 44).

En la resolución de problemas, según Lesh, Post y Behr (1987, p. 34)

> *los distintos sistemas de representación no sólo son importantes por méritos propios, sino que las traducciones entre ellos y las transformaciones dentro de ellos también son importantes*. Estos autores afirman que *los buenos resolutores de problemas tienden a ser suficientemente flexibles en el uso de sistemas de representación relevantes, de modo que instintivamente*

> *conectan la representación más conveniente para enfatizar cualquier punto determinado del proceso de solución*.

Se considera, además, que el uso coordinado de más de un sistema de representación facilita la plena comprensión de ideas matemáticas (Lesh, 1997).

La investigación en resolución de problemas ha evolucionado desde la investigación sobre los principios generales de la representación y la resolución, por separado, a considerarlos conjuntamente y a tener en cuenta la importancia de un dominio específico de conocimiento. Actualmente, una representación de un problema es *un modelo del problema construido por el resolutor para resumir su comprensión de la naturaleza esencial del problema* (Novick y Basokk, 2005, p. 322).

Una de las características que se consideran relevantes en la comprensión de un problema, en relación con la representación, es la visualización. Esta es una de las nociones asociadas a las representaciones de un concepto.

Visualización

Tall (1991) presenta una concepción de la visualización en la que considera la simultaneidad de las representaciones gráfica y mental de un concepto matemático.

Desde la perspectiva psicológica, la visualización se suele asociar a la imagen mental; mientras que desde la perspectiva matemática, se suele referir a *la habilidad para interpretar y entender información figurativa y manipularla mentalmente; representar sobre un soporte material cualquier concepto matemático o problema y usar diagramas para representar conceptos matemáticos y resolver problemas* (Castro, 1995, p. 44). Considerando ambas perspectivas, la visualización se puede considerar como un medio que permite manipular las representaciones de un concepto matemático en el proceso de resolución de problemas.

Tras las consideraciones hechas desde la Educación Matemática, nos centramos en algunas ideas que son la base de nuestro trabajo, en relación a un *modelo teórico de razonamiento inductivo* y a las *estrategias inductivas*.

UN MODELO TEÓRICO DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Pólya (1966) considera la necesidad de una actitud inductiva en matemáticas y la importancia de la generalización como paso de la observación de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o bien, pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado. Para un resolutor de problemas *ideal*, Pólya identifica que el proceso de inducción se inicia trabajando con casos particulares y concretos, se pasa por la formulación de una conjetura, llegando a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares. Polya (1945) considera que se suele llamar inducción al procedimiento que usan los científicos para tratar con la experiencia. La inducción es un método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. La inducción empieza frecuentemente con alguna observación.

A partir del trabajo de Pólya extraemos lo que hemos llamado la primera aproximación a un modelo ideal a seguir en el proceso de razonamiento inductivo. Este modelo consta de los siguientes pasos: (a) trabajo con casos particulares, (b) búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, (c) formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y (d) comprobación posterior.

El modelo anterior fue utilizado en el estudio piloto previo a éste, que constituyó el trabajo de investigación tutelada. La reflexión sobre las producciones de aquellos alumnos en las entrevistas, unido a la ampliación de nueva información, tanto por la fundamentación teórica como por investigaciones relacionadas, nos lleva a elaborar una segunda aproximación de modelo de razonamiento inductivo compuesto por siete pasos, a saber:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Identificación de patrones.
4. Formulación de conjeturas.
5. Justificación.
6. Generalización.

7. Demostración.

(Cañadas y Castro, 2007)

Dedicamos los siguientes epígrafes a precisar el significado que le atribuimos, desde el contenido presentado en este capítulo, a estos pasos y a algunos términos con los que se relacionan.

Trabajo con Casos Particulares

Los casos particulares son los ejemplos o casos concretos con los que se inicia un proceso inductivo. Los casos particulares juegan un papel fundamental como punto de partida de la inducción. Además, los casos particulares pueden servir para validar una conjetura de una manera informal, como se detallará en un paso que se corresponde con los procesos de validación.

Organización de Casos Particulares

Este paso se considera como parte del trabajo con los casos particulares. A partir de los antecedentes de esta investigación (Capítulo 4), se observa la influencia que puede tener la disposición de los casos particulares en la identificación de patrón y en otros pasos sucesivos.

Identificación de Patrones

Los patrones se consideran como "algo" que se repite con regularidad (Castro, 1995; Stacey, 1989). Los patrones se refieren a representaciones internas y externas. Las internas al individuo se encuentran relacionadas de manera significativa con lo que observan en su entorno.

Cuando a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos, se ha hablado de generalización (Pólya, 1966). El reconocimiento de patrones es, por tanto, esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar. Pólya defiende en sus trabajos el uso del razonamiento inductivo como método para descubrir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos.

Los patrones tienen un lugar destacado dentro del razonamiento inductivo de cualquier ciencia si se tiene en cuenta que el reconocimiento de patrones puede ayudar a alcanzar fórmulas y relaciones generales. Desde hace algunos años, la importancia de los patrones en matemáticas ha sido tal, que ha habido un cambio significativo en lo que la comunidad científica entiende por saber y hacer matemáticas. Los patrones matemáticos se han considerado como la estructura que permite modelizar las *reiteraciones* que se observan en el entorno. El principal avance en esta reconceptualización es pensar en las matemáticas como la ciencia de los patrones (Devlin, 1994; Keith, 1994; Sawyer, 1963).

> *Las matemáticas son una actividad inherentemente social, en la que una comunidad de practicantes entrenados (científicos matemáticos) se ocupan de la ciencia de los patrones –intentos sistemáticos basados en la observación, estudio, y experimentación, para determinar la naturaleza de los principios de las regularidades en los sistemas definidos axiomáticamente o teóricamente (matemática pura) o modelos de sistemas abstraídos de objetos del mundo real (matemática aplicada). Las herramientas de las matemáticas son la abstracción, la representación simbólica y la manipulación simbólica* (Schoenfeld, 1992, p. 335).

Formulación de Conjeturas

Pólya considera la formulación de conjeturas como segundo paso en el proceso de razonamiento inductivo. Este autor, así como Lakatos (1978) consideran que una conjetura es una proposición que se prevé verdadera pero que aún no ha sido sometida a examen. Este examen puede tener como resultado su aceptación o su rechazo.

En caso de presentarse un ejemplo para el que la conjetura no sea válida, la conjetura se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta, es eliminada si entra en conflicto con observaciones elegidas con la intención de someter a prueba una teoría.

Generalización

Cuando la conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada, se habla de generalización. Este es el principal objetivo del razonamiento inductivo, por el que se le considera generador de conocimiento, en particular de conocimiento matemático. Sin embargo, para poder saber si estamos o no ante nuevo conocimiento, antes de poder aceptar una nueva conjetura (general o no) con plena certeza de su validez desde el punto de vista matemático, es necesario llegar a demostrarla mediante un proceso de validación formal.

Pero también existen otros procesos de validación que pueden convencer de la validez de una conjetura, aunque no con el rigor que precisa la ciencia matemática.

Procesos de Validación

Llegar a la convicción de una conjetura requiere un proceso de validación. Balacheff (2000) señala la importancia de los *procesos de validación* La validación y la justificación comparten la finalidad de convicción que señalan Marrades y Gutiérrez (2000).

En algunos procesos de validación predomina el razonamiento inductivo, son aquéllos que se basan en los casos particulares. Los procesos de validación informales son comprobaciones que se realizan con casos particulares o falsaciones desde la perspectiva que presenta Popper. Mientras que la comprobación con casos particulares no asegura la validez desde el punto de vista matemático, la falsación sí lleva directamente al rechazo de una conjetura con total validez.

Para comprobar la validez de una conjetura desde el punto de vista de la verificación matemática, es necesario recurrir a procesos deductivos, a la demostración formal.

La naturaleza inductiva o deductiva de los procesos de validación que emplean los estudiantes es la que permite diferenciar el razonamiento inductivo del *razonamiento inductivo matemático*, respectivamente (Reid, 2002b).

A continuación especificamos los significados de algunos términos asociados a los procesos de verificación, relevantes para este trabajo.

<u>Justificación</u>

Ferrater (1988) entiende el término justificación en dos sentidos. Por un lado considera la *serie de operaciones que se llevan a cabo para reconstruir lógicamente teorías científicas.* Por otro lado, considera que son los razonamientos que, obedeciendo leyes lógicas, se producen cuando se dan razones –las llamadas a menudo "buenas razones"– para demostrar que la norma o el imperativo moral son aceptables o plausibles.

El término justificación aparece cuando se quieren analizar otros términos como argumentación, demostración o prueba. Por ejemplo, Duval (1999) define la argumentación como una *justificación o refutación espontánea de una declaración en una discusión o debate* (Duval, 1999, p. 144). La convicción es reconocida como la principal función de la argumentación por diversos autores como Duval (1999), Fetísov (1980), Hanna, (1989), Lithner (2000), Tall (1989) y Volmik (1990).

Marrades y Gutiérrez (2000) consideran que una justificación es cualquier razón dada para convencer a la gente (profesor a alumnos, estudiante a otros estudiantes, por ejemplo) de la verdad de una afirmación. Estos investigadores distinguen entre las justificaciones empíricas y las justificaciones deductivas. Las justificaciones empíricas usan los ejemplos como el principal (puede que el único) elemento de convicción. En las justificaciones deductivas la validación de las conjeturas se hace de un modo genérico y los ejemplos, cuando se usan, es para ayudar a organizar las argumentaciones.

En este trabajo nos referiremos a la justificación en el sentido en el que Marrades y Gutiérrez (2000) hablan de justificaciones empíricas, donde la validación se realiza por medio de casos particulares.

Explicación, prueba y demostración

Balacheff (2000) considera la *explicación*, la *prueba* y la *demostración* como procesos que permiten llegar a la convicción sobre una conjetura. La diferencia entre los tres procesos está en el nivel en el que se establece la validación. Esta diferencia permite determinar el significado de algunos elementos relacionados con la validación.

En la explicación, es el sujeto locutor quien establece y garantiza la validez de una proposición.

El paso de la explicación a la *prueba* hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad (Balacheff, 2000). La prueba, por su cualidad de mostrar, cae directamente en el campo de la educación matemática (Hanna, 2000). Existen diferentes términos en esta disciplina para denominar lo que Balacheff llama prueba. La demostración informal (Movshovitz-Hadar, 1996) o la demostración empírica (Gutiérrez, 2001) son algunos de estos términos que hacen referencia a un tipo de justificación cuyos razonamientos se basan en casos particulares.

La prueba no se expresa de forma general, tal y como la comunidad matemática exige para una demostración formal. Con estas consideraciones, una prueba es una justificación informal (justificación empírica en términos de Marrades y Gutiérrez, [2000]), no se realiza con la generalidad suficiente para ser considerada una demostración formal. En el caso de que la prueba siga un conjunto bien definido de reglas reconocidas por la comunidad matemática, se hablará de *demostración* (Balacheff, 2000). La demostración es un proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que prueba. La demostración determina inequívocamente la validez de una afirmación (Hanna, 1989). Aunque no deje de ser una simplificación, la demostración se suele asociar al razonamiento deductivo. Sin embargo, en ocasiones, como ocurre con la inducción matemática – reconocida como una demostración formal –, también es necesaria una actitud inductiva en la primera fase de la misma, basada en las relaciones entre los pasos particulares, tal y como señala Pólya (1945).

Por tanto, nos referiremos al término explicación para aquellas validaciones informales de conjeturas por las que el sujeto queda convencido de su respuesta. En el caso de que utilice algunos casos particulares y justificara sus conjeturas hablaríamos de prueba. Finalmente, cuando la validación se haga desde el punto de vista formal que la matemática requiere, hablaremos de demostración. La inducción matemática es una de las formas de demostrar propiedades matemáticas.

Por lo dicho en este apartado, podemos deducir que la justificación de conjeturas se considera equivalente a la prueba de las mismas.

En la Figura 2 - 4 recogemos las ideas sobre los procesos de validación que van a ser objeto de análisis en esta investigación, según la terminología que hemos determinado en este capítulo:

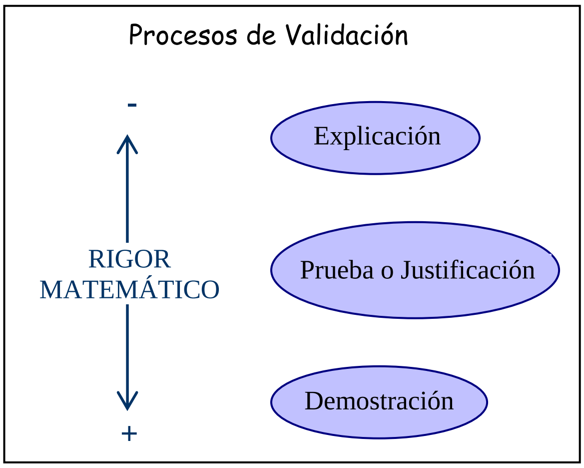


Figura 2 - 4. Procesos de validación

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

La inducción o el razonamiento inductivo es uno de los heurísticos considerados por Pólya para la resolución de problemas (Pólya, 1945). El razonamiento inductivo, forma parte, por tanto, de una descripción general del proceso de resolución basada en la caracterización que hemos presentado del razonamiento inductivo mediante una serie de pasos.

En Educación Matemática, las estrategias tienen en cuenta los conceptos implicados en la resolución de problemas como elemento importante en la descripción de los procedimientos que siguen los estudiantes en el proceso de resolución. Las estrategias están vinculadas al contenido matemático con el que se trabaja (Rico, 1988). Nos referiremos a las estrategias para designar el procedimiento específico a de las estrategias que se consideran en la resolución de unos problemas concretos.

En este trabajo, utilizamos la expresión *estrategias inductivas* para referirnos a las estrategias específicas que utilizan los estudiantes en la resolución de unos problemas, en el sentido de heurístico (no de algoritmo) que hemos identificado. Como se describirá en el Capítulo 3, al trabajar con las progresiones aritméticas como contenido matemático específico (que es el que se utiliza en los problemas que planteamos a los estudiantes), el razonamiento inductivo es un heurístico posible para su resolución. Por tanto, las estrategias inductivas deben tener en cuenta los elementos propios del contenido matemático, así como las relaciones que se pueden establecer entre ellos dentro del proceso inductivo en el que se van a analizar.

RESUMEN DE LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Hemos tenido en cuenta la resolución de problemas como contexto para esta investigación sobre el razonamiento inductivo. En este contexto específico, se considera un heurístico. En particular, hemos definido las estrategias inductivas como el tipo de estrategias que se emplean en la resolución de los problemas donde la inducción se puede emplear como heurístico.

Además, hemos presentado en diversos epígrafes de este capítulo, la relación entre los sistemas de representación y la resolución de problemas, por un lado; y entre los sistemas de representación y el razonamiento, por otro. Esto permite establecer una relación entre esos tres aspectos. Los sistemas de representación permiten manipular y expresar el razonamiento inductivo y llevar a cabo el proceso de resolución de problemas. En particular nuestro interés se centra en las representaciones externas, que son las que nos permiten describir el razonamiento que llevan a cabo los estudiantes.

En la Figura 2 - 5 recogemos estas conexiones y ubicamos en el contexto de la resolución de problemas nuestro interés por describir el razonamiento inductivo mediante las representaciones externas que utilicen los estudiantes.

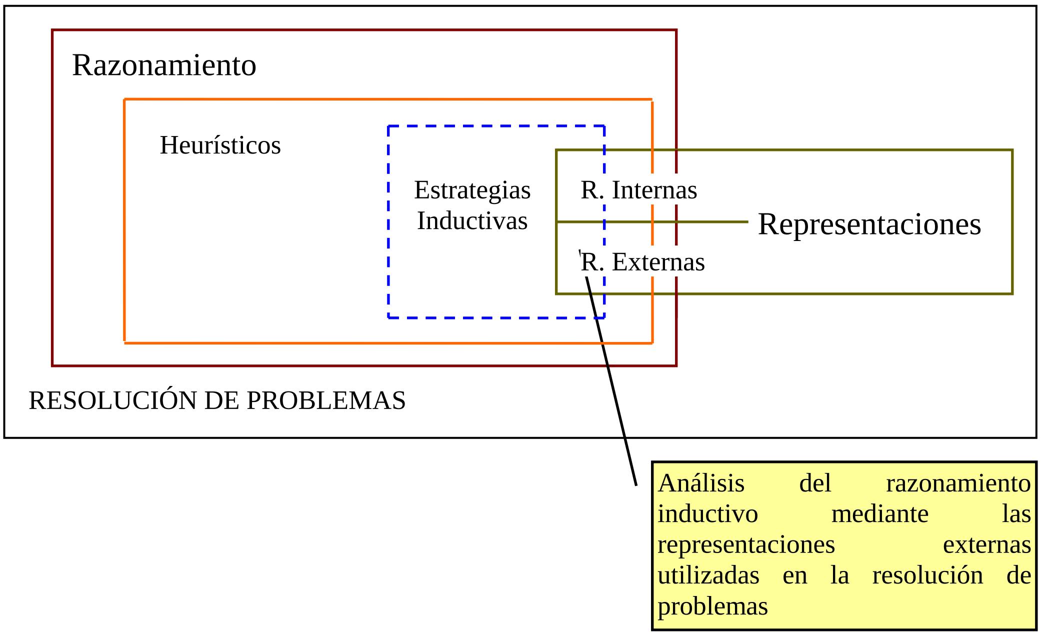


Figura 2 - 5. Razonamiento inductivo y resolución de problemas en esta investigación

En esta investigación, la consideración de las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2 cobra un interés relevante porque para la expresión del razonamiento inductivo, se requiere de unos sistemas de representación (específicos del contenido matemático seleccionado) como medio para exteriorizar las representaciones internas (Castro y Castro, 1997).

CAPÍTULO 3

CONTENIDO MATEMÁTICO

Toda relación entre números, funciones y operaciones se hace diáfana, generalizable y realmente fructífera solo cuando se desliga de su objeto concreto y se introduce en un contexto general. (Van del Waerdem, caracterizando las máximas de Emily Noether)

En este capítulo nos centramos en el contenido matemático de las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. Recogemos un breve apunte histórico sobre la Teoría de Números, donde se insertan las progresiones. Realizamos un análisis de este contenido matemático siguiendo la propuesta de organizadores curriculares planteada por Rico (1997b) centrándonos, principalmente, en la estructura conceptual y los sistemas de representación, la fenomenología entendida como situación y contextos en los que el contenido de las progresiones tienen su campo de problemas, también se recoge en otro apartado.

La información de este capítulo es de utilidad doble. Permite, por un lado, identificar los elementos y los sistemas de representación presentes en los pasos del razonamiento inductivo y las estrategias inductivas en el contexto particular de esta investigación. Por otro lado, sirve como base sobre la que establecer los criterios para la selección de problemas para el análisis del razonamiento inductivo de los estudiantes de secundaria, que se recogerá en el Capítulo 5.

En la Figura 3 - 1 se presentan, de forma esquemática, estas ideas, que serán desarrolladas a lo largo del capítulo.

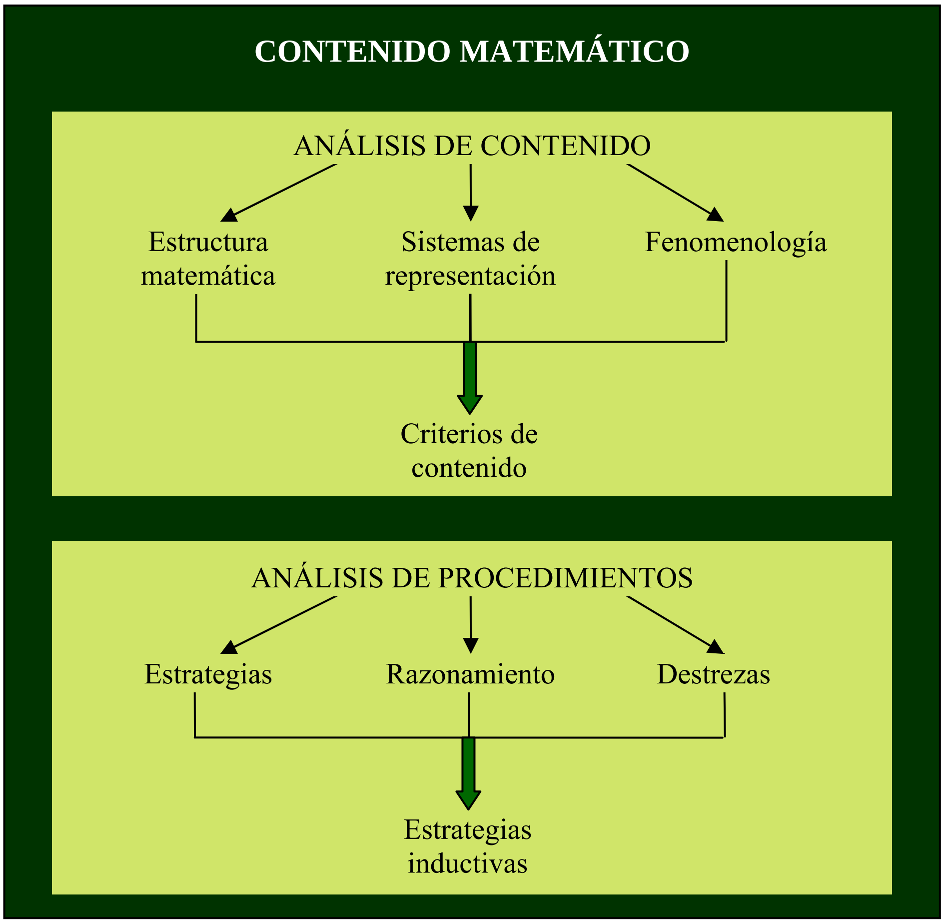


Figura 3 - 1. Análisis de contenido y análisis de procedimientos

CONCRECIÓN DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Exponemos a continuación las dos consideraciones que hemos hecho y que nos han llevado a elegir las progresiones de números naturales de órdenes 1 y 2 como contenido matemático para el trabajo de los sujetos que intervienen en la parte empírica de esta investigación.

Por una parte, Pólya (1966) destaca posibles contenidos matemáticos con los que se puede usar la inducción. Si bien en principio, considera que las matemáticas, en general, son un medio idóneo para realizar este tipo de razonamiento por ser una disciplina donde los patrones aparecen constantemente, sus ejemplos para mostrar el proceso inductivo son tomados de la Geometría Sólida y de la Teoría de Números, fundamentalmente. Utiliza los desarrollos de series, las aproximaciones y los límites, y presenta numerosos ejemplos de teoremas y propiedades, algunos descubiertos por Euler, que se obtuvieron mediante inducción. La constante en todos ellos está en el procedimiento seguido en su tratamiento. Así se percibe que los resultados parciales pueden ser sistematizados mediante tabulación, se hace observación de regularidades, búsqueda de patrones que dé sentido a la regularidad observada, formulación de una conjetura y la comprobación posterior de la misma. La Teoría de Números es considerada una rama de la matemática que posee unas características especiales que hacen que sus propiedades, teoremas y problemas sean adecuadas para ser "descubiertos" mediante razonamiento inductivo. Todo lo anterior nos invita a considerar dicha rama de la matemática y a elegir un objeto matemático de la misma para nuestro trabajo de investigación.

Por otra parte, las investigaciones anteriores a la nuestra, sobre razonamiento inductivo, y que se presentan en el Capítulo 4, utilizan mayoritariamente sucesiones para estudiar el desempeño que de ellas hacen los alumnos en lo que a razonamiento inductivo se refiere.

Como consecuencia de las dos razones anteriores, seleccionamos las sucesiones de números naturales para el trabajo de los estudiantes de educación secundaria. Sin embargo, es necesario concretar más el tipo de sucesiones para desarrollar nuestra investigación. Por ello, revisamos el currículo de educación secundaria.

Situación Curricular del Contenido Matemático

La búsqueda que hicimos, cuando realizamos el Trabajo de Investigación Tutelada, para elegir el nivel escolar en el que deberían estar los estudiantes de nuestra investigación, nos llevó a la educación secundaria. Se tuvo en cuenta, en dicha búsqueda, que los estudiantes tuviesen ciertas capacidades que les permitiesen resolver las situaciones problemáticas con las que nos proponíamos trabajar sobre razonamiento inductivo. Hemos vuelto a revisar de nuevo los currícula y encontramos que, "oficialmente", es en 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (Boletín Oficial del Estado, 2004) donde explícitamente aparecen contenidos relativos a sucesiones de números naturales. Más concretamente, en esos cursos se habla de progresiones aritméticas y geométricas como únicos tipos de sucesiones a trabajar en este nivel educativo.

En 3º de Educación Secundario Obligatoria, aparece referencia explícita a las sucesiones, en el bloque de aritmética y álgebra. En los dos itinerarios que reconocen los documentos curriculares en el sistema educativo español para 3º y 4º de ESO (Boletín Oficial del Estado, 2004, p. 5714) se recoge este contenido bajo el epígrafe de *sucesiones numéricas. Elaboración y utilización de estrategias para buscar regularidades numéricas en sucesiones de números enteros y fraccionarios. Iniciación a las progresiones aritméticas y geométricas. Iniciación a las progresiones aritméticas* (Boletín Oficial del Estado, 2004, pp. 5769-5770). Además de este contenido, existe otro relativo al estudio de las funciones y sus propiedades en sus diferentes sistemas de representación. Este primer contacto con las funciones comienza con las funciones constantes, sigue con las funciones lineales y las cuadráticas y se pretende que el alumno maneje las diferentes formas de expresar una función (aritmético, geométrico y algebraico) (Boletín Oficial del Estado, 2004). Dado que, como se verá en el apartado dedicado al análisis de contenido, la mayor diferencia entre dichas funciones y las sucesiones de números naturales está en los conjuntos dominio e imagen de ambos objetos matemáticos, siendo el conjunto de los números reales en las funciones y el de los números naturales en las sucesiones de números naturales, se puede considerar que las funciones son el contenido de la matemática continua homólogo a las sucesiones en la matemática discreta.

En 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, se incluyen las funciones polinómicas de primer y de segundo grados, definidas en el conjunto de los números reales y teniendo en éste su conjunto imagen.

Un análisis detenido de los documentos citados en lo que refiere contenidos mencionados muestra que, si bien para las funciones se indica que se trabajen diferentes sistemas de representación, no ocurre así para las sucesiones. Por otra parte, en las funciones el orden de presentación señalado es: comenzar por las funciones constantes y continuar con las lineales y las cuadráticas, o sea, se apuesta por una secuenciación de lo más sencillo e intuitivo a algo más complejo, sin pasos bruscos. En las sucesiones, sin embargo, se comienza con sucesiones sencillas e intuitivas, se continúa con las progresiones aritméticas y se pasa a las progresiones geométricas. Suponemos que este orden se hace para aprovechar la analogía, en cuanto a la estructura, entre ambos objetos matemáticos progresiones aritméticas y progresiones geométricas, ya que si se establece un paralelismo entre sucesiones y funciones, el caso de las progresiones aritméticas se corresponden con las funciones lineales y afines, mientras que las progresiones geométricas tendrían su correspondencia con las funciones exponenciales. Todo esto nos hace pensar que el tratamiento que reciben las sucesiones en el currículum español de educación secundaria difiere del que reciben las funciones.

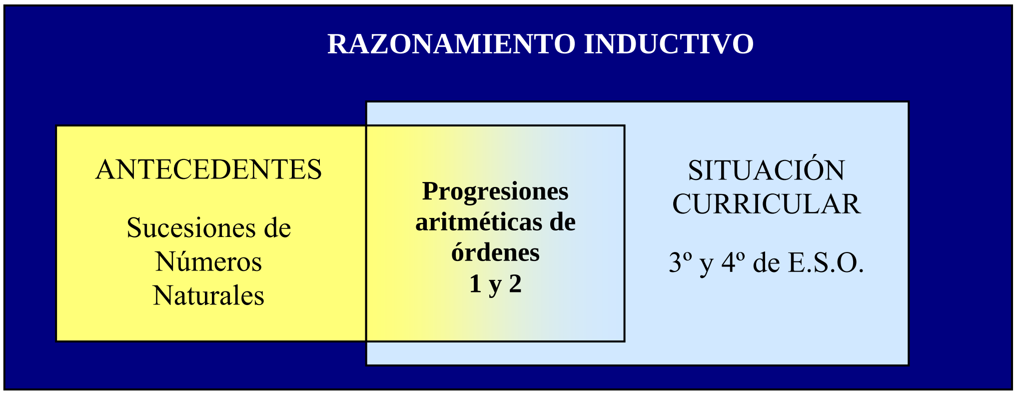
Debido a estas consideraciones y dado que se supone a los estudiantes están capacitados para el estudio de las funciones lineales y cuadráticas en tercer y cuarto curso de Educación Secundario Obligatoria, ratificamos lo que ya hicimos en el Trabajo de Investigación Tutelada (Cañadas, 2002) y trabajamos con estudiantes de este nivel educativo para desarrollar el trabajo empírico de esta investigación.

Así mismo, aparecen razones para centrar el contenido matemático sobre el que versarán los problemas que han de realizar los estudiantes del mencionado nivel educativo: las sucesiones de números naturales, cuyos patrones se pueden expresar mediante polinomios lineales y cuadráticos, esto es *las progresiones aritméticas de números naturales*[1] *de órdenes 1 y 2*, tomar en cuenta posibles sistemas de representación para dichas sucesiones y utilizar solamente aquellas "operaciones entre elementos de las sucesiones" que, o bien han podido ser trabajadas en el aula, o que siendo algo intuitivas, los estudiantes podrían realizar algún desempeño en las mismas.

La Figura 3 – 2 ilustra cómo las progresiones quedan en la intersección de la materia recomendada para trabajar el razonamiento inductivo y el nivel señalado por los currícula oficiales.

[1] En general, una progresión aritmética de orden *p* es *una sucesión de números resultante de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable* (García, 2005, p. 258).

Figura 3 - 2. Concreción del contenido matemático



ORGANIZADORES PARA EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Rico (1997b) considera la pertinencia de los organizadores del currículo de matemáticas como conocimientos de carácter objetivo que ofrece un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas. Los organizadores permiten planificar las unidades didácticas sobre diferentes tópicos matemáticos. Entre los organizadores que Rico considera están: (a) contenido matemático, (b) errores y dificultades, (c) representaciones y modelización, (d) fenomenología, (e) materiales y recursos y (f) historia.

Con la pretensión de obtener criterios justificados para la selección de los problemas a proponer a los estudiantes de la 3º y 4º de ESO nos centramos en los organizadores:

1. Contenido matemático.
2. Representaciones.
3. Fenomenología.

Estos organizadores son las tres dimensiones que conforman la propuesta de Gómez (2002; 2007) sobre el *análisis de contenido* como componentes del *análisis didáctico*[2].

Comenzamos con una descripción del contenido matemático, progresiones, precedido de un resumen sobre historia relacionada con las mismas.

[2] La noción *análisis didáctico* ha sido utilizada con diferentes significados desde que Rico (1992) la empleara en su proyecto docente. Presentamos la definición de Gómez (2002, p. 252), quien expresa que el *análisis didáctico es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.*

Posteriormente incluiremos los sistemas de representación en esta estructura matemática y los aspectos fenomenológicos[3] relacionados.

APUNTE HISTÓRICO SOBRE PROGRESIONES

Los libros de historia muestran que el uso de las progresiones por el hombre aparece tempranamente, muy cercano al resurgir de las diferentes civilizaciones. Las progresiones aritméticas y geométricas son los primeros tipos de sucesiones y los más utilizados desde la antigüedad por su cercanía a problemas planteados en la vida cotidiana, sirviendo como herramienta para la resolución de ciertos problemas matemáticos.

El contenido de algunas tablillas mesopotámicas, que datan del S. IV a.C., muestra que en dicha época ya se conocían reglas de operaciones aritméticas, tanto con números enteros como con fracciones. Así mismo utilizaban tablas de cuadrados de los números enteros, de cubos, de inversos (raíz cuadrada), tablas de los números de la forma $n^2 + n^2$.

La civilización mesopotámica adquirió dominio en la potenciación y en la resolución de ecuaciones cuadráticas, que les permitió desarrollar procedimientos para calcular sumas de progresiones, tanto aritméticas como geométricas.

Conocían la suma de progresiones aritméticas, sumas de la forma:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n + (2^n - 1);$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n\right) \sum_{k=1}^{n} k$$

(Rínikov, 1974)

Si bien se ignora cuales eran los procedimientos para hacer dichas sumas y las derivaciones empleadas (Solís y Sellés, 2005), en los problemas resueltos por la matemática babilónica aparecen progresiones aritméticas y geométricas; se manejan ecuaciones lineales cuadráticas, cúbicas y bicuadráticas. En algunos

[3] Hacemos referencia aquí a los *aspectos fenomenológicos* y no a *fenomenología* porque nos restringimos a la presentación de algunos contextos en los que hemos identificado el uso del contenido matemático.

casos los problemas son sobre impuestos e intereses y sus recíprocos que requieren – en lenguaje actual – el uso de logaritmos, para ello se usaban tablas de potencias de la forma a^n, para n = 1,2,3,…así como interpolaciones (Wussing, 1998).

La parte teórica de las matemáticas, tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia Antigua. En las matemáticas de esta época, los problemas prácticos relacionados con la necesidad de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas, juegan un gran papel, como en la época anterior. Lo nuevo era que estos problemasse desprendieron, paulatinamente, en una rama independiente de las matemáticas que se denominó logística. A la logística fueron atribuidas las operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, el cálculo con ayuda de dispositivos auxiliares como el ábaco, el calculo con fracciones, la resolución numérica de problemas que conducen a ecuaciones de grados 1 y 2, así como problemas prácticos de cálculo para la arquitectura y la agrimensura.

Los egipcios desarrollaron una aritmética predominantemente aditiva. Por ejemplo, su tendencia para la multiplicación era reducirla a adiciones reiteradas. Los problemas eran simples, trataban de asuntos cotidianos como el grado de concentración del pan, el alimento de los animales o el almacenaje del grano. Algunos problemas muestran un interés teórico, como el caso de dividir 100 hogazas de pan entre cinco personas de tal manera que la parte recibida esté en una progresión aritmética y que un séptimo de la suma de las tres partes más grandes sea igual a la suma de las dos más pequeñas. O esta otra situación relacionada con una progresión geométrica: siete casas en cada una de las cuales hay siete gatos, cada gato vigilado por siete ratones… (Struik, 1986).

En la escuela pitagórica se advierte ya una recopilación de hechos numéricos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Así por ejemplo, de la aritmética fue separada como una rama independiente, la teoría de números, es decir el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales. En las exploraciones aritméticas efectuadas por la escuela pitagórica se descubrieron diversas propiedades y se establecieron diferentes tipologías de números como son los números figurados (triangulares, oblongos, cuadrados…), cuyas secuencias constituyen sucesiones cuadráticas.

Por medio de las figuras podían hallar casi de forma experimental las sumas de las series:

$\sum_{v=1}^{n} v$ = 1/2 (n + 1) n; $\sum_{v=1}^{n}(2v-1)$ = n^2; $\sum_{v=1}^{n}2v$ = (n + 1) n; $\sum_{v=1}^{n}(3v-2)$ = 1/2 (3n - 1)n

(Wussing, 1998)

Euclides, que vivió alrededor del año 300 a.C., es considerado el autor más importante de la Matemática Griega, su obra *Los elementos*, se compone, respecto a su contenido, de tres bloques, el segundo de ellos se ocupa de la teoría de los números naturales. El contenido de este libros recoge la aritmética pitagórica sobre: pares, impares, primos, cuadrados, cubos, progresiones geométricas etc. (Solís y Sellés, 2005). Por su parte Arquímedes, que exponía sus resultados deductivamente con rigor euclideo, da una demostración de la cuadratura de la parábola utilizando la suma de n términos de una serie convergente, primero por medios mecánicos y posteriormente realiza la demostración matemática. Arquímedes hace especial hincapié en que se trata de un problema que no había sido acometido hasta la fecha. (Wussing, 1998).

En la construcción de las teorías matemáticas en la Grecia Antigua, muy temprano se encontró una clase específica de problemas para cuya solución, era necesario utilizar el paso al límite, los procesos infinitos, la continuidad. Algunos científicos, entre los que se destaca Demócrito (nacido en torno al 460 a.C.), buscan salida a estas dificultades y hacen aportaciones en esta rama de la matemática. Los métodos infinitesimales obtenidos en la Antigua Grecia, sirvieron de punto de partida para muchas otras investigaciones de los matemáticos de los siglos XVI y XVII.

Posteriormente vivió Diofanto (a mediados del siglo III d.C.), que es considerado uno de los matemáticos más sobresalientes del periodo helenístico. En su obra, *La Aritmética,* utilizaba abreviaturas propias para las potencias de las variables desde

x^2 hasta x^6 y, por medio de procedimientos propios de cálculo, estudiaba todo tipo de ecuaciones cuadráticas, cúbicas, ecuaciones con varias variables que posteriormente se denominaron *diofánticas*. A este carácter algebraico de la aritmética, corresponde una técnica de transformación de ecuaciones que incluye sustituciones con variables auxiliares. La Aritmética de Diofanto constituyó, en los siglos XVI y XVII, un impulso en la fundamentación de la matemática moderna (Wussing, 1998).

Entre los trabajos de los matemáticos de la Edad Media, destacamos los de Abů Kåmil (850-930), quien aborda la suma de diferentes sucesiones aritméticas y series de potencias (con intentos de demostraciones) como las siguientes:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

El más antiguo manuscrito, especialmente matemático, que se conserva de la Rusia medieval, es la inscripción de Kirik, diácono de Novgorod, que data del año 1134. En el citado manuscrito aparece un problema sobre cálculo de progresiones, formadas a partir de una situación real de la cría progresiva de los rebaños (Rínikov, 1974).

Desde la Edad Media, las sucesiones se denominaban series o progresiones, nombre derivado del latín *progressio*. La palabra *serie* se utilizó por primera vez por algunos autores británicos del siglo XVII, al referirse a las *series infinitas* en conexión con las secuencias infinitas utilizadas por los algebristas. En el ámbito latino, se utilizó el término *progresión*, que se ha mantenido hasta nuestros días (Smith, 1958).

En la actualidad, se usa la palabra *sucesión* o *secuencia* en lugar de progresión, quedando este último término asociado sólo a ciertos tipos especiales de sucesiones como las progresiones aritméticas, geométricas y armónicas. El vocablo *serie,* se emplea en nuestros días para designar las sucesiones que se obtienen al ir sumando términos de una sucesión previamente dada.

La propiedad recurrente de las series ha sido valorada en diferentes épocas. Su primera reseña importante proviene, en el siglo XIII, de los problemas planteados por Leonardo de Pisa (1170-1250). Este matemático, conocido por Fibonacci, planteó una colección de problemas sobre matemáticas que involucraban la suma de series recurrentes, como la serie de Fibonacci que él descubrió y que resultó al trtar de dar respuesta a la cuestión *¿Cuantos pares de conejos pueden ser producidos por un solo par en un año si cada par engendra un nuevo par cada mes, el cual desde el segundo mes se convierte en productivo y si no ocurren muertes*? Estos problemas entrañaron auténticos retos mentales para la época (Struik, 1986). Su libro sobre el ábaco contiene una parte dedicada al cálculo con números enteros y problemas resolubles mediante sumas de progresiones aritméticas, entre otros. En una de sus obras sobre la teoría de números, se tratan propiedades de los números y sumas de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2; \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k+1) \qquad \text{(Rínikov, 1974)}$$

La propiedad recursiva vuelve a cobrar protagonismo en la fórmula que Pierre Fermat (1601-1647). Descubrió y dio el nombre de *propositionem pulcherriman*, una fórmula que hoy se conoce como los números combinatorios. Fermat utilizó esta fórmula recurrente para obtener expresiones de sumas de las primeras potencias de números naturales, de forma recursiva (Del Río, 2005).

Con el desarrollo del precapitalismo de los siglos XIV y XV, aumentó la necesidad de mayores conocimientos sobre los números y los cálculos, llegando a aparecer la profesión de maestro calculista. A menudo, estos maestros calculistas ponían por escrito sus conocimientos que dieron lugar a manuales de cálculo. Se profundizó cada vez más en la obtención de algoritmos y se avanzó en la formulación teórica de los procedimientos de cálculo. Era un nivel intermedio entre la aritmética pura y la algebrización que con Diofanto había comenzado a hacerse con los primeros símbolos. Los autores inventaban abreviaturas según sus propios criterios, y poco a poco se introdujeron diferentes símbolos de forma obligatoria como los de las operaciones y las potencias (Wussing, 1998).

En el transito del siglo XVI al XVII, matemáticos como Vieta, Fermat y Descates, establecieron la distinción entre magnitudes constantes y variables. A partir de ahí surge el concepto de función. En el siglo XVII los mayores resultados se deben a

Fermat, en cuyas investigaciones ocupó un lugar importante el análisis indeterminado de Diofanto. Por su parte, en el año 1665, Pascal formuló por primera vez el principio de inducción matemática (Rínikov, 1974).
A partir del siglo XVII, el trabajo realizado con series se restringió a la convergencia y a los límites. Con la ayuda de los avances realizados en el álgebra y en el análisis, en esta época y hasta el siglo XIX, se postularon los fundamentos de las matemáticas modernas. El análisis matemático de este siglo se fundamentó en un conjunto de procedimientos y métodos de solución de numerosos problemas que crecían rápidamente. Con estos fundamentos, se llegó a lo que se conoce como *teoría de límites y de funciones*, que fueron la gran aportación de este siglo.

Hacia el siglo XVIII se había acumulado en la ciencia matemática muchos hechos teórico-numéricos que no estaban sistematizados. Se produjeron durante el siglo grandes avances, en este sentido, en el análisis matemático. Se desprendieron una serie de disciplinas que tuvieron desarrollos independientes, recibiendo un serio impulso la *teoría de series*, el cálculo de las *diferencias finitas*, así como la *teoría de las funciones especiales*. Por su parte, el álgebra se desarrolló sobre la resolución de ecuaciones algebraicas. El desarrollo de la teoría de números transcurrió muy lentamente. La mayoría de los descubrimientos logrados por eminentes matemáticos quedaban aislados. Las posibles razones de esto parecen ser el carácter específico del objeto de la teoría de números, la abstracción creciente en el planteamiento de problemas de dicha teoría, la desusada dificultad de su resolución, que exigía un gran desarrollo de las matemáticas; y cualidades personales poco comunes del científico.

Después de Fermat y Pascal hubo una calma de casi medio siglo en relación a la teoría de números como ciencia, hasta que Euler le dedicara 150 trabajos durante su vida. En estos trabajos, Euler determinó la problemática, la estructura y los métodos de la teoría algebraica de los números, o sea, aquella parte en la cual se utilizan preferentemente los métodos de la aritmética y el álgebra, y no se utiliza, dentro de lo posible, el aparato de la teoría de las funciones y el análisis infinitesimal. En dichos trabajos están contenidas todas las premisas para la creación de un sistema de métodos algebraicos de la teoría de números que sirvieron de base a otros matemáticos en sus investigaciones. Por ejemplo, su trabajo sobre la representación de números por los valores de formas cuadráticas y sobre los divisores primos, sirvieron como base a Gaus para su teoría general de las formas cuadráticas (Rínikov, 1974). La teoría de números se convirtió en el siglo XVIII en una rama independiente de las matemáticas. Se definieron en la misma todos los problemas fundamentales y líneas de investigación. En las obras de Euler, Lagrange y Legendre, entre otros, aparecen numerosos métodos en la teoría de números, tanto algebraico-elementales, como analíticos. Toda esta investigación necesitaba sistematización, reducción a una estructura lógica armónica desde una posición única. Este trabajo lo comenzó Legendre a final del siglo XVIII, en su libro *Experiencia de la teoría de números,* que supuso un esfuerzo por sistematizar los resultados obtenidos sobre las propiedades de los números enteros.

La concepción natural del análisis como una ciencia matemática acerca de las variables y las funciones parece expresamente formulada por Euler en su libro *Introducctio in analysin infinitorum*. El desarrollo de diversos métodos infinitesimales constituye una de las características más importantes de la Revolución Científica (apr. 1620-1730). La teoría de series fue uno de los temas más ampliamente estudiado durante el siglo XVIII. Además de Euler destacaron los hermanos Bernouilli, en estos estudios, aportando numerosos resultados a la misma. Se ampliaron los aspectos formales de la teoría de series que se convertiría en uno de las componentes fundamentales del análisis, faltaba por desarrollar una teoría sobre la convergencia.

Con la ampliación y consolidación de la matemática infinitesimal se abrió un gran campo de aplicación de las matemáticas, o al menos se preparó el campo para su posterior tratamiento matemático. Aparece así un nuevo espectro de problemas prácticos mecánicos y astronómicos con los que los matemáticos del siglo XVIII pudieron contrastar con sus propias fuerzas las posibilidades del nuevo cálculo.

A lo largo del siglo XIX, se conocieron y manipularon las primeras estructuras algebraicas y se fijó el contenido conceptual de las estructuras algebraicas fundamentales. Dedekind, quizá el matemático más avanzado en este campo, definió los conceptos actuales de *ideal* y de *grupo abstracto* y utilizó ampliamente el concepto de *cuerpo*. La orientación de las investigaciones en la teoría de números durante el siglo XIX, estuvo determinada por los trabajos de Gaus (Rínikov, 1974). Junto a la teoría de números, las raíces históricas de la formación del concepto de grupo abstracto se hallan también en la geometría y en el álgebra (Wussing, 1998).

El siglo XIX señala un nuevo período que ha recibido el nombre de período de las matemáticas modernas. Durante este tiempo se llevó a cabo una revisión crítica de los conceptos primarios (definiciones) y afirmaciones (axiomas), se realizaron intentos de construcción de un sistema riguroso de definiciones y demostraciones; y se realizó una revisión crítica de los métodos lógicos de las demostraciones matemáticas. La creciente atención a los fundamentos se justifica, entre otros motivos, por la exigencia de dar rigor matemático al gran volumen de hechos y nuevas teoría matemáticas surgidas. El desarrollo de la *teoría de funciones* de Weierstras, la *teoría de conjuntos* de Cantor, transcurrió en los últimos años del siglo XIX, en un ambiente de aguda crítica y de profunda lucha. Especialmente crítico fue Kronecker con los fundamentos de la matemática, él era partidario de una aritmetización de la matemática (Rínikov.1974).
Por otra parte, la teoría de conjuntos ejerció una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, que sirvió de base a la teoría actual de funciones de variable real, la topología, el álgebra y el análisis funcional, entre otros. Las cuestiones de fundamentación de la teoría de conjuntos y la investigación de los límites de su aplicación se convirtieron en el siglo XX en una ciencia especial, la lógica matemática, que forma una parte importante de los fundamentos de la matemática moderna.

ANÁLISIS DE CONTENIDO DE LAS SUCESIONES DE NÚMEROS NATURALES

El contenido matemático lo planteamos desde dos dimensiones complementarias. La primera dimensión tiene como objeto delimitar las estructuras matemáticas a las que pertenece este concepto matemático y aquellas otras estructuras matemáticas con las que se relaciona. La segunda dimensión se centra en el estudio de la estructura matemática que configura el propio concepto.

El concepto de sucesión, y todos los entes relacionados con las mismas, tienen en la actualidad un significado matemático preciso. En las próximas líneas, tratamos de exponer dicho significado y el de todos los elementos matemáticos vinculados.

Las sucesiones, y las progresiones (sucesiones especiales sobre las que nos vamos a centrar) forman parte de la Teoría de Números. Teoría fundamentada a partir de la teoría de conjuntos, de aquí que el contenido matemático, tal como lo hemos recogido, hable de estructuras y se base en las funciones como idea central.

Estructuras Matemáticas Generales

Varios entes matemáticos encontramos relacionados con las sucesiones y, a su vez, relacionados entre sí. Vamos a dar las definiciones de dichos entes matemáticos y señalar la relación que hay entre ellos.

<u>Sucesión</u>

Definiciones escuetas, encontramos de la sucesión, como la siguiente: *Una sucesión numérica es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales* (Spivak, 1996, p. 613). Y otras que aportan más datos como: *Una sucesión es un tipo especial de función donde el dominio consiste en un conjunto de enteros consecutivos. El enésimo término se denota por c_n o por C_n, a n se le denomina índice de la sucesión. Toda la sucesión se representa $\{s_n\}$ y se usa s_n para denotar un solo elemento de la sucesión* (Johnsonbaugh, 2005, p.104).

Otros autores son más explícitos y dan más detalles al proponer una definición como por ejemplo:

Un sucesión es una función del conjunto N = 1, 2, 3,… de números enteros positivos en un conjunto A. Para indicar la imagen del entero n, se emplea el símbolo a_n.

Se puede decir de una sucesión que es una estructura discreta con la que puede representarse una lista ordenada (García, 2005, p. 226).

De acuerdo con esta definición, una sucesión suele indicarse por:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \ldots ; \text{por } \{a_n, \forall\, n \in N\}; \text{ o por } \{a_n\}$$

Entonces, a_n representará un determinado elemento de la sucesión $\{a_n\}$. Los valores de la función están subindizados o indexados por los enteros positivos correspondientes, de forma secuencial, produciéndose el primer valor del conjunto A, el segundo, el tercero…

La sucesión $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \ldots$ no es más que una forma abreviada de escribir una función como conjunto de pares ordenados

$$\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)),\ldots\}.$$

En algunas ocasiones el dominio de la sucesión es el conjunto de enteros no negativos

$\{0, 1, 2, 3, 4\ldots\}$. En tales casos, el primer valor de *n* es el 0 en lugar del 1.

En las definiciones anteriores hay unanimidad en que el dominio de la función o aplicación (se le denomina de ambas formas) es el conjunto de los números naturales.

Si $\{a_i\}_{i=m}^{n}$ es una sucesión, se define:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n. \qquad \text{y} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \,.\, a_{m+1} \,.\, \ldots \,.\, a_n.$$

El formalismo $\sum_{i=m}^{n} a_i$ *se llama notación de suma (o sigma)* y $\prod_{i=m}^{n} a_i$ se llama notación de producto (Johsonbaugh, 2005, p. 107).

<u>Función</u>

Numerosos autores identifican *función* con *aplicación*. Por ejemplo, en Pisot y Zamansky (1996, p. 10) encontramos:

> *Sea un conjunto E, llamado conjunto de definición. Sea F un conjunto llamado conjunto de valores. Una correspondencia tal que a todo elemento asocia un elemento y ϵ F se denomina aplicación de E en F.*
>
> *El elemento x ϵ E se denomina variable o argumento; el elemento y ϵ F se denomina valor o imagen.*
>
> *Se denomina también función en lugar de aplicación. Se le representa por una letra f, y si a x ϵ E corresponde y ϵ F, se escribe y = f(x).*

> *A veces se escribe $x \rightarrow f_x$, entonces la variable se llama índice. Se empleará frecuentemente esta notación cuando el conjunto de definición E sea el conjunto N de números de enteros naturales.*

Algunos autores dan la definición de función y presentan sus propiedades, sin hacer referencia a aplicación, como ocurre en las definiciones que presentamos a continuación.

Una función F de A en B es una relación binaria con dominio en A y codominio en B con la propiedad que para todo x ϵ A hay exactamente un elemento y ϵ B tal que (x, y) ϵ F (Ensley y Crawley, 2006, p.255). Estos autores presentan ejemplos en los que se observan diferentes representaciones, tanto para las relaciones binarias como para las funciones.

Las representaciones que utilizan para la función son: tablas de valores, diagramas de flechas y pares ordenados de valores.

Por ejemplo, la tabla de valores que corresponde a la función f cuya regla es: *a cada número se le asocia su cuadrado*, cuyo dominio es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y su codominio es el conjunto N.

Tabla 3 - 1. Ejemplo de tabla de valores (Ensley y Crawley, 2006, p. 251) [4]

entrada	1	2	3	4	5
Salida	1	4	9	16	25

Johsonbaugh utiliza únicamente la idea de función y no la de aplicación:

> S*ean X e Y dos conjuntos. Una función f de X en Y es un subconjunto del producto del conjunto cartesiano XxY que tiene la propiedad de que para todo x ϵ X, existe exactamente una y ϵ Y, con (x, y) ϵ f. El conjunto X se denomina dominio de f. El conjunto de todas las y que cumplen que (x, y) ϵ f, se llama rango de f. El rango es un subconjunto de Y* (Johsonbaugh, 2005, p. 87).

Este autor presenta ejemplos de representaciones de las funciones. Una representación, en pares ordenados, viene dada por el conjunto f = {(1, a), (2, b),

---

[4] Ensley y Crawley (2006) realizan un estudio de las propiedades de las relaciones binarias así como de las funciones.

(3, a)}. Es una función de X = {1, 2, 3} a Y {a, b, c}. Otra representación que aparece como ejemplo es el diagrama de flechas para dicha función, como en la Figura 3 - 3.

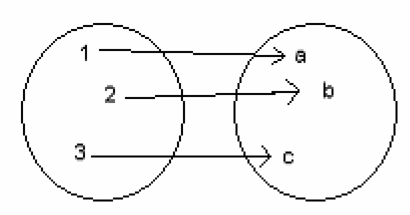


Figura 3 - 3. Ejemplo de diagrama de flechas

Otro ejemplo de función que propone Johsonbaugh, junto con un comentario y la representación de la misma, es el siguiente:

> *Sea f la función dada por la regla f(x) = x^2, aunque con frecuencia se encuentran funciones definidas de esta forma, la definición en este caso está incompleta pues no se indica el dominio. Si se dice que el dominio es el conjunto de todos los números reales, en la notación de pares ordenados se tiene:*
>
> $f = \{(x, x^2) \,/\, x \text{ es un número real}\}$

La representación en este caso se puede realizar mediante una gráfica como la que aparece en la Figura 3 - 4.

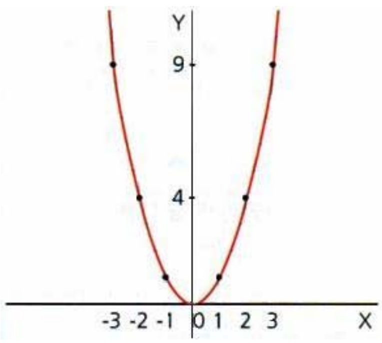


Figura 3 - 4. Gráfica de la función cuadrática

Janvier, Girardon y Morand (1993) recogen las conversiones o traducciones posibles entre las expresiones en las diferentes formas que admiten las funciones: verbal, de tabla, de gráfica y de fórmulas. Cada una de dichas conversiones le asocian un verbo de acción que indica el aspecto que potencia dicha conversión. Así, cuando se pasa de una gráfica a una descripción verbal, se facilita la lectura.

Si se pasa de descripción verbal a expresión algebraica, o fórmula, se facilita la modelización (Castro y Castro, 1997, p.105).

Aplicación

Algunos autores, entre los consultados, definen aplicación en vez de función, y las consideran análogas, como le sucede a De Burgos (1980). Dicho autor llama definición "ingenua" de aplicación a la siguiente: Sean A y B dos conjuntos; se dice que se dispone de una *función* definida en A y con valores en B, o bien de una *aplicación* de A en B, cuando está establecida una ley o correspondencia que asocie a todo elemento *a* de A un, y sólo un, elemento *b* de B, que recibe el nombre de imagen de *a*. El conjunto A se llama *conjunto inicial*, *conjunto de partida* o *campo de definición*, y el conjunto B recibe el nombre de *conjunto de llegada*. Se llama *variable* o *argumento* al elemento genérico del conjunto de partida. Este autor asegura que se puede observar que esta definición no resiste un análisis medianamente serio para que sea aceptada como válida, no se dice nada de qué se entiende por "ley o correspondencia que asocie". Sostiene que es una definición intuitiva que permite dar una idea gráfica de lo que se quiere definir.
Para designar las aplicaciones se utiliza una letra como f, g, h, …
Para indicar que f es una aplicación de A en B, se escribe:

$$f: A \rightarrow B, \text{ o bien, } a \rightarrow b = f(a)$$

En general, f(A) no será igual a B sino que estará contenido en él. El conjunto imagen se suele representar también por Im (f).
De Burgos señala que los términos *aplicación* y *función* se han tomado con idéntico significado. No obstante, se suele reservar la segunda de ellas para cuando *los conjuntos A y B son campos numéricos o, en general, cuando son espacios del análisis matemático* (De Burgos, 1980, p.14).

Gráfica o grafo de una aplicación

Dada una aplicación $f: A \rightarrow B$, para cualquiera que sea el elemento $a \in A$, $\exists$ un único $f(a) \in B$ y, por tanto, tiene sentido decir que todo elemento a de A proporciona un solo par $(a, f(a)) \in AxB$. El conjunto G constituido por todos estos pares recibe el nombre de gráfica o grafo de la función f.

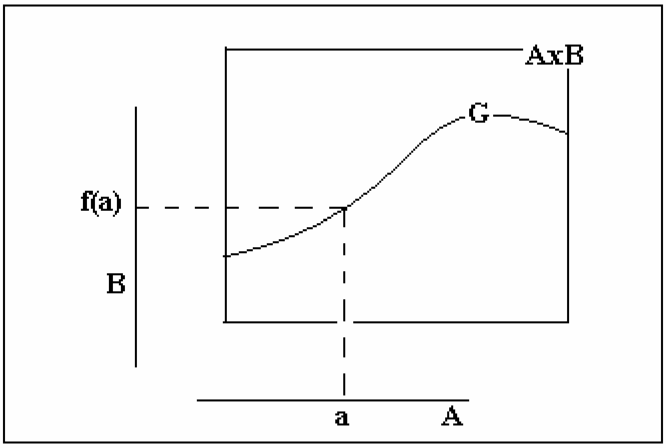


Figura 3 - 5. Gráfica de f = {(a, f(a)) / a ∊ A} = G (De Burgos, 1980, p. 15)

La gráfica de cualquier función f: A → B es entonces un grafo que goza de la siguiente propiedad: para cualquiera que sea el elemento a ∊ A, ∃ un y solo un par de la gráfica G de f que tiene a *a* por primera componente.

Concepto de aplicación

La propiedad anterior de las gráficas permite dar una nueva definición de función pero no adolece, según De Burgos, de la imprecisión que tenía la dada inicialmente. Dados dos conjuntos A y B y un grafo G, subconjunto de su producto cartesiano AxB, que goce de la propiedad de que para todo elemento a ϵ A existe un, y solo un, par (a, b) de G que tiene a a por primera componente, se dice que el grafo G define una aplicación f de A en B; para cualquiera que sea el elemento a ϵ A se llama imagen de él por f al único elemento b ϵ B tal que (a, b) ϵ G, y se representa por f(a). Dicho de otro modo, *una aplicación es una terna (A, B; G) en la que G es un grafo de AxB, cumpliendo que, para todo a ϵ A, existe un único b ϵ B tal que (a, b) ϵ G* (De Burgos, 1980, p. 15).

<u>Correspondencia</u>

Si alguno de los requisitos exigidos a la aplicación no se cumpliera, se dice que se tiene una *correspondencia*.

Dados dos conjuntos A y B y un grafo G, subconjunto de su producto cartesiano, se dice que G define una correspondencia f de A en B; se llaman imágenes, por f de un elemento a ϵ A, a todos aquellos elementos b ϵ B, si es que existen, tales que (a, b) ϵ G. Mediante una correspondencia, un elemento del conjunto de partida puede carecer de imágenes, tener una sola imagen o tener varias imágenes. El concepto de correspondencia es, entonces, más amplio que el de aplicación[5].

La correspondencia es la relación más general que se puede encontrar entre dos conjuntos de números, está determinada entre los elementos de dos conjuntos. Las relaciones encontradas entre los objetos matemáticos cuyas definiciones hemos recogido se visualizan en la Figura 3 - 6. Consideramos que una correspondencia se da cuando se establece cualquier tipo de relación entre dos conjuntos, uno inicial o de partida y otro final o de llegada. Para que dicha correspondencia puede denominarse aplicación o función es necesario que todos los elementos del conjunto del que se parte tengan una y sólo una imagen, reservando la expresión función cuando se trabaja en análisis matemático o cuando los dos conjuntos considerados son conjuntos numéricos. Las sucesiones son un caso funciones particulares donde el conjunto inicial es el de los números naturales ordenado. Las sucesiones de números naturales exigen, además, que el conjunto final, o imagen, sea así mismo el conjunto de los números naturales.

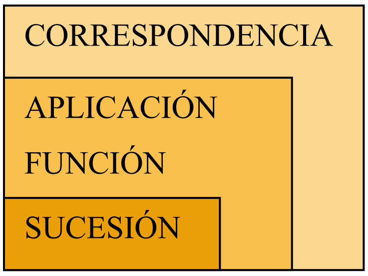


Figura 3 - 6. Relaciones de inclusión entre conceptos matemáticos definidos

LAS SUCESIONES COMO ESTRUCTURA MATEMÁTICA

La segunda dimensión del análisis de contenido hace referencia a la estructura matemática del propio objeto matemático, en este caso, las sucesiones.

Para realizar esta segunda parte del análisis de contenido centramos la atención en los elementos de una sucesión, las relaciones que existen entre ellos, las diferentes

[5] Se puede obtener más información sobre aplicaciones, propiedades y ejemplos de las mismas en De Burgos (1980, p.17).

propiedades que puede tener una sucesión (estas propiedades determinarán diferentes tipos de sucesiones) y los sistemas de representación en los que se pueden presentar una sucesión.

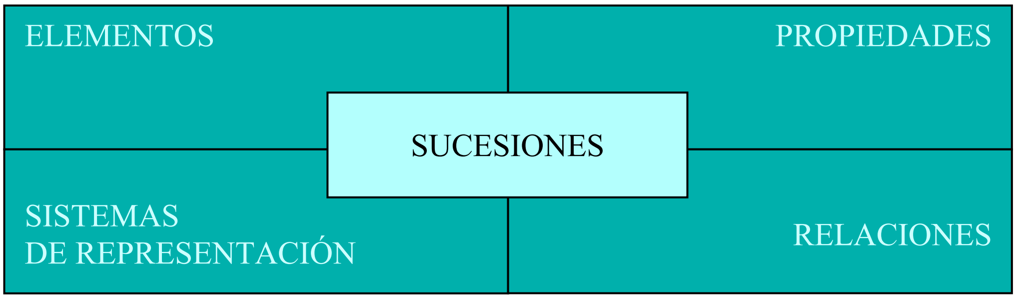


Figura 3 - 7. Las sucesiones de números naturales como estructura matemática

Elementos de las Sucesiones

En toda sucesión, se destacan tres elementos fundamentales: el *término general*, los *términos k-ésimos (o términos particulares)* y el *límite*.

Como ya se vio al definir sucesión, se denomina *término de la sucesión* a cada uno de los valores que constituyen el conjunto imagen que la función que la define. Se suelen escribir a_1, a_2, a_3…, donde el subíndice indica el número natural al que está asociado dicho término. En la correspondencia establecida, a_k, donde *k* toma un valor natural concreto, se refiere al término que está en el lugar *k* de la sucesión.

La notación más frecuente para designar una sucesión numérica es $\{a_n\}$ (Spivak, 1996). El término general, notado por a_n designa el elemento genérico del conjunto imagen.

Se dice que un número *p* es el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ *cuando a cada número positivo* ε *se puede hacer corresponder algún término de la sucesión, de tal manera que él y todos los que le siguen en esa sucesión difieren de p menos que* ε (De Guzmán y Rubio, 1990, p. 69).

Propiedades de las Sucesiones

Según sus elementos, las sucesiones poseen unas propiedades que hacen posible distinguir diferentes tipos de las mismas. Entre dichas propiedades se encuentran la finitud, la monotonía, la acotación, la convergencia y la recurrencia.

Finitud

La finitud depende de los términos que tenga una sucesión. Si la sucesión tiene un número finito de términos, se llama *sucesión finita*. En caso contrario, se habla de una *sucesión infinita*.

Por ejemplo, la sucesión de los *números naturales que son menores que 10* es una sucesión finita, mientras que la sucesión de *números naturales* es infinita.

Monotonía

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *es creciente* si $a_n \leq a_m$, $\forall\, m > n$. Al contrario ocurre en las *decrecientes,* en las que $a_n \geq a_m$, $\forall\; m > n$. En cualquiera de los dos casos, si la desigualdad es estricta, la sucesión se llama estrictamente creciente o estrictamente decreciente, respectivamente. Una sucesión se llama monótona si es creciente o decreciente.

Por ejemplo, la sucesión definida por *1/n, donde n es un número natural* es una sucesión estrictamente decreciente. La sucesión de los *números naturales* es estrictamente creciente.

Una sucesión es estacionaria si existe n_0 número natural tal que $\forall\, m$, n mayores que n_0, $a_n = a_m$.

Si $a_n = a_m$ $\forall\, m,\ n \in \mathrm{N}$ se dice que la sucesión es constante. Así, las sucesiones constantes son un tipo particular de las sucesiones estacionarias.

Acotación

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente cuando existe un número natural que es menor o igual que todos los términos de dicha sucesión. De manera análoga, una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente cuando existe un número natural que es mayor o igual que todos los términos de dicha sucesión.

Una sucesión se dice que está acotada cuando está acotada inferior y superiormente.

Por ejemplo, la sucesión de los números naturales está acotada inferiormente pero no superiormente, por lo que no está acotada.

Convergencia

Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si existe un número p que verifique que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural m (dependiente de ε) tal que, para todos los números naturales n, si $n > m$, entonces $|a_n - p| < \varepsilon$. Ese número p es a lo que se llama límite de la sucesión. Se dice que una sucesión es convergente si tiene límite.

Se dice que una sucesión no es convergente cuando existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\, m \in \mathrm{N}$ existe un natural $n>m$ tal que $|a_n - p| \geq \varepsilon$. Una sucesión que no es convergente se llama divergente.

Por ejemplo, el límite de la sucesión 1/n, donde n es un número natural es 0, por lo que es una sucesión convergente.

Recurrencia

Se dice que una sucesión numérica $\{a_n\}$ es *recurrente* si cada término, a partir de uno de ellos en adelante, se puede obtener en función de los anteriores. En caso de no cumplirse esta condición, la sucesión será *no recurrente*.

Por ejemplo, la sucesión de los *números naturales* es una sucesión recurrente (cada número se obtiene sumándole una unidad al término anterior) y la sucesión de los *números primos* no lo es.

En la Figura 3 - 8 se presenta un mapa conceptual basado en las propiedades de las sucesiones. Las flechas que unen dos propiedades indican que si una sucesión tiene la propiedad en la que comienza la flecha, esa sucesión también tiene la propiedad en la que la flecha termina. Los números sobre las distintas flechas son etiquetas para distinguirlas.

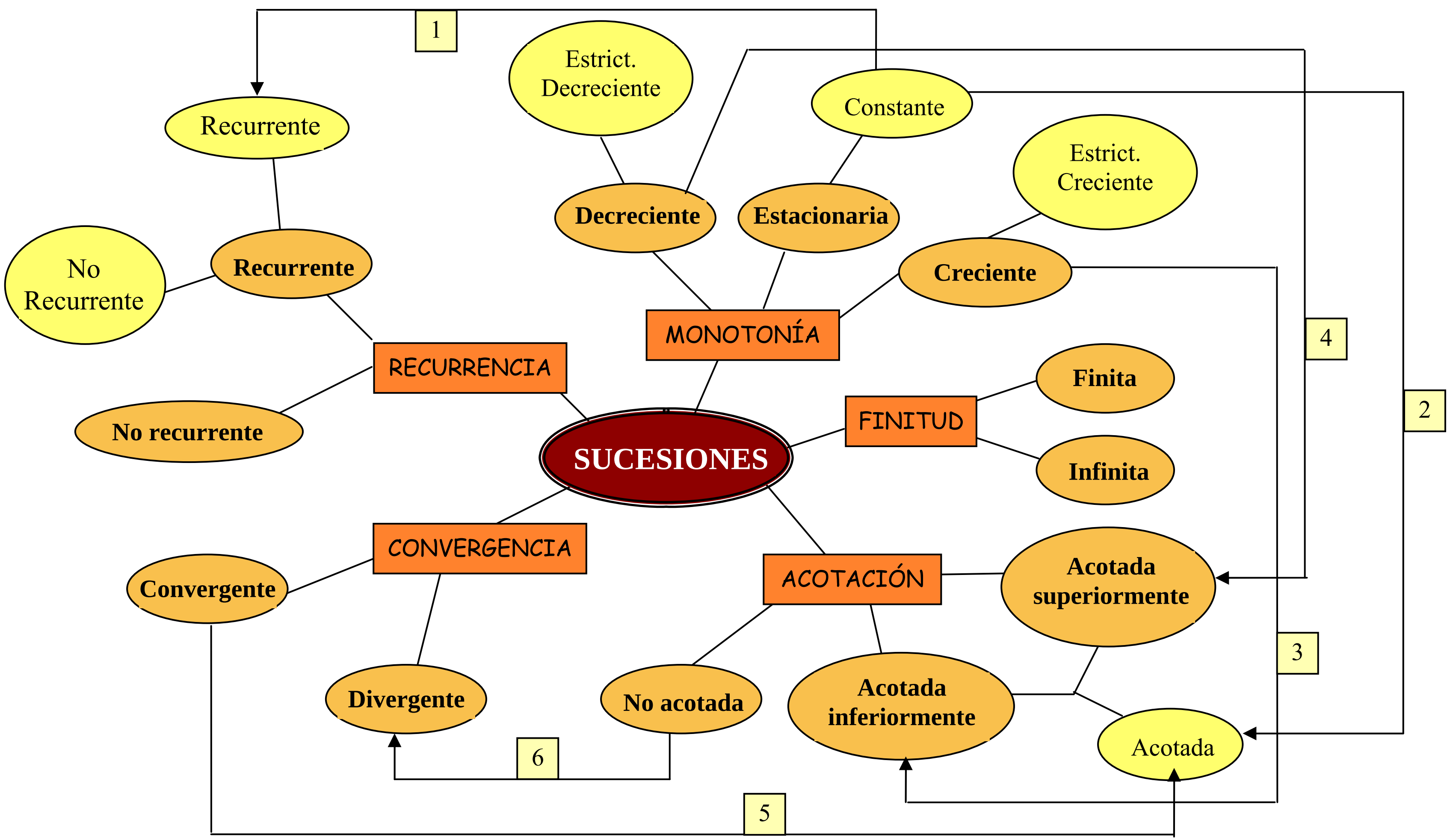


Figura 3 - 8. Tipos de sucesiones según sus propiedades

Demostramos a continuación las implicaciones entre algunas de las propiedades indicadas con etiquetas numéricas en la Figura 3 - 8. Nos basamos en las propias definiciones que hemos hecho anteriormente de las propiedades:

1. Constante $\Rightarrow$ Recurrente lineal de orden 1.

$\{a_n\}$ constante $\Rightarrow a_n = a_m \forall\ m, n \in \mathrm{N} \Rightarrow \{a_n\}$ recurrente lineal de orden 1.

2. Constante $\Rightarrow$ Acotada.

$\{a_n\}$ constante $\Rightarrow a_n = a_m \forall\ m, n \in \mathrm{N} \Rightarrow a_n - 1 \leq a_n$ y $a_n + 1 \geq a_n \Rightarrow \{a_n\}$ acotada inferior y superiormente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ acotada.

3. Creciente $\Rightarrow$ Acotada inferiormente.

$\{a_n\}$ creciente $\Rightarrow a_n \leq a_{n+1}\ \forall\ n \Rightarrow a_n - 1 \leq a_n \leq a_{n+1}\ \forall\ n \Rightarrow a_n - 1$ es cota inferior de $\{a_n\}$.

4. Decreciente $\Rightarrow$ Acotada superiormente.

$\{a_n\}$ decreciente $\Rightarrow a_n \geq a_{n+1}\ \forall\ n \Rightarrow a_n + 1 \geq a_n \geq a_{n+1}\ \forall\ n \Rightarrow a_n + 1$ es cota superior de $\{a_n\}$.

5. Convergente $\Rightarrow$ Acotada.

$\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists$ p (dependiente de ε) tal que $|a_n - p| < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists$ p (dependiente de ε) tal que $-\varepsilon < a_n - p < \varepsilon$ $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists$ p (dependiente de ε) tal que $-\varepsilon + p < a_n < \varepsilon + p \Rightarrow \{a_n\}$ acotada.

6. No acotada $\Rightarrow$ Divergente.

Queda demostrada por el contrarrecíproco del punto anterior.

Relación de Recurrencia

Por la particular incidencia que tiene en este trabajo la relación de recurrencia, le dedicamos una atención específica. Recogemos la definición aportada por varios autores, así como las condiciones que se han de cumplir para que se de tal relación.

Dada una sucesión $\{a_n\}$, una relación de recurrencia es una expresión que facilita el valor de un elemento cualquier a_n en función de uno o más términos previos de la sucesión, es decir, de $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$, para todo entero n mayor o igual a n_0, siendo n_0 un número entero no negativo.

Una relación de recurrencia para la sucesión a_0, a_1, a_2, … es una ecuación que relaciona a_n con ciertos predecesores $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$ (Johsonbaugh, 2005, p. 280).

Una relación de recurrencia consta de dos partes: un conjunto de condiciones iniciales y una regla de recurrencia. Por ejemplo, supongamos la relación de recurrencia expresada por $a_{n+1} = 3a_n$ con *n* mayor o igual que 0 y sea $a_0 = 5$.

El conjunto de condiciones en este caso se reduce a $a_0 = 5$ y la relación viene dada por $a_{n+1} = 3a_n$.

Las condiciones iniciales definen los términos de la sucesión que preceden al primero donde la relación de recurrencia tiene efecto.

La recurrencia anterior proporciona los siguientes valores:

$$a_0 = 5$$
$$a_1 = 3 \text{ x } a_0 = 3 \text{ x } 5 = 15$$
$$a_2 = 3 \text{ x } a_1 = 3 \text{ x } 15 = 45$$
$$a_3 = 3 \text{ x } a_2 = 3 \text{ x } 45 = 135$$

que constituyen la sucesión solución a la misma $a_n = \{5, 15, 45, 135\ldots\}$. Constituye una aplicación del conjunto de los números naturales, en el mismo conjunto ($N \rightarrow N$).

Una sucesión recibe el nombre de solución de la relación de recurrencia si sus términos satisfacen dicha relación[6]. *El principio de inducción asegura que por este procedimiento queda definida la sucesión* (De Guzmán y Rubio, 1990, p. 207).

En las sucesiones recurrentes Pólya (1967) señala que para conocer cada uno de los términos de una sucesión en función de los anteriores son necesarias dos cosas. Una es que algún término de la secuencia debe ser conocido. La otra es que debe de haber una cierta relación genérica que ligue cualquier término con los términos precedentes.

---

[6] La relación de recurrencia, en las sucesiones, es un caso particular de la función recursiva. Se define función recursiva como aquella que se invoca a sí misma (Johsonbaugh, 2005, p.177) consta de unas condiciones iniciales y una relación de recurrencia. Un ejemplo de función recursiva es la sucesión de Fibonacci $\{f_n\}$, definida por las ecuaciones, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-1}$. Las expresiones $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ son las condiciones iniciales y $f_n = f_{n-1} + f_{n-1}$ es la relación de recurrencia.

Una de las razones para usar una relación de recurrencia es que, en ocasiones, es más sencillo determinar el n-ésimo término de una sucesión en términos de sus predecesores que encontrar una fórmula explícita para el mismo en función de *n*.
Las relaciones de recurrencia, los algoritmos recursivos y la inducción matemática tienen una conexión estrecha. En los tres se supone que se conocen casos anteriores al caso con el que se trabaja (Johsonbaugh, 2005, p.281).

Recurrencia lineal homogénea

Entre las sucesiones recurrentes, se definen las *sucesiones recurrentes lineales de orden k* cuando existen *k* y $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ números tales que, desde un cierto *n* y para todos los siguientes, se tiene que:

$$a_{n+k} = u_1\, a_{n+k-1} + u_2\, a_{n+k-2} + \ldots + u_k\, a_n$$

A $\{a_n\}$ se le llama *sucesión recurrente lineal de orden k y la relación es la ecuación recurrente de orden k* (Markushévich, 1974, p. 7).
Equivalente a la definición anterior es la de García (2005):

> *Recibe el nombre de recurrencia lineal homogénea de grado k, con coeficientes constantes, una expresión del tipo:*
>
> $$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + ... + c_k\, a_{n-k};\;\; c_j \in R;\; c_k \neq 0;$$
>
> *O bien en forma implícita:*
>
> $$c_0\, a_n + c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + ... + c_k\, a_{n-k} = 0$$

Recibe el nombre de *lineal* porque el segundo miembro de la primera expresión está constituido por múltiplos del término anterior al a_n. Es *homogénea* porque no contiene términos que no sean múltiplos de los a_i; los coeficientes c_i son constantes y, por tanto, no dependen de *n*. Se dice que el *grado*, u *orden*, es *k* puesto que a_n viene dado en función de sus *k* términos anteriores (García, 2005, p. 232).

Recurrencia lineal de orden k y sucesión

Una relación de recurrencia lineal homogénea de grado *k* con coeficientes constantes, junto con *k* coeficientes iniciales

$$a_0 = c_0,\ a_1 = c_1,\ ...\ a_{k-1} = c_{k-1}$$

define de manera única una sucesión

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \qquad \text{(Johsonbaugh, 2005, p. 292)}$$

Sobre esta misma idea, García (2005, p. 235) presenta el teorema siguiente e indica que se puede demostrar por un proceso inductivo:

> *Dada una relación de recurrencia lineal general de orden k*
>
> $$c_0(n)\, a_n + c_1(n)\, a_{n-1} + c_2(n)\, a_{n-2} + \ldots + c_k(n)\, a_{n-k} = F_n\,, \quad n>k$$
>
> *siempre tiene una sucesión-solución, y ésta es única, si se dan las k condiciones iniciales*
>
> $$a_1 = C_1,\ a_2 = C_2\,, \ldots, a_k = C_k$$

<u>Solución de una relación de recurrencia</u>

Resolver una relación de recurrencia que implica una sucesión a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,... significa encontrar una fórmula explícita para el término general a_n. Johsonbaugh (2005) presenta dos métodos para resolver la recurrencia, el de iteraciones y un método especial que se aplica a relaciones de recurrencia homogéneas lineales con coeficientes constantes. El autor indica que existen otros métodos más poderosos pero dada su complejidad, no los trata. Nosotros recogemos el método de iteraciones.

Método de iteraciones

Para resolver una relación de recurrencia que implica la sucesión a_0, a_1, a_2, a_3, ... , por iteración, se usa la relación de recurrencia dada para escribir el término enésimo a_n en función de algunos de sus predecesores a_{n-1}, ..., a_0. Después se usa la relación de recurrencia dada de manera sucesiva para sustituir cada uno de los a_{n-1}, ..., a_0 por sus predecesores. El proceso continúa hasta obtener una fórmula explícita. (Johsonbaugh 2005, p. 290).

De una forma general, supongamos que a_n está definida en función de a_{n-1}:

$$a_n = \ldots a_{n-1} \ldots,$$

Se comienza por esta ecuación original sustituyendo a_{n-1} por una expresión con a_{n-2} para obtener:

$$a_n = \ldots a_{n-2} \ldots,$$

Se continúa hasta obtener a_k (que puede ser a_0), cuyo valor puede estar dado de manera explícita como la condición inicial:

$$a_n = \ldots a_k \ldots$$

sustituyendo el valor de a_k se tendrá resuelta la recurrencia (Johsonbaugh 2005, p. 290).
Un tipo particular de sucesiones recurrentes son las progresiones aritméticas.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Recibe el nombre de progresión aritmética[7] toda sucesión de números tales que uno cualquiera de ellos es igual al anterior añadiéndole un número fijo *d*, positivo o negativo, denominado *razón de la progresión*. Una progresión aritmética se indica mediante los elementos que la forman, así:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_{n-1}, a_n, \ldots$$

Estos elementos reciben el nombre de términos y la sucesión que forman puede ser creciente o decreciente según sea $d > 0$ o $d < 0$, también puede ser finita o infinita.
Una progresión aritmética es una sucesión particular a las que también se les conoce con el nombre de progresiones por diferencia en cuyo caso la razón d recibe el nombre de diferencia.

Progresiones Aritméticas de Orden Superior

Un concepto más general que el de progresión aritmética ordinaria, presentado en el apartado anterior es el de *progresión aritmética de orden superior*, del que la anterior es un caso particular.
Se denomina progresión aritmética de orden p a la sucesión de números resultantes de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable (García, 2005, p. 258).
El polinomio del cual surge la progresión es el término general de la misma, es decir:

$a_n = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \ldots + c_{p-1} x + c_p$, siendo los c_i números conocidos.

[7] La información recogida sobre progresiones aritmética procede de García (2005). Dicho autor presenta un tratamiento análogo para las progresiones geométricas. Nosotros nos centramos en las progresiones aritméticas por ser el contenido matemático en el que se centra el trabajo que presentamos.

Las progresiones aritméticas de primer orden (orden 1), que son las progresiones aritméticas ordinarias, tienen como término general $a_n = c_0x + c_1$. En efecto, si se asignan a x los valores enteros consecutivos 0, 1, 2,… se obtiene:

c_1, $c_0 + c_1$, $2c_0 + c_1$, $3c_0 + c_1$… progresión aritmética ordinaria con $a_1 = c_1$ y $d = c_0$

Las progresiones de segundo orden (orden 2) son las que tienen como término general $a_n = c_0x^2 + c_1x + c_2$

De acuerdo con estas definiciones las progresiones aritméticas de números naturales de orden 1 son sucesiones de números naturales cuyo término general se corresponde con una función polinómica de primer grado. Análogamente, las progresiones aritméticas de números naturales de orden 2 son las sucesiones de números naturales cuyo término general se puede expresar mediante una función polinómica de segundo grado. Stacey (1989) las llama, de forma equivalente, *sucesiones de números naturales lineales* y *sucesiones de números naturales cuadráticas*.

Algoritmo de las Diferencias Finitas

Dada una sucesión de números cualesquiera, finita o infinita, de la forma:

$u_0,\ u_1,\ u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ...$

podemos obtener otra sucesión, restando da cada término el anterior, como sigue:

$u_1 - u_0,\ u_2 - u_1, ..., u_n - u_{n-1},\ u_{n+1} - u_n, ...$

Usando el símbolo Δ para expresar la diferencia, podemos expresar:

$\Delta_0 = u_1 - u_0$, $\Delta_1 = u_2 - u_1$, $\Delta_{n-1} = u_n - u_{n-1}$, $\Delta_n = u_{n+1} - u_n$

La sucesión queda de la forma:

Δ_0 , Δ_1 , ... Δ_{n-1} , Δ_n , Δ_{n+1}...

Esta nueva sucesión se denomina sucesión de las primeras diferencias o sucesión de diferencias de primer orden.

Aplicando el mismo proceso a esta última sucesión y llamando $\Delta^2u_n = \Delta(\Delta u_n) = \Delta(u_{n+1} - u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, obtenemos la nueva sucesión llamada de diferencias de segundo orden o de diferencias segundas.

Δ^2u_0 , Δ^2u_1 , Δ^2u_2 ,..., Δ^2u_n , ...

Procediendo de forma análoga se pueden obtener la sucesión de diferencias de orden *k* donde:

$$\Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n$$

Se observa que es necesario partir de una sucesión de n+1 valores para llegar a obtener las diferencias de orden n-ésimo[8].

Diferencias finitas de un polinomio

Sea y = p(x) una función polinómica dada. Indicando por $\Delta x = h$ el valor fijo del incremento o intervalo de la variable independiente, se denomina diferencias finitas de primer orden de y = p(x) a la expresión:

$$\Delta y \equiv \Delta\, p(x) = p\,(x + \Delta x) - p(x) = p(x + h) - p(x)$$

las diferencia finitas de orden *n* se definen como:

$$\Delta^n y = \Delta\,(\Delta^{n-1} y)\,,\ \text{con}\ \ n = 2, 3, \ldots$$

Teorema sobre las diferencias finitas de un polinomio

Las diferencias finitas de un polinomio p_n de grado n, constituyen un polinomio de grado n - 1 y, en consecuencia, las diferencias n-ésimas de tal polinomio son constantes iguales (García, 2005, p. 263)[9].

Diferencias finitas de progresiones de orden *p*

Dado que los términos de una progresión aritmética de orden *p* proceden de los distintos valores que toma un polinomio de grado *p* según un intervalo constante de la variable independiente, se puede afirmar que la tabla de diferencias de una progresión aritmética de orden *p* tiene iguales sus diferencias p-ésimas. Y recíprocamente, si las diferencias de orden *p* de la sucesión

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$

son constantes, entonces los términos de esa sucesión constituyen una progresión aritmética de orden *p*[10]. El término general la progresión coincidirá con dicho polinomio y se puede llegar a él si se conoce un número adecuado de los primeros términos de dicha sucesión. Se pueden ver dos ejemplos de la aplicación de este

[8] Δ es un operador lineal. Las propiedades que hacen que sea así, se pueden consultar en García, 2005, p. 260).

[9] La demostración de este teorema puede consultarse en García (2005, p. 263).

[10] Más información sobre este punto se encuentra en García (2005, p. 264).

teorema al final de este capítulo, en las estrategias de resolución para hallar el término general de las progresiones aritméticas de orden 1 y de orden 2.

Propiedades de las Progresiones Aritméticas de Órdenes 1 y 2

En la Figura 3 - 9 presenta un esquema que refleja las propiedades específicas de este tipo de sucesiones que son progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2, como particularización del esquema presentado en la Figura 3 - 8.

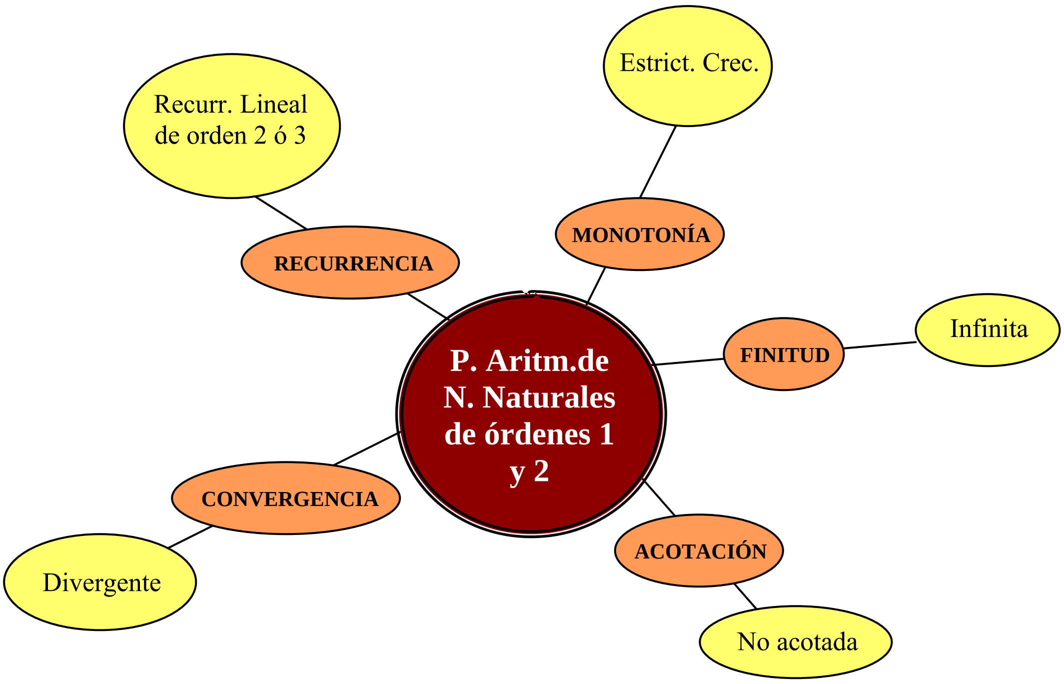


Figura 3 - 9. Caracterización de progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2

Las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2 quedan caracterizadas desde el punto de vista de sus propiedades como sucesiones estrictamente crecientes, infinitas, no acotadas, divergentes y recurrentes lineales de órdenes 2 (sucesiones lineales) [11] y recurrentes lineales de orden 3 (sucesiones cuadráticas) [12].

Operaciones entre los Términos de la Progresión Aritmética

1. *Cálculo de un término cualquiera*

Sea la progresión $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, \ldots$

[11] Las sucesiones lineales son recurrentes lineales de orden dos ya que: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.
[12] Las sucesiones cuadráticas son recurrentes lineales de orden tres ya que $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.

Por definición se tiene: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, ..., $a_n = a_{n-1} + d$

La suma miembro a miembro de las n-1 igualdades da como resultado

$$a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n - 1) d$$

igualdad que simplificada es esta otra:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Esta expresión que permite obtener un término cualquiera, en función del primero, del total de términos que le preceden, y de la razón.

2. *Cálculo de otros elementos*

La expresión calculada en la primera operación indicada, permite deducir estas otras:

$a_1 = a_n - (n - 1) d$ Cálculo del primer término

$d = (a_n - a_1) / (n - 1)$ Cálculo de la razón

$n = (a_n - a_1) / d + 1$ Cálculo del número de términos

3. *Cálculo de un término cualquiera en función de otro cualquiera anterior*

Sean a_n y a_k dos términos cualquiera de una sucesión con $k < n$.

Sea la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ... a_{n-1}, a_n$.

Utilizando la igualdad encontrada en el apartado 1, se tiene:

$$\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n - 1) d \\ \underline{a_k = a_1 + (k - 1) d} \\ a_n - a_k = nd - kd = (n - k) d \Rightarrow a_n = a_k + (n - k) d \end{array}$$

Si fuese $k > n$, es decir si se buscase un término en función de otro posterior, bastaría hacer la sustracción anterior de la forma $a_k - a_n$, obteniéndose entonces:

$$a_n = a_k - (k - n) d$$

4. *Suma de términos equidistantes de los extremos*

Sea la progresión aritmética $a_1, a_{1+1}, a_{1+2}, ..., a_{1+k}, ..., a_{n-k}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$, en la que a_{1+k} y a_{n-k} son dos términos equidistantes, respectivamente de a_1 y a_n.

La definición de progresión permite escribir las expresiones:

$$a_{1+k} = a_1 + kd$$

$$a_{n-k} = a_n - kd$$

Sumando estas expresiones, se obtiene: $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 - a_n$, que indica que la suma de dos términos equidistantes es igual a la suma de los dos extremos.

5. *Suma de n términos de una progresión aritmética*

Si se designa por S_n la suma de *n* términos de una progresión aritmética y teniendo en cuenta la suma de términos equidistantes, se obtienen dos sucesiones que sumadas y reducidas dan:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sumando estas expresiones, se obtiene: $2\ S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots\ (a_{n-1} + a_2) + (\ a_n + a_1)$. Es decir: $2\ S_n = (a_1 + a_n)\ n$

De donde:

$$S_n = (a_1 + a_n)\ n/2 \text{ y } S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1)\ d]\ n/2 = n\ a_1 + n\ (n - 1)\ d\ /\ 2$$

6. *Interpolación de medios diferenciales*

Interpolar uno o más números, llamados medios aritméticos o diferenciales, entre dos dados, es hallar los términos que faltan en una progresión aritmética de la cual uno de los números dados es el primer término y el otro, el último.

Si se desea interpolar *m* medios diferenciales entre los datos a_1 y a_n, bastará calcular la razón de la progresión que van a formar esos *m* términos con los a_1 y a_n, en total *n*, donde $n = m+2$.

Aplicando la fórmula que permite calcular la razón, se tiene

$$d = a_n - a_1\ /\ (m + 2) - 1 = (a_n - a_1)\ /\ (m + 1)$$

Elementos de las Progresiones Aritméticas que consideramos en esta Investigación

Como hemos indicado, debido a intereses investigadores, hemos considerado como contenido matemático las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. Respecto a ellas, nos hemos centrado en los términos concretos de la sucesión y el término general de la misma. Denotaremos con a_k cuando hagamos referencia a los términos concretos, particulares de la sucesión (términos k-ésimos) y con a_n cuando hagamos referencia al término general de la misma.

Relaciones entre los Términos k-ésimos y el Término General

En el trabajo con las sucesiones, se pueden establecer diferentes relaciones entre los elementos que hemos considerado. Ilustramos gráficamente estas relaciones en la Figura 3 - 10.

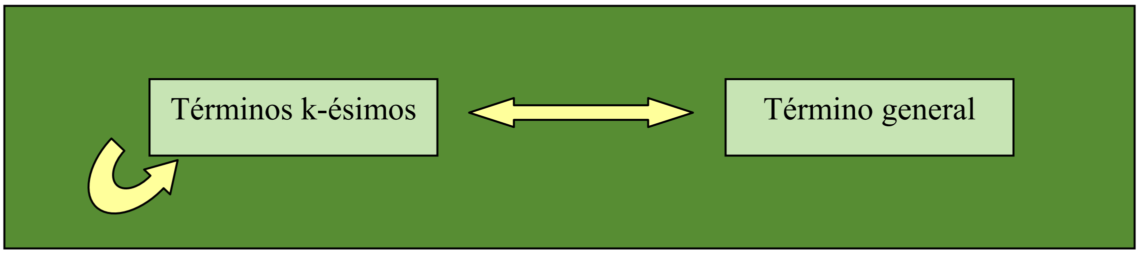


Figura 3 - 10. Elementos y relaciones

De este modo, se obtendrían dos tipos de relaciones, representadas por las dos flechas de la figura anterior. La primera relación que se puede establecer es entre los términos k-ésimos de la sucesión. La segunda, entre términos k-ésimos y el término general. Teniendo en cuenta estas relaciones y el lugar que ocupan los términos k-ésimos en la sucesión (Castro, 1995), identificamos un número de relaciones específicas más amplio, entre estos elementos de la sucesión:

1. a. Entre los primeros términos consecutivos de una sucesión.

   b. Entre términos k-ésimos consecutivos de una sucesión.
2. a. Entre los primeros términos no consecutivos de una sucesión.

   b. Entre términos k-ésimos no consecutivos de una sucesión.
3. a. Entre los primeros términos de una sucesión y el término general de la misma.

   b. Entre términos k-ésimos de una sucesión y el término general de la misma.

   c. Entre el término general de una sucesión y los primeros términos de la misma.

   d. Entre el término general de una sucesión y los términos k-ésimos de la misma

Operaciones entre los Términos k-ésimos y el Término General: Continuación, Extrapolación, Generalización y Particularización

Las relaciones indicadas en el epígrafe anterior dan lugar a ciertas operaciones de las consideradas entre términos cualquiera de una progresión aritmética (en el apartado “Operaciones entre los Términos de la Progresión Aritmética”. Recogemos estas operaciones en la Tabla 3 - 2 a partir de las relaciones que se pueden establecer entre los términos.

Tabla 3 - 2. Relaciones y operaciones

RELACIONES ENTRE:	OPERACIONES:
1. a. Primeros términos consecutivos b. Términos k-ésimos consecutivos	1. a. Conocidos los primeros términos consecutivos de una sucesión, obtener los siguientes. (Continuación 1) 1. b. Conocidos algunos términos consecutivos de una sucesión, obtener los siguientes (Continuación 2)
2. a. Primeros términos no consecutivos b. Términos k-ésimos no consecutivos	2. a. Conocidos los primeros términos (no consecutivos) de una sucesión, obtener otros términos k-ésimos (Extrapolación 1) 2. b. Conocidos algunos términos k-ésimos (no consecutivos) de una sucesión, obtener otros términos k-ésimos (Extrapolación 2)
3. a. Primeros términos y término general b. Términos k-ésimos y término general c. Término general y primeros términos d. Término general y términos k-ésimos	3. a. Encontrar el término general conociendo los primeros términos (Generalización 1) 3. b. Encontrar el término general conociendo algunos términos k-ésimos (Generalización 2) 3. c. Obtener los primeros términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 1) 3. d. Obtener algunos términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 2)

En la Tabla 3 - 2 aparecen, entre paréntesis, los nombres dados a las operaciones indicadas. Se puede observar que nos centraremos en las operaciones de: *continuación*, *extrapolación*, *generalización* y *particularización*.

Las operaciones en las que se relacionan los términos k-ésimos entre sí (continuación y extrapolación) se pueden llevar a cabo directamente o mediante la generalización y particularización posterior, a partir del término general. En el caso de que no se haga directamente, la generalización y la particularización aparecen como estrategia para la resolución de problemas. La Figura 3 - 11 resume esta idea (los números y letras que aparecen se refieren a las operaciones que se han presentado en la Tabla 3 - 2).

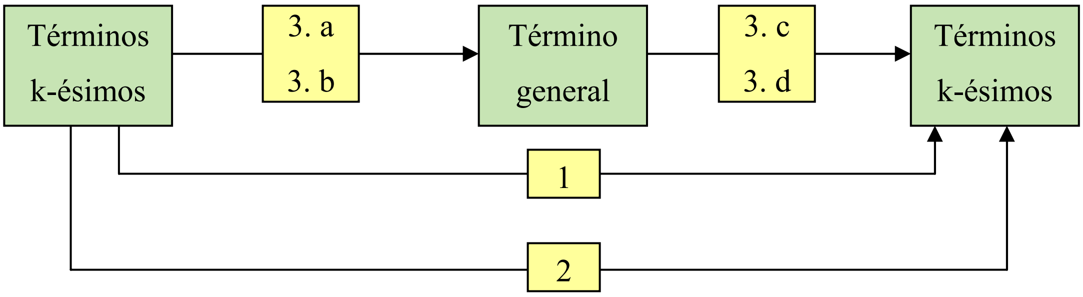


Figura 3 - 11. Generalización como estrategia para la continuación y extrapolación

Sistemas de Representación

Nos referimos a las representaciones externas en el sentido que se definieron en el capítulo anterior, ya que las consideramos la forma de comunicar y expresar los razonamientos que se llevan a cabo. A partir de ahora, cuando hablemos de sistemas de representación, de manera implícita nos estamos refiriendo a sistemas de representación externos.

Tanto los elementos de las sucesiones como las relaciones entre ellos, se pueden expresar en diferentes sistemas de representación. En el contexto numérico, cada forma de representación pone énfasis en algunas de sus propiedades y dificulta la expresión de otras. Al igual que sucede con las funciones, se pueden tomar, al menos, cuatro sistemas de representación: tablas numéricas, representaciones gráficas (por lo general, pero no exclusivamente mediante diagrama cartesiano), notaciones analíticas (por lo general algebraicas) y expresiones verbales de dependencias funcionales (Castro, 1995; Verstappen, 1982[13]). Estos cuatro sistemas de representación – numérico, gráfico, algebraico y verbal – pueden ser utilizados en el trabajo con sucesiones de números naturales.

<u>Representación de una progresión aritmética de números naturales</u>

Presentamos, como ejemplo, la sucesión de los números impares expresada en los diferentes sistemas de representación que se han considerado – numérico, gráfico, algebraico y verbal –.

[13] Verstappen (1982) distingue entre el lenguaje matemático y el no matemático en el trabajo con las funciones. Dentro del lenguaje matemático considera el geométrico, el aritmético y el algebraico; mientras que el lenguaje verbal es considerado lenguaje no matemático.

Sistema de representación numérico

Los primeros términos de la sucesión de los números impares, en el sistema de representación numérico, pueden escribirse:

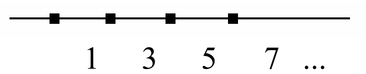
- En su forma numérica simple: 1, 3, 5, 7,...
- Mediante el desarrollo (o descomposición) aritmético: 1, 1 + 2, 1 + 2 + 2, 1 + 2 + 2 + 2,...
- En una tabla de valores (Tabla 3 - 3).

Tabla 3 - 3. Ejemplo de tabla de valores

N	1	2	3	4	...
a_n	1	3	5	7	...

Sistema de representación gráfico

- Los primeros términos de la sucesión de los números impares, se pueden representar en la recta numérica:



- En el plano cartesiano, donde la variable independiente es el lugar que ocupa un término en la sucesión y la variable dependiente es el término mismo, según aparece en la Figura 3 - 12.

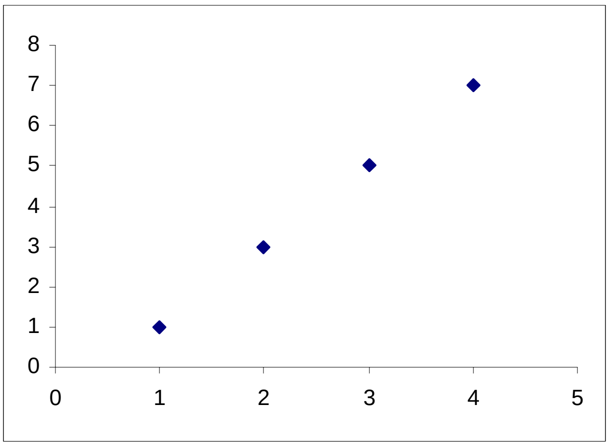


Figura 3 - 12. Primeros términos de la sucesión de los números impares en diagrama cartesiano

- Mediante una configuración puntual, es un tipo particular de configuración discreta:

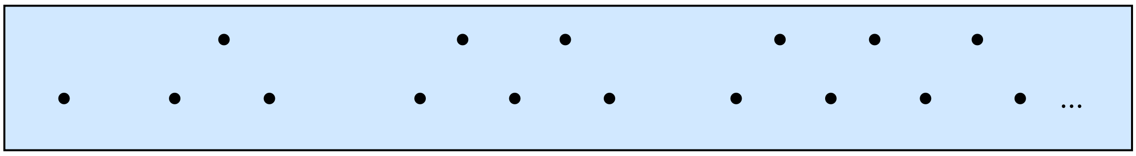


Figura 3 - 13. Primeros términos de la sucesión de los números pares en configuración puntual

Sistema de representación algebraico

El término general de la sucesión de los números impares se puede expresar algebraicamente mediante la ley de recurrencia, en la que un término se expresa en función del anterior: $a_n = a_{n-1} + 2$, con $a_0 = 1$.

O mediante la expresión polinómica funcional: $a_n = 2n + 1$.

Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal está determinado por el lenguaje cotidiano. En nuestro ejemplo, aparece "sucesión de los números impares".

En la Figura 3 - 14 se reflejan estos cuatro sistemas de representación y los diferentes tipos en que se puede manifestar dicha representación.

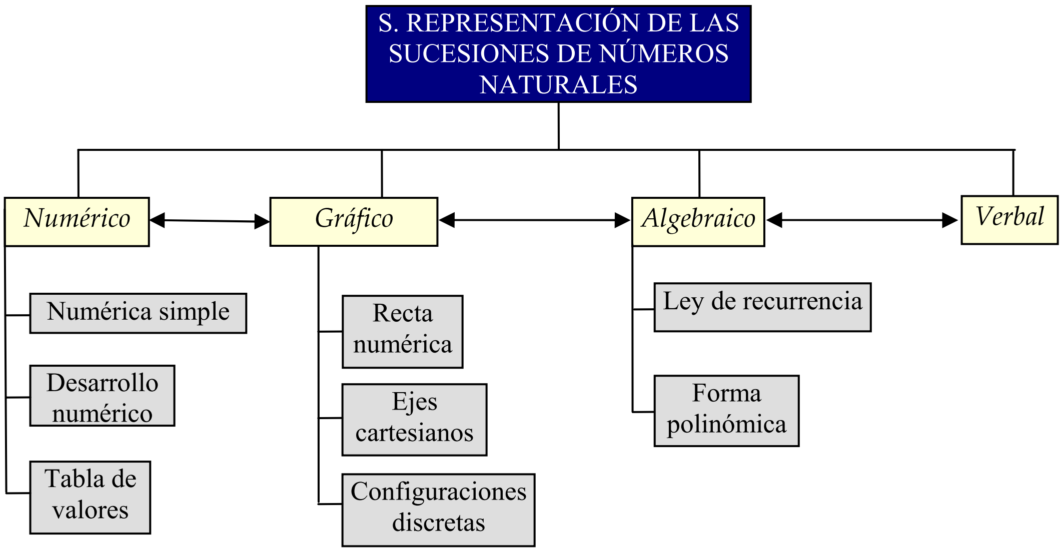


Figura 3 - 14. Sistemas de representación de las sucesiones naturales

Términos y Sistemas de Representación

Como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo, no todos los términos de las sucesiones pueden expresarse en los cuatro sistemas de representación que hemos considerado. Por el contrario, algunos sistemas de representación son exclusivos para ciertos elementos de las sucesiones.

El sistema de representación algebraico se ha asociado al proceso de generalización. Sin embargo, ésta no es la única forma de expresar el término general, ya que también se puede hacer verbalmente.

Los sistemas de representación numérico y verbal son utilizados también para el trabajo con los términos k-ésimos.

El sistema de representación gráfico tiene una especial implicación en los procesos de generalización, ya que la visualización ha sido considerada un factor importante en la búsqueda de patrones y su generalización.

El esquema de la Figura 3 - 15 recoge los términos k-ésimos y el término general de una sucesión relacionados con los sistemas de representación en los que pueden estar.

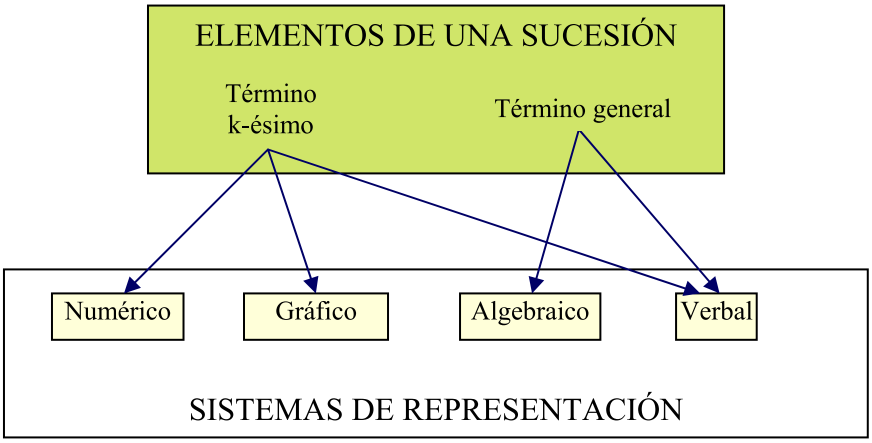


Figura 3 - 15. Sistemas de representación usuales de los elementos de una sucesión

Transformaciones en la Expresión de los Elementos para Diferentes Sistemas de Representación

Los procesos de traducción, o transformación, entre distintas formas de expresión de un mismo concepto matemático no son una cuestión trivial (Castro y Castro, 1997). Duval (2006) subraya el salto cognitivo que pueden suponer las transformaciones entre sistemas de representación.

Dado que los términos de una sucesión se pueden expresar en diferentes sistemas de representación, en el trabajo con estos términos se llevan a cabo una serie de transformaciones. Las relaciones entre los términos (Tabla 3 - 2) y los diferentes sistemas de representación en los que se pueden expresar los mismos (Figura 3 - 15) permiten identificar los tipos de transformaciones que se pueden producir en el trabajo con sucesiones:

1. Transformaciones entre sistemas de representación, de un mismo elemento (Kaput, 1992). Es a lo que Janvier, Girardon y Morand (1993) denominan *transformaciones sinónimas*.
2. Transformaciones entre sistemas de representación, de diferentes elementos.
3. Transformaciones entre formas de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación. Kaput (1992) y Gómez (2002) se refieren a estas transformaciones como *transformaciones sintácticas*.

1. Transformaciones entre sistemas de representación, de un mismo elemento

En estas transformaciones, un elemento que está expresado en un sistema de representación, pasa a ser expresado en otro sistema de representación. Dado que se han tenido en cuenta los términos k-ésimos y el término general de una sucesión, como elementos notables, recogemos las posibles transformaciones que se pueden identificar en dos tablas diferentes. En la Tabla 3 - 4 se pueden observar las transformaciones para términos k-ésimos de la sucesión, y en la

Tabla 3 - 5 para el término general. A estas transformaciones las hemos llamado Ti, con i = 1, 2,..., 6.

En estas tablas también se recogen las transformaciones que se pueden producir al cambiar la forma de expresar un elemento (término k-ésimo o término general) dentro de un mismo sistema de representación. Estas transformaciones son las transformaciones sintácticas numéricas (TSN), gráficas (TSG), verbales (TSV) o algebraicas (TSA), que más adelante trataremos.

Tabla 3 - 4. Transformaciones entre representaciones de un término k-ésimo

Elemento		Término k-ésimo		
	S. Representación	Numérico.	Gráfico	Verbal
Término k-ésimo	Numérico	TSN	T3	T5
	Gráfico	T1	TSG	T6
	Verbal	T2	T4	TSV

Tabla 3 - 5. Transformaciones entre representaciones del término general

Elemento		Término General	
	S. Representación	Algebraico	Verbal
Término general	Algebraico	TSA	T8
	Verbal	T7	TSV

Siguiendo con el ejemplo de la sucesión de los números impares que venimos utilizando, una transformación T1 se produce si hay una transformación de los términos k-ésimos, de la expresión en el sistema de representación gráfico al sistema de representación numérico, tal y como aparece en la Figura 3 - 16.

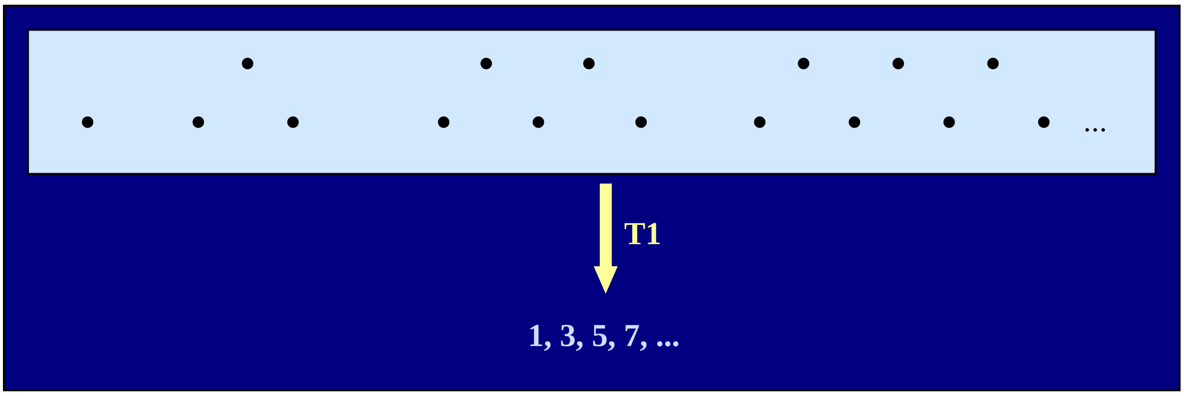


Figura 3 - 16. T1 para la sucesión de números impares

Otro ejemplo, se puede observar al pasar de expresar el término general de los números impares de la forma 2n - 1 (sistema de representación algebraico) a expresarla mediante el sistema de representación verbal, esto es decir o escribir: *cada término de la sucesión se obtiene restándole una unidad al doble de la posición que ocupa dicho término en la sucesión*, se estará produciendo una transformación T8.

2. Transformaciones entres sistemas de representación, de diferentes elementos

En la Tabla 3 - 6 se reflejan las transformaciones, o cambios posibles, entre sistemas de representación, de diferentes elementos. Para diferenciar estas transformaciones de las que se han tratado en el apartado anterior, hablaremos de cambios. Si el cambio en el sistema de representación se produce cuando se obtiene el término general a partir de los términos k-ésimos los hemos denotado por Ci, con i = 1,... 6. Si el cambio se produce cuando se obtienen términos k-ésimos a partir del término general, se han denotado por CiB, i = 1,... 6 si el cambio se produce del término general a los términos k-ésimos de la sucesión. En la Tabla 3 - 6 se recoge todos los posibles cambios que se pueden identificar entre términos k-ésimos y el término general de una sucesión.

Tabla 3 - 6. Cambios del sistema de representación entre diferentes elementos

Elemento		Término General			
	S. Representación	Algebraico		Verbal	
Término k-ésimo	Numérico	C1	C1B	C4	C4B
	Gráfico	C2	C2B	C5	C5B
	Verbal	C3	C3B	C6	C6B

Por ejemplo, si los primeros términos de la sucesión de los números impares están expresados de forma gráfica y de ellos se obtiene el término general expresado verbalmente, se está produciendo un cambio o transformación en el sistema de representación C5. La Figura 3 - 17 recoge este caso.

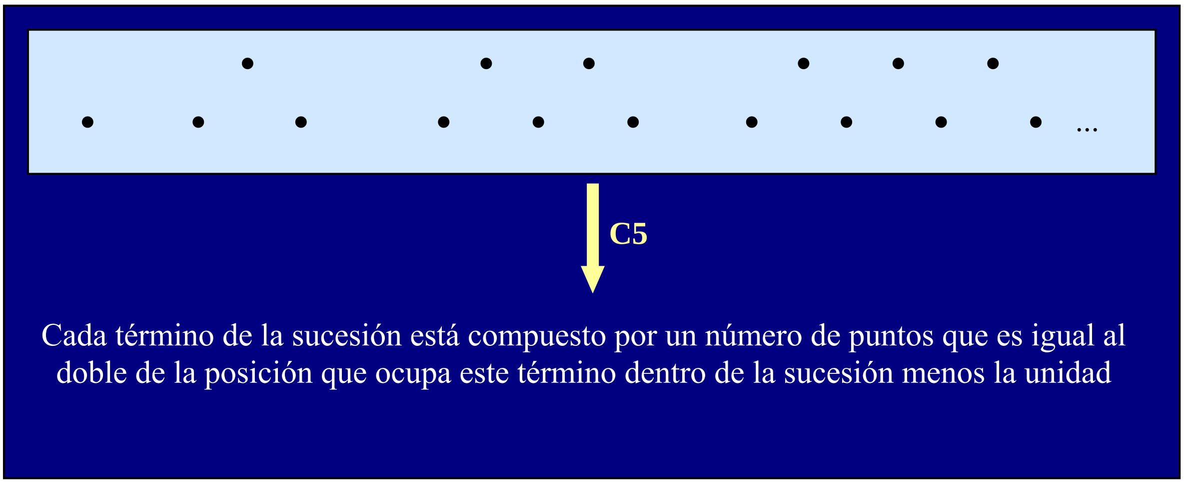


Figura 3 - 17. C5 para la sucesión de números impares

3. Transformaciones sintácticas

Las transformaciones sintácticas se producen al cambiar la forma de expresar un mismo elemento dentro de un mismo sistema de representación. Por tanto, pueden presentarse al trabajar tanto con términos k-ésimos, como con el término general de la sucesión. Considerando los sistemas de representación en los que se pueden expresar los términos k-ésimos y el término general (ver Figura 3 - 15), estas transformaciones quedan recogidas en las celdas sombreadas de la Tabla 3 - 4 (para los términos k-ésimos) y de la

Tabla 3 - 5 (para el término general), respectivamente. Las hemos denotado por TSN (Transformaciones Sintácticas Numéricas), TSG (Transformaciones Sintácticas Gráficas), TSA (Transformaciones Sintácticas Algebraicas) y TSV (Transformaciones Sintácticas Verbales).

Por ejemplo, los primeros términos de la sucesión de los números impares pueden expresarse de diferentes formas dentro del sistema de representación numérico. En la Figura 3 - 18 se observa la transformación TSN que se produce al cambiar la expresión de los primeros términos k-ésimos en desarrollo numérico (del sistema de representación numérico) a esos mismos términos en su expresión numérica simple (de sistema de representación numérico).

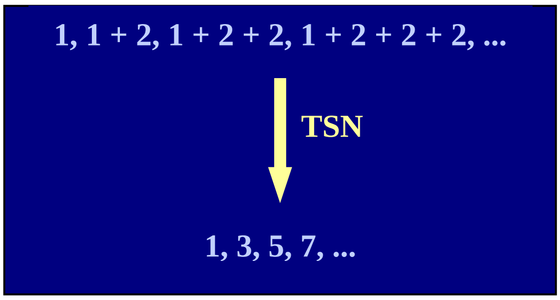


Figura 3 - 18. TSN para la sucesión de números impares

Operaciones, Elementos y Sistemas de Representación

En la Figura 3 - 19 recogemos los elementos que se relacionan en cada una de las operaciones identificadas en el apartado sobre la estructura matemática de las sucesiones y, según los elementos que involucran, se han identificado las transformaciones que se pueden dar entre los términos k-ésimos y el término general de la sucesión.

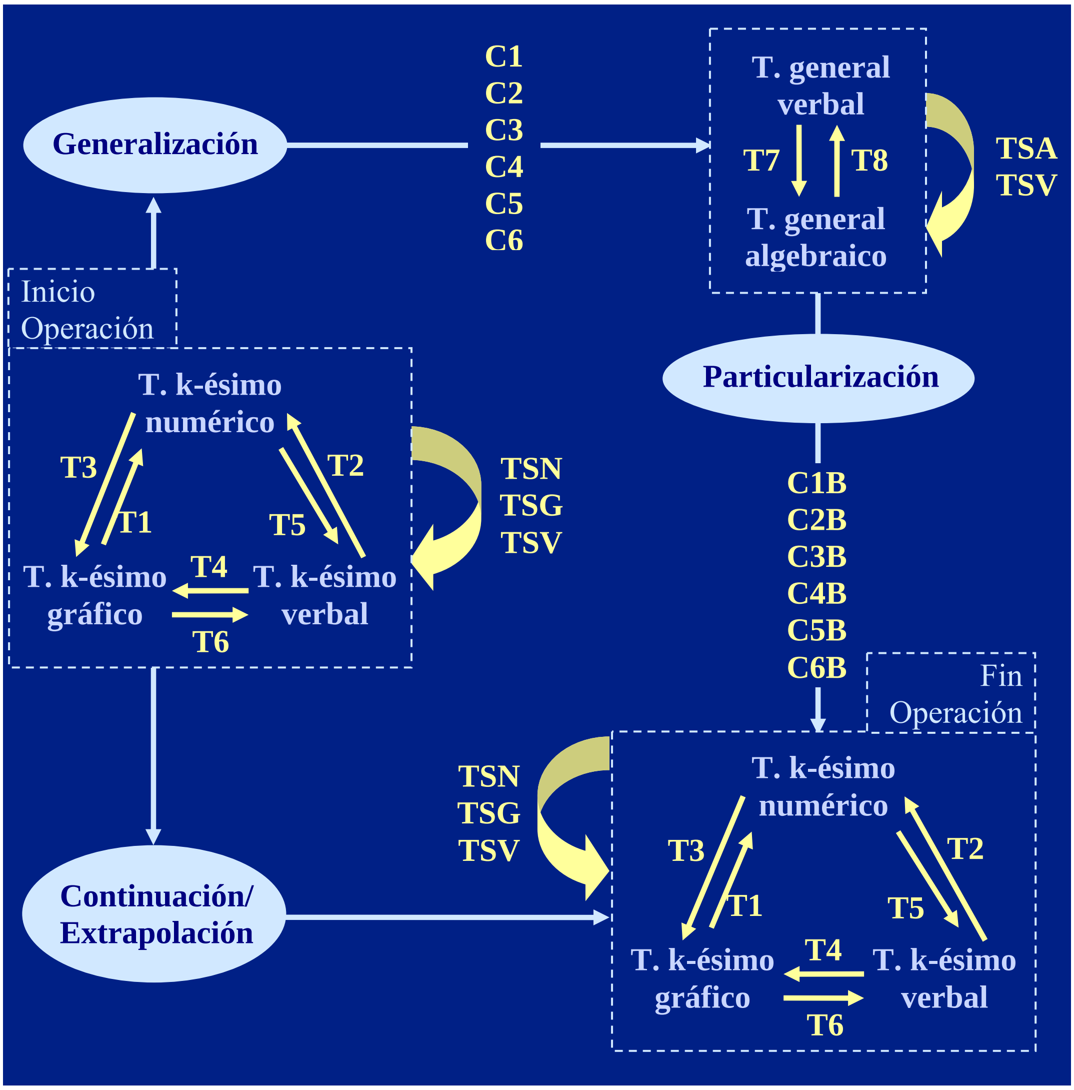


Figura 3 - 19. Operaciones, elementos y sistemas de representación

Aspectos Fenomenológicos

La fenomenología de un concepto matemático, estructura o idea, significa describirla en relación a los fenómenos para la que ha sido creada, y para aquellos a los que se ha extendido en el proceso de aprendizaje del hombre (Freudenthal, 1983, p. ix).

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos (Puig, 1997).

En este apartado nos centramos en la presentación de algunas consideraciones generales sobre contextos en los que aparecen las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. Sin intención de realizar un análisis fenomenológico exhaustivo, identificamos situaciones en las que dicho concepto matemático permite describir, caracterizar y clasificar fenómenos naturales, sociales y matemáticos, con el fin de que sirvan de referencia para la elaboración de los problemas a proponer a los estudiantes. Se dice que dichos fenómenos pueden ser organizados (modelizados) por medio de esta estructura matemática (Castro y Castro, 1997).

En general, el fenómeno que se puede organizar mediante las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2 es aquel en el que se identifica un patrón que se pueda expresar mediante una función polinómica lineal o cuadrática cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. El orden de los elementos del conjunto imagen es fundamental, como ya se ha descrito desde un comienzo. Nuestro propósito es mostrar algunos ejemplos de situaciones en diferentes ámbitos o contextos que lleven implícitos patrones que se corresponden con este tipo de sucesiones. Las situaciones a las que haremos referencia se pueden traducir en problemas que el concepto matemático permite resolver de manera eficiente y fiable (Kilpatrick, Hoyles y Skovsmose, 2005).

<u>En la vida cotidiana</u>

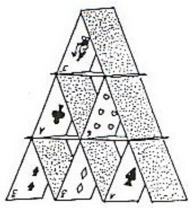
El concepto de secuencia numérica es muy primitivo, aparece asociado a la acción de contar desde las primeras civilizaciones. La secuencia de los números naturales surge como una manera de establecer inconscientemente una biyección entre los objetos considerados y una etiqueta que se emplea para diferenciarlos, cuantificarlos o, bien, ordenarlos. Esta idea sigue presentándose en la actualidad en nuestro entorno. Por ejemplo, podemos observar la secuencia numérica convencional para diferenciar ordenadamente los portales de una calle. En el caso de la numeración de los portales, en España se suelen numerar los portales de una acera con los números impares y los de la acera de enfrente con los números pares. Las numeraciones de los portales de la primera acera y de la de enfrente se corresponderían con dos sucesiones de números naturales lineales, la de los números impares y la de los números pares, respectivamente.

En los planes de entrenamiento, se pueden observar situaciones (ideales) susceptibles de ser modelizadas mediante progresiones aritméticas de números

naturales de órdenes 1 y 2. Por ejemplo, un corredor que va aumentando sus metros de carrera diariamente. Dicho aumento se puede expresar mediante una progresión aritmética, donde el término general es el número de metros que correrá el día *n* y los términos k-ésimos es el número de metros que corre el día *k*.
En entrenamientos no deportivos, como puede ser la mecanografía o la taquigrafía, si las pulsaciones por minuto que se adquieren con el paso de los días de práctica aumentan de una forma regular, también pueden expresarse mediante progresiones aritméticas de órdenes 1 o 2 en las que el término general es el número de pulsaciones para el día *n* y los términos k-ésimos son el número de pulsaciones que se consiguen un día cualquiera.

<u>En juegos</u>

En diferentes juegos populares, aparecen patrones que se corresponden con sucesiones cuadráticas de números naturales. Por ejemplo, el número de cartas necesarias para construir un castillo con un determinado número de pisos. Es fácil comprobar que para un piso se necesitan dos cartas; para dos pisos, 7; para tres pisos, 15 ...



En este caso, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 15$, $a_4 = 26$….

En general, para construir un castillo de cartas de *n* pisos se necesitan $\frac{n(3n+1)}{2}$ cartas.

Los juguetes articulados suelen tener un patrón en las diferentes longitudes que se pueden expresar mediante progresiones aritméticas de números naturales de orden 1. Por ejemplo, el mecano se caracteriza porque está constituido por piezas que tienen agujeros equidistantes, que pueden servir de unión con otras piezas. La longitud de cada pieza de este juego se puede saber conociendo la distancia entre dos agujeros consecutivos y teniendo en cuenta que desde el principio y desde el final de la pieza hasta el primer agujero hay esa misma distancia. Así, si *d* fuera esa distancia y *n* el número de agujeros, la longitud de la pieza sería $(n + 1)\, d$. De la misma forma, se puede calcular la longitud de cualquier figura construida con varias piezas, sabiendo el número de agujeros que hay.

En juegos de entretenimiento, como el Monopoly por ejemplo, se observan patrones que se pueden representar mediante progresiones aritméticas de números naturales de orden 1. Existen una serie de casillas equidistantes. Suponiendo que las casillas en las que se puede coger una tarjeta equidistan 5 casillas entre cada dos consecutivas (*d*), conociendo el número de casilla en la que estamos (a_1), podemos calcular el número de casillas que hay desde la casilla inicial hasta cada una de las casillas donde puedo coger tarjeta (la primera casilla estará a $a_1 + 5$ casillas; la segunda estará a $a_1 + 10$ casillas... y así sucesivamente). Así, la casilla que está en la posición *n* en la que puedo coger tarjeta estará a $a_1 + nd$ casillas.

<u>En contextos específicos</u>

Diferentes tipos de sucesiones han estado asociadas al proceso de la resolución de problemas que se plantearon desde las primeras civilizaciones. Así lo ponen de manifiesto los papiros de la época egipcia y las tablillas de Mesopotamia (Boyer, 1999). Estas sucesiones aparecen expresadas en diferentes sistemas de representación. En la disciplina matemática, destacamos los patrones que se encuentran en las formas y las figuras geométricas, algunos de los cuales se pueden expresar mediante las sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas: espirales, números poligonales o figuras escalonadas, entre otras.

En algunos de los patrones que se encuentran en diferentes contextos, se debe recurrir a la discretización de los fenómenos continuos que se observan para la obtención de fenómenos cuyo comportamiento siga un patrón que se pueda expresar mediante sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas. Mostramos un ejemplo de lo que esto quiere significar para el caso de la órbita que describe La Tierra alrededor del Sol. Si fijamos un punto en esta trayectoria, pasará un año hasta que este planeta vuelva al punto fijado. Tomamos el comienzo del año como el origen del movimiento. Eligiendo un día cualquiera, por ejemplo el 9 de enero de 1980 (el día 10 de ese año es el a_0), La Tierra vuelve a esa posición un año después. Así, alguien que haya nacido en a_0, cumpliría en 2000, 20 años y el 10 de enero de 2000 es el término 20 de la sucesión numérica de números naturales lineal (progresión aritmética).

En el ámbito de la economía también recurriendo a la discretización se obtiene un fenómeno que puede ser modelizado mediante una sucesión. Se utilizan las funciones lineales para expresar el capital que se obtiene al que se le aplica un interés constante cada año. De esa forma, si partimos de un capital inicia c_0 y un interés *i* anual, el capital que tendremos en un año *n* (c_n), será: $c_n = c_0 + c_0\ n_i = c_0\ (1 + n_i)$.

En otros ámbitos específicos como la arquitectura, la meteorología o la física se pueden observar la presencia de progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2 como concepto matemático que los modeliza. Ejemplos de ello son las escalas en los planos, la relación existente entre las atmósferas y milibares, la propagación de las ondas en el agua o el movimiento uniforme y uniformemente acelerado, respectivamente.

En cinemática, aparecen diferentes tipos de movimiento que se expresan mediante relaciones funcionales polinómicas de primer y de segundo grado. Es el caso del movimiento rectilíneo uniforme (función polinómica lineal) y del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (función polinómica cuadrática). Discretizando estos fenómenos continuos, se obtienen fenómenos que se expresan mediante sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas.

En informática, también aparecen sucesiones, recibiendo el nombre de *ristra* o *lista* toda sucesión finita (García, 2005).

Como se observa en este apartado, los patrones lineales y cuadráticos están presentes en ámbitos variados y algunos de ellos se pueden expresar mediante las progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2.

ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS

Conocimiento Procedimental y Procedimientos

La resolución de problemas obliga a la aplicación de varios tipos de conocimiento, incluyendo elementos del c*onocimiento procedimental* y *conceptual.* Tomando en cuenta que lo importante entre estos dos campos de conocimiento son sus interrelaciones, y no la distinción entre ambos (Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, Castro, Fernández, Fortuna, Valenzuela y Valdaura, 1990),

nos centramos en el conocimiento procedimental. Este conocimiento está constituido por reglas, algoritmos y procedimientos empleados para resolver una tarea determinada. Siguiendo a los autores citados, consideramos los *procedimientos* como las formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas.
Rico (1997) y Rico et al (1990) y distinguen tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:

- Destrezas. *Consisten en la manipulación de una expresión simbólica en otra expresión, para ello hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos*
- Razonamientos. *Consisten en procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos*
- Estrategias. *Suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados* (Rico, 1997, p. 31).

Tomamos esta categorización para centrarnos en las tareas matemáticas con el contenido matemático descrito que podemos proponer a los estudiantes para nuestro trabajo, con la intención de identificar los diferentes procedimientos que pueden emplear para resolverlas.

Tareas

Las tareas han sido identificadas de acuerdo con el análisis del contenido matemático realizado, el cual ha permitido identificar operaciones que se pueden llevar a cabo con los elementos de las sucesiones y los sistemas de representación que pueden verse implicados en las mismas. Se han traducido las operaciones con los elementos de las progresiones de números naturales (ver Tabla 3 - 2) en términos de tareas matemáticas. Debido a nuestros intereses investigadores, hemos seleccionado las siguientes tareas:

- *Continuación*: cálculo de uno o varios términos de la sucesión que siguen a unos términos k-ésimos dados.
- *Extrapolación*: cálculo de uno o varios términos de la sucesión que forman parte de la sucesión, a partir de unos términos dados y que no siguen a los dados.

- *Generalización*: expresión del término general a partir de términos k-ésimos.
- *Particularización*: cálculo de términos k-ésimos de la sucesión a partir del término general de la misma.

Procedimientos en las Tareas Consideradas

Hemos identificado dos procedimientos que pueden seguir los estudiantes al realizar las tareas de continuación, extrapolación, generalización y particularización

1. Mediante la generalización a partir de términos k-ésimos iniciales y la posterior particularización a los términos k-ésimos finales.
2. Mediante el cálculo de términos k-ésimos por los que se pregunta, a partir de los iniciales (sin recurrir a la generalización).

Denominamos a cada uno de estos procedimientos como *Procedimiento 1* y *Procedimiento 2* para describir los tres niveles posibles identificados por Rico (1997), a saber:

- Las *estrategias*[14]. En este apartado describimos los procedimientos que pueden seguir los estudiantes en las tareas. En esta descripción se han utilizado los sistemas de representación numérico y algebraico para mayor comodidad en la redacción. No se han considerado los diferentes sistemas de representación que pueden emplear y las transformaciones que se pueden llevar a cabo entre ellos.
- La forma de actuación que implica cada procedimiento permite la descripción del *razonamiento* que los estudiantes ponen de manifiesto. En concreto, debido a nuestros intereses investigadores, nos hemos centrado en el razonamiento inductivo. Para ello, hemos utilizado los pasos del razonamiento inductivo considerados en esta investigación.
- La descripción de las *destrezas* incluye la relación entre los elementos, los sistemas de representación de éstos y las transformaciones entre éstos.

[14] Hacemos notar que estas estrategias se refieren a estrategias relativas a un contenido matemático específico, en el mismo sentido en el que se indicó en el Capítulo 2 cuando las mencionamos en la resolución de problemas. Igualmente, las *estrategias inductivas* que allí definimos son un tipo particular dentro de éstas.

Procedimiento 1

Estrategias

Un paso clave del Procedimiento 1 es la expresión del término general de la progresión. Por ello, hemos centrado la descripción de las estrategias en la descripción de éstas para obtener el término general de una progresión a partir de sus términos k-ésimos.

Creemos conveniente aclarar que, pese a la importancia reconocida de los sistemas de representación en nuestra investigación, para la redacción del siguiente epígrafe utilizaremos fundamentalmente los sistemas de representación numérico y algebraico porque resulta más claro.

1. Progresiones Aritméticas de Orden 1

Los términos k-ésimos consecutivos de una progresión aritmética de orden 1 se diferencian en una constante. Una de las estrategias consiste en la manipulación de algunos términos k-ésimos consecutivos de la sucesión y en la detección de esa diferencia:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ldots$$

$$d \quad d \quad d$$

La identificación de la diferencia constante hace que los términos de la sucesión se puedan escribir como:

$$a_1; a_2 = a_1 + d; a_3 = a_2 + d; a_4 = a_3 + d...$$

Así, se puede llegar a conjeturar la siguiente expresión:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Se ha llegado a una expresión algebraica del término general mediante su ley de recurrencia. Se puede demostrar por inducción matemática, que esta definición es correcta.

La expresión obtenida tiene el inconveniente de que siempre que se trate se conocer algún término es necesario conocer el término anterior.

Este inconveniente se salva generalizando a partir de:

$$a_1; a_2 = a_1 + d; a_3 = a_1 + 2d; a_4 = a_1 + 3d...$$

Así: $a_n = a_1 + (n-1)$ d.

La segunda estrategia consiste en la utilización del Teorema de las Diferencias Finitas, que permite asegurar que como las primeras diferencias son constantes, el grado del polinomio que define el término general de una sucesión lineal debe ser uno (Ballieu, 1989). Por lo tanto, sabemos que existen *b, c* $\in \mathrm{N}$ tales que $a_n = bn + c$. Así, conociendo dos términos de la sucesión (a_i y a_j con i, j $\in \mathrm{N}$) se puede plantear un sistema de ecuaciones formado por dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$a_i = b_i + c$$

$$a_j = b_j + c$$

La resolución del sistema permite obtener los valores de *b* y *c*, que llevan a la expresión del término general de la sucesión.

La tercera estrategia para llegar a la expresión del término general de una sucesión consiste en escribir a_n como suma de términos de otra sucesión. Si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética de orden 1, según indica del Teorema de las Diferencias Finitas, quiere decir que $\exists$ *b*, *c* $\in \mathrm{N}$ tales que $a_n = bn + c$. Por tanto, se puede definir:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{con: } y_1 = a_1 = b + c;\ y_k = a_k - a_{k-1} = b \text{ para } k \geq 2$$

Esta definición es equivalente a la expresión de la función polinómica de primer grado que se obtenía con la estrategia anterior, como se comprueba a continuación:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i = b + c + \sum_{i=2}^{n} b = b + c + (n-1)\, b = bn + c.$$

2. Progresiones Aritméticas de Orden 2

Para las sucesiones cuadráticas se presentan dos estrategias análogas a las utilizadas en el caso de las sucesiones lineales. En las sucesiones cuadráticas, las segundas diferencias son constantes luego, aplicando el Teorema de las Diferencias Finitas, existe un polinomio de segundo grado que expresa su término general. Por tanto $\exists$ b, c, d $\in \mathrm{N}$ tales que $a_n = bn^2 + cn + d$. Conociendo tres términos cualesquiera de la sucesión a_i, a_j, a_k con i, j, k $\in \mathrm{N}$, se plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$a_i = b_i^2 + c_i + d$$

$$a_j = b_j^2 + c_j + d$$

$$a_k = b_k^2 + c_k + d$$

Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de *b*, *c* y *d* que llevan a la expresión polinómica de segundo grado que representa el término general de la sucesión cuadráticas.

La segunda estrategia para hallar la expresión del término general de una sucesión cuadrática es expresarla como suma de términos de otra sucesión. Si la sucesión es cuadrática, significa que $\exists$ b, c, d $\in$ N tal que $a_n = bn^2 + cn + d$. Así, se puede definir:

$a_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$ con: $y_1 = a_1 = b + c + d$; $y_k = a_k - a_{k-1} = 2kb - b + c$, para $k \geq 2$

Esta definición, como serie, es equivalente a la expresión polinómica de segundo grado por la que queda determinada la sucesión, tal y como se demuestra a continuación:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i = b + c + d + \sum_{i=2}^{n} (2kb - b + c) = b + c + d + (n-1)(-b+c) + \sum_{i=2}^{n} 2ib = b + c + d - nb + nc + b - c + 2b \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] = d + 2b - nb + nc + b(n^2 + n - 2) = d + 2b - nb + nc + bn^2 + bn - 2b = bn^2 + cn + d.$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 + \sum_{i=2}^{n} y_i = 1 + \sum_{i=2}^{n} (8k - 8) = 1 + (n-1)(-8) + \sum_{i=2}^{n} 8i = 1 - 8n + 8 + 8\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] = 1 - 8n + 8 + 4(n^2 + n - 2) = 4n^2 - 4n + 1.$$

Razonamiento inductivo

Teniendo en cuenta que estamos describiendo el Procedimiento 1, los pasos que hemos considerado para la caracterización del razonamiento inductivo que se pueden realizar son:

- Observación de términos k-ésimos.
- Organización de términos k-ésimos.
- Búsqueda de patrones.
- Formulación de conjeturas.
- Generalización.

Destrezas

Según las estrategias y los pasos del razonamiento inductivo mencionados, los estudiantes pueden poner de manifiesto una serie de destrezas que tienen en cuenta los sistemas de representación de los elementos de las progresiones con los que los estudiantes trabajan y las transformaciones entre los mismos.

Extraemos en la Figura 3 - 20 la parte de la Figura 3 - 19 que recoge las destrezas del Procedimiento 1. En ella se observan los elementos de las progresiones, las tareas que se realizan (generalización y particularización) y las posibles transformaciones entre las representaciones de los diferentes elementos utilizados.

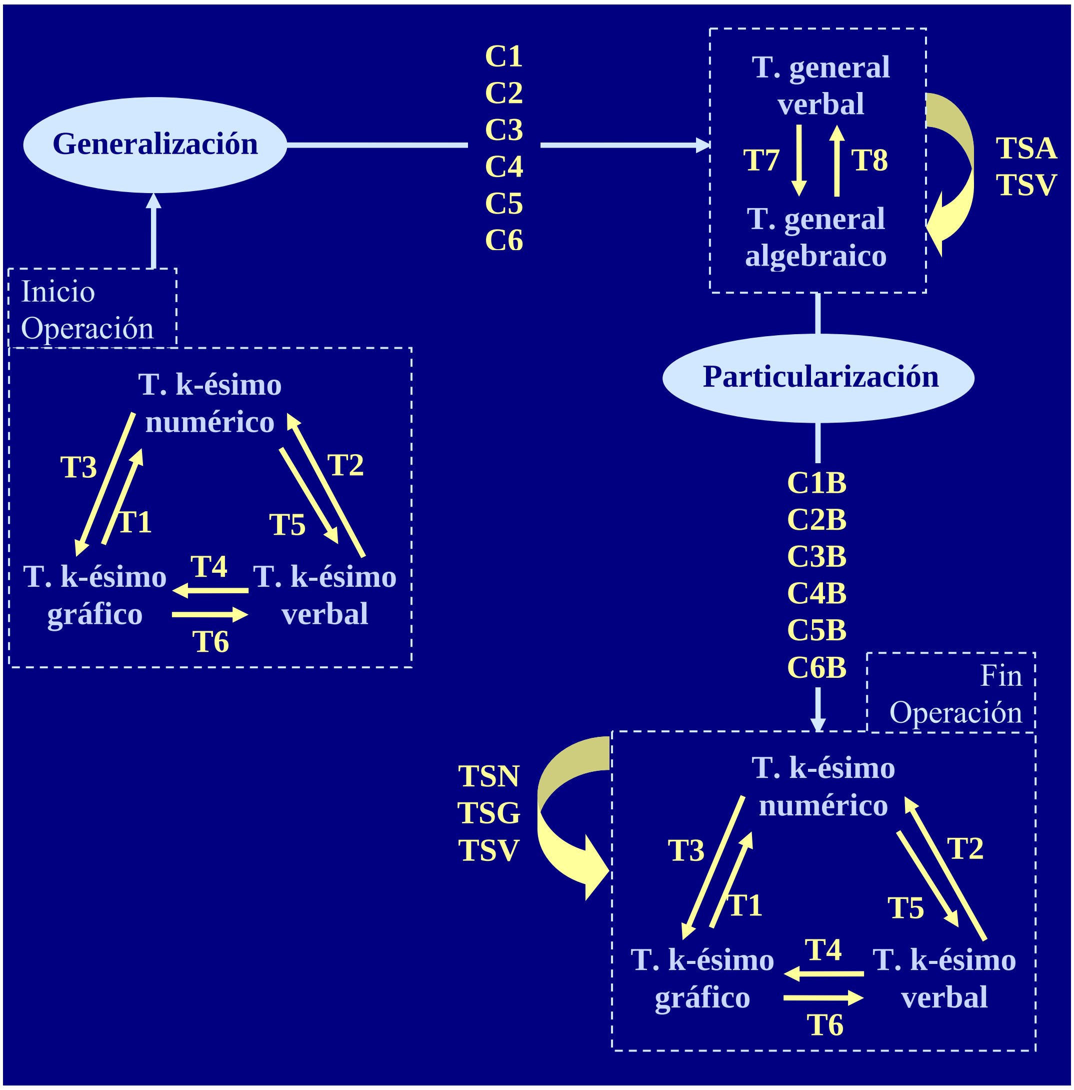


Figura 3 - 20. Operaciones, elementos y sistemas de representación del Procedimiento 1

Procedimiento 2

Estrategias

En este procedimiento, las estrategias se restringen al cálculo de términos k-ésimos a partir de los términos k-ésimos iniciales.

Razonamiento inductivo

Teniendo en cuenta que los alumnos realizan las tareas de continuación o extrapolación a partir de unos términos k-ésimos consecutivos dados, los pasos considerados para el razonamiento inductivo que pueden dar son:

- Observación de términos k-ésimos.
- Organización de términos k-ésimos.
- Búsqueda de patrones.
- Formulación de conjeturas.

Destrezas

Según las estrategias y los pasos del razonamiento inductivo del Procedimiento 2, los estudiantes pueden poner de manifiesto una serie de destrezas que consideran los términos k-ésimos, los sistemas de representación en los que se pueden expresar y las transformaciones que se pueden establecer entre estos.

En la Figura 3 - 21 extraemos la parte de la Figura 3 - 19 relativa al Procedimiento 2. En ella se recogen los elementos de las sucesiones, las tareas que se realizan (extrapolación y continuación) y las posibles transformaciones entre las representaciones de los diferentes elementos utilizados.

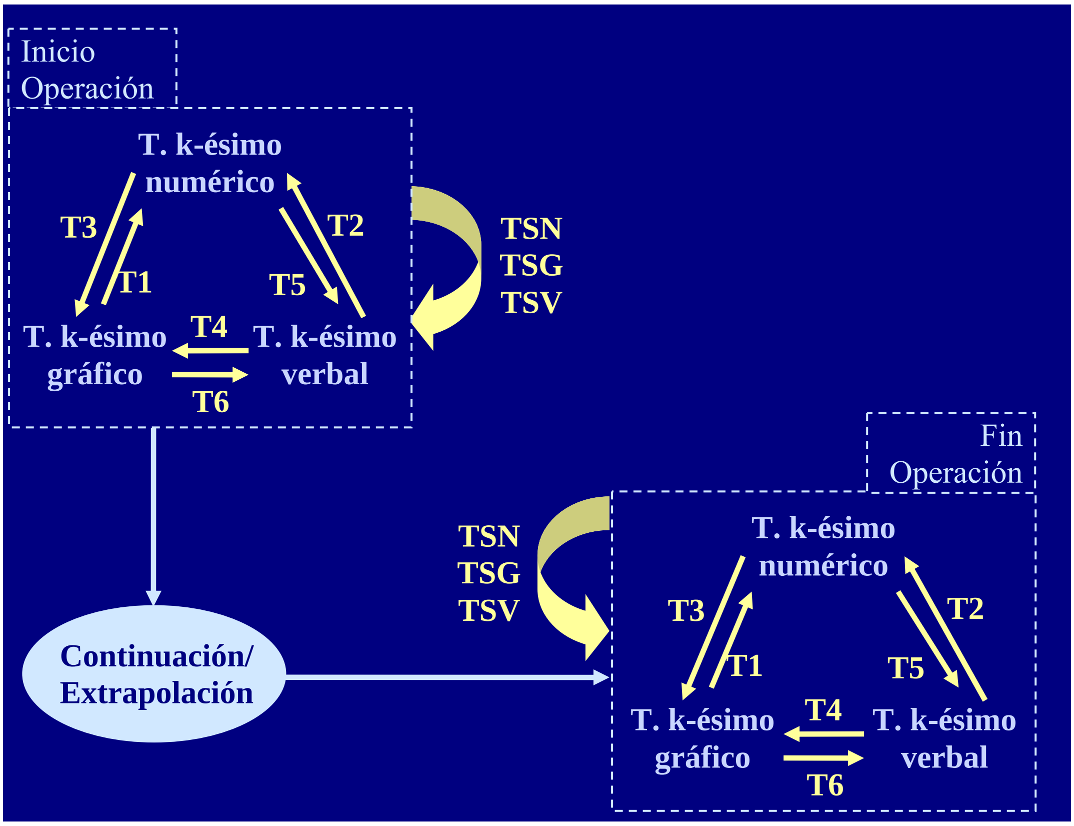


Figura 3 - 21. Operaciones, elementos y sistemas de representación del Procedimiento 2

Justificación como Tarea Adicional

La componente de validación no ha quedado recogida como parte de los procedimientos que pueden seguir los estudiantes en la ejecución de las tareas de extrapolación y continuación. Sin embargo, al ser parte del procedimiento inductivo y estar interesados en su descripción, consideramos que la tarea de justificación se debe añadir a la propuesta de trabajo.

La justificación de conjeturas con términos k-ésimos puede ser un paso del razonamiento inductivo de los dos procedimientos considerados. La demostración puede utilizarse también como modo de justificación formal en el Procedimiento 1.

CAPÍTULO 4

ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos las principales investigaciones relacionadas con el razonamiento inductivo. Las estructuramos según el aspecto principal que tratan, si bien algunas pueden estar relacionadas con varios de esos aspectos. En primer lugar, hacemos mención a trabajos que proponen modelos o marcos teóricos para la descripción o el aprendizaje del razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes. En segundo lugar, recogemos los antecedentes que se relacionan con algunas acciones del razonamiento inductivo, como son el reconocimiento de patrones, la generalización y los procesos de validación. En tercer lugar, presentamos trabajos que se preocupan por la naturaleza y la evolución del razonamiento inductivo de los estudiantes. En cuarto lugar, hacemos mención a investigaciones que tratan el razonamiento inductivo como objeto de enseñanza y propuestas didácticas en las que se trabaja el mismo. Finalmente, recogemos las reflexiones sobre la metodología de las investigaciones consultadas y planteamos algunos interrogantes que se suscitan tras la revisión de la literatura[1].

---

[1] En el Anexo A de esta memoria se pueden consultar los medios utilizados y las fuentes de información que han sido relevantes para nuestra investigación.

MODELOS Y MARCOS TEÓRICOS PARA EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Klauer (1996) parte de su definición de razonamiento inductivo como proceso en el que se lleva a cabo la comparación de objetos con la intención de descubrir regularidades e irregularidades. El autor distingue dos tipos de comparaciones: entre atributos de los objetos y entre las relaciones de los objetos. Rescatamos la Figura 4 - 1 de este trabajo, en la que se observa cómo a partir de la definición de razonamiento inductivo, obtiene los seis tipos de problemas de razonamiento inductivo para educación primaria.

El razonamiento inductivo consiste en descubrir regularidades e irregularidades detentando

- Semejanzas - Diferencias - Semejanzas y diferencias	de	- Atributos - Relaciones

con respecto a objetos o n-uplas de objetos

Figura 4 - 1. Definición de razonamiento inductivo (Klauer, 1996, p. 38)

Klauer distingue entre problemas que se refieren a los atributos de los objetos y los que se refieren a las relaciones entre los objetos. En cada tipo, distingue entre problemas de semejanzas, de diferencias, y la combinación de ambos.

El interés del modelo presentado se centra en la educación primaria y en los aspectos cognitivos que vinculan al razonamiento inductivo con el desarrollo de la inteligencia. La investigación que presentamos en esta memoria, se centra en un nivel educativo diferente, la educación secundaria, y no se preocupa por el proceso de enseñanza del razonamiento inductivo ni por el desarrollo de otras habilidades que puede llevar asociado el trabajo con el razonamiento inductivo. Por lo tanto, el enfoque debe ser distinto al presentado por Klauer. Destacamos a Pólya como el autor que más ha influido en nuestro interés por el razonamiento inductivo y que nos ha impulsado a realizar esta investigación sobre dicho tema, del modo en que lo hemos hecho. Su trabajo sobre resolución de problemas (Pólya, 1945), nos sirvió de punto de partida y posterior referencia en el desarrollo del trabajo que presentamos.

Para un resolutor de problemas *ideal*, Pólya identifica varios *pasos* en el proceso de razonamiento inductivo, los cuáles permiten la sistematización de este tipo de razonamiento. Se inicia el proceso trabajando con casos particulares y concretos, se pasa por la formulación de una conjetura, llegando a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares. Se puede vislumbrar en este trabajo una aproximación a un modelo ideal a seguir en el proceso de razonamiento inductivo. Este modelo consta de los siguientes pasos: (a) trabajo con casos particulares, (b) búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, (c) formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y (d) comprobación posterior.

Diversos investigadores han seguido las ideas de Pólya para plantear sus investigaciones sobre el razonamiento inductivo o sobre alguno de los pasos que hemos extraído del trabajo de este autor. Reid (2002) parte del los pasos extraídos del trabajo de Pólya y propone otra reformulación que permita describir el trabajo que realizan los estudiantes en el proceso inductivo. Su propuesta se concreta en los siguientes pasos:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Observación de un patrón.
3. Formulación de una conjetura para el caso general (con duda).
4. Generalización de la conjetura.
5. Utilización de la generalización como base para realizar comprobaciones.

La aportación principal que supone el modelo de Reid, respecto al considerado por Pólya, se refiere al punto 3, sobre formulación de conjeturas. Reid establece una primera formulación de conjetura para el caso general basada en los casos particulares y en el patrón que, hipotéticamente, se ha encontrado. Debido a que no se sabe si el patrón es válido para el caso general, el autor considera la formulación de una conjetura para el caso general con duda. Reid resalta el hecho de que la ausencia de razonamiento deductivo en este proceso hace que este tipo de razonamiento no se considere, estrictamente, razonamiento matemático.

ACCIONES RELACIONADAS CON EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Patrones

Los patrones están presentes en contextos matemáticos muy variados (Boyd, 1987; Phillips, 1992). Diferentes patrones numéricos y geométricos son utilizados como herramienta para el análisis de aspectos relacionados con el razonamiento inductivo como puede ser la generalización y la validación de conjeturas, por lo que se consideran eje vertebrador del razonamiento inductivo. De ahí la importancia que tienen para las matemáticas (Sawyer, 1963).

Castro (1995) realiza su trabajo dentro del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" y se centra en la exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Su objetivo general es

> *poner de manifiesto, analizar e interpretar la comprensión que muestran los escolares de 13 y 14 años de edad sobre las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y términos general de una sucesión cuando se incorpora un sistema ampliado de simbolización para los números naturales* (Castro, 1995, p. 16).

La metodología empleada en dicha investigación ha seguido una estrategia cualitativa de investigación-acción y una estrategia cuantitativa que se apoya en un diseño cuasi-experimental para completar la información obtenida en el proceso de investigación-acción.

En este estudio se puso de manifiesto que:

1. Respecto a la enseñanza, más específicamente, en el discurso del profesor:

- Los términos de una sucesión numérica se caracterizan por la posición que ocupan; expresar el término general se identifica con expresar la posición del término general.
- La comunicación entre profesor y alumno establece que *n* representa un valor general cualquiera lo cual lleva a los alumnos a confusión ya que *como el valor 5 es uno cualquiera se puede identificar con n*.

2. Respecto al aprendizaje

- El análisis del desarrollo aritmético que comparten los diferentes términos de una secuencia, al hacerse en términos de la variable, facilita la expresión de su términos general dando el valor genérico *n* a dicha variable

- Al representar varios términos de una secuencia mediante configuración puntual se pueden analizar sus términos mediante diferentes desarrollos aritméticos y, por tanto, obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes, del término general de la sucesión.

En el trabajo de Castro (1995) se dejan líneas abiertas relativas a patrones geométricos en otros niveles educativos y cuestiones respecto a la comprensión de los escolares sobre las estructuras numéricas y sus sistemas de representación.

<u>Patrones y generalización</u>

Los patrones se han identificado como un factor importante en el proceso de generalización (Fou-Lai y Kai-Lin, 2004; Haverty, Koedinger, Klahr y Alibali, 2000; Lee y Wheeler, 1987; Mason, 1996; Stacey, 1989).

Lee y Wheeler (1987) estudian la relación que existe entre la identificación de determinado tipo de patrones y la generalización. En esta investigación se utilizan problemas que exigen la utilización de la generalización y que son planteados a estudiantes de 15-16 años. Los patrones que se podían identificar en los problemas se correspondían con polinomios lineales o cuadráticos. Los autores notaron una gran variedad en la percepción de los patrones en cualquier cuestión y encontraron dos categorías de estudiantes que tuvieron éxito: estudiantes que dieron unas respuestas apropiadas a las tareas porque utilizaron una percepción del patrón útil y agilizaron el trabajo; y estudiantes que fueron flexibles en la percepción de patrones y podrían ver un nuevo patrón cuando uno no era válido. La detección del patrón se identifica como un paso fundamental para el proceso de generalización posterior. La flexibilidad en el trabajo con los patrones constituye una garantía de éxito en la resolución de problemas de generalización.

El trabajo de Fou-Lai y Kai-Lin (2004) se centra en la detección de patrones y en la repercusión que tienen éstos en la posterior simbolización y comprobación de los mismos. Llevan a cabo un trabajo centrado en el razonamiento de un grupo de estudiantes de 7º y 8º curso en Taiwán. Sus objetivos principales de investigación son:

1. Comparar el razonamiento que hacen los estudiantes de 7º y 8º en los patrones geométricos, tanto de rango lineal como cuadrático, cuando no han aprendido estas tareas en clase.
2. Explorar las relaciones jerárquicas a través del razonamiento en los patrones geométricos de los números, teniendo en cuenta la comprensión, la generalización, la simbolización y la comprobación.

Los investigadores proponen una prueba escrita a más de 3000 estudiantes de 7º, 8º y 9º curso. La prueba consta de dos problemas donde los casos particulares están expresados gráficamente y se les proponen a los estudiantes tareas relativas a la continuación, extrapolación y generalización de las secuencias implícitas, junto con la comprobación de sus respuestas.

Fou-Lai y Kai-Lin identifican diferentes patrones dentro del contexto matemático específico que presentan a los estudiantes. Estos patrones muestran la importancia de considerar un contenido matemático específico en la búsqueda de patrones ya que los elementos, las regularidades observadas y la forma de expresarlas son aspectos fundamentales a tener en cuenta en la descripción del trabajo que realizan los estudiantes.

Tras el análisis de las producciones de los estudiantes, los investigadores muestran las diferencias encontradas en ambos niveles educativos en relación con la componente lineal o cuadrática de las secuencias geométricas utilizadas. Estas diferencias se establecen teniendo en cuenta si los estudiantes llegan a identificar un patrón, el tipo de patrón que identifican y si éste es correcto o no, así como si los estudiantes comprueban su respuesta y cómo lo hacen. En la comprobación que llevan a cabo los estudiantes, se han detectado diferencias en los patrones lineales respecto de los cuadráticos

La relación jerárquica que Fou-Lai y Kai-Lin presentan tras la realización de su investigación para los patrones lineales y cuadráticos es diferente según el momento en el que entra en juego la componente de comprobación:

1. En el caso de los patrones lineales, los estudiantes utilizan la comprobación, previa o simultáneamente al proceso de generalización, una

vez que se ha producido la comprensión. La Figura 4 - 2 recoge esta idea resumida.

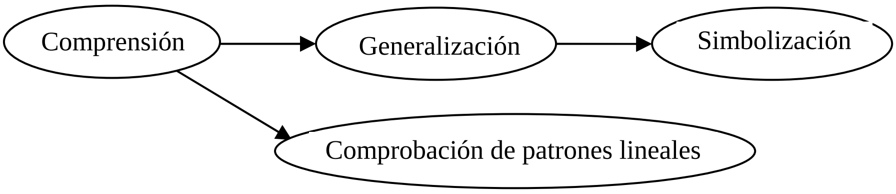


Figura 4 - 2. Jerarquía de los procesos en los patrones lineales (Fou-Lai y Kai-Lin, 2004, p. 463).

2. En los patrones cuadráticos, la comprobación se produce tras el proceso de generalización. Estas ideas se presentan resumidas en la Figura 4 - 3.

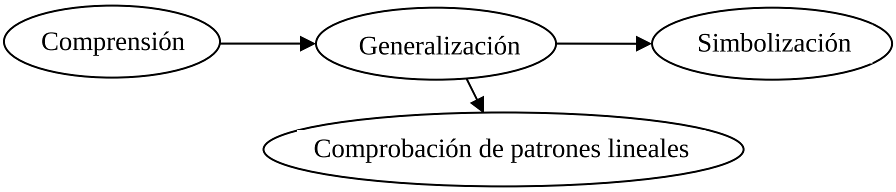


Figura 4 - 3. Jerarquía de los procesos en los patrones cuadráticos (Fou-Lai y Kai-Lin, 2004, p. 464).

Pese a la importancia que diferentes investigadores mencionados en este epígrafe, conceden a la identificación de patrones en el proceso de generalización, destacamos una aportación de Mason (1996) que, tras una revisión de diferentes trabajos que se han presentado hasta esa fecha, hace una mención especial a algunas circunstancias que pueden hacer que los patrones no ayuden a la generalización. Entre estas circunstancias, el autor menciona el hecho de que la identificación de patrones puede suponer un estancamiento en lo trivial que no facilite la generalización ni la comprobación de las conjeturas o que los estudiantes identifiquen un patrón (aunque no sea el adecuado) que les conduce directamente a una fórmula.

<u>Patrones y validación</u>

Los estudiantes de educación secundaria presentan algunas dificultades en el reconocimiento, la aceptación y la realización de los procesos de validación formal y algunas de estas dificultades son achacadas, en parte, a la escasez de trabajo sistemático de los estudiantes sobre procesos informales de justificación de propiedades matemáticas. En este sentido, Waring, Orton y Roper (1999) consideran que el trabajo con patrones motiva a los estudiantes a realizar algún tipo de validación de sus generalizaciones. Estos investigadores se interesan por la relación entre la identificación de patrones, la generalización algebraica y la demostración, partiendo de la consideración de que el trabajo con patrones motiva a los estudiantes a realizar algún tipo de validación de sus propias generalizaciones. Llevan a cabo una investigación con tres grupos de Grado 10 (14-15 años) con capacidades similares. Uno de los grupos constituyó el *grupo experimental* y los otros dos fueron *grupos de control*. Uno de los grupos de control siguió únicamente el libro de texto y el otro siguió un sistema de enseñanza habitual de su profesor. Al grupo experimental se les propusieron tareas en las que se trataba de fomentar el trabajo que les guiara hacia la identificación de patrones, el reconocimiento de la necesidad de demostrar y la realización de pruebas y demostraciones. Para ello, los alumnos del grupo experimental trabajaron en subgrupos, debatieron en clase y resolvieron preguntas abiertas y cerradas en diferentes contextos matemáticos.

Finalmente, se les pasó un post-test a los tres grupos participantes en la investigación y se les realizaron entrevistas a algunos de los alumnos. El resultado principal de esta investigación es que sí existe una clara relación entre el trabajo adecuado con patrones y la motivación para el aprendizaje de la demostración ya que hubo claras diferencias en el grupo experimental respecto a los otros dos grupos.

El papel de la visualización

Los problemas relacionados con la búsqueda de patrones y las secuencias numéricas han sido planteados en ocasiones en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las listas de números. Estas formas alternativas de expresar los patrones numéricos añaden al razonamiento una componente visual que juega un papel crucial en el desarrollo del razonamiento, tal y como señala Ben-Chaim (1989) e inspira para realizar descubrimientos creativos (Zimmermann y Cunningham, 1991). Por lo tanto, la visualización puede actuar a modo de catalizador para entender y producir razonamiento inductivo.

Garcia (1998) se centra en la utilización de contextos numéricos y gráficos para investigar el proceso de generalización de estudiantes de educación secundaria y bachillerato al introducir la componente gráfica. Sus principales objetivos de investigación son:

1. Estudiar el proceso de generalización desarrollado de forma espontánea por los alumnos al resolver problemas de generalización lineal.
2. Derivar indicaciones y sugerencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones lineales.

Los problemas de generalización lineal son el contenido matemático seleccionado por el investigador para su trabajo, en el que se clarifican los papeles de los ámbitos numérico y gráfico en la resolución de problemas de generalización lineal y afirma que el dibujo juega un doble papel. Por un lado es el marco donde algunos alumnos desarrollan acciones que conducen al establecimiento de un invariante y además, es el ámbito donde varios de los alumnos que han desarrollado acciones en el contexto numérico comprueban la validez de sus estrategias.

Uno de los factores que influyen en el papel de la visualización es la acción mental que realicen los estudiantes sobre la representación gráfica ante la que se encuentren. La representación gráfica puede dirigir la acción mental de los estudiantes y estos pueden llevarlos a una actividad física, o no, sobre el dibujo; lo cuál lleva a una visión estática o dinámica del mismo. Desde la visión estática, los estudiantes imaginan el objeto completo del tamaño requerido. Mientras que en la visión dinámica, los estudiantes imaginan el objeto creciendo desde uno de los tamaños que aparecen en el enunciado de la tarea hasta el tamaño superior por el que se le pregunta (García y Martinón, 1999).

Los problemas relacionados con la búsqueda de patrones y las secuencias numéricas han sido planteados en posteriores ocasiones en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las secuencias numéricas (Orton, Orton y Roper, 1999; Radford, 2000, 2002). Los autores de estos trabajos, desde la perspectiva que tratamos ahora, se centran en analizar si las diferentes formas de representar los patrones numéricos pueden conducir a los estudiantes a métodos de resolución alternativos a los tradicionalmente empleados. Una de sus conclusiones es que el sistema de representación gráfico es una opción potente cuando se trata de identificar estrategias utilizadas por los estudiantes en tareas relacionadas con la generalización lineal, ya que han detectado que las imágenes de los casos particulares son empleadas por los estudiantes para la identificación de patrones.

Lo mencionado en este apartado acerca del papel de la visualización en el proceso de generalización, nos hace considerar las ideas que señalan Booth y Thomas (2000) y Van Essen y Hamaker (1990). Estos autores consideran fundamental el hecho de que con la aparición de las representaciones gráficas, se necesita de la interpretación de un dibujo en una forma tal que pueda ser utilizada para la resolución de un problema. Por lo tanto, la forma en la que se considere el dibujo para la identificación de un patrón, es un factor a tener en cuenta.

Sin embargo, no siempre la generalización encuentra un aliado en la visualización, tal y como señalan Orton y Orton (1994). En este sentido, hay estudiantes que encuentran dificultades en las tareas de generalización en las que se requiere la visualización del patrón.
Orton y Orton (1994) presentan cuatro estudios cuyos objetivos eran proporcionar evidencia sobre habilidades y competencias mostradas por los sujetos en situaciones con patrones, además de señalar algunos de los obstáculos para tales habilidades y competencias. En este trabajo se utilizan mayoritariamente problemas con patrones que se corresponden con sucesiones lineales y cuadráticas, acompañados de diagramas ilustrativos. Uno de los estudios que constituyen este trabajo se realizó con alumnos de entre 9 y 13 años y se les propuso un trabajo con palillos. Pese a que el manejo del material se supuso que iba a ser una ayuda para los estudiantes, una vez que éstos obtuvieron los números asociados a los diagramas, abandonaron el material concreto y se concentraron en los patrones puramente numéricos.

Generalización

En el trabajo de Stacey (1989) se pretende analizar el proceso de generalización en su totalidad. Destacamos la preocupación de la autora por la forma de expresar la generalización que utilizan los estudiantes, las estrategias que emplean y las dificultades con las que se encuentran los estudiantes a lo largo del proceso de generalización.

Stacey (1989) propone tareas sobre patrones que corresponden a sucesiones, bien lineales o bien cuadráticas, a estudiantes de entre 9 y 13 años. Una vez recogidas las respuestas de estos estudiantes, presenta los patrones matemáticos que ellos seleccionaron, las estrategias utilizadas al implementarlos y las explicaciones que dieron. Esta recogida de información fue llevada a cabo en unas sesiones sobre resolución de problemas, en las que se animó a los estudiantes a comprobar los patrones, tratando de predecir valores más lejanos y calculándolos independientemente y que indicaran esta comprobación explícitamente en su trabajo. A los estudiantes también se les mostró cómo la organización de los casos particulares podía facilitar la búsqueda de patrones, así como conteos sucesivos.

Las principales conclusiones que Stacey extrae de su investigación son:

1. Se observan inconsistencias en la elección de los patrones.
2. Los estudiantes que empezaron una pregunta correctamente, frecuentemente adoptaron un modelo más simple pero inadecuado para partes más difíciles de la pregunta.
3. Los estudiantes que asistieron a un curso específico sobre resolución de problemas comprenden, de forma más completa, la relación entre los datos y la generalización.
4. La fijación en enfoques recursivos puede obstaculizar el progreso hacia una regla general.
5. No hubo un uso espontáneo de álgebra para expresar la generalización, aunque muchos estudiantes pusieron de manifiesto haber visto la generalización en los números que estaban manipulando.

El trabajo de Stacey saca a la luz diferentes aspectos que deben ser tratados en el proceso de generalización y que van en la línea de nuestro trabajo. Entre esos aspectos, mencionamos la forma de expresar la generalización, la identificación de patrones, la relación entre los casos particulares y la organización de los mismos.

Expresión algebraica de la generalización

El interés por la investigación de la relación entre el álgebra y la expresión de la generalización cobra especial importancia a partir del trabajo de Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985), quienes consideran la generalización como una de las *raíces* del álgebra y destacan la relevancia de trabajar la generalización para fomentar en los estudiantes el empleo significativo del lenguaje algebraico.

Sin embargo, en la práctica, la conexión que establecen los estudiantes de secundaria entre el álgebra y la generalización no es tan directa como cabría esperar. Lee y Wheeler (1989) se centran en el álgebra y la aritmética que los alumnos de secundaria (15-16 años) utilizan en los procesos de generalización y justificación. Para ello, los investigadores suministraron un test a 350 estudiantes de 15-16 años y, posteriormente, realizaron una entrevista individual a 25 de ellos. En general, se encuentran importantes lagunas entre la aritmética y el álgebra, y se llega a la conclusión de que la relación entre el álgebra y la generalización no es tan clara como en ocasiones se sugiere. Además, existen una serie de obstáculos que dificultan el paso de lo aritmético a lo algebraico que surgen en diferentes tipos de tareas expresadas numérica, verbal, gráfica o algebraicamente sobre los que los autores dejan una línea de investigación abierta.

Lee (1996) presenta los resultados de una investigación en la que trata de avanzar en el conocimiento del papel de la generalización en la introducción del álgebra y complementa los resultados obtenidos en las investigaciones mencionadas anteriormente. Lee propone un experimento de enseñanza a un grupo de estudiantes adultos dentro de los cuales considera un grupo experimental, con el que realiza una serie de actividades basadas en la generalización de números y de patrones numéricos, fundamentalmente. Las diferencias entre el grupo experimental y el grupo de control fueron claras. Los alumnos del grupo experimental utilizaron habitualmente lenguaje algebraico en las tareas de generalización, las series infinitas generadas a partir de las actividades propuestas llevaron a los estudiantes a reflexionar sobre procesos infinitos. Sin embargo, la investigadora concluye que los procesos de validación formal no surgen de forma natural en la aproximación al álgebra como generalización de patrones.

Otras formas de expresar la generalización

El lenguaje algebraico no ha sido el único que se ha visto vinculado a la generalización. Mason y Pimm (1984) consideran que el lenguaje natural juega un papel fundamental en el proceso de generalización y que el empleo de éste puede influir en la expresión algebraica de la generalización, tanto en contextos matemáticos como en otros ajenos a esta ciencia. Estos autores presentan ejemplos que muestran la diferencia entre *específico*, *particular*, *genérico* y *general*; y términos como *el*, *un* o *cualquier*, que son los que marcan esa diferencia en el lenguaje natural. En el trabajo de Mason y Pimm se destacan las dificultades inherentes a las expresiones matemáticas de generalidad y su relación con lo particular. Mason y Pimm mencionan el caso de los ejemplos genéricos. Son un tipo de ejemplos expresados de tal forma que pueden conducir a la generalización pero, desafortunadamente, es casi imposible saber si alguien ve en él, o no, el camino hacia la generalización.

Unos años después, Radford (2002) muestra cómo algunos estudiantes utilizan formas verbales y gestuales como alternativa al sistema de representación algebraico para expresar la generalización. Parte del artículo en el que se presenta este trabajo, se centra en el análisis de una tarea de generalización propuesta a estudiantes de Grado 8 antes de que hayan aprendido la utilización de expresiones algebraicas. En la tarea se presentan varios términos de una secuencia expresada mediante una configuración puntual y se les pregunta a los alumnos, que trabajan en grupos de 3, por el número de puntos que habrá en la figura *n* de esa secuencia. Siguiendo la metodología descrita en Radford (2000), el autor describe cómo los estudiantes llegan a resolver el problema e incluso a la generalización sin recurrir a expresiones algebraicas. Para ello, el autor menciona la importancia del lenguaje verbal y los gestos que emplean los estudiantes en sus intentos por generalizar.

Estrategias de generalización

Hargreaves, Shorrocks-Taylor y Threlfall, Frosbisher (1998) consideran que las estrategias de generalización son utilizadas por los estudiantes cuando buscan conseguir un propósito específico y éstas pueden englobar a diferentes procesos (éstos pueden producirse sin que se persiga ningún objetivo determinado). Desde esta perspectiva, los autores consideran importante conocer las estrategias que los estudiantes llevan a cabo en la resolución de problemas, y si a partir de los patrones, consiguen una generalización, y si ésta es adecuada o no a la situación que se plantea. Tras una investigación llevada a cabo con 315 estudiantes de entre 7 y 11 años, los investigadores identifican diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en la identificación de patrones numéricos, a saber:

- Búsqueda de diferencias.
- Búsqueda de diferencias de las diferencias.
- Observación de la naturaleza de los números.
- Búsqueda de relaciones con las tablas de multiplicar.
- Combinación de términos para obtener otro término.

En un trabajo posterior, estos mismos investigadores (Hargreaves, Threlfall, Frosbisher y Shorrocks-Taylor, 1999) proponen a 487 estudiantes de 7 a 11 años una serie de problemas donde aparecen patrones que se corresponden con secuencias lineales o cuadráticas. Partiendo de un tipo de tareas que se consideran adecuadas para los estudiantes de estas edades, les proponen:

- Encontrar una regularidad para una secuencia dada.
- Continuar una secuencia, conociendo algunos términos de la misma.
- Decidir si, dado un listado de números siguen un patrón o no.
- Construir una secuencia numérica.

Los resultados se centran en la determinación de estrategias que los estudiantes utilizan en la resolución de las tareas relacionadas con las secuencias lineales y cuadráticas. Para las secuencias lineales, los niños emplean las siguientes estrategias:

- Búsqueda de diferencias.
- Observación de la naturaleza de los números.
- Búsqueda de relaciones con las tablas de multiplicar.

Y para las secuencias cuadráticas, además de las anteriores, emplean:

- Búsqueda de las diferencias de las diferencias.
- Combinación de los términos de la secuencia para conseguir otros.

Por lo tanto, se observa la incorporación de diferentes estrategias en la identificación de patrones en las secuencias cuadráticas respecto a los patrones correspondientes a los patrones lineales. Los investigadores encuentran algunas diferencias en las resoluciones que llevan a cabo los alumnos de diferentes edades. La frecuencia de aparición de estrategias variadas y la identificación de estrategias adecuadas aumenta con la edad. Sin embargo, incluso entre los alumnos mayores, hay todavía muchos que confían en una estrategia concreta cuando trabajan buscando una generalización de un patrón dado.

Lannin (2003) se basa en las recomendaciones curriculares de los Estándares (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) y propone a los estudiantes algunos problemas para examinar las estrategias que éstos utilizan en su intento de generalizar situaciones numéricas y articular sus correspondientes justificaciones. En primer lugar, se debate en clase el problema propuesto, se les deja trabajar a los alumnos durante unos diez minutos y, finalmente, los estudiantes trabajan en pequeños grupos en los que discuten la validez de las estrategias que cada uno ha empleado. Finalmente, se debate en clase el trabajo llevado a cabo por los grupos. Resumimos a continuación las estrategias que Lannin identifica:

- *Recuento*. Dibujan o construyen patrones para representar la situación y cuentan hasta llegar al término requerido.
- *Recursión*. Basándose en uno o varios términos de la secuencia, expresan el siguiente término por recurrencia.
- *Whole-object*. Se asume que, considerando la función f, que representa el patrón presente en las tareas propuestas, los estudiantes asumen implícitamente que $f(mn) = m\ f(n)$. Se trata de un error debido a la aplicación de una razón de proporcionalidad.
- *Contextual*. Construyen una regla con base en una relación que queda determinada por el problema.

- *Cálculo de la razón*. Los estudiantes utilizan una razón como factor de multiplicidad. Después hacen un ajuste sumando o restando una constante para conseguir un valor particular de la variable dependiente.
- *Conjeturar y comprobar*. Conjeturan una regla sin considerar por qué la regla puede funcionar. No hay conexión con el contexto o con el número de secuencia generado. En este caso, aunque la regla sea la correcta, no permite comprender la relación entre la regla y el contexto y, por lo tanto, es difícil de justificar.

RAZONAMIENTO Y PROCESOS DE VALIDACIÓN

En los primeros niveles educativos, los estudiantes razonan de una manera informal. Las primeras tentativas de los niños en la justificación implican estrategias de ensayo y error o el tratamiento no sistemático de muchos casos (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 62).

A una edad temprana, hay alumnos que están capacitados para realizar pruebas vinculadas a lo empírico. Maher y Martino (1996) muestran ciertos comportamientos que se pueden considerar precursores de los procesos de validación. Se trabaja con una niña desde el Grado 1 hasta el Grado 5 en diversas tareas en las que se combina la metodología de trabajo en pequeños grupos, trabajos con toda la clase y mediante entrevistas individuales. Durante la resolución de las tareas, se trata de que la alumna desarrolle sus propias ideas. La información recogida proporciona una visión del proceso que siguen los estudiantes en el aprendizaje de la demostración. El principal resultado hace referencia al progreso de esta alumna en la clasificación, la organización y reorganización de datos.

Brocardo (2004) estudia los procesos de validación que emplean un grupo de alumnos portugueses de 8º, quienes muestran no ser conscientes de la provisionalidad de las conjeturas que no han sido sometidas a ningún proceso de prueba. En este caso, los alumnos resuelven los problemas en presencia de la investigadora, que ejerce como guía en el proceso de argumentación y demostración de hipótesis. El análisis de las respuestas permite concluir que los sujetos participantes en esta investigación tienden a considerar las propias hipótesis como conclusiones y no ven necesidad de ir más allá en la validación de sus conjeturas.

Edwards (1999) se centra en las argumentaciones que presentan los estudiantes de educación secundaria. Con este objetivo, Edwards preguntó a diez alumnos de un curso de álgebra de este nivel educativo sobre la veracidad de algunas afirmaciones que involucraban números pares e impares y se les requirieron las justificaciones de sus decisiones. Todos los estudiantes razonaron partiendo de casos particulares. Cuando, por medio de entrevistas, se les preguntó por justificaciones más completas, 7 estudiantes dieron argumentaciones no empíricas y sólo 3 dieron argumentaciones coherentes, aunque ninguno de esos 3 utilizó notación algebraica.

Lannin (2003) analiza las estrategias de validación de los estudiantes y encuentra que los estudiantes validan sus conjeturas mediante:

- Comprobación mediante ejemplos.
- Explicaciones en relación con el contexto del problema.
- Inducción matemática (únicamente un alumno lo intenta).

En la educación secundaria, se produce un avance significativo en relación con los procesos de validación de conjeturas en comparación con estudiantes de niveles inferiores. El trabajo de Miyakawa (2002) pone de manifiesto que hay estudiantes de niveles educativos medios que reconocen diferentes justificaciones como válidas y algunas de ellas no están basadas únicamente en los casos particulares. Miyakawa realiza una investigación en la que un grupo de estudiantes de Grenoble de 14 años deben decidir acerca de la veracidad de unas afirmaciones matemáticas relacionadas con la teoría de números y justificar su respuesta.

Sin embargo, en general, se destaca que los estudiantes de los niveles educativos medios, no suelen realizar procesos de validación formales para justificar sus propias conjeturas. En este sentido, la mayoría de las investigaciones, cuyos principales resultados mostraremos a continuación, dejan constancia de la tendencia de los estudiantes al empleo de las justificaciones basadas en los casos particulares y a la escasez de alumnos que ven la necesidad de realizar procesos de validación tras la formulación de conjeturas.

Ledesma (1996) es un ejemplo claro de lo que acabamos de mencionar. Tras el análisis de las respuestas dadas por alumnos de 13 a 18 años que participan en un concurso de matemáticas, concluye que la mayoría de los estudiantes siguen un proceso inductivo habiendo examinado pocos casos particulares, no justifican sus conjeturas y no han sentido la necesidad de demostrar. Parecen no ser conscientes de la provisionalidad de su solución.

En bachillerato, Ibañes (2001) ha estudiado los procesos de validación que utilizan algunos estudiantes españoles. Este autor trabaja sobre la utilización de la demostración por parte de estos estudiantes, planteándose los siguientes objetivos de investigación:

1. Los *esquemas de prueba*[2] que ponen de manifiesto alumnos de bachillerato
2. El reconocimiento de procesos matemáticos que llevan a cabo dichos alumnos
3. La influencia que tiene la utilización de algunas expresiones en el enunciado de los teoremas.

Ibañes concluye que los alumnos de bachillerato participantes en su investigación ponen de manifiesto estar en un estado de transición entre los procesos de validación inductivos (*esquemas de prueba inductivos*) y los intuitivo-axiomáticos.

En las investigaciones citadas se ha destacado que desde los primeros niveles del sistema educativo, los procesos de validación aparecen ligados a lo empírico y van avanzando hasta que lo inductivo va compartiendo espacio con lo deductivo

[2] Los *esquemas de prueba* que utiliza Ibañes en su investigación provienen del trabajo de Harel y Sowder (1998), que constituye un antecedente importante en su trabajo. Debido a que nuestra investigación no se centra específicamente en este aspecto, sino como la validación como aspecto del razonamiento inductivo, consideraremos estos esquemas equivalentes a los *procesos de validación*.

en los últimos cursos de la educación secundaria. Las investigaciones presentadas ponen de manifiesto que la educación secundaria es un período en el que comienzan a coexistir en el trabajo de los estudiantes las justificaciones basadas en los casos particulares y las justificaciones para el caso general propia de los niveles superiores.

Sin embargo, el avance hacia los procesos de validación formal no es natural y los estudiantes prefieren los argumentos empíricos (Edwards, 1999; Healy y Hoyles, 2000). En ocasiones, se ha llegado a la conclusión de que uno de los obstáculos que tienen los alumnos para justificar sus conjeturas es no reconocer la provisionalidad de las mismas (Ledesma, 1996; Brocardo, 2004). El reconocimiento de la necesidad de realizar conjeturas y de demostraciones ya hechas como justificaciones válidas se considera un avance dentro de los procesos de validación (Miyakawa, 2002; Sowder y Harel, 2003).

NATURALEZA Y EVOLUCIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Razonamiento Inductivo Numérico

El trabajo realizado por Ortiz (1993) sobre series numéricas y razonamiento inductivo, fue el primero de los realizados dentro del grupo de investigación en el que se lleva a cabo nuestro trabajo (“Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”), sobre el tema que nos ocupa. Este estudio tuvo por objetivo comprobar que las tareas de continuar series numéricas constituyen un buen instrumento para detectar diferencias en competencias inductivas en el campo numérico, tanto individuales como por niveles educativos. Alumnos de 9 a 12 años de edad realizaron una prueba constituida por 16 ítems, cada uno de los cuales proponía a los estudiantes que continuaran una serie. Las series estaban categorizadas en cuatro bloques, de acuerdo con las operaciones de la aritmética elemental.

El estudio llevado a cabo identifica la edad como un factor influyente en el trabajo de razonamiento inductivo por los alumnos. En los escolares estudiados se observan diferencias significativas, debidas a la edad, en los ítems multiplicativos y se confirma un dominio de la estructura aditiva respecto de la multiplicativa, en estas edades.

Ortiz (1997) continúa su trabajo anterior con una investigación en la que se plantea *analizar la naturaleza y la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria* (Ortiz, 1997, p. 39). Con este objetivo, se plantea una investigación de carácter transversal con estudiantes de 6 a 12 años de edad en el que se pretenden estudiar:

- *las variaciones con la edad de las competencias de los estudiantes sobre razonamiento inductivo numérico*
- *los diferentes niveles que aparecen en relación con los cambios que se producen en dichas competencias*
- *las características generales de dicha evolución*
- *la relación de esta evolución con la situación real de los conocimientos y destrezas aritméticas adquiridas por medio de la instrucción escolar*

(Ortiz, 1997, p. 45)

Ortiz identifica diferentes estrategias inductivas que permiten a los estudiantes de educación primaria completar con éxito tareas de continuar series de números naturales. Ello permitió establecen niveles de comportamiento para estos escolares, según las estrategias puestas de manifiesto por los mismos. Este trabajo deja cuestiones abiertas referentes al razonamiento inductivo numérico en otros niveles educativos. A su vez, deja pendiente la complementación de la investigación mediante la utilización de diferentes sistemas de representación de las secuencias y de tareas diferentes a la continuación de series numéricas.

Fernández (2001) complementa el trabajo de Ortiz, en esta ocasión enfocado a la educación infantil. La investigadora analiza la naturaleza y la evolución del conocimiento lógico-ordinal de la secuencia numérica en los escolares de educación infantil, como precursor del razonamiento inductivo numérico. La investigadora indaga las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los niños de 3 a 6 años de edad ante tareas que requieren del conocimiento lógico ordinal de la secuencia numérica básica o de los números para contar. Con esta investigación se confirma la evolución de las estrategias ordinales de los escolares investigados (27 niños en el estudio exploratorio y 47 en el estudio empírico definitivo) en seis niveles de competencias ordinales ante las tareas propuestas, confirmándose que existe una construcción ordinal de la secuencia numérica. Además, se constata que no todos los alumnos de un mismo curso están en el mismo nivel de conocimiento lógico ordinal de la secuencia numérica.

Estudios Longitudinales

Como se ha puesto de manifiesto hasta el momento, los procesos de validación en relación con el tipo de razonamiento empleado en ellos han sido objeto de investigación en diferentes niveles educativos. Presentamos tres estudios longitudinales que ofrecen una visión general de los tipos de razonamiento que utilizan los estudiantes de diferentes niveles educativos en los procesos de validación que llevan a cabo. Se trata de tres proyectos reconocidos a nivel internacional realizados en Canadá, el Reino Unido y en Estados Unidos, y centrados en los procesos de validación que los estudiantes utilizan para justificar sus conjeturas, teniendo en cuenta los conocimientos previos y el trabajo que estos estudiantes habían realizado.

Radford (2000) dirige un proyecto longitudinal en Canadá, de tres años de duración, siguiendo un enfoque antropológico que parte de la necesidad de realizar más investigaciones que permitan profundizar en la naturaleza del pensamiento algebraico y en el modo en que éste se relaciona con la generalización. La investigación se inicia con cuatro clases de Grado 8 de dos colegios de Ontario.

Los objetivos principales de este trabajo son:

1. Investigar el modo en que los estudiantes utilizan los signos y los dotan de significado en su primer encuentro con la generalización algebraica de patrones.
2. Proporcionar informes sobre el pensamiento algebraico emergente en los estudiantes.

Radford considera las funciones como contenido matemático y plantea una metodología que tiene tres fases principales:

- *Diseño de unidades didácticas*. El investigador y los profesores llevan a cabo la elaboración de unas actividades que puedan ser trabajadas en pequeños grupos de estudiantes. Estas actividades deben permitir que los alumnos expongan y debatan posteriormente sus métodos de resolución y sus soluciones de modo que el profesor haga de guía en el proceso.
- *Implementación de las unidades didácticas elaboradas*. Se trabajaron las actividades de la unidad didáctica y se grabó la puesta en práctica.
- *Análisis de la investigación*. Esta fase se centró en la discusión de las cintas grabadas de la implementación de las unidades didácticas, su trascripción y su interpretación.

Las principales conclusiones sobre los objetivos de investigación planteados son:

1. Los estudiantes relacionan los patrones y la generalización pero no todos dan el mismo significado a la variable *n*. Se percibe una doble visión de la variable que hace referencia a los aspectos ordinal y cardinal del número. Mientras que en la primera visión, *n* es un descriptor general del patrón de las figuras; en la segunda visión, *n* es un número genérico de una fórmula matemática que puede tomar un valor numérico.
2. Aunque los estudiantes no llegaran a la expresión algebraica correcta de la generalización del patrón, algunos de ellos fueron capaces de expresarlo en el lenguaje natural.
3. En general, los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en el aula la generalización ni a expresar un término general mediante el lenguaje algebraico, ya que es algo que no se requiere en los niveles educativos inferiores, donde se trabaja el pensamiento aritmético. Cuando los alumnos se encuentran con los problemas propuestos, cada estudiante emplea una técnica diferente porque consideran los casos particulares de una forma diferente y porque dan significados distintos a los símbolos algebraicos que utilizan. Los *deícticos*[3] empleados por los estudiantes

[3] El autor se refiere a deícticos como los términos del lenguaje natural que emplean los estudiantes en la resolución de los problemas y los gestos que, en ocasiones, los acompañan.

marcan las diferencias en la resolución que llevan a cabo de las tareas propuestas.

4. Radford (2000) asocia algunas de las dificultades detectadas en la expresión algebraica de la generalización a dos rupturas que se producen en la realización de este proceso. Estas rupturas tienen que ver con: (a) la percepción geométrica de los patrones y (b) las características numéricas de los patrones. Para la expresión algebraica de la generalización, los estudiantes pueden y deben considerar los patrones observados en las figuras y las características numéricas de los patrones. Sin embargo, esto no es suficiente para generalizar algebraicamente, deben ir más allá y no se pueden basar únicamente en esos factores, tal y como hacían en las ocasiones en las que expresan la generalización en el lenguaje natural.

El *Longitudinal Proof Project* fue un proyecto longitudinal del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, encabezado por los investigadores Healy, Hoyles y Küchemann. El interés principal del estudio se centra en la evolución del razonamiento matemático de los estudiantes ingleses a lo largo de tres años de formación académica oficial. Para ello, se recogieron datos a través de un estudio anual de estudiantes con alto nivel de conocimiento de una muestra aleatoria de centros de nueve regiones geográficas inglesas.

En Junio de 2000 se les pasó un test a 2797 estudiantes de 8º curso (13 años) de 63 centros diferentes. Los mismos estudiantes fueron examinados de nuevo en Junio de 2001 utilizando un nuevo test que incluía algunas preguntas del anterior, otras nuevas y otras con algunas modificaciones sobre las planeadas en Junio de 2000.

En total, 1984 estudiantes de 59 centros hicieron conjuntamente los tests en 8º y 9º curso. Estos mismos alumnos fueron de nuevo examinados en Junio de 2002 con ítems similares con la intención de ver la comprensión y el desarrollo en sus respuestas. Todos los tests incluyen ítems relacionados con cuestiones numéricas, algebraicas y geométricas. Unas preguntas eran de respuesta abierta y otras de elección múltiple.

Una primera fase del proceso consistió en revisar los ítems en la literatura de investigación para identificar los principales puntos que tratan los alumnos cuando aprenden a probar en cada tema matemático trabajado. Las siguientes fases se dedican a discusiones con los profesores sobre los estudios pilotos realizados en seis centros. Siguiendo este análisis, ítem por ítem, cada año, y de manera longitudinal, la fase final de la investigación consiste en sugerir tendencias generales en las respuestas que dan los estudiantes a las preguntas de los dominios numéricos, algebraicos y geométricos.

Una conclusión general de este estudio es que el planteamiento de cuestiones que no son familiares para los estudiantes constituye un contexto rico para la discusión en el aula y fomenta la argumentación matemática. A continuación presentamos algunos resultados de la investigación llevada a cabo en el Reino Unido:

1. El tipo de respuesta que dan a un ítem algebraico que les es familiar y que está vinculada con el álgebra, está relacionado con sus éxitos en matemáticas, pero también puede verse influenciado por la enseñanza y por los libros de texto que utilicen.
2. Desde el importante énfasis que se hace en el currículum inglés sobre la geometría como un contexto para desarrollar el razonamiento, se han conseguido mejores resultados en las preguntas sobre geometría (es decir, los estudiantes introducen explicaciones lógicas frente a las explicaciones basadas en la percepción). Esta mejora en los dominios geométricos sí está más vinculada al éxito de cada estudiante en matemáticas de lo que lo estaban las cuestiones algebraicas.
3. Incluso los estudiantes que han trabajado previamente la prueba, han desarrollado dos concepciones diferentes del razonamiento matemático. Así, los estudiantes valoran mejor los argumentos que consideran válidos desde el punto de vista matemático, que aquéllos que consideran válidos para sí mismos.

Una aportación importante de este estudio fue que la mayoría de los estudiantes de 10 años, a pesar de seguir el currículo inglés durante 6 años, en el que se trata de fomentar el aprendizaje de la demostración, son incapaces de distinguir y describir propiedades matemáticas para la demostración así como tampoco utilizan el razonamiento deductivo en sus argumentaciones. La mayoría tienden a utilizar verificaciones basadas en casos particulares (Healy y Hoyles, 1998; Healy y Hoyles, 2000; Küchemann y Hoyles, 2001; Küchemann y Hoyles, 2001b).

El proyecto titulado *Proof Understanding, Production and Appreciation* fue dirigido por los investigadores Harel y Sowder y se centra en la demostración como proceso de validación, partiendo de la dificultad que supone la demostración para los estudiantes que inician sus estudios universitarios (Sowder y Harel, 2003). En el trabajo realizado bajo este proyecto se analiza la comprensión, la apreciación y el desarrollo de pruebas por parte de los estudiantes de diferentes especialidades desde su ingreso en la universidad hasta que terminan los estudios de matemáticas en Estados Unidos. En este proyecto hay dos objetivos principales:

1. Estudiar cómo las ideas y las habilidades que tienen estos estudiantes sobre la demostración evolucionan con el paso por las asignaturas de los programas de matemáticas.
2. Identificar principios que puedan ser útiles para promover en los estudiantes el aprendizaje y la realización de demostraciones.

Los investigadores se centran en la transición de los procesos de validación basados en la comprobación mediante casos particulares (*esquemas de prueba empíricos*, según la terminología empleada por los autores) a los procesos de validación formal para lograr el primer objetivo. Para conseguir el segundo objetivo, se llevaron a cabo experiencias de enseñanza en las asignaturas semestrales que forman parte de los estudios de matemáticas.

Los 36 estudiantes participantes en este proyecto formaban parte de programas de matemáticas universitarios, los cuales duran 4 años aproximadamente y tienen 14 asignaturas semestrales en total. Durante los 2 primeros años, a muy pocos estudiantes se les exige que realicen demostraciones y, en la mayoría de los casos, su experiencia personal haciendo demostraciones se reduce a la educación secundaria. La primera cohorte de estudiantes se eligió aleatoriamente de las listas de clase de los cursos de matemática discreta y álgebra lineal.

Tras el segundo curso, se realizaron unas entrevistas semiestructuradas a la primera cohorte y se siguió trabajando con ellos hasta que completaron todos los cursos de matemáticas. En estas entrevistas se les propusieron una serie de cuestiones entre las que se incluían preguntas relacionadas con sus asignaturas de matemáticas (que cursaban en el momento de la entrevista o que habían cursado previamente). Los entrevistadores eran, en la mayoría de los casos, uno de los investigadores y, ocasionalmente, un estudiante de doctorado. Las entrevistas fueron grabadas en audio y transcritas posteriormente.

Como parte de este estudio, se presentan diferentes casos de estudiantes que muestran diferencias en el desarrollo de habilidades necesarias para la realización de la demostración (estas habilidades son medidas en términos de comprensión, producción y apreciación de las demostraciones): (a) algunos estudiantes llegan a la universidad con habilidades excelentes en demostración y continúan siendo exitosos en el ámbito de la demostración, (b) otros llegan con un desarrollo pobre y se gradúan sin cambios significativos en dicho ámbito y (c) otros estudiantes inician sus estudios universitarios con deficiencias en ese sentido pero evolucionan favorablemente durante los programas de matemáticas. Estos investigadores reportan los casos de tres estudiantes que representan los tres comportamientos mencionados (Sowder y Harel, 2003).

Los investigadores parten del trabajo con *demostraciones tangibles*. Este tipo de demostraciones, que se caracterizan porque son *concretas*, *convencen* a los estudiantes porque son capaces de comprenderlas y son *esenciales* porque los estudiantes ven la necesidad de su utilización, pueden ayudar a los estudiantes a superar dificultades en el aprendizaje de la demostración.

En este estudio se observa que incluso en los niveles educativos universitarios, la mayoría de los estudiantes muestran esquemas de prueba empíricos, basándose en el trabajo con ejemplos, aunque son conscientes de que eso no es suficiente para justificar la validez de una afirmación en matemáticas. La identificación y puesta en práctica de principios que pueden ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de la demostración se ha basado en la consideración de las demostraciones tangibles y sus características. Así, se puede conseguir una mejora en las habilidades relacionadas con la demostración de algunos estudiantes (Sowder y Harel, 2003).

RAZONAMIENTO INDUCTIVO Y APRENDIZAJE

En la última década se han realizado diversas investigaciones que centran su interés en el razonamiento inductivo como objeto de enseñanza en diferentes niveles educativos. Este interés está justificado, principalmente, por la importancia del razonamiento inductivo en el descubrimiento de nuevo conocimiento y en su utilidad para aplicar el conocimiento adquirido en nuevos contextos. Aunque nuestro objetivo de investigación no se centra en la relación del razonamiento inductivo y el aprendizaje, recogemos las principales investigaciones que se han hecho en esta línea porque constituyen aportaciones importantes en nuestro tema de investigación en la actualidad.

Csapó (1997) parte de la idea de que el razonamiento inductivo se puede utilizar para descubrir nuevo conocimiento pero también para hacer que el nuevo conocimiento sea aplicable a nuevos contextos. A pesar de los esfuerzos realizados desde la investigación en ambos sentidos, Csapó señala la existencia de una brecha entre los estudios que tratan los dos aspectos. En esta ocasión, el investigador se preocupa por evaluar el nivel de desarrollo de razonamiento inductivo en cinco grupos de estudiantes de niveles educativos diferentes. Para examinar el papel del razonamiento inductivo en el aprendizaje escolar, se centra en el conocimiento que aprende en el colegio (*conocimiento escolar*) y el que se puede aplicar en un contexto diferente de aquel en el que se ha aprendido (*conocimiento aplicable*).

Csapó propone a más de 2000 alumnos de 3º, 5º, 7º, 9º y 11º tareas sobre analogías numéricas y verbales, series numéricas y verbales, codificación y exclusión. Los resultados indican que el desarrollo más rápido del razonamiento inductivo se produce entre los cursos 5º y 9º; el desarrollo principal se detectó antes de 5º y se observaron pequeños cambios después de 9º. El investigador concluye que hay una fuerte relación entre los buenos resultados en las tareas de razonamiento inductivo y el conocimiento científico aplicable. En general, Csapó considera que el razonamiento inductivo es esencial en los diferentes cursos en los que ha llevado a cabo su investigación para que los estudiantes puedan poner en práctica el conocimiento adquirido.

A partir del modelo propuesto en la investigación de Klauer (1996), los trabajos de Christou y Papageorgiou (En prensa), De Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer (2002), y Tomic y Kingma (1997) ponen de manifiesto la utilidad de los diferentes tipos de problemas considerados por Klauer para el desarrollo del razonamiento inductivo en educación primaria.

Tomic y Kingma investigan los efectos de un programa de entrenamiento en razonamiento inductivo según los resultados de los niños en tests, el rango de transferencia, los efectos a largo plazo después de cuatro meses de entrenamiento, y la efectividad del grupo de entrenamiento. Participaron 47 niños de tercer grado de nivel medio. El grupo de control siguió el currículum ordinario. Se escogieron a 23 de ellos de manera aleatoria como grupo experimental que sigue el programa de entrenamiento, que se centra en seis tareas de razonamiento inductivo:

1. Generalización.
2. Discriminación.
3. Clasificaciones cruzadas.
4. Reconocimiento de relaciones.
5. Relaciones discriminatorias.
6. Formación del sistema.

Los resultados indicaron que hubo un efecto significativo y positivo del entrenamiento en la actuación de los niños en las tareas de razonamiento inductivo.

Christou y Papegeorgious (En prensa) validan el modelo de Klauer con un grupo de 135 estudiantes chipriotas de 5º curso. Los investigadores elaboran un test de 18 problemas de respuesta múltiple (9 sobre agrupación de objetos y 9 de seriación de objetos), estableciendo diferentes niveles para los problemas que proponen tanto en lo referente a los atributos como a las relaciones. Christou y Papegeorgious confirman que han identificado seis procesos cognitivos diferentes cuando los estudiantes tratan de identificar las semejanzas, las diferencias, y ambas conjuntamente en la resolución de problemas con los atributos de elementos o con la relación entre diferentes elementos. Además, los investigadores concluyen que los tres procesos cognitivos (semejanza, diferencia y ambos) generan una imagen coherente del razonamiento inductivo de los estudiantes en cada nivel y que no es apropiado sugerir que el razonamiento inductivo de los estudiantes sigue una progresión ordenada a través de los niveles considerados en atributos y relaciones.

De Koning, Hamers, Sijtsma y Vermeer (2002) utilizan algunas de las tipologías señaladas por Klauer (1996) , apoyándose en materiales visuales y verbales para construir dos programas de enseñanza del razonamiento inductivo a estudiantes de 3º y 4º de educación primaria. En el primero de ellos (que se realiza en 3º) se trabaja con materiales visuales y se centra en el razonamiento inductivo y en el segundo con materiales verbales (para 4º), en los que se trata de ver la relación del razonamiento inductivo con la lectura comprensiva. El trabajo muestra un enfoque original de la enseñanza que favorece el desarrollo del razonamiento inductivo por parte de los estudiantes, en el que el papel de los profesores es fundamental para crear un clima de debate tanto en el aula con los alumnos como entre profesores, que se ve fortalecido por la implementación de diferentes fases en el proceso.

La investigación de Barrera (2004) se contextualiza en el mismo grupo de trabajo en el que se enmarca nuestra investigación sobre razonamiento inductivo. Barrera analiza el cambio (supuestamente una mejora) que se produce en la utilización del razonamiento inductivo por parte de maestros en formación después del desarrollo de un tema, en clase, en el que los alumnos se familiarizan con la inducción completa mediante resolución de problemas. Se trata de un trabajo de tipo exploratorio que sigue un diseño de investigación de tipo experimental con pre-test y post-test. Los sujetos son un grupo de profesores, de educación primaria, en formación inicial. Se detectó una mejora en el uso del razonamiento inductivo tras el desarrollo del tema anteriormente indicado. El autor hace especial hincapié en la utilidad de trabajar en el aula este contenido matemático así como dedicar atención especial, en dicho trabajo, a los diferentes sistemas de representación, señalando además la dificultad que entraña para los estudiantes la obtención del término general de una secuencia numérica. En la actualidad, la investigación de Barrera, continúa teniendo como base el mencionado estudio exploratorio.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Entre los trabajos vinculados al razonamiento inductivo, destacamos algunas propuestas didácticas en las que se considera imprescindible el razonamiento inductivo para la comprensión y construcción por parte de los escolares del conocimiento matemático (National Council of Teachers of Mathematics, 2003) y situaciones didácticas para que los alumnos trabajen el razonamiento inductivo. En las propuestas que recogemos en este apartado, a diferencia de los trabajos recogidos en el epígrafe anterior, el razonamiento inductivo no se considera objeto de aprendizaje pero sí se considera un elemento fundamental para éste.

En el libro del Shell Centre (1984) se presenta una forma de trabajar que presta especial atención a la elección de estrategias para la resolución de problemas, y la posterior explicación y discusión de resultados. Se plantean una serie de problemas para trabajar con los estudiantes que comienzan con la consideración de casos particulares en contextos numéricos o gráficos y se plantea la búsqueda de un patrón y la formulación de una regla general para ese patrón. Con esta propuesta se persiguen los siguientes objetivos con los estudiantes:

- Comprensión del problema.
- Organización sistemática de la información.
- Descripción y explicación de los métodos utilizados y de los resultados obtenidos.
- Formulación de una generalización (verbal o algebraicamente).

Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) consideran la generalización como una de las ideas básicas que puede guiar a los estudiantes a la utilización y manejo del lenguaje algebraico. Desde esta perspectiva, los autores presentan una propuesta de trabajo para estudiantes de los últimos cursos de educación primaria y educación secundaria. La propuesta se centra en una serie de problemas en diferentes contextos en los que aparecen, de manera implícita, secuencias numéricas y se propone trabajar con los estudiantes para que lleguen a:

- Ver un patrón.
- Decir un patrón.
- Escribir el patrón.

- Comprobar el patrón.

Desde la misma perspectiva de la generalización y su relación con el lenguaje algebraico que se pone de manifiesto en el trabajo anterior, el Grupo Azarquiel (1993) presenta una propuesta constituida por actividades encaminadas a expresar lo general utilizando distintas estrategias. El Grupo Azarquiel se centra en tres tareas que considera necesarias para lleguen a expresar la generalización:

- Ver lo que es común a todos los casos particulares presentados.
- Describir en el lenguaje natural la regularidad detectada.
- Escribir la regularidad mediante diferentes sistemas de representación.

Mason (1996), desde la perspectiva que le da su participación en trabajos como Mason (1988), Mason (1991) y Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985), muestra y comenta diferentes tareas que han sido propuestas como *ejemplos* o *ejercicios* en otros trabajos relacionados con la generalización (suyos y de otros investigadores) y hace una reflexión sobre la utilidad que pueden tener dichas tareas en función de los objetivos que se propongan y los estudiantes a los que se dirijan.

La importancia concedida a los patrones dentro de la matemática a partir de la década de los 90 (Smith, 2002) tiene su influencia en la Educación Matemática y esto se pone de manifiesto en el trabajo de Orton (1999), en el que se presta una especial atención a los patrones en la enseñanza de la matemática. Dentro de este libro, destacamos la propuesta de trabajo que presentan Orton, Orton y Roper (1999), donde los autores presentan los resultados de diversas investigaciones previas para justificar la propuesta de diversos contextos pictóricos, como formatos alternativos a las tradicionales secuencias de números, y que son interesantes para el trabajo de los patrones. Entre los tipos de representaciones que los autores utilizan para estos problemas, destacamos: las configuraciones puntuales, los dibujos basados en figuras geométricas y las construcciones con palillos de dientes. Para cada uno de esos tipos de problemas, se observan los resultados obtenidos en diferentes investigaciones que ya se han mencionado con anterioridad y las distintas formas en que los resolutores han llegado a la identificación de un patrón o, incluso a la expresión de la generalización.

REFLEXIONES SOBRE LA METODOLOGÍA DE LOS ANTECEDENTES

En general, se observan dos marcos metodológicos generales en la aproximación a los problemas relacionados con el razonamiento inductivo. Por un lado, hay investigaciones que se interesan por los resultados tras la aplicación de un proceso de instrucción. Por otro lado, hay investigaciones que se centran en describir el proceso de razonamiento que siguen los estudiantes mientras resuelven unas tareas determinadas. Sobre este último tipo de investigaciones, algunos autores, entre los que destacamos a Balacheff (2000), De Groot (2001) o Flores (2002), llaman la atención, ya que consideran la necesidad de conocer el proceso de razonamiento de los alumnos, más allá del resultado obtenido.

Los trabajos presentados en este capítulo, independientemente del marco metodológico que empleen, comparten la resolución de problemas como contexto en el que los alumnos deben dar respuesta a unas tareas determinadas. A este respecto, destacar que en esos problemas, la información de la que parten los alumnos son uno o varios casos particulares expresados numérica o gráficamente. A partir de ellos se les plantea una propuesta de trabajo en la que deben continuar, extrapolar, generalizar, particularizar, comprobar, justificar o demostrar.

Por el contrario, destacamos que no se han encontrado investigaciones en las que se les presente a los alumnos una situación contextualizada y los casos particulares no se hagan explícitos.

INTERROGANTES QUE SE SUSCITAN

Los trabajos presentados en este capítulo ponen de manifiesto el interés de considerar los siguientes interrogantes en esta investigación:

1. ¿Qué tipos de patrones identifican con más facilidad los estudiantes de 3º y 4º de ESO?
2. ¿Tiene relación la identificación del patrón con la generalización o la validación de conjeturas que llevan a cabo los estudiantes?
3. ¿Influye la visualización en la detección del patrón?

4. ¿Qué estrategias emplean los estudiantes españoles en la resolución de problemas inductivos relacionados con patrones lineales y cuadráticos?
5. ¿Llegan los estudiantes a expresar la generalización? En caso afirmativo, ¿lo hacen algebraicamente o utilizan otra forma de expresarla?
6. ¿Llegan los estudiantes a justifican sus conjeturas? ¿Lo hacen basándose en casos particulares? ¿Lo hacen formalmente?
7. ¿Existen diferencias significativas en los pasos del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes según el curso que estudian? ¿Existen diferencias significativas en el proceso de resolución de los problemas según el curso?
8. ¿Existen diferencias significativas en los pasos del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes según el tipo de problema que se le plantea?
9. ¿Existen diferencias significativas en el razonamiento inductivo que realizan los estudiantes en función del curso al que pertenecen?
10. ¿Existen diferencias significativas en las estrategias que emplean los estudiantes en la resolución de problemas inductivos en función del curso al que pertenecen?
11. ¿Es adecuado el modelo teórico *ideal* para describir el trabajo de los estudiantes cuando ponen de manifiesto el razonamiento inductivo? ¿Se ajusta el trabajo de los estudiantes a dicho modelo teórico?

Pretendemos dar respuesta a estos interrogantes que, en la mayoría de los casos son reformulaciones depuradas de algunos de nuestros objetivos específicos. Esto permitirá contrastar los resultados que obtengamos con algunos de los presentados en este capítulo.

CAPÍTULO 5

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo presentamos la metodología que utilizamos en el trabajo. Para ello, comenzamos con la descripción del diseño, que parte de nuestro objetivo general y del estudio piloto como elementos fundamentales en el diseño de la investigación definitiva. En esta descripción tratamos la muestra, las variables de investigación, la construcción de una prueba constituida por seis problemas para la recogida de información y la elaboración de unas hojas para registrar la información que extraemos de las producciones de los estudiantes (*hojas de codificación*).

Finalmente, presentamos una forma de seleccionar a siete sujetos para una descripción específica de sus producciones.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Describimos el plan que desarrollamos para obtener la información que utilizamos en la investigación, partiendo del objetivo general de la misma.

Los cuatro elementos clave se aprecian en el objetivo general de investigación y sobre ellos se fundamenta el diseño de esta investigación: razonamiento inductivo, estudiantes de 3º y 4º de ESO, progresiones aritméticas y resolución de problemas.

1. El *razonamiento inductivo* es el proceso cognitivo que se pretende describir y caracterizar en esta investigación, y constituye una parte fundamental del marco teórico del trabajo.

2. Los *estudiantes de 3º y 4º de ESO* son los sujetos en los que nos hemos centrado para realizar el análisis del razonamiento inductivo. La muestra está conformada por estudiantes de estos niveles educativos.
3. Las *progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2* son el contenido matemático que se va a utilizar para analizar el razonamiento de los estudiantes de 3º y 4º de ESO. Los problemas presentes en el instrumento de recogida de información están relacionados con este contenido.
4. La *resolución de problemas* es un contexto adecuado para el estudio del razonamiento inductivo de los sujetos. La recogida de información se hará mediante una propuesta basada en la resolución de problemas.

En la Figura 5 - 1 recogemos un esquema general que resume el diseño de esta investigación.

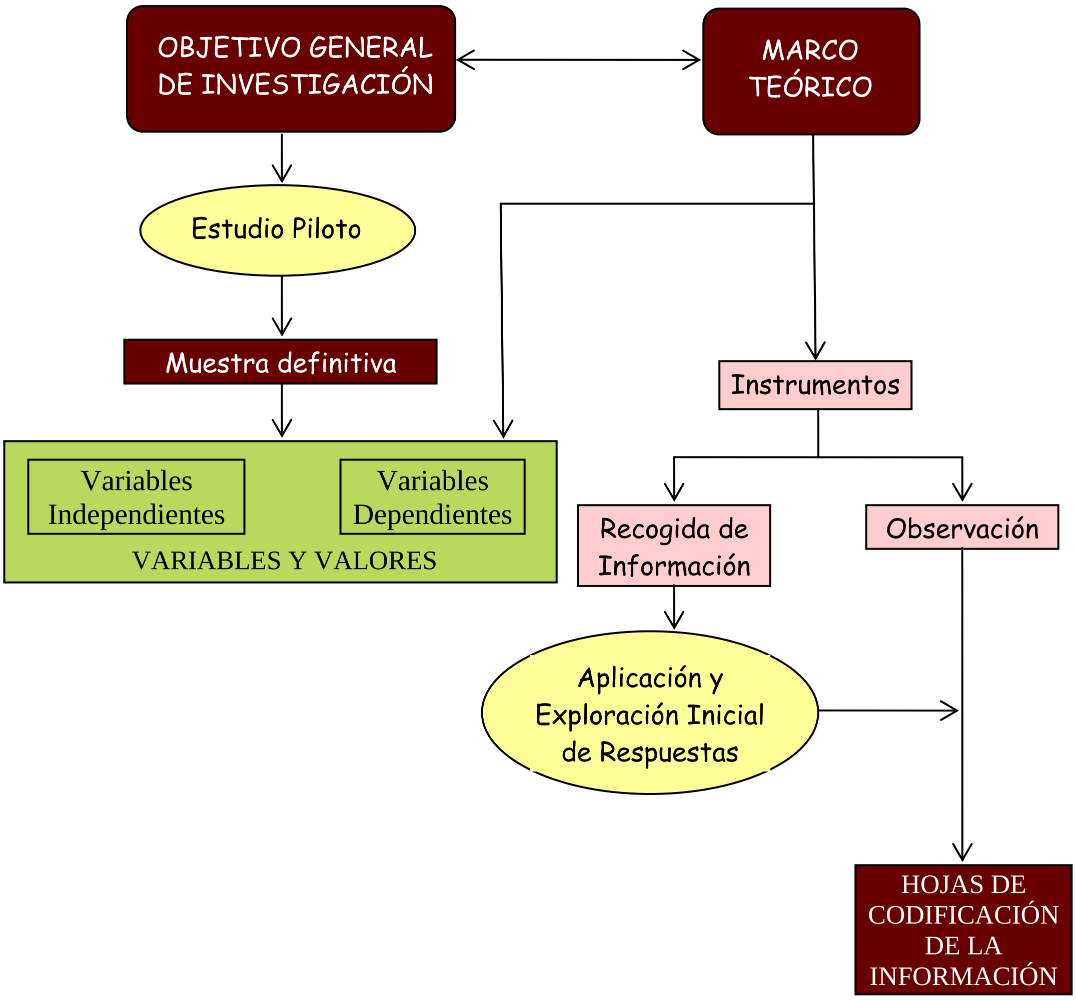


Figura 5 - 1. Diseño de la investigación

Partimos del objetivo general de investigación y realizamos el estudio piloto de este trabajo (Cañadas, 2002), el cuál permitió concretar diferentes aspectos, entre ellos, la muestra del estudio definitivo.

Considerando el marco teórico y la muestra definitiva, identificamos las variables que intervienen en los objetivos de este trabajo (dependientes e independientes).

Asimismo, a partir del marco teórico construimos un instrumento para la recogida de información, basado en la resolución de problemas, y dos instrumentos para la observación de las producciones escritas de los sujetos de la muestra.

Tras la aplicación del instrumento de recogida de información, realizamos una primera exploración de las respuestas de los estudiantes, que nos lleva a la revisión de los instrumentos de observación de la información y a la elaboración de dos hojas para la codificación de los datos.

ESTUDIO PILOTO

Nuestra primera aproximación al razonamiento inductivo de los estudiantes de educación secundaria, la llevamos a cabo en el estudio piloto. En los siguientes epígrafes presentamos algunos aspectos relevantes del mismo.

Objetivo de Investigación

El objetivo general de investigación fue *estudiar la utilización que hacen los individuos del razonamiento inductivo cuando se enfrentan a la realización de unas tareas matemáticas no rutinarias* (Cañadas, 2002, p. 5).

Metodología

Se realizó un estudio de casos con 12 estudiantes de educación secundaria y bachillerato, a los que se les propusieron dos tareas matemáticas cuya resolución permitía que se hiciera uso de razonamiento inductivo. Las dos tareas estaban referidas a contenidos matemáticos diferentes. En la primera tarea los estudiantes debían de razonar sobre la paridad del resultado de la suma de dos números pares. En la segunda tarea se trataba de determinar el mayor número de regiones que se obtienen al trazar un número de rectas sobre un plano.

Las tareas propuestas fueron realizadas por los estudiantes en un contexto de entrevistas semiestructuradas, que fueron grabadas en audio.

Resultados

Resultados teóricos

Un resultado teórico de nuestro estudio piloto fue una aproximación a un modelo para la descripción del razonamiento inductivo, que considera diferentes pasos del mismo. Una vez concluida la fase empírica, se llegó a la construcción de un modelo más completo, al analizar el desempeño de los estudiantes en la resolución de las tareas señaladas, y tomar en consideración los pasos que ejecutan en aquellos casos en los que utilizaron razonamiento inductivo. El modelo que resultó consta de siete pasos, los cuales se describen del siguiente modo:

1. *Trabajo con casos particulares*. El punto de partida es el trabajo con ejemplos concretos, fundamentalmente aquellos casos que respondan a situaciones iniciales, o valores pequeños, cuando se trata de situaciones numéricas.
2. *Organización de la información obtenida con los casos particulares*. Empleo de estrategias para sistematizar y facilitar el trabajo con la información obtenida a partir de la observación de los casos particulares. La organización se puede efectuar mediante gráficos, tablas o cualquier sistema que permita visualizar fácilmente la relación entre los diferentes resultados obtenidos ordenadamente, a partir de los casos particulares anteriores.
3. *Búsqueda y predicción de patrones*. La percepción de una regularidad en el trabajo con los casos particulares (organizados, o no) puede llevar a pensar en otros casos no tratados y comprobar si se mantiene la misma regularidad. En caso afirmativo, dicha regularidad constituye un patrón válido para todos los casos particulares observados. El patrón, en este caso, se basa en la idea de situación repetida con regularidad.
4. *Formulación de conjeturas*. Se formula una afirmación, o conjetura, sobre todos los casos, trabajados y no trabajados. Dicha afirmación es válida

para los casos tratados y está basada en los mismos, pero que no ha sido validada para los casos no tratados, por lo que existe un elemento de duda.

5. *Prueba de conjeturas*. Se trata de llegar a la convicción sobre la verdad de la conjetura formulada, tanto para los casos particulares tratados, que han permitido llegar a ella, como para otros con los que no se ha trabajado. En este paso, se valida la conjetura con nuevos casos particulares.
6. *Generalización de conjeturas*. Si la conjetura enunciada se cumple en algunos casos particulares más, la conjetura puede ser ampliada a nuevos casos, se formula entonces la hipótesis de que esa conjetura es una propiedad. El patrón matemático se transforma en una regla general.
7. *Demostración de la conjetura*. La confirmación de una conjetura requiere de su validación (el rechazo surge de la imposibilidad de hacerlo) con casos particulares. Pero esto no es suficiente para justificar una generalización. Es necesario dar razones que expliquen la conjetura con la intención de convencer a otras personas. Se busca un examen más justo de esa conjetura y se recurre a la prueba formal como la última justificación que garantiza la veracidad de la conjetura formulada.

Los principales aportes de esta propuesta se refieren al trabajo con casos particulares, se observa el tipo de trabajo que se lleva a cabo con ellos y la forma en que los mismos se trabajan. Por otro lado, en el proceso de validación, se diferencia la comprobación de las conjeturas generales mediante los casos particulares, característicos de la primera fase inductiva, de la inducción matemática.

<u>Resultados empíricos</u>

En general, las respuestas a las preguntas de investigación, tras el trabajo empírico, fueron diferentes para las dos tareas propuestas. Mientras que la primera tarea es comprendida por los alumnos; en la segunda, todos los estudiantes plantean dudas y preguntas antes de iniciar el trabajo para dar una respuesta a la misma. Estas diferencias se justifican por la distinta naturaleza de las dos tareas.

Una vez que los estudiantes entienden la propuesta, todos utilizan el razonamiento inductivo para resolver ambas tareas, siguiendo algunos de los pasos que hemos identificado a partir del trabajo de Pólya (1945). Debido a que la mayoría de los alumnos conocen la respuesta de la primera pregunta, la información extraída de la segunda tarea es más enriquecedora para la descripción del razonamiento inductivo.

Respecto a la identificación de patrones, la mayoría de los estudiantes lo consiguen en las dos tareas. En la segunda tarea, siete de los doce estudiantes detectan la relación recurrente. Una de esas alumnas expresa algebraicamente la generalización.

Los estudiantes que realizan alguna prueba de sus conjeturas, lo hacen basándose en los casos particulares con los que trabajan. Sólo una de las alumnas (la misma que expresa la generalización algebraicamente) pone de manifiesto la necesidad de hacer algún tipo de demostración formal.

El sistema de representación verbal es el predominante en la resolución de las tareas. Dada la vinculación geométrica de la segunda tarea, los alumnos también utilizan el sistema de representación gráfico.

Las principales dificultades de los estudiantes, se presentaron en ambas tareas, al tratar de expresar de forma escrita los patrones detectados.

No se han apreciado errores, de manera sistemática, en el trabajo de los estudiantes.

Finalmente, no se llegó al establecimiento de niveles en este estudio. Se constata la necesidad de plantear otro tipo de investigación para conseguir dar respuesta a esta cuestión.

En el estudio piloto (Cañadas, 2002), al que estamos haciendo referencia, se confirman algunos resultados sobre el razonamiento inductivo, obtenidos en investigaciones previas realizadas con estudiantes de educación secundaria y bachillerato, en lo referente a los procesos de validación. En estos niveles educativos se observa una tendencia al trabajo con lo empírico. En cuanto al proceso de razonamiento inductivo, no se identificaron diferencias significativas en el razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes de diferentes cursos de educación secundaria obligatoria y bachillerato.

El estudio piloto, permitió hacer ciertas sugerencias respecto a la metodología empleada. Se trata de consideraciones que debemos tener en cuenta en la investigación posterior:

- La resolución de problemas se confirma como una actividad adecuada para analizar el razonamiento inductivo de los estudiantes de educación secundaria.
- La necesidad de concretar el contenido matemático que aparece en el trabajo de los problemas y realizar un estudio detallado de ese contenido.
- La conveniencia de ampliar el número de estudiantes participantes en la investigación con objeto de conseguir mayor variedad en los datos.

Partiendo de los resultados y de las sugerencias metodológicas planteadas tras la realización del estudio piloto, nos centramos en la descripción de la metodología del estudio definitivo.

ESTUDIO DEFINITIVO

Dentro de los dos enfoques de investigación que se distinguen en general: *cualitativo* y *cuantitativo* (Cea D´Ancona, 1996; Hernández, Fernández y Baptista, 2003), hemos adoptado un paradigma que combina lo cuantitativo y lo cualitativo. Uno de los objetivos de este capítulo es la determinación y el análisis de unas variables relacionadas con el razonamiento inductivo de los estudiantes. La intención es identificar con precisión las variables que entran en juego y los valores que pueden tener.

Por la naturaleza de nuestro objetivo general de investigación, este trabajo es de carácter *descriptivo* (Cea D´Ancona, 1995; Hernández, Fernández y Baptista, 2003; León y Montero, 2000). Uno de los fines de la metodología descriptiva es el establecimiento de tipologías (Cea D´Ancona, 1995). Este es uno de los objetivos específicos de investigación, en el que nos proponemos identificar perfiles según el razonamiento inductivo de los estudiantes (objetivo 12, ver Capítulo 1).

La recogida de información se lleva a cabo en un momento concreto y participan estudiantes de distinta edad, por lo que se trata de un estudio *transversal*. Es como sí realizáramos una fotografía instantánea en un momento determinado y luego se busca describir lo que allí aparece (Cohen y Manion, 1990; Hernández, Fernández y Baptista, 2003).

MUESTRA

El grupo de estudiantes con los que se ha llevado a cabo el estudio empírico está conformado por sujetos que pueden ser considerados representativos de los alumnos de centros públicos de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria de España, puesto que no se ha considerado ninguna característica específica para su selección, excepto el nivel educativo. La muestra la conforman los 359 estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria de cuatro centros a los que tuvimos acceso. En la Tabla 5 - 1 mostramos las edades de estos estudiantes:

Tabla 5 - 1. Edad de los sujetos

Edad	Frecuencia	Porcentaje
13	1	,3
14	96	26,7
15	174	48,5
16	60	16,7
17	27	7,5
18	1	,3
Total	359	100,0

Las edades de los de los sujeetos oscilan entre los 13 y los 18 años, teniendo el 99,4% de ellos, 14, 15, 16 y 17 años. Casi la mitad de los estudiantes tenían 15 años en el momento de realizar la prueba. En cuanto a las capacidades de los sujetos, no consideramos los alumnos con adaptaciones curriculares en matemáticas o con necesidades educativas especiales, ya que no forma parte de los objetivos de esta investigación.

Los sujetos pertenecen a cuatro centros de diversas zonas geográficas españolas: Madrid, Granada, Teruel y Cúllar-Vega (un pueblo de la provincia de Granada). La intención de la variedad geográfica es tener un grupo de estudiantes heterogéneo de 3º y 4º de ESO.

Los cuatro centros son públicos, mixtos e incluyen en su oferta educativa la Educación Secundaria Obligatoria. Los estudiantes de estos centros pertenecen, en general, a familias de clase media.

En la Tabla 5 - 2 se observan el número de alumnos de la muestra y su distribución según curso y centro al que pertenecen.

Tabla 5 - 2. Sujetos

		Curso		Frec.
		3º	4º	
Centro	Granada	76	38	114
	Madrid	51	39	90
	Cúllar-Vega	48	38	86
	Teruel	36	33	69
		211	148	359

Historial Académico de los Estudiantes Relacionado con el Razonamiento Inductivo

Para conocer el trabajo previo realizado por los sujetos relacionado con nuestra investigación, recurrimos a varias fuentes:

1. Currículo de educación secundaria vigente en el curso en el que se llevó a cabo el estudio empírico.
2. Entrevistas a los profesores responsables de los estudiantes, previas al estudio empírico realizadas.
3. Libros de texto que emplean habitualmente los sujetos.
4. Cuadernos de trabajo de los estudiantes.

En cada una de las fuentes, centramos la atención en la información relativa a los aspectos relacionados con el objetivo de investigación, que consideramos que podían influir en las producciones de los estudiantes.

<u>Currículo de educación secundaria</u>

En el Capítulo 1 se ha hecho referencia al razonamiento inductivo en el currículo español, destacando el trabajo de algunas tareas vinculadas a éste, como pueden ser el reconocimiento de regularidades numéricas o el desarrollo de estrategias para defender sus propios argumentos.

En el Capítulo 3 se ha puesto de manifiesto la situación curricular del contenido matemático. Concluimos, por tanto, que los estudiantes de los niveles educativos considerados se suponen capacitados para abordar el trabajo con las progresiones de números naturales de órdenes 1 y 2.

En cuanto a la resolución de problemas, otro de los elementos clave de esta investigación, el currículo de 3 º y 4º de ESO lo considera *una práctica habitual* *integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje* (Boletín Oficial del Estado, 2004, p. 5766).

Entrevistas con los profesores responsables

Con la intención de conocer de manera directa el trabajo previo realizado por los sujetos, llevamos a cabo una entrevista, de carácter informal, con cada uno de los profesores de matemáticas de los grupos participantes en la investigación. Las entrevistas con los profesores de Cúllar-Vega, Granada y Teruel fueron realizadas de forma presencial por la doctoranda, mientras que la realizada a los profesores del centro de Madrid se llevó a cabo telefónicamente.

La entrevista fue dirigida con el fin de obtener información sobre el trabajo realizado en clase de matemáticas que estuviera relacionado con nuestro trabajo: razonamiento, progresiones, resolución de problemas y, en general, la metodología que habitualmente siguen los estudiantes en el aula. En los siguientes epígrafes presentamos la información que obtuvimos.

Información sobre el razonamiento

Pese a que nuestro tema de investigación es el razonamiento inductivo, no hicimos referencia directa a él en las entrevistas con los profesores para que no variaran sus clases previas a la realización de la prueba.

Al hablar del razonamiento de los estudiantes, todos los profesores coincidieron en reconocer la importancia del mismo en matemáticas y la dificultad que constituye para los estudiantes razonar sobre las tareas matemáticas que realizan.

Los profesores reconocieron haber trabajado tareas sobre generalización mediante la resolución de problemas y manifiestan su esfuerzo porque los estudiantes justifiquen los pasos que dan en las tareas matemáticas.

Los profesores comentan que los procesos que parten de casos concretos son los que se trabajan en estos niveles (procesos inductivos) y que no ven capacitados a los estudiantes para el trabajo de una matemática deductiva, por lo que las demostraciones no tienen cabida en el trabajo que llevan a cabo los alumnos de 3º y 4º de ESO.

Las entrevistas con los profesores confirmaron que los estudiantes habían tenido preparación suficiente para poder enfrentarse a los problemas que se les iban a proponer.

La revisión de los libros de texto que emplean los estudiantes, así como de algunos cuadernos de clase corroboraron esta información.

Información sobre el contenido matemático

Durante la entrevista, no pusimos de manifiesto la atención que prestamos a las sucesiones como contenido matemático para que no existiera la posibilidad de que los profesores variaran su programación docente en los días previos a la recogida de información de nuestro estudio. A partir de las entrevistas, llegamos a la conclusión de que todos los alumnos habían trabajado con sucesiones en el curso en el que se encontraban los estudiantes o en el curso previo. Concretamente, los profesores hicieron referencia a las progresiones aritméticas y geométricas (las sucesiones que aparecen en el currículum de ESO).

Los sujetos habían trabajado las funciones polinómicas y los diferentes sistemas de representación en los que se pueden expresar.

Los profesores no conocieron el contenido matemático utilizado en la prueba hasta el día en el que se les propuso a sus estudiantes.

Información sobre la resolución de problemas

Informamos a los profesores de que la prueba se basaba en la resolución de problemas. A este respecto, todos los profesores nos informaron de que era parte de la metodología que llevaban a cabo con sus estudiantes en matemáticas. En unos casos utilizan los problemas propuestos en los libros de texto y, en otros, recurren a problemas que constituyen parte de sus actividades de ampliación.

Todos los profesores coincidieron en que había pocos alumnos, en sus aulas, que podrían ser calificados, desde su punto de vista, como buenos resolutores de problemas.

Información sobre la metodología de trabajo en el aula

Al preguntar a los profesores, reconocieron seguir una metodología en el aula en la que el libro de texto juega un papel fundamental. En algunos casos, justificaron el empleo de los libros de texto porque proporciona mejores resultados. Estos profesores denuncian la falta de atención de los estudiantes a las explicaciones del profesor y ven en los libros de texto un material útil porque permite que los estudiantes tengan las nociones teóricas escritas y que puedan trabajar sobre las tareas propuestas en el mismo libro.

Los alumnos asisten a clase con sus libros de texto y, tras las explicaciones del profesor, trabajan las actividades del libro u otras propuestas por el profesor. Las actividades que propone el profesor son calificadas por algunos de ellos como *de ampliación* o *de refuerzo*.

Dado que los libros de texto constituyen una parte importante de la metodología que siguen los profesores responsables de los sujetos en la clase de matemáticas, realizamos una revisión de estos libros.

Libros de texto empleados por los estudiantes

Consideramos especialmente relevante esta revisión porque el currículo no hace referencia explícita al razonamiento inductivo y porque, en algunos casos, los libros de texto utilizados en las aulas fueron publicados antes que el Real Decreto por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria en España (Boletín Oficial del Estado, 2004), vigente en el curso en el que se pretendía hacer el estudio empírico. Por lo tanto, esta información puede ser incluso más fiable, en algunos casos, que la aportada por los documentos curriculares. En la Tabla 5 - 3 recogemos la ubicación geográfica de los centros a los que pertenecían los sujetos, la editorial de los libros de texto que emplean y el año de edición de los mismos:

Tabla 5 - 3. Centros, editorial del libro de texto y año de edición

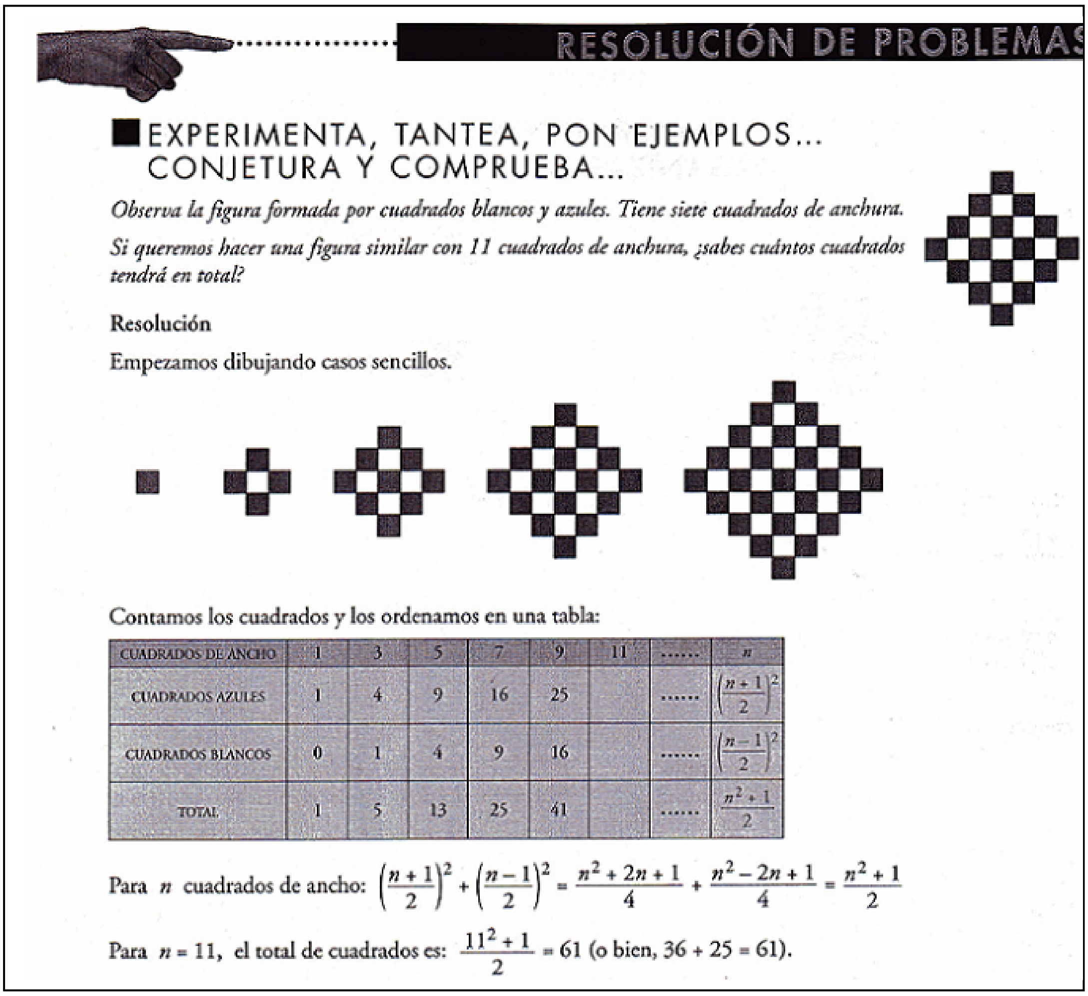
CENTRO	EDITORIAL	AÑO DE EDICIÓN
Cúllar Vega (Granada)	Anaya	2004
Granada	SM	2002/2003
Madrid	Anaya	2004
Teruel	Anaya	2004

Como se observa en la Tabla 5 - 3, los cuatro centros utilizan libros de texto de dos editoriales españolas: SM y Anaya. Se trata de dos editoriales de las que tienen mayor tirada nacional en libros de texto escolares.

La revisión de los libros mencionados muestra lo siguiente:

a) Editorial Anaya

El libro de texto de 3º de ESO de la editorial Anaya no presenta problemas ni actividades que se relacionen con el razonamiento inductivo. En el libro de 4º de ESO, el razonamiento inductivo aparece asociado a la resolución de problemas y sin relación explícita a ningún contenido matemático concreto, como se observa en el problema recogido en la Figura 5 - 2.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EXPERIMENTA, TANTEA, PON EJEMPLOS... CONJETURA Y COMPRUEBA...

Observa la figura formada por cuadrados blancos y azules. Tiene siete cuadrados de anchura. Si queremos hacer una figura similar con 11 cuadrados de anchura, ¿sabes cuántos cuadrados tendrá en total?

Resolución

Empezamos dibujando casos sencillos.

Contamos los cuadrados y los ordenamos en una tabla:

CUADRADOS DE ANCHO	1	3	5	7	9	11	......	n
CUADRADOS AZULES	1	4	9	16	25		......	$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$
CUADRADOS BLANCOS	0	1	4	9	16		......	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$
TOTAL	1	5	13	25	41		......	$\frac{n^2+1}{2}$

Para n cuadrados de ancho: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{4} + \frac{n^2-2n+1}{4} = \frac{n^2+1}{2}$

Para $n = 11$, el total de cuadrados es: $\frac{11^2+1}{2} = 61$ (o bien, $36 + 25 = 61$).

Figura 5 - 2. Ejemplo 1 (Colera, García, Gaztelu, y Oliveira, 2004, p. 14)

Se observa el planteamiento de una tarea de extrapolación a partir de los primeros términos y su posterior resolución mediante la generalización-particularización, una de las estrategias posibles para la resolución del problema. En esta estrategia, como parte del proceso del razonamiento inductivo, se indican los siguientes pasos a seguir, que forman parte del modelo teórico de razonamiento inductivo considerado:

- *Observación de los primeros términos* de la secuencia (a los que denomina “casos sencillos”) en el sistema de representación gráfico y transforma su representación al sistema de representación numérico.
- *Organización de los resultados obtenidos en el sistema de representación numérico*. En el libro se observa una tabla con columnas numeradas y ordenadas, para organizar los datos correspondientes a los primeros términos numéricos, se relacionan los mismos con el ordinal que tiene su columna y se generaliza para el lugar *n*.
- *Generalización*. A partir de los datos numéricos, se obtiene la expresión en representación algebraica que permite dar respuesta para la figura que tenga *n* cuadrados de ancho, y se opera con expresiones en forma algebraica.

Tras la resolución de este problema, se presentan otros cuya resolución se puede realizar de manera análoga al anterior, mediante los mismos pasos del razonamiento inductivo indicados. Mostramos algunos ejemplos en las tareas que aparecen desde la Figura 5 - 3 a la Figura 5 - 6.

Calcula la suma de los cien primeros números naturales: 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 =?

Observa primero estos casos:

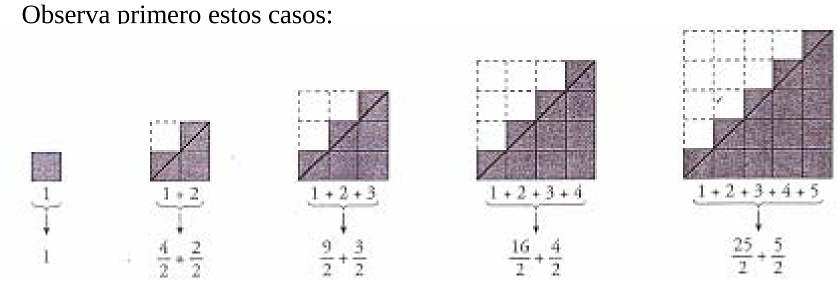
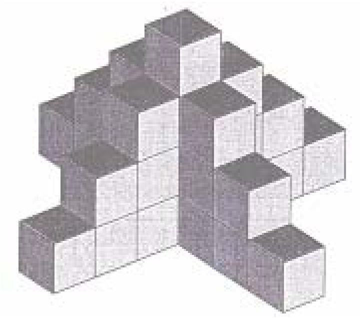


Figura 5 - 3. Ejemplo 2 (Colera et al, 2004, p. 14)

Calcula el número de bloques cúbicos necesarios para construir una torre como la de la figura, pero de 5 pisos. ¿Y si tuviera 10 pisos?



¿Cuántos bloques necesitaríamos para construir una torre de *n* pisos?

Figura 5 - 4. Ejemplo 3 (Colera et al, 2004, p. 15)

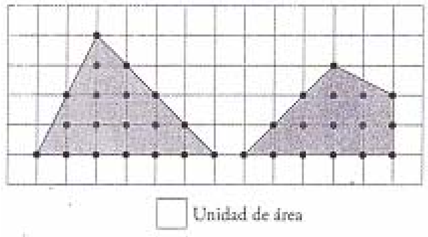
Corta una tira larga de papel y pliégala por la mitad, de derecha a izquierda. El doblez que aparece en el papel, al abrirlo, es una marca "hacia abajo". Dobla ahora dos veces la tira, siempre en el mismo sentido, y después ábrela de nuevo. Ahora verás tres marcas, una "hacia arriba" y dos "hacia abajo".

Supón que doblas la tira *n* veces y luego la desdoblas. ¿Cuántas marcas habrá? ¿Cuántas serán "hacia arriba" y cuántas "hacia abajo"?

Nº de pliegues	1	2	3	4	5	...	*n*
Nº de dobleces "hacia abajo"							
Nº de dobleces "hacia arriba"							

Figura 5 - 5. Ejemplo 4 (Colera et al, 2004, p. 15)

Observa el triángulo dibujado en esta trama cuadrada: su área es 12 unidades cuadradas. Tiene 12 puntos en el borde y 7 en el interior.



El cuadrilátero tiene un área de 9,5 unidades cuadradas, 11 puntos en el borde y 5 en el interior.
¿Qué relación existe entre el área, el número de puntos en el borde (E) y del interior (I) en cada polígono que dibujemos con sus vértices en nudos de la cuadrícula?
Para encontrar la relación, trabaja con I y E/2.

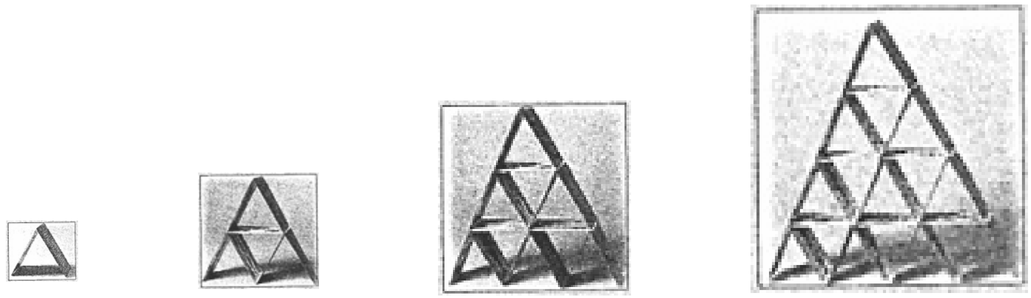
Figura 5 - 6. Ejemplo 5 (Colera et al, 2004, p. 15)

En cuanto al contenido matemático de las progresiones aritméticas y otras estructuras numéricas relacionadas, este libro de texto dedica un apartado a las progresiones en 4º de ESO y, en particular, a las progresiones aritméticas y geométricas, tal y como se observan en la Figura 5 - 7, que recoge el índice del bloque de aritmética y álgebra.

Figura 5 - 7. Progresiones en 4º de ESO (Índice de Colera et al, 2004)

En el apartado correspondiente a las progresiones, se explican y se explicitan los elementos que aparecen en el trabajo con las mismas y la estrategia para llegar a la expresión del término general de la sucesión a partir de términos k-ésimos, conociendo la diferencia entre dos términos k-ésimos consecutivos. En el trabajo con las sucesiones, aparecen algunos problemas relacionados con las progresiones aritméticas que se pueden resolver mediante un proceso de razonamiento inductivo. Recogemos algunos de estos problemas en la Figura 5 - 8, la Figura 5 - 9 y la Figura 5 - 10.

Estos son castillos de naipes de:



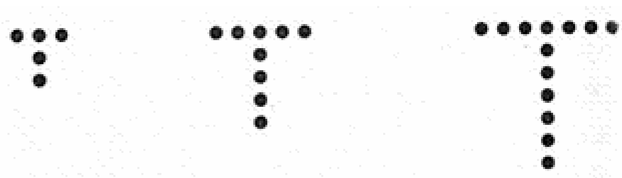
1 piso 2 pisos 3 pisos 4 pisos

¿Cuántos naipes hay en cada piso de un castillo de 10 pisos? ¿Y en el piso bajo de uno de *n* pisos? Los naipes horizontales se cuentan como techo del piso correspondiente.

Figura 5 - 8. Ejemplo 6 (Colera et al, 2004, p. 48)

Observa las figuras en cada caso y busca la fórmula que permita saber cuántos puntos tendrá una figura sabiendo el lugar que ocupa en la serie:

a)



b)

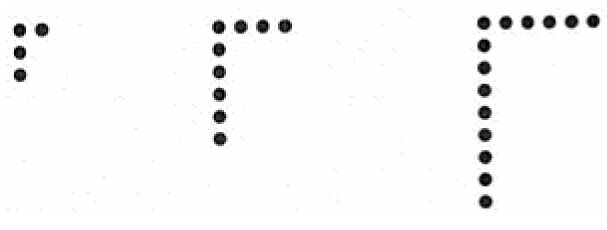
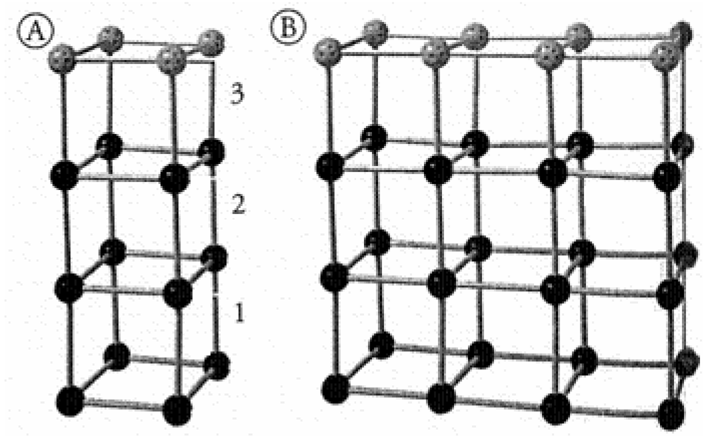


Figura 5 - 9. Ejemplo 7 (Colera et al, 2004, p. 58)



Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarias para hacer una estructura como la de la figura A, pero de *n* pisos.
¿Y para la figura B?

Figura 5 - 10. Ejemplo 8 (Colera et al, 2004, p. 58)

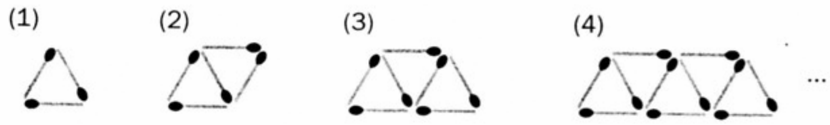
La aparición de tareas relacionadas con el razonamiento inductivo en la editorial Anaya está asociada a la resolución de problemas o al contenido matemático específico de las progresiones aritméticas.

b) Editorial SM

En esta editorial, el razonamiento inductivo aparece vinculado a la resolución de problemas. En la Figura 5 - 11 se observa un ejemplo en el que se plantea la generalización. Para llegar a la resolución de esta tarea, se proponen los siguientes pasos que forman parte del modelo teórico de razonamiento inductivo considerado:

- *Observación de los primeros términos* de la secuencia en el sistema de representación gráfico y se transforma su representación al sistema de representación numérico.
- *Organización de dichos términos* en una tabla. Relación entre los términos de la tabla y el ordinal que ocupa.
- *Generalización*. A partir de los datos numéricos, se ha de obtener la expresión que permite dar respuesta para la figura n-ésima.

Los autores introducen un patrón (en la observación) relacionado con el número que indica la posición del elemento de la secuencia.



¿Cuántas cerillas se necesitan para formar la figura n-ésima?

Formamos la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	4	...	n
N.º de cerillas	3	$5 = 3 + 2$	$7 = 3 + 2 + 2$	$9 = 3 + 2 + 2 + 2$	...	?

Observa que para la figura 3.ª se necesitan: $3 + 2 + 2 = 3 + (3 - 1)2$

para la figura 4.ª se necesitan: $3 + 2 + 2 + 2 = 3 + (4 - 1)2$

para la figura n-ésima se necesitan: $3 + (n - 1)2 = 2n + 1$

Figura 5 - 11. Ejemplo 9 (Vizmanos y Anzola, 2003, p. 143)

En este problema aparece una secuencia lineal donde cada elemento está expresado mediante una representación gráfica hecha con cerillas y cada uno está asociado con su posición ordinal. Se requiere el número de cerillas para la figura n-ésima (término general de la secuencia). Se indica la posibilidad de organizar los datos en una tabla y se da una pista sobre cómo varía la cantidad de cerillas entre dos términos consecutivos, expresándolo en forma de desarrollo aritmético. Este desarrollo puede llevar a la expresión del término general algebraicamente.

En cuanto al contenido matemático, en la editorial SM, aparecen las sucesiones de números naturales y las progresiones como tema del bloque de álgebra para 3º de ESO. En este tema, hemos identificado diferentes problemas cuyo patrón responde a sucesiones aritméticas. Aparecen propuestas del estilo del que se ha mostrado en la Figura 5 - 11, que irán apareciendo en sucesivas figuras de este epígrafe para ejemplificar otros aspectos relacionados con nuestra investigación.

Se pueden encontrar ejemplos en los que el término general se corresponde con una expresión polinómica de grado 2. Con unas preguntas similares a las mostradas (se propone la tarea de generalización), en la Figura 5 - 12 se presenta la siguiente secuencia.

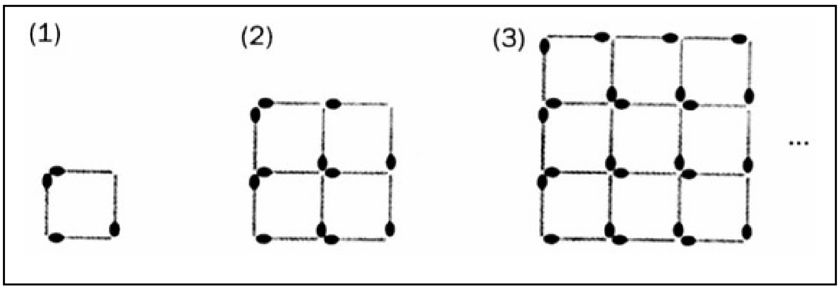


Figura 5 - 12. Ejemplo 10 (Vizmanos y Anzola, 2003, p. 149)

En todos los problemas que se proponen en este libro de texto se observa la invitación a trabajar y organizar los términos k-ésimos de la sucesión y, a partir de ellos, llegar a la generalización. Todo lo que se intuye en los ejemplos observados, se recoge en un problema en el que los términos aparecen expresados verbalmente y cuya resolución se presenta siguiendo los pasos característicos del razonamiento inductivo (ver Figura 5 - 13).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer un diagrama.
- Estudiar casos sencillos.
- Buscar regularidades.

PROBLEMA

En un collar de perlas, la perla mayor se encuentra situada en el centro y las demás van disminuyendo en tamaño desde el centro a los extremos. Cada una de las dos perlas más pequeñas situadas en los extremos cuesta 100 €; cada una de las siguientes cuestan 200 €, la tercera perla desde cada extremo cuesta 300 € y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto costará la perla central si el collar tiene n perlas?

b) ¿Cuánto costará el collar completo?

HACER UN DIAGRAMA

♦ Si el collar tiene 3 perlas será: hay una sola perla central.

Si el collar tiene 4 perlas será: hay dos perlas centrales.

Por tanto debemos estudiar dos casos diferentes cuando n es impar y cuando n es par.

ESTUDIAR CASOS SENCILLOS

♦ a) Sea n impar

N.° de perlas del collar	Diagrama	Precio en cientos de euros de la perla central	Precio en cientos de euros del collar
3	1-**2**-1	2	1 + 2 + 1 = 4
5	1-2-**3**-2-1	3	1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
7	1-2-3-**4**-3-2-1	4	1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16
9	1-2-3-4-**5**-4-3-2-1	5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25
...	...	...	...

b) Sea n par

N.° de perlas del collar	Diagrama	Precio en cientos de euros de la perla central	Precio en cientos de euros del collar
2	**1-1**	1	1 + 1 = 2 = 1 · 2
4	1-**2-2**-1	2	1 + 2 + 2 + 1 = 6 = 2 · 3
6	1-2-**3-3**-2-1	3	1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12 = 3 · 4
8	1-2-3-**4-4**-3-2-1	4	1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 20 = 4 · 5
...	...	...	...

BUSCAR REGULARIDADES

♦ a) Se observa que el precio del collar (4, 9, 16, 25, ...) coincide con el cuadrado del precio, en cientos de euros, de la perla central (2, 3, 4, 5, ...). Si el collar tiene n perlas (n impar) el precio de la perla central es $\frac{n+1}{2} \times 100$ € y el precio del collar completo es: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \times 100$ €.

b) Razonando de igual modo, si el collar tiene n perlas (n par) el precio de las dos perlas centrales es: $\frac{n}{2} \times 100$ €, y el precio del collar completo es: $\frac{n(n+2)}{4} \times 100$ €.

Figura 5 - 13. Ejemplo 11 (Vizmanos y Anzola, 2003, p. 150)

En este libro de texto, observamos la presencia de los sistemas de representación gráfico, numérico y verbal. En los ejemplos anteriores hemos presentado problemas en los que los términos k-ésimos aparecían gráfica y verbalmente. En la Figura 5 - 14 presentamos otros dos ejemplos gráficos (configuraciones puntuales y números poligonales) en los que se pide encontrar la regularidad y expresar el término general de la sucesión.

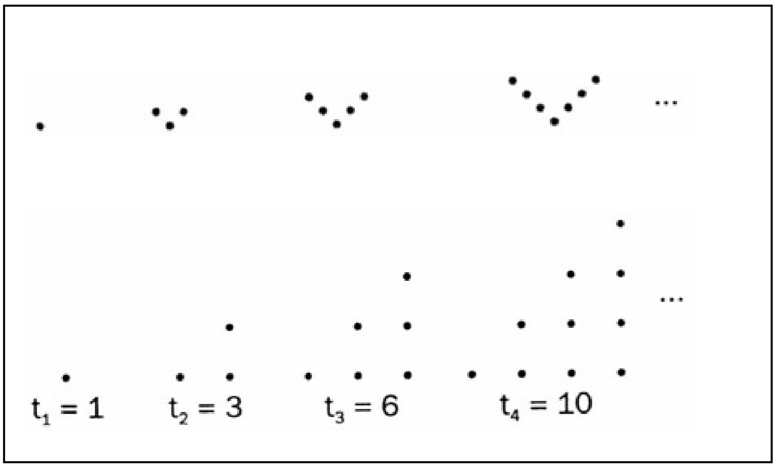


Figura 5 - 14. Ejemplo 12 (Vizmanos y Anzola, 2003, p. 151)

El sistema de representación numérico también es utilizado para proponer la generalización a partir del trabajo con términos k-ésimos (que se pueden corresponder o no con números naturales), como se observa en el ejemplo que recoge la Figura 5 - 15.

Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

b) −2, −4, −6, −8, −10, −12, ...

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$

d) 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

Figura 5 - 15. Ejemplo 13 (Vizmanos y Anzola, 2003, p. 151)

En ambas editoriales se proponen tareas con las que trabajar el razonamiento inductivo. Se presenta una aproximación al modelo de dicho razonamiento para la resolución de problemas. Por tanto, el razonamiento inductivo aparece vinculado a la resolución de problemas en todos los libros de texto con los que trabajan los sujetos que participan en esta investigación.

En lo referente al contenido matemático, el razonamiento inductivo aparece asociado a las sucesiones. En la editorial Anaya se trabajan las progresiones aritméticas de orden 1 en 4º de ESO, mientras que en SM se han trabajado éstas y llegan a propuestas de problemas en las que aparecen progresiones aritméticas de orden 2 en 3º de ESO.

Los alumnos que siguen el libro de la editorial SM trabajan las sucesiones en 3º de ESO. Los aspectos relacionados con este tema matemático que se estudian en el siguiente curso son las funciones polinómicas (4º ESO, opción A) y la convergencia y los límites de sucesiones (4º ESO, opción B).

En ambas editoriales aparecen funciones de primer y segundo grado dentro de los contenidos de 3º y 4º de ESO. El tratamiento que reciben las sucesiones en estos libros de texto se restringe a la definición de sucesión y de su término general, y al trabajo con las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. En la resolución de problemas se resalta el interés que tiene el razonamiento inductivo para la obtención del término general de manera experimental, a partir del trabajo con casos particulares.

<u>Cuadernos de los estudiantes</u>

Para contrastar la información obtenida hasta el momento sobre el trabajo previo de los sujetos, realizamos una revisión de tres cuadernos de trabajo de matemáticas de sujetos de cada una de las clases en las que se realizó la recogida de información.

La revisión llevada a cabo corroboró la información recogida en las entrevistas con los profesores en cuanto al trabajo previo de los estudiantes. Por un lado, los ejercicios que los alumnos tenían en sus cuadernos de trabajo se correspondían con los contenidos de sus libros de texto. Ocasionalmente, en los cuadernos aparecían algunos problemas que habían trabajado en clase diferentes a los que se observan en los libros de texto.

VARIABLES

Las características de la muestra, nos llevan a considerar, en función de nuestros objetivos de investigación, el Curso y el Centro como variables independientes de esta investigación. Los Pasos de Razonamiento Inductivo y las Estrategias Inductivas son las variables dependientes, ya que son las que estamos interesados en analizar.

Tabla 5 - 4. Variables

VARIABLES	
Dependientes	Independientes
Pasos del Razonamiento Inductivo	Curso
Estrategia Inductiva	Centro

Describimos a continuación cada una de las variables mencionadas en la Tabla 5 - 4. Todas las variables consideradas son variables cualitativas y cada una de ellas tiene unos valores asociados, que también se determinarán en los epígrafes siguientes.

Variables Dependientes

En esta investigación consideramos dos variables dependientes: Pasos de Razonamiento Inductivo (Pasos) y Estrategias Inductivas.

Pasos de Razonamiento Inductivo

La variable Pasos es una variable cualitativa nominal, donde los valores son cada uno de los pasos del razonamiento inductivo considerados en el modelo teórico de este proceso cognitivo, que permiten describir el razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en la resolución de problemas:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Identificación de patrones.
4. Formulación de conjeturas.
5. Justificación de conjeturas (basada en casos particulares).
6. Generalización.
7. Demostración.

Cada uno de estos valores son variables cualitativas nominales dicotómicas ya que les asignamos los valores 1 o 0 según si un estudiante realiza o no un determinado paso del modelo teórico.

Estrategia Inductiva

Se trata también de una variable cualitativa nominal cuyos valores son las diferentes estrategias inductivas identificadas para cada problema. Estos valores son, por tanto, específicos para cada problema y se obtienen a partir de la información que se ha presentado en el Capítulo 3. La identificación de los elementos de las progresiones con los que los estudiantes trabajan y las transformaciones en los sistemas de representación que llevan a cabo, permiten representar las estrategias mediante una secuencia, que se corresponde con distintos caminos identificados en la Figura 3 – 19. Hemos registrado, cuáles de todas las posibles secuencias son las que utilizan los estudiantes (ver Anexo E) y esos son los valores de la variable Estrategia Inductiva.

Por lo mencionado sobre la variable Estrategia Inductiva, los valores son mutuamente excluyentes porque cada sujeto utiliza una estrategia, y sólo una, en el proceso de resolución de un problema.

Variables Independientes

El Curso y el Centro son variables cualitativas nominales y actúan como variables independientes en esta investigación.

Curso

Los valores de esta variable son 3º de ESO y 4º de ESO, cursos a los que pertenecen los estudiantes de la muestra.

Centro

Los valores de esta variable son los centros de: Granada, Madrid, Cúllar-Vega y Teruel, a los que pertenecen los estudiantes de la muestra.

CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN: PRUEBA ESCRITA

La selección de los problemas que conforman el instrumento, se ha realizado en función de unas características previamente fijadas. En la caracterización de los problemas que constituyen el instrumento de recogida de información, tenemos en cuenta criterios de contenido, sintácticos y de contexto[1]. Partiendo de estos criterios, presentamos los problemas que, finalmente, se han seleccionado para formar parte del instrumento de recogida de información.

Criterios de Contenido

En el Capítulo 3 se ha presentado un análisis de contenido de las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. A partir de esta información, establecemos los criterios de contenido:

1. Elementos de las progresiones que aparecen implicados en el razonamiento inductivo.
2. Operaciones que se pueden realizar con motivo de las relaciones que es posible identificar entre los elementos considerados en este contenido matemático.
3. Sistemas de representación en los que se pueden expresar los elementos de las progresiones y las transformaciones que se pueden producir entre ellos.
4. Contextos que no hayan sido trabajados previamente por los estudiantes.

<u>Elementos de las progresiones</u>

Nuestro interés por el razonamiento inductivo nos ha llevado a centrarnos en los términos k-ésimos (o términos particulares) y en el término general de una progresión aritmética.

<u>Operaciones</u>

En el Capítulo 3 identificamos cuatro operaciones diferentes a realizar con los elementos considerados: continuación, extrapolación, generalización y particularización. Más concretamente, las operaciones que extraemos de la Tabla 3 - 2 son:

- Continuar la sucesión conociendo los primeros términos k-ésimos (Continuación 1)

[1] Nos hemos basado en la idea de *variable de problema* como *cualquier característica del problema que asume un valor particular dentro de un posible conjunto de valores* (Puig y Cerdán, 1988, p. 30). Los autores distinguen entre variables de contenido, variables sintácticas y variables de contexto.

- Continuar la sucesión conociendo algunos términos k-ésimos (Continuación 2)
- Extrapolar términos k-ésimos conociendo los primeros términos k-ésimos (Extrapolación 1)
- Extrapolar términos k-ésimos conociendo algunos términos k-ésimos (Extrapolación 2)
- Encontrar el término general conociendo los primeros términos k-ésimos (Generalización 1)
- Encontrar el término general conociendo algunos términos k-ésimos (Generalización 2)
- Obtener los primeros términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 1)
- Obtener algunos términos k-ésimos a partir del término general (Particularización 2)

Las operaciones entre términos k-ésimos (continuación y extrapolación) se pueden llevar a cabo directamente, entre términos k-ésimos; o mediante la generalización y particularización posterior (ver Figura 3 - 11) ya que para el cálculo de términos los k-ésimos requeridos, se puede recurrir a la expresión del término general y a la posterior particularización. En este sentido, la generalización y la particularización son estrategias que se pueden utilizar para la continuación y la extrapolación. Partiendo de esta relación entre operaciones de los elementos de las progresiones, consideramos la continuación y la extrapolación como tareas que les proponemos a los estudiantes. De esta forma, la generalización y la particularización no se proponen directamente, si no que los estudiantes pueden recurrir a ellas para dar respuesta a las tareas seleccionadas.

Sistemas de representación

Los elementos de las progresiones de números naturales que hemos considerado (términos k-ésimos y término general) pueden estar expresados en los sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal, tal y como se recoge en la Figura 3 - 14 de esta memoria. Los tipos de elementos (términos k-ésimos y término general) tienen asociados unos sistemas de representación determinados, como se observa en la Figura 3 - 15.

<u>Contexto del contenido</u>

Hemos tenido en cuenta los contextos en los que se pueden trabajar las progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2 para seleccionar algunos de ellos que, siendo adecuados para el nivel educativo de los estudiantes, no les resulten lejanos de lo cotidiano pero no hayan sido trabajados previamente por ellos en el aula. Para ello, consideramos los contextos presentados en el Capítulo 3 y el historial académico de los estudiantes (recogido en un apartado previo de este mismo capítulo).

Criterios Sintácticos

Los criterios sintácticos hacen referencia a características del enunciado del problema. Estos criterios pueden influir en la comprensión del problema por los sujetos y, por tanto, pueden ser determinantes para la información que se obtenga de su proceso de razonamiento en la resolución.

Dentro de las variables sintácticas, consideramos:

- Terminología empleada.
- Homogeneidad del enunciado de los problemas.
- Información proporcionada en el enunciado.
- Orden en el planteamiento de los problemas.

<u>Terminología empleada</u>

Pretendemos evitar términos técnicos en el planteamiento de los problemas para facilitar la comprensión de éstos por parte de los estudiantes, tratando que la respuesta de los sujetos no dependa de dificultades en la comprensión del enunciado.

Se han evitado los términos *progresión aritmética* o *sucesión* para que no los asocien directamente a los contenidos matemáticos que hayan trabajado previamente en el aula. A cambio, se ha utilizado el término *secuencia*, un concepto más general conocido por todos los sujetos pero que no necesariamente tiene que ser asociado a un contenido matemático específico.

Al plantear los términos k-ésimos de los problemas, hacemos referencia a la figura número *k* para una figura concreta y no a la figura del lugar k-ésimo. Así pretendemos evitar la dificultad añadida del aspecto ordinal del número.

Para la descripción de la tarea de validación que puede aparecer en el proceso de razonamiento, hemos seleccionado *justificación* como término más adecuado para evitar otros términos como *prueba* o *demostración*, que pueden tener connotaciones para los alumnos de 3º y 4º de ESO.

Homogeneidad del enunciado de los problemas

En el enunciado de los problemas, se busca facilidad de comprensión para los sujetos, con la intención de evitar dificultades añadidas a la tarea propuesta y poder centrarnos en el razonamiento que llevan a cabo.

En la redacción del enunciado final de los problemas, se ha tratado de conseguir la mayor homogeneidad posible. Con este objetivo, se han planteado dos tareas en cada uno de los problemas: primero, la tarea de continuación o extrapolación después de ofrecer la información sobre los términos k-ésimos; y después la tarea de justificación.

Sin embargo, se observan ciertas diferencias en la redacción de los problemas. Estas diferencias son debidas a los distintos sistemas de representación en los que se expresan los términos k-ésimos. El enunciado trata de ser tan completo como sea necesario para que cuenten con la información precisa para la resolución de los problemas.

Información proporcionada en el enunciado

La información que les proporciona el problema, es relativa a los términos k-ésimos de una determinada progresión. Se trata de que, a partir de esos términos, respondan a las tareas que les propone el problema. Para evitar diferencias significativas entre los problemas que se deban al diferente tipo de información que se les proporciona, se les presenta el mismo número de términos k-ésimos en problemas que siguen el mismo criterio de contenido. Por ejemplo, todas los problemas donde los términos k-ésimos aparezcan expresados numéricamente, deben tener el mismo número de términos dados en el enunciado.

Criterios de Contexto

En cuanto al formato de presentación del problema, se ha presentado por escrito y utilizando la expresión verbal, numérica o gráfica, en el sentido que se ha explicitado en los criterios de contenido.

Selección de Problemas para la Prueba

Los criterios que hemos tenido en cuenta en la selección de los problemas, para el análisis del razonamiento inductivo con las progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2, partiendo del trabajo con términos k-ésimos son:

- Tipo de progresión aritmética: de orden 1 o de orden 2.
- Operación: continuar o extrapolar.
- Sistema de representación en el que expresa el enunciado del problema. Teniendo en cuenta que el trabajo de los estudiantes debe partir de los términos k-ésimos, el sistema de representación en el que pueden aparecer éstos en el enunciado puede ser: numérico, gráfico o verbal.

Combinando estos criterios, obtenemos 12 tipos de problemas diferentes, que son los que se recogen en la Tabla 5 - 5.

Tabla 5 - 5. Tipos de Problemas

		SISTEMA DE REPRESENTACIÓN		
		Verbal	Numérico	Gráfico
PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE ÓRDEN *P*	Orden 1	Continuar/ Extrapolar	Continuar/ Extrapolar	Continuar/ Extrapolar
	Orden 2	Continuar/ Extrapolar	Continuar/ Extrapolar	Continuar/ Extrapolar

De estos 12 tipos de problemas, decidimos seleccionar únicamente seis, ya que nos pareció el número adecuado para ser trabajados por los estudiantes de 3º y 4º de ESO en una hora lectiva, que era del tiempo que disponían.

Por tanto, de los 12 tipos de problemas identificados, elaboramos una prueba compuesta por seis problemas en los que se les propone la continuación en tres de ellos, y la extrapolación en los otros tres (combinando estas tareas aleatoriamente con los restantes criterios). En la Tabla 5 - 6 se recogen los tipos de problemas que se plantearon a los alumnos, teniendo en cuenta los valores de las variables mencionados:

Tabla 5 - 6. Tipos de problemas

		SISTEMA DE REPRESENTACIÓN		
		Verbal	Numérico	Gráfico
PROGRESIÓN ARITMÉTICA DE ÓRDEN *P*	Orden 1	Continuar	Extrapolar	Extrapolar
	Orden 2	Extrapolar	Continuar	Continuar

Cada uno de los problemas contiene una tarea de extrapolación o continuación (como se observa en la Tabla 5 - 6), y una tarea de justificación para poder analizar todos los pasos considerados dentro del proceso de razonamiento inductivo.

Para la selección final de los problemas que conforman la prueba, tuvimos en cuenta, además, la información recopilada acerca de:

- Aspectos fenomenológicos del contenido matemático (ver Capítulo 3).
- Antecedentes de investigación (ver Capítulo 4).
- Trabajo previo de los alumnos en el aula (ver el apartado sobre el historial académico de los estudiantes de este capítulo).

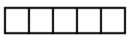
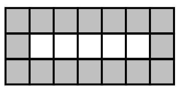
Orden en el Planteamiento de los Problemas

Para evitar que las respuestas de los estudiantes a un problema se vean influenciadas por el enunciado inmediatamente anterior, se ha elegido un orden tal que dos problemas con similares características, no sean consecutivos. El sistema de representación se ha considerado como el criterio principal para ordenar los problemas, ya que puede influir en la percepción que tengan los sujetos debido a que consideramos que la visualización puede jugar un papel determinante. Se han propuesto los problemas en un orden en el que no haya dos consecutivos en los que los términos k-ésimos se planteen en un mismo sistema de representación.

Instrumento de Recogida de Información: la Prueba

Los problemas seleccionados para la prueba se corresponden con cada uno de los tipos indicados en la Tabla 5 - 6. Cada problema consta de dos apartados. En el primer apartado se les propone la tarea de continuar o extrapolar. Estas dos tareas provienen de las dos operaciones consideradas como variables de contenido. En el segundo apartado se les plantea la justificación de su respuesta. En la Tabla 5 - 7 mostramos los problemas que constituyeron la prueba.

Tabla 5 - 7. Contenido de la prueba

1. Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior. - ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación? - Justifica tu respuesta.
2. Se tiene la siguiente secuencia de números: 3, 7, 13, 21,... - Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia. - Justifica tu respuesta.
3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:  Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:  - ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo? - Justifica tu respuesta.
4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos. - Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo

si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.

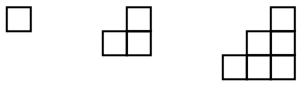
- Justifica tu respuesta.

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

En la Tabla 5 - 8 recogemos los criterios con los que se corresponden cada uno de los problemas que constituyen la prueba. En el Anexo B se puede observar la prueba en el formato en el que se les presentó a los alumnos.

Tabla 5 - 8. Número de problema y criterio de selección

PROBLEMA	VALORES DE LAS VARIABLES			
	Tarea 1	Tarea 2	Sistema de Representación	Progresión Aritmética de orden *n*
1	Continuar	Justificar	Verbal	1
2	Continuar	Justificar	Numérico	2
3	Extrapolar	Justificar	Gráfico	1
4	Extrapolar	Justificar	Verbal	2
5	Extrapolar	Justificar	Numérico	1
6	Continuar	Justificar	Gráfico	2

En el Anexo C presentamos una resolución de cada uno de los seis problemas que conforman la prueba. La resolución se ha llevado a cabo utilizando los pasos del razonamiento inductivo considerados en esta investigación, teniendo en cuenta patrones que se corresponden con progresiones aritméticas de órdenes 1 o 2 (según el problema)..

PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Antes de la aplicación de la prueba, nos pusimos en contacto con los respectivos profesores para que los sujetos de una misma clase pudieran resolver la prueba en su aula habitual y en una hora lectiva.

Relación con Centros y Profesores

De los cuatro institutos en los que se pasó la prueba, la doctoranda asistió a todos los centros excepto al de Madrid. En este centro, fueron los propios profesores los encargados de pasar la prueba, tras haber hablado personal y telefónicamente con ellos antes, durante y después de la realización de la prueba. En todo caso, la investigadora suministró la misma información a todos los profesores.

La presentación y realización de la entrevista con todos los profesores responsables de los sujetos tuvo cuatro finalidades:

1. Obtener permiso para trabajar en el centro.
2. Proporcionar información sobre la realización de la prueba.
3. Informar sobre el objetivo de la prueba.
4. Obtener información sobre el trabajo previo de los alumnos.

<u>Obtener permiso</u>

Solicitamos y obtuvimos permiso para trabajar con los sujetos participantes en una hora lectiva del centro. La petición de colaboración fue aceptada con agrado en todos los centros donde propusimos trabajar. Antes de la realización de la prueba en cada centro, explicamos a los profesores el tipo de investigación que estábamos llevando a cabo.

Proporcionar información sobre la realización de la prueba

Se informó a los profesores de que la intención era que sus alumnos realizaran una prueba basada en la resolución de problemas en la que no podían recibir ayuda externa y que nuestro objetivo era analizar cómo los resolvían.

Informar sobre el objetivo de la prueba

Se informó a los profesores de que el interés de la prueba era evaluar el proceso de la resolución de problemas, no si el problema estaba bien o mal resuelto. Se les especificó que la intención no era evaluar a los alumnos, ni a los profesores, ni al propio centro. Esto sirvió para justificar la importancia de no guiar a los alumnos durante la resolución de los problemas. Pusimos así de manifiesto la importancia de que los profesores no intervinieran en el proceso de resolución de problemas de los alumnos

La tranquilidad de los docentes por la ausencia de evaluación no debía ser transmitida a los estudiantes, quienes al no ser evaluados, podían relajarse y no mostrar interés en la realización de la prueba. Para evitar este efecto se explicó a los alumnos la importancia de participar en una investigación de este tipo que se iba a llevar a cabo en centros educativos de diferentes lugares de España.

Obtener información sobre el trabajo previo de los alumnos

Para conocer el trabajo previo que habían realizado los alumnos, los profesores nos informaron del trabajo de éstos[2].

Una vez elaborada la prueba y momentos antes de que los alumnos se dispusieran a resolver los problemas que la componían, confirmamos con los profesores que no habían resuelto en clase ninguno de los problemas que se les planteaban[3].

[2] Esta información ha quedado recogida en el epígrafe dedicado a las entrevistas previas de los profesores.

[3] En caso de que los alumnos hubieran trabajado en clase alguno de los problemas propuestos en la prueba, habríamos modificado el contenido del instrumento de recogida de información.

Instrucciones dadas a los Sujetos

La información que se dio a los sujetos sobre la prueba que llevarían a cabo fue la misma en todos los centros. Los encargados de suministrar dicha información fueron los profesores y/o la propia investigadora. Todos los estudiantes recibieron las mismas instrucciones. Estas instrucciones les fueron transmitidas oralmente y son las que se explicitan en la Figura 5 - 16.

- Todos los estudiantes que respondan la prueba deben rellenar todos los datos que aparecen al comienzo de la misma. Esto lo deben hacer independientemente de que respondan o no a los problemas que se proponen.
- Es fundamental leer con detenimiento y comprender bien los enunciados. En caso de que haya términos o dificultades de comprensión en el enunciado, pueden preguntarlo durante el desarrollo de la prueba.
- No se pueden hacer preguntas sobre la resolución de los problemas. Los problemas están planteados adecuadamente y contienen la información necesaria para su resolución.
- Cada alumno debe realizar la prueba individualmente.
- Todas las respuestas deben estar en los folios grapados que se les entregan. Si necesitaran más espacio del que tienen a continuación del enunciado de cada tarea, pueden continuar en la cara de atrás, poniendo a qué tarea responde la respuesta que están dando.
- Todas las operaciones que realicen deben estar escritas en los folios grapados que se les entregan.
- Todas las respuestas deben estar en bolígrafo.
- No se permite utilizar líquido corrector. Si necesitan hacer alguna corrección sobre lo escrito en bolígrafo, que tachen con una cruz y sigan con la resolución de la tarea.
- No se permite utilizar calculadora ni ningún instrumento con el que se puedan realizar operaciones.
- Todos los problemas tienen dos partes: continuación o extrapolación en la primera; y justificación en la segunda. Ambas partes tienen la misma importancia en la resolución del problema.

Figura 5 - 16. Instrucciones para los sujetos

Recogida de Información

La recogida de la información mediante la prueba escrita se llevó a cabo en los meses de Febrero, Marzo y Abril de 2005.

El escenario o marco en el que se aplica la prueba es el propio del aula en el que los alumnos asisten a sus clases habitualmente en su centro educativo, en una de sus horas lectivas de matemáticas.

El profesor responsable de la asignatura de matemáticas y la doctoranda estuvieron presentes mientras los estudiantes trabajaban en todos los centros excepto en el de Madrid, donde estuvo la profesora de matemáticas.

Los alumnos debían trabajar individualmente en los problemas, sin interacción alguna. Para ello, se separaron las mesas y no se permitió que contaran con ningún tipo de ayuda externa.

Información Recogida

Con la aplicación de la prueba, que constituye el instrumento de recogida de información, hemos obtenido las producciones escritas de la resolución de los seis problemas de la prueba que llevan a cabo los 359 sujetos participantes en la investigación.

INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN DE LA VARIABLE *PASOS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO*

La observación del razonamiento inductivo se basa en la identificación de los pasos del modelo considerado para este tipo de razonamiento que utilizan los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos en la prueba. La información recogida de las producciones escritas de los sujetos son codificadas según los valores de la variable “Pasos de Razonamiento Inductivo”. Como ejemplo, en la Tabla 5 - 9 hemos recogido los dos primeros problemas, a los cuales les corresponden cada uno de los siete pasos considerados para el razonamiento inductivo (1. Trabajo con casos particulares. 2. Organización de los casos particulares. 3. Identificación de patrón. 4. Formulación de conjeturas. 5. Justificación de conjeturas basada en casos particulares. 6. Formulación de conjeturas para el caso general. 7. Demostración de la generalización). Con esta tabla hemos registrado los pasos que emplea cada uno de los sujetos en los diferentes problemas.

Tabla 5 - 9. Instrumento de observación del razonamiento inductivo

SUJETOS	PASOS PROBLEMA 1							PASOS PROBLEMA 2							...
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	...
1															
2															
3															
. . .															

INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN DE LA VARIABLE *ESTRATEGIA INDUCTIVA*

Para la elaboración de la hoja de codificación de la variable Estrategia Inductiva, nos basamos en el procedimiento descrito para la identificación de los diferentes valores de esta variable.

Como ya se ha comentado, cada problema tendrá asignado una serie de valores para esta variable, en función del sistema de representación en el que se hayan presentado los términos k-ésimos de la progresión en el enunciado. Por ello, se necesita un instrumento de observación de la variable Estrategia Inductiva en tres versiones diferentes, una para cada uno de los sistemas de representación en los que se expresan los términos k-ésimos (numérico, gráfico y verbal).

En la Figura 5 - 17 mostramos, a modo de ejemplo, el instrumento para los problemas en los que los términos k-ésimos estén expresados numéricamente, que se extrae a partir de la Figura 3 - 19.

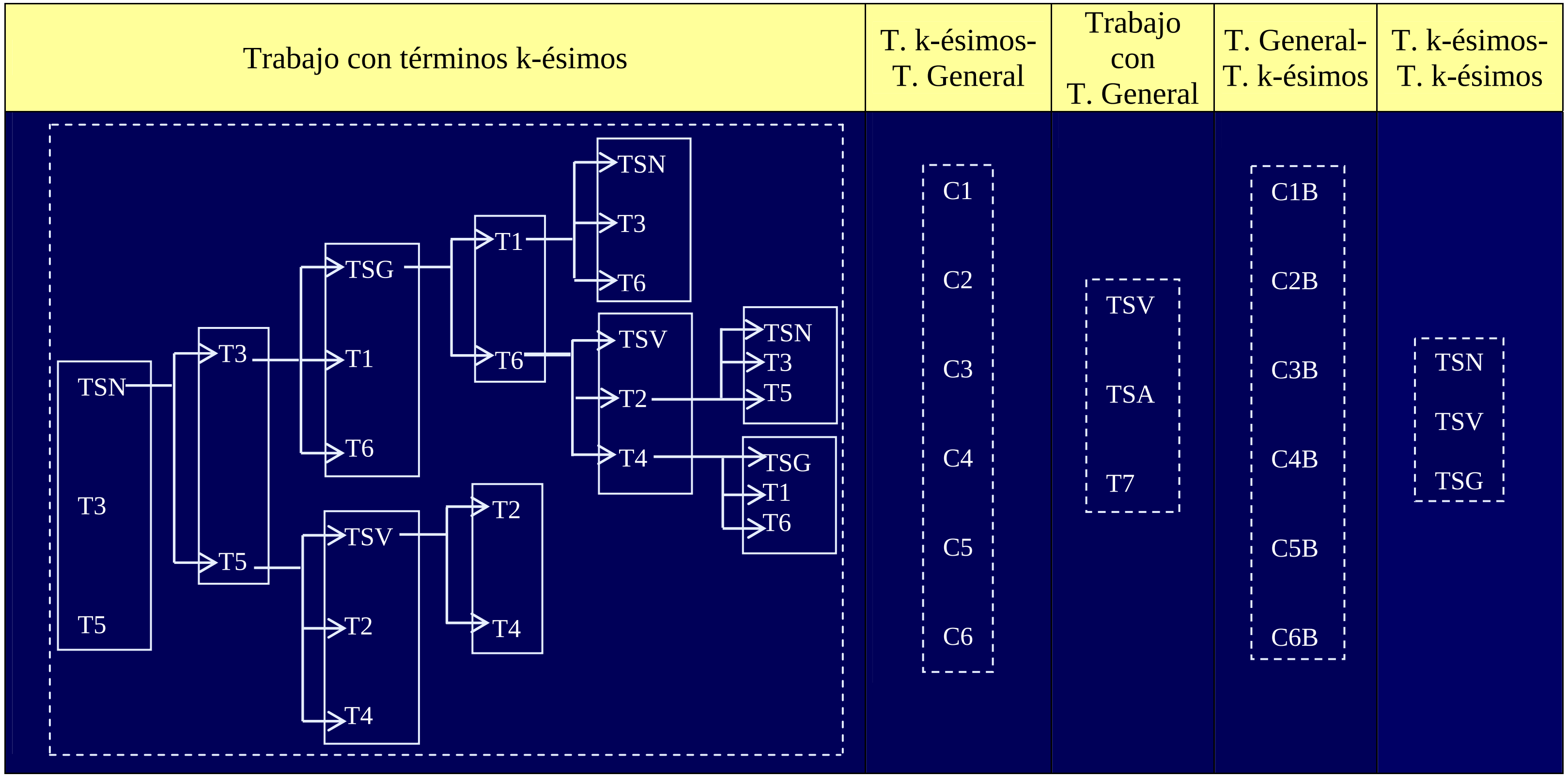


Figura 5 - 17. Instrumento de observación de la variable Estrategia Inductiva partiendo de términos k-ésimos expresados en el sistema de representación numérico

A partir de la hoja de observación presentada en la Figura 5 - 17, se pueden señalar las transformaciones que utilicen los estudiantes y el orden en el que se dan. Esta identificación permite establecer una secuencia que representa una estrategia inductiva determinada. Cada una de las estrategias inductivas identificadas constituyen un valor de la variable Estrategia Inductiva.

Los otros dos instrumentos para la observación de la variable Estrategia Inductiva son análogos al anterior, observándose las diferencias correspondientes al sistema de representación en el que se expresan los primeros términos de la progresión en el enunciado del problema. Las tres versiones del instrumento se pueden observar en el Anexo D.

EXPLORACIÓN DE RESPUESTAS Y REVISIÓN DE LAS HOJAS DE CODIFICACIÓN

Tras la construcción de las hojas de registro para la codificación de la información, se llevó a cabo una exploración de la resolución de los problemas de los sujetos con objeto de verificar si las variables determinadas se adecuaban a las necesidades de esta investigación. Revisamos, por un lado, que el análisis de las variables nos permitiera dar respuesta a las preguntas de investigación y, por otro lado, que ninguna respuesta de los estudiantes quedara fuera de las variables y de sus respectivos valores.

A continuación, presentamos los aspectos que se identificaron tras la exploración:

Respuesta

Consideramos la respuesta como otra variable dependiente a tener en cuenta. Identificamos si los estudiante responden o no a los diferentes problemas propuestos.

Detección de patrones

Como parte de la descripción de la identificación de patrones, recogemos los tipos de patrones que ponen de manifiesto los sujetos, ya que forma parte de la descripción del razonamiento que utilizan, considerando además si el patrón identificado es o no adecuado al problema planteado.

Hemos observado que hay estudiantes que detectan la relación recurrente, un tipo de patrón que se puede identificar en las progresiones aritméticas. Por lo tanto, tuvimos en cuenta la recurrencia como un tipo de patrón que forma parte de las producciones de los estudiantes. La recurrencia ha sido una de las propiedades que se ha destacado en el análisis de contenido realizado en el Capitulo 4. Entre otras cosas, se ha mencionado su utilidad para la expresión del término general.

Por tanto, para la identificación de patrones, recogemos la siguiente información:

1. Tipo de patrón.
2. Patrón adecuado / no adecuado.
3. Relación de recurrencia.

Regla de tres

Hemos observado que hay estudiantes que utilizaron el sistema de representación algebraico sin que para ello hubieran realizado una generalización algebraica ni se hubiera seguido ninguno de los pasos considerados para el razonamiento inductivo. En todos estos casos respondieron con el planteamiento de una regla de tres, por lo que decidimos registrar los sujetos que utilizaron este algoritmo.

Uso de la generalización

En la revisión de las respuestas se observaron diferentes usos que los alumnos daban a la generalización. Unos la utilizaban para calcular términos k-ésimos y dar respuesta al problema, otros la expresan al tratar de justificar su respuesta. Por ello, considerados el uso de la generalización como un aspecto a tener en cuenta en aquellos estudiantes que llegan a expresar la generalización.

CODIFICACIÓN DE LA INFORMACIÓN

La codificación de la información acerca de las variables dependientes se lleva a cabo por medio de dos hojas que hemos elaborado para tal fin, a las que denominaremos *hojas de codificación.* En estas dos hojas se recoge la información relativa a la variable Pasos del Razonamiento Inductivo y a la variable Estrategia Inductiva, respectivamente.

La respuesta ha sido registrada en la misma hoja de codificación que los pasos del razonamiento inductivo.

La utilización de la regla de tres se ha registrado independientemente de las demás, ya que pese a no formar parte de nuestros intereses investigadores, la consideramos como parte de la descripción de las respuestas que dan los estudiantes que no siguen ningún proceso inductivo.

Hoja de Codificación de Respuesta y Pasos de Razonamiento Inductivo

Teniendo en cuenta la revisión de las producciones de los estudiantes, añadimos la información obtenida a las hojas de codificación iniciales. Presentamos en la Tabla 5 - 10, la hoja para la codificación de información que consideramos finalmente.

Tabla 5 - 10. Hoja de codificación de la variable Pasos del Razonamiento Inductivo

SUJETOS	PROBLEMA 1											
	Resp.	Trabajo C. Partic.	Organiz C. Partic.	Patrón			Conjet	Justific.	Gen.			Dem.
				Tipo	Adecuado	Recurr			Alg	Verb	Uso	
1												
2												
3												
. . .												

<u>Información codificada</u>

Para cada sujeto, se registra la información relativa a la respuesta y a los pasos del razonamiento inductivo que siguen en su resolución del problema.

En el caso de que los sujetos identifiquen un patrón, se toma nota del patrón, pudiendo describir así si se trata de un patrón adecuado y/o recurrente, lo cuál enriquecerá la descripción posterior.

De manera análoga, en el caso de los estudiantes que lleguen a expresar la generalización, anotaremos el tipo de generalización y el uso que le dan (si la utilizan como justificación de su conjetura o para calcular nuevos términos de la progresión).

Hoja de Codificación de Estrategia Inductiva

A cada sujeto le corresponde una secuencia que representa una estrategia inductiva determinada en cada uno de los problemas que constituyen la prueba.

Para codificar la información referente a la estrategia inductiva empleada, en primer lugar, hemos identificado todas las estrategias inductivas que han utilizado todos los estudiantes en cada uno de los problemas mediante el instrumento de observación correspondiente, según el sistema de representación en el que se presenten los primeros términos en el enunciado del problema.

Por ejemplo, para el Problema 1, se han identificado las 13 estrategias inductivas, que recogemos en el Figura 5 - 18 y que constituyen los valores de la variable Estrategia Inductiva:

T2
T2-TSN
T2-T5
T2-TSN-T5
TSV
TSV-T2-TSN
T2-TSN-C1
T2-TSN-C1-C1B-TSN
T2-TSN-C1-TSA-C1B-TSN
T2-C1-C1B-TSN
T2-C1-TSA-C1B-TSN
T2-TSN-C4
C3-C1B-TSN-C4

Figura 5 - 18. Valores de la variable Estrategias Inductiva en el Problema 1

Los valores de la variable Estrategia Inductiva para cada uno de los problemas quedan recogidos en el Anexo E.

Información codificada

A cada sujeto que responde a un problema, le corresponde un valor de la variable Estrategia Inductiva determinado para ese problema concreto.

Algunas Consideraciones para la Codificación de la Información

Tras la construcción de las hojas de codificación se llevó a cabo una nueva revisión de la resolución de los problemas de los estudiantes previa al análisis de datos.

Orden de los pasos del razonamiento inductivo

Los pasos del razonamiento inductivo se han presentado en un orden que corresponde con el modelo *ideal* o *teórico* del razonamiento inductivo, considerando que comienza con el trabajo de los casos particulares y avanza hacia la generalización. Esto no significa que se tengan que seguir todos y cada uno de los pasos que se han identificado para este razonamiento. No se trata de un proceso lineal y los estudiantes pueden volver sobre pasos que han realizado con anterioridad.

Trabajo con casos particulares

Consideraremos que un alumno ha trabajado con términos k-ésimos de la progresión, cuando haya dejado constancia de ello mediante los cálculos o explicaciones que realice sobre dos o más términos de la secuencia presente en los respectivos problemas. Los cálculos directos sobre un término concreto por el que pregunta un problema sin haber llevado a cabo una manipulación u organización de los términos del enunciado del problema, no se consideran trabajo con casos particulares.

Patrón

La identificación del patrón se considera cuando se pone de manifiesto alguna regularidad en los datos obtenidos en la resolución del problema. La detección de este patrón se relaciona con términos k-ésimos de la sucesión (en caso de que el patrón sea descrito de un modo general, hablaremos de generalización).

Para codificar si un patrón es adecuado o no para un problema concreto se ha recurrido en primer lugar, a la resolución del problema que se ha presentado en el Anexo C . En segundo lugar, si no aparece en dicha resolución, se ha hecho un análisis del patrón concreto, sucediendo que en algunos casos han aparecido otro tipo de patrones válidos que no se corresponden con progresiones de órdenes 1 ni 2.

Recurrencia

La ley de recurrencia es uno de los tipos de patrones que pueden aparecer en estos problemas puesto que es una propiedad que permite identificar la regularidad en las sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas, tal y como se ha visto en el marco conceptual. Es posible que una vez que los estudiantes encuentran la relación de recurrencia, avancen hacia la generalización o, por el contrario, den respuesta a la pregunta utilizando ese patrón para encontrar los términos k-ésimos por los que pregunta el problema.

Regla de tres

La regla de tres no se ha considerado dentro del proceso de razonamiento inductivo, ya que se trata de un algoritmo aplicado por los estudiantes de una forma directa a partir de los datos que se dan en el enunciado de cada ítem.

Incompatibilidades entre valores de las variables

Existen algunas incompatibilidades entre diferentes valores de la variable Pasos de Razonamiento Inductivo y entre algunos de esta variable con la variable Estrategias Inductivas, a saber:

- Si un estudiante no ha trabajado con casos particulares, no ha podido organizarlos.
- Si un estudiante no ha detectado un patrón, no ha podido detectar un patrón adecuado.
- Si la estrategia que emplea un estudiante se identifica con el 0, no ha podido dar ninguno de los pasos del razonamiento inductivo.

Implicaciones entre valores de las variables

Hemos identificado algunas implicaciones entre diferentes valores de los pasos considerados para el razonamiento inductivo y entre éstos y los valores de la variable Estrategia Inductiva:

- Si un sujeto ha identificado la relación recurrente, también ha identificado un patrón.
- Si un estudiante expresa la generalización algebraicamente, también ha generalizado.
- Si un estudiante llega a la generalización, su estrategia inductiva debe contener una transformación que incluya "C".

Corrección de la prueba

Tras la elaboración de las hojas de codificación y las consideraciones expuestas en los epígrafes anteriores, comprobamos la validez de la aplicación de las mismas. Para ello, la doctoranda seleccionó un 5% de las pruebas trabajadas por alumnos que hubieran respondido a todos los problemas y la directora de esta investigación hizo una corrección independiente a la de la doctoranda. La información recogida en ambas hojas de codificación por parte de ambas investigadoras no presentaron diferencias.

REGISTRO DE LA INFORMACIÓN

Se organizaron los datos recogidos, mediante los instrumentos de observación, de forma que se pudiesen analizar los datos estadísticamente.

Para ello, construimos una tabla en la que las filas son los 359 alumnos de la muestra y y cada uno queda identificado por un valor numérico (*número de identificación*, cuyo rango es 1 – 359). Las columnas las conforman las columnas de la hoja de codificación de la respuesta y los Pasos de Razonamiento Inductivo, y en otra columna se recoge la estrategia inductiva determinada para cada problema.

De cada alumno, registramos información referente a sus datos personales: el *centro* en el que estudia y el *curso*. Se trata de variables cuyos valores oscilan entre 1 y 4 (a cada centro le hemos hecho corresponder uno de esos valores), y 3 y 4 (dependiendo de si cursan 3º o 4º de Educación Secundaria Obligatoria), respectivamente.

Dado que el análisis estadístico se lleva a cabo mediante el programa SPSS, los valores de la primera hoja de codificación (relativos a la Respuesta y a los Pasos del Razonamiento Inductivo) son codificados en el SPSS con un “1” si lo realizan y con un “0” si no lo hacen, excepto en el tipo de patrón, que será analizado por separado para cada caso.

Para la variable Estrategias Inductivas, hemos asignado un valor numérico a cada estrategia dentro de cada problema. Así, si un alumno sigue una estrategia inductiva determinada, le corresponderá el número que hemos asignado a esa estrategia en el problema correspondiente (ver Anexo E). Por lo tanto, para cada problema, hay tantos posibles valores como estrategias se hayan identificado en el total de sujetos en ese problema. El “0” se corresponde con el hecho de que los sujetos no hayan empleado ninguna estrategia inductiva.

Como se deduce de lo dicho hasta el momento, las variables dependientes se repiten para los diferentes problemas. Para diferenciarlas, se ha antepuesto Px al nombre de la variable correspondiente, donde x = 1,..., 6 es el número del problema al que hace referencia una variable determinada. Por ejemplo, *P2patrón* es la variable de identificación de patrón para el Problema 2.

Para seguir un orden en la introducción de los datos en el archivo, que será útil en el análisis de los mismos, se ha seguido el mismo orden en el que se organizaron las hojas de codificación (Respuesta-Pasos de Razonamiento Inductivo-Estrategia Inductiva) y se ha seguido el orden de los problemas que aparece en la prueba. De esta forma, primero aparecen todas las variables del Problema 1, después las del Problema 2, y así sucesivamente.

Tras el procedimiento seguido en el registro de los datos, hemos introducido las siguientes columnas que nos permiten obtener la información necesaria y que provienen de los datos personales de los sujetos y de las variables de las hojas de codificación:

1. Número de identificación.
2. Curso.
3. Centro.
4. Respuesta.
5. Trabajo con términos k-ésimos.
6. Organización de términos k-ésimos.
7. Identificación de patrones.

8. Identificación de la relación recurrente recurrencia.
9. Patrón Adecuado / No adecuado al problema.
10. Generalización.
11. Expresión algebraica de la generalización.
12. Justificación (basada en términos k-ésimos).
13. Demostración.
14. Estrategia Inductiva.

El tipo de patrón que identifican los sujetos en cada problema, el uso que dan los estudiantes a la generalización y la regla de tres ha sido una información recogida al margen de la tabla elaborada para el análisis con la herramienta estadística SPSS.

La expresión verbal de la generalización se obtiene de entre aquellos alumnos que generalizan y no lo hacen algebraicamente (es la única forma que tienen los sujetos de expresar la generalización por escrito si no lo hacen de manera algebraica).

El resultado obtenido después de la introducción de los datos en el archivo SPSS ha sido una tabla con 359 filas y 84 (= 14 x 6) columnas.

Depuración de Datos

Tras la introducción de la información en el SPSS, debemos tener en cuenta una serie de factores para poder analizarla posteriormente de manera adecuada.

<u>Aparición de celdas en blanco</u>

Todas las celdas deben tener asignado un valor numérico.

<u>Valor asociado a las variables</u>

El valor numérico que corresponde a las diferentes variables ya ha sido tratado con anterioridad y sabemos que existen unos valores permitidos para cada una de ellas. Cada variable debe tomar valores dentro del rango en el que ha sido definida. Por ejemplo, la respuesta y los valores de la variable Pasos pueden tomar los valores 0 y 1. La variable Estrategias Inductivas puede tomar valores desde 0 hasta *n*, donde *n* es el número de estrategias diferentes identificadas para cada ítem concreto.

Incompatibilidades entre valores de la variable Pasos de Razonamiento Inductivo

Hay ciertas incompatibilidades entre diferentes valores de las variables, que se han señalado anteriormente. Para cerciorarnos de que se han tenido en cuenta y verificar los datos, realizamos, mediante el programa Excel, las siguiente comprobaciones:

- Si en la celda correspondiente a los casos particulares aparece un 0, en la celda correspondiente a la organización de los casos particulares no puede aparecer un 1.
- Si en la celda relativa al patrón aparece un 0, en la correspondiente al patrón adecuado, no puede aparecer un 1.

Implicaciones entre valores de la variable Pasos de Razonamiento Inductivo

Como indicamos anteriormente, existen ciertas implicaciones. Para comprobar que se han registrado los datos correctamente, realizamos, en el programa Excel, las comprobaciones siguientes:

- Si aparece un 1 en la celda correspondiente a la relación recurrente, debe aparecer un 1 en la celda referente a la identificación de patrón.
- Si la estrategia es 0, en todas las celdas correspondientes a los valores de los Pasos de Razonamiento Inductivo debe haber 0.
- Si en la celda relativa a la generalización algebraica hay un 1, en la correspondiente a la generalización algebraica debe haber otro 1.

SELECCIÓN DE SIETE ESTUDIANTES

Para complementar la información sobre el razonamiento inductivo que ponen de manifiesto los estudiantes de la muestra en la resolución de los problemas, proponemos una descripción detallada del proceso inductivo que siguen algunos estudiantes concretos de la muestra. Esto permite conocer el proceso de un mismo estudiante en la resolución de los seis problemas, permite comparar el proceso de razonamiento inductivo real que siguen estos estudiantes con el modelo teórico considerado para el análisis del razonamiento inductivo y, según los procedimientos que sigan en la resolución de los problemas, se pueden identificar diferentes perfiles.

Describimos, a continuación, el procedimiento de selección de esos estudiantes.

Procedimiento para la Selección de Estudiantes

Hemos decidido seleccionar a los estudiantes en función de las *estrategias inductivas predominantes*[4] que utilicen en la resolución de los diferentes problemas.

El primer paso es, por tanto, identificar las estrategias inductivas predominantes que emplean los alumnos. Para ello, necesitamos conocer las estrategias inductivas que han empleado los estudiantes en cada problema. Consideraremos que son predominantes las estrategias inductivas empleadas por más de un 5% de los alumnos que responden a un problema determinado.

A partir de las estrategias inductivas predominantes en cada problema, seleccionamos a estudiantes que las utilicen. La finalidad es que haya, al menos, un estudiante por cada una de estas estrategias, de tal forma que a ese estudiante se le puede considerar *representante* de la estrategia inductiva predominante que utiliza.

Según el procedimiento descrito, detectamos que no había un solo estudiante de la muestra que cumpliera las condiciones requeridas. Debido a nuestros intereses investigadores, añadimos los siguientes criterios de selección:

1. Si hay dos estudiantes que utilicen la misma estrategia inductiva en un mismo problema, seleccionamos a aquel que responda a todos los problemas o, en su defecto, al que responda al mayor número de problemas. Con este criterio, conseguimos, por un lado, más información de un mismo estudiante y, por otro lado, aumenta la probabilidad de que un mismo estudiante sea representante de más de una estrategia inductiva en diferentes problemas.
2. En caso de que haya más de un estudiante en las condiciones mencionadas hasta el momento, seleccionamos a los estudiantes que sean representantes en el mayor número de estrategias inductivas.

---

[4] Consideramos estrategias inductivas predominantes a las estrategias inductivas a las que son empleadas por un mayor número de alumnos. Estas estrategias son identificadas en el Capítulo 7.

En caso de que haya más de un alumno según los criterios mencionados en este apartado, hacemos una selección aleatoria entre ellos.

Finalmente, la selección de estudiantes se concretó en siete estudiantes de la muestra, cuyas respuestas fueron descritas de forma individual a través de sus producciones en los problemas de la prueba, utilizando los pasos del razonamiento inductivo considerados en el modelo teórico y las estrategias inductivas que utilizan (ver Capítulo 8).

Los siete estudiantes seleccionados según el procedimiento descrito, tenían las características que recogemos en la Tabla 5 - 11.

Tabla 5 - 11. Sujetos seleccionados

SUJETO (número de identificación)	CURSO	CENTRO	EDAD
3	4º	Granada	17
7	4º	Granada	16
49	3º	Granada	15
119	4º	Madrid	15
325	3º	Teruel	14
349	3º	Teruel	15
356	3º	Teruel	14

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE DATOS I

En este capítulo presentamos las indagaciones que hemos realizado con respecto a los objetivos específicos de investigación relativos a los pasos del razonamiento inductivo que hemos considerado. Por ello, nos centramos en el análisis y descripción de la variable Pasos en el Razonamiento Inductivo (Pasos).

Comenzamos por un análisis global de la variable Pasos en los seis problemas que constituyen la prueba, como primera aproximación al objetivo primero de esta investigación (O_1). Posteriormente, pasamos al análisis de los pasos en relación con el Orden de la progresión y el Sistema de Representación de los problemas como criterios que se tuvieron en cuenta en la selección de los problemas. Este análisis considera los efectos de cada una de las características y las interacciones existentes entre ellas y la realización de los pasos del razonamiento inductivo que los estudiantes utilizan. Con esto, pretendemos dar respuesta al O_4 de esta investigación.

En la segunda parte del análisis, nos centramos en los pasos que emplean los estudiantes en cada uno de los problemas. Para ello llevamos a cabo un análisis de frecuencias y un análisis estadístico que permite describir las relaciones de dependencia o independencia entre los pasos que utilizan los estudiantes en los diferentes problemas que constituyen la prueba. A la luz de los resultados obtenidos en el primer análisis, realizamos éste para cada uno de los seis problemas. Nos basamos en tablas de contingencia y, dado que el número de estudiantes que no responden a los problemas puede afectar al resultado obtenido, hemos utilizado únicamente las frecuencias de los pasos de los estudiantes que responden a los problemas. Con esto, abordamos el O_2 de esta investigación.

Por último, analizamos, globalmente, si existen diferencias significativas en los Pasos según los centros y los cursos a los que pertenecen los estudiantes de la muestra. Llevamos a cabo un análisis que considera los Pasos, el Centro y el Curso como factores que pueden influir en los pasos que realizan los estudiantes, así como los efectos debidos a la posible interacción entre los factores. Con esto tratamos de dar respuesta al O_8 y al O_{10} de esta investigación.

FRECUENCIAS DE PASOS EN LOS PROBLEMAS

Como resultado de la observación y recuento sistemáticos de las producciones de los estudiantes, recogemos en la Tabla 6 - 1 las frecuencias con las que han aparecido cada uno de los pasos del razonamiento inductivo en las respuestas a los problemas presentados en la prueba.

Tabla 6 - 1. Frecuencia de Pasos de Razonamiento Inductivo

Problema	Pasos						
	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. de T. k-ésimos	Patrón	Conjeturas	Justificación	Gen	Dem
1	186	128	212	322	2	17	0
2	283	91	275	285	64	14	0
3	7	0	125	297	0	60	0
4	4	2	174	272	0	70	0
5	227	28	222	249	10	83	0
6	244	114	140	310	9	8	0

Para facilitar la comparación de la frecuencias de aparición de cada uno de los pasos, en la Figura 6 - 1 representamos gráficamente los porcentajes de las frecuencias recogidas en la Tabla 6 - 1.

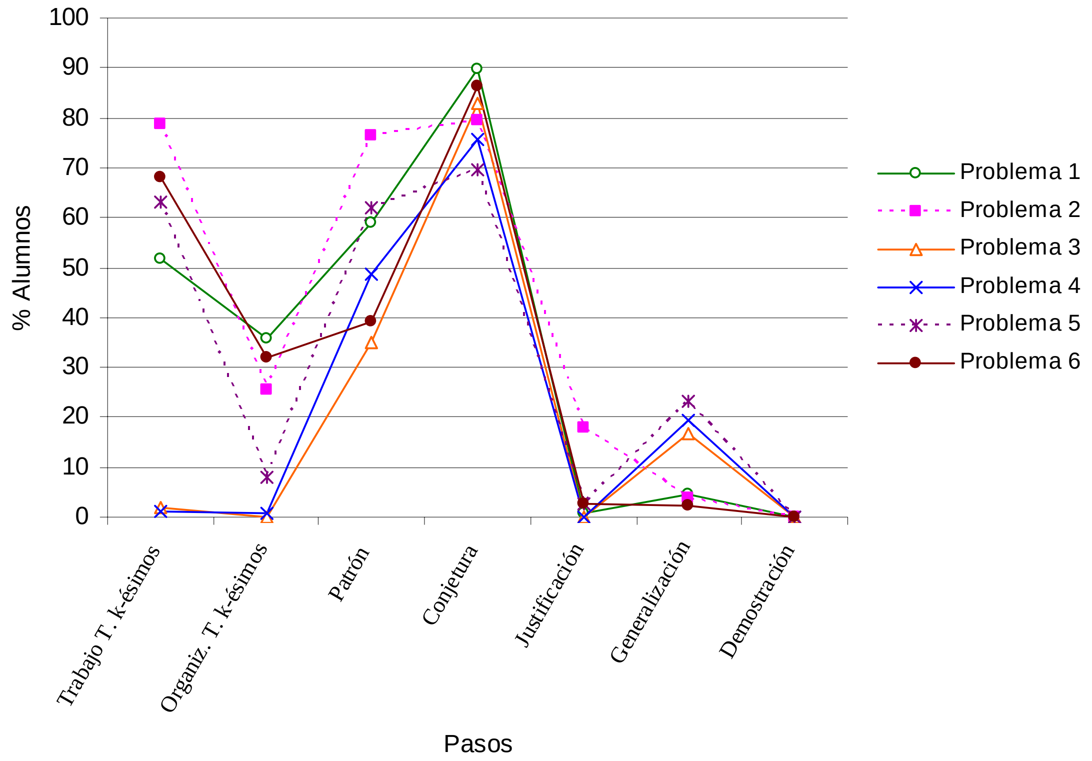


Figura 6 - 1. Gráfico de porcentajes de Pasos de Razonamiento Inductivo

En la Figura 6 - 1 podemos observar que hay discrepancias en la frecuencia de aparición de cada uno de los pasos. Asimismo, las gráficas de los distintos problemas siguen una tendencia general de actuación de los alumnos en los seis problemas, con una ligera alteración de esa tendencia en los problemas 3 y 4 en el trabajo con términos k-ésimos. En general, en todos los problemas se produce una disminución en el número de alumnos que organizan los términos k-ésimos con respecto a los que han trabajado con los mismos. A partir de este paso, se observa un aumento en el número de estudiantes que, pasando por la identificación de un patrón, llega a la formulación de una conjetura. En todos los problemas existe un máximo en este paso. En el otro extremo, se encuentran la justificación de las conjeturas y la demostración de la expresión general, que son los pasos empleados por el menor número de estudiantes en cinco de los seis problemas de la prueba. En todos los problemas, excepto en el Problema 2, se observa un leve aumento en el número de estudiantes que generalizan sus conjeturas. Finalmente, la demostración no es realizada por ningún estudiante en ninguno de los problemas.

Tras esta descripción general de la frecuencia de empleo de los distintos pasos del razonamiento inductivo para los seis problemas, y puesto que en la tendencia general se observan discrepancias entre los problemas en relación a la frecuencia de aparición de los pasos en las soluciones dadas por los sujetos de la muestra, pasamos al análisis de la variable Pasos según el orden de la progresión de los problemas y según el sistema de representación empleado para la presentación de los términos k-ésimos en los enunciados. Con ello intentamos dilucidar si estos dos criterios inciden en la alteración de las frecuencias observadas en los diferentes problemas.

ANÁLISIS DE PASOS SEGÚN ORDEN Y S. DE REPRESENTACIÓN

En la Tabla 6 - 2 recogemos la correspondencia de los valores de Orden y Sistema de Representación con cada uno de los problemas.

Tabla 6 - 2. Problema, sistema de representación y orden

Problema	S. de Representación*	Orden**
1	Verbal	1
2	Numérico	2
3	Gráfico	1
4	Verbal	2
5	Numérico	1
6	Gráfico	2

*Se refiere al sistema de representación en el que aparecen expresados los términos k-ésimos en los enunciados.
**Hace referencia al orden de la progresión mediante la que se puede generalizar el patrón observable en el problema.

En lo sucesivo, hemos asignado códigos numéricos a los tres sistemas de representación ("1" para el sistema de representación verbal, "2" para el sistema de representación numérico y "3" para el sistema de representación gráfico), que se utilizarán en el análisis de datos.

Trasladamos las frecuencias mostradas en la Tabla 6 - 1 a la Tabla 6 - 3, en la que las presentamos asociadas a los diferentes problemas en función del orden y el sistema de representación correspondiente.

Tabla 6 - 3. Distribución de frecuencias de Pasos según Orden y S. Repres

Orden	S. Repres.	Pasos de Razonamiento Inductivo (Pasos)							Total
		Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Conjeturas	Justificación	Gen	Dem	
1	1	186	128	212	322	2	17	0	867
2	2	283	91	275	285	64	14	0	1012
1	3	7	0	125	297	0	60	0	489
2	1	4	2	174	272	0	70	0	522
1	2	227	28	222	249	10	83	0	819
2	3	244	114	140	310	9	8	0	825
Total		951	363	1148	1735	85	252	0	4534

Dado que se trata de una tabla de contingencia con variables nominales, podemos aplicar un modelo lineal logarítmico. Analizamos la Tabla 6 - 3 para determinar el modelo que mejor predice la frecuencia de los datos. Para ello, partimos de un modelo saturado que considera los efectos de todos los órdenes posibles con Pasos, Orden y Sistema de Representación (S.Repres), utilizando el método de *eliminación hacia atrás*. El ajuste de modelo se comprueba mediante la razón de verosimilitud. Hemos realizado los cálculos mediante el programa SPSS.

El único modelo lineal-logarítmico posible es el que incluye las interacciones de las tres variables (Orden*S.Repres*Pasos), el modelo saturado, ya que los valores residuales son nulos (ver Anexo F).

Para el estudio de las asociaciones parciales entre las características de los problemas (Orden y S.Repres) y los pasos, hemos utilizado la Chi-cuadrado parcial como estadístico de contraste. En la Tabla 6 - 4 presentamos los resultados obtenidos.

Tabla 6 - 4. Resultados de los test estadísticos de asociaciones parciales

Nombre de Efecto	Grados libertad	Chi-cuadrado parcial	Prob.
Orden*S. Repres	2	175,130	0,0000
Orden*Pasos	6	69,441	0,0000
S.Repres*Pasos	12	255,956	0,0000
Orden	1	7,469	0,0063
S.Repres	2	100,442	0,0000
Pasos	6	4222,179	0,0000

Según se deduce de la Tabla 6 - 4, todos los efectos parciales son significativos (prob < 0.05). Realizamos una interpretación de todos los efectos, basándonos en los parámetros *lambda* estimados y en los valores de *z*.

Efecto de Pasos

A los valores de la variable Pasos le hemos asignado valores numéricos del 1 al 7 para la realización del análisis mediante el SPSS.

Mostramos los valores de los parámetros lambda estimados para los Pasos en la Tabla 6 - 5. El valor de z indica si las diferencias con respecto a la media son o no significativas.

Tabla 6 - 5. Parámetros estimados para el efecto Pasos

Pasos Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
1	1,0554082411	0,13645	7,73455	0,78796	1,32286
2	-0,2171082570	0,24511	-0,88575	-0,69753	0,26331
3	2,0555591379	0,10903	18,85296	1,84186	2,26926
4	2,5004168235	0,10786	23,18170	2,28901	2,71183
5	-1,781535205	0,32064	-5,55625	-2,40998	-1,15309
6	0,2451630867	0,13001	1,88567	-0,00966	0,49999
7	-3,857903827	0,49931	-7,72639	-4,83656	-2,87925

En la Figura 6 - 2 recogemos la representación gráfica de los parámetros.

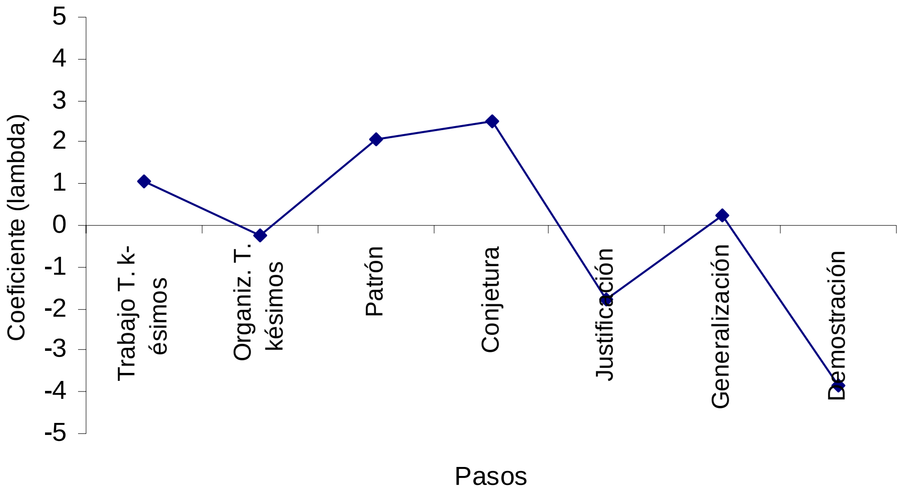


Figura 6 - 2. Representación de los parámetros estimados para Pasos

A partir de los resultados obtenidos, interpretamos que:

- La frecuencia con la que los estudiantes trabajan con términos k-ésimos es superior a la media de la frecuencia con la que los alumnos realizan los pasos (λ = 1,055). Además, tal y como indica el valor de z (7,734), esta diferencia es significativa.

- La frecuencia con la que los estudiantes organizan los términos k-ésimos en las producciones de los estudiantes no difiere significativamente de la media (λ = -0,217 y z = -0,885).
- La identificación de un patrón y la formulación de conjetura son los pasos utilizados por un mayor número de alumnos y las diferencias son significativas (λ = 2,055 y z = 18,853, y λ = 2,5 y z = 23,182, respectivamente).
- El número de alumnos que generalizan sus conjeturas es algo superior a la media de los alumnos que realizan los pasos del razonamiento inductivo. Esta diferencia está próxima a ser significativa pero no llega a serlo (λ = 0,245 y z = 1,885).
- La frecuencia de demostración por parte de los estudiantes es significativamente inferior a la media (λ = -3,858 y z = -7,726).

Efecto de S.Repres

Los tres sistemas de representación empleados los hemos codificado como 1 (verbal), 2 (numérico) y 3 (gráfico). Presentamos los parámetros estimados para el efecto de Sistema de Representación en la Tabla 6 - 6 y los representamos gráficamente en la Figura 6 - 3.

Tabla 6 - 6. Parámetros estimados para el efecto S.Repres

S.Repres Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
1	-0,2816138229	0,15276	-1,84350	-0,58102	0,01780
2	0,6472835316	0,13589	4,76314	0,38093	0,91364
3	-0,3656697088	0,15974	-2,28909	-0,67877	-0,05257

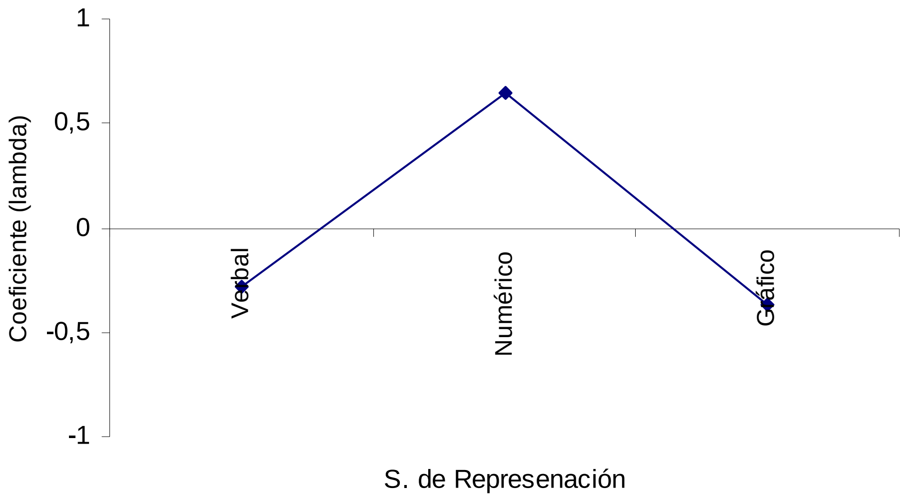


Figura 6 - 3. Representación de los parámetros estimados para S.Repres

A partir de los resultados presentados, podemos extraer que:

- El sistema de representación numérico está asociado con una frecuencia significativamente superior a la media (λ = 0,647 y z = 4,763).
- Los sistemas de representación verbal y gráfico están asociados a una frecuencia en la realización de los pasos inferior a la media. Mientras que el bajo número de estudiantes que emplean el sistema de representación verbal está próximo a ser significativo (λ = -0,282 y z = -1,843), el escaso número de estudiantes que siguen los pasos del razonamiento inductivo en los problemas en los que aparece el sistema de representación gráfico es claramente significativo (λ = -0,366 y z = -2,290).

Efecto de Orden

Los parámetros lambda estimados obtenidos para el efecto Orden son los que se observan en la Tabla 6 - 7.

Tabla 6 - 7. Parámetros estimados para el efecto Pasos

Orden Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
1	-0,0859428572	0,10593	-0,81135	-0,29356	0,12167
2	0,0859428572	0,10593	0,81135	-0,12167	0,29356

Representamos los valores de los parámetros estimados en relación a la media en la Figura 6 - 4.

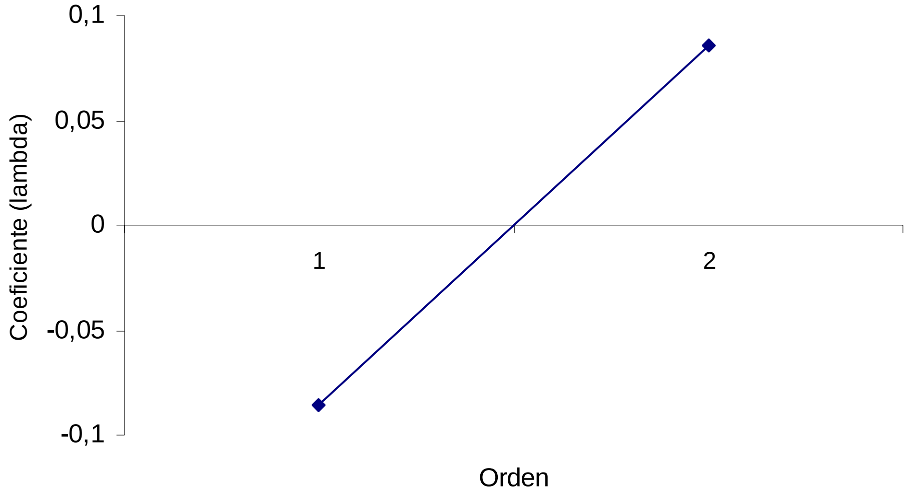


Figura 6 - 4. Representación de los parámetros estimados para Orden

El valor de z para el efecto Orden, indica que las diferencias no son significativas, aunque como se observa en Figura 6 - 4, la realización de los pasos del razonamiento inductivo se mantiene por debajo de la media de los parámetros estimados y, en los problemas donde aparece una progresión de orden 2, la realización de los pasos del razonamiento inductivo es superior a la media.

Asociación S.Repres*Pasos

Presentamos las frecuencias absolutas según S.Repres y Pasos en la Tabla 6 - 8.

Tabla 6 - 8. Distribución de frecuencias según S.Repres y Pasos

S. Repres.	Pasos						
	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Formulación de Conjeturas	Justificación	Gen	Dem
1	190	130	386	594	2	87	0
2	510	119	497	534	74	97	0
3	251	114	265	607	9	68	0
Total	951	363	1148	1735	85	252	0

La asociación S.Repres*Pasos es la más fuerte de las interacciones de dos factores (ver Tabla 6 - 4). Mostramos los parámetros obtenidos para el efecto S.Repres*Pasos en la Tabla 6 - 9 y los representamos en la Figura 6 - 5.

*Tabla 6 - 9. Parámetros estimados para el efecto S.Repres*Pasos*

S. Repres*Pasos Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desv. Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
(1,1)	-0,5722967470	0,21043	-2,71962	-0,98474	-0,15985
(1,2)	0,2200752513	0,31059	0,70856	-0,38869	0,82884
(1,3)	0,3217314033	0,15692	2,05026	0,01416	0,62930
(1,4)	0,3083112279	0,15541	1,98384	0,00371	0,61292
(1,5)	-0,9900358432	0,50772	-1,94996	-1,98517	0,00510
(1,6)	0,4306008848	0,18239	2,36093	0,07312	0,78808
(1,7)	0,2816138229	0,70677	0,39845	-1,10366	1,66689
(2,1)	0,6697327613	0,16229	4,12675	0,35164	0,98782
(2,2)	0,3381896084	0,26470	1,27763	-0,18062	0,85700
(2,3)	-0,3558419511	0,14007	-2,54054	-0,63037	-0,08131
(2,4)	-0,7256065297	0,13903	-5,21921	-0,99810	-0,45312
(2,5)	1,2285152671	0,34154	3,59704	0,55911	1,89792
(2,6)	-0,5077056244	0,17020	-2,98296	-0,84130	-0,17411
(2,7)	-0,6472835316	0,70332	-0,92033	-2,02579	0,73122
(3,1)	-0,0974360143	0,20273	-0,48063	-0,49478	0,29991
(3,2)	-0,5582648597	0,44039	-1,26765	-1,42143	0,30490
(3,3)	0,0341105478	0,16457	0,20727	-0,28845	0,35667
(3,4)	0,4172953018	0,16225	2,57198	0,09929	0,73530
(3,5)	-0,2384794239	0,49236	-0,48436	-1,20351	0,72655
(3,6)	0,0771047396	0,19796	0,38950	-0,31090	0,46511
(3,7)	0,3656697088	0,70831	0,51625	-1,02263	1,75397

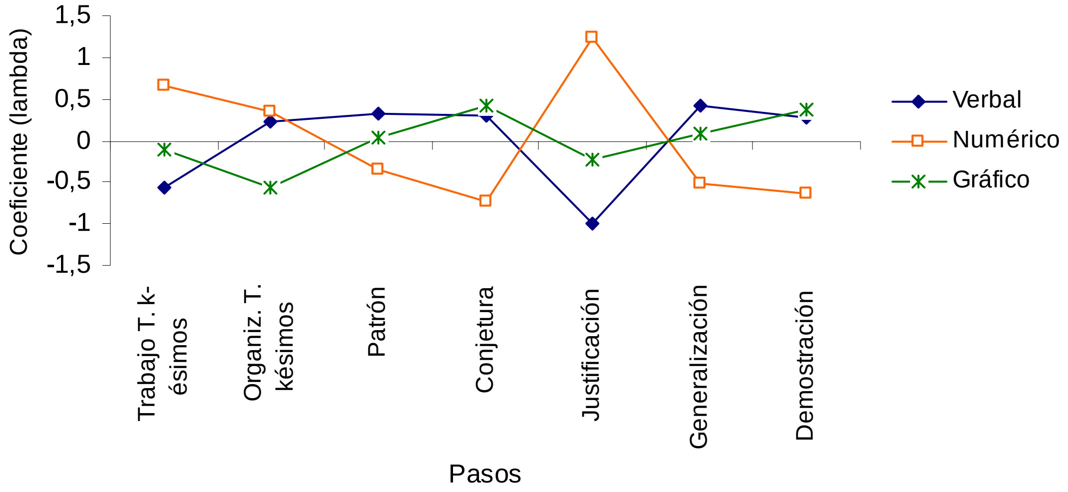


*Figura 6 - 5. Representación de los parámetros estimados del efecto S.Repres*Pasos*

A partir de los resultados presentados, podemos observar que:

- La utilización del sistema de representación verbal está asociada a una frecuencia significativamente baja en el trabajo con los términos k-ésimos (λ = -0,572 y z = -2,719) en la justificación de conjeturas (λ = -0,99 y z = -1,95). Por otro lado, este sistema de representación está asociado con una frecuencia superior a la media de la identificación de patrón (λ = 0,32 y z = 2,05) y de la generalización (λ = 0,43 y z = 2,36). Tal y como indican los valores de las z correspondientes, estas diferencias son significativas.
- El sistema de representación numérico está asociado de manera significativa con unas frecuencias bajas en la identificación de un patrón en los problemas propuestos (λ = -0,356 y z = -2,54), en la formulación de conjeturas (λ = -0,726 y z = -5,219) y en la generalización en los problemas planteados (λ = -0,507 y z = -2,983). Sin embargo, el sistema de representación numérico se asocia con una frecuencia superior a la media en el trabajo con términos k-ésimos de manera significativa (λ = 0,322 y z = 2,05) y en la justificación de las conjeturas (λ = 1,228 y z = 3,597).
- La formulación de conjetura es el único paso que se asocia de manera significativa (z = 2,572) al sistema de representación gráfico. La frecuencia de formulación de conjeturas en los problemas en los que se

utiliza el sistema de representación gráfico es superior a la media ($\lambda =$ 0,417).

En la Tabla 6 - 10 resumimos los comentarios hechos anteriormente sobre las asociaciones significativas entre los valores de S.Repres y Pasos.

Tabla 6 - 10. Asociaciones significativas entre valores de S.Repres y Pasos

S.Repres	Pasos						
	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Conjeturas	Justificación	Gen	Dem
Verbal	-		+	+	-	+	
Numérico	+		-	-	-	-	
Gráfico				+			

"-" indica asociación significativa negativa
"+" indica asociación significativa positiva

Asociación Orden*S.Repres

Presentamos las frecuencias absolutas según el Orden y el Sistema de Representación en la Tabla 6 - 11.

Tabla 6 - 11. Distribución de frecuencias según Orden y S.Repres

S. Repres.	Orden	
	1	2
1	867	522
2	819	1012
3	489	825
Total	2175	2359

En la Tabla 6 - 12 mostramos los parámetros estimados para el efecto Orden*S.Repres y en la Figura 6 - 6 los representamos en relación a la media.

*Tabla 6 - 12. Parámetros estimados para el efecto Orden*S.Repres*

Orden*S. Repres. Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desv. Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
(1,1)	0,6749071335	0,15276	4,41808	0,37550	0,97432
(1,2)	-0,0425951710	0,13589	-0,31344	-0,30895	0,22376
(1,3)	-0,6323119625	0,15974	-3,95827	-0,94541	-0,31921
(2,1)	-0,6749071335	0,15276	-4,41808	-0,97432	-0,37550
(2,2)	0,0425951710	0,13589	0,31344	-0,22376	0,30895
(2,3)	0,6323119625	0,15974	3,95827	0,31921	0,94541

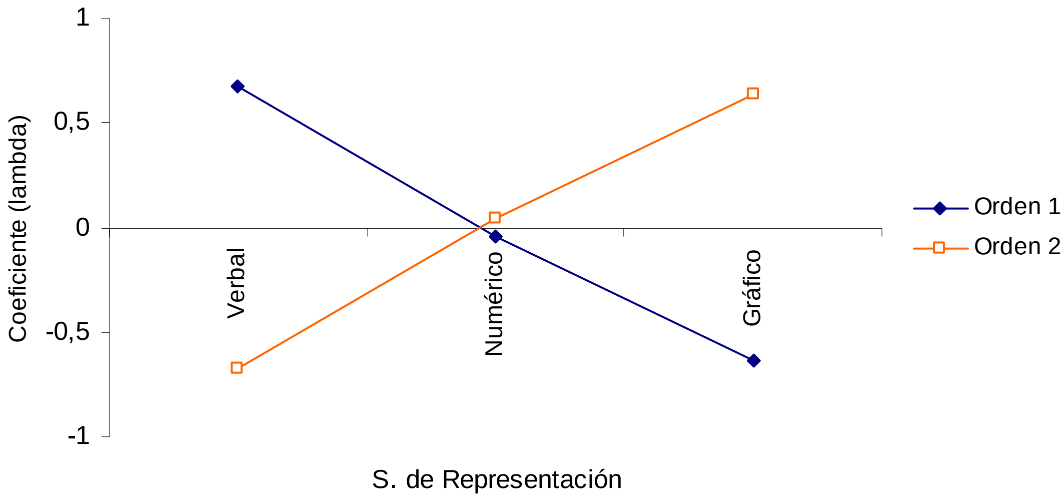


*Figura 6 - 6. Representación de los parámetros estimados del efecto Orden*S.Repres*

En los problemas en los que los términos k-ésimos están expresados numéricamente, no se observan diferencias significativas. A la luz de los parámetros estimados y de los valores de z, destacamos los resultados obtenidos en los sistemas de representación verbal y gráfico:

- El sistema de representación verbal en el planteamiento del problema se ve asociado con una frecuencia significativamente superior a la media en la realización de los pasos en los problemas que involucran una progresión de orden 1 ($\lambda = 0{,}675$ y $z = 4{,}418$). Por otro lado, se encuentra asociado con una frecuencia significativamente inferior a la media en la frecuencia de realización de los pasos en los problemas donde la progresión es de orden 2 ($\lambda = -0{,}675$ y $z = -4{,}418$).
- El sistema de representación gráfico está asociado con una frecuencia significativamente superior a la media en los problemas en los que aparece una sucesión de orden 2 ($\lambda = 0{,}632$ y $z = 3{,}958$) y con una frecuencia significativamente inferior a la media en los que la progresión es de orden 1 ($\lambda = -0{,}632$ y $z = -3{,}958$).

Asociación Orden*Pasos

Presentamos las frecuencias absolutas según Orden y Pasos en la Tabla 6 - 13.

Tabla 6 - 13. Distribución de frecuencias según S.Repres y Pasos

Pasos	Orden	
	1	2
Trabajo T. k-ésimos	420	531
Organiz. T. k-ésimos	156	207
Patrón	559	589
Conjeturas	868	867
Justificación	12	73
Generalización	160	92
Demostración	0	0
Total	2175	2359

La asociación Orden*Pasos es la más débil de las interacciones de dos factores (ver Anexo F). En la Tabla 6 - 14 se observan los parámetros estimados para este efecto.

*Tabla 6 - 14. Parámetros estimados para el efecto Orden*Pasos*

Orden*Pasos Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desv. Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
(1,1)	0,0892728021	0,13645	0,65424	-0,17818	0,35672
(1,2)	-0,3574769288	0,24511	-1,45842	-0,83790	0,12294
(1,3)	0,0643520222	0,10903	0,59022	-0,14935	0,27805
(1,4)	0,0844281459	0,10786	0,78274	-0,12698	0,29584
(1,5)	-0,4391056483	0,32064	-1,36948	-1,06755	0,18934
(1,6)	0,4725867497	0,13001	3,63489	0,21776	0,72741
(1,7)	0,0859428572	0,49931	0,17212	-0,89271	1,06460
(2,1)	-0,0892728021	0,13645	-0,65424	-0,35672	0,17818
(2,2)	0,3574769288	0,24511	1,45842	-0,12294	0,83790
(2,3)	-0,0643520222	0,10903	-0,59022	-0,27805	0,14935
(2,4)	-0,0844281459	0,10786	-0,78274	-0,29584	0,12698
(2,5)	0,4391056483	0,32064	1,36948	-0,18934	1,06755
(2,6)	-0,4725867497	0,13001	-3,63489	-0,72741	-0,21776
(2,7)	-0,0859428572	0,49931	-0,17212	-1,06460	0,89271

En la Figura 6 - 7 representamos las diferencias de esos valores con respecto a la media de λ.

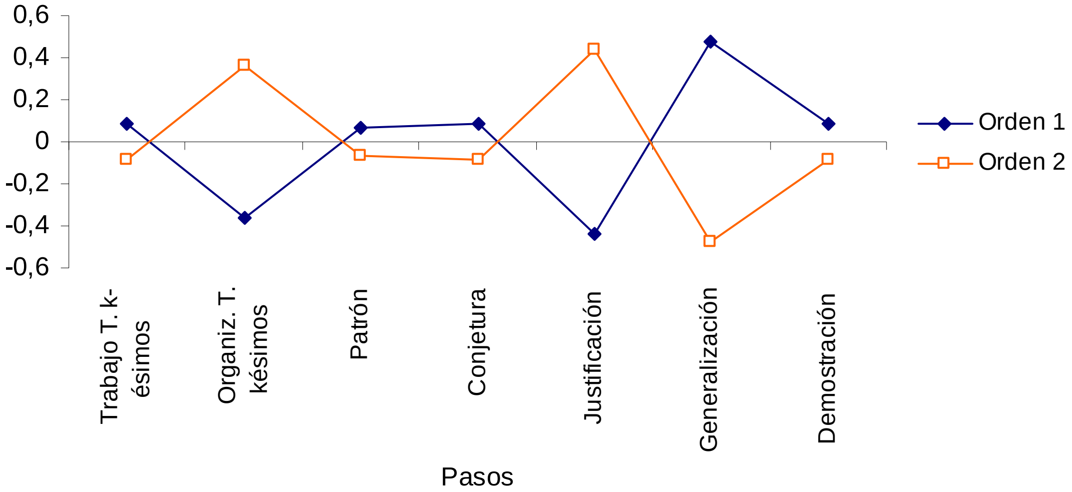


*Figura 6 - 7. Representación de los parámetros estimados del efecto Orden*Pasos*

A partir de los resultados obtenidos, concluimos que el único paso donde se observan diferencias significativas según el orden de las progresiones es en la generalización ($|z|$ = 3,635). Por un lado, el número de alumnos que generalizan en los problemas con una sucesión de orden 1 es superior a la media (λ = 0,473 y z = 3,635). Por otro, la frecuencia de los estudiantes que generalizan en los problemas que involucran una sucesión de orden 2 es inferior a la media (λ = -0,473 y z = -3,635).

En la Tabla 6 - 15 resumimos las asociaciones significativas resaltadas con anterioridad referentes a los valores de Orden y Pasos.

Tabla 6 - 15. Asociaciones significativas entre valores de Orden y Pasos

Orden	Pasos						
	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Conjeturas	Justificación	Gen	Dem
1						+	
2						-	

"-" indica asociación significativa negativa
"+" indica asociación significativa positiva

ANÁLISIS DE (IN)DEPENDENCIA ENTRE PASOS

El modelo teórico de razonamiento inductivo considera los pasos en un orden determinado en el que pueden facilitar el progreso de los estudiantes en el proceso inductivo (Cañadas, 2002). Con la intención de estudiar la posible relación entre los diferentes pasos considerados, llevamos a cabo un análisis de (in)dependencia entre ellos. Con esto pretendemos dar respuesta al objetivo específico 2 de este trabajo (O_2). Realizamos este análisis de forma separada para cada problema, debido a las diferencias identificadas en las frecuencias de realización de algunos pasos según el tipo de problema (según se desprende de los apartados anteriores de este capítulo). Esto lo hemos llevado a cabo mediante análisis basado en tablas de contingencia sobre las que realizamos contrastes de hipótesis, que pasamos a describir.

Contrastes de Hipótesis entre Pasos

Con la realización de los contrastes hipótesis podemos indicar la (in)dependencia estadística de dos pasos del razonamiento inductivo. El p-valor correspondiente indicará si aceptamos o rechazamos la hipótesis de independencia estadística. El hecho de que dos pasos sean dependientes, indica que la realización de un paso se ve relacionada en el mismo sentido con la realización de otro paso y la no realización del primero está asociada a la no realización del segundo. Esta relación de (in)dependencia se obtendrá tras un contraste de hipótesis basado en la Chi-cuadrado de independencia estadística con un nivel de significación del 95%. Dado que el p-valor del contraste Chi-cuadrado no cuantifica el grado de dependencia, recurrimos a la medida de asociación Gamma. Todos los contrastes de hipótesis los realizamos con un nivel de significación del 95%.

Debido a que el modelo teórico del razonamiento inductivo consta de una serie de pasos que no son obligatorios ni tienen que realizarse por los estudiantes en orden preestablecido, planteamos los contrastes de hipótesis para analizar la (in)dependencia de cada paso considerado en el modelo teórico del razonamiento inductivo con respecto a los pasos previos a él. Esto permitirá describir la existencia de pasos dependientes o independientes con respecto a otros considerados previos y que, teóricamente, podrían ayudarles en el avance del proceso inductivo.

En la Tabla 6 - 16 recogemos los contrastes de hipótesis que hemos planteado para obtener la información que presentaremos más adelante. Para cada problema, hemos llevado a cabo todos los contrastes de hipótesis que se representan en cada una de las celdas que aparecen en blanco. Por ejemplo, en el análisis correspondiente a Trabajo con T. k-ésimos y Organización de T. k-ésimos, hacemos un contraste de hipótesis para analizar la (in)dependencia de la organización de los términos k-ésimos respecto al trabajo con los mismos.

Tabla 6 - 16. Análisis de independencia

Pasos	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Conjetura	Justif.	Gen.	Dem
Trabajo T. k-ésimos							
Organiz. T. k-ésimos							
Patrón							
Conjetura							
Justificación							
Gen.							
Demostración							

Estos contrastes de hipótesis se han realizado de manera independiente para cada uno de los seis problemas que constituyen la prueba, con la ayuda del programa estadístico SPSS 13.0. En este epígrafe mencionamos los *procedimientos*[1] del SPSS que se han utilizado.

El procedimiento *frecuencias* proporciona información estadística y representaciones gráficas útiles para describir la variable Pasos del Razonamiento

[1] Utilizamos el término *procedimiento* según se emplea en el SPSS 13.0 Manual del usuario. Cada uno de los procedimientos que tratamos en este apartado se incluyen en la opción *Analizar* del menú principal del SPSS 13.0.

Inductivo. El procedimiento *tablas de contingencia* crea tablas de clasificación doble y proporciona una serie de pruebas y medidas de asociación para esas tablas. Nuestro interés en la utilización de estas tablas se centra en que permiten clasificar la información relativa a los valores de la variable por dos filas y dos columnas, ya que se trataba de variables dicotómicas. Mediante la Chi-cuadrado, que contrasta la hipótesis de que los valores de la variable son independientes podemos realizar el análisis de independencia de dos pasos del razonamiento inductivo de los estudiantes que han respondido al problema.

En este análisis, hemos incluido algunos valores que se presentaron en el Capítulo 5 para los pasos Patrón y Generalización. En cuanto al Patrón, describimos los patrones que han identificado los estudiantes y las frecuencias con las que los estudiantes detectan patrones adecuados y la relación recurrente. En la Generalización, prestamos atención a la generalización algebraica. En los casos en los que los patrones adecuados, la recurrencia o la generalización algebraica aparecen con frecuencias altas, hemos analizado también las relaciones de (in)dependencia con los pasos previos del modelo de razonamiento inductivo considerado.

Dado que la variación detectada en el número de estudiantes que responden a los distintos problemas (ver Tabla 6 - 17) y a que un valor significativamente bajo o alto en la frecuencia de la variable Respuesta puede variar los resultados de los análisis de (in)dependencia estadística, presentamos un análisis global de la variable Respuesta para, una vez concluido, decidir si empleamos sólo las frecuencias de los alumnos que dieron una respuesta a cada problema.

Análisis de la Variable Respuesta

En la Figura 6 - 1 mostramos el número de estudiantes que responden a cada uno de los problemas de la prueba.

Tabla 6 - 17. Frecuencias de Respuesta

Problema	1	2	3	4	5	6
Respuesta	326	291	307	274	275	323

En el gráfico de la Figura 6 - 8 recogemos los porcentajes de los alumnos que responden a cada uno de los problemas planteados en la prueba.

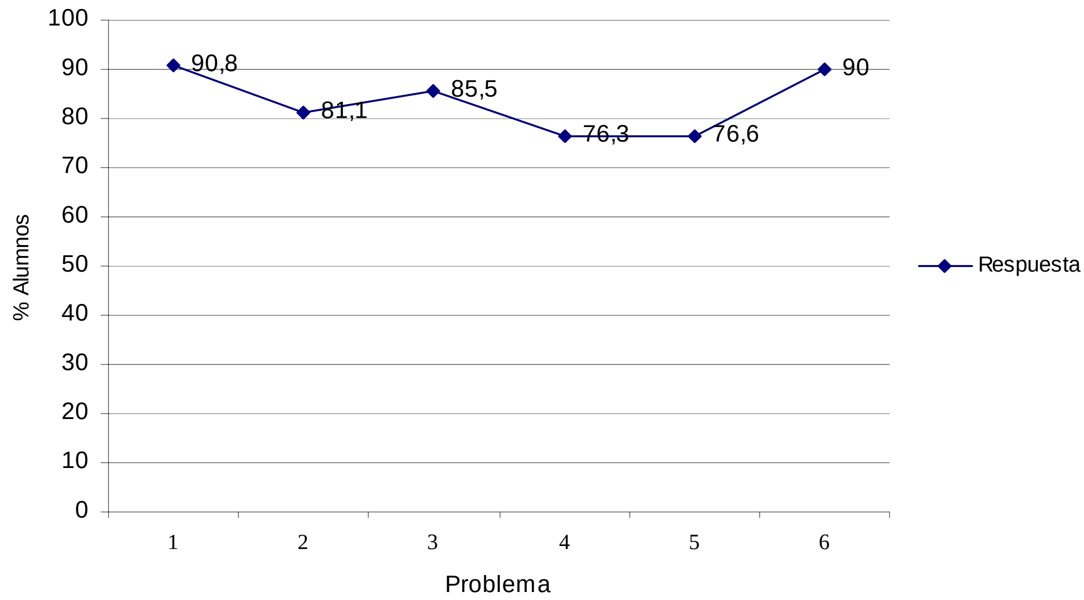


Figura 6 - 8. Porcentajes de alumnos que responden a cada problema

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de diferencias significativas (0,000) indica que las diferencias en las respuesta de los diferentes problemas son signitivatvas globalmente. Las diferencias que marcan esa significatividad vienen determinadas por los valores de los residuos corregidos (ver Anexo F). En la Tabla 6 - 18 identificamos los problemas que son respondidos por una frecuencia mayor o menor, de manera significativa.

Tabla 6 - 18. Diferencias significativas en el número de alumnos que responden a los problemas

Problema	1	2	3	4	5	6
Significatividad	+			-	-	+

Como se deduce de la Tabla 6 - 18, el número de estudiantes que responden a los problemas 1 y 6 son superiores a la media de una forma significativa. Por otro lado, la frecuencia de estudiantes que responden a los problemas 4 y 5 son significativamente inferiores a la media. La frecuencia de estudiantes que responden a los problemas 2 y 3 no presenta diferencias significativas respecto a la media.

Debido a que las diferencias en las frecuencias de Respuesta en los diferentes problemas son significativas y a que esto puede afectar a los resultados de los contrastes de hipótesis planteados, realizamos el análisis de (in)dependencia teniendo en cuenta los estudiantes que responden a cada uno de los problemas.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 1

A partir de los datos recogidos en la Tabla 6 - 1, extraemos los porcentajes de alumnos que responden al Problema 1 y que siguen cada uno de los pasos del razonamiento inductivo. Recogemos estos datos en la Figura 6 - 9.

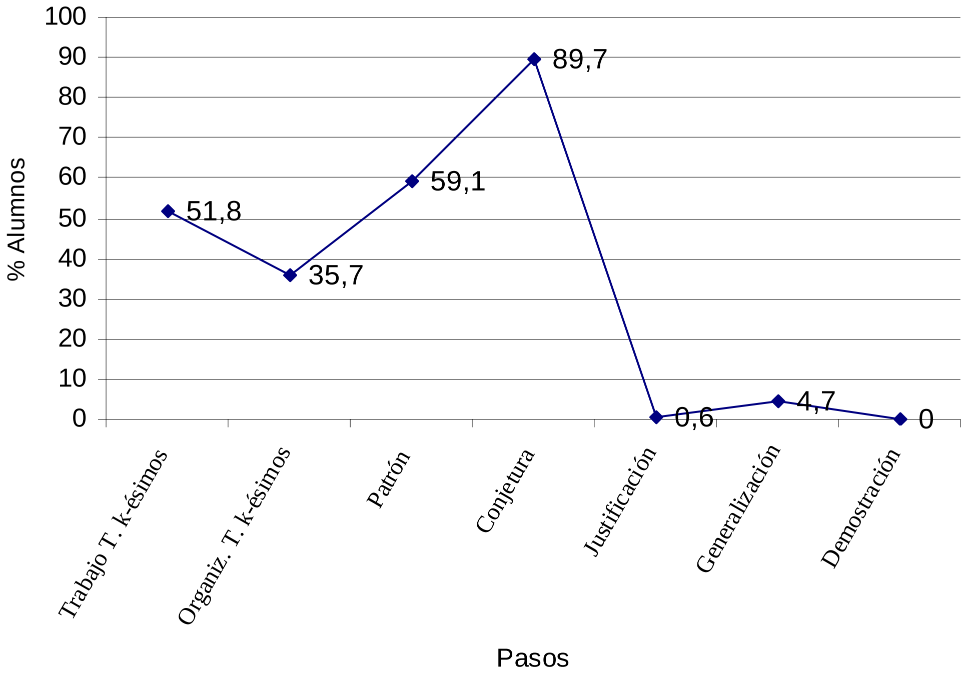


Figura 6 - 9. Gráfico-resumen de Pasos del Razonamiento Inductivo en Problema 1

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

Como se deduce de la Tabla 6 - 19, el 57,1% de los alumnos que responden, han trabajado con términos k-ésimos de la progresión y el 39,3% han organizado los términos k-ésimos. Por lo que el 68,8% de los que han trabajado con términos k-ésimos, los han organizado.

Tabla 6 - 19. Tabla de contingencia Problema 1_Trabajo T. k-ésimos-Organiz. T. k-ésimos

			Organiz.T. k-ésimos		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	140	0	140
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	70,7%	,0%	42,9%
		% del total	42,9%	,0%	42,9%
	1	Frecuencia absoluta	58	128	186
		% de Trabajo T. k-ésimos	31,2%	68,8%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	29,3%	100,0%	57,1%
		% del total	17,8%	39,3%	57,1%
Total		Frecuencia absoluta	198	128	326
		% de Trabajo T. k-ésimos	60,7%	39,3%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	60,7%	39,3%	100,0%

La organización de los términos k-ésimos depende de manera significativa del trabajo con los mismos, tal y como muestra el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado (0,000) y la Gamma asociada (1,000) (ver Anexo F).

Patrón

Como se observa en la Tabla 6 - 20, un 65,0% de los alumnos que responden a este problema, identifican un patrón.

Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón

La información relativa a estos dos pasos del razonamiento inductivo, la recogemos en la Tabla 6 - 20.

Tabla 6 - 20. Tabla de contingencia Problema 1_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	112	28	140
		% de Trabajo T. k-ésimos	80,0%	20,0%	100,0%
		% de Patrón	98,2%	13,2%	42,9%
		% del total	34,4%	8,6%	42,9%
	1	Frecuencia absoluta	2	184	186
		% de Trabajo T. k-ésimos	1,1%	98,9%	100,0%
		% de Patrón	1,8%	86,8%	57,1%
		% del total	,6%	56,4%	57,1%
Total		Frecuencia absoluta	114	212	326
		% de Trabajo T. k-ésimos	35,0%	65,0%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	35,0%	65,0%	100,0%

De la Tabla 6 - 20 se deduce que 56,4% de los alumnos que responden al problema, han trabajado con términos k-ésimos y además identifican un patrón. Sin embargo, hay un 13,2% de los alumnos que detectan un patrón, lo hacen sin haber trabajado previamente con términos k-ésimos.

Los datos mencionados parecen indicar evidencias de que trabajar con términos k-ésimos ayuda en la detección de un patrón. Sin embargo, no todos los alumnos que llegan a la identificación de un patrón, han trabajado previamente con términos k-ésimos. El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia es 0,000 y la medida Gamma de asociación es 0,995 para la Tabla 6 - 20, por lo que existe una dependencia significativa de la identificación de un patrón y el trabajo con los términos k-ésimos, tal y como confirma la d de Somer (0,789) (ver Anexo F). El análisis estadístico indica una dependencia de la identificación del patrón con respecto al trabajo con los términos k-ésimos.

Organización de Términos k-ésimos y Patrón

Todos los sujetos que han organizado los términos k-ésimos del Problema 1, han llegado a la identificación de un patrón, como se desprende de la Tabla 6 - 21.

Tabla 6 - 21. Tabla de contingencia Problema 1_Organiz. T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimjos	0	Frecuencia absoluta	114	84	198
		% de Organiz. T. k-ésimos	57,6%	42,4%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	39,6%	60,7%
		% del total	35,0%	25,8%	60,7%
	1	Frecuencia absoluta	0	128	128
		% de Organiz. T. k-ésimos	,0%	100,0%	100,0%
		% de Patrón	,0%	60,4%	39,3%
		% del total	,0%	39,3%	39,3%
Total		Frecuencia absoluta	114	212	326
		% de Organiz. T. k-ésimos	35,0%	65,0%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	35,0%	65,0%	100,0%

Los valores del contraste Chi-cuadrado de independencia estadística para la Tabla 6 - 21 (ver Anexo F), muestran que hay una dependencia fuerte de la identificación del patrón respecto de la organización de los casos particulares de la progresión (p-valor = 0,000, Gamma = 1,000).

Tipo de patrón

En cuanto a los patrones identificados en este problema, las diferentes lecturas o interpretaciones que los alumnos hacen del enunciado, dan lugar a distintos patrones que mostramos a continuación:

1. El primer día que contabilizan se alquilan 53 películas y en los días siguientes se alquilan 56, 59, 62 y 65 películas respectivamente. (algunos estudiantes argumentan que, finalmente, se alquilan: 53 + 56 + 59 + 62 + 65 = 295 películas.)
2. El primer día que contabilizan, se alquilan 50 películas y en los días siguientes se alquilan 53, 56, 59 y 62. (Según esto, algunos alumnos argumentan que en el quinto día se alquilarán 280 películas.)
3. El primer día se alquilan 50 películas y cada uno de los cuatro días siguientes, se alquilan 53 películas. Así, en los cinco primeros días se alquilan 50 + 53 + 53 + 53 + 53 = 262.

4. El primer día se alquilan 50 películas. El resto de los días (5 días más aparte del primero en el que se hace la observación) se alquilan tres películas. Por tanto, al pasar los 5 días, se habrán alquilado 50 + 5 x 3 = 65 películas.
5. Cada uno de los 5 días se alquilan 53 películas, luego se alquilan 53 x 5 = 265 películas en total.
6. En el quinto día alquilan 65 películas (50 + 5 x 3).

Patrones adecuados

Los dos primeros patrones han sido considerados válidos porque representan la regularidad que se expresa en el enunciado del Problema 1. La diferencia entre esos dos primeros patrones está en considerar el día siguiente al que se hizo la observación como el primer día, según el primero de los patrones; o el mismo día en el que se hizo la observación como el primer día, según el segundo de los patrones. Como en el enunciado del problema no se hace referencia explícita a ese respecto, ambas interpretaciones han sido consideradas válidas. Las dos interpretaciones llevan a tomar 53 y 50 como término primero de la sucesión, respectivamente.

También se han considerado válidas las respuestas en las que aparecen los términos k-ésimos mencionados (50, 53, 56, 59 y 62 o la misma secuencia comenzando por 53) y, finalmente, hacen la suma de los mismos porque interpretan que se les pregunta por las películas alquiladas el quinto día. Eso se debe a una interpretación errónea del enunciado. Sin embargo, para llegar a esa respuesta han debido realizar el proceso de razonamiento inductivo del mismo modo que si hubieran interpretado correctamente el enunciado. Como nuestro interés investigador es el razonamiento inductivo y éste no se ve afectado en esos casos, las hemos considerado respuestas válidas.

En la Tabla 6 - 22 se observan los porcentajes de patrones identificados y patrones válidos de los que hemos considerado adecuados que han sido identificados por los estudiantes.

Tabla 6 - 22. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	114	0	114
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	80,9%	,0%	35,0%
	1	Frecuencia absoluta	27	185	212
		% de Patrón	12,7%	87,3%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	19,1%	100,0%	65,0%
Total		Frecuencia absoluta	141	185	326
		% de Patrón	43,3%	56,7%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%

Como se observa en la Tabla 6 - 22, un 56,7% de los alumnos que responden a este problema, han identificado un patrón adecuado, es decir, los patrones 1 o 2 de los que se han mencionado anteriormente.

En relación con los alumnos que detectan un patrón, el 87,3% de ellos, identifican un patrón adecuado. Por consiguiente, el 12,7% de los alumnos que han identificado un patrón, han detectado un patrón no adecuado para este problema.

Para analizar la relación entre la identificación de un patrón adecuado y el trabajo con los términos k-ésimos, nos basamos en la información recogida en la Tabla 6 - 23.

Tabla 6 - 23. Tabla de contingencia Problema 1_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	131	9	140
		% de Trabajo T. k-ésimos	93,6%	6,4%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	92,9%	4,9%	42,9%
	1	Frecuencia absoluta	10	176	186
		% de Trabajo T. k-ésimos	5,4%	94,6%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	7,1%	95,1%	57,1%
Total		Frecuencia absoluta	141	185	326
		% de Trabajo T. k-ésimos	43,3%	56,7%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%

Por un lado, el 94,6% de los alumnos que han identificado un patrón adecuado, han trabajado con términos k-ésimos de la sucesión. El análisis de (in)dependencia permite afirmar que existe una dependencia fuerte de la primera respecto de la segunda, tal y como indican el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (0,000), la medida Gamma (0,992) y la d de Somer correspondiente (0,882) (ver Anexo F).

Relación de recurrencia

Como se recoge en la Tabla 6 - 24, el 58,3% de los alumnos que responden al Problema 1, han identificado una relación de recurrencia.

Tabla 6 - 24. Tabla de contingencia Problema 1_Trabajo T. k-ésimos-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	133	7	140
		% de Trabajo T. k-ésimos	95,0%	5,0%	100,0%
		% de Recurrencia	97,8%	3,7%	42,9%
		% del total	40,8%	2,1%	42,9%
	1	Frecuencia absoluta	3	183	186
		% de Trabajo T. k-ésimos	1,6%	98,4%	100,0%
		% de Recurrencia	2,2%	96,3%	57,1%
		% del total	,9%	56,1%	57,1%
Total		Frecuencia absoluta	136	190	326
		% de Trabajo T. k-ésimos	41,7%	58,3%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	41,7%	58,3%	100,0%

La detección de la relación recurrente depende significativamente del trabajo con los términos k-ésimos de la progresión, según indican el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (0,000), la medida Gamma (0,998) y la d de Somer (0,934) asociados a la tabla de contingencia correspondiente (ver Anexo F). Esto confirma que el trabajo con términos k-ésimos ayuda a los alumnos a identificar la relación recurrente.

El 89,6% de los alumnos que identifican un patrón, lo hacen de manera recurrente, tal y como se observa en la Tabla 6 - 25.

Tabla 6 - 25. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	114	0	114
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Recurrencia	83,8%	,0%	35,0%
		% del total	35,0%	,0%	35,0%
	1	Frecuencia absoluta	22	190	212
		% de Patrón	10,4%	89,6%	100,0%
		% de Recurrencia	16,2%	100,0%	65,0%
		% del total	6,7%	58,3%	65,0%
Total		Frecuencia absoluta	136	190	326
		% de Patrón	41,7%	58,3%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	41,7%	58,3%	100,0%

El elevado número de alumnos que identifican un patrón recurrente, nos lleva a preguntarnos por la relación entre la recurrencia y la identificación de un patrón adecuado. Como se deduce de la Tabla 6 - 26, el 95,2% de los alumnos que han identificado una relación recurrente, detectan un patrón adecuado para el Problema 1.

Tabla 6 - 26. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón Adecuado-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	132	9	141
		% de Patrón Adecuado	93,6%	6,4%	100,0%
		% de Recurrencia	97,1%	4,7%	43,3%
	1	Frecuencia absoluta	4	181	185
		% de Patrón Adecuado	2,2%	97,8%	100,0%
		% de Recurrencia	2,9%	95,3%	56,7%
Total		Frecuencia absoluta	136	190	326
		% de Patrón Adecuado	41,7%	58,3%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%

Formulación de Conjeturas

Como se observa en el gráfico-resumen con el que comenzamos la descripción de la resolución del Problema 1 (Figura 6 - 9), el número de alumnos que formulan la conjetura está muy próximo al número de alumnos que responden al problema. El 1,1% de los estudiantes del total de los estudiantes son los que, habiendo respondido al Problema 1, no llegan a la formulación de la conjetura. Se trata de 4 alumnos que han dado una respuesta parcial a la tarea o simplemente han resuelto el problema utilizando algunos de los datos del enunciado, sin formular una conjetura para la tarea de continuación.

La formulación de conjeturas es independiente del trabajo con términos k-ésimos, de la organización de los mismos y de la identificación de un patrón, como indican los p-valores asociados a los respectivos contrastes Chi-cuadrado de independencia estadística (ver Anexo F) y que resumimos en la Tabla 6 - 27.

Tabla 6 - 27. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Conjetura

p-valores	Conjetura
Trabajo T. k-ésimos	0,748
Organiz. T. k-ésimos	0,177
Patrón	0,915

Justificación de Conjeturas

Únicamente un alumno de los que responden al problema ha llegado a justificar la conjetura que formula. Esta justificación está basada en la comprobación mediante términos k-ésimos. Se trata de un alumno que, tras haber expresado la generalización algebraicamente, valida su conjetura mediante términos k-ésimos. Para ello, comprueba que con la fórmula que él propone, consigue el mismo resultado que si hace los cálculos sólo basándose en los términos k-ésimos utilizando el patrón que ha identificado.

Como se puede deducir del contraste de hipótesis de independencia llevado a cabo en el Anexo F, la realización de este paso es independiente de todos los considerados anteriormente (trabajo con términos k-ésimos, organización de términos k-ésimos, identificación de patrón y formulación de conjetura).

Tabla 6 - 28. P-valores asociadas a las tablas de contingencia con Justificación

p-valores	Justificación
Trabajo T. k-ésimos	0,607
Organiz. T. k-ésimos	1,000
Patrón	0,767
Conjetura	1,000

Expresión de la Generalización

En la Tabla 6 - 29, se observa que el 5,2% de los alumnos que responden a este problema, llegan a expresar el término general de la sucesión.

Por el análisis de independencia estadística con un nivel de significación del 95% (ver Anexo F), sabemos que la expresión de la generalización es independiente del trabajo con los términos k-ésimos de la progresión (p-valor = 0,365), así como de la organización de los mismos (p-valor = 0,393).

Tabla 6 - 29. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	113	1	114
		% de Patrón	99,1%	,9%	100,0%
		% de Generalización	36,6%	5,9%	35,0%
		% del total	34,7%	,3%	35,0%
	1	Frecuencia absoluta	196	16	212
		% de Patrón	92,5%	7,5%	100,0%
		% de Generalización	63,4%	94,1%	65,0%
		% del total	60,1%	4,9%	65,0%
Total		Frecuencia absoluta	309	17	326
		% de Patrón	94,8%	5,2%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	94,8%	5,2%	100,0%

Llamamos la atención sobre la diferencia entre el número de alumnos que llegan a expresar la generalización y el número de alumnos que dan los pasos anteriores a la justificación de la conjetura en este problema. Analizamos a continuación si existe alguna dependencia entre este paso del razonamiento inductivo y los pasos previos.

En la Tabla 6 - 29 se observa que sólo uno de los alumnos que generalizan, no ha identificado patrón. La dependencia entre la generalización y el patrón es indicada por el contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (ver Anexo F), ya que el p-valor es 0,010 y la Gamma asociada a la tabla de contingencia es 0,804.

Además, como se deduce de la Tabla 6 - 30, el 82,4% de los estudiantes que llegan a expresar la generalización, han identificado un patrón adecuado en el Problema 1.

Tabla 6 - 30. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón Adecuado-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	138	3	141
		% de Patrón Adecuado	97,9%	2,1%	100,0%
		% de Generalización	44,7%	17,6%	43,3%
		% del total	42,3%	,9%	43,3%
	1	Frecuencia absoluta	171	14	185
		% de Patrón Adecuado	92,4%	7,6%	100,0%
		% de Generalización	55,3%	82,4%	56,7%
		% del total	52,5%	4,3%	56,7%
Total		Frecuencia absoluta	309	17	326
		% de Patrón Adecuado	94,8%	5,2%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	94,8%	5,2%	100,0%

La relación de recurrencia ha sido el patrón que con mayor frecuencia han identificado los alumnos. En la Tabla 6 - 31 se observa que el 76,5% de los alumnos que expresan la generalización, han identificado una relación recurrente. El 23,5% de los alumnos restantes que generalizan, lo hacen sin haber identificado una relación recurrente.

Tabla 6 - 31. Tabla de contingencia Problema 1_Recurrencia-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	132	4	136
		% de Recurrencia	97,1%	2,9%	100,0%
		% de Generalización	42,7%	23,5%	41,7%
	1	Frecuencia absoluta	177	13	190
		% de Recurrencia	93,2%	6,8%	100,0%
		% de Generalización	57,3%	76,5%	58,3%
Total		Frecuencia absoluta	309	17	326
		% de Recurrencia	94,8%	5,2%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%

El p-valor asociado a la tabla de contingencia correspondiente (0,118) indica que la expresión de la generalización es independiente de la detección de la relación recurrente. De manera análoga, dado que el p-valor es 1,000, la generalización es independiente de la formulación de conjeturas (ver Anexo F).

Sin embargo, tal y como se puede observar en el Anexo F, el p-valor (0,000) y la Gamma asociada (1,000) indican que la generalización depende significativamente de la justificación de conjeturas.

Con base en la información mostrada hasta ahora, podemos distinguir dos grupos entre los estudiantes que expresan la generalización. Por un lado, hay 13 alumnos que trabajan con términos k-ésimos, identifican un patrón recurrente y, a partir de él, generalizan. Por otro lado están los otros cuatro alumnos que llegan a la generalización sin haber detectado una relación recurrente. El análisis que posteriormente presentaremos sobre las estrategias inductivas empleadas por los alumnos en la generalización complementará esta primera aproximación.

Generalización algebraica

El 58,8% de los sujetos que generalizan, lo hacen algebraicamente, como se recoge en la Tabla 6 - 32.

Tabla 6 - 32. Tabla de contingencia Problema 1_Generalización-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Generalización	0	Frecuencia absoluta	309	0	309
		% de Generalización	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	97,8%	,0%	94,8%
	1	Frecuencia absoluta	7	10	17
		% de Generalización	41,2%	58,8%	100,0%
		% de Generalización Alg.	2,2%	100,0%	5,2%
Total		Frecuencia absoluta	316	10	326
		% de Generalización	96,9%	3,1%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%

Todos los alumnos que llegan a la generalización algebraica, han identificado el patrón previamente y además, ese patrón ha sido adecuado al Problema 1, como se observan en la Tabla 6 - 33.

Tabla 6 - 33. Tabla de contingencia Problema 1_Patrón Adecuado-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	141	0	141
		% de Patrón Adecuado	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	44,6%	,0%	43,3%
	1	Frecuencia absoluta	175	10	185
		% de Patrón Adecuado	94,6%	5,4%	100,0%
		% de Generalización Alg.	55,4%	100,0%	56,7%
Total		Frecuencia absoluta	316	10	326
		% de Patrón Adecuado	96,9%	3,1%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%

El valor de los p-valores correspondientes a las tablas de contingencia 2x2 de la generalización algebraica y los pasos previos del razonamiento inductivo indican la (in)dependencia entre las variables consideradas en las tablas respectivas. En la Tabla 6 - 34 recogemos los p-valores, que nos permiten afirmar que la generalización algebraica depende de la identificación de patrón y de la justificación de conjeturas (p-valores < 0,05). Las Gammas asociadas (1,000) indican que la dependencia es significativa (ver Anexo F).

Tabla 6 - 34. P-valores asociadas a las tablas de contingencia con Conjeturas

p-valores	Generalización Alg.
Trabajo T. k-ésimos	0,070
Organiz. T. k-ésimos	1,000
Patrón	0,044
Conjetura	1,000
Justificación	0,000

Demostración

Ningún alumno demuestra sus propias conjeturas para el caso general.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 2

A partir de las frecuencias recogidas en la Tabla 6 - 1, resumimos la información relativa al Problema 2 en la Figura 6 - 10.

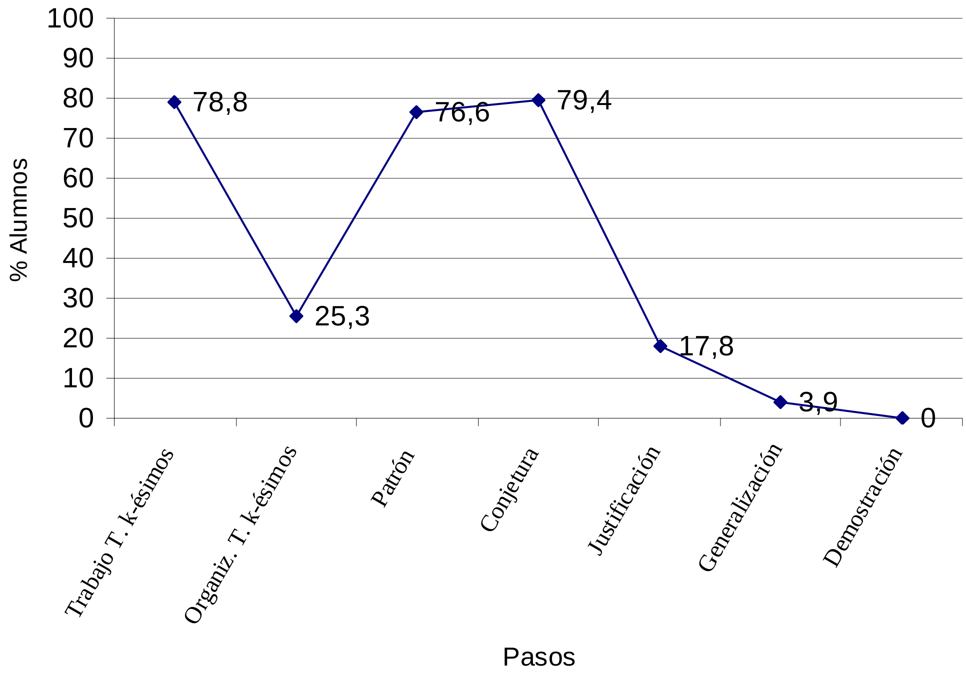


Figura 6 - 10. Gráfico-resumen de Pasos de Razonamiento Inductivo en Problema 2

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

De la Tabla 6 - 35 se deduce que el 97,3% de los estudiantes que responden, trabajan con términos k-ésimos y que el 32,2% de éstos, los organizan.

Tabla 6 - 35. Tabla de contingencia Problema 2_Trabajo T. K-ésimos-Organiz. T. k-ésimos

			Organiz. T. k-ésimos		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	8	0	8
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	4,0%	,0%	2,7%
		% del total	2,7%	,0%	2,7%
	1	Frecuencia absoluta	192	91	283
		% de Trabajo T. k-ésimos	67,8%	32,2%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	96,0%	100,0%	97,3%
		% del total	66,0%	31,3%	97,3%
Total		Frecuencia absoluta	200	91	291
		% de Trabajo T. k-ésimos	68,7%	31,3%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	68,7%	31,3%	100,0%

El p-valor (0,122) asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística indica la independencia de estos dos pasos del razonamiento inductivo.

Patrón

En la Tabla 6 - 36 se refleja que el 94,5% de los estudiantes que responden, han identificado un patrón.

<u>Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón</u>

De la Tabla 6 - 36 destacamos que el 94,5% de los alumnos que responden a este problema, detectan un patrón. Además, el 96,5% de los estudiantes que trabajan con términos k-ésimos, llegan a la identificación de un patrón.

Tabla 6 - 36. Tabla de contingencia Problema 2_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	6	2	8
		% de Trabajo T. k-ésimos	75,0%	25,0%	100,0%
		% de Patrón	37,5%	,7%	2,7%
		% del total	2,1%	,7%	2,7%
	1	Frecuencia absoluta	10	273	283
		% de Trabajo T. k-ésimos	3,5%	96,5%	100,0%
		% de Patrón	62,5%	99,3%	97,3%
		% del total	3,4%	93,8%	97,3%
Total		Frecuencia absoluta	16	275	291
		% de Trabajo T. k-ésimos	5,5%	94,5%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	5,5%	94,5%	100,0%

El contraste Chi-cuadrado de independencia estadística, indica que la identificación de patrón depende de una manera significativa del trabajo con términos k-ésimos ya que el p-valor asociado es 0,000, la medida Gamma de asociación para tablas de contingencia (0,976) y la d de Somer correspondiente (0,715) (ver Anexo F).

Organización de Términos k-ésimos y Patrón

Se ha observado una disminución en el número de alumnos que organizan los términos k-ésimos con respecto a los pasos anterior y siguiente (ver Figura 6 - 10).

Un 33,1% de los estudiantes que responden, organizan los términos k-ésimos (ver Tabla 6 - 37).

Como se observa en la Tabla 6 - 37, todos los alumnos que han organizado los términos k-ésimos, han llegado a la identificación de un patrón en el Problema 2.

Tabla 6 - 37. Tabla de contingencia Problema 2_Organiz. de T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	16	184	200
		% de Organiz. T. k-ésimos	8,0%	92,0%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	66,9%	68,7%
		% del total	5,5%	63,2%	68,7%
	1	Frecuencia absoluta	0	91	91
		% de Organiz. T. k-ésimos	,0%	100,0%	100,0%
		% de Patrón	,0%	33,1%	31,3%
		% del total	,0%	31,3%	31,3%
Total		Frecuencia absoluta	16	275	291
		% de Organiz. T. k-ésimos	5,5%	94,5%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	5,5%	94,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (0,006) y la medida Gamma asociada (1,000) indican una dependencia fuerte de estos dos pasos del razonamiento inductivo (ver Anexo F).

Tipo de patrón

Los diferentes patrones que se han identificado en el trabajo que han llevado a cabo los alumnos son los que mostramos a continuación. En algunos casos, hemos completado los patrones que hemos deducido de las producciones de los estudiantes con la intención de homogeneizar las respuestas.

1. 3, 7 (3 + 4), 13 (7 + 6), 21 (13 + 8), 31 (21 + 10), 43 (31 + 12), 57 (43 + 14), 73 (57 + 16),...

   Los alumnos establecen las diferencias entre los términos sucesivos de la progresión que aparecen en el enunciado e inducen que cada vez se va sumando al término anterior de la progresión el número par siguiente al que se le ha sumado en el caso anterior.
2. 3, 7 (3 + 2 x 2), 13 (7 + 2 x 3), 21 (13 + 2 x 4), 31 (21 + 2 x 5), 43 (31 + 2 x 6), 57 (43 + 2 x 7), 73 (57 + 2 x 8),...

   Análogamente al patrón anterior, hay alumnos que llegan a este desarrollo numérico, equivalente al patrón primero.

3. 3 (1 x 2 + 1), 7 (2 x 3 + 1), 13 (3 x 4 + 1), 21 (4 x 5 + 1), 31 (5 x 6 + 1), 43 (6 x 7 + 1), 57 (7 x 8 + 1), 73 (8 x 9 + 1),...

   Trabajando con los términos k-ésimos, llegan a expresar mediante el desarrollo numérico que se observa.
4. 3, 7, 13, 21, 91, 273, 1911, 24843,...

   Obtienen el cuarto término como producto del primer término por el segundo. De este modo, conjeturan que el quinto se debe obtener multiplicando el segundo por el tercero. Así es como continúan la progresión.
5. 3, 7, 13, 21, 25, 31, 39, 43,...

   Observan que en los términos k-ésimos presentados, primero se suman cuatro unidades, luego seis y, por último, ocho. Ese patrón en la forma de sumar es el que mantienen para continuar la progresión.
6. 3, 7, 13, 21, 23, 35, 33, 49.

   Detectan una diferencia entre los términos que ocupan un lugar impar, por un lado; y los términos que ocupan un lugar par. Así, entre el primer y el tercer término hay una diferencia de 10 unidades. Por tanto, esa es la diferencia que debe haber entre dos términos que ocupen lugares impares consecutivos (por ejemplo, entre el tercero y el quinto). Como entre el segundo y cuarto términos hay una diferencia de 14 unidades, esa diferencia se debe mantener entre dos términos que ocupen dos lugares pares consecutivos (por ejemplo, entre el cuarto y el sexto).
7. Operan con los tres primeros términos k-ésimos y concluyen que las diferencia entre el primer y el segundo término es de 3 unidades, y que la diferencia entre el segundo y el tercero es de 6 unidades. En este caso se ha producido un error de cálculo aritmético.
8. Se trata de los números primos no consecutivos. El primer término es el 3. Para el siguiente primo, dejan pasar el 5 y escriben 7 y así sucesivamente.

Destacamos la variedad de patrones (adecuados o no) que los alumnos identifican en este problema. El trabajo con los términos k-ésimos y la posibilidad de que exista una relación entre ellos hace que los alumnos identifiquen diferentes tipos patrones.

Patrones adecuados

Hemos considerado válidos los patrones que expresan la regularidad existente entre los términos de la sucesión que aparecen en el enunciado de este problema. Siguiendo este criterio, los seis primeros patrones son válidos.

Los patrones 1, 2 y 3 son los únicos patrones que se corresponden con una progresión aritmética de números naturales de orden 2. Por ello, estos patrones aparecen en los que se han identificado en la resolución de la prueba. Los patrones 1, 2 y 3 se consideran equivalentes porque se corresponden con una misma expresión polinómica del término general de la sucesión, a saber: $a_n = n (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$. Estos patrones han quedado recogidos en el Anexo C. La principal diferencia entre los patrones 1, 2 y 3 es que mientras los dos primeros se basan en el término anterior para obtener el término siguiente (el patrón es recurrente); en el patrón 3 no ocurre así.

Los términos generales que expresan los patrones 4, 5 y 6 no se corresponden con una expresión polinómica ni de primer ni de segundo grado (no se mantienen constantes ni las primeras ni las segundas diferencias). El término general de esos patrones se puede expresar mediante las leyes de recurrencia correspondientes. Los patrones 4 y 6 son detectados por un estudiante cada uno. El patrón 5 es propuesto por dos estudiantes.

Los patrones 7 y 8 no son válidos para el Problema 2. En el caso del patrón séptimo, los alumnos han incurrido en un error al hacer la diferencia entre dos términos k-ésimos consecutivos de la secuencia. Además, el no haber trabajado con todos los términos k-ésimos que se les presentan, les ha llevado a un patrón no adecuado. En el caso del patrón número 8, son cuatro los alumnos que incurren en un error de concepto.

En general, la mayoría de los alumnos que detectan un patrón lo hacen apropiadamente, identificando los patrones 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Como se recoge en la Tabla 6 - 38, el 87,2% de los alumnos que han detectado patrón, detectan un patrón adecuado al Problema 2.

Tabla 6 - 38. Tabla de contingencia Problema 2_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	16	0	16
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	31,4%	,0%	5,5%
		% del total	5,5%	,0%	5,5%
	1	Frecuencia absoluta	35	240	275
		% de Patrón	12,7%	87,3%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	68,6%	100,0%	94,5%
		% del total	12,0%	82,5%	94,5%
Total		Frecuencia absoluta	51	240	291
		% de Patrón	17,5%	82,5%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	17,5%	82,5%	100,0%

En la Tabla 6 - 38 se observa que el 82,5% de los estudiantes que responden, identifican un patrón adecuado en el Problema 2.

Para ver la relación entre el trabajo con términos k-ésimos y la identificación de un patrón adecuado, elaboramos la tabla de contingencia relativa a esos dos pasos (ver Tabla 6 - 39).

Tabla 6 - 39. Tabla de contingencia Problema 2_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	7	1	8
		% de Trabajo T. k-ésimos	87,5%	12,5%	100,0%
		% dePatrón Adecuado	13,7%	,4%	2,7%
		% del total	2,4%	,3%	2,7%
	1	Frecuencia absoluta	44	239	283
		% de Trabajo T. k-ésimos	15,5%	84,5%	100,0%
		% dePatrón Adecuado	86,3%	99,6%	97,3%
		% del total	15,1%	82,1%	97,3%
Total		Frecuencia absoluta	51	240	291
		% de Trabajo T. k-ésimos	17,5%	82,5%	100,0%
		% dePatrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	17,5%	82,5%	100,0%

Como se deduce de la Tabla 6 - 39, el 99,6% de los alumnos que han detectado un patrón adecuado, han trabajado con términos k-ésimos. Además, el 84,5% de los alumnos que trabajan con términos k-ésimos, llegan a la identificación de un patrón adecuado.

El análisis de la (in)dependencia permite afirmar que existe una dependencia significativa de la identificación de un patrón adecuado respecto del trabajo con términos k-ésimos, ya que el p-valor es 0,000, la Gamma asociada es 0,674 (ver Anexo F).

Relación de recurrencia

El 92,1% de los sujetos que responden al Problema 2, han identificado una relación recurrente (ver Tabla 6 - 40).

Tabla 6 - 40. Tabla de contingencia Problema 2_Trabajo T. k-ésimos-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	6	2	8
		% Trabajo T. k-ésimos	75,0%	25,0%	100,0%
		% de Recurrencia	26,1%	,7%	2,7%
		% del total	2,1%	,7%	2,7%
	1	Frecuencia absoluta	17	266	283
		% Trabajo T. k-ésimos	6,0%	94,0%	100,0%
		% de Recurrencia	73,9%	99,3%	97,3%
		% del total	5,8%	91,4%	97,3%
Total		Frecuencia absoluta	23	268	291
		% Trabajo T. k-ésimos	7,9%	92,1%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	7,9%	92,1%	100,0%

La detección de la relación de recurrencia depende del trabajo con los términos k-ésimos de la progresión (el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia es 0,000 y la Gamma asociada 0,958) y de la organización de términos k-ésimos (p-valor = 0,000 y la Gamma asociada = 0,674) (ver Anexo F).

La recurrencia es el patrón que con mayor frecuencia detectan los estudiantes en este problema, ya que el 97,1% de los estudiantes que identifican un patrón, lo hacen de manera recurrente, como se deduce de la Tabla 6 - 41.

Tabla 6 - 41. Tabla de contingencia Problema 2_Patrón-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	15	1	16
		% de Patrón	93,8%	6,3%	100,0%
		% de Recurrencia	65,2%	,4%	5,5%
		% del total	5,2%	,3%	5,5%
	1	Frecuencia absoluta	8	267	275
		% de Patrón	2,9%	97,1%	100,0%
		% de Recurrencia	34,8%	99,6%	94,5%
		% del total	2,7%	91,8%	94,5%
Total		Frecuencia absoluta	23	268	291
		% de Patrón	7,9%	92,1%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	7,9%	92,1%	100,0%

La mayoría de los alumnos que identifican un patrón recurrente, lo hacen de una manera adecuada. Tal y como se observa en la Tabla 6 - 42, el 89,2% de los alumnos que identifican una relación recurrente lo hacen de una manera adecuada.

Tabla 6 - 42. Tabla de contingencia Problema 2_Recurrencia-Patrón Adecuado

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	22	29	51
		% de Patrón Adecuado	43,1%	56,9%	100,0%
		% de Recurrencia	95,7%	10,8%	17,5%
		% del total	7,6%	10,0%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	1	239	240
		% de Patrón Adecuado	,4%	99,6%	100,0%
		% de Recurrencia	4,3%	89,2%	82,5%
		% del total	,3%	82,1%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	23	268	291
		% de Patrón Adecuado	7,9%	92,1%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	7,9%	92,1%	100,0%

Formulación de Conjeturas

Como se observa en la Figura 6 - 10, la mayoría de los alumnos que responden al problema, llegan a formular una conjetura para la tarea que se les propone. Un 1,7% de los alumnos que responden al problema, no formulan una conjetura sobre la continuación propuesta.

La formulación de conjeturas depende del trabajo con términos k-ésimos (p-valor = 0,000 y Gamma = 0,965) y de la identificación de patrón (p-valor = 0,000 y Gamma = 0,957), tal y como se observa en el Anexo F. Sin embargo, la formulación de conjeturas, es independiente de la organización de términos k-ésimos (p-valor = 0,221) (ver Anexo F).

Justificación de Conjeturas

Como se puede observar en la Tabla 6 - 43, un 22% de los alumnos que responden, justifican su conjetura. Esto representa un 22,5% de los alumnos que formulan su conjetura.

Tabla 6 - 43. Tabla de contingencia Problema 2_Conjetura-Justificación

			Justificación		
			0	1	Total
Conjetura	0	Frecuencia absoluta	6	0	6
		% de Conjetura	100,0%	,0%	100,0%
		% de Justificación	2,6%	,0%	2,1%
		% del total	2,1%	,0%	2,1%
	1	Frecuencia absoluta	221	64	285
		% de Conjetura	77,5%	22,5%	100,0%
		% de Justificación	97,4%	100,0%	97,9%
		% del total	75,9%	22,0%	97,9%
Total		Frecuencia absoluta	227	64	291
		% de Conjetura	78,0%	22,0%	100,0%
		% de Justificación	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	78,0%	22,0%	100,0%

La justificación de conjeturas es independiente de los pasos anteriores del razonamiento inductivo considerados, tal y como indican los contrastes de independencia realizados mediante la Chi-cuadrado (ver Anexo F), ya que los p-valores son mayores que 0,05, según se observa en la Tabla 6 - 44.

Tabla 6 - 44. P-valores asociadas a las tablas de contingencia con Justificación

p-valores	Justificación
Trabajo T. k-ésimos	0,276
Organiz. T. k-ésimos	0,448
Patrón	0,061
Conjetura	0,414

Expresión de la Generalización

Como se deduce de la Tabla 6 - 45, el 4,8% de los alumnos que responden al problema, llegan a la generalización.

Tabla 6 - 45. Tabla de contingencia Problema 2_Trabajo T. k-ésimos-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	8	0	8
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización	2,9%	,0%	2,7%
		% del total	2,7%	,0%	2,7%
	1	Frecuencia absoluta	269	14	283
		% de Trabajo T. k-ésimos	95,1%	4,9%	100,0%
		% de Generalización	97,1%	100,0%	97,3%
		% del total	92,4%	4,8%	97,3%
Total		Frecuencia absoluta	277	14	291
		% de Trabajo T. k-ésimos	95,2%	4,8%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,2%	4,8%	100,0%

En la Tabla 6 - 45 se observa que todos los alumnos que generalizan, trabajan con términos k-ésimos. El p-valor correspondiente a la tabla de contingencia (1,000) indica que la generalización es independiente del trabajo con términos k-ésimos (ver Anexo F).

En la Tabla 6 - 46 se pueden observar los p-valores correspondientes a los contrastes Chi-cuadrado de independencia que indican la independencia de la generalización respecto al trabajo con términos k-ésimos, la organización de los mismos, la identificación de patrón, la formulación de conjeturas y la justificación de las mismas, ya que son mayores que 0,05 (ver Anexo F).

Tabla 6 - 46. P-valores asociadas a las tablas de contingencia con Generalización

p-valores	Generalización
Trabajo T. k-ésimos	1,000
Organiz. T. k-ésimos	0,065
Patrón	0,746
Conjetura	1,000
Justificación	1,000

Anteriormente destacamos el número de estudiantes que identifican la relación recurrente en el Problema 2. Para ver si esto tiene alguna relación con la expresión de la generalización, elaboramos la tabla de contingencia asociada (Tabla 6 - 47).

Tabla 6 - 47. Tabla de contingencia Problema 2_Recurrencia-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	21	2	23
		% de Recurrencia	91,3%	8,7%	100,0%
		% de Generalización	7,6%	14,3%	7,9%
		% del total	7,2%	,7%	7,9%
	1	Frecuencia absoluta	256	12	268
		% de Recurrencia	95,5%	4,5%	100,0%
		% de Generalización	92,4%	85,7%	92,1%
		% del total	88,0%	4,1%	92,1%
Total		Frecuencia absoluta	277	14	291
		% de Recurrencia	95,2%	4,8%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,2%	4,8%	100,0%

De la Tabla 6 - 47 se deduce que el 85,7% de los estudiantes que generalizan, han identificado la relación recurrente.

La mayoría de los estudiantes que generalizan, han identificado un patrón adecuado para el Problema 2. En la Tabla 6 - 48 se observa que el 92,9% de los alumnos que generalizan, identifican un patrón correcto. Por tanto, el 7,1% restante de los alumnos que generalizan, han identificado un patrón que no es adecuado, como se deduce en la Tabla 6 - 48.

Tabla 6 - 48. Tabla de contingencia Problema 2_ Patrón Adecuado-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	50	1	51
		% de Patrón Adecuado	98,0%	2,0%	100,0%
		% de Generalización	18,1%	7,1%	17,5%
		% del total	17,2%	,3%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	227	13	240
		% de Patrón Adecuado	94,6%	5,4%	100,0%
		% de Generalización	81,9%	92,9%	82,5%
		% del total	78,0%	4,5%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	277	14	291
		% de Patrón Adecuado	95,2%	4,8%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,2%	4,8%	100,0%

Generalización algebraica

El 4,1% de los estudiantes que responden al problema, expresan la generalización algebraicamente (ver Tabla 6 - 49). El 85,7% de los estudiantes que generalizan, lo hacen algebraicamente.

Tabla 6 - 49. Tabla de contingencia Problema 2_Generalización-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Generalización	0	Frecuencia absoluta	277	0	277
		% de Generalización	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg	99,3%	,0%	95,2%
		% del total	95,2%	,0%	95,2%
	1	Frecuencia absoluta	2	12	14
		% de Generalización	14,3%	85,7%	100,0%
		% de Generalización Alg	,7%	100,0%	4,8%
		% del total	,7%	4,1%	4,8%
Total		Frecuencia absoluta	279	12	291
		% de Generalización	95,9%	4,1%	100,0%
		% de Generalización Alg	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,9%	4,1%	100,0%

Como se deduce de la Tabla 6 - 49, el 85,7% de los estudiantes que generalizan, lo hacen algebraicamente.

Todos los alumnos que generalizan algebraicamente, han identificado previamente un patrón adecuado para el Problema 2, como se observa en la Tabla 6 - 50.

Tabla 6 - 50. Tabla de contingencia Problema 2_Patrón Adecuado-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	51	0	51
		% de Patrón Adecuado	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	18,3%	,0%	17,5%
		% del total	17,5%	,0%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	228	12	240
		% de Patrón Adecuado	95,0%	5,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	81,7%	100,0%	82,5%
		% del total	78,4%	4,1%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	279	12	291
		% de Patrón Adecuado	95,9%	4,1%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,9%	4,1%	100,0%

Como se deduce de la Tabla 6 - 51, el 91,7% de los estudiantes que generalizan algebraicamente, han identificado una relación recurrente.

Tabla 6 - 51. Tabla de contingencia Problema 2_Recurrencia -Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	22	1	23
		% de Recurrencia	95,7%	4,3%	100,0%
		% de Generalización Alg.	7,9%	8,3%	7,9%
		% del total	7,6%	,3%	7,9%
	1	Frecuencia absoluta	257	11	268
		% de Recurrencia	95,9%	4,1%	100,0%
		% de Generalización Alg.	92,1%	91,7%	92,1%
		% del total	88,3%	3,8%	92,1%
Total		Frecuencia absoluta	279	12	291
		% de Recurrencia	95,9%	4,1%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	95,9%	4,1%	100,0%

Tal y como indican los p-valores recogidos en la Tabla 6 - 52, la expresión algebraica de la generalización es independiente de todos los pasos del razonamiento inductivo considerados previos a él.

Tabla 6 - 52. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Generalización Alg.

p-valores	Generalización Alg.
Trabajo T. k-ésimos	1,000
Organiz. T. k-ésimos	0,081
Patrón	0,836
Conjetura	1,000
Justificación	1,000

Demostración

Ninguno de los sujetos participantes en esta investigación han llegado a demostrar sus conjeturas para el caso general.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 3

En la Figura 6 - 11 mostramos el porcentaje de alumnos que responden al Problema 2 y que realizan cada uno de los pasos del razonamiento inductivo (recogidos inicialmente en la Tabla 6 - 1).

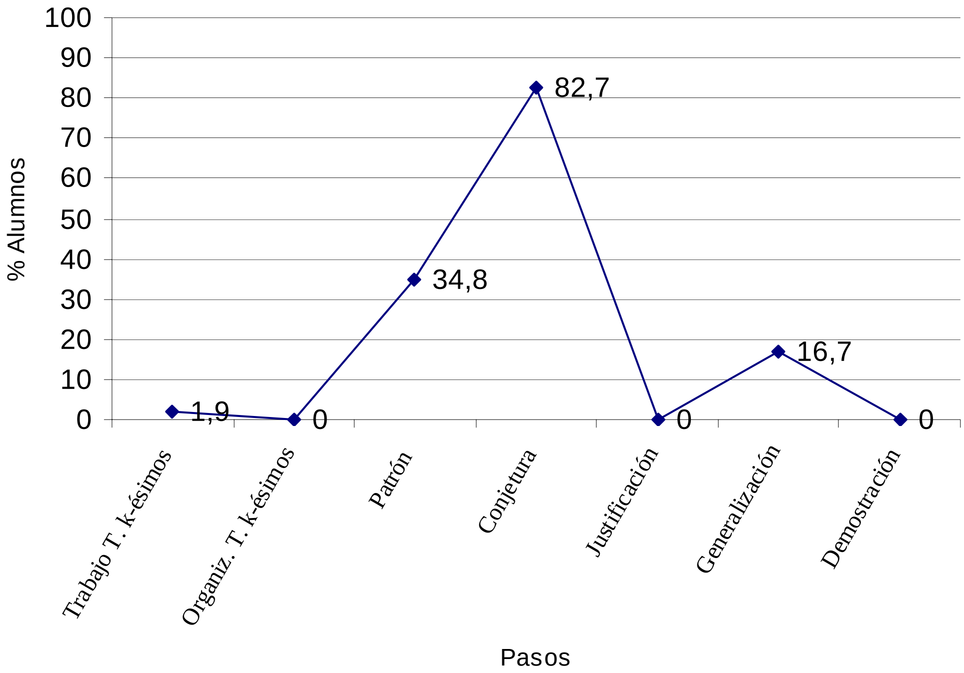


Figura 6 - 11. Gráfico-resumen de Pasos de Razonamiento Inductivo en Problema 3

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

El 2,0% de los alumnos que responden al Problema 3, trabajan con términos k-ésimos de la progresión (ver Tabla 6 - 53).

Ningún estudiante organiza los términos k-ésimos de la progresión implícita del Problema 3. Por tanto se trata de una variable constante igual a cero y no tiene sentido calcular ninguna tabla de contingencia que la considere (ver Anexo F).

Patrón

Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón

El 40% de los alumnos que responden al problema, identifican un patrón (ver Tabla 6 - 53). Como también se deduce de la Tabla 6 - 53, un 85,7% de los estudiantes que trabajan con términos k-ésimos, llegan a detectar un patrón.

Tabla 6 - 53. Tabla de contingencia Problema 3_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	181	119	300
		% de Trabajo T. k-ésimos	60,3%	39,7%	100,0%
		% de Patrón	99,5%	95,2%	97,7%
		% del total	59,0%	38,8%	97,7%
	1	Frecuencia absoluta	1	6	7
		% de Trabajo T. k-ésimos	14,3%	85,7%	100,0%
		% de Patrón	,5%	4,8%	2,3%
		% del total	,3%	2,0%	2,3%
Total		Frecuencia absoluta	182	125	307
		% de Trabajo T. k-ésimos	59,3%	40,7%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	59,3%	40,7%	100,0%

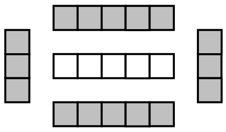
En el gráfico de la Figura 6 - 11 se observa un aumento significativo en el número de alumnos que identifican un patrón en relación con el número de alumnos que trabajan con términos k-ésimos de la progresión o que los organizan. De la Tabla 6 - 53 se deduce que el 4,8% de los alumnos que identifican un patrón, han trabajado con términos k-ésimos.

El contraste Chi-cuadrado de independencia estadística indica una dependencia significativa de la identificación de patrón con respecto al trabajo con los términos k-ésimos de la progresión (p-valor = 0,039 y Gamma asociada = 0,802) (ver Anexo F).

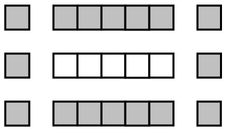
Tipo de patrón

La mayoría de los alumnos que identifican un patrón, descomponen el número de baldosas grises (16) que necesitan en función del número de baldosas blancas (5). Mostramos el desarrollo numérico del número 16 que han utilizado los alumnos y el patrón geométrico correspondiente que han observado a partir del término k-ésimo que aparece en el enunciado. En algunos casos, como se describirá en la segunda fase de nuestro análisis interpretativo, han acompañado sus cálculos con la representación gráfica y, en otros, no ha sido así:

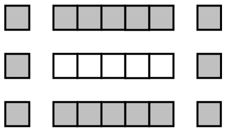
1) 5 x 2 + 6... 1320 x 2 + 6



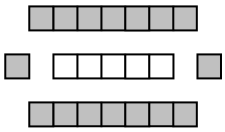
2) 5 + 5 + 1 + 1 + 4... 1320 + 1320 + 1 + 1 + 4



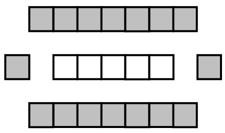
3) 5 x 2 + 2 + 4... 1320 x 2 + 2 + 4



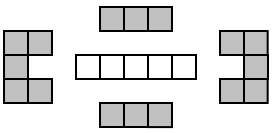
4) 7 + 7 + 1 + 1... 1322 + 1322 + 1 + 1



5) 7 x 2 + 2... 1322 x 2 + 2



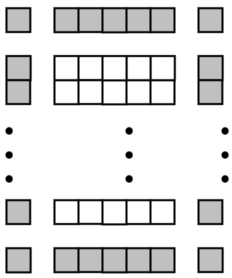
6) 3 x 2 + 10... 1318 x 2 + 10



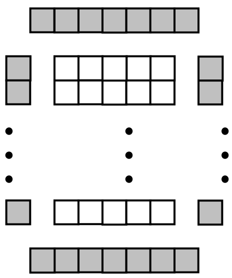
Estos seis patrones son equivalentes y expresan el número de baldosas grises en función del número de baldosas que se pongan en fila. Cada una de estas formas de descomponer el número 16 refleja un modo de visualizar un patrón a partir de la representación gráfica que planteamos en el enunciado. Se puede observar que la representación gráfica de los patrones 2 y 3; y 4 y 5 son iguales respectivamente, aunque sus expresiones desarrolladas numéricamente sean diferentes. El sistema de representación gráfico en el que aparece un término k-ésimo en el enunciado permite a los alumnos representar gráficamente el patrón o traducir este patrón al sistema de representación numérico.

Se han identificado otros dos patrones que responden a la expresión del número de baldosas grises en función del número de filas de baldosas blancas que se formen, teniendo en cuenta que en cada fila de baldosas blancas debe haber cinco. En este caso, como se preguntaba por el número de baldosas grises necesarias si se tuvieran 1320 blancas, los alumnos distribuyeron las baldosas blancas en 264 filas de cinco baldosas blancas cada una y rodearon las baldosas blancas con baldosas grises. El número de baldosas lo descomponen, tanto gráficamente como en su desarrollo numérico, de dos formas diferentes, a saber:

7) 264 + 264 + 5 + 5 + 4



8) 264 + 264 + 7 + 7



Otros patrones que han identificado algunos alumnos son expresados solo numéricamente a partir de los números que aparecen involucrados en el caso que se muestra en el enunciado y lo extrapolan para el caso de las 1320 baldosas.

9) 1320 x 2

10) 1320 x 5

11) 1320 x 16

12) 1320 + 3

13) 1323 + 3

14) 1326 + 10

Patrones adecuados

Atendiendo a la resolución del Problema 3 (ver Anexo C), los patrones 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se consideran válidos. Además, hemos considerado válidos los patrones 7 y 8 porque se corresponden con otra posible interpretación del enunciado.

El resto de los patrones identificados en el epígrafe anterior, se han considerado no adecuados para este problema.

Los primeros seis patrones han sido los detectados por la mayoría de los alumnos que han identificado alguna regularidad en la construcción de las baldosas ya que los patrones 7 y 8 han sido identificados únicamente en dos respuestas al Problema 3.

Como se observa en la Tabla 6 - 54, el 32,2% de los alumnos que responden al problema, han identificado un patrón adecuado (uno de los patrones del 1 al 8, mencionados anteriormente).

Tabla 6 - 54. Tabla de contingencia Problema 3_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	182	0	182
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	87,5%	,0%	59,3%
		% del total	59,3%	,0%	59,3%
	1	Frecuencia absoluta	26	99	125
		% de Patrón	20,8%	79,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	12,5%	100,0%	40,7%
		% del total	8,5%	32,2%	40,7%
Total		Frecuencia absoluta	208	99	307
		% de Patrón	67,8%	32,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	67,8%	32,2%	100,0%

La Tabla 6 - 54 recoge que el 79,2% de los alumnos que han detectado un patrón, han identificado un patrón adecuado. Por tanto, son el 20,8% de los alumnos que han detectado un patrón, los que lo hacen de una manera no adecuada.

El 85,7% de los alumnos que trabajan con términos k-ésimos, identifican un patrón adecuado, como se puede observar en la Tabla 6 - 55.

Tabla 6 - 55. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	207	93	300
		% de Trabajo T. k-ésimos	69,0%	31,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	99,5%	93,9%	97,7%
		% del total	67,4%	30,3%	97,7%
	1	Frecuencia absoluta	1	6	7
		% de Trabajo T. k-ésimos	14,3%	85,7%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	,5%	6,1%	2,3%
		% del total	,3%	2,0%	2,3%
Total		Frecuencia absoluta	208	99	307
		% de Trabajo T. k-ésimos	67,8%	32,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	67,8%	32,2%	100,0%

El p-valor (0,008) y la Gamma asociada (0,861) a la tabla de contingencia indican que la identificación de un patrón adecuado tiene una fuerte dependencia del trabajo con los términos k-ésimos (ver Anexo F).

Relación de recurrencia

Ningún estudiante identifica la relación recurrente en el Problema 3.

Formulación de Conjeturas

El aumento que se produce en el número de alumnos que identifican un patrón después del trabajo y la organización de los términos k-ésimos se mantiene hasta la formulación de conjeturas, que la hacen un 82,7% del total de los sujetos (ver Figura 6 - 11). Sólo un 2,8% de los estudiantes que responden, no llegan a la formulación de una conjetura.

En el contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (p-valor = 0,006 y Gamma = -0,872), se observa que existe una dependencia entre la formulación de conjetura y el trabajo con términos k-ésimos en el sentido de que hay un número significativo de alumnos que no trabajan con términos k-ésimos y sí llegan a formular conjetura. Sin embargo, el p-valor correspondiente (0,304) indica que la formulación de conjeturas es independiente de la identificación de un patrón.

Justificación de Conjeturas

Los alumnos no justifican sus conjeturas en ningún caso basándose en nuevos términos k-ésimos distintos al presentado en el enunciado del problema. Por lo tanto, no vamos a realizar las tablas de contingencia que impliquen este paso del razonamiento inductivo.

Expresión de la Generalización

El 19,5% de los alumnos que responden al Problema 3, llegan a la generalización, tal y como se deduce de la Tabla 6 - 56.

Tabla 6 - 56. Tabla de contingencia Problema 3_Trabajo T. k-ésimos-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	245	55	300
		% de Trabajo T. k-ésimos	81,7%	18,3%	100,0%
		% de Generalización	99,2%	91,7%	97,7%
		% del total	79,8%	17,9%	97,7%
	1	Frecuencia absoluta	2	5	7
		% de Trabajo T. k-ésimos	28,6%	71,4%	100,0%
		% de Generalización	,8%	8,3%	2,3%
		% del total	,7%	1,6%	2,3%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Trabajo T. k-ésimos	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

En la Tabla 6 - 56 se recoge que el 8,3% de los sujetos que generalizan han trabajado previamente con términos k-ésimos. El p-valor asociado al contraste de independencia estadística (0,000) y la Gamma asociada (0,835) indican que existe una dependencia significativa de la generalización con respecto al trabajo con términos k-ésimos (ver Anexo F).

Todos los alumnos que llegan a la generalización, previamente han identificado un patrón, como se observa en la Tabla 6 - 57.

Tabla 6 - 57. Tabla de contingencia Problema 3_Patrón-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	182	0	182
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización	73,7%	,0%	59,3%
		% del total	59,3%	,0%	59,3%
	1	Frecuencia absoluta	65	60	125
		% de Patrón	52,0%	48,0%	100,0%
		% de Generalización	26,3%	100,0%	40,7%
		% del total	21,2%	19,5%	40,7%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste de Chi-cuadrado de independencia estadística con un nivel de significación del 95% (0,000) indica que la generalización depende de la identificación de un patrón. Además, tal y como indica la Gamma asociada (1,000), se trata de una dependencia significativa en el sentido de que los alumnos que no han identificado un patrón, no llegan a expresar la generalización (ver Anexo F).

La mayoría de los estudiantes que identifican un patrón, se trata de un patrón adecuado ya que, como se observa en la Tabla 6 - 58, el 85,0% de los alumnos que generalizan, han detectado previamente un patrón adecuado para el Problema 3.

Tabla 6 - 58. Tabla de contingencia Problema 3_Patrón Adecuado-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	199	9	208
		% de Patrón Adecuado	95,7%	4,3%	100,0%
		% de Generalización	80,6%	15,0%	67,8%
		% del total	64,8%	2,9%	67,8%
	1	Frecuencia absoluta	48	51	99
		% de Patrón Adecuado	48,5%	51,5%	100,0%
		% de Generalización	19,4%	85,0%	32,2%
		% del total	15,6%	16,6%	32,2%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón Adecuado	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia indica que la expresión de la generalización es independiente de la formulación de la conjetura para el problema propuesto (p-valor = 0,713 > 0,05) (ver Anexo F)..

Generalización algebraica

El 1,0% de los estudiantes que responden al Problema 3, generalizan algebraicamente. Estos estudiantes representan un 5,0% de los alumnos que generalizan (ver Tabla 6 - 59).

Tabla 6 - 59. Tabla de contingencia Problema 3_Generalización-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Generalización	0	Frecuencia absoluta	247	0	247
		% de Generalización	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	81,3%	,0%	80,5%
		% del total	80,5%	,0%	80,5%
	1	Frecuencia absoluta	57	3	60
		% de Generalización	95,0%	5,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	18,8%	100,0%	19,5%
		% del total	18,6%	1,0%	19,5%
Total		Frecuencia absoluta	304	3	307
		% de Generalización	99,0%	1,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,0%	1,0%	100,0%

Por consiguiente, el 95% de los alumnos que generalizan, utilizan el sistema de representación verbal para expresarla, conformando así la forma predominante de expresar la generalización mayoritaria en este problema.

Todos los estudiantes que han expresado algebraicamente la generalización, han identificado previamente un patrón adecuado a este problema, tal y como se deduce de la Tabla 6 - 60.

Tabla 6 - 60. Tabla de contingencia Problema 3_Patrón Adecuado-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	208	0	208
		% de Patrón Adecuado	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	68,4%	,0%	67,8%
		% del total	67,8%	,0%	67,8%
	1	Frecuencia absoluta	96	3	99
		% de Patrón Adecuado	97,0%	3,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	31,6%	100,0%	32,2%
		% del total	31,3%	1,0%	32,2%
Total		Frecuencia absoluta	304	3	307
		% de Patrón Adecuado	99,0%	1,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,0%	1,0%	100,0%

La expresión algebraica de la generalización, tal y como indican los p-valores correspondientes (ver Tabla 6 - 61), es independiente de los pasos previos del razonamiento inductivo que utilizan los estudiantes (trabajo con términos k-ésimos, patrón y formulación de conjetura).

Tabla 6 - 61. P-valores asociadas a las tablas de contingencia con Justificación

p-valores	Generalización Alg.
Trabajo T. k-ésimos	1,000
Patrón	0,131
Conjetura	1,000

Demostración

Ninguno de los sujetos que llegan a la generalización de la conjetura, hace una justificación formal de la misma.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 4

Representamos las frecuencias recogidas en la Figura 6 - 1 en el gráfico de la Figura 6 - 12. Este gráfico refleja las variaciones en el número de alumnos que realizan los diferentes pasos considerados para el razonamiento inductivo.

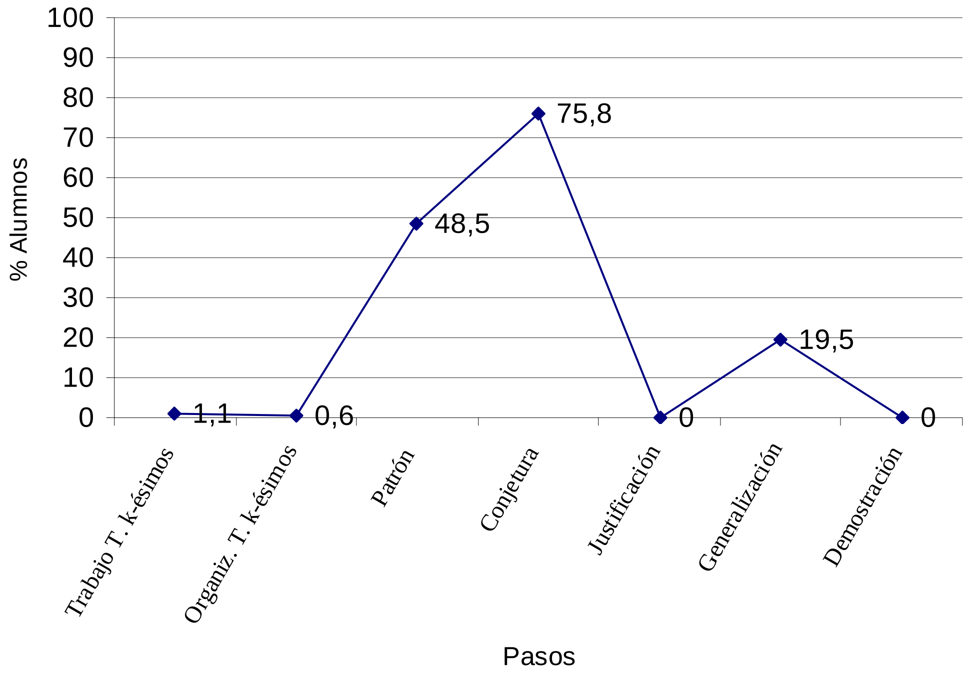


Figura 6 - 12. Gráfico-resumen de Pasos del Razonamiento Inductivo en Problema 4

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

En la Tabla 6 - 62, se observa que el 1,5% de los estudiantes que responden al Problema 4, trabajan con términos k-ésimos. La mitad de ellos, los organizan.

Tabla 6 - 62. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Organiz. T. k-ésimos

			Organiz. T. k-ésimos		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	270	0	270
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	99,3%	,0%	98,5%
		% del total	98,5%	,0%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	2	2	4
		% de Trabajo T. k-ésimos	50,0%	50,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	,7%	100,0%	1,5%
		% del total	,7%	,7%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	272	2	274
		% de Trabajo T. k-ésimos	99,3%	,7%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,3%	,7%	100,0%

Según indica el análisis de independencia estadística (ver Anexo F), la organización de los términos k-ésimos depende significativamente del trabajo con los mismos (p-valor = 0,000 y Gamma = 1,000).

Patrón

Como se observan en la Tabla 6 - 63, un 63,5,5% de los alumnos que responden al problema, identifican un patrón.

Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón

Destacamos el 98,3% de los estudiantes que han detectado un patrón sin haber trabajado con términos k-ésimos.

Tabla 6 - 63. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	99	171	270
		% de Trabajo T. k-ésimos	36,7%	63,3%	100,0%
		% de Patrón	99,0%	98,3%	98,5%
		% del total	36,1%	62,4%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	1	3	4
		% de Trabajo T. k-ésimos	25,0%	75,0%	100,0%
		% de Patrón	1,0%	1,7%	1,5%
		% del total	,4%	1,1%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	100	174	274
		% de Trabajo T. k-ésimos	36,5%	63,5%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	36,5%	63,5%	100,0%

Tal y como muestra el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (0,630), la identificación de patrón es independiente del trabajo con términos k-ésimos (ver Anexo F).

Organización de Términos k-ésimos y Patrón

El escaso número de alumnos que trabajan con términos k-ésimos hace que también sea reducido el número de estudiantes que los organizan, como recogemos en la Tabla 6 - 64.

Tabla 6 - 64. Tabla de contingencia Problema 4_Organiz. T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	99	173	272
		% de Organiz. T. k-ésimos	36,4%	63,6%	100,0%
		% de Patrón	99,0%	99,4%	99,3%
		% del total	36,1%	63,1%	99,3%
	1	Frecuencia absoluta	1	1	2
		% de Organiz. T. k-ésimos	50,0%	50,0%	100,0%
		% de Patrón	1,0%	,6%	,7%
		% del total	,4%	,4%	,7%
Total		Frecuencia absoluta	100	174	274
		% de Organiz. T. k-ésimos	36,5%	63,5%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	36,5%	63,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (1,000) para estos dos pasos del razonamiento inductivo indica la independencia entre ellos (ver Anexo F).

<u>Tipo de patrón</u>

Las expresiones que los alumnos utilizan, que reflejan los patrones que han identificado, son las que mostramos a continuación. Aparecen las expresiones correspondientes al número de partidos que se deben jugar cuando haya 22 equipos, análogamente calculan el número de partidos que jugarán 230 equipos.

1) 22 x (22 – 1) = 462 partidos

2) 22 x 2 = 44 partidos

3) 22 : 2 = 11 partidos

4) 22 partidos

5) 22 x 2 – 1 = 41 partidos

Únicamente el primero de los patrones identificados es válido para el Problema 4, tal y como se puede comprobar en la resolución de la prueba (ver Anexo C).

Patrones adecuados

Pese al elevado número de alumnos que detectan un patrón en el Problema 4, el 97,7% de los estudiantes que identifican un patrón, se refieren a un patrón no adecuado al Problema 4, como se deduce de la Tabla 6 - 65.

Tabla 6 - 65. Tabla de contingencia Problema 4_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	100	0	100
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	37,0%	,0%	36,5%
		% del total	36,5%	,0%	36,5%
	1	Frecuencia absoluta	170	4	174
		% de Patrón	97,7%	2,3%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	63,0%	100,0%	63,5%
		% del total	62,0%	1,5%	63,5%
Total		Frecuencia absoluta	270	4	274
		% de Patrón	98,5%	1,5%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	98,5%	1,5%	100,0%

Los estudiantes que identifican un patrón adecuado en este problema representan un 1,5% de los alumnos que responden a él. Como se observa en la Tabla 6 - 65, únicamente el 2,3% de los alumnos que han detectado un patrón en este problema, han identificado un patrón adecuado.

Ninguno de los alumnos que trabajan con términos k-ésimos llegan a la detección de un patrón adecuado, tal y como se observa en la Tabla 6 - 66.

Tabla 6 - 66. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	266	4	270
		% de Trabajo T. k-ésimos	98,5%	1,5%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	98,5%	100,0%	98,5%
		% del total	97,1%	1,5%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	4	0	4
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	1,5%	,0%	1,5%
		% del total	1,5%	,0%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	270	4	274
		% de Trabajo T. k-ésimos	98,5%	1,5%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	98,5%	1,5%	100,0%

Los p-valores asociados a los contrastes Chi-cuadrado respectivos, indican la independencia entre la identificación de un patrón adecuado y el trabajo con términos k-ésimos de la progresión (p-valor = 1,000), así como la independencia entre la identificación de un patrón adecuado y la organización de los términos k-ésimos (p-valor = 1,000) (ver Anexo F).

Relación de recurrencia

Únicamente un alumno detecta una relación recurrente tras haber trabajado previamente con términos k-ésimos de la sucesión (ver Tabla 6 - 67). Este alumno responde al problema como si se tratara de una progresión aritmética de orden 1. Por consiguiente, ha considerado un patrón no adecuado al problema.

Tabla 6 - 67. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	270	0	270
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Recurrencia	98,9%	,0%	98,5%
		% del total	98,5%	,0%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	3	1	4
		% de Trabajo T. k-ésimos	75,0%	25,0%	100,0%
		% de Recurrencia	1,1%	100,0%	1,5%
		% del total	1,1%	,4%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	273	1	274
		% de Trabajo T. k-ésimos	99,6%	,4%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,6%	,4%	100,0%

El análisis de independencia estadística indica que existe una dependencia significativa de la recurrencia con respecto al trabajo con términos k-ésimos, en el sentido de que si los sujetos no trabajan con los términos k-ésimos, no identifican una relación de recurrencia (p-valor = 0,000 y Gamma = 1,000) (ver Anexo F).

Sin embargo, la identificación de la recurrencia, es independiente de la organización de los términos k-ésimos, ya que el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado es 1,000 (mayor que 0,05).

Formulación de Conjeturas

Como se observa en el gráfico-resumen de este problema (ver Figura 6 - 12), se produce un aumento significativo en el número de alumnos que formulan una conjetura en el Problema 4 en comparación con el número de estudiantes que han dado los pasos previos.

La formulación de conjeturas es independiente del trabajo con los términos k-ésimos, de la organización de los mismos y de la identificación de un patrón, como indican los p-valores asociados a los contrastes Chi-cuadrado de independencia estadística que resumimos en la Tabla 6 - 68 (las tablas de los análisis se pueden ver en el Anexo F).

Tabla 6 - 68. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Conjetura

p-valores	Conjetura
Trabajo T. k-ésimos	0,863
Organiz. T. k-ésimos	0,903
Patrón	0,735

Justificación de Conjeturas

No hay ningún alumno que justifique sus conjeturas en el Problema 4.

Expresión de la Generalización

El trabajo con términos k-ésimos tampoco parece influir en la expresión de la generalización, que la llevan a cabo el 25,5% de los alumnos que responden al problema, como se recoge en la Tabla 6 - 69.

Tabla 6 - 69. Tabla de contingencia Problema 4_Trabajo T. k-ésimos-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	202	68	270
		% de Términos k-ésimos	74,8%	25,2%	100,0%
		% de Generalización	99,0%	97,1%	98,5%
		% del total	73,7%	24,8%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	2	2	4
		% de Términos k-ésimos	50,0%	50,0%	100,0%
		% de Generalización	1,0%	2,9%	1,5%
		% del total	,7%	,7%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	204	70	274
		% de Términos k-ésimos	74,5%	25,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	74,5%	25,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (0,581) indica que la generalización es independiente del trabajo con términos k-ésimos (ver Anexo F).

De la Tabla 6 - 69 se deduce que el 97,1% de los alumnos que expresan una generalización, no han trabajado previamente con términos k-ésimos.

La expresión de la generalización es independiente de la organización de los términos k-ésimos de la progresión, como indica el p-valor asociado al contraste de independencia (0,986), correspondiente al que mostramos en el Anexo F.

Por otro lado, la expresión de la generalización depende de una manera significativa de la identificación de un patrón previo, tal y como indica el análisis de independencia estadístico del Anexo F, cuyo p-valor asociado es 0,000 y la Gamma es 1,000. Esta dependencia se da en el sentido de que si no se llega a la identificación de un patrón, no se llega a expresar la generalización.

Un dato significativo en la resolución del Problema 4 es que ningún alumno de los que ha generalizado, ha identificado un patrón adecuado (ver Tabla 6 - 70).

Tabla 6 - 70. Tabla de contingencia Problema 4_Patrón Adecuado-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	200	70	270
		% de Patrón Adecuado	74,1%	25,9%	100,0%
		% de Generalización	98,0%	100,0%	98,5%
		% del total	73,0%	25,5%	98,5%
	1	Frecuencia absoluta	4	0	4
		% de Patrón Adecuado	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización	2,0%	,0%	1,5%
		% del total	1,5%	,0%	1,5%
Total		Frecuencia absoluta	204	70	274
		% de Patrón Adecuado	74,5%	25,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	74,5%	25,5%	100,0%

En este problema hay un único alumno de los que generalizan que ha identificado una relación recurrente, tal y como se observa en la Tabla 6 - 71.

Tabla 6 - 71. Tabla de contingencia Problema 4_Recurrencia-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	204	69	273
		% de Recurrencia	74,7%	25,3%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	98,6%	99,6%
		% del total	74,5%	25,2%	99,6%
	1	Frecuencia absoluta	0	1	1
		% de Recurrencia	,0%	100,0%	100,0%
		% de Generalización	,0%	1,4%	,4%
		% del total	,0%	,4%	,4%
Total		Frecuencia absoluta	204	70	274
		% de Recurrencia	74,5%	25,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	74,5%	25,5%	100,0%

Según el análisis de independencia llevado a cabo de la generalización es independiente de la formulación de conjeturas (p-valor = 0,108), tal y como se deduce del análisis presentado en el Anexo F.

Generalización algebraica

Sólo un alumno generaliza algebraicamente. Este alumno expresa la generalización mediante la fórmula correspondiente a una progresión aritmética tras identificar una relación recurrente, uno de los patrones no adecuados que se han identificado en el trabajo que llevan a cabo los alumnos en este problema.

Demostración

Ningún alumno demuestra sus conjeturas para el caso general.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 5

En el gráfico de la Figura 6 - 13 recogemos los porcentajes de los alumnos que responden al Problema 5 y que realizan cada uno de los pasos del razonamiento inductivo considerados (estas frecuencias se presentaron en la Tabla 6 - 1).

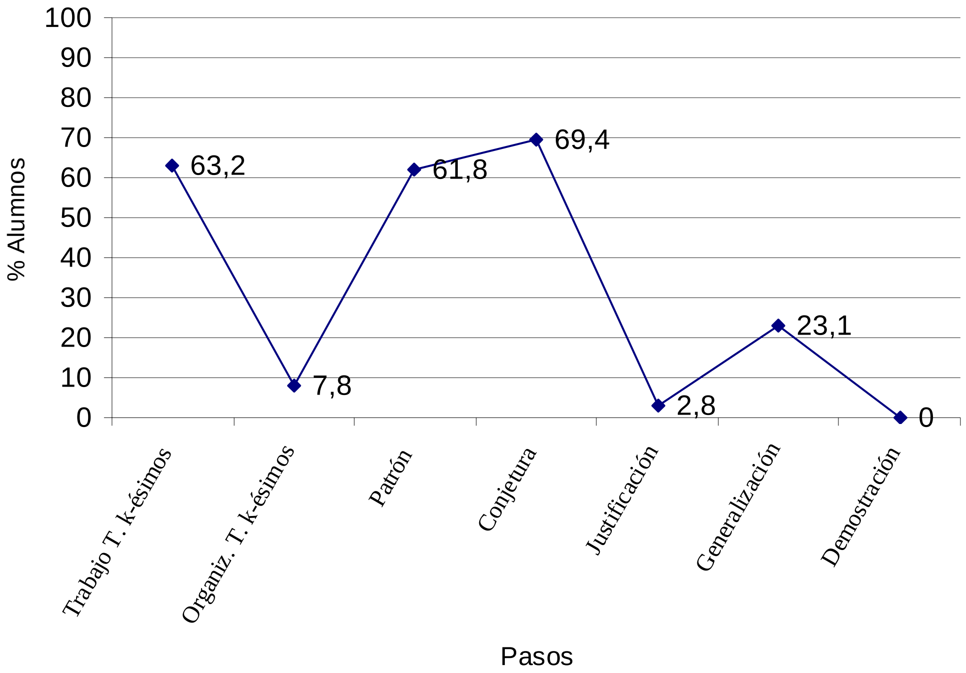


Figura 6 - 13. Gráfico-resumen de Pasos del Razonamiento Inductivo en Problema 5

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

Como se deduce de la Tabla 6 - 72, el 82,5% de los alumnos que responden al Problema 5, han trabajado con términos k-ésimos de la progresión. El 12,3% de ellos, llegan a su organización.

Tabla 6 - 72. Tabla de contingencia Problema 5_Trabajo T. k-ésimos-Organiz. T. k-ésimos

			Organiz. T. k-ésimos		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	48	0	48
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	19,4%	,0%	17,5%
		% del total	17,5%	,0%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	199	28	227
		% de Trabajo T. k-ésimos	87,7%	12,3%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	80,6%	100,0%	82,5%
		% del total	72,4%	10,2%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	247	28	275
		% de Trabajo T. k-ésimos	89,8%	10,2%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	89,8%	10,2%	100,0%

El p-valor (0,021) asociado a la tabla de contingencia y la Gamma (1,000) indican que existe una dependencia significativa de la organización de los términos k-ésimos del trabajo con los mismos. Esta relación se ve reforzada por el hecho de que si un estudiante no trabaja con términos k-ésimos, no llega a la organización de los mismos.

Patrón

El patrón es identificado por el 80,7% de los alumnos que responden al Problema 5 (ver Tabla 6 - 73).

Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón

En la Tabla 6 - 73 recogemos los datos relativos a este paso del razonamiento inductivo, junto con los datos relativos a la identificación de un patrón.

Tabla 6 - 73. Tabla de contingencia Problema 5_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	38	10	48
		% de Trabajo T. k-ésimos	79,2%	20,8%	100,0%
		% de Patrón	71,7%	4,5%	17,5%
		% del total	13,8%	3,6%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	15	212	227
		% de Trabajo T. k-ésimos	6,6%	93,4%	100,0%
		% de Patrón	28,3%	95,5%	82,5%
		% del total	5,5%	77,1%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	53	222	275
		% de Trabajo T. k-ésimos	19,3%	80,7%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	19,3%	80,7%	100,0%

De la Tabla 6 - 73 se deduce que el 93,4% de los estudiantes que trabajan con términos k-ésimos llegan a identificar un patrón. Por otro lado, el 95,5% de los que han identificado un patrón, han trabajado previamente con términos k-ésimos. Según indica el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (0,000) y la medida Gamma de asociación para tablas de contingencia (0,963), existe una dependencia significativa de la identificación de patrón con respecto al trabajo de los términos k-ésimos en el Problema 5 (ver Anexo F).

Organización de Términos k-ésimos y Patrón

En la Figura 6 - 13 se ha puesto de manifiesto la disminución en el número de alumnos que, trabajando con términos k-ésimos, los organizan de alguna manera significativa para ellos. En la Tabla 6 - 74 se recogen los datos relativos a la organización de los términos k-ésimos a y la identificación de un patrón.

Tabla 6 - 74. Tabla de contingencia Problema 5_Organiz. T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	53	194	247
		% de Organiz. T. k-ésimos	21,5%	78,5%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	87,4%	89,8%
		% del total	19,3%	70,5%	89,8%
	1	Frecuencia absoluta	0	28	28
		% de Organiz. T. k-ésimos	,0%	100,0%	100,0%
		% de Patrón	,0%	12,6%	10,2%
		% del total	,0%	10,2%	10,2%
Total		Frecuencia absoluta	53	222	275
		% de Organiz. T. k-ésimos	19,3%	80,7%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	19,3%	80,7%	100,0%

En la Tabla 6 - 74 se observa que, por un lado, todos los alumnos que han organizado los términos k-ésimos, han llegado a identificar un patrón. Sin embargo, también hay un 21,5% de los alumnos que identifican un patrón y no han organizado previamente los términos k-ésimos de la progresión. El análisis de independencia estadística basado en el contraste Chi-cuadrado (p-valor = 0,013 y Gamma = 1,000) indica una dependencia significativa de la identificación de patrón con respecto a la organización de términos k-ésimos (ver Anexo F).

Tipo de patrón

Todos los sujetos que han trabajado con términos k-ésimos no lo han hecho de la misma manera. En ocasiones, en las respuestas de estos alumnos no se observa de manera explícita el trabajo con los términos k-ésimos, aunque la forma de expresar los cálculos pone de manifiesto que los alumnos los han manipulado, ya que hacen referencia a la diferencia constante entre dos términos consecutivos. Los cálculos que mostramos a continuación responden a los patrones que los sujetos han considerado para realizar la tarea de extrapolación:

1) 234 x 3

2)234 x 3 + 1

3) 234 / 3

4) 234 x 3 + 234

5) (234 x 3) / 2

6) 234 x 3 – 2

Patrones adecuados

El sexto patrón es el único que corresponde a un patrón adecuado para este problema, tal y como se observa en la resolución del Problema 5 (ver Anexo C). El resto son responden a patrones no adecuados. En la Tabla 6 - 75 se recoge que el 68% de los alumnos que responden al Problema 5, han identificado el patrón adecuado. Otro dato significativo es que el 84,2% de los patrones que identifican los alumnos, son adecuados.

Tabla 6 - 75. Tabla de contingencia Problema 5_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	53	0	53
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	60,2%	,0%	19,3%
		% del total	19,3%	,0%	19,3%
	1	Frecuencia absoluta	35	187	222
		% de Patrón	15,8%	84,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	39,8%	100,0%	80,7%
		% del total	12,7%	68,0%	80,7%
Total		Frecuencia absoluta	88	187	275
		% de Patrón	32,0%	68,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	32,0%	68,0%	100,0%

El elevado número de estudiantes que identifican un patrón adecuado, hace que nos interesemos por la relación de éste con pasos anteriores del razonamiento inductivo. En la Tabla 6 - 76 se observa que el 97,3% de los estudiantes que identifican un patrón adecuado, trabajan con términos k-ésimos de la progresión. Además, el 80,2% de los alumnos que trabajan con términos k-ésimos, han identificado un patrón adecuado.

Tabla 6 - 76. Tabla de contingencia Problema 5_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	43	5	48
		% de Trabajo T. k-ésimos	89,6%	10,4%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	48,9%	2,7%	17,5%
		% del total	15,6%	1,8%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	45	182	227
		% de Trabajo T. k-ésimos	19,8%	80,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	51,1%	97,3%	82,5%
		% del total	16,4%	66,2%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	88	187	275
		% de Trabajo T. k-ésimos	32,0%	68,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	32,0%	68,0%	100,0%

El análisis de (in)dependencia basado en la Chi-cuadrado sobre la Tabla 6 - 76 (p-valor = 0,000, Gamma = 0,944) indica que la identificación del patrón adecuado depende significativamente del trabajo con términos k-ésimos (ver Anexo F).

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (0,011) y la Gamma asociada (0,628), indican que la identificación de un patrón adecuado depende de la organización de los términos k-ésimos (ver Anexo F).

Relación de recurrencia

El 52,7% de los alumnos que responden al problema, han identificado un patrón recurrente (ver Tabla 6 - 77). Un dato destacado es que el 65,3% de los alumnos que identifican un patrón, lo han detectado de una forma recurrente.

Tabla 6 - 77. Tabla de contingencia Problema 5_Patrón-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	53	0	53
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Recurrencia	40,8%	,0%	19,3%
		% del total	19,3%	,0%	19,3%
	1	Frecuencia absoluta	77	145	222
		% de Patrón	34,7%	65,3%	100,0%
		% de Recurrencia	59,2%	100,0%	80,7%
		% del total	28,0%	52,7%	80,7%
Total		Frecuencia absoluta	130	145	275
		% de Patrón	47,3%	52,7%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	47,3%	52,7%	100,0%

El alto número de estudiantes que identifican una relación recurrente, hace que nos interesemos por la relación entre ésta y los pasos anteriores del razonamiento inductivo. El p-valor (0,000) y la Gamma de asociación para tablas de contingencia (0,895) indican la dependencia significativa de la identificación de la relación recurrente con respecto al trabajo con términos k-ésimos de la progresión (ver Anexo F).

Por otro lado, el p-valor correspondiente a la tabla de contingencia de la relación recurrente y la organización de términos k-ésimos (0,91) indica que independencia entre ambos (ver Anexo F).

Como se observa en la Tabla 6 - 78, los patrones recurrentes son adecuados en un 93,1% de los casos.

Tabla 6 - 78. Tabla de contingencia Problema 5_Patrón Adecuado-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	78	10	88
		% de Patrón Adecuado	88,6%	11,4%	100,0%
		% de Recurrencia	60,0%	6,9%	32,0%
		% del total	28,4%	3,6%	32,0%
	1	Frecuencia absoluta	52	135	187
		% de Patrón Adecuado	27,8%	72,2%	100,0%
		% de Recurrencia	40,0%	93,1%	68,0%
		% del total	18,9%	49,1%	68,0%
Total		Frecuencia absoluta	130	145	275
		% de Patrón Adecuado	47,3%	52,7%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	47,3%	52,7%	100,0%

Formulación de Conjeturas

El 90,5% de los alumnos que responden a este problema, han formulado una conjetura (ver Tabla 6 - 80).

Tal y como se observa en la Figura 6 - 13, la diferencia entre el número de alumnos que responden al problema y los que formulan una conjetura es de un 7,2% de los sujetos de la muestra.

La formulación de conjeturas es independiente del trabajo con términos k-ésimos y de la identificación de un patrón ya que los p-valores asociados son claramente mayores que 0,05 (ver Tabla 6 - 79). Sin embargo, no es clara la (in)dependencia de la formulación de conjeturas con respecto a la organización de los términos k-ésimos de la progresión.

Tabla 6 - 79. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Conjetura

p-valores	Conjetura
Trabajo T. k-ésimos	1,000
Organiz. T. k-ésimos	0,052
Patrón	0,995

Justificación de Conjeturas

Como se recoge en la Tabla 6 - 80, el 3,6% de los alumnos que responden, llegan a justificar sus conjeturas basándose en términos k-ésimos de la progresión.

Tabla 6 - 80. Tabla de contingencia Problema 2_Conjetura-Justificación

			Justificación		
			0	1	Total
Conjetura	0	Frecuencia absoluta	26	0	26
		% de Conjetura	100,0%	,0%	100,0%
		% de Justificación	9,8%	,0%	9,5%
		% del total	9,5%	,0%	9,5%
	1	Frecuencia absoluta	239	10	249
		% de Conjetura	96,0%	4,0%	100,0%
		% de Justificación	90,2%	100,0%	90,5%
		% del total	86,9%	3,6%	90,5%
Total		Frecuencia absoluta	265	10	275
		% de Conjetura	96,4%	3,6%	100,0%
		% de Justificación	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	96,4%	3,6%	100,0%

La justificación de conjeturas, tal y como muestran los p-valores asociados a los contrastes de hipótesis de independencia correspondientes (ver Tabla 6 - 81), es independiente del trabajo con los términos k-ésimos, de la identificación del patrón y de la formulación de conjeturas.

Tabla 6 - 81. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Justificazción

p-valores	Justificación
Trabajo T. k-ésimos	0,291
Organiz. T. k-ésimos	0,000
Patrón	0,244
Conjetura	0,624

Sin embargo, la justificación de conjeturas, depende de la organización de los términos k-ésimos, como indican su p-valor (0,000) y la Gamma asociada (0,826) (ver Anexo F).

Expresión de la Generalización

El 30,2% de los alumnos que responden a este problema, llegan a la generalización (ver Tabla 6 - 82).

Tabla 6 - 82. Tabla de contingencia Problema 5_Trabajo T. k-ésimos-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	42	6	48
		Trabajo T. k-ésimos	87,5%	12,5%	100,0%
		Generalización	21,9%	7,2%	17,5%
		% del total	15,3%	2,2%	17,5%
	1	Frecuencia absoluta	150	77	227
		Trabajo T. k-ésimos	66,1%	33,9%	100,0%
		Generalización	78,1%	92,8%	82,5%
		% del total	54,5%	28,0%	82,5%
Total		Frecuencia absoluta	192	83	275
		Trabajo T. k-ésimos	69,8%	30,2%	100,0%
		Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	69,8%	30,2%	100,0%

Destacamos que el 92,8% de los alumnos que han generalizado, han trabajado con términos k-ésimos, según se deduce en de la Tabla 6 - 82. El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado indica una dependencia (0,003) de la generalización con respecto al trabajo con los términos k-ésimos. La Gamma asociada (0,565) indica que esa dependencia no es fuerte (ver Anexo F).

La expresión de la generalización es independiente de la organización de los términos k-ésimos, como indica el p-valor (0,529) asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (ver Anexo F).

El 98,8% de los estudiantes que llegan a expresar la generalización, ponen de manifiesto la identificación de un patrón previamente (ver Tabla 6 - 83). Otro dato significativo es que el 36,9% de los alumnos que detectan un patrón, expresan la generalización.

Tabla 6 - 83. Tabla de contingencia Problema 5_Patrón -Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	52	1	53
		% de Patrón	98,1%	1,9%	100,0%
		% de Generalización	27,1%	1,2%	19,3%
		% del total	18,9%	,4%	19,3%
	1	Frecuencia absoluta	140	82	222
		% de Patrón	63,1%	36,9%	100,0%
		% de Generalización	72,9%	98,8%	80,7%
		% del total	50,9%	29,8%	80,7%
Total		Frecuencia absoluta	192	83	275
		% de Patrón	69,8%	30,2%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	69,8%	30,2%	100,0%

La generalización depende significativamente del patrón, tal y como indica el p-valor asociado a la tabla de contingencia (0,000) y la Gamma asociada (0,936) (ver Anexo F).

Dado el elevado número de alumnos que identifican un patrón adecuado y un patrón recurrente en la resolución del Problema 5, analizamos la relación entre éstos y la expresión de la generalización.

En cuanto a la relación recurrente, el 61,4% de los alumnos que generalizan, han detectado un patrón recurrente, como se deduce de la Tabla 6 - 84.

.

Tabla 6 - 84. Tabla de contingencia Problema 5_Recurrencia -Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	98	32	130
		% de Recurrencia	75,4%	24,6%	100,0%
		% de Generalización	51,0%	38,6%	47,3%
		% del total	35,6%	11,6%	47,3%
	1	Frecuencia absoluta	94	51	145
		% de Recurrencia	64,8%	35,2%	100,0%
		% de Generalización	49,0%	61,4%	52,7%
		% del total	34,2%	18,5%	52,7%
Total		Frecuencia absoluta	192	83	275
		% de Recurrencia	69,8%	30,2%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	69,8%	30,2%	100,0%

Según indican los contrastes de hipótesis de independencia correspondientes, la generalización depende levemente de la formulación de conjeturas que formulan los estudiantes (p-valor = 0,030 y Gamma = 0,568) y, tal y como indica el p-valor (0,298), la generalización es independiente de la justificación de las conjeturas que formulan (ver Anexo F).

Generalización algebraica

Teniendo en cuenta que generalizan 83 sujetos y que 57 de ellos lo hacen algebraicamente, el 68,9% de los alumnos que generalizan, expresan el término general mediante el sistema de representación algebraico.

El 82,5% de los alumnos que expresan algebraicamente la generalización, han identificado una relación recurrente (ver Tabla 6 - 85).

Tabla 6 - 85. Tabla de contingencia Problema 5_Recurrencia-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Recurrencia	0	Frecuencia absoluta	120	10	130
		% de Recurrencia	92,3%	7,7%	100,0%
		% de Generalización Alg.	55,0%	17,5%	47,3%
		% del total	43,6%	3,6%	47,3%
	1	Frecuencia absoluta	98	47	145
		% de Recurrencia	67,6%	32,4%	100,0%
		% de Generalización Alg.	45,0%	82,5%	52,7%
		% del total	35,6%	17,1%	52,7%
Total		Frecuencia absoluta	218	57	275
		% de Recurrencia	79,3%	20,7%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	79,3%	20,7%	100,0%

De la Tabla 6 - 85 se deduce que el 67,6% de los alumnos que identifican una relación de recurrencia no llegan a expresar algebraicamente la generalización. Por otro lado, el 82,5% de los estudiantes que han generalizado algebraicamente, han identificado una relación recurrente.

Sobre lo adecuado de los patrones identificados por los estudiantes que generalizan algebraicamente, el 87,8% de los alumnos que generalizan algebraicamente han identificado un patrón adecuado en este problema (ver Tabla 6 - 86).

Tabla 6 - 86. Tabla de contingencia Problema 5_Patrón Adecuado-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	81	7	88
		% de Patrón Adecuado	92,0%	8,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	37,2%	12,3%	32,0%
		% del total	29,5%	2,5%	32,0%
	1	Frecuencia absoluta	137	50	187
		% de Patrón Adecuado	73,3%	26,7%	100,0%
		% de Generalización Alg.	62,8%	87,7%	68,0%
		% del total	49,8%	18,2%	68,0%
Total		Frecuencia absoluta	218	57	275
		% de Patrón Adecuado	79,3%	20,7%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	79,3%	20,7%	100,0%

Según indican los p-valores asociados a los contrastes Chi-cuadrado de independencia estadística de la generalización algebraica respecto a los pasos previos del razonamiento inductivo (mayores que 0,05, ver Tabla 6 - 87), la generalización algebraica es independiente de la organización de los términos k-ésimos, de la formulación de conjeturas y de la justificación de ésta (análisis completo en Anexo F). La independencia respecto del trabajo con términos k-ésimos no es clara (p-valor próximo a 0,05) y es dependiente de la identificación de patrón, como indica el p-valor asociado (0,000) y la Gamma correspondiente (1,000).

Tabla 6 - 87. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Generalización Alg.

p-valores	Generalización Alg.
Trabajo T. k-ésimos	0,052
Organiz. T. k-ésimos	0,168
Patrón	0,000
Conjeteura	0,224
Justificación	0,649

Demostración

Ningún sujeto llega a la justificación formal de su conjetura para el caso general.

ANÁLISIS DE PASOS EN PROBLEMA 6

Recogemos en la Figura 6 - 14 recogemos los porcentajes de estudiantes que responden al Problema 6 y que realizan los diferentes pasos del razonamiento inductivo considerados (ver Tabla 6 - 1).

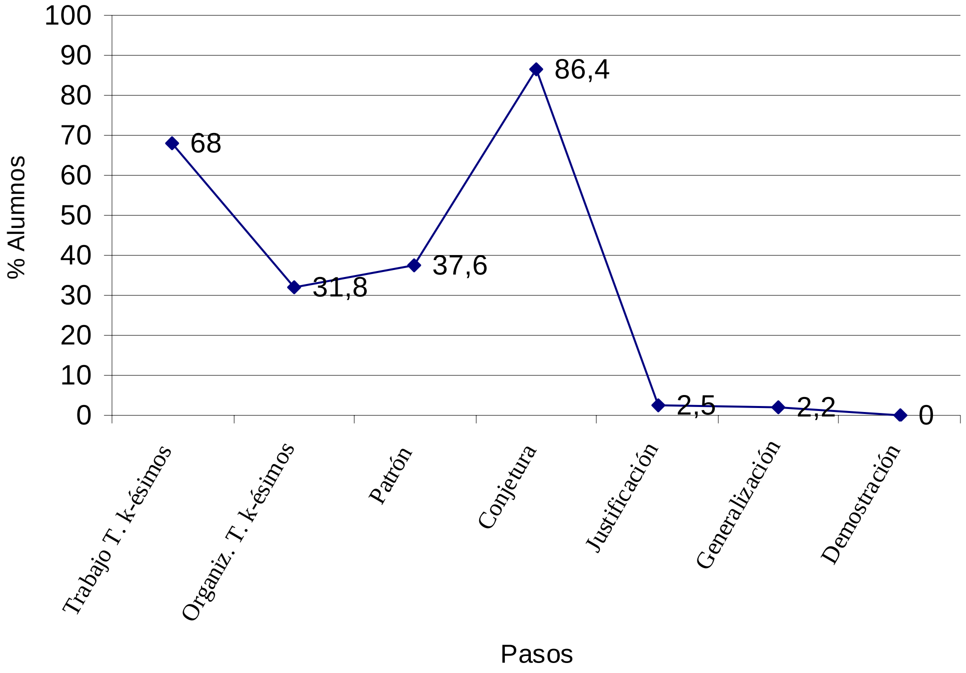


Figura 6 - 14. Gráfico-resumen de Pasos del Razonamiento Inductivo en Problema 6

Trabajo y Organización de Términos k-ésimos

El 75,5% de los estudiantes que responden al Problema 6, trabaja con términos k-ésimos de la progresión (ver Tabla 6 - 88). Otro dato destacado que se desprende de la tabla de contingencia del trabajo con términos k-ésimos y la organización es que el 46,7% de los estudiantes que trabajan con ellos, los organizan.

Tabla 6 - 88. Tabla de contingencia Problema 5_Trabajo T. k-ésimos-Organiz. T. k-ésimos

			Organiz. T. k-ésimos		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	79	0	79
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	37,8%	,0%	24,5%
		% del total	24,5%	,0%	24,5%
	1	Frecuencia absoluta	130	114	244
		% de Trabajo T. k-ésimos	53,3%	46,7%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	62,2%	100,0%	75,5%
		% del total	40,2%	35,3%	75,5%
Total		Frecuencia absoluta	209	114	323
		% de Trabajo T. k-ésimos	64,7%	35,3%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	64,7%	35,3%	100,0%

El análisis de independencia estadística basado en la Chi-cuadrado a partir de la Tabla 6 - 88 (p-valor = 0,000 y Gamma = 1,000) indica que la organización de los términos k-ésimos depende significativamente del trabajo con los mismos.

Patrón

Trabajo con Términos k-ésimos y Patrón

El 41,8% de los estudiantes que responden a este problema, identifican un patrón (ver Tabla 6 - 89). Como también se deduce de la Tabla 6 - 89, el 80,0% de los que identifican un patrón, trabajan con términos k-ésimos; y el 44,3% de los alumnos que trabajan con términos k-ésimos, llegan a detectar un patrón.

Tabla 6 - 89. Tabla de contingencia Problema 6_Trabajo T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	52	27	79
		% de Trabajo T. k-ésimos	65,8%	34,2%	100,0%
		% de Patrón	27,7%	20,0%	24,5%
		% del total	16,1%	8,4%	24,5%
	1	Frecuencia absoluta	136	108	244
		% de Trabajo T. k-ésimos	55,7%	44,3%	100,0%
		% de Patrón	72,3%	80,0%	75,5%
		% del total	42,1%	33,4%	75,5%
Total		Frecuencia absoluta	188	135	323
		% de Trabajo T. k-ésimos	58,2%	41,8%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	58,2%	41,8%	100,0%

El trabajo con los términos k-ésimos y la detección de un patrón en el Problema 6 son pasos del razonamiento inductivo independientes, según indica el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia estadística (p-valor = 0,114) (ver Anexo F).

Organización de Términos k-ésimos y Patrón

Como se deduce de la Tabla 6 - 90, el 68,4% de los estudiantes que organizan los términos k-ésimos, llegan a la identificación del patrón. También se observa que el 55,7% de los sujetos que identifican un patrón, organizan los términos k-ésimos de la progresión.

Tabla 6 - 90. Tabla de contingencia Problema 6_Organiz. T. k-ésimos-Patrón

			Patrón		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	147	62	209
		% de Organiz. T. k-ésimos	70,3%	29,7%	100,0%
		% de Patrón	80,3%	44,3%	64,7%
		% del total	45,5%	19,2%	64,7%
	1	Frecuencia absoluta	36	78	114
		% de Organiz. T. k-ésimos	31,6%	68,4%	100,0%
		% de Patrón	19,7%	55,7%	35,3%
		% del total	11,1%	24,1%	35,3%
Total		Frecuencia absoluta	183	140	323
		% de Organiz. T. k-ésimos	56,7%	43,3%	100,0%
		% de Patrón	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	56,7%	43,3%	100,0%

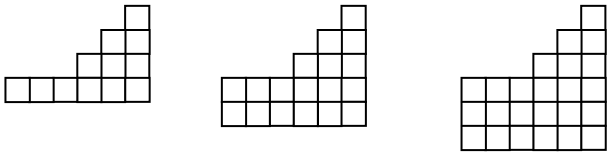
El análisis de independencia estadística entre estos dos pasos del razonamiento inductivo indica que existe una dependencia significativa del patrón respecto de la organización de los términos k-ésimos (p-valor = 0,000 y Gamma = 0,674) (ver Anexo F).

Patrones

<u>Tipo de patrón</u>

Los alumnos identifican diferentes patrones para el Problema 6, que son los que presentamos a continuación:

1. Identifican una secuencia numérica a partir de los términos k-ésimos que se muestran en el enunciado. Consideran que se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 4$ y $d = 8$.
2. Idem al caso anterior, con $a_1 = 6$ y $d = 2$.
3. Continúan la secuencia gráficamente de la siguiente forma:



4. Para la escalera de 4 pisos, se le suman 4 palillos a los palillos con los que habíamos construido la escalera de 3 pisos. Para la escalera de 5 pisos, se le suman 5 palillos al número de palillos utilizados para la escalera de 4 pisos y así sucesivamente.
5. Calculan el número de cuadros y lo multiplican por cuatro.
6. Detectan que la diferencia numérica entre dos términos consecutivos aumenta en dos unidades según avanza la secuencia.

Patrones adecuados

De los patrones detectados, el único que es válido es el último, tal y como se puede observar en la resolución del Problema 6 (ver Anexo C). Se puede comprobar que el resto de los patrones no son válidos para los términos k-ésimos que se muestran en el enunciado del Problema 6.

Los patrones 1, 2, 3 y 4 son detectados por cuatro de los estudiantes.

De la Tabla 6 - 91 se deduce que observa que el 34,3% de los alumnos que identifican un patrón, han identificado un patrón adecuado (patrón 6). Por lo tanto, un 65,7% de los alumnos que proponen un patrón para el Problema 6, detectan un patrón que no es adecuado.

Tabla 6 - 91. Tabla de contingencia Problema 6_Patrón-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	183	0	183
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	66,5%	,0%	56,7%
		% del total	56,7%	,0%	56,7%
	1	Frecuencia absoluta	92	48	140
		% de Patrón	65,7%	34,3%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	33,5%	100,0%	43,3%
		% del total	28,5%	14,9%	43,3%
Total		Frecuencia absoluta	275	48	323
		% de Patrón	85,1%	14,9%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	85,1%	14,9%	100,0%

Recogemos la información sobre los tipos de patrones que identifican los estudiantes en la Tabla 6 - 92.

Tabla 6 - 92. Frecuencias de los tipos de patrones en Problema 6

Patrón	Frecuencia
1	1
2	1
3	1
4	1
5	88
6	48
Total	140

Destacamos los 88 alumnos que identifican un patrón (no adecuado) en este problema. Estos alumnos representan un 62,9% de los alumnos que identifican un patrón.

Dado el elevado número de estudiantes que identifican un patrón no adecuado, nos interesamos por la relación entre este dato y el trabajo y la organización con los términos k-ésimos de la progresión.

Por otra parte, se observa que los alumnos que no han manipulado términos k-ésimos y detectan un patrón, identifican una regularidad que no es adecuada a este problema, como se deduce de la Tabla 6 - 93. En esta misma tabla de contingencia, se observa que no hay alumnos que hayan llegado a un patrón adecuado sin haber trabajado con términos k-ésimos previamente.

Tabla 6 - 93. Tabla de contingencia Problema 6_Trabajo T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	79	0	79
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	,0%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	28,7%	,0%	24,5%
		% del total	24,5%	,0%	24,5%
	1	Frecuencia absoluta	196	48	244
		% de Trabajo T. k-ésimos	80,3%	19,7%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	71,3%	100,0%	75,5%
		% del total	60,7%	14,9%	75,5%
Total		Frecuencia absoluta	275	48	323
		% de Trabajo T. k-ésimos	85,1%	14,9%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	85,1%	14,9%	100,0%

La identificación de un patrón adecuado presenta una dependencia significativa del trabajo con términos k-ésimos, según indican el p-valor asociado a la Tabla 6 - 93 (0,000) y la Gamma correspondiente (1,000) (ver Anexo F).

El 81,3% de los estudiantes que identifican un patrón adecuado, organizan los términos k-ésimos de la progresión con los que trabajan (ver Tabla 6 - 94). Por otro lado, como se deduce de la Tabla 6 - 94, el 34,2% de los estudiantes que organizan los términos k-ésimos, llegan a la identificación de un patrón adecuado.

Tabla 6 - 94. Tabla de contingencia Problema 6_Organiz. T. k-ésimos-Patrón Adecuado

			Patrón Adecuado		
			0	1	Total
Organiz. T. k-ésimos	0	Frecuencia observada	200	9	209
		% de Organiz. T. k-ésimos	95,7%	4,3%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	72,7%	18,8%	64,7%
		% del total	61,9%	2,8%	64,7%
	1	Frecuencia observada	75	39	114
		% de Organiz. T. k-ésimos	65,8%	34,2%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	27,3%	81,3%	35,3%
		% del total	23,2%	12,1%	35,3%
Total		Frecuencia observada	275	48	323
		% de Organiz. T. k-ésimos	85,1%	14,9%	100,0%
		% de Patrón Adecuado	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	85,1%	14,9%	100,0%

Según indica el contraste de independencia estadística (ver Anexo F), la identificación de un patrón adecuado depende de la organización de términos k-ésimos, ya que el p-valor es 0,000 y la Gamma asociada 0,841.

Relación de recurrencia

El 22,6% de los estudiantes que responden al Problema 6, identifican una relación recurrente (ver Tabla 6 - 95). Además, se deduce que el 84,9% de los estudiantes que identifican la recurrencia, han trabajado con términos k-ésimos y que el 25,4% de los que trabajan con términos k-ésimos, detectan una relación recurrente.

Tabla 6 - 95. Tabla de contingencia Problema 6_Trabajo T. k-ésimos –Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia observada	68	11	79
		% de Trabajo T. k-ésimos	86,1%	13,9%	100,0%
		% de Recurrencia	27,2%	15,1%	24,5%
		% del total	21,1%	3,4%	24,5%
	1	Frecuencia observada	182	62	244
		% de Trabajo T. k-ésimos	74,6%	25,4%	100,0%
		% de Recurrencia	72,8%	84,9%	75,5%
		% del total	56,3%	19,2%	75,5%
Total		Frecuencia observada	250	73	323
		% de Trabajo T. k-ésimos	77,4%	22,6%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	77,4%	22,6%	100,0%

El análisis de independencia estadística (ver Anexo F) indica que la identificación de una relación recurrente depende de una forma débil del trabajo con términos k-ésimos (p-valor = 0,034 y Gamma = 0,356) y de la organización de los mismos (p-valor = 0,000 y Gamma = 0,685).

El 52,1% de los estudiantes que identifican un patrón, lo hace de manera recurrente, tal y como se deduce de la Tabla 6 - 96.

Tabla 6 - 96. Tabla de contingencia Problema 6_Patrón-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia observada	183	0	183
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Recurrencia	73,2%	,0%	56,7%
		% del total	56,7%	,0%	56,7%
	1	Frecuencia observada	67	73	140
		% de Patrón	47,9%	52,1%	100,0%
		% de Recurrencia	26,8%	100,0%	43,3%
		% del total	20,7%	22,6%	43,3%
Total		Frecuencia observada	250	73	323
		% de Patrón	77,4%	22,6%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	77,4%	22,6%	100,0%

El elevado número de sujetos que identifican un patrón recurrente, hace que nos interesemos por la relación entre la recurrencia y la identificación de un patrón adecuado. El 61,6% de los alumnos que han identificado una relación recurrente, han detectado un patrón adecuado al problema, como se deduce de la Tabla 6 - 97. Además, el 93,8% de los alumnos que identifican un patrón adecuado, lo han hecho mediante una relación recurrente.

Tabla 6 - 97. Tabla de contingencia Problema 6_ Patrón Adecuado-Recurrencia

			Recurrencia		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	247	28	275
		% de Patrón Adecuado	89,8%	10,2%	100,0%
		% de Recurrencia	98,8%	38,4%	85,1%
		% del total	76,5%	8,7%	85,1%
	1	Frecuencia absoluta	3	45	48
		% de Patrón Adecuado	6,3%	93,8%	100,0%
		% de Recurrencia	1,2%	61,6%	14,9%
		% del total	,9%	13,9%	14,9%
Total		Frecuencia absoluta	250	73	323
		% de Patrón Adecuado	77,4%	22,6%	100,0%
		% de Recurrencia	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	77,4%	22,6%	100,0%

Formulación de Conjeturas

El 96,0% de los alumnos que responden al Problema 6, formulan una conjetura a la tarea de continuación propuesta., como se observa en la Tabla 6 - 99.

La formulación de conjeturas es independiente del trabajo con los términos k-ésimos, de la organización de los mismos y de la identificación de patrón, tal y como indican los análisis de independencia estadística correspondientes que resumimos en la Tabla 6 - 98 y que se obtienen de los análisis presentados en el Anexo F.

Tabla 6 - 98. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Conjetura

p-valores	Conjetura
Trabajo T. k-ésimos	0,384
Organiz. T. k-ésimos	0,067
Patrón	0,132

Justificación de Conjeturas

El 2,9% de los alumnos que han formulado conjeturas hacen una justificación de las mismas basándose en los términos k-ésimos de la progresión, como se observa en la Tabla 6 - 99.

Tabla 6 - 99. Tabla de contingencia Problema 6_Conjetura-Justificación

			Justificación		
			0	1	Total
Conjetura	0	Frecuencia absoluta	13	0	13
		% de Conjetura	100,0%	,0%	100,0%
		% de Justificación	4,1%	,0%	4,0%
		% del total	4,0%	,0%	4,0%
	1	Frecuencia absoluta	301	9	310
		% de Conjetura	97,1%	2,9%	100,0%
		% de Justificación	95,9%	100,0%	96,0%
		% del total	93,2%	2,8%	96,0%
Total		Frecuencia absoluta	314	9	323
		% de Conjetura	97,2%	2,8%	100,0%
		% de Justificación	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	97,2%	2,8%	100,0%

La justificación de la conjetura es independiente del trabajo con términos k-ésimos y de la formulación de conjeturas, como se deduce de los p-valores que presentamos en la Tabla 6 - 100.

Tabla 6 - 100. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Justificación

p-valores	Justificación
Trabajo T. k-ésimos	0,581
Organiz. T. k-ésimos	0,019
Patrón	0,002
Conjetura	1,000

Tal y como indican los p-valores de la Tabla 6 - 100, la justificación depende significativamente de la organización de los términos k-ésimos (Gamma = 0,743) y de la identificación de patrón (Gamma = 1,000) (ver Anexo F). .

Expresión de la Generalización

El 2,5% de los estudiantes que responden al Problema 6, llegan a expresar la generalización (ver Tabla 6 - 101). El 50% de los que generalizan, trabajan con términos k-ésimos.

Tabla 6 - 101. Tabla de contingencia Problema 6_Trabajo T. k-ésimos-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	75	4	79
		% de Trabajo T. k-ésimos	94,9%	5,1%	100,0%
		% de Generalización	23,8%	50,0%	24,5%
		% del total	23,2%	1,2%	24,5%
	1	Frecuencia absoluta	240	4	244
		% de Trabajo T. k-ésimos	98,4%	1,6%	100,0%
		% de Generalización	76,2%	50,0%	75,5%
		% del total	74,3%	1,2%	75,5%
Total		Frecuencia absoluta	315	8	323
		% de Trabajo T. k-ésimos	97,5%	2,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	97,5%	2,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (0,199) indica la independencia de la generalización con respecto al trabajo con términos k-ésimos de la progresión (ver Anexo F). De forma análoga, la generalización es independiente de la organización de términos k-ésimos (0,808) y de la formulación de conjeturas (p-valor = 1,000) (ver Anexo F para los resultados de los análisis).

Únicamente el 12,5% de los alumnos que generalizan, no han identificado un patrón.

Tabla 6 - 102. Tabla de contingencia Problema 6_Patrón-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	182	1	183
		% de Patrón	99,5%	,5%	100,0%
		% de Generalización	57,8%	12,5%	56,7%
		% del total	56,3%	,3%	56,7%
	1	Frecuencia absoluta	133	7	140
		% de Patrón	95,0%	5,0%	100,0%
		% de Generalización	42,2%	87,5%	43,3%
		% del total	41,2%	2,2%	43,3%
Total		Frecuencia absoluta	315	8	323
		% de Patrón	97,5%	2,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	97,5%	2,5%	100,0%

Según indica el p-valor y la Gamma asociada al contraste de independencia estadística, la generalización depende (p-valor = 0,028) de manera significativa de la identificación del patrón (Gamma = 0,811) (ver Anexo F).

El 35,5% de los alumnos que generalizan, han identificado un patrón adecuado para el Problema 6, como se deduce de la Tabla 6 - 103.

Tabla 6 - 103. Tabla de contingencia Problema 6_Patrón Adecuado-Generalización

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	270	5	275
		% de Patrón Adecuado	98,2%	1,8%	100,0%
		% de Generalización	85,7%	62,5%	85,1%
		% del total	83,6%	1,5%	85,1%
	1	Frecuencia absoluta	45	3	48
		% de Patrón Adecuado	93,8%	6,3%	100,0%
		% de Generalización	14,3%	37,5%	14,9%
		% del total	13,9%	,9%	14,9%
Total		Frecuencia absoluta	315	8	323
		% de Patrón Adecuado	97,5%	2,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	97,5%	2,5%	100,0%

La expresión de la generalización es independiente de la formulación de conjeturas, según indica el p-valor asociado al contraste Chi-cuadrado de independencia (1,000) y de la justificación con términos k-ésimos (p-valor = 0,547) (ver Anexo F).

Generalización algebraica

El 37,5% de los estudiantes que generalizan, lo hacen algebraicamente, como se deduce de la Tabla 6 - 104.

Tabla 6 - 104. Tabla de contingencia Problema 6_ Generalización-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Generalización	0	Frecuencia absoluta	315	0	315
		% de Generalización	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización Alg.	98,4%	,0%	97,5%
		% del total	97,5%	,0%	97,5%
	1	Frecuencia absoluta	5	3	8
		% de Generalización	62,5%	37,5%	100,0%
		% de Generalización Alg.	1,6%	100,0%	2,5%
		% del total	1,5%	,9%	2,5%
Total		Frecuencia absoluta	320	3	323
		% de Generalización	99,1%	,9%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,1%	,9%	100,0%

Además, según recoge la Tabla 6 - 105, el 66,7% de los estudiantes que generalizan algebraicamente, han identificado un patrón adecuado.

Tabla 6 - 105. Tabla de contingencia Problema 6_Patrón Adecuado-Generalización Alg.

			Generalización Alg.		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	274	1	275
		% de Patrón Adecuado	99,6%	,4%	100,0%
		% de Generalización Alg.	85,6%	33,3%	85,1%
		% del total	84,8%	,3%	85,1%
	1	Frecuencia absoluta	46	2	48
		% de Patrón Adecuado	95,8%	4,2%	100,0%
		% de Generalización Alg.	14,4%	66,7%	14,9%
		% del total	14,2%	,6%	14,9%
Total		Frecuencia absoluta	320	3	323
		% de Patrón Adecuado	99,1%	,9%	100,0%
		% de Generalización Alg.	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	99,1%	,9%	100,0%

Como se puede comprobar en el Anexo F, la generalización algebraica es independiente de los pasos previos considerados en el razonamiento inductivo (trabajo con términos k-ésimos, organización de los mismos, identificación de patrón, formulación de conjetura y justificación de la misma). En la Tabla 6 - 106 presentamos los p-valores que nos permiten hacer las anteriores afirmaciones.

Tabla 6 - 106. P-valores asociados a las tablas de contingencia con Generalización Alg.

p-valores	Generalización Alg.
Trabajo T. k-ésimos	0,752
Organiz. T. k-ésimos	1,000
Patrón	0,160
Conjetura	1,000
Justificación	1,000

Demostración

Ningún sujeto de los que participan en la investigación han demostrado las conjeturas generales que han formulado, como se recogió en la Figura 6 - 14.

RESUMEN DE RESULTADOS DE (IN)DEPENDENCIA ENTRE PASOS

Tras la variedad de resultados obtenidos en los análisis llevados a cabo en los diferentes problemas, presentamos un resumen de los mismos, donde mostramos los resultados de los análisis de independencia entre cada uno de los pasos del razonamiento inductivo en cada uno de los problemas, partimos de la Tabla 6 - 16. Como comentamos anteriormente, cada celda se corresponde con un contraste de hipótesis que se ha llevado a cabo para cada uno de los problemas. Por ello, hemos dividido cada celda en seis partes, de forma que cada una de las partes se corresponda con uno de los problemas de la prueba en la que recogeremos si el resultado obtenido ha sido de independencia (I) o de dependencia (D) entre los pasos que correspondan con la celda. En cada celda, los resultados se presentan de forma que en la primera fila se presentan los resultados de los problemas 1, 2 y 3, y en la segunda fila de cada celda, los resultados de los problemas 4, 5 y 6.

Tabla 6 - 107. Resumen del análisis de independencias entre pasos del razonamiento inductivo

PASOS	Trabajo T. k-ésimos			Organiz. Términos k-ésimos			Patrón			Conjetura			Justificación			Generalización			Demostración		
Trabajo T. k-ésimos				D	I	X	D	D	D	I	D	D	I	I	X	I	I	D	X	X	X
				D	D	D	I	D	I	I	I	I	X	I	I	I	D	D	X	X	X
Organiz. Términos k-ésimos							D	D	X	I	I	X	I	I	X	I	I	X	X	X	X
							I	D	D	I	I	I	X	D	D	I	I	I	X	X	X
Patrón										I	D	I	I	I	X	I	I	D	X	X	X
										I	I	I	X	I	D	D	D	D	X	X	X
Conjetura													I	I	X	I	I	I	X	X	X
													X	I	I	I	D	I	X	X	X
Justificación																D	I	X	X	X	X
																X	I	I	X	X	X
Generalización																			X	X	X
																			X	X	X
Demostración																					

D = dependiente.
I = independiente.
X = no se realiza el contraste porque se ha incluido un paso con frecuencia nula.

En la Tabla 6 - 107, destacamos el hecho ya comentado de que ningún estudiante demuestra sus conjeturas en ninguno de los problemas de la prueba. Por tanto, las relaciones de ese paso con respecto a los otros, no dan ningún resultado. En este mismo sentido, destacamos los problemas 3 y 4, ya que hay dos pasos (la justificación de conjeturas en ambos problemas y la organización de los términos k-ésimos en el Problema 3) que no son realizados por ningún estudiante. Sin tener en cuenta estos casos, en los que no es posible analizar la (in)dependencia estadística (se corresponden con una X en la Tabla 6 - 107), observamos una tendencia a la dependencia o a la independencia entre pasos en la mayoría de los problemas. Los problemas en los que la relación no se da en el mismo sentido en que se ha identificado para la mayoría de los problemas no coinciden en todos los casos. Debido a que no hemos identificado ninguna regularidad en este sentido, nos centramos en comentar las tendencias observadas en la mayoría de los problemas para la relación detectada entre dos pasos. En la Tabla 6 - 108 mostramos las relaciones predominantes que hemos detectado.

Tabla 6 - 108. Relación predominante

Pasos	Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T.k-ésimos	Patrón	Conjetura	Justif.	Gen.	Dem
Trabajo T. k-ésimos		D	D	I	I	*	
Organiz. Términos k-ésimos			D	I	*	I	
Patrón				I	I	D	
Conjetura					I	I	
Justificación						I	
Generalización							
Demostración							

D = dependiente.
I = independiente.
* El número de dependencias y de independencias obtenidas en los seis problemas ha sido el mismo.

En la mayoría de los problemas, se observa que la organización de los términos k-ésimos depende del trabajo con los mismos y que el patrón depende de estos dos pasos del razonamiento inductivo. Por lo tanto, hemos identificado relaciones de dependencia entre los tres primeros pasos del razonamiento inductivo. Sin embargo, no ocurre así con el resto de los pasos, ya que la generalización es el único paso que depende de la identificación de un patrón. No hemos encontrado evidencias de la dependencia de la formulación de conjeturas ni de la justificación de las mismas respecto a los pasos considerados previos en el razonamiento inductivo.

ANÁLISIS DE PASOS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO POR CURSOS Y CENTROS

Hasta el momento, los análisis presentados en relación con los pasos del razonamiento inductivo se han llevado a cabo para todos los estudiantes de la muestra. Con la intención de determinar las posibilidades de generalizar los resultados obtenidos es importante conocer si la frecuencia de empleo de los pasos por parte de los resolutores depende del curso y del centro en el que están matriculados. Para ello hemos realizado un análisis que nos permite contrastar si hay diferencias significativas entre cursos y entre colegios, con lo cuál damos respuesta a dos de los objetivos específicos de esta investigación (O_9 y O_{10}).

Tras la observación y recuento sistemáticos, presentamos las frecuencias de realización de los diferentes pasos considerados en el razonamiento inductivo según el centro y el curso a los que pertenecen los estudiantes en la Tabla 6 - 109.

Tabla 6 - 109. Distribución de frecuencias de Pasos según Curso y Centro

Curso	Centro	Pasos de Razonamiento Inductivo (Pasos)							Total
		Trabajo T. k-ésimos	Organiz. T. k-ésimos	Patrón	Conjeturas	Justificación	Gen	Dem	
3	1	192	56	209	341	11	30	0	839
4	1	115	31	134	206	1	30	0	517
3	2	92	33	103	205	5	33	0	471
4	2	87	34	128	180	11	38	0	478
3	3	133	47	163	239	21	19	0	622
4	3	100	51	120	196	14	25	0	506
3	4	121	49	153	192	14	58	0	587
4	4	111	62	138	176	8	19	0	514
Total		951	363	1148	1735	85	252	0	4534

Podemos aplicar un modelo logarítmico para analizar los efectos de las variables y la asociación entre ellas. Para determinar el mejor modelo que mejor predice la frecuencia de los datos, utilizamos el método de eliminación hacia atrás a partir del modelo saturado. Para realizar este análisis, hemos utilizado el programa de análisis estadístico SPSS. El único modelo lineal-logarítmico que se puede aplicar es el modelo saturado, que considera las interacciones de tres vías (el modelo debe incluir todos los efectos de todos los órdenes porque rechazamos todas las hipótesis de que algún efecto de cualquier orden sea nulo) (ver Anexo F). Para el estudio de las asociaciones parciales entre las variables hemos utilizado la Chi-cuadrado parcial como estadístico de contraste. En la Tabla 6 - 110 presentamos los estadísticos correspondientes a cada efecto.

Tabla 6 - 110. Resultado de los estadísticos de asociaciones parciales

Nombre de Efecto	Grados libertad	Chi-cuadrado parcial	Prob.
Curso*Centro	3	37,607	0,0000
Curso*Pasos	6	4,609	0,5948
Centro*Pasos	18	61,920	0,0000
Curso	1	56,140	0,0000
Centro	3	73,844	0,0000
Pasos	6	4222,179	0,0000

Como se deduce de la Tabla 6 - 110, el único efecto que no es significativo es Curso*Pasos, ya que el p-valor es superior a 0,05 (0,595). El resto de los efectos de todos los órdenes sí son significativos. A partir de los valores de los parámetros estimados y de z, pasamos a describir cada uno de los efectos significativos, excepto el efecto Pasos, que ya ha sido descrito en la primera parte de este capítulo.

Efecto Centro

Los cuatro centros a los que pertenecen los estudiantes (Granada, Madrid, Cúllar-Vega y Teruel) los hemos codificado con los números 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Presentamos los parámetros obtenidos para el efecto Centro en la Tabla 6 - 111. En el gráfico de la Figura 6 - 15 se observa su diferencia con respecto a la media.

Tabla 6 - 111. Parámetros estimados para el efecto Centro

Centro Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
1	-0,0236643744	0,13503	-0,17526	-0,28832	0,24099
2	-0,1100549509	0,13052	-0,84319	-0,36588	0,14577
3	0,0705318692	0,12909	0,54639	-0,18248	0,32354
4	0,0631874561	0,12954	0,48780	-0,19070	0,31708

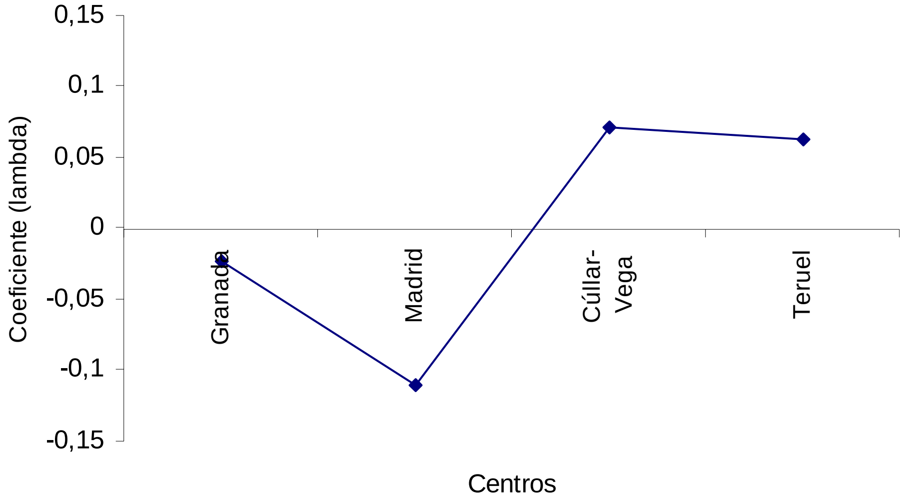


Figura 6 - 15. Parámetros estimados del efecto Centros

Como se observa en la Figura 6 - 15, la frecuencia con la que los alumnos de los centros de Granada y Madrid realizan los pasos del razonamiento inductivo están por debajo de la media de los parámetros λ y la frecuencia con la que los realizan los alumnos de Cúllar-Vega y Teruel están por encima de la media. Sin embargo, tal y como indican los valores de z correspondientes en la Tabla 6 - 111 ($z < 1,96$), las diferencias indicadas no son significativas. Por lo tanto, no existen diferencias significativas en la realización de los pasos del razonamiento inductivo según el centro.

Efecto Curso

Los cursos 3º y 4º de ESO a los que pertenecen los estudiantes, los hemos codificado con los números 1 y 2 respectivamente para el análisis estadístico. Presentamos los parámetros estimados para el efecto Curso en la Tabla 6 - 112 y representamos sus valores en el gráfico de la Figura 6 - 16.

Tabla 6 - 112. Parámetros estimados para el efecto Curso

Curso Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95% Extr. Inf.	Intervalo Confianza 95% Extr. Sup.
1	0,1008527123	0,07567	1,33280	-0,04746	0,24917
2	-0,1008527123	0,07567	-1,33280	-0,24917	0,04746

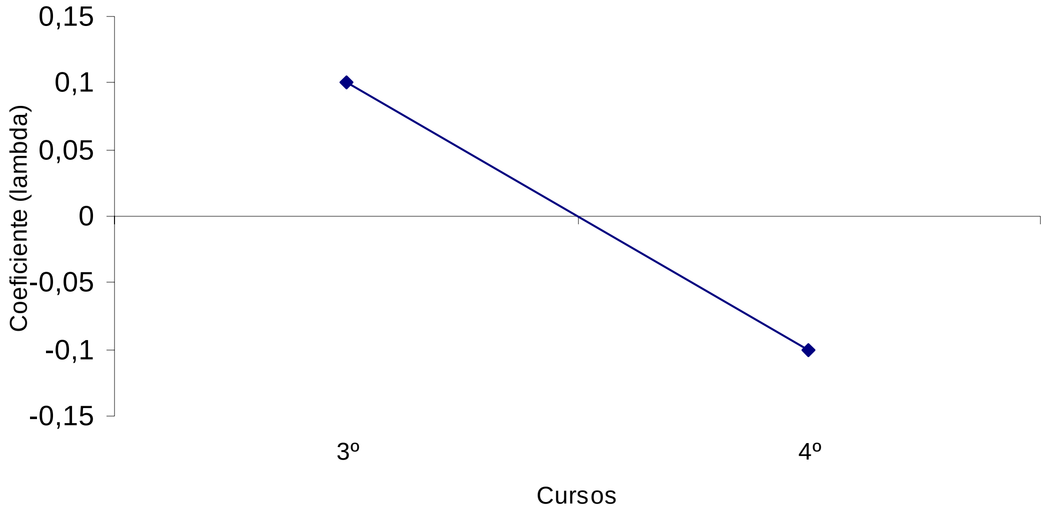


Figura 6 - 16. Parámetros estimados del efecto Curso

Como se observa en la Figura 6 - 16, los alumnos de 3º suelen realizar los pasos del razonamiento inductivo con una frecuencia un poco mayor a la media, mientras que los de 4º lo hacen con una frecuencia un poco inferior a la media. Sin embargo, ninguna de estas diferencias son significativas (z < 1,96). Por lo tanto, no existen diferencias significativas debidas al curso en la realización de los pasos del razonamiento inductivo considerados.

Asociación Centro*Pasos

Recogemos los valores de los parámetros estimados para el efecto Centro*Pasos en la Tabla 6 – 113 y los representamos en el gráfico de la Figura 6 – 17.

Tabla 6 - 113. Parámetros estimados para el efecto Centro Pasos*

Centro*Pasos Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
(1,1)	0,2750461937	0,14233	1,93242	-0,00393	0,55402
(1,2)	-0,0312444951	0,15720	-0,19876	-0,33935	0,27686
(1,3)	0,1974555822	0,14131	1,39736	-0,07950	0,47442
(1,4)	0,2458061974	0,13912	1,76690	-0,02686	0,51848
(1,5)	-0,7463450124	0,31671	-2,35659	-1,36709	-0,12560
(1,6)	0,0356171599	0,16497	0,21590	-0,28772	0,35896
(1,7)	0,0236643744	0,74428	0,03180	-1,43512	1,48245
(2,1)	-0,1438228527	0,14075	-1,02182	-0,41970	0,13205
(2,2)	-0,1607156292	0,15606	-1,02986	-0,46658	0,14515
(2,3)	-0,0915475520	0,13870	-0,66003	-0,36341	0,18031
(2,4)	0,0109611341	0,13562	0,08082	-0,25485	0,27677
(2,5)	-0,0103129439	0,23625	-0,04365	-0,47337	0,45274
(2,6)	0,2853828928	0,15858	1,79959	-0,02544	0,59620
(2,7)	0,1100549509	0,74347	0,14803	-1,34715	1,56726
(3,1)	-0,0717037891	0,13788	-0,52005	-0,34194	0,19854
(3,2)	0,0336009287	0,14947	0,22480	-0,25936	0,32656
(3,3)	-0,0756532589	0,13637	-0,55478	-0,34293	0,19162
(3,4)	-0,0506061677	0,13386	-0,37806	-0,31297	0,21176
(3,5)	0,6066534646	0,20434	2,96879	0,20614	1,00717
(3,6)	-0,3717593084	0,16695	-2,22679	-0,69898	-0,04454
(3,7)	-0,0705318692	0,74322	-0,09490	-1,52725	1,38618
(4,1)	-0,0595195519	0,13822	-0,43062	-0,33043	0,21139
(4,2)	0,1583591955	0,14858	1,06582	-0,13286	0,44958
(4,3)	-0,0302547712	0,13657	-0,22154	-0,29793	0,23742
(4,4)	-0,2061611638	0,13482	-1,52915	-0,47041	0,05809
(4,5)	0,1500044918	0,21960	0,68308	-0,28041	0,58042
(4,6)	0,0507592557	0,16128	0,31472	-0,26536	0,36688
(4,7)	-0,0631874561	0,74330	-0,08501	-1,52005	1,39368

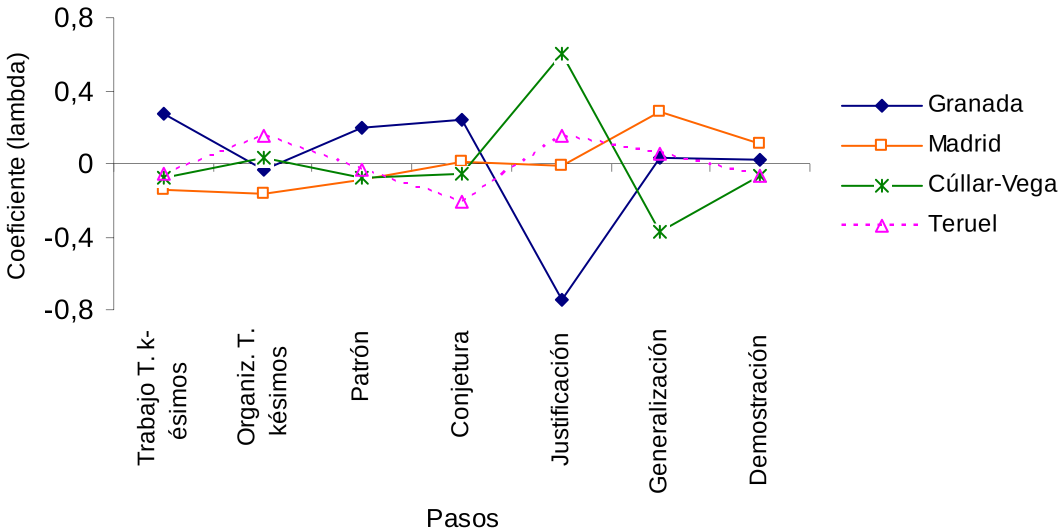


*Figura 6 - 17. Parámetros estimados para el efecto Centro*Pasos*

A la luz de los resultados obtenidos, podemos comentar que:

- La justificación de conjeturas es empleada por un número inferior a la media por los alumnos de Granada (λ = -0,746 y z = -2,356) y por un número de alumnos superior a la media en el centro de Cúllar-Vega (λ = 0,606 y z = 2,968).
- La frecuencia de generalización es inferior a la media en Cúllar-Vega (λ = -0,372). Además, esta diferencia es significativa (z = -2,227).

Por lo tanto, hay únicamente dos pasos en los que se observan diferencias significativas en dos de los centros.

Asociación Curso*Centro

En la Tabla 6 - 114 recogemos los parámetros lambda estimados y los representamos en la Figura 6 - 18.

*Tabla 6 - 114. Parámetros estimados para el efecto Curso*Centro*

Curso*Centro Parámetro	Coeficiente (lambda)	Desviación Típica	Valor z	Intervalo Confianza 95%	
				Extr. Inf.	Extr. Sup.
(1,1)	0,1904449627	0,13503	1,41042	-0,07421	0,45510
(1,2)	-0,1677954134	0,13052	-1,28557	-0,42362	0,08803
(1,3)	-0,0414394140	0,12909	-0,32102	-0,29445	0,21157
(1,4)	0,0187898647	0,12954	0,14506	-0,23510	0,27268
(2,1)	-0,1904449627	0,13503	-1,41042	-0,45510	0,07421
(2,2)	0,1677954134	0,13052	1,28557	-0,08803	0,42362
(2,3)	0,0414394140	0,12909	0,32102	-0,21157	0,29445
(2,4)	-0,0187898647	0,12954	-0,14506	-0,27268	0,23510

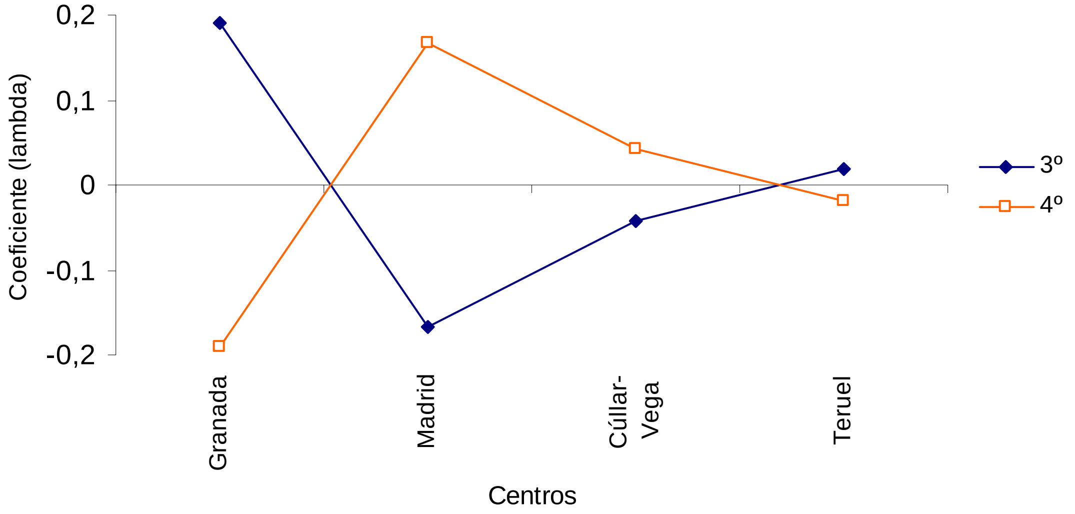


*Figura 6 - 18. Parámetros estimados para el efecto Curso*Centro*

Debido a que todos los valores de z son menores, en valor absoluto que 1,96, ninguna de las diferencias que se observan en la Figura 6 - 18 son significativas. Esto es coherente con el hecho de que el efecto Curso no produce diferencias significativas y que la asociación Centro*Pasos haya producido pequeñas diferencias en las frecuencias con las que los estudiantes realizan los pasos del razonamiento inductivo.

PASOS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO POR CENTROS PARA CADA PROBLEMA

El análisis realizado hasta el momento, que considera Curso y Centro como variables, no tiene en cuenta la diferenciación entre los problemas que constituyen la prueba. En el análisis logarítmico-lineal se ha observado que el efecto Centro no producía diferencias significativas pero, sin embargo, se observaron algunas diferencias significativas en la asociación Centro*Pasos. Por ello, recurrimos a un análisis complementario que puede aportar información adicional, teniendo en cuenta los diferentes problemas que constituyen la prueba. En los gráficos que mostramos desde la Figura 6 - 19 a la Figura 6 - 24, recogemos los porcentajes de alumnos de cada centro que emplean cada uno de los pasos considerados para el proceso de razonamiento inductivo.

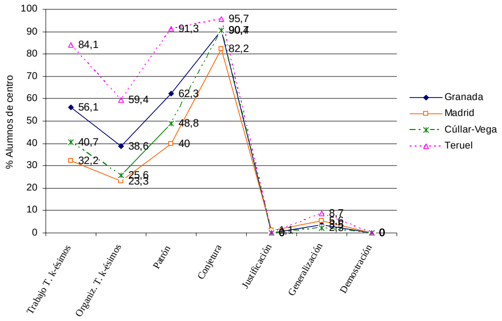


Figura 6 - 19. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 1

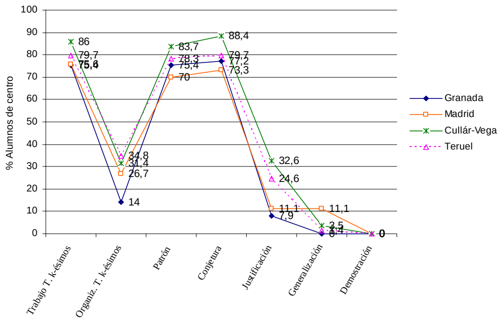


Figura 6 - 20. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 2

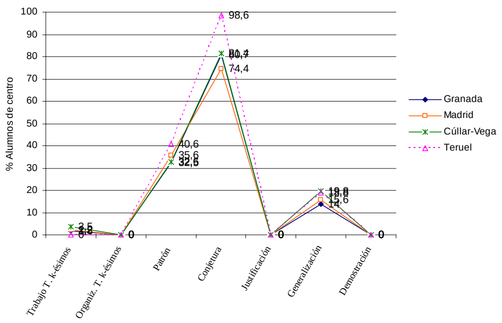


Figura 6 - 21. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 3

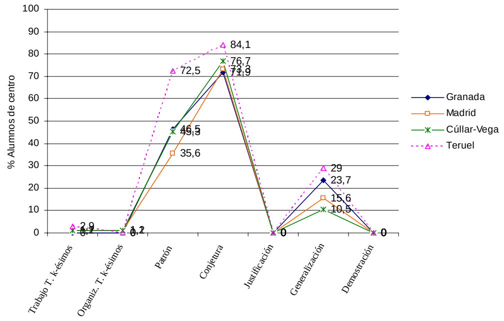


Figura 6 - 22. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 4

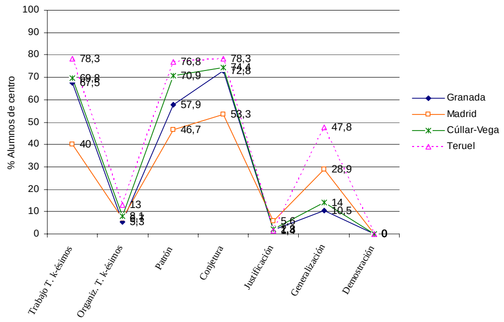


Figura 6 - 23. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 5

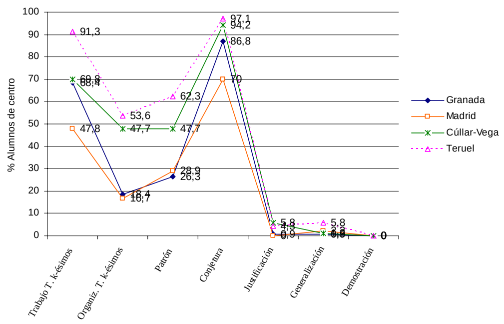


Figura 6 - 24. Porcentajes de Pasos en Centros de Problema 6

En los gráficos anteriores se observan algunas diferencias en las frecuencias de realización de los pasos en función del centro al que pertenecen los estudiantes. Anteriormente se identificaron diferencias significativas en los centros de Granada y de Cúllar-Vega. Los estudiantes de Granada presentaron una frecuencia significativamente inferior a la media en la justificación de conjeturas. Esta diferencia se puede deber, a la diferencia que se observa en este paso en el Problema 2.

Las diferencias significativas en las frecuencias con la que los estudiantes de Cúllar-Vega se pueden deber a las producciones de los estudiantes en los problemas 2 (donde la frecuencia con la que estos estudiantes justifican es notablemente superior) y 4 (problema en el que los estudiantes de Cúllar-Vega generalizan con menor frecuencia que en los otros centros).

En general, podemos decir que en los problemas se observa una tendencia similar en las frecuencias con las que los estudiantes de los cuatro centros realizan los pasos del razonamiento inductivo ya que, por un lado, en el análisis logarítmico-lineal sólo hay algunos pasos en los que se han identificado diferencias significativas para dos de los centros y, por otro lado, esas diferencias no se observan de manera clara y, en ocasiones no se dan en el mismo sentido (por encima o por debajo de las frecuencias de los otros centros) para los diferentes problemas considerados.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS DE DATOS II

Este capítulo lo dedicamos al estudio de las estrategias inductivas que han utilizado los estudiantes de la muestra en los problemas de la prueba propuesta, con la intención de dar respuesta a los objetivos de investigación relativos a ellas. Este estudio lo hacemos para cada problema de forma independiente dado que, como describimos en el Capítulo 5, en cada problema se pueden utilizar unas estrategias inductivas diferentes en función del sistema de representación en el que se presenten los términos k-ésimos en el enunciado.

En el Capítulo 5 describimos el procedimiento para la identificación de las estrategias inductivas que se pueden emplear en la resolución de los problemas presentados. Este procedimiento se fundamenta en la detección de una serie de transformaciones encadenadas que se extraen, según el problema de la prueba al que nos refiramos, de los esquemas recogidos en el Anexo D de esta memoria. La interpretación de cada estrategia se hacen en función del significado que hemos dado a cada una de las transformaciones en el Capítulo 3 de esta memoria (ver Tabla 3 - 4, Tabla 3 - 5 y Tabla 3 - 6).

Tras la observación de las producciones de los estudiantes, recogemos todas las estrategias inductivas que emplean los estudiantes en cada uno de los problemas (ver Anexo E) y en ellas centraremos el trabajo de este capítulo. Extraemos información sobre los sistemas de representación que utilizan los estudiantes en los elementos de las progresiones en los diferentes problemas, las transformaciones y las estrategias inductivas que emplean. Con esto, damos respuesta a los objetivos específicos 3, 5 y 6 de este trabajo (O_3, O_5 y O_6, presentados en el Capítulo 1 de esta memoria). Para cada uno de los problemas, realizamos una descripción general de las estrategias inductivas que emplean los estudiantes y, a continuación, pasamos a describir el trabajo que realizan los estudiantes que trabajan únicamente con términos k-ésimos (sujetos que no generalizan) y, por otro lado, aquéllos que llegan a expresar la generalización (generalizan). Concluimos esta parte del estudio con algunas reflexiones generales y con la identificación de las estrategias inductivas predominantes en cada uno de los problemas de la prueba.

En la última parte de este capítulo, analizamos las diferencias existentes en las estrategias inductivas que emplean los estudiantes según el curso y centro al que pertenecen, con lo que damos respuesta a los objetivos específicos 9 y 11 de esta investigación (O_{10} y O_{11}).

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN EL PROBLEMA 1

Según las frecuencias de los pasos del razonamiento inductivo identificadas en el capítulo anterior, en el Problema 1, hay 309 estudiantes que restringen su trabajo al trabajo con términos k-ésimos. Por otro lado, hay 17 estudiantes que llegan a expresar la generalización. Este dato también se puede deducir de los diferentes valores de la variable Estrategia Inductiva que se han identificado en la resolución de este problema. En la Tabla 7 - 1 recogemos estos valores junto con las frecuencias en las que han sido utilizadas las diferentes estrategias inductivas identificadas en el trabajo de los estudiantes en este problema.

Tabla 7 - 1. Estrategias Inductivas_Problema 1

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	33			33
T2	21	T. k-ésimos	NO	309
T2-TSN	127			
T2-T5	32			
T2-TSN-T5	122			
TSV	5			
TSV-T2-TSN	2			
T2-TSN-C1	1	T. k-ésimos y T. general	SÍ	17
T2-TSN-C1-C1B-TSN	1			
T2-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	1			

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
T2-C1-C1B-TSN	5			
T2-C1-TSA-C1B-TSN	1			
T2-TSN-C4	7			
C3-C1B-TSN-C4	1			
Total				359

En primer lugar, destacamos la tendencia de los estudiantes al trabajo en el sistema de representación numérico desde el inicio de la resolución del problema, ya que aparecen transformaciones que conducen a ese sistema de representación en la mayoría de los alumnos (todos los alumnos excepto uno utilizan T2[1] que es la transformación al sistema de representación numérico).

En la Tabla 7 - 1 se observa que las dos estrategias más utilizadas por los alumnos de la muestra se corresponden con el trabajo con términos k-ésimos numéricamente (T2-TSN y T2-TSN-T5). Ambas estrategias responden al trabajo con términos k-ésimos en los sistemas de representación numérico (T2 y TSN) y en los sistemas de representación numérico y verbal (aparece T5 en la segunda estrategia). Ambas estrategias representan un trabajo con términos k-ésimos utilizando el sistema de representación numérico. Este hecho, por un lado pone de manifiesto la preferencia a trabajar con los términos k-ésimos y, por otro lado, muestra una tendencia general de los alumnos a trabajar en el sistema de representación numérico.

Los alumnos también emplean los sistemas de representación verbal y algebraico en la resolución de este problema, como comentaremos más adelante. El sistema de representación gráfico es el único sistema de representación que no se identifica en las producciones de los estudiantes.

Antes de desarrollar las características de las estrategias observadas en cada uno de los dos grupos de estudiantes que hemos distinguido en la Tabla 7 - 1, destacamos dos hechos relevantes puestos de manifiesto por la totalidad de los alumnos que responden al problema:

[1] Recordemos que T2 era la transformación para pasar de los términos k-ésimos expresados verbalmente (como ocurre en el enunciado del Problema 2) a esos términos expresados numéricamente.

- Empleo del sistema de representación numérico (aparición de T2 o TSN como transformaciones que forman parte de la estrategia inductiva). Vemos como dato significativo que 318 alumnos hacen como primera transformación la que les conduce a la representación numérica de términos k-ésimos (T2).
- Hemos observado que hay 167 estudiantes que hacen al final de su resolución un cambio al sistema de representación verbal (T5, TSV o C4 es la última transformación que forma parte de las estrategias inductivas que utilizan). Esto nos induce a pensar que el sistema de representación verbal juega su papel más importante al final de la secuencia de transformaciones que determina la estrategia inductiva.

Estudiantes que no Generalizan

Pese a que el enunciado proporciona la información referente a los términos k-ésimos de la progresión en el sistema de representación verbal, 302 alumnos de los 309 que únicamente trabajan con términos k-ésimos, comienzan a trabajar en el sistema de representación numérico (T2 es la primera transformación que realizan). Esto hace que el sistema de representación numérico sea el predominante en el trabajo de estos alumnos.

Entre los sujetos que no generalizan, hay 161 que emplean el sistema de representación verbal en sus respuestas. Como se deduce de la Tabla 7 - 1, hay (32 + 122 + 5 + 7) 161 estudiantes que emplean estrategias inductivas que contienen T5 o TSV como transformaciones.

Entre los estudiantes que emplean el sistema de representación verbal en su trabajo con los términos k-ésimos, se constata que, por una parte, hay 7 de estos estudiantes que utilizan la expresión verbal para reformular el enunciado antes de iniciar su trabajo, siguiendo las estrategias TSV o TSV-T2-TSN. Por otra parte, hay 154 alumnos que emplean el sistema de representación verbal después de haber expresado los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico. Éstos últimos utilizan el modo de representación verbal cuando explican o justifican su respuesta. Este hecho se hace patente con la aparición de T5 al final de la secuencia que representa su estrategia de resolución y que representa la explicación que dan los estudiantes a su resolución del problema.

Estudiantes que Generalizan

Una primera observación de las estrategias que emplean 16 estudiantes (de los 17 que generalizan) es que expresan la generalización después de haber trabajado únicamente en el sistema de representación numérico (aparece T2 o T2-TSN antes de C1 o C4). El otro alumno llega a la generalización (verbal) sin haber trabajado previamente con términos k-ésimos (C3-C1B-TSN-C4).

En cuanto a la forma de expresar la generalización de los restantes 16 alumnos: nueve lo hacen sólo algebraicamente (C1 forma parte de la estrategia inductiva empleada) y siete lo hacen únicamente mediante el sistema de representación verbal (aparece C4 en la secuencia que identifica su estrategia de resolución).

Por consiguiente, la mayoría de los alumnos que generalizan en este problema, lo hacen mediante la representación algebraica del término general.

Uso de la generalización

Los alumnos que llegan a expresar la generalización siguen dos procesos diferentes. Por un lado, los que generalizan algebraicamente, tienden a utilizar la expresión general para calcular términos k-ésimos de la progresión presente en el problema. Todos los estudiantes que generalizan algebraicamente excepto uno (el que utiliza la estrategia T2-TSN-C1) utilizan la expresión para calcular términos k-ésimos. Estos términos k-ésimos son, en unos casos, la conjetura que formulan como respuesta al problema o para comprobar alguno de los términos k-ésimos que forman parte de su conjetura. En los dos casos, los estudiantes utilizan la generalización algebraica como un medio para llegar a la conjetura o para comprobarla con términos k-ésimos.

Por otro lado, los alumnos que expresan verbalmente la generalización en el problema al que nos estamos refiriendo, la utilizan al final de su respuesta (la transformación al sistema de representación verbal es la última que queda reflejada en la estrategia inductiva que utilizan). Entendemos que esto se debe a que los estudiantes consideran la explicación que dan como una validación de su conjetura.

Por lo tanto, las dos utilidades que los estudiantes dan a la generalización en este problema (formulación de conjeturas y validación) se ven asociadas a las dos formas en las que expresan el término general. Mientras que la algebraica es utilizada en la mayoría de los casos para calcular términos k-ésimos de la progresión y formular una conjetura, la verbal es considerada para validar sus conjeturas.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMA 2

En la Tabla 7 - 2 recogemos las estrategias inductivas que se han identificado en las resoluciones que llevan a cabo los estudiantes, los elementos de las progresiones con los que trabajan y las frecuencias de alumnos que utilizan cada una de ellas.

Tabla 7 - 2. Estrategias Inductivas_Problema 2

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	68			68
TSN	56	T. k-ésimos	NO	277
T5	1			
TSN-T5	220			
TSN-C1	5	T. k-ésimos y T. general	SÍ	14
TSN-C1-C1B-TSN	4			
C1	1			
C1-TSA-C1B-TSN	1			
TSN-C4	2			
TSN-C4-T7-C1B-TSN	1			
Total				359

Se han identificado nueve estrategias en el Problema 2. La mayoría de los estudiantes (276) siguen las estrategias TSN y TSN-T5. Ambas se corresponden con el trabajo de los términos k-ésimos expresados numéricamente, y numérica y verbalmente, respectivamente.

En siete de las estrategias, se observa que los sujetos trabajan con términos k-ésimos de la progresión expresados numéricamente (todas excepto T5 y C1). Así, 288 alumnos comienzan por transformaciones sintácticas numéricas de los términos k-ésimos de la progresión que aparecen en el enunciado (TSN) y uno calcula los términos k-ésimos después de la generalización (C1-TSA-C1B-TSN).

Los sistemas de representación numérico, verbal y algebraico son utilizados por los alumnos en la resolución de este problema. El sistema de representación gráfico no es utilizado por ninguno de ellos.

Destacamos dos aspectos relacionados con los sistemas de representación que emplean los estudiantes en la resolución de este problema:

- Empleo del sistema de representación numérico. Se pone en evidencia con la aparición de TSN como parte de la secuencia que expresa esas estrategias y se observa en todos excepto en 3 de los alumnos que realizan alguna transformación en este problema.
- La utilización del sistema de representación verbal para su respuesta en la última transformación que llevan a cabo 222 alumnos. Todos ellos excepto uno (221 = 1 + 220), no llegan a expresar la generalización pero explican su trabajo con los términos k-ésimos de la progresión (T5) y el otro, que sí generaliza, llega a la expresión general verbalmente (C4) cuando intenta justificar su respuesta (el estudiante que utiliza la estrategia inductiva TSN-C4).

Estudiantes que no Generalizan

Se observa que 276 estudiantes de los que restringen su trabajo a los términos k-ésimos, utilizan el sistema de representación numérico. De ellos, 56 lo emplean como único sistema de representación (TSN) y 220 lo usan junto con el sistema de representación verbal (TSN-T5). En éstos últimos, la aparición del sistema de representación verbal al final de la secuencia de transformaciones que identifica la estrategia, se debe a diversos tipos de explicaciones verbales a sus conjeturas. En algunos casos, esas explicaciones llegan a ser justificaciones, como se ha puesto de manifiesto en el capítulo anterior.

Estudiantes que Generalizan

La totalidad de los alumnos que llegan a la generalización, excepto dos (12 estudiantes) lo hacen a partir de los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico. Los dos alumnos que constituyen la excepción, generalizan directamente en el sistema de representación algebraico (siguen las estrategias inductivas C1 y C1-TSA-C1B-TSN). Estos dos estudiantes no trabajan con términos k-ésimos explícitamente pero sí identifican un patrón a partir de los términos k-ésimos que se presentan en el problema al que nos referimos.

Los 14 alumnos que expresan la generalización, lo hacen algebraica, verbalmente o en ambos sistemas de representación conjuntamente. Hay 12 alumnos que generalizan algebraicamente y tres que lo hacen verbalmente. Además, hay un alumno que expresa la generalización en ambos sistemas de representación. En la Figura 7 - 1 recogemos las ideas que se deducen de las estrategias inductivas empleadas por los alumnos que generalizan y cómo expresan esa generalización.

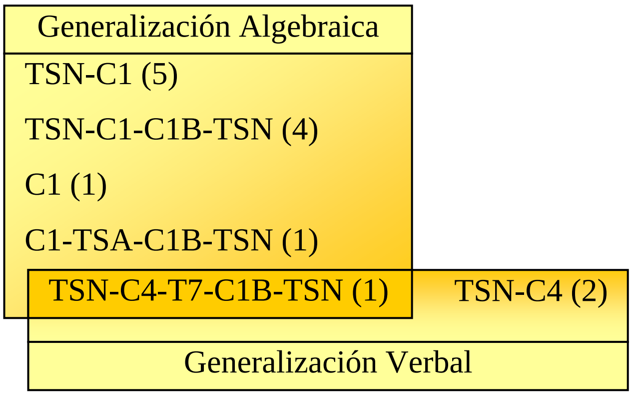


Figura 7 - 1. Expresión de la generalización y estrategias inductivas

Uso de la generalización

De los 14 alumnos que llegan a expresar la generalización, hay seis que la utilizan para trabajar después con términos k-ésimos (como se deduce de las frecuencias con las que aparecen las estrategias inductivas TSN-C1-C1B-TSN, C1-TSA-C1B-TSN, TSN-C4-T7-C1B-TSN). Los ocho alumnos restantes que generalizan, no vuelven después de ella, al trabajo con los términos k-ésimos.

Centrándonos en las producciones de los 11 alumnos que expresan la generalización sólo algebraicamente, podemos distinguir entre los alumnos que la utilizan para calcular términos k-ésimos de la sucesión y los que no lo hacen. En el primer caso se encuentran tres alumnos, quienes ven en la generalización una herramienta útil para calcular otros términos k-ésimos de la sucesión; y dos alumnos que vuelven a los términos k-ésimos tras la generalización como forma de justificar la fórmula que han obtenido. En el segundo caso, hay seis alumnos que formulan la generalización como última transformación en su producción (TSN-C1 y C1). Estos seis alumnos no consideran la generalización como una herramienta útil para responder al problema, sino como un modo de explicar sus conjeturas.

De la misma forma que en la generalización algebraica, en los alumnos que generalizan verbalmente, encontramos dos usos análogos. Mientras que dos alumnos han hecho uso de la generalización verbal como parte de su intento de justificación (TSN-C4), un alumno generaliza verbalmente y continúa su trabajo hacia la generalización algebraica y la posterior vuelta a los términos k-ésimos (TSN-C4-T7-C1B-TSN).

Por tanto, se observan dos usos en la utilización que dan los alumnos a la generalización, los cuáles no están asociadas a ninguno de los sistemas de representación en los que los alumnos pueden expresarla. Los dos usos hacen referencia al cálculo de términos k-ésimos como respuesta a la tarea propuesta y al intento de justificar su resolución.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMA 3

En la Tabla 7 - 3 recogemos las estrategias inductivas que han empleado los estudiantes en la resolución del Problema 3 y las frecuencias con las que utilizan cada una de ellas.

Tabla 7 - 3. Estrategias Inductivas_Problema 3

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	52			52
T1	10	T. k-ésimos	NO	247
T1-T5	6			
T1-TSN	151			
T1-TSN-T5	54			
TSG-T1	2			
TSG-T1-TSN	14			
TSG-T1-TSN-T5	3			
TSG-T6	1			
T6	2			
T6-T2-TSN	4			
T1-TSN-C1-TSA	1	T. k-ésimos y	SÍ	60

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
T1-C4	9	T. general		
T1-TSN-C4	36			
TSG-C1-C1B-T5	1			
TSG-T1-C4	1			
TSG-T1-TSN-C4	7			
TSG-C4-C4B-TSN	2			
T6-C3-C3B-TSN	1			
C5-C4B-TSN	2			
Total				359

Se han identificado 19 estrategias inductivas en la resolución del Problema 3. De la Tabla 7 - 3 se deduce que 247 estudiantes trabajan únicamente con términos k-ésimos de la progresión. A la expresión del término general llegan 60 estudiantes.

En este problema aparecen numerosas y variadas estrategias tanto en el grupo de estudiantes que generalizan como en el grupo de estudiantes que no lo hacen.

De las tres estrategias inductivas empleadas por un mayor número de estudiantes en la resolución de este problema (T1-TSN, T1-TSN-T5 y T1-TSN-C4), se deduce que en la mayoría de los casos, los estudiantes hacen, en primer lugar, una transformación del sistema de representación gráfico en el que aparecen el término k-ésimo en el enunciado del problema al sistema de representación numérico (T1), seguida de una transformación sintáctica en ese mismo sistema de representación (TSN).

En este problema, los alumnos utilizan los cuatro sistemas de representación considerados en las sucesiones: numérico, verbal, gráfico y algebraico. El sistema de representación numérico predomina en el trabajo realizado por los alumnos en este problema.

Observamos que la mayoría de los alumnos de la muestra siguen las siguientes pautas:

- Comienzo de la respuesta por una transformación del sistema de representación gráfico al numérico (T1) ya que, como se deduce de la Tabla 7 - 3, hay 267 estudiantes que lo hacen.
- Hay 31 estudiantes que comienzan la resolución del problema haciendo una transformación sintáctica en el sistema de representación gráfico (TSG).

- El sistema de representación verbal es identificado en las producciones de 128 estudiantes en la resolución de este problema (este hecho se observa al hacer el recuento de los estudiantes que han realizado las transformaciones T5, T6, C4 o C5 como parte de sus estrategias inductivas).

Estudiantes que no Generalizan

En las 10 estrategias que emplean los alumnos que se restringen al trabajo con los términos k-ésimos, se observa una variedad de estrategias en función de los sistemas de representación en los que expresan los términos k-ésimos.

Por un lado, 6 de los alumnos que responden al problema, comienzan trabajando en el sistema de representación verbal a partir del enunciado (estrategias T6 y T6-T2-TSN). Por otro lado, hay 20 estudiantes que continúan su trabajo en el sistema de representación gráfico en el que se plantea el término k-ésimo en el enunciado (TSG). Estos estudiantes son los que emplean las estrategias TSG-T1, TSG-T1-TSN, TSG-T1-TSN-T5 y TSG-T6.

El sistema de representación numérico es el más empleado por los alumnos que no generalizan, dado que lo emplean 247 alumnos. Por un lado, hay 221 estudiantes que no generalizan y comienzan su trabajo por términos k-ésimos expresados numéricamente (los estudiantes que utilizan T1 como primera transformación que forma parte de la estrategia que emplean). Sumamos a éstos, los 23 alumnos que utilizan el sistema de representación numérico en los términos k-ésimos, habiendo utilizado previamente el sistema de representación gráfico (TSG) o el verbal (T6).

El sistema de representación verbal es utilizado por 70 alumnos, tal y como de deduce de las frecuencias asociadas al empleo de las estrategias que incluyen T5 y T6 entre sus transformaciones. De esos estudiantes, 63 emplean el sistema de representación verbal al final de su respuesta, en un intento de justificación de su conjetura. Aunque, como se ha puesto de manifiesto en el capítulo anterior, ninguno de ellos llega a conseguirlo.

Estudiantes que Generalizan

En cuanto al trabajo previo que realizan los 60 alumnos que expresan la generalización, hay dos que generalizan directamente a partir del enunciado, tal y como denota la frecuencia de la estrategia C5-C4B-TSN, única estrategia empleada por los estudiantes que generalizan sin hacer ninguna transformación previa.

Hemos identificado que hay 55 de los alumnos que generalizan y que han trabajado previamente con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (aparece T1 antes de C1 o C4). Tres de los estudiantes han trabajado con términos k-ésimos en el sistema de representación gráfico antes de generalizar (TSG-C1-C1B-T5, TSG-C4-C4B-TSN).

De los estudiantes que llegan a expresar la generalización, ocho han combinado los sistemas de representación gráfico y numérico antes de expresar la generalización.

La generalización algebraica es utilizada por tres estudiantes (los cuales emplean las estrategias T1-TSN-C1-TSA, TSG-C1-C1B-T5 y T6-C3-C3B). Los 57 alumnos restantes que generalizan, la expresan verbalmente. Por lo tanto, podemos afirmar que la forma predominante de expresar la generalización es la representación verbal.

<u>Uso de la generalización</u>

De los tres alumnos que generalizan algebraicamente, se observa que dos de ellos utilizan el término general para formular la conjetura sobre el términos k-ésimo de la progresión por el que pregunta el problema (los que emplean las estrategias TSG-C1-C1B-T5 y T6-C3-C3B). El tercero, llega a una expresión algebraica para el término general como última transformación dentro de la resolución del problema.

De los 57 alumnos que generalizan verbalmente, cuatro utilizan esta expresión de la generalización para calcular el término k-ésimo de la sucesión por el que pregunta el problema (son los alumnos que emplean las estrategias inductivas TSG-C4-C4B-TSN y C5-C4B-TSN).

Se pone de manifiesto que la generalización, ya sea verbal o algebraica, se utiliza ocasionalmente para calcular el término k-ésimo por el que se le pregunta. Los alumnos tienden a expresar verbalmente la generalización cuando buscan justificar su respuesta. Esto puede explicar el hecho de que no haya ningún alumno que llegue a justificar su respuesta (como se describió en el Capítulo 6).

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMA 4

Recogemos en la Tabla 7 - 4 las diferentes estrategias inductivas identificadas en las producciones de los estudiantes en este problema, junto con sus frecuencias asociadas.

Tabla 7 - 4. Estrategias Inductivas_Problema 4

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	85			85
T2	12	T. k-ésimos	NO	204
T2-TSN	105			
T2-T5	8			
T2-TSN-T5	59			
TSV	5			
TSV-T2	3			
TSV-T2-TSN	11			
T4-T1	1			
T2-TSN-C1-C1B-TSN	1	T. k-ésimos y T. general	SÍ	70
T2-C4	6			
T2-TSN-C4	59			
TSV-T2-TSN-C4	1			
TSV-C6	3			
Total				359

Se han identificado 13 estrategias inductivas diferentes en función de los elementos de las progresiones utilizados y los sistemas de representación en los que éstos son expresados. Hay 204 estudiantes que se restringen al trabajo con los términos k-ésimos de la progresión, mientras que son 70 los que llegan a expresar la generalización.

Las estrategias inductivas T2-TSN, T2-TSN-T5 y T2-TSN-C4 son empleadas por 223 estudiantes (105, 59 y 59 respectivamente). Esto refleja la preferencia de los alumnos por el trabajo con los datos numéricos que aparecen en el enunciado. Mientras que las dos primeras estrategias se restringen al trabajo con los términos k-ésimos, en la tercera se llega a la expresión de una generalización expresada verbalmente, que más adelante describiremos con mayor detalle.

La mayoría de los alumnos utilizan el sistema de representación numérico al comienzo del problema, si bien también aparecen transformaciones entre términos k-ésimos en los sistemas de representación verbal y gráfico.

La generalización es expresada tanto verbal como algebraicamente.

Por lo indicado hasta el momento, podemos concluir que los alumnos utilizan los cuatro sistemas de representación (numérico, verbal, gráfico y algebraico) considerados para las progresiones.

En general, a partir de la información que generan las estrategias inductivas utilizadas por los estudiantes en este problema y sus frecuencias correspondientes, podemos concluir:

- Predomina el trabajo de los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico. El sistema de representación numérico es el que emplean con mayor frecuencia los alumnos en la resolución de este problema.
- El sistema de representación verbal es empleado por 141 estudiantes como último sistema de representación que utilizan en su respuesta a este problema.

Estudiantes que no Generalizan

El sistema de representación numérico es el empleado con mayor frecuencia por los alumnos que no expresan la generalización en este problema. De los alumnos que no generalizan, 117 utilizan en su respuesta únicamente transformaciones relativas al sistema de representación numérico. Esto se observa en los estudiantes que emplean las estrategias T2 o T2-TSN.

En general, se observan tres formas diferentes entre los alumnos que restringen su trabajo a los términos k-ésimos. Por un lado, 184 alumnos realizan una transformación al sistema de representación numérico al comienzo de su resolución (T2). Por otro lado, 19 empiezan por una transformación sintáctica en el sistema de representación verbal (TSV). Y únicamente un estudiante de los que no generalizan hace una transformación al sistema de representación gráfico (T4).

La aparición del sistema de representación verbal al comienzo de la resolución es empleada por los alumnos para reformular el enunciado que se les plantea o para, directamente, realizar la tarea de extrapolación que se les propone sin hacer ninguna transformación previa.

El sistema de representación verbal es utilizado por 72 estudiantes, los cuales hacen la última transformación que constituye su estrategia a este sistema de representación (T2-T5, T2-TSN-T5 o TSV).

El sistema de representación gráfico únicamente es empleado por un alumno que utiliza la estrategia T4-T1 para organizar la información que extrae del enunciado.

En este problema, se observa que 187 de los estudiantes que restringen su trabajo a los términos k-ésimos hacen transformaciones que involucran a más de un sistema de representación. Este hecho pone de manifiesto que los alumnos tienden a utilizar más sistemas de representación aparte del numérico, aunque éste sea el predominante.

Estudiantes que Generalizan

En la Tabla 7 - 4 ha quedado recogido que 70 alumnos expresan la generalización en este problema. Todos estos alumnos llegan a la generalización tras haber hecho alguna transformación en el sistema de representación numérico o verbal. De ellos, 66 han realizado una transformación del sistema de representación verbal al numérico (T2) y los otros cuatro hacen una transformación sintáctica verbal antes de expresar la generalización (TSV).

En cuanto al sistema de representación empleado para expresar la generalización, destacamos que hay 69 estudiantes que expresan la generalización verbalmente. De éstos, 59 utilizan la expresión del término general verbalmente como última transformación que constituye su estrategia inductiva (C4).

<u>Uso de la generalización</u>

El único alumno que generaliza algebraicamente utiliza la generalización como herramienta para calcular términos k-ésimos y formular su conjetura.

Todos los estudiantes que generalizan verbalmente, llegan a la generalización al final de su respuesta, tal y como se ve reflejado en la Tabla 7 - 4 (C4 y C6 aparecen al final de la secuencia que determina su estrategia inductiva). Esto pone de manifiesto que los estudiantes no utilizan la generalización verbal como estrategia para calcular términos k-ésimos de la sucesión.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMA 5

En la Tabla 7 - 5 hemos recogido las estrategias inductivas que los estudiantes han utilizado para la resolución del Problema 5, así como sus frecuencias asociadas.

Tabla 7 - 5. Estrategias Inductivas_Problema 5

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	84			84
TSN	90	T. k-ésimos	NO	192
T5	2			
TSN-T5	100			
TSN-C1	1	T. k-ésimos y T. general	SÍ	83
TSN-C1-C1B-TSN	23			
TSN-C1-C1B-TSN-T5	16			
TSN-C1-TSA	3			
TSN-C1-TSA-C1B-TSN	10			
C1-C1B-TSN	4			
TSN-C4	25			
TSN-C4-C4B	1			
Total				359

Se han detectado 11 estrategias inductivas diferentes. Destacamos la variedad de estrategias identificadas entre los estudiantes que generalizan. Los estudiantes que no generalizan emplean una de las tres estrategias identificadas en ese grupo de alumnos. En general, el sistema de representación numérico es el empleado por la mayoría de los alumnos, tanto por los que no generalizan como los que sí lo hacen. Esto se pone de manifiesto al inicio de resolución del problema, donde 269 alumnos hacen su primera transformación en el sistema de representación numérico (aparece TSN). Como un caso particular dentro de este grupo, las estrategias que emplean estos estudiantes con mayor frecuencia son TSN y TSN-T5, que son empleadas por 90 y 100 alumnos, respectivamente.

Sin embargo, en las respuestas de los estudiantes también se observa la utilización de los sistemas de representación numérico, verbal y algebraico, como se detallará más adelante.

Observamos dos aspectos generales respecto a las estrategias inductivas utilizadas por los alumnos:

- Preferencia por el trabajo en el sistema de representación numérico, como ya se ha puesto de manifiesto con anterioridad.
- El sistema de representación verbal únicamente aparece al final de la resolución que llevan a cabo los alumnos y es empleado por 143 estudiantes, en este sentido, tal y como revela la aparición de T5 o C4 al final de la secuencia de la estrategia inductiva correspondiente de esos alumnos.

Estudiantes que no Generalizan

Los alumnos que no generalizan utilizan los sistemas de representación numérico y verbal, que quedan reflejados en el empleo de las transformaciones TSN y T5. En caso de utilizar los dos sistemas de representación, trabajan primero en el sistema de representación numérico y después dan alguna explicación verbalmente.

El sistema de representación verbal (T5) es empleado por 102 alumnos de los que no generalizan. Realizan esta transformación con la intención de explicar sus respuestas. Sin embargo, como se ha descrito en el Capítulo 7, ningún estudiante llega a justificar su conjetura.

Estudiantes que Generalizan

Como ha quedado recogido en la Tabla 7 - 5, 83 estudiantes llegan a expresar la generalización (algebraica o verbalmente) en el Problema 5. De ellos, 79 han trabajado previamente con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (aparece TSN antes de C1 o C4). Los cuatro estudiantes restantes generalizan directamente a partir del enunciado, tal y como recoge la estrategia que siguen: C1-C1B-TSN.

La generalización aparece expresada algebraicamente por 57 estudiantes. Los 26 restantes generalizan verbalmente (aparece C4 como parte de la estrategia inductiva correspondiente).

Uso de la generalización

El uso que los alumnos hacen de la generalización es diferente según el sistema de representación en el que la expresan.

De los estudiantes que generalizan algebraicamente, hay 53 que lo hacen como paso previo al cálculo de nuevos términos k-ésimos de la progresión. Los cuatro restantes lo hacen como última transformación de la estrategia inductiva correspondiente (C1).

De los 26 estudiantes que generalizan verbalmente, 25 lo hacen como finalización de su estrategia concreta, empleando TSN-C4. Estos alumnos consideran que la explicación general que dan a su respuesta es la justificación de su conjetura. Únicamente un alumno utiliza la generalización verbal para calcular un término k-ésimo posteriormente.

Podemos concluir que los estudiantes tienden a utilizar la expresión algebraica de la generalización para calcular términos k-ésimos, mientras que no ocurre así con la generalización verbal.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMA 6

En este apartado se muestran y se describen las diferentes estrategias empleadas por los alumnos en el Problema 6. Recogemos estas estrategias en la Tabla 7 - 6, junto con sus frecuencias asociadas.

Tabla 7 - 6. Estrategias Inductivas_Problema 6

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	36			36
T1	14	T. k-ésimos	NO	315
T1-T5	10			
T1-TSN	36			
T1-TSN-T5	26			
TSG	5			
TSG-T1	93			
TSG-T1-TSN	54			

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
TSG-T1-T5	24			
TSG-T1-TSN-T5	44			
TSG-T6	3			
TSG-T6-T2	1			
T6	2			
T6-T2-TSN	3			
T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	1	T. k-ésimos y T. general	SÍ	8
TSG-T1-C1	1			
TSG-T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	1			
T1-C4	2			
T1-TSN-C4	2			
TSG-T1-C4-C4B	1			
Total				359

Se han identificado 19 estrategias inductivas en la resolución del Problema 6. Del total de la muestra, únicamente ocho estudiantes llegan a expresar la generalización y 315 se limitan al trabajo con términos k-ésimos de la progresión.

Las estrategias inductivas que utilizan con mayor frecuencia los estudiantes hacen referencia a los términos k-ésimos de la progresión y no al término general de la misma (TSG-T1, TSG-T1-TSN y TSG-T1-TSN-T5). Además, entre los 191 alumnos que emplean estas estrategias, identificamos la aparición de los sistemas de representación gráfico y numérico, de manera conjunta. El sistema de representación gráfico también es empleado por algunos alumnos, como se detallará en la descripción del trabajo que llevan a cabo el grupo de estudiantes que generaliza.

Por lo mencionado hasta el momento, podemos deducir que los alumnos emplean los cuatro sistemas de representación en la resolución de este problema: numérico, verbal, gráfico y algebraico.

Identificamos los siguientes aspectos, que se deducen de las estrategias inductivas que emplean los estudiantes en la resolución de este problema:

- Predomina el trabajo en el sistema de representación numérico. De hecho, todos los alumnos que llevan a cabo alguna transformación excepto los 10 que emplean las estrategias TSG, TSG-T6 y T6, utilizan la expresión numérica de los términos k-ésimos de la progresión.

- Los alumnos que utilizan el sistema de representación verbal, tienden a hacerlo en la parte final de la resolución. En la Tabla 7 - 6 se observa que 113 estudiantes finalizan su respuesta verbalmente. Estos alumnos emplean estrategias cuya última transformación es T5, T6 o C4.
- El sistema de representación gráfico es empleado al comienzo de la resolución de este problema por 227 estudiantes, que hacen una transformación sintáctica a partir de la información que se proporciona en el enunciado del problema. Esto se observa en la Tabla 7 - 6 con la aparición de TSG como primer término de la secuencia que determina su estrategia.

Estudiantes que no Generalizan

Es significativa la variedad de estrategias inductivas empleadas por los sujetos en la resolución de este problema.

Se pueden distinguir diferentes grupos de alumnos que trabajan únicamente con los términos k-ésimos atendiendo al sistema de representación que utilizan y las transformaciones que realizan entre esos elementos. En un primer grupo, podemos considerar a los 215 alumnos que combinan los sistemas de representación gráfico y numérico para comenzar la resolución del problema (aparecen TSG-T1 al comienzo de la estrategia inductiva). Además, todos ellos trabajan inicialmente en el sistema de representación gráfico y después transforman los términos k-ésimos al sistema de representación numérico. Esto pone de manifiesto que los alumnos encuentran útil trabajar con el sistema de representación gráfico antes de realizar el cálculo numérico.

En un segundo grupo, consideramos a los 86 alumnos que se centran en el trabajo con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (utilizan las estrategias T1, T1-T5, T1-TSN y T1-TSN-T5).

En un grupo de un menor número de alumnos a los anteriores están los que utilizan el sistema de representación verbal únicamente (T6), el verbal junto con el numérico (T6-T2-TSN), el gráfico con el verbal (TSG-T6) o combinando los tres sistemas de representación en los que se pueden expresar los términos k-ésimos (TSG-T6-T2).

En general, los estudiantes tienden a utilizar más de un sistema de representación en la expresión de los términos k-ésimos. Además, el hecho de que cuando los sistemas de representación numérico y verbal aparecen en una misma estrategia, el sistema de representación numérico antecede al verbal, indica que el sistema de representación verbal es utilizado por estos alumnos para explicar los cálculos que realizan en el sistema de representación numérico.

Estudiantes que Generalizan

Como se deduce de la Tabla 7 - 6, de los ocho estudiantes que llegan a la expresión de la generalización, hay tres que generalizan algebraicamente (aparece C1) y cinco lo hacen verbalmente (C4).

Los tres alumnos que generalizan algebraicamente han trabajado con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico previo a la generalización. Esto se pone de manifiesto por la aparición de T1 como parte de su estrategia. Además, dos de esos tres alumnos han trabajado también en el sistema de representación gráfico (aparece TSG previa a la generalización).

Hay cuatro alumnos que generalizan verbalmente habiendo trabajado previamente con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (utilizan las estrategias inductivas T1-C4 y T1-TSN-C4).

<u>Uso de la generalización</u>

Hay tres alumnos de los que llegan a expresar la generalización, que utilizan la expresión del término general para calcular nuevos términos k-ésimos de la sucesión. Esto se observa en la Tabla 7 - 6 porque en las secuencias que determinan las estrategias vuelven al trabajo con términos k-ésimos después de la generalización (T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN, TSG-T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN y TSG-T1-C4-C4B). Uno de ellos utiliza la generalización para dar respuesta a la tarea de continuación y dos de ellos calculan términos k-ésimos con la intención de comprobar la expresión a la que han llegado al generalizar. Uno de estros tres alumnos mencionados generaliza verbalmente.

Los otros cinco alumnos que expresan la generalización, ya sea verbal o algebraicamente, no la utilizan para hacer ningún cálculo posterior.

Por lo tanto, no se puede decir que exista asociación entre el uso de la expresión del término general y el sistema de representación que los estudiantes emplean.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS PREDOMINANTES EN CADA PROBLEMA

En los epígrafes anteriores hemos hecho referencia a la variedad de estrategias inductivas que se han identificado en la producciones de los estudiantes en los seis problemas. Nuestro interés se centra ahora en la identificación de las estrategias inductivas que emplean con mayor frecuencia los estudiantes, a las que hemos llamado *estrategias inductivas predominantes*, y cuáles son las características de las mismas.

Dada la gran variedad de estrategias identificadas en los problemas, para la identificación de las estrategias inductivas predominantes, hemos elaborado un procedimiento que nos permite agrupar algunas de las estrategias y desestimar aquéllas que son utilizadas por un bajo número de estudiantes. Este procedimiento se basa en los siguientes criterios:

1. Afinidad en el sistema de representación empleado. Consideramos las transformaciones sintácticas en un sistema de representación concreto como trabajo específico dentro de ese sistema. Por ejemplo, las secuencias que incluyan T1 ó T1-TSN pueden estar dentro de un mismo grupo puesto que implican un trabajo en el sistema de representación numérico. Sin embargo, dado que consideramos que el sistema de representación en el que inician su trabajo a partir del enunciado es una característica relevante, tenemos en cuenta que cuando las transformaciones sintácticas son utilizadas al comienzo de las respuestas de los estudiantes, deben estar en diferentes grupos. Por ejemplo, T1-TSN será considerada en un grupo diferente de TSG-T1-TSN.
2. En los grupos se deben reflejar las diferencias entre los alumnos que generalizan y los que no lo hacen.
3. Las estrategias en las que se generalice verbal y algebraicamente deben estar en grupos diferentes.

4. Tras haber hecho las agrupaciones según los criterios anteriores, hemos eliminado los grupos de estrategias cuya frecuencia de aparición es inferior a 5.

En las tablas que presentamos desde la Tabla 7 - 7 hasta la Tabla 7 - 12, mostramos estas frecuencias para cada uno de los problemas. Entre paréntesis aparecen las transformaciones o los cambios en el sistema de representación que pueden aparecer o no dentro de las estrategias de un mismo grupo. Por ejemplo, si observamos T1(-TSN-T5), estamos haciendo referencia a las estrategias T1, T1-TSN o T1-TSN-T5.

Tabla 7 - 7. Estrategias predominantes Problema 1

Estrategias Predominantes	Frec.
T2(-TSN)	148
T2(-TSN)-T5	154
TSV(-T2-TSN)	7
T2(-TSN)-C1(-TSA)-C1B-TSN	9
T2-TSN-C4	7
Otras (1)	1

Tabla 7 - 8. Estrategias predominantes Problema 2

Estrategias Predominantes	Frec.
TSN	56
TSN-T5	220
TSN-C1	5
TSN(-C1/C4-T7)-C1B-TSN	7
Otras (3)	3

Tabla 7 - 9. Estrategias predominantes Problema 3

Estrategias Predominantes	Frec.
T1(-TSN)	161
T1(-TSN)-T5	60
TSG-T1(-TSN)	16
T1(-TSN)-C4	45
TSG-T1(-TSN)-C4	8
Otras (9)	17

Tabla 7 - 10. Estrategias predominantes Problema 4

Estrategias Predominantes	Frec.
T2(-TSN)	117
T2(-TSN)-T5	67
TSV	5
TSV(-T2-TSN)	14
T2(-TSN)-C4	65
Otras (4)	6

Tabla 7 - 11. Estrategias predominantes Problema 5

Estrategias Predominantes	Frec.
TSN	90
TSN-T5	100
TSN-C1(-TSA)-C1B-TSN	33
TSN-C1-C1B-TSN-T5	16
TSN-C4	25
Otras (5)	11

Tabla 7 - 12. Estrategias predominantes Problema 6

Estrategias Predominantes	Frec.
T1(-TSN)	50
T1(-TSN)-T5	36
TSG	5
TSG-T1(-TSN)	147
TSG-T1(-TSN)-T5	68
Otras (10)	17

CONCLUSIONES DE LAS ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EMPLEADAS

En este apartado, extraemos las principales conclusiones sobre las estrategias inductivas que emplean los estudiantes en los seis problemas que constituyen la prueba. Para ello, nos basamos en la descripción llevada a cabo en los epígrafes anteriores para cada uno de los problemas.

En cuanto a las características generales de las estrategias inductivas que emplean los estudiantes, se pone de manifiesto la preferencia de los alumnos por el sistema de representación numérico en todos los problemas.

En los problemas en los que aparece el sistema de representación gráfico, los estudiantes lo utilizan en los primeros pasos que realizan a partir del enunciado de los problemas (TSG).

El sistema de representación verbal es utilizado preferentemente por los estudiantes en su último paso.

En general, tal y como ya se señaló en el Capítulo 6, los estudiantes que generalizan en todos los problemas son una minoría. Extraemos las conclusiones de cada uno de los apartados que hemos distinguido en la descripción de cada uno de los problemas:

1. Estudiantes que no generalizan.
2. Estudiantes que generalizan.

Estudiantes que no Generalizan

Entre los estudiantes que no generalizan, vuelve a aparecer la preferencia por el trabajo con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico.

En los problemas en los que los términos dados en el enunciado están expresados gráficamente, también se observa la aparición del sistema de representación gráfico en el trabajo de los términos k-ésimos por parte de los estudiantes.

Como se comentaba en la preferencia general de los estudiantes, entre los que no generalizan, aparece el sistema de representación verbal asociado a la última transformación que hacen los estudiantes en la resolución de los problemas.

Estudiantes que Generalizan

En todos los problemas, hemos identificado alumnos que llegan a expresar algebraicamente la generalización y otros que lo hacen verbalmente.

Únicamente en el Problema 2, se ha dado el caso de un estudiante que expresa la generalización en ambos sistemas de representación.

Lo más frecuente es que los estudiantes lleguen a formular la generalización tras haber hecho transformaciones con los términos k-ésimos de la progresión entre sistemas de representación. Son escasos los estudiantes que llegan directamente a la generalización.

Uso de la generalización

En general, se han observado dos usos de la generalización por parte de los estudiantes que llegan a expresarla. En algunos casos, la utilizan para calcular términos k-ésimos de la progresión. En otros casos, su uso es como método de validación.

Lo más habitual es que los estudiantes relacionen la expresión del término general algebraicamente con el cálculos de términos k-ésimos y que la generalización verbal se asocie a un intento, por parte de los estudiantes, de justificar su resolución al problema.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS SEGÚN CURSOS

Tras la descripción general de las estrategias inductivas que emplean los estudiantes en los diferentes problemas, contemplamos la posibilidad de que haya diferencias significativas en el empleo de las mismas según el curso al que pertenezcan los estudiantes. Con la intención de identificar si existen diferencias significativas en ese sentido, pasamos a analizar el empleo de la estrategia inductiva según el curso, con lo que damos respuesta al objetivo 9 de esta investigación (O_9).

En el Anexo G recogemos las tablas con las frecuencias de aparición de utilización de cada estrategia inductiva en 3º y en 4º de ESO. A partir de esos datos, en los gráficos que presentamos para cada uno de los problemas (figuras que van desde la Figura 7 - 2 a la Figura 7 - 7), recogemos las frecuencias de utilización de las diferentes estrategias inductivas según el porcentaje del curso correspondiente para cada uno de los problemas.

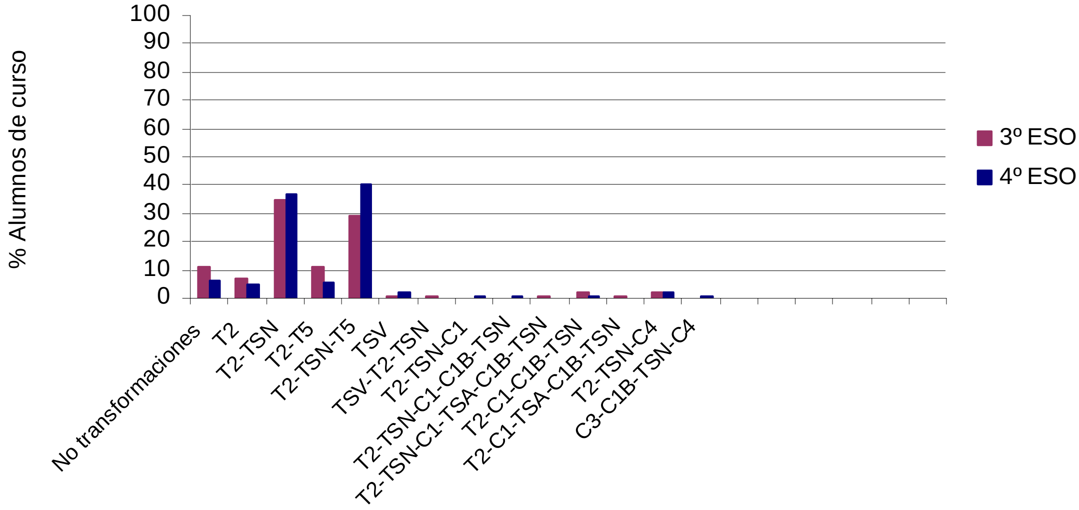


Figura 7 - 2. Estrategia Inductiva Problema 1 según curso

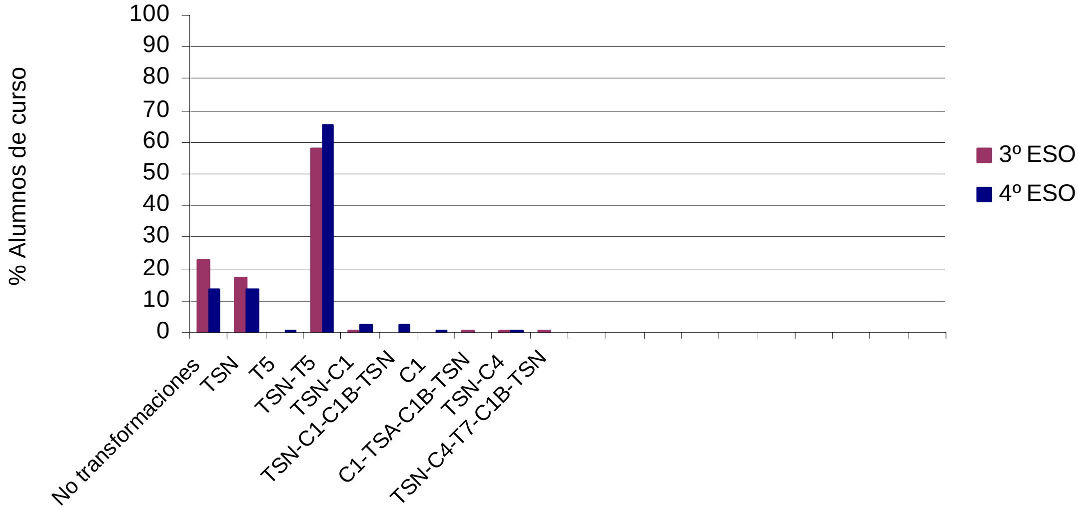


Figura 7 - 3. Estrategia Inductiva Problema 2 según curso

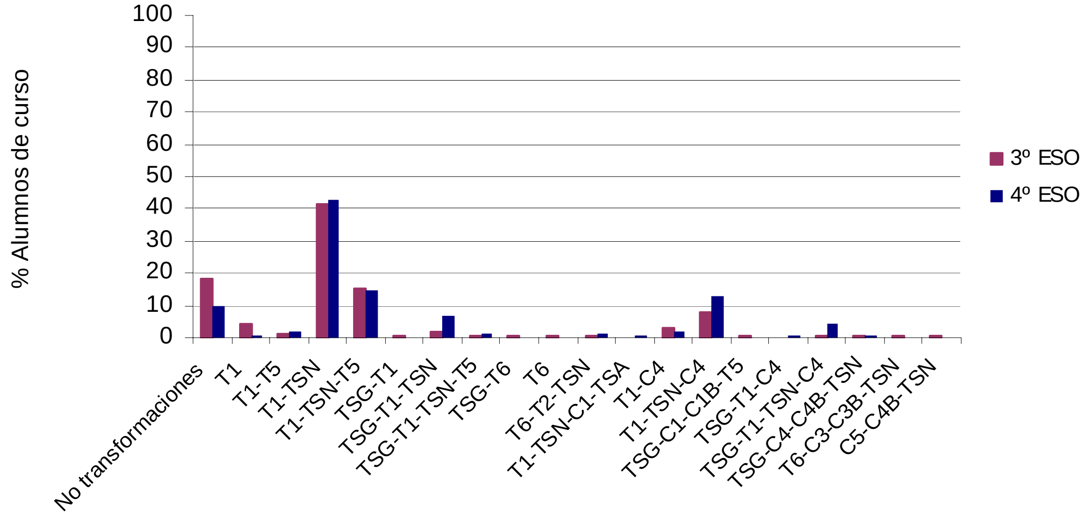


Figura 7 - 4. Estrategia Inductiva Problema 3 según curso

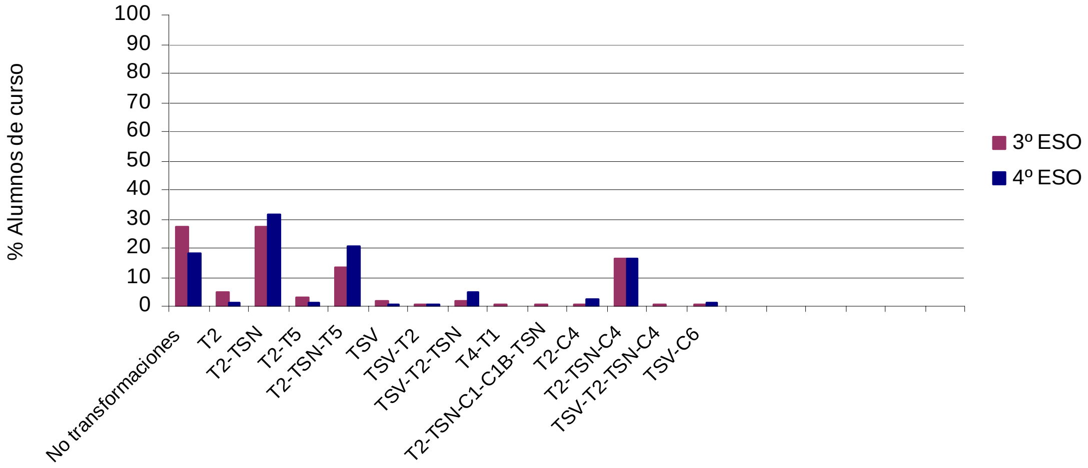


Figura 7 - 5. Estrategia Inductiva Problema 4 según curso

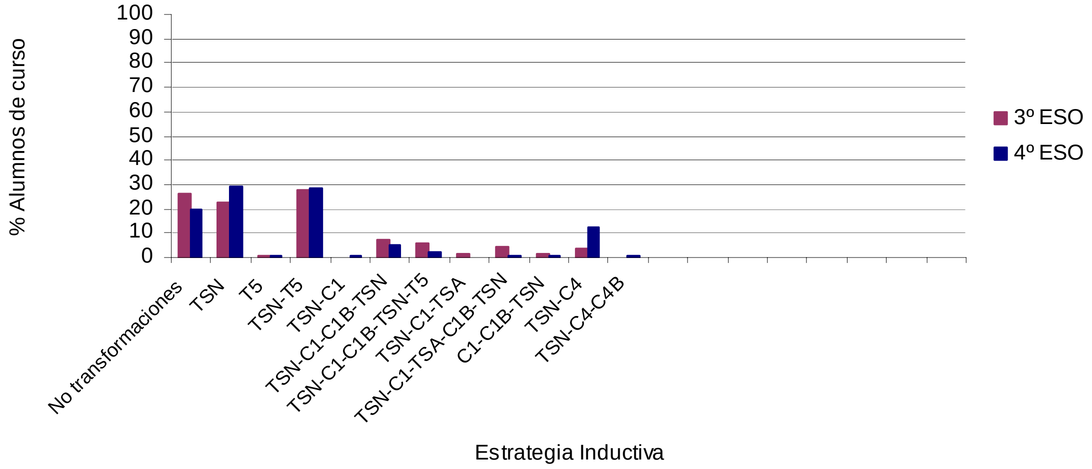


Figura 7 - 6. Estrategia Inductiva Problema 5 según curso

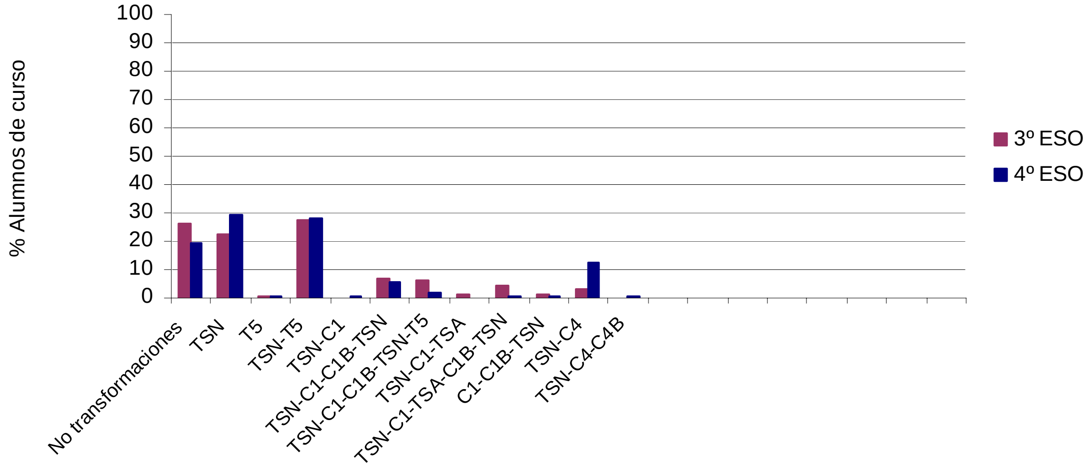


Figura 7 - 7. Estrategia Inductiva Problema 6 según curso

Con la intención de indicar si las diferencias que se observan en los gráficos de barras entre los diferentes cursos son significativa, realizamos los correspondientes contrastes de hipótesis relativos a las diferentes estrategias inductivas para cada uno de los problemas. El p-valor asociado (o, en su defecto, el estadístico exacto de Fisher correspondiente) determina la significatividad global de la diferencia. En caso de que las diferencias sean significativas, los valores de los residuos corregidos indican las estrategias que dan lugar a esas diferencias. Este análisis lo hemos realizado mediante el SPSS 13.0 y los resultados están recogidos en el Anexo G.

Diferencias Significativas según Cursos

El estadístico exacto de Fischer (0,088) indica que, en el número de estudiantes que emplean cada estrategia inductiva (ver Anexo G) en el Problema 1, no hay diferencias significativas debidas al curso.

El análisis basado en el contraste de hipótesis chi-cuadrado (estadístico de Fisher = 0,007) sobre las estrategias inductivas utilizadas en el Problema 2, revela que hay diferencias significativas en la utilización de las estrategias debidas al curso (ver Anexo G). Según los valores de los residuos corregidos (2,4) (ver Anexo G), podemos decir que las diferencias se deben al empleo de la estrategia TSN-C1-C1B-TSN por un número significativamente mayor de estudiantes de 4º que de 3º de ESO. Sin embargo, esta diferencia no es muy notable, ya que el residuo corregido no difiere de manera importante de 2 (valor límite que mide la importancia de la significatividad).

El contraste de hipótesis basado en tablas de contingencia de las diferentes estrategias inductivas identificadas en las producciones de los estudiantes en el Problema 3, permite afirmar que existen diferencias significativas debidas al curso en el empleo de las estrategias inductivas. (estadístico de Fisher = 0,011), tal y como recogemos en el Anexo G. Esta significatividad se debe a las diferencias que se establecen en el número de alumnos de 3º de ESO que no realizan ninguna transformación (residuo corregido = 2,3) y a la frecuencia con la que los estudiantes de 4º de ESO que emplean las estrategias TSG-T1-TSN y TSG-T1-TSN-C4, que es significativamente superior en este curso (residuos corregidos = 2,3 y 2,4) (ver Anexo G). Aunque las diferencias mencionadas son significativas, no son importantes, ya que los residuos corregidos no difieren de manera importante del valor límite (2).

En el Problema 4, no se observan diferencias significativas en las frecuencias de empleo de las diferentes estrategias inductivas empleadas, tal y como se deduce del valor del estadístico exacto de Fisher (0,106) para el contraste de hipótesis de los diferentes niveles de la variable Estrategia Inductiva según el curso (ver Anexo G).

Según el análisis llevado a cabo (ver Anexo G) para las estrategias inductivas según el curso utilizadas en la resolución del Problema 5, el estadístico exacto de Fisher (0,003) indica que hay diferencias significativas según el curso en los diferentes niveles de la variable Estrategia Inductiva. Los residuos corregidos desvelan que la estrategia inductiva de generalización TSN-C4 es empleada por un número significativamente mayor de estudiantes de 4º de ESO (residuo corregido = 3,2).

Según el análisis mostrado en el Anexo G para las estrategias inductivas empleadas por los estudiantes de los dos cursos en el Problema 6, el valor del estadístico exacto de Fisher (0,129) indica que no hay diferencias significativas debidas al curso en las estrategias inductivas que emplean los estudiantes en la resolución del Problema 6.

Resumen de Diferencias Significativas de Estrategia Inductiva según Cursos

En la Tabla 7 - 13 recogemos un resumen de los resultados presentados hasta el momento sobre las diferencias significativas de las frecuencias de empleo de las estrategias inductivas según el curso. En la columna Estrategia Inductiva, hemos identificado las estrategias en los diferentes problemas que dan lugar a esa significatividad (los residuos corregidos han sido, en valor absoluto, mayores que 2, tal y como se indicó en el epígrafe anterior).

Tabla 7 - 13. Diferencias significativas de Estrategia Inductiva según cursos

Problema	Diferencia significativa por Curso	Estrategia Inductiva	Curso	
			3º	4º
1	No			
2	Sí	TSN-C1-C1B-TSN	-	+
3	Sí	TSG-T1-TSN	-	+
		TSG-T1-TSN-C4	-	+
4	No			
5	Sí	TSN-C4	-	+
6	No			

"+" indica que es significativamente superior a la media de las frecuencias de los cursos
"-" indica que es significativamente inferior a la media de las frecuencias de los cursos

Según se puede observar en la Tabla 7 - 13, únicamente se han identificado diferencias significativas debidas al curso en la resolución de los problemas 2, 3 y 5. Además, esas diferencias se deben a las frecuencias identificadas para una estrategia en los problemas 2 y 5 y dos estrategias en el Problema 3. En todos los casos, las diferencias se dan en el sentido de que la frecuencia de estudiantes que realizan las estrategias inductivas es superior en los estudiantes de 4º de ESO que en los de 3º de ESO.

Considerando el escaso número valores de la variable Estrategia Inductiva en las que se han detectado estas diferencias y el valor de los residuos corregidos (en ningún caso en los que se han identificado las diferencias significativas son superiores a 3,2) permiten concluir que no se observan diferencias claras en el empleo de las estrategias inductivas según el curso.

ESTRATEGIA INDUCTIVA SEGÚN CENTROS

De una manera análoga al análisis de las estrategias inductivas según los cursos, abordamos ahora el análisis según los centros. Pretendemos analizar si existen o no diferencias significativas en el empleo de las diferentes estrategias inductivas según el centro al que pertenecen los alumnos. Con ello, daremos respuesta al objetivo 11 de esta investigación (O_{11}), que hace referencia a las estrategias inductivas según el centro.

En el Anexo H recogemos las tablas con las frecuencias de aparición de utilización de cada estrategia inductiva según el centro al que pertenecen los estudiantes (Granada, Madrid, Cúllar-Vega y Teruel). A partir de esos datos, en los gráficos que presentamos para cada uno de los problemas (figuras que van desde la Figura 7 - 8 a la Figura 7 - 13), recogemos las frecuencias de utilización de las diferentes estrategias inductivas según el porcentaje del centro correspondiente para cada uno de los problemas.

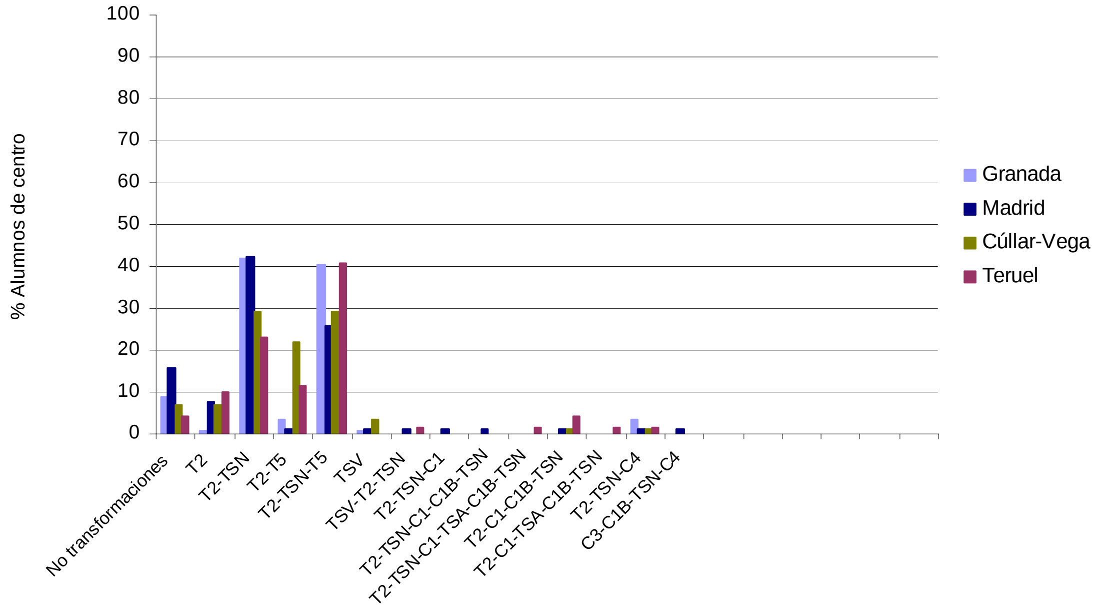


Figura 7 - 8. Estrategia Inductiva Problema 1 según centro

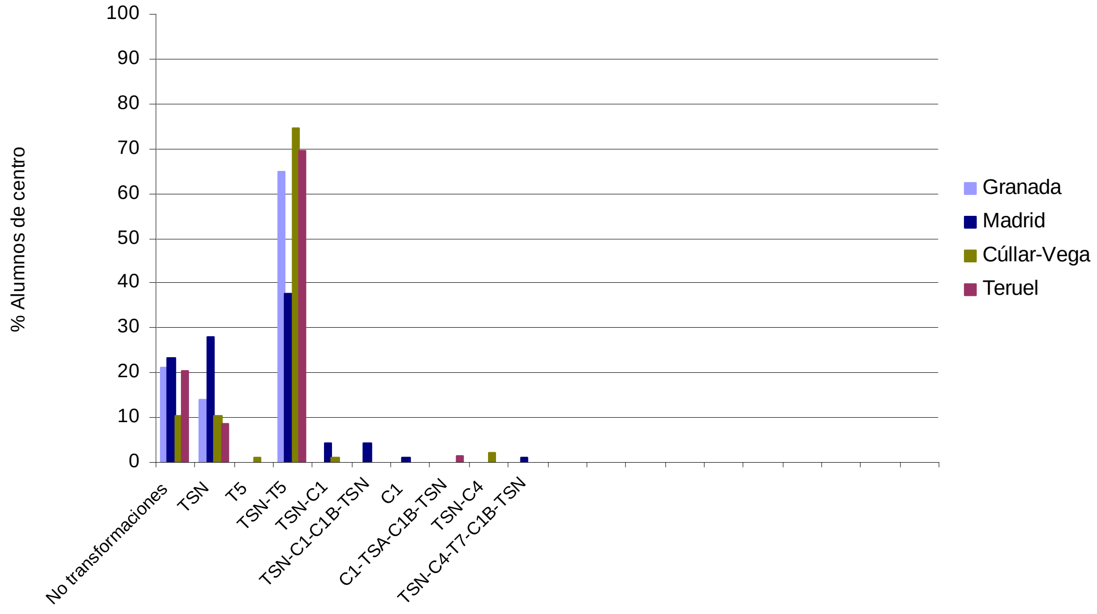


Figura 7 - 9. Estrategia Inductiva Problema 2 según centro

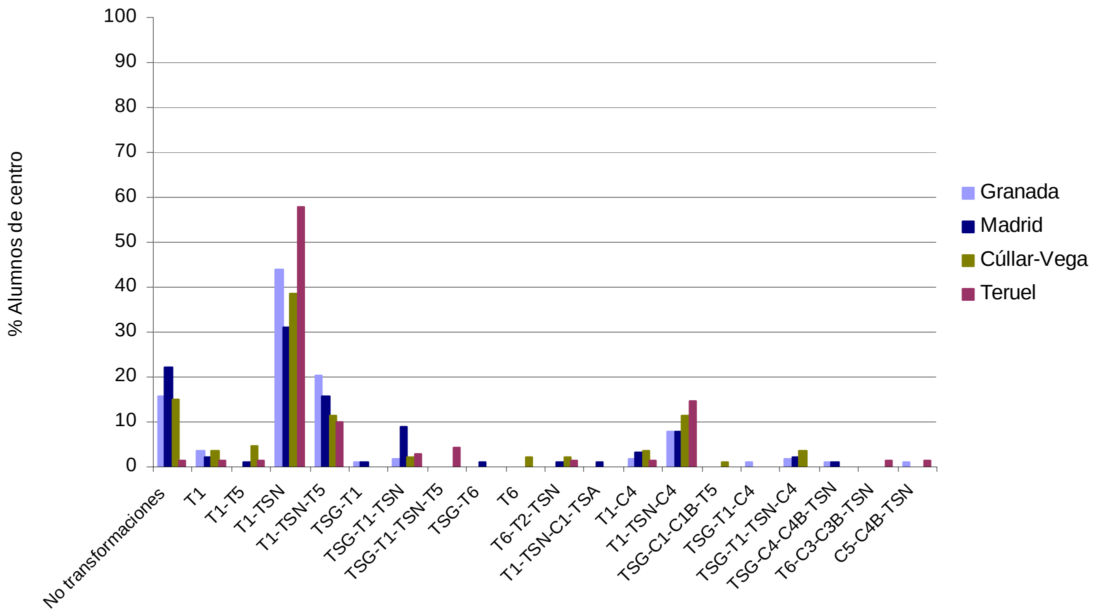


Figura 7 - 10. Estrategia Inductiva Problema 3 según centro

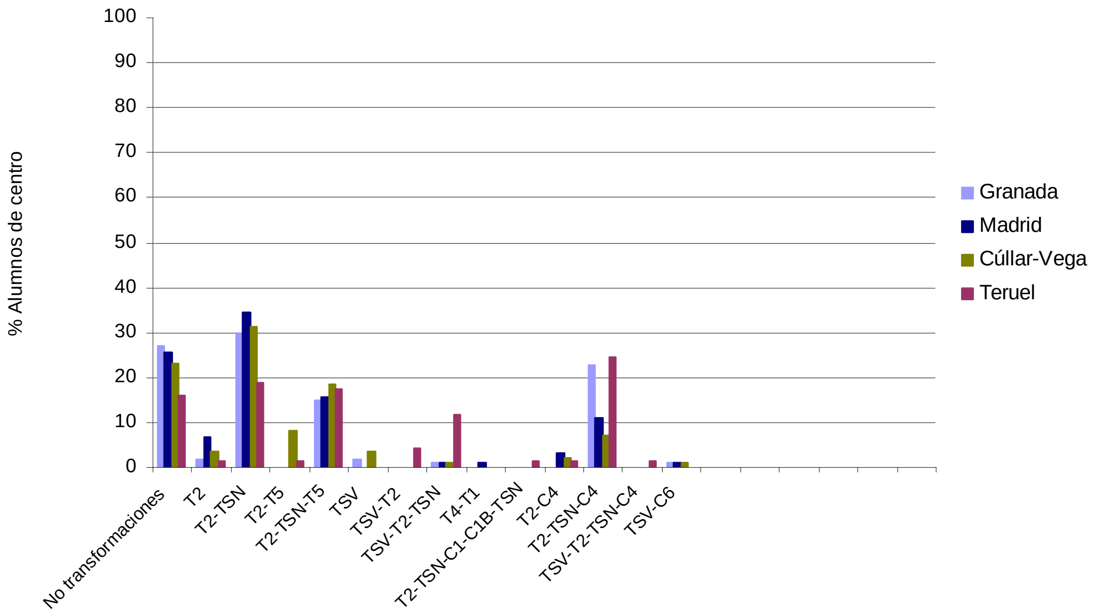


Figura 7 - 11. Estrategia Inductiva Problema 4 según centro

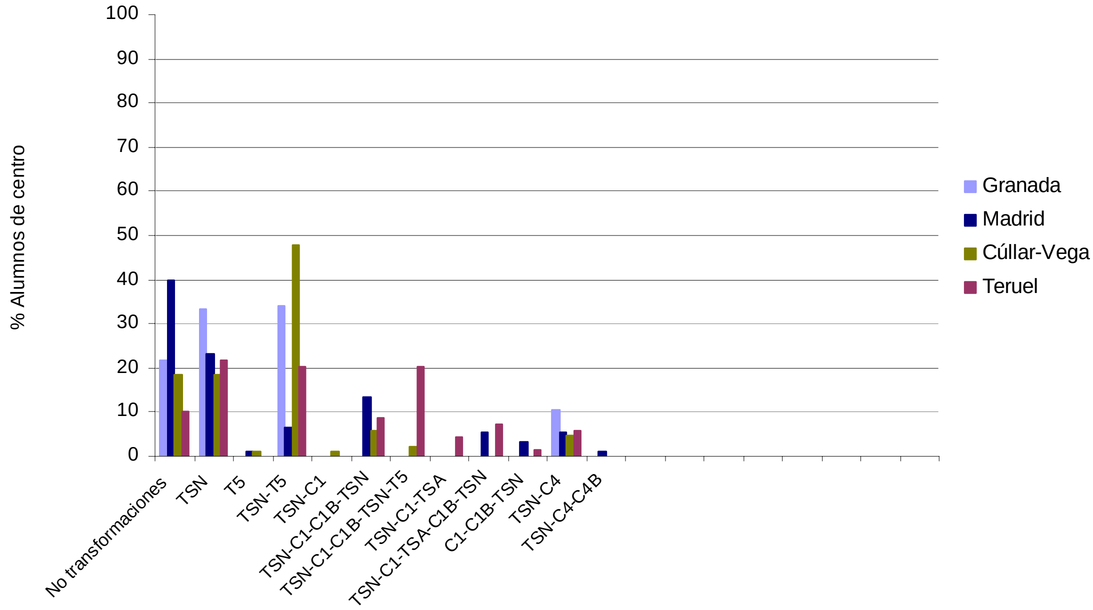


Figura 7 - 12. Estrategia Inductiva Problema 5 según centro

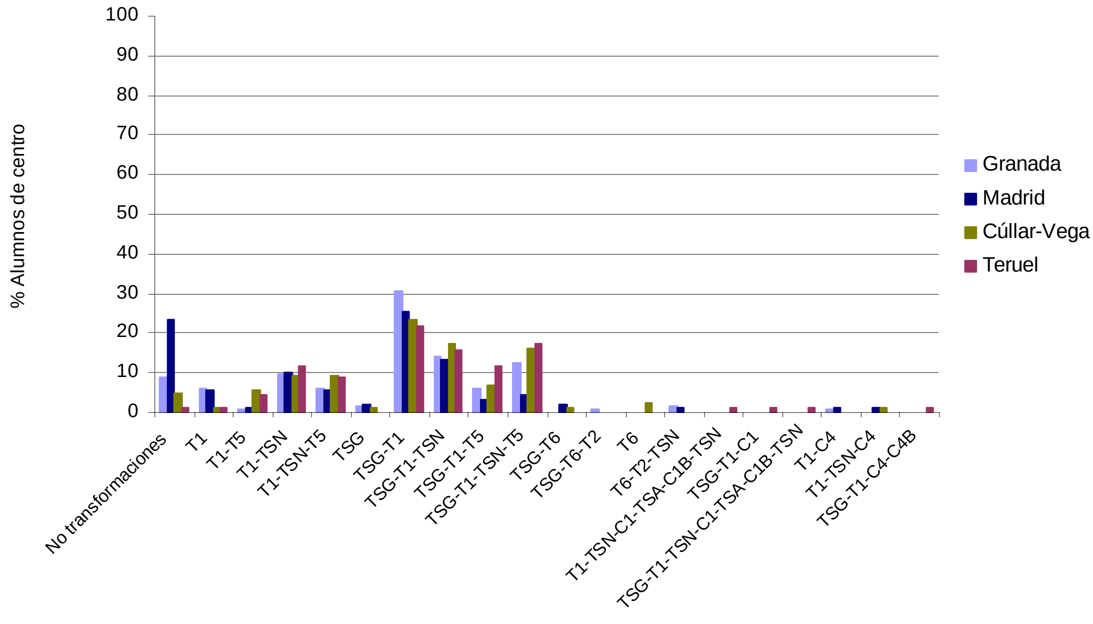


Figura 7 - 13. Estrategia Inductiva Problema 6 según centro

Diferencias Significativas según Centros

Mediante un contraste de hipótesis basado en la chi-cuadrado, realizado para cada uno de los seis problemas, podemos afirmar que en todos los problemas hay diferencias significativas según las frecuencias de empleo de las estrategias inductivas que utilizan los estudiantes de diferentes centros en un mismo problema (los estadísticos exactos de Fisher correspondientes son menores que 0,05, teniendo en cuenta que el contraste de hipótesis se ha realizado con un nivel de significación del 95%) (ver Anexo H). Dada la variedad de estrategias inductivas en las que se observan diferencias significativas, presentamos los resultados de un modo general en el siguiente epígrafe.

Resumen de Diferencias Significativas según Centros

Pese a las distintas estrategias inductivas en las que se identifican diferencias significativas, destacamos que las estrategias inductivas que se emplean con mayor frecuencia en los diferentes centros, son las mismas que se emplean con mayor frecuencia por los estudiantes que conforman la muestra.

Hay distingas estrategias para cada uno de los seis problemas de la prueba en las que se han identificado diferencias significativas entre los centros. Los valores de los residuos corregidos (ver Anexo H) que son mayores que 2 o menores que -2 indican las estrategias en las que se dan las diferencias. El signo de estos residuos indican si la diferencia significativa en el número de estudiantes que utilizan una determinada estrategia inductiva está por encima de la frecuencia con la que esa misma frecuencia es utilizada por estudiantes de otros centros (residuos corregidos mayores que 2) o por debajo (residuos corregidos menores que -2). En la Tabla 7 - 14 resumimos la información del análisis presentado en el Anexo H para estas diferencias según los centros.

Tabla 7 - 14. Diferencias significativas de Estrategia Inductiva según centros

Problema	Estrategia Inductiva	CENTROS			
		Granada	Madrid	Cúllar	Teruel
1	T2	-			
	T2-TSN	-	-	+	
	T2-T5	-	-	+	
	T2-TSN-T5		-		

Problema	Estrategia Inductiva	CENTROS			
		Granada	Madrid	Cúllar	Teruel
	T2-TSN-C1-TSA-C1B-TSN				+
	T2-C1-C1B-TSN				+
	T2-C1-TSA-C1B-TSN				+
2	TSN		+		
	TSN-T5		-	+	
	TSN-C1		+		
	TSN-C1-C1B-TSN		+		
	C1-TSA-C1B-TSN				+
	TSN-C4			+	
3	T1-T5			+	
	T1-TSN		-		+
	TSG-T1-TSN		+		
	T6			+	
4	T2		+		
	T2-TSN				-
	T2-T5	-		+	
	TSV-T2				+
	TSV-T2-TSN				+
	T2-TSN-C1-C1B-TSN				+
	T2-TSN-C4	+		-	+
	TSV-T2-TSN-C4				+
5	TSN	+			
	TSN-T5		-	+	
	TSN-C1-C1B-TSN	-	+		
	TSN-C1-TSA				+
	TSN-C1-TSA-C1B-TSN	-			+
	C1-C1B-TSN		+		
	TSN-C1-C1B-TSN-T5	-	-		+
6	T1-T5			+	
	TSG-T1-TSN-T5				
	T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN				+
	TSG-T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN				+
	TSG-T1-C4-C4B				+
	TSG-T1-C1				+
	T6			+	

"+" indica que es significativamente superior a la media de las frecuencias de los centros
"-" indica que es significativamente inferior a la media de las frecuencias de los centros

En general, las estrategias en las que se han identificados las diferencias significativas (39) hacen referencia al trabajo únicamente con término k-ésimos (21) y también a la expresión general de la progresión (18). A partir del resumen de resultados presentados en la Tabla 7 - 14, presentamos las siguientes reflexiones para cada uno de los centros a los que pertenecen los estudiantes de la muestra:

- En los estudiantes de Granada se observan diferencias significativamente inferiores y superiores a la media en diferentes tipos de estrategias, en las que no se identifica ninguna tendencia clara.
- Los estudiantes de la muestra pertenecientes al centro de Madrid se diferencian de los demás porque emplean con una frecuencia inferior estrategias en las que los términos k-ésimos se expresan sólo numéricamente o numérica y verbalmente (T2-TSN, T2-T5, T2-TSN-T5 o TSN-T5, según los diferentes problemas a los que hagamos referencia). Por otro lado, en los problemas 2 y 5 estos estudiantes destacan por el empleo de estrategias inductivas de generalización algebraica (C1 como parte de las transformaciones que se observan en la estrategia).
- Los estudiantes de Cúllar-Vega suelen utilizar estrategias en las que no llegan a expresar la generalización (no aparece C) y trabajan con los términos k-ésimos en los sistemas de representación numérico únicamente (T2-TSN) o numérico y verbal (T2-T5, TSN-T5 o T1-T5, según el problema) con una frecuencia superior al resto de los centros.
- En el centro de Teruel, los estudiantes destacan porque tienden a estar por encima de lo esperado en las estrategias en las que se identifican diferencias significativas. Esta situación se sigue observando en las estrategias en las que llegan a expresar el término general de la progresión (aparece C en la estrategia).

Las diferencias identificadas no parecen tener relación con el historial académico de los estudiantes de los diferentes centros (ver Capítulo 5 de esta memoria) debido a que el currículo que siguen en los centros es el mismo, las entrevistas con los profesores nos ofrecieron una información similar sobre los estudiantes y precisamente en los centros en los que mayor número de diferencias significativas se detectan (Madrid, Cúllar-Vega y Teruel) son los centros que además utilizan el mismo libro de texto. Por tanto, es posible que las diferencias identificadas en el trabajo de los estudiantes según los centros, se deban al proceso de enseñanza que llevan a cabo los diferentes profesores. Por ejemplo, es posible que el profesor de los alumnos del centro de Teruel haga mayor hincapié en que los estudiantes lleguen a expresar la generalización a partir del trabajo con casos particulares o que el profesor de los alumnos de Cúllar-Vega preste una especial atención a las explicaciones que dan en la resolución de problemas.

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS DE SIETE ESTUDIANTES

En este capítulo nos centramos en las producciones de siete estudiantes de la muestra, que han sido seleccionados en función de las estrategias inductivas predominantes identificadas en el Capítulo 7. El procedimiento de selección ha sido explicado en el Capítulo 5.

Pretendemos poner de manifiesto la utilidad de los elementos teóricos principales de esta investigación (pasos de razonamiento inductivo y estrategias inductivas) para la descripción de las producciones de unos estudiantes concretos. Este análisis complementa al análisis realizado en capítulos anteriores, en los que se ha hecho con los elementos teóricos por separado (en el Capítulo 6 para los Pasos y en el Capítulo 7 para las Estrategias Inductivas) con todos los estudiantes de la muestra o con grupos de ellos. En este capítulo centramos la descripción de las producciones de siete estudiantes[1] en los pasos de razonamiento inductivo que emplean y las estrategias inductivas que utilizan en cada problema. A partir de esta descripción, presentamos el procedimiento que sigue cada estudiante en cada uno de los problemas, una reflexión sobre las regularidades del trabajo de cada estudiante en los seis problemas y, por último, elaboramos el perfil de cada estudiante (que recoge los procedimientos del mismo en los seis problemas).

Los perfiles consideran los pasos y los sistemas de representación que se observan en las producciones de los estudiantes. Se presentan teniendo en cuenta las propuestas de continuación/extrapolación y justificación de los problemas. Las

---

[1] Las producciones de los siete estudiantes están recogidas en el Anexo I de esta memoria.

flechas que aparecen en los esquemas de los perfiles indican el sentido y el orden en el que se observan los pasos del razonamiento inductivo en las producciones de los estudiantes. Estos esquemas finales (uno para cada estudiante) representan el modelo real de razonamiento inductivo que observamos en las producciones. Con esto, perseguimos dar respuesta al objetivo 7 de esta investigación (O_7), referente a los perfiles.

En la última parte de este capítulo, comparamos los diferentes perfiles de los siete estudiantes y los organizamos según la complejidad en el proceso de razonamiento inductivo que los estudiantes ponen de manifiesto, teniendo como base el modelo teórico considerado. Con esto, destacamos la posibilidad de identificar diferentes niveles de complejidad en el razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de los problemas planteados en el contexto de este trabajo.

ESTRATEGIA INDUCTIVA Y ESTUDIANTES SELECCIONADOS

Según los criterios de selección expuestos en el Capítulo 5 y atendiendo a las frecuencias con las que se identifican las estrategias inductivas predominantes, presentadas en el capítulo anterior, recogemos en la Tabla 8 - 1 las estrategias inductivas de cada problema, en función de las cuáles seleccionamos a los estudiantes cuyas producciones son analizadas en este capítulo.

Tabla 8 - 1. Estrategias de los siete estudiantes

Problema	1	2	3	4	5	6
Estrategia inductiva	T2(-TSN) T2(-TSN)-T5	TSN TSN-T5	T1(-TSN) T1(-TSN)-T5 TSG-T1(-TSN) T1(-TSN)-C4	T2(-TSN) T2(-TSN)-T5 TSV(-T2-TSN) T2(-TSN)-C4	TSN TSN-T5 TSN-C1(-TSA)-C1B-TSN TSN-C1-C1B-TSN-T5 TSN-C4	T1(-TSN) T1(-TSN)-T5 TSG-T1(-TSN) TSG-T1(-TSN)-T5

Los siete estudiantes escogidos pueden considerarse representantes de los sujetos que emplean las estrategias inductivas predominantes. Los recogemos en la Tabla 8 - 2, mostrando la estrategia inductiva que utilizan en cada problema de la prueba.

Tabla 8 - 2. Estrategia Inductiva empleadas por los siete estudiantes seleccionados

Estudiante	Problema					
	1	2	3	4	5	6
3	T2-TSN-T5	TSN-T5	TSG-T1-TSN-C4	T2-TSN-C4	TSN-T5	TSG-T1-TSN-T5
7	T2-TSN	TSN-T5	T1-TSN	T2-TSN	TSN	TSG-T1-TSN
49	T2-TSN-T5	TSN-T5	T1-TSN-T5	TSV-T2	TSN-T5	TSG-T1
119	T2-TSN-T5	TSN-T5	T1-TSN-T5	T2-TSN-T5	TSN-C4	T1-TSN-T5
325	T2-C1-TSA-C1B-TSN	TSN-T5	T6-C3-C3B-TSN	TSV-T2-TSN	TSN-C1-TSA-C1B-TSN	TSG-T1-TSN
349	T2-C1-C1B-TSN	TSN	TSG-T1-TSN	T2-TSN	TSN-C1-C1B-TSN	T1-TSN
356	T2-T5	TSN-T5	T1-C4	T2-C4	TSN-C1-C1B-TSN-T5	TSG-T1-T5

De la Tabla 8 - 2 se pueden deducir, a partir de la Estrategia Inductiva empleada en cada problema, el sistema de representación en el que trabaja antes, durante y después de la generalización. A continuación, describimos el trabajo de estos estudiantes según los pasos y la información que se extrae de las estrategias inductivas. Complementamos esta información con los pasos del razonamiento inductivo que realizan, en los siguientes epígrafes.

ESTUDIANTE 3

Problema 1

El Estudiante 3 expresa numéricamente los términos de la progresión a partir de los datos, que están recogidos verbalmente en el enunciado (T2 es la primera transformación que realiza en su estrategia inductiva). Expresa cada término de la progresión en función del anterior mediante la relación recurrente adecuada (53 = 50 + 3, 56 = 53 + 3, y así sucesivamente). Por tanto, este sujeto llega a formular una conjetura mediante la expresión numérica de los términos k-ésimos por los que se le preguntan tras la identificación de un patrón adecuado.

En la producción del estudiante, se observa que después de la realización de los cálculos en el sistema de representación numérico (TSN), los explica verbalmente (T5).

En la Figura 8 - 1 resumimos el procedimiento utilizado por este estudiante según el modelo teórico de razonamiento inductivo y la información que se desprende de la estrategia inductiva utilizada por el Estudiante 3 en el Problema 1.

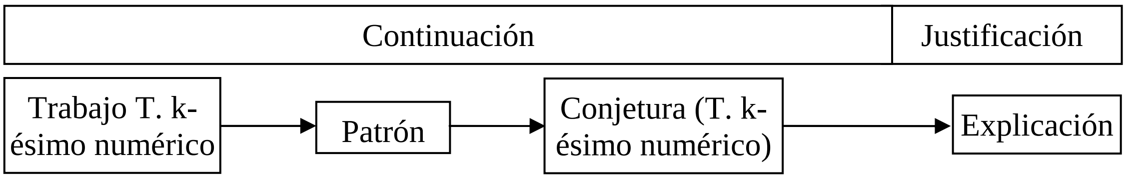


Figura 8 - 1. Procedimiento del Estudiante 3 en Problema 1

Problema 2

El Estudiante 3 sigue un procedimiento análogo con respecto al problema anterior. Efectúa los cálculos necesarios para realizar la continuación en el sistema de representación numérico (TSN). En esos cálculos, en los que se ponen de manifiesto transformaciones sintácticas numéricas (equivalente a 7 = 4 + 3, 13 = 7 + 6, y así sucesivamente), se observa la identificación de la relación recurrente que se corresponde con un patrón adecuado para este problema, el cuál le permite llegar a formular su conjetura en el sistema de representación numérico.

Finalmente, da una explicación verbal en la que explica el patrón que ha seguido para dar su respuesta.

Por lo tanto, el esquema que recoge el procedimiento es el mismo que en problema anterior, por lo que queda expresado en la Figura 8 - 1.

Problema 3

En primer lugar, el estudiante presenta una representación gráfica en la que refleja el término de la progresión por el que pregunta el problema. Esta representación le permite descomponer la figura de forma que muestra haber identificado un patrón (adecuado) para este problema. A partir de esta representación, expresa numéricamente el patrón a través de la descomposición 1322 + 1322 + 1 + 1, lo cuál le lleva a formular la conjetura en el sistema de representación numérico.

Finalmente, cuando el estudiante busca una justificación a su respuesta, da una explicación: *al número de baldosas blancas hay que añadirle dos más arriba, dos más abajo y una más a cada lado*. Esto constituye una generalización verbal (C4), en este problema, que es usada como explicación (uno de los usos que habíamos identificado en el capítulo anterior para la generalización en algunos estudiantes).

En la Figura 8 - 2 recogemos el procedimiento que sigue el Estudiante 3 en la resolución del Problema 3.

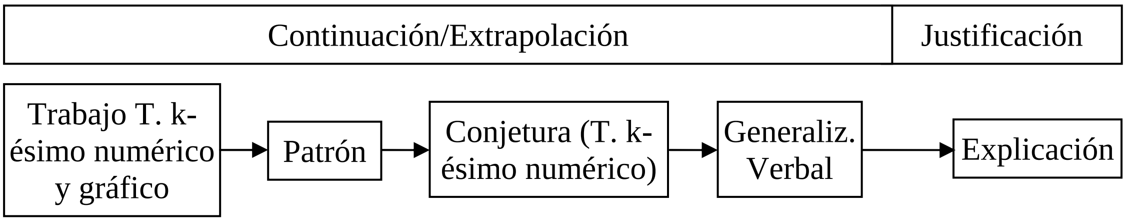


Figura 8 - 2. Procedimiento del Estudiante 3 en Problema 3

Problema 4

Inicia su resolución a partir de los mismos términos k-ésimos por los que pregunta el Problema 4, expresados numéricamente (T2). Con los datos numéricos que trabaja (en los que no se expresa el trabajo con términos k-ésimos de la progresión) realiza algunos cálculos para dar respuesta a la extrapolación requerida (TSN). En las transformaciones sintácticas numéricas pone de manifiesto un patrón no adecuado para el problema (22 + 22 o 44 x 2 y 230 + 230 o 460 x 2). Siguiendo este patrón, llega a la formulación de la conjetura, proponiendo como respuesta los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico.

Finalmente, da una explicación a la resolución del problema que ha llevado a cabo. En esta explicación llega a expresar la generalización verbalmente (C4), que queda recogida en la siguiente expresión del Estudiante 3: *se suman los equipos ya que juegan todos con todos y luego se multiplican por dos para ver los partidos*). Por tanto, se trata de una generalización verbal que es utilizada como explicación a su conjetura.

El procedimiento del Estudiante 3 en el Problema 4 lo recogemos en la Figura 8 - 3.

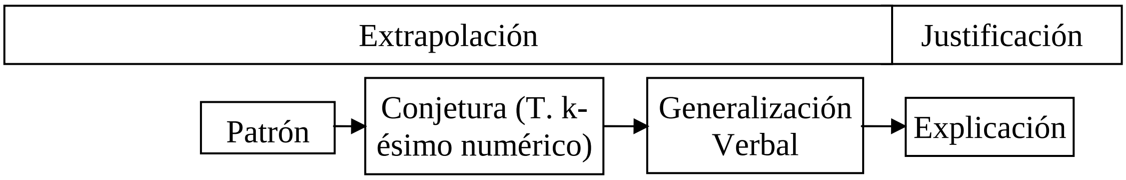


Figura 8 - 3. Procedimiento del Estudiante 3 en Problema 4

Problema 5

A partir de los términos k-ésimos que presenta el enunciado, el estudiante realiza los cálculos que le permiten transformar términos k-ésimos de la progresión dentro del sistema de representación numérico (TSN) y formula una conjetura en el sistema de representación numérico. Finalmente, da una explicación al procedimiento que ha seguido, en la que pone de manifiesto que ha identificado un patrón adecuado en la forma recurrente (*va la secuencia de 3 en 3*).

El Estudiante 3 sigue el procedimiento que reflejamos en la Figura 8 - 4 en la resolución de este problema.

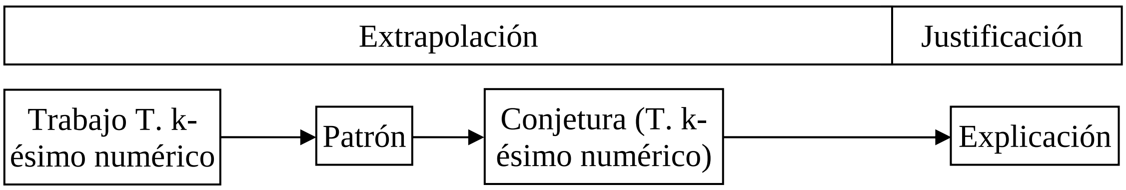


Figura 8 - 4. Procedimiento del Estudiante 3 en Problema 5

Problema 6

El Estudiante 3 continúa la progresión expresando los términos k-ésimos gráficamente (TSG). En este sistema de representación identifica un patrón adecuado. Posteriormente transforma la información al sistema de representación numérico (T1), en el que pone de manifiesto un patrón que no es adecuado al problema. Realiza los cálculos necesarios para formular su conjetura en el sistema de representación numérico (TSN) y formula su conjetura en este sistema de representación.

Por último, da una explicación verbal sobre el procedimiento que ha seguido en la resolución (*se cuentan los cuadrados que tiene cada piso y se multiplican por cuatro que son los palillos que tiene cada cuadrado*).

En la Figura 8 - 5 resumimos el procedimiento que sigue el Estudiante 3 en este problema.

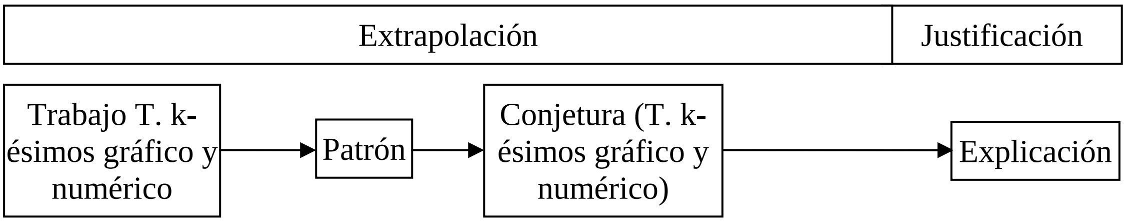


Figura 8 - 5. Procedimiento del Estudiante 3 en Problema 6

Regularidades del Estudiante 3

Este alumno trabaja con los términos k-ésimos que se le presentan en el enunciado de los problemas para dar respuesta a las tareas de extrapolación y continuación. En todos los problemas llega a la identificación de un patrón, aunque no siempre sea expresado correctamente en todos los sistemas de representación que utiliza. Por ejemplo, en el Problema 6, identifica el patrón adecuado en el sistema de representación gráfico pero no lo hace así en el numérico.

El patrón recurrente se corresponde con patrones adecuados en problemas en los que el estudiante trabaja con términos k-ésimos y los expresa sólo numéricamente (problemas 1, 2, 3 y 5).

La justificación que da a su respuesta se basa en explicaciones sobre los cálculos que ha realizado. La generalización, en los casos en los que llega, surge como parte de esas explicaciones y la expresa verbalmente. En ningún caso, utiliza la generalización para calcular los términos k-ésimos que le permiten dar respuesta a las tareas de continuación o extrapolación. Se trata del uso de la generalización verbal que surge como intento de justificación de su resolución (problemas 3 y 4).

El Estudiante 3 únicamente utiliza el sistema de representación verbal cuando explica su respuesta.

La visualización juega un papel importante para este alumno porque se apoya en las representaciones gráficas que aparecen en dos de los problemas para llevar a cabo las tareas de continuación y extrapolación.

Teniendo en cuenta la descripción llevada a cabo sobre las producciones del Estudiante 3 en los seis problemas, recogemos los procedimientos en el esquema de la Figura 8 - 6.

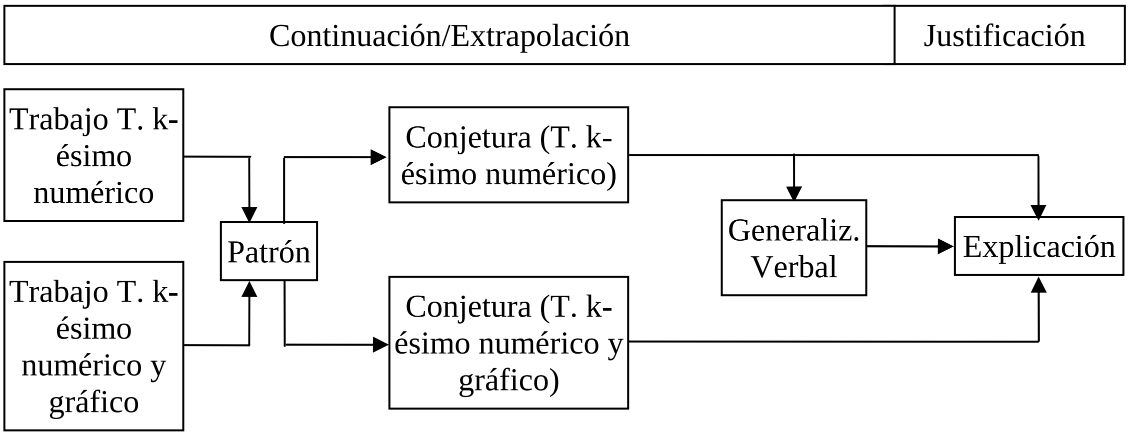


Figura 8 - 6. Perfil del Estudiante 3

ESTUDIANTE 7

Problema 1

El Estudiante 7 intenta dar respuesta al Problema 1 a partir de algunos cálculos que efectúa con los términos k-ésimos expresados numéricamente que extrae del enunciado (T2-TSN). Sin embargo, no da ninguno de los pasos identificados para el razonamiento inductivo diferente del trabajo con los términos k-ésimos, como recogemos en la Figura 8 - 7.

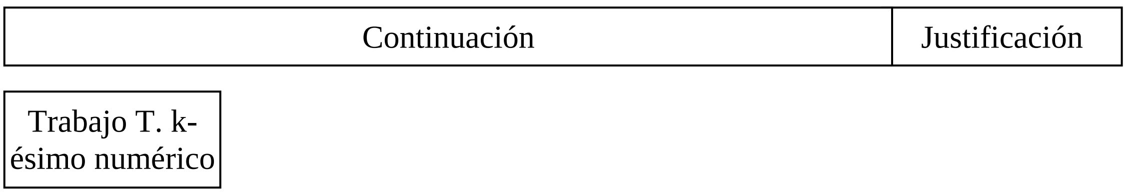


Figura 8 - 7. Procedimiento del Estudiante 7 en el Problema 1

Problema 2

En la producción de este estudiante se observa el trabajo con los términos k-ésimos expresados numéricamente (en el mismo sistema de representación en el que se presentan en el enunciado), según indica TSN, que es la primera transformación de la estrategia inductiva que emplea. Por los cálculos que efectúa y por la explicación verbal de esos cálculos (*entre cada número la diferencia es de dos números más*), podemos concluir que el Estudiante 7 ha identificado un patrón (adecuado) para este problema basándose en la relación recurrente de la progresión. Este patrón es el que ha seguido para formular su conjetura mediante términos k-ésimos en el sistema de representación numérico. Recogemos el procedimiento del Estudiante 7 en la resolución del Problema 2 en la Figura 8 - 8.

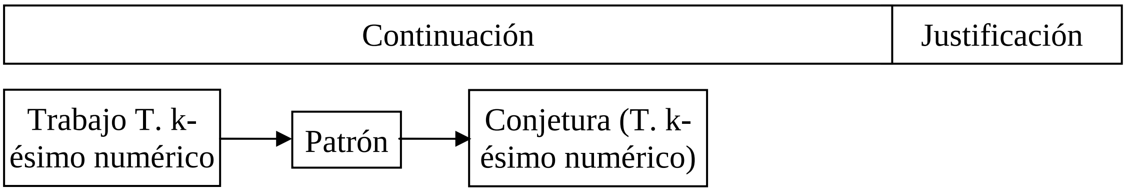


Figura 8 - 8. Procedimiento del Estudiante 7 en el Problema 2

Problema 3

El Estudiante 7 emplea una regla de tres para dar respuesta al Problema 3. Por lo tanto, el estudiante formula su conjetura tras la aplicación de este algoritmo. Como ya señalamos en el Capítulo 5, la regla de tres no permite analizar el razonamiento inductivo.

Problema 4

La respuesta del alumno a este problema se restringe a la obtención de términos k-ésimos del enunciado (T2). Si embargo, este estudiante no trabaja con ellos como casos particulares, aunque sí realiza algunos cálculos (TSN). Este estudiante llega a formular una conjetura en este problema pero no hay evidencias de que haya identificado ningún patrón. En la Figura 8 - 9 recogemos este procedimiento, que se reduce a la formulación de conjetura.

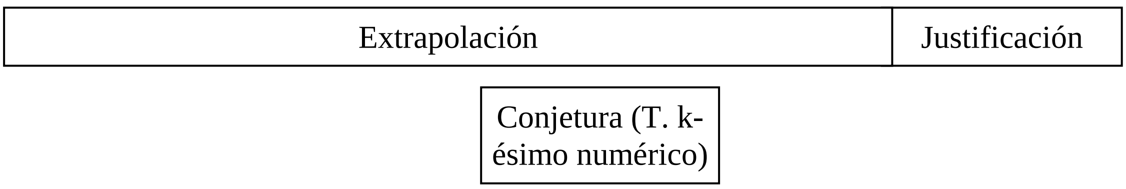


Figura 8 - 9. Procedimiento del Estudiante 7 en Problema 4

Problema 5

El Estudiante 7 trabaja con los términos k-ésimos de la progresión en el sistema de representación numérico (TSN). Su respuesta se restringe al cálculo de diferentes términos k-ésimos de la progresión en el sistema de representación numérico. Aunque no llega a la formulación de la conjetura para la extrapolación propuesta, pone de manifiesto la identificación de un patrón, ya que en todos sus cálculos, obtiene cada término k-ésimo de la sucesión a partir del término anterior (*1 + 3 = 4, 4 + 3 = 7, 7 + 3 = 10... 111 + 3 = 114, 114 + 3 = 117...*). Resumimos el procedimiento del Estudiante 7 en la resolución del Problema 5 en el esquema de la Figura 8 - 10.

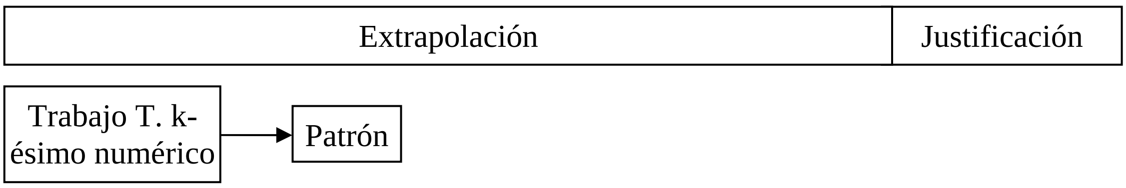


Figura 8 - 10. Procedimiento del Estudiante 7 en el Problema 5

Problema 6

Este estudiante restringe su producción en el Problema 6 al trabajo con los términos k-ésimos en los sistemas de representación gráfico y numérico. Inicialmente, hace una continuación de las escaleras mediante puntos que representan los escalones (TSG). Posteriormente, expresa numéricamente lo que recoge la representación gráfica (T1).

Llega a formular la conjetura para la tarea de continuación (numéricamente).

En la Figura 8 - 11 resumimos el procedimiento descrito.

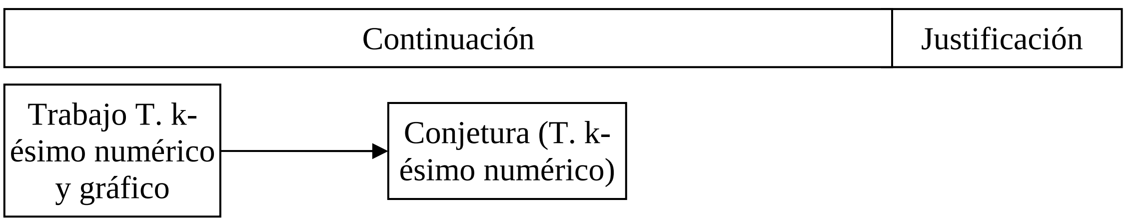


Figura 8 - 11. Procedimiento del Estudiante 7 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 7

Este alumno se restringe al trabajo con los términos k-ésimos de la progresión. En todos los problemas, excepto en el Problema 6, este trabajo es expresado numéricamente. En tres problemas no es clara la identificación de los pasos del proceso inductivo porque no va más allá del trabajo con términos k-ésimos (Problema 1), porque aplica la regla de 3 (Problema 3), o porque únicamente pone de manifiesto la formulación de una conjetura (Problema 4).

El Estudiante 7 llega a la identificación de patrones (en los problemas en los que lo consigue), a partir del trabajo con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico, excepto en el Problema 6, que también se apoya en la representación gráfica de los mismos.

En la Figura 8 - 12 recogemos el perfil de este estudiante, basándonos en los procedimientos descritos en los diferentes problemas que constituyen la prueba.

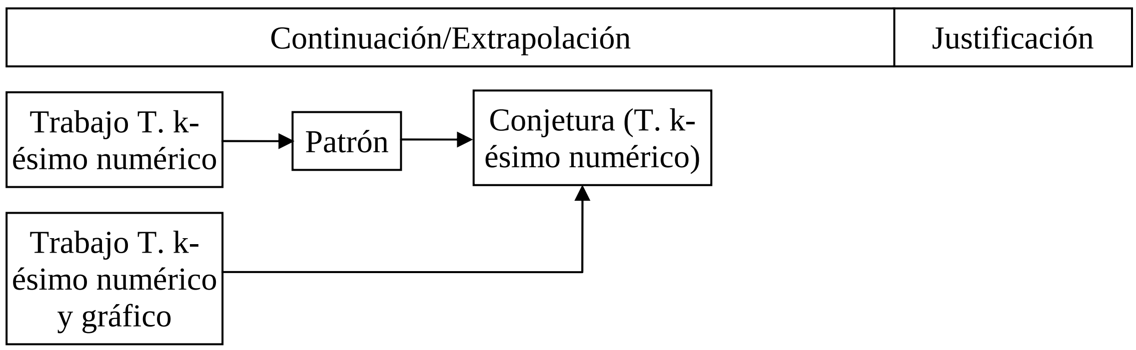


Figura 8 - 12. Perfil del Estudiante 7

ESTUDIANTE 49

Problema 1

El Estudiante 49 trabaja con los términos k-ésimos de la progresión expresados numéricamente y efectúa los cálculos (TSN) que le permiten dar respuesta a la continuación de la progresión (expresando esos términos numéricamente). Los cálculos que realiza ponen de manifiesto que este estudiante ha identificado un patrón basado en la relación recurrente de la progresión (obtiene un término sumándole tres unidades al término anterior), que se corresponde con un patrón adecuado al problema.

Por último, repite parte del enunciado como explicación del procedimiento de resolución seguido: *si aumenta 3 películas cada día serán 3 más que el día anterior*. No la consideramos parte del proceso de validación porque se trata de información recogida de esa forma en el enunciado.

En la Figura 8 - 13 resumimos el procedimiento del Estudiante 49 en la resolución del Problema 1.

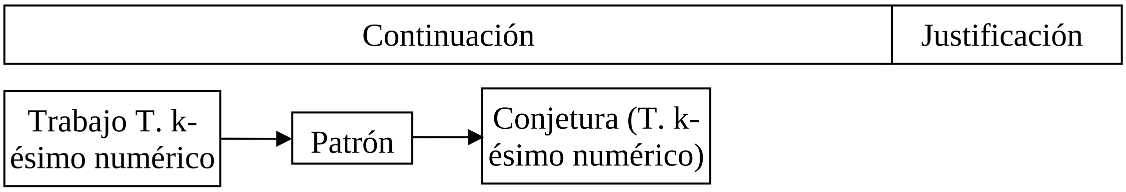


Figura 8 - 13. Procedimiento del Estudiante 49 en el Problema 1

Problema 2

Este estudiante expresa numéricamente los términos que constituyen la continuación de la progresión.

Según observamos en la explicación verbal posterior (*he puesto esos números porque en los números que pone cada vez se le suma dos al número anterior*), el Estudiante 49 ha efectuado los cálculos necesarios numéricamente (TSN) a partir de los términos k-ésimos que se presentan en el enunciado e identifica un patrón (adecuado para el Problema 2) basado en la relación recurrente. Esto le lleva a formular una conjetura (mediante la expresión de los términos de la progresión numéricamente). El procedimiento queda recogido en la Figura 8 - 14.

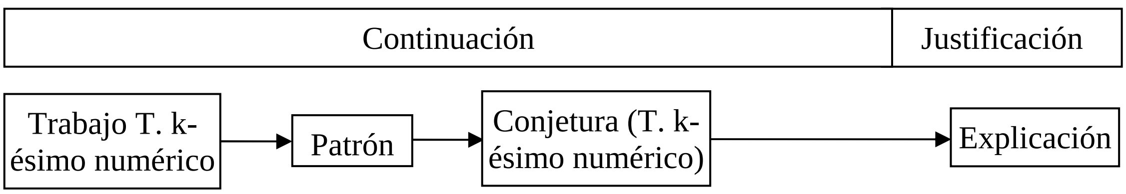


Figura 8 - 14. Procedimiento del Estudiante 49 en el Problema 2

Problema 3

El Estudiante 49 extrae los datos numéricos necesarios del enunciado que le permiten plantear una regla de tres. La aplicación de este algoritmo le permite responder al Problema 3. La regla de tres no se ha considerado dentro de las estrategias inductivas en este trabajo, como ya se identificó en el Capítulo 5.

Problema 4

Este alumno realiza una transformación sintáctica verbal sobre el enunciado en la que aparecen las soluciones del Problema 4. Según se desprende de las explicaciones que da, el Estudiante 49 detecta un patrón (no adecuado para este problema). Sin haber trabajado previamente con los términos k-ésimos de la progresión sobre los que da información el enunciado del problema, este alumno expresa verbalmente: *en la autonómica cada equipo tiene que jugar con los 21 equipos restantes 2 veces y en la nacional cada equipo tiene que jugar con los 229 equipos restantes dos veces.* Aunque este patrón no es adecuado para el problema, el alumno lo utiliza para formular su conjetura numéricamente (T2).
En la Figura 8 - 15 recogemos el perfil del Estudiante 49 en la resolución del Problema 4.

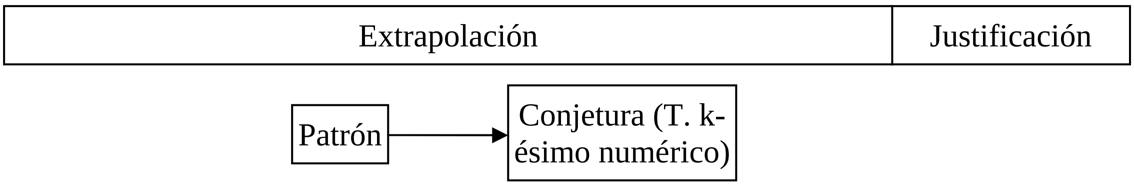


Figura 8 - 15. Procedimiento del Estudiante 49 en el Problema 4

Problema 5

En este problema, el Estudiante 49 realiza un cálculo numérico para dar respuesta a la extrapolación propuesta (TSN). En la explicación verbal que da posteriormente (*si las diferencias de cada número es 3 pues se multiplica la diferencia por 234 y te sale el número*), se observa que ha trabajado con los términos k-ésimos y que a partir de ahí, identifica un patrón (adecuado al problema). Este procedimiento es el que utiliza para formular la conjetura, expresando numéricamente el término que requiere el Problema 5. La Figura 8 - 14 recoge el procedimiento de este estudiante en la resolución del Problema 5.

Problema 6

A partir de los términos k-ésimos de la progresión, expresados gráficamente en el enunciado, el Estudiante 49 propone los términos que constituyen la continuación requerida en ese mismo sistema de representación (TSG). A continuación realiza el recuento que le permite formular su conjetura en el sistema de representación numérico (T1). En la producción de este estudiante se observa la identificación del patrón (adecuado al problema) en el sistema de representación gráfico pero no lo traslada al sistema de representación numérico, en el que expresa la continuación haciendo un recuento sobre los términos que ha expresado gráficamente.

El procedimiento que ha seguido el Estudiante 49 en el Problema 6 queda recogido en la Figura 8 - 16.

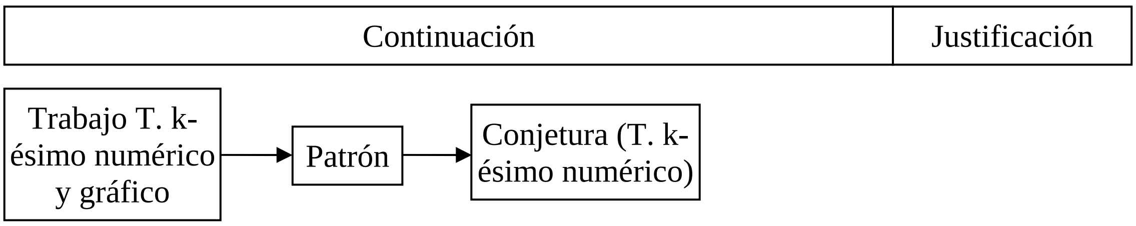


Figura 8 - 16. Procedimiento del Estudiante 49 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 49

El Estudiante 49 se centra en el trabajo con términos k-ésimos expresados numéricamente. Sólo en el Problema 6 utiliza el sistema de representación gráfico en este paso del proceso inductivo.

A partir de los términos k-ésimos, identifica un patrón (adecuado en unos casos y en otros no) y lo aplica para la formulación de su conjetura, que es expresada mediante los términos k-ésimos presentados numéricamente como respuesta a las tareas de continuación o extrapolación.

En todos los problemas, excepto en el 6, el Estudiante 49 da alguna explicación verbal de sus conjeturas en la que pone de manifiesto la identificación de un patrón, en los casos en los que la alcanza. Este sujeto recurre al sistema de representación verbal como explicación al procedimiento que ha seguido, por lo que consideramos que ha empleado la explicación como proceso de validación de su conjetura.

En la Figura 8 - 17 recogemos el perfil del Estudiante 49, basándonos en los procedimientos descritos en los seis problemas.

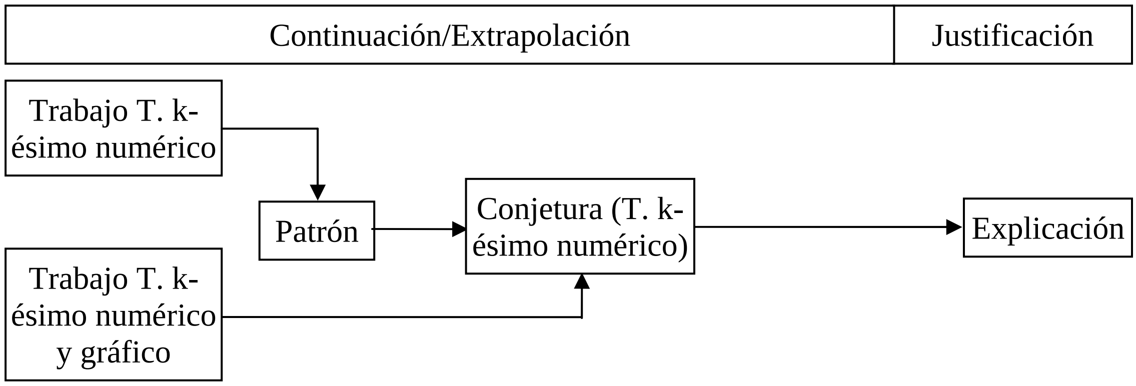


Figura 8 - 17. Perfil del Estudiante 49

ESTUDIANTE 119

Problema 1

El Estudiante 119 realiza algunos cálculos con los datos numéricos que extrae del enunciado (T2), que son con los que realiza transformaciones en el sistema de representación numérico (TSN) para formular su conjetura en el sistema de representación numérico. En la explicación verbal (T5), que es considerada por el estudiante justificación de su respuesta, pone de manifiesto que ha identificado un patrón (no adecuado para el Problema 1), que es el que sigue en la formulación de la conjetura (*porque en los 5 días siguientes después de alquilar 50 alquila 53*).
En la Figura 8 - 18 recogemos el procedimiento que sigue este estudiante en la resolución del Problema 1.

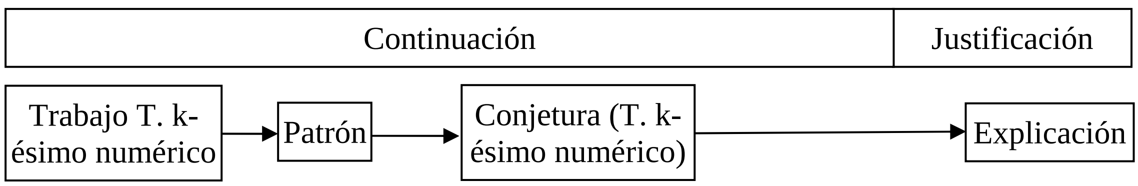


Figura 8 - 18. Procedimiento del Estudiante 119 en el Problema 1

Problema 2

Este estudiante trabaja con los términos k-ésimos de la progresión del enunciado y con otros que calcula a partir de los primeros (TSN). Organiza todos los términos de forma que une los términos consecutivos con una flecha y expresa la diferencia entre ellos y formula la conjetura en el sistema de representación numérico.

Finalmente, con la intención de justificar su respuesta, da una explicación verbal (T5) en la que pone de manifiesto el patrón que ha identificado: *la progresión es sumar a lo que sumas 2, es decir, al primer número de la serie es 3 se le suma 4 y te da 7, luego al 4 se le suma 2 y te da 6 y esto se lo sumas al 7 y así progresivamente*. Se trata de un patrón basado en la relación recurrente, que es adecuado al problema planteado.

Resumimos el procedimiento que sigue el Estudiante 119 en la resolución de este problema en la Figura 8 - 19.

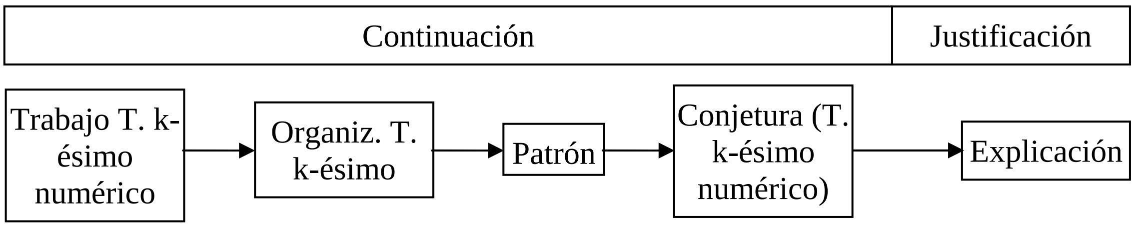


Figura 8 - 19. Procedimiento del Estudiante 119 en el Problema 2

Problema 3

Este alumno realiza en este problema algunos cálculos en el sistema de representación numérico a partir de lo que ha observado en el término k-ésimo del enunciado (T1-TSN), sin trabajar con los términos k-ésimos de la progresión. En esos cálculos pone de manifiesto un patrón adecuado al problema (que posteriormente confirma con la explicación verbal final). Tras el trabajo con los términos k-ésimos, formula su conjetura numéricamente y, por último da la explicación verbal: *pues si 1320 baldosas blancas están en fila pongo debajo y arriba de las baldosas blancas 1320 baldosas grises y para terminar como hay tres filas le pongo 3 en cada lateral para rodearlas*. Este patrón es el que ha utilizado para la formulación de la conjetura, como queda recogido en el procedimiento que representamos en la Figura 8 - 20.

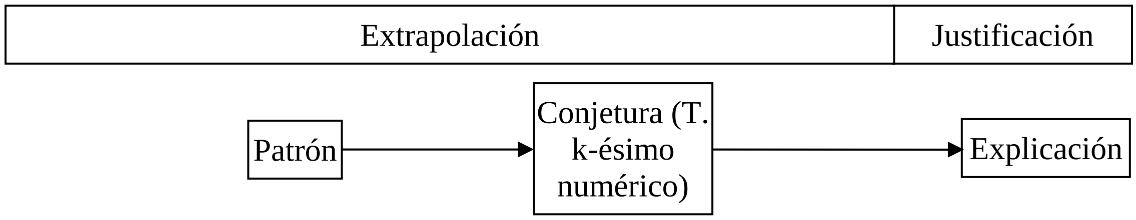


Figura 8 - 20. Procedimiento del Estudiante 119 en el Problema 3

Problema 4

En la producción del Estudiante 119 se observan los mismos pasos que en el problema anterior. La explicación verbal que da el estudiante en este caso, considerándola justificación de su conjetura, es: *si hay 22 equipos pues quito a mi equipo porque no voy a jugar contra mí y quedan 21 y 229 estos dos números los multiplico por los 2 partidos que voy a jugar y todos los partidos que juego*.

Por tanto, el esquema que representa el procedimiento de este alumno es el mismo que en el Problema 3 y ha quedado recogido en la Figura 8 - 20.

Problema 5

El Estudiante 119 pone de manifiesto que ha realizado cálculos con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico, en el que aparecen en el enunciado: 234 x 3 – 2. El 3 y el 2 de la expresión anterior son obtenidos del trabajo con los términos k-ésimos.

Este estudiante pone de manifiesto que ha identificado un patrón (adecuado al problema), que lo utiliza para la formulación de la conjetura en el sistema de representación numérico en la explicación verbal que da finalmente: *cada número multiplicado en el lugar donde está por 3 y da el resultado le restas 2 y te da el número que está en ese lugar*. En esa explicación, llega a expresar verbalmente la generalización del patrón identificado y su intención es justificar su conjetura, aunque realiza una explicación. Recogemos el procedimiento descrito en la resolución de este problema en el esquema de la Figura 8 - 21.

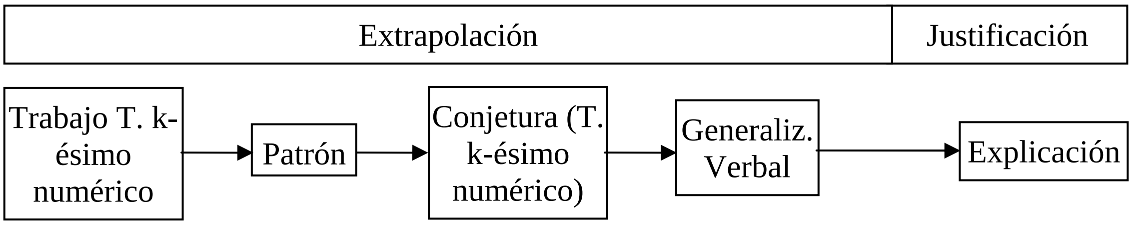


Figura 8 - 21. Procedimiento del Estudiante 119 en el Problema 5

Problema 6

El Estudiante 119 expresa los términos k-ésimos de la progresión en el sistema de representación numérico (T1), con los que efectúa algunos cálculos (TSN) que le permite formular su conjetura en ese mismo sistema de representación. Por último, en un intento de justificar su conjetura, da una explicación verbal en la que expresa el patrón (no adecuado) que ha identificado para la formulación de la conjetura: *pues si quieres saber lo que te da la 5 escalera debes sumar todos los números menores de 5 y el mismo también, es decir, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 y éstos son los bloques de 4 palillos que te da, si multiplicas 15 por 4 te da todos los palillos utilizados* [para el caso de la quinta escalera].

En la Figura 8 - 22 recogemos el procedimiento que sigue el Estudiante 119 en la resolución del Problema 6.

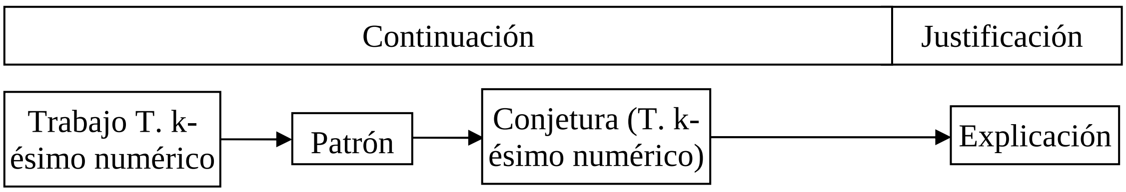


Figura 8 - 22. Procedimiento del Estudiante 119 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 119

Este alumno tiende a trabajar y a realizar cálculos con los términos k-ésimos y formula su conjetura directamente, aunque se observa que la formula tras haber identificado un patrón, que queda expresado mediante las explicaciones verbales que da el estudiante.

Estas explicaciones verbales son consecuencia del interés del Estudiante 119 por justificar su proceso. Sin embargo, no llega a conseguirlo, aunque sí expresa los patrones que se intuyen en los cálculos numéricos que realiza.

Dentro de esas explicaciones verbales, el estudiante llega al paso más avanzado del razonamiento inductivo (generalización verbal, en el Problema 5).

En uno de los problemas (Problema 2), el estudiante organiza los términos k-ésimos, lo cuál le lleva a la identificación de un patrón adecuado.

En el esquema de la Figura 8 - 23 recogemos el perfil del Estudiante 119, basándonos en los procedimientos que ha seguido en la resolución de los seis problemas de la prueba.

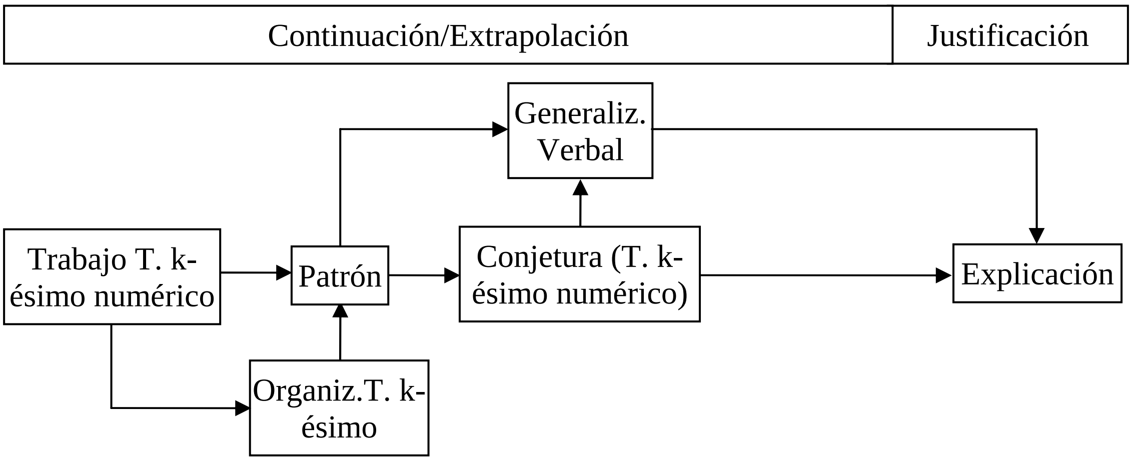


Figura 8 - 23. Perfil del Estudiante 119

ESTUDIANTE 325

Problema 1

El Estudiante 325 obtiene los términos k-ésimos que constituyen la continuación de la progresión a partir del enunciado (T1). Identifica el patrón (adecuado) mediante la expresión del primer término ($a_1 = 50$) y la diferencia entre dos términos consecutivos ($d = 3$), que son los elementos que utiliza para formular su conjetura en el sistema de representación numérico (*50, 53, 56, 59, 62*). Este alumno utiliza a_1 y d para expresar la relación recurrente y, posteriormente, formular la generalización algebraica. Tras la realización de algunas transformaciones en ese sistema de representación (TSA), llega a obtener uno de los términos de la progresión (C1B-TSN), lo cual consideramos que constituye una justificación de su conjetura porque emplea uno de los términos k-ésimos de la progresión para comprobar la expresión del término general que ha obtenido.

En la Figura 8 - 24 recogemos el procedimiento descrito del Estudiante 325 en este problema.

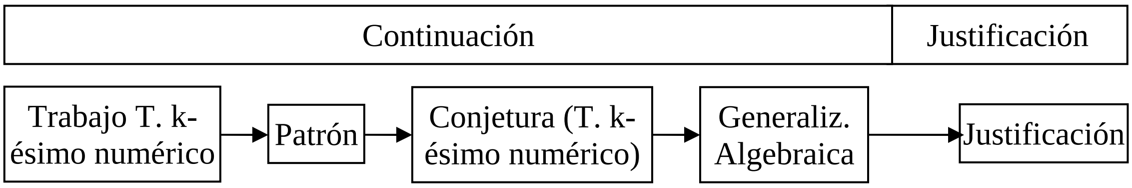


Figura 8 - 24. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 1

Problema 2

El Estudiante 325 trabaja con los términos k-ésimos de la progresión expresados numéricamente, en los que identifica la diferencia entre dos términos consecutivos (TSN). Organiza esos términos k-ésimos de forma que une los que son consecutivos con un segmento curvilíneo sobre el que expresa la diferencia numérica existente, lo cuál le permite llegar, de una forma sistemática, a la solución de la continuación propuesta en el sistema de representación numérico. Tanto en esta organización como en la expresión verbal que da, finalmente, para explicar su procedimiento (T5), observamos que este alumno ha identificado un patrón (adecuado) para el problema planteado: *cada vez se suma 2 más que en el anterior... en el primero se suma 4, en el segundo 6, en el tercero 8 y así sucesivamente*.

En el esquema de la Figura 8 - 25 resumimos el procedimiento que sigue este estudiante en la resolución del Problema 2.

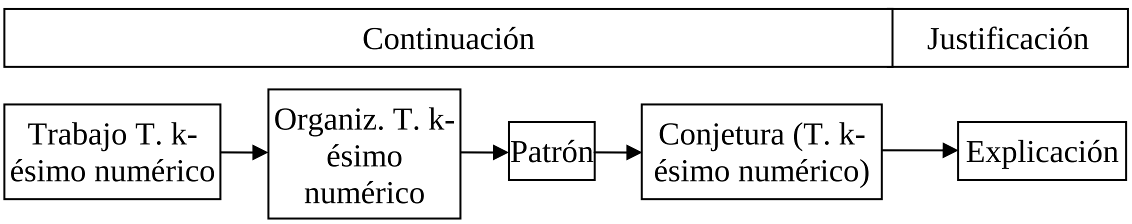


Figura 8 - 25. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 2

Problema 3

Este alumno comienza la resolución del problema expresando cómo organizaría las baldosas para las 1320 baldosas por las que pregunta el problema (T6). En la forma de expresarse, se observa que el Estudiante 325 ha identificado un patrón (adecuado) al problema (*pondríamos las baldosas blancas en línea [1320] y 1320 grises arriba y otras 1320 abajo y 3 a cada lado*). A partir de ahí, el alumno expresa algebraicamente la generalización (C3) mediante la expresión 2x + 6, que la utiliza para calcular la solución numérica al problema (C3B). Tras la realización de algunos cálculos (TSN), el estudiante formula su conjetura en el sistema de representación numérico.

En la Figura 8 - 26 recogemos el Procedimiento que sigue el Estudiante 325 en este problema.

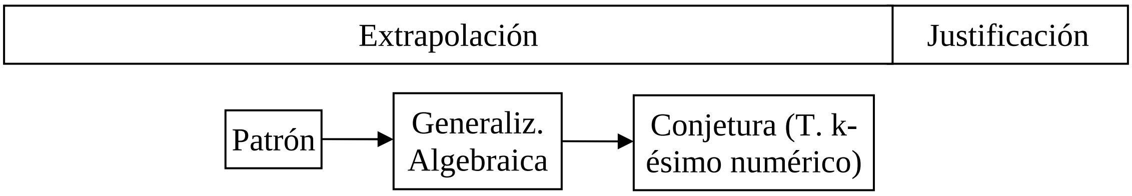


Figura 8 - 26. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 3

Problema 4

El Estudiante 325 expresa verbalmente el procedimiento a seguir para calcular los términos por los que pregunta el problema a partir de la información del enunciado (TSV): *si hay 22 equipos cada equipo tendrá que jugar contra los 21 restantes por lo tanto multiplicaríamos 22 por 21 para saber cuantos partidos hay y como juegan 2 partidos lo que nos da por 2*. En esta expresión, el alumno pone de manifiesto la identificación de un patrón (no adecuado al problema), el cuál utiliza para formular su conjetura en el sistema de representación numérico, para lo que necesita realizar algunas transformaciones en ese sistema de representación (T2-TSN).

Recogemos el procedimiento identificado en la producción del estudiante 325 en la resolución del Problema 4 en la Figura 8 - 27.

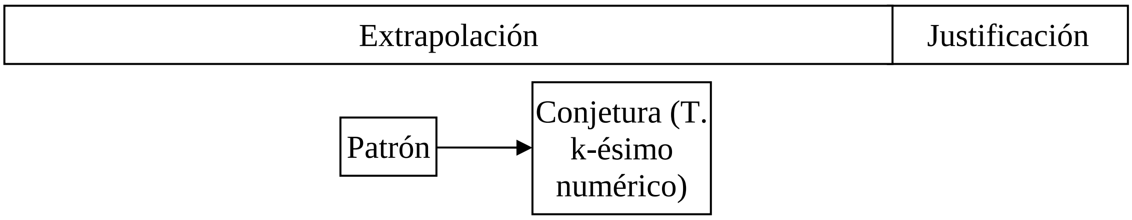


Figura 8 - 27. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 4

Problema 5

El Estudiante 325 utiliza un procedimiento en este problema análogo al que utiliza en el Problema 1. Mencionamos las diferencias con respecto al esquema presentado en la Figura 8 - 24. En primer lugar, este alumno inicia su trabajo en el sistema de representación numérico, que es utilizado en los términos k-ésimos que plantea el enunciado y queda recogido en la primera transformación de su Estrategia Inductiva (TSN). En segundo lugar, formula su conjetura tras la expresión algebraica de la generalización. En tercer y último lugar, no utiliza ningún proceso de validación de su conjetura. Por tanto, basándonos en la Figura 8 - 24 y teniendo en cuenta las diferencias indicadas, el esquema que recoge su procedimiento en la resolución de este problema es el que presentamos en la Figura 8 - 28.

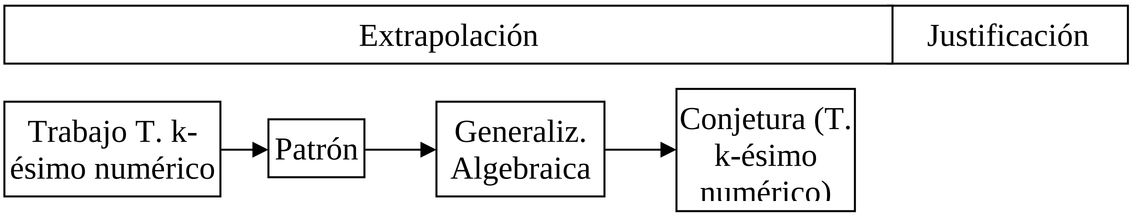


Figura 8 - 28. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 5

Problema 6

Este alumno continúa gráficamente la progresión que aparece en el enunciado (TSG). A partir de la representación gráfica, expresa numéricamente los términos k-ésimos de la progresión con los que se corresponde. Organiza los términos numéricos de forma que los une con líneas sobre las que representa las diferencias que observa. Con esto, pone en evidencia un patrón (adecuado) basado en la relación recurrente de la progresión.

En la producción del Estudiante 325 observamos que ha formulado su conjetura tanto numérica como gráficamente. En algún momento de la resolución da una explicación verbal que sirve para explicar el procedimiento que sigue en la resolución del problema (T5): *... en el primero sumamos 6 palillos, y en el 2º, 8 y cada vez 2 más que en el anterior*.

En la Figura 8 - 29 recogemos el procedimiento de este estudiante en el Problema 6.

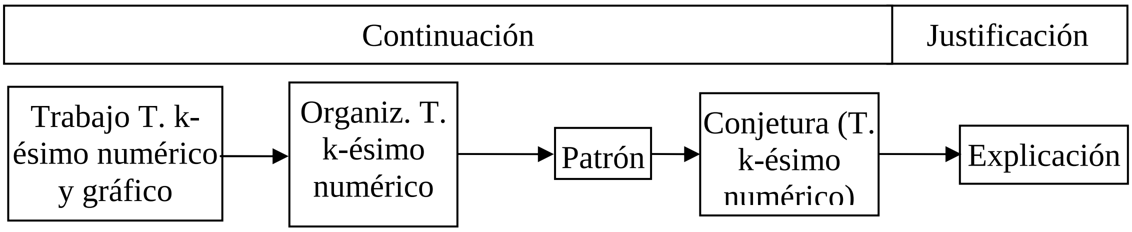


Figura 8 - 29. Procedimiento del Estudiante 325 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 325

El Estudiante 325 suele trabajar numéricamente con los términos k-ésimos de la sucesión, aunque en el Problema 6, combina este sistema de representación con el gráfico (coincide con que el sistema de representación en el enunciado está expresado gráficamente).

En los problemas en los que este alumno llega a expresar la generalización, lo hace algebraicamente. En la justificación de su respuesta, este estudiante da explicaciones verbales, excepto en el Problema 1, que llega a justificar su conjetura con términos k-ésimos.

Tiende a identificar un patrón recurrente adecuado a los problemas a partir del trabajo con términos k-ésimos. El patrón recurrente, le ha llevado a expresar algebraicamente la generalización en dos problemas (3 y 5). Esta generalización es empleada para formular su conjetura en el sistema de representación numérico. En otro problema (Problema 1), el Estudiante 325 formula su conjetura y, posteriormente, expresa algebraicamente la generalización y la utiliza para justificar su conjetura mediante la comprobación con un término k-ésimo. Por el procedimiento que sigue en esos tres problemas, en el perfil de ese estudiante se observa que el orden entre la generalización algebraica y la formulación de conjetura es intercambiable. En cualquier caso, el Estudiante 325 únicamente utiliza la expresión algebraica para la generalización.

En la Figura 8 - 30, partiendo de los procedimientos identificados en los seis problemas, recogemos el perfil del Estudiante 325.

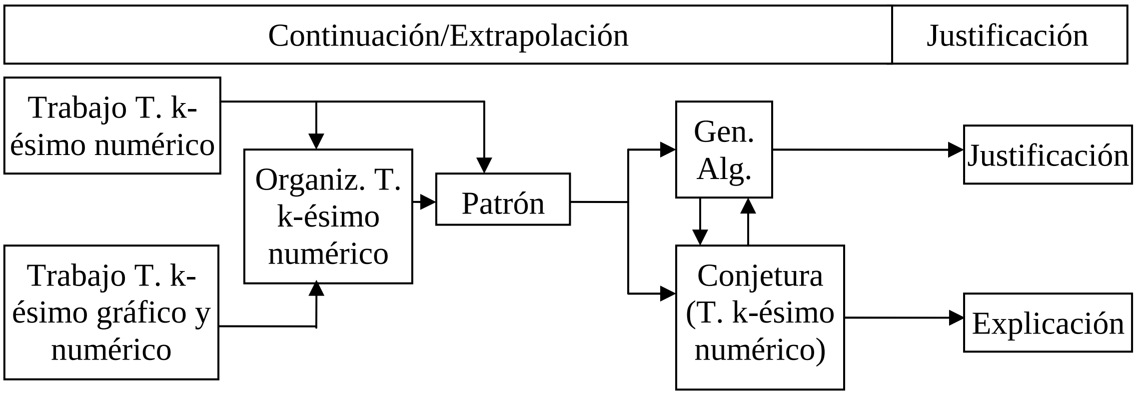


Figura 8 - 30. Perfil del Estudiante 325

ESTUDIANTE 349

Problema 1

A partir de los datos que se proporcionan en el enunciado, el Estudiante 349 trabaja con el primer término de la progresión (T2) e identifica un patrón (adecuado) basado en la relación de recurrencia. A partir de ese patrón, expresa algebraicamente el término general de la progresión (C1): $a_n = 50 + 3n$. El alumno utiliza esta expresión para calcular uno de los término k-ésimos por los que pregunta el problema (C1B-TSN), que constituye su conjetura (en el sistema de representación numérico).

En la Figura 8 - 31 resumimos el procedimiento descrito.

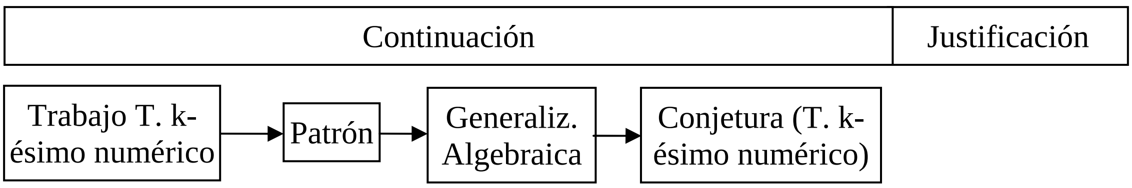


Figura 8 - 31. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 1

Problema 2

En la producción del Estudiante 349 en el Problema 2, observamos que se ha restringido al trabajo con los términos k-ésimos numéricamente (TSN). Tras el trabajo con los términos k-ésimos de la progresión, este sujeto identifica las diferencias existentes entre dos consecutivos y las expresa como *+4, +6, +8, +10*, lo cuál nos permite afirmar que el estudiante ha identificado un patrón (adecuado) basado en la relación recurrente de la progresión. Ese patrón es utilizado por el estudiante para la formulación de su conjetura (términos k-ésimos expresados numéricamente como respuesta a la continuación).

Recogemos el procedimiento que sigue en la resolución del Problema 2 en la Figura 8 - 32.

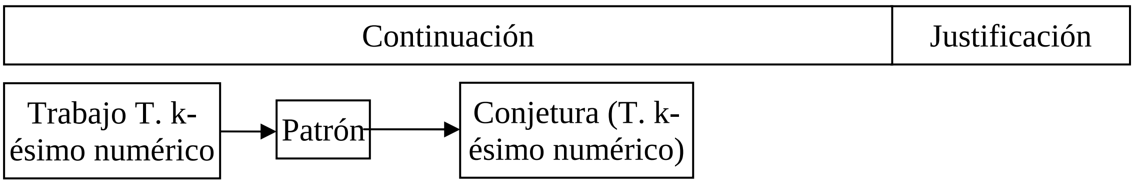
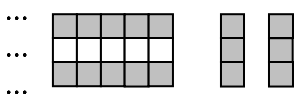


Figura 8 - 32. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 2

Problema 3

El Estudiante 349 descompone la representación gráfica correspondiente al término k-ésimo por el que pregunta el Problema 3 (TSG).



Traduce esta representación, que refleja el patrón identificado, al sistema de representación numérico (T1), en el que realiza algunos cálculos (TSN) en función del patrón (adecuado) que pone de manifiesto. A partir de ese patrón, formula su conjetura en el sistema de representación numérico (*1320 x 2 + 3 + 3 = 2646*) y gráfico (hace una representación en la que escribe puntos suspensivos para indicar que hay baldosas que no ha podido dibujar por el tamaño del que saldría la figura pero indica cómo sería para el término k-ésimo por el que pregunta la extrapolación).

En la Figura 8 - 33 se observa el procedimiento del Estudiante 349 en la resolución del Problema 3.

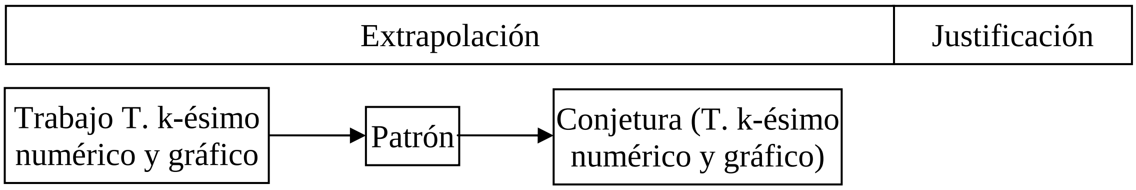


Figura 8 - 33. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 3

Problema 4

El Estudiante 349 traduce al sistema de representación numérico la información necesaria para los términos k-ésimos por los que pregunta el problema (T2) y se restringe a los cálculos que cree necesarios para llegar a la formulación de la conjetura en el sistema de representación numérico (TSN). En esos cálculos, el alumno pone de manifiesto la identificación de un patrón, que es el que sigue para la resolución de la tarea y con el que llega a formular su conjetura. Por ejemplo, para la convocatoria autonómica, en la que juegan 22 equipos, el estudiante expresa: *22 equipos – 1 que juega = 21 equipos... 21 x 2 partidos = 42 partidos*.
En la Figura 8 - 34 recogemos el procedimiento de este estudiante en la resolución del Problema 4.

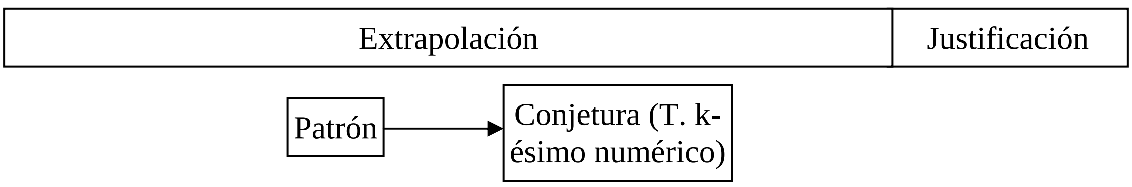


Figura 8 - 34. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 4

Problema 5

En la producción del problema 5, el Estudiante 349 pone de manifiesto haber trabajado con los términos k-ésimos que presenta el enunciado (TSN), puesto que llega a identificar la diferencia que existe entre dos términos consecutivos ($d = 3$), lo que constituye un patrón adecuado para el problema basado en la relación de recurrencia de la progresión. Con base en este patrón, llega a la expresión algebraica de la generalización ($a_n = 1\ (n - 1) + 3$), que es la que utiliza para llegar a la formulación de la conjetura en el sistema de representación numérico mediante el cálculo del término k-ésimos correspondiente (C1B-TSN).

Resumimos en la Figura 8 - 35 el procedimiento de este estudiante en la resolución del Problema 5.

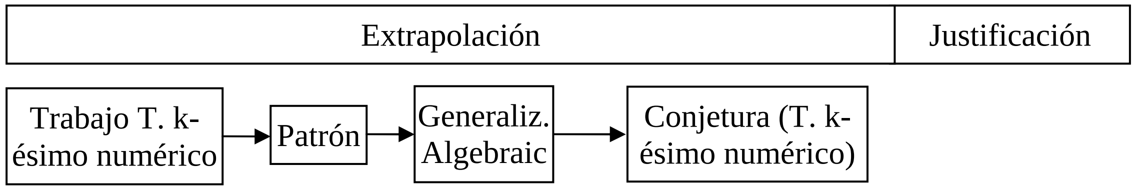


Figura 8 - 35. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 5

Problema 6

Este alumno realiza una transformación al sistema de representación numérico de los términos k-ésimos que aparecen expresados gráficamente en el enunciado (queda expresado mediante T1 en la Estrategia Inductiva): 4, 10 y 18. Establece las diferencias entre esos términos (+6, +8 y +10), de forma que pone de manifiesto la identificación de un patrón adecuado para la progresión. El Estudiante 349 sigue ese patrón para expresar numéricamente la conjetura para la continuación, tras la realización de algunos cálculos en el sistema de representación numérico (TSN): 18 + 10 = 28, 28 + 12 = 40 y 40 + 14 = 54.

En la Figura 8 - 36 recogemos el procedimiento del Estudiante 349 en la resolución de este problema.

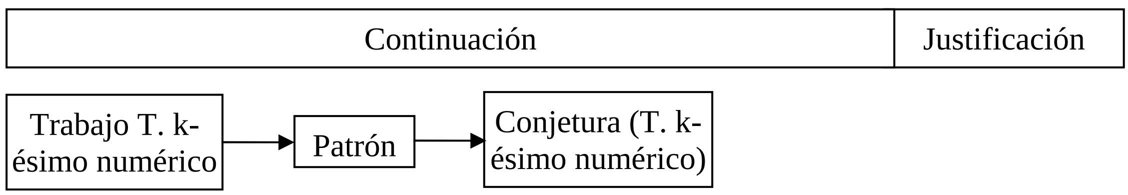


Figura 8 - 36. Procedimiento del Estudiante 349 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 349

Este alumno identifica los patrones a través del trabajo con los términos k-ésimos de la progresión en el sistema de representación numérico. Únicamente en uno de los problemas (Problema 3) utiliza el sistema de representación gráfico en el trabajo con los términos k-ésimos. A partir del trabajo con estos términos, llega a la identificación de un patrón, que es adecuado en todos los problemas, excepto en el Problema 4. Los patrones adecuados son identificados a partir de la relación recurrente detectada entre los términos de las respectivas progresiones de los problemas.

A partir de la relación recurrente, el Estudiante 349 llega a expresar algebraicamente el término general en dos de los problemas (1 y 5), que es utilizado para formular su conjetura (en el sistema de representación numérico).

En la Figura 8 - 37 recogemos los pasos y los sistemas de representación que utiliza el Estudiante 349 en la resolución de los problemas planteados.

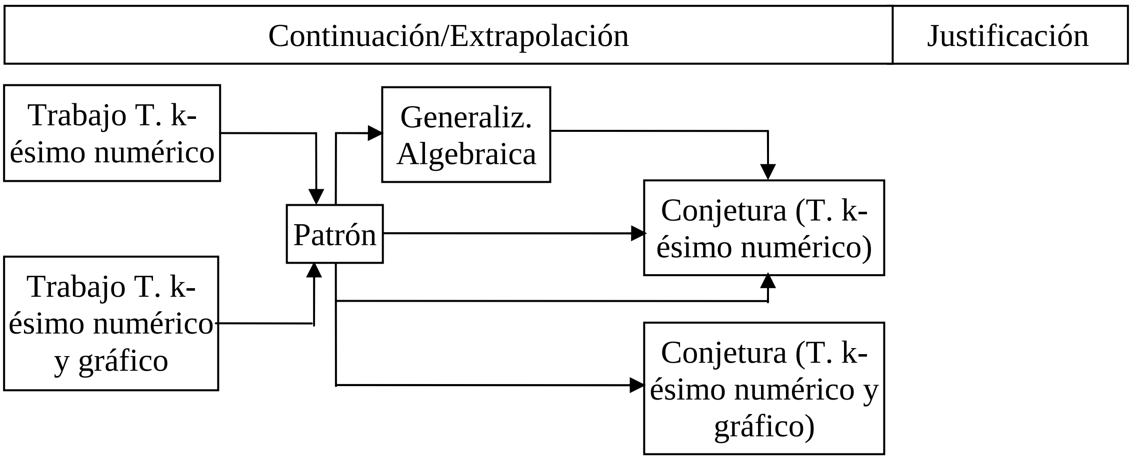


Figura 8 - 37. Perfil del Estudiante 349

ESTUDIANTE 356

Problema 1

El Estudiante 356 formula directamente su conjetura para la continuación a partir de la información del enunciado en el sistema de representación numérico (T2). A continuación, da una explicación verbal (T5), en la que pone de manifiesto haber identificado un patrón adecuado al Problema 1, basado en la relación recurrente de la progresión: *cada día se van sumando tres al anterior y haciendo la progresión aritmética sale el término*. El estudiante ha seguido este patrón para formular la conjetura sin haber trabajado previamente con términos k-ésimos de la progresión, por lo que el procedimiento que sigue en la resolución del Problema 1 es el que recogemos en la Figura 8 - 38.

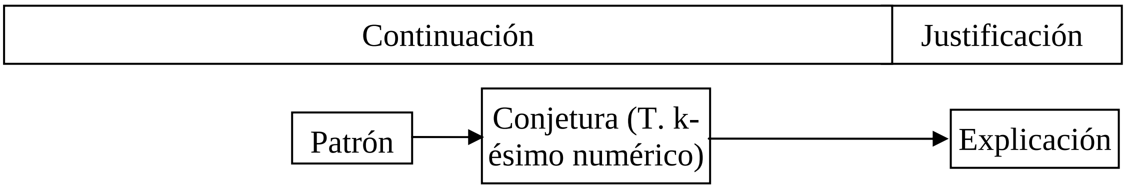


Figura 8 - 38. Procedimiento del Estudiante 356 en el Problema 1

Problema 2

El Estudiante 356 sigue un procedimiento similar al anterior. En esta ocasión, la expresión verbal en la que se identifica claramente el patrón adecuado es: *porque se van sumando los pares*. Por tanto, el esquema que representa el procedimiento es la Figura 8 - 38.

Problema 3

Este estudiante formula directamente su conjetura en el sistema de representación numérico (T1) a partir del enunciado (el término k-ésimos aparece gráficamente). Posteriormente da una explicación verbal en la que expresa la generalización (C4): *porque son el doble de las blancas más seis de los otros lados*. Con esta expresión, el estudiante da explicación al procedimiento que ha seguido.
En la Figura 8 - 39 resumimos el procedimiento de este estudiante en el Problema 3.

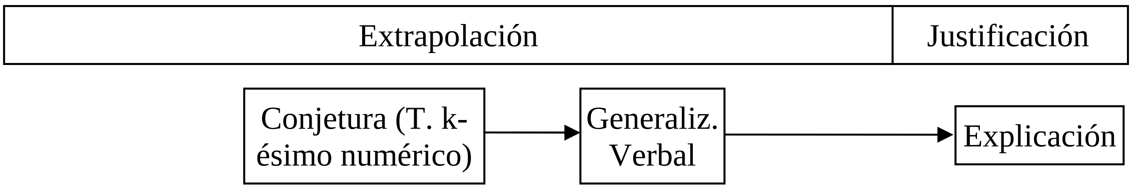


Figura 8 - 39. Procedimiento del Estudiante 356 en el Problema 3

Problema 4

Al igual que en el problema anterior, en el Problema 4 formula su conjetura en el sistema de representación numérico (T2, que representa la transformación del sistema de representación verbal que aparece en el enunciado), sin haber dado ningún paso previo y en la explicación que da verbalmente, llega a expresar la generalización: *son los que juegan unos contra otros multiplicados por dos*. Por tanto, el esquema que recoge este procedimiento es la Figura 8 - 39.

Problema 5

El Estudiante 356 pone de manifiesto haber trabajado con los términos k-ésimos de la progresión, ya que expresa el primer término y la diferencia constante ($d = 3$) en la generalización algebraica a la que llega: $a_n = a_1 (n - 1) d$. Este alumno utiliza la generalización para calcular el término k-ésimo de la extrapolación con el que formula su conjetura (en el sistema de representación numérico, tal y como refleja TSN como parte de la Estrategia Inductiva que utiliza).

Con la intención de explicar el proceso que ha seguido, el estudiante expresa verbalmente que *cada vez se van sumando tres y puedes hallar el término general*, lo cuál confirma la identificación de un patrón (adecuado para este problema), que es el que le ha permito expresar la generalización algebraicamente, como queda recogido en la Figura 8 - 40.

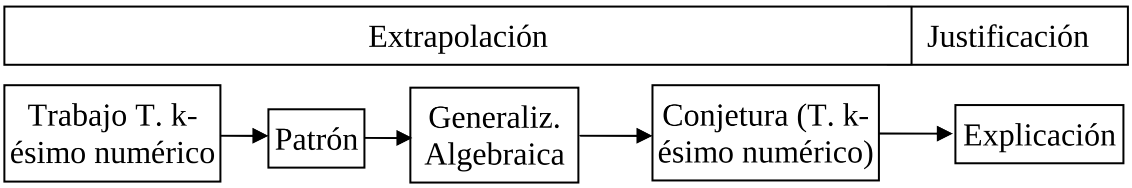


Figura 8 - 40. Procedimiento del Estudiante 356 en el Problema 5

Problema 6

Este estudiante continúa la progresión en el sistema de representación gráfico (TSG). A partir de ellos, hace la traducción al sistema de representación numérico (T1), con lo que llega a la formulación de la conjetura en ese sistema de representación.

Finalmente, da una explicación verbal del proceso que ha seguido en la resolución del problema: *porque se van sumando los pares*. Con esta expresión, pone de manifiesto que ha identificado un patrón (adecuado al Problema 6) basado en la relación recurrente, lo cuál queda reflejado en la formulación de la conjetura (expresa la continuación, tanto gráfica como verbalmente).

En la Figura 8 - 41 recogemos el procedimiento que sigue el Estudiante 356 en la resolución del Problema 6.

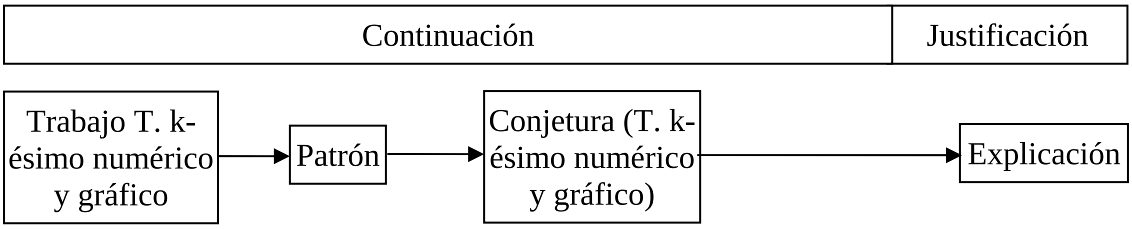


Figura 8 - 41. Procedimiento del Estudiante 356 en el Problema 6

Regularidades del Estudiante 356

Destacamos el hecho de que en cuatro de los problemas (problemas 1, 2, 3 y 4), el Estudiante 356 formula la conjetura sin haber trabajado previamente con términos k-ésimos de la progresión. Sin embargo, esto no le impide avanzar en el proceso inductivo, ya que entre éstos problemas encontramos a dos de los tres problemas en los que generaliza, como detallaremos más adelante.

En los otros problemas (5 y 6) sí trabaja con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico, que lo combina con el sistema de representación gráfico en el caso del Problema 6.

El Estudiante 356 se caracteriza por el empleo del sistema de representación verbal en su explicación del procedimiento que ha seguido hasta formular la conjetura. Expresa numéricamente su conjetura en todos los problemas y, en el Problema 6, lo hace numérica y gráficamente.

Este alumno llega a expresar verbalmente la generalización en los problemas 3 y 4, cuando trata de justificar su conjetura, por lo tanto, es el uso que hace en estos casos de la generalización. El otro uso identificado de la generalización en el Capítulo 7 de esta memoria, lo observamos en el Problema 5, en el que el estudiante expresa algebraicamente la generalización y la utiliza para calcular el término k-ésimo correspondiente a la extrapolación.

En la Figura 8 - 42 representamos el perfil del Estudiante 356 según los procedimientos descritos en los seis problemas.

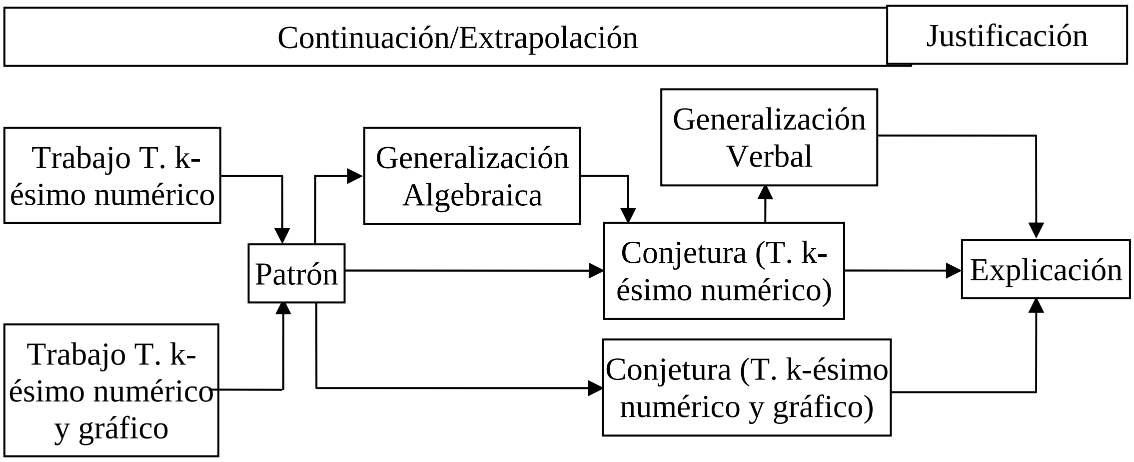


Figura 8 - 42. Perfil del Estudiante 356

PERFILES SEGÚN SU COMPLEJIDAD

Tras la presentación de los diferentes perfiles de los siete estudiantes seleccionados, observamos que podemos organizarlos según su complejidad, atendiendo a los pasos del razonamiento inductivo del modelo teórico que los estudiantes realizan. También podemos extraer algunas conclusiones de los perfiles, que representan el modelo real de razonamiento inductivo que utilizan los alumnos.

En función del avance en el proceso inductivo de cada uno de los perfiles, podemos establecer un orden de complejidad entre ellos. El criterio seguido es considerar si los estudiantes han realizado o no, en sus producciones, los pasos del modelo teórico de razonamiento inductivo. Presentamos en la Tabla 8 - 3 a los estudiantes por orden (de menor a mayor) de la complejidad del proceso inductivo que llevan a cabo en la resolución de los problemas. Posteriormente, describiremos el proceso que hemos seguido para llegar a ella.

Tabla 8 - 3. Clasificación de los perfiles de los siete estudiantes

Estudiante	Trabajo T. k-ésimos	Organiza T. k-ésimos	Patrón	Generaliza	Explica	Justifica
7	Sí	No	Sí	No	No	No
49	Sí	No	Sí	No	Sí	No
349	Sí	No	Sí	Sí	No	No
3	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No
119	Sí	Sí	Sí	Sí	Si	No

Estudiante	Trabajo T. k-ésimos	Organiza T. k-ésimos	Patrón	Generaliza	Explica	Justifica
356	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No
325	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Todos los estudiantes trabajan con los términos k-ésimos y detectan patrón en alguno de los problemas. Dado que la organización de los términos k-ésimos no es fundamental para el avance del razonamiento inductivo (como se ha descrito en el Capítulo 6), nos centramos en la generalización como el primer paso que permite distinguir entre los estudiantes 7 y 49, que no llegan a expresar la generalización; y los otros cinco estudiantes, que sí llegan a expresarla en alguno de los problemas de la prueba.

Entre los perfiles de los estudiantes 7 y 49 (ver Figura 8 - 12 y Figura 8 - 17), consideramos que el segundo se corresponde con un proceso inductivo más elaborado porque llega a explicar el procedimiento que realiza.

Para comparar la complejidad de los perfiles de los estudiantes que generalizan (estudiantes 349, 3, 119, 356 y 325), distinguimos, en primer lugar entre los que generalizan sin llevar a cabo ningún intento de validación de su conjetura (Estudiante 349), y los otros cuatro.

Dado que los Estudiantes 356 y 325 utilizan la generalización para la formulación de conjeturas, que se considera el principal fin del proceso inductivo, situamos a estos alumnos en los niveles más avanzados. Entre estos dos perfiles, es superior el del Estudiante 325 porque llega a la justificación con nuevos casos particulares.

Por lo descrito hasta el momento, quedan por organizar los perfiles correspondientes a los estudiantes 3 y 119, cuya diferencia más destacada es que el segundo de ellos organiza los términos k-ésimos en alguno de los problemas previamente a la identificación de un patrón. Por tanto, consideramos que el Estudiante 119 lleva a cabo un proceso inductivo más completo que el Estudiante 3.

CONCLUSIONES

En este capítulo hemos puesto de manifiesto la posibilidad de describir el modelo real de razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de los problemas combinando el modelo teórico considerado de razonamiento inductivo y las estrategias inductivas. La consideración de ambos aspectos de manera conjunta ayuda a conocer con mayor profundidad el proceso inductivo que llevan a cabo los estudiantes.

En la descripción, presentada observamos que no siempre el modelo real de razonamiento inductivo es lineal. En ocasiones, habiendo observado un paso determinado del razonamiento, el estudiante no ha realizado pasos considerados previos en el modelo teórico. Por ejemplo, el Estudiante 325 llega a expresar el término general de la progresión algebraicamente sin haber trabajado previamente con los términos k-ésimos de la progresión (ver Figura 8 - 26). Además, también hemos encontrado ejemplos en los que los pasos no se observan en el orden que habíamos considerado en el modelo teórico, como es el caso del Estudiante 349, quien expresa la generalización y después formula la conjetura.

A partir de las producciones de los estudiantes en los distintos problemas, hemos descrito sus procedimientos según los pasos del razonamiento inductivo y las estrategias inductivas y, con base en esos procedimientos, identificamos unos perfiles. Estos perfiles se distinguen, por tanto, en elementos considerados en ambos aspectos del marco teórico de este trabajo (pasos y estrategias inductivas), lo cuál permite ordenarlos según su complejidad, en función de los pasos que los alumnos realicen.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos una síntesis del proceso de investigación llevado a cabo, centrado en el razonamiento inductivo, y recogemos los principales resultados obtenidos relacionados con los objetivos específicos de investigación.

Comenzamos con una recopilación de los aportes teóricos y metodológicos que hemos realizado para llevar a cabo el trabajo. Estos aportes se centran en el modelo teórico de razonamiento inductivo y las estrategias inductivas. A continuación, especificamos los resultados relacionados con nuestros objetivos específicos de investigación a partir de los análisis de datos presentados en los capítulos previos de esta memoria. Comparamos estos resultados con los obtenidos en investigaciones previas y concluimos el capítulo con la presentación de algunas limitaciones en el desarrollo del trabajo. A partir de ellas y de cuestiones suscitadas, sugerimos líneas de investigación que dejamos abiertas para el futuro.

APORTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En el marco teórico elaborado, se distinguen dos partes diferenciadas, que han quedado recogidas en los capítulos 2 y 3 de esta memoria.

En el Capítulo 2 hemos identificado el razonamiento inductivo como un proceso cognitivo y hemos considerado que la resolución de problemas y los sistemas de representación son aspectos con los que se relaciona directamente. La fundamentación teórica nos permite hablar de un *modelo teórico de razonamiento inductivo* y de *estrategias inductivas*.

El modelo teórico de razonamiento inductivo, que consideramos tiene sus orígenes en el trabajo de Pólya, tiene como principal objetivo la descripción del proceso inductivo que llevan a cabo los estudiantes en el proceso de resolución de problemas. Los pasos que componen el modelo teórico que hemos elaborado son:

- Trabajo con casos particulares.
- Organización de casos particulares.
- Identificación de Patrón.
- Formulación de Conjeturas.
- Justificación de Conjeturas (basada en casos particulares).
- Generalización.
- Demostración.

Por su parte, las estrategias inductivas, las definimos como los procedimientos que siguen los estudiantes en la resolución de problemas cuando utilizan, para ello, un proceso inductivo. Tomamos en consideración el contenido matemático, para lo que ha sido necesaria la fundamentación sobre las progresiones presentada en el Capítulo 3. Dicha fundamentación permite identificar elementos, sistemas de representación y relaciones que se pueden establecer en las progresiones aritméticas de números naturales de órdenes 1 y 2. Todo ello nos lleva a diseñar una metodología que considera la identificación de las posibles estrategias inductivas a utilizar por los estudiantes en la resolución de problemas que implican este contenido matemático, basada en la determinación de secuencias de transformaciones que tienen en cuenta elementos, sistemas de representación y relaciones entre ellos.

La descripción del contenido matemático nos permite reformular los pasos del razonamiento inductivo y las estrategias inductivas para el caso específico de las progresiones.

La determinación de los dos aspectos fundamentales del marco teórico (modelo teórico de razonamiento inductivo y estrategias inductivas) para las progresiones, nos lleva a identificar un aporte metodológico de esta investigación. Se puede seguir un planteamiento teórico análogo al nuestro para este mismo contenido con otro tipo de problemas o emplearse de una manera análoga para describir los pasos del razonamiento inductivo y las estrategias inductivas en la resolución de problemas que utilicen otros contenidos matemáticos.

Como parte de la metodología, también destacamos la forma justificada con que se han seleccionado los problemas que constituyen la prueba escrita que resuelven los estudiantes. El objetivo general de investigación es el eje vertebrador de los criterios que se han seguido para esta selección. Este procedimiento tiene en cuenta los elementos del contenido matemático, las relaciones que se pueden establecer entre ellos en el proceso inductivo y los sistemas de representación que entran en juego. Como describiremos más adelante, los sujetos siguen un proceso inductivo como estrategia general de resolución, por lo que podemos concluir que los problemas propuestos a los estudiantes han resultado adecuados para los objetivos de investigación.

CONCLUSIONES A PARTIR DE LOS PASOS DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Para seguir la organización que corresponde a los objetivos de investigación, comenzamos con una descripción general del razonamiento inductivo llevado a cabo en todos los problemas por todos los estudiantes de la muestra, siguiendo los pasos del modelo teórico considerado. Con esto hacemos una primera aproximación al objetivo general de investigación. Posteriormente continuamos con los resultados referentes a los tipos de problemas considerados y el centro y curso a los que pertenecen los estudiantes. Por tanto, daremos respuesta a los objetivos específicos relacionados con los pasos del razonamiento inductivo (O_1, O_4, O_8 y O_{10}, descritos en el Capítulo 1 de esta memoria).

Descripción General

En la descripción de los pasos del razonamiento inductivo que realizan los estudiantes en los problemas propuestos, destacamos que, pese a las discrepancias en las frecuencias según el problema, hay una tendencia general que se observa en las producciones de los estudiantes. Esta tendencia se puede expresar en función del aumento y disminución de frecuencias entre los pasos dados del razonamiento inductivo. Los problemas 3 y 4 se distancian de la tendencia general en los primeros pasos del razonamiento inductivo (trabajo con términos k-ésimos y organización de los términos k-ésimos), en el sentido de que quedan muy por debajo de las frecuencias identificadas en el resto de los problemas.

En el resto de los pasos para esos problemas y en todos los pasos de los demás problemas, se observa una tendencia similar. En todos los problemas, excepto en los problemas 3 y 4, se produce una disminución en el número de alumnos que organizan los términos k-ésimos con respecto a los que han trabajado ellos. En esos dos problemas, los estudiantes no identifican el papel que pueden jugar los términos k-ésimos de las progresiones en la resolución. La característica más significativa que diferencia al Problema 3 de los otros es que en él se presenta un único término k-ésimos en el enunciado. Los estudiantes pueden tenerlo en cuenta como ejemplo genérico y no ven la necesidad de considerar más términos k-ésimos para la identificación del patrón. En el caso del Problema 4, que hace referencia a partidos de fútbol y puede suceder que haya estudiantes que den su respuesta de manera intuitiva debido a que el contexto les resulte cercano.

La formulación de conjeturas es el paso que se presenta con una mayor frecuencia en todos los problemas. En el caso contrario se encuentran la justificación de las conjeturas y la demostración de la expresión general, que son los pasos empleados por el menor número de estudiantes en cinco de los seis problemas de la prueba. En todos los problemas, excepto en el Problema 2, se observa un leve aumento en el número de estudiantes que generalizan sus conjeturas. En este problema, que constituye la excepción, se observa que el cambio en la tendencia respecto a los demás problemas, se debe a los estudiantes que justifican su conjetura con términos k-ésimos, que es un paso realizado un mayor número de estudiantes que en los demás problemas (en el número de estudiantes que generalizan en este problema y en los demás, no hay variación en la tendencia general). Este hecho se puede deber a que el Problema 2 se corresponde con una progresión aritmética de números naturales en la que los términos k-ésimos están expresados numéricamente en el enunciado y se pide una extrapolación. Aunque no se trate de un tipo de progresión trabajada previamente por los estudiantes, estos han podido seguir un procedimiento análogo al que utilizan en el trabajo con las progresiones aritméticas, que sí las han trabajado en el aula, llegando a justificar sus conjeturas. Finalmente, la frecuencia para la demostración es muy baja, ya que no es realizada por ningún estudiante en ninguno de los problemas.

Según el Tipo de Problema

Los dos criterios principales considerados para la selección de los problemas de la prueba fueron el sistema de representación utilizado en el enunciado para expresar los términos k-ésimos y el orden de la progresión. Haremos referencia a ambas características en este epígrafe, así como a su asociación en relación con los pasos del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes.

Sistema de representación

Los términos k-ésimos se presentaron en tres sistemas de representación: numérico, verbal y gráfico. Los datos obtenidos arrojan la información que presentamos a continuación.

En general, la frecuencia de realización de los pasos del razonamiento inductivo es significativamente superior a la media en los problemas en los que los términos k-ésimos están expresados numéricamente. Este hecho se puede derivar de la tendencia que existe de trabajar las progresiones en el sistema de representación numérico. En los ejemplos que hemos mostrado en los libros de texto (ver Capítulo 5), el sistema de representación gráfico aparecía como apoyo visual pero, finalmente el proceso de resolución hasta llegar a la generalización, se centra en los sistemas de representación numérico y algebraico.

La utilización del sistema de representación gráfico en esta investigación ha sido similar a la mostrada en los libros de texto (para la expresión de los términos k-ésimos de las progresiones). Este sistema de representación se ha visto relacionado con frecuencias significativamente inferiores a la media de realización de los pasos del razonamiento inductivo.

Centrándonos en cada uno de los pasos del razonamiento inductivo y en la asociación de éstos con los diferentes sistemas de representación que aparecen en los enunciados de los problemas, describimos aquellos en los que se han identificado diferencias significativas.

El sistema de representación numérico se ve asociado con unas frecuencias significativamente superiores a la media en el trabajo con términos k-ésimos y en la formulación de conjeturas. Sin embargo, se asocia con frecuencias significativamente bajas en la identificación de un patrón, en la formulación de conjeturas y en la generalización.

Por otra parte, las diferencias significativas identificadas en los problemas donde los términos k-ésimos se expresan en el sistema de representación verbal, se dan en el sentido contrario a cuando se emplea el sistema de representación numérico. Es decir, el sistema de representación verbal está asociado con una frecuencia significativamente baja en el trabajo con los términos k-ésimos y a una frecuencia significativamente superior a la media en la identificación de patrón y en la generalización. Esto se puede deber a que los estudiantes tienden a dar su respuesta intuitivamente, llegando a identificar un patrón, incluso de un modo general, sin haber trabajado previamente con términos k-ésimos de la progresión correspondiente. Este procedimiento puede llevar, como ocurre en el Problema 4, a la detección de patrones erróneos en un alto porcentaje de estudiantes.

El sistema de representación gráfico se asocia a un menor número de diferencias significativas en las frecuencias de realización de los pasos. La formulación de conjeturas es el único paso que se asocia con una frecuencia significativamente superior a la media cuando se utiliza el sistema de representación gráfico en el enunciado de los problemas. Esto parece indicar que el sistema de representación gráfico puede ayudar a los estudiantes tanto a observar el patrón gráfico, como en la formulación de conjeturas para la extrapolación y la continuación, propuestas.

Si consideramos la variedad de patrones y si son adecuados o no, según el sistema de representación en el que se expresen los términos k-ésimos en el enunciado, los problemas en los que éstos aparecen gráficamente, de manera conjunta (problemas 3 y 6), presentan un mayor número de patrones y de patrones adecuados, que si tenemos en cuenta conjuntamente los problemas en los que los términos k-ésimos se expresan verbal o numéricamente (problemas 1 y 4, y problemas 2 y 5, respectivamente). Este hecho revela el interés del sistema de representación gráfico en el trabajo del razonamiento inductivo con los estudiantes de Educación Secundaria.

Orden de la progresión

A través de las producciones de los estudiantes en los problemas de la prueba, no se han identificado diferencias significativas en la frecuencia de realización de los pasos del razonamiento inductivo asociadas a los órdenes de las progresiones. Destacamos este dato porque, según se recoge en el Capítulo 5 de esta memoria, mientras que los estudiantes sí habían trabajado las progresiones aritméticas de orden 1, no lo habían hecho con las de orden 2. Esto indica que los estudiantes no han encontrado dificultades derivadas del contenido matemático seleccionado en los problemas en los que el término general se corresponde con un polinomio de grado 2.

Sistema de representación y orden de la progresión

La consideración conjunta de estas dos características, que se han tenido en cuenta para la selección de los tipos de problemas, produce un efecto sobre los Pasos de Razonamiento Inductivo en el sentido que especificamos a continuación.

El sistema de representación numérico y los órdenes de las sucesiones no están asociados a frecuencias significativamente diferentes en la realización de los pasos del razonamiento inductivo.

El sistema de representación verbal se ve asociado con una frecuencia significativamente superior a la media en la realización de los pasos en los problemas que involucran una progresión de orden 1 y con una frecuencia significativamente inferior a la media en la frecuencia de realización de los pasos en los problemas donde la progresión es de orden 2.

Al contrario ocurre en el sistema de representación gráfico, el cual está asociado con una frecuencia significativamente superior a la media en los problemas en los que aparece una sucesión de orden 2 y con una frecuencia significativamente inferior a la media en los que la progresión es de orden 1.

Las frecuencias significativamente más bajas en la realización de los pasos del razonamiento inductivo se corresponden con el sistema de representación verbal en el enunciado y la progresión de orden 2, y con el sistema de representación gráfico y la progresión de orden 1. Estas características se corresponden con los problemas 3 y 4, a los que ya habíamos hecho mención anteriormente.

Según Centro

Los estudiantes de la muestra pertenecen a cuatro centros públicos. Las poblaciones a las que pertenecen estos centros son: Granada, Madrid, Cúllar-Vega y Teruel. Tras el análisis de datos llevado a cabo en el Capítulo 6, que considera la influencia del centro en los pasos del razonamiento inductivo del modelo, hemos obtenido que, en general, el efecto del centro no influye de manera significativa en la realización de los pasos.

Sin embargo, se han identificado algunas diferencias significativas en la justificación y en la generalización (tres de los pasos) al considerar la asociación del centro y los pasos del razonamiento inductivo. En primer lugar, la justificación de conjeturas es empleada por un número inferior a la media por los alumnos de Granada y por un número de alumnos superior a la media en el centro de Cúllar-Vega. En segundo lugar, la frecuencia de generalización es inferior a la media, de manera significativa, en Cúllar-Vega.

Consideramos, como se ha puesto de manifiesto en el Capítulo 6, que estas diferencias se pueden deber a variaciones puntuales observadas en algunos de los problemas propuestos, en concreto en los problemas 2 y 4. La única característica que comparten estos dos problemas es que las progresiones son de orden 2. No hemos encontrado ninguna posible explicación de este hecho basándonos en las características concretas del centro y de los estudiantes descritas en el Capítulo 5. Debido a que únicamente se detectan las diferencias significativas indicadas y en dos de los centros, en general, concluimos que no hay diferencias destacables en el razonamiento inductivo que llevan a cabo los alumnos de los distintos centros. Esto nos permite afirmar que la muestra, que no fue seleccionada de forma aleatoria sino que procedía de centros a los que teníamos acceso, ha resultado homogénea respecto a la realización de los pasos del razonamiento inductivo.

Según Curso

Los sujetos participantes en esta investigación pertenecen a 3º y 4º de ESO. En la consideración del curso como efecto que pueda influir en la realización de los pasos del razonamiento inductivo, no se han identificado diferencias significativas. Igualmente ocurre al considerar la asociación del curso con los diferentes pasos.

SOBRE EL MODELO TEÓRICO DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

A partir de la descripción general de los pasos que se observaban a través de las producciones de los estudiantes, se aprecia que no todos los pasos del razonamiento inductivo considerados en el modelo teórico son usados por los estudiantes de 3º y 4º de ESO. El análisis detallado de los pasos en cada uno de los problemas y la comparación entre éstos y los del modelo teórico de razonamiento inductivo permite concluir que el modelo real de razonamiento inductivo que siguen los estudiantes no incluye todos los pasos.

Tal y como se deduce de las diferencias en la realización de los pasos del razonamiento inductivo (ver Capítulo 6), el trabajo con términos k-ésimos, la identificación de un patrón y la formulación de conjeturas se presentan con una frecuencia significativamente superior a la media. Sin embargo, la demostración se presenta con una frecuencia significativamente inferior a la media. De hecho, ningún alumno demuestra su conjetura para el caso general.

Por tanto, en el modelo de razonamiento inductivo real que siguen los estudiantes de 3º y 4º de ESO, destacamos los siguientes pasos por la frecuencia con la que se han observado:

- Trabajo con términos k-ésimos.
- Identificación de Patrón.
- Formulación de conjeturas.

Pese a que en los problemas propuestos en estos cursos, se destaca la utilidad de la organización de los casos particulares para la identificación de patrones, como hemos visto en el Capítulo 5, no es un paso que empleen con frecuencia los estudiantes.

En lo que se refiere a la identificación de patrones, destacamos que la relación de recurrencia ha sido empleada por un número alto de estudiantes en la mayoría de los problemas (ver Capítulo 6). La identificación de la relación recurrente, en la mayoría de los estudiantes, suele corresponderse con patrones adecuados a los problemas.

Por otro lado, el hecho de que los alumnos mantengan sus conjeturas basadas en patrones no adecuados, puede tener su explicación en el bajo número de estudiantes que validan sus conjeturas. A pesar de que el problema pide explícitamente la justificación de las conjeturas, muy pocos estudiantes lo hacen. En general, el bajo número de estudiantes que emplean la justificación y la demostración, pone de manifiesto la escasa utilización de los procesos de validación por parte de los alumnos de la muestra. Los estudiantes tienden a confiar en su intuición y no ven la necesidad de verificar sus conjeturas, sin llegar a falsarlas ni a validarlas.

El análisis de las relaciones de (in)dependencia entre los diferentes pasos considerados indica que, en la mayoría de los casos, la organización de los términos k-ésimos depende de haber trabajado con los mismos y que el patrón, a su vez, depende de estos dos pasos del razonamiento inductivo. Por lo tanto, entre los tres primeros pasos considerados en el razonamiento inductivo, sí hemos encontrado relaciones de dependencia. Sin embargo, no ocurre así con el resto de los pasos, ya que la generalización es el único paso que depende de la identificación de un patrón.

La formulación de conjeturas es otro de los pasos del modelo real. No hemos encontrado evidencias de la dependencia de la formulación de conjeturas respecto a los pasos previos del modelo teórico. Este hecho, unido a la alta frecuencia de aparición de este paso, indica que hay muchos alumnos que formulan sus conjeturas para la continuación y la extrapolación sin haber pasado por los pasos previos del modelo ideal.

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

Con respecto a los objetivos de investigación relacionados con las estrategias inductivas (O_3, O_5, O_6, O_9 y O_{11}, descritos en el Capítulo 1 de esta memoria), presentamos una descripción general de las estrategias inductivas empleadas por los alumnos de la muestra en la resolución de los seis problemas que constituyen la prueba y, posteriormente, consideramos las variables de sujeto (curso y centro) para establecer si existe relación entre las estrategias inductivas que emplean según el curso y el centro a los que pertenecen los estudiantes.

Descripción General

En primer lugar, destacamos la variedad de estrategias inductivas empleadas en cada uno de los problemas y la utilidad del procedimiento que hemos empleado para describirlas. Esta variedad confirma que los estudiantes no conocen algoritmos que les lleven sistemáticamente a la solución de los problemas.

Los resultados presentados en el Capítulo 7 confirman los resultados del Capítulo 6, en el sentido de que son una minoría los alumnos que llegan a expresar una generalización. Por tanto, la mayoría de los alumnos siguen estrategias que se centran en el trabajo con términos k-ésimos de la progresión. Además, en la mayor parte de los casos, los estudiantes trabajan con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico, independientemente del sistema de representación que se emplee en el enunciado del problema. También los estudiantes que generalizan, utilizan el sistema de representación numérico con una frecuencia mayor que los otros sistemas de representación. Suponemos que este hecho es consecuencia de la mayor familiaridad de los alumnos con las representaciones numéricas.

El sistema de representación verbal se suele utilizar al final de la respuesta que presentan los estudiantes para los diferentes problemas propuestos, cuando buscan una justificación de sus respuestas. Aunque son pocos los estudiantes que llegan a justificar sus conjeturas (ver Capítulo 6), en ocasiones dan una explicación de los pasos previos que han realizado. De hecho, hay estudiantes que generalizan verbalmente cuando hacen un intento de justificar sus conjeturas y dan una explicación para el caso general de modo que alcanzan la expresión verbal del término general. Hay estudiantes que ven en la generalización una forma de dar respuesta a la tarea de justificación en los problemas propuestos, tal y como se ha recogido en el Capítulo 7.

El sistema de representación gráfico, únicamente es empleado por los estudiantes cuando éste aparece en el enunciado del problema (problemas 3 y 6). La mayoría de ellos, se limitan a hacer una transformación dentro de este sistema de representación y traducen la información al sistema de representación numérico. Se basan en ese trabajo con los términos k-ésimos, que involucra el sistema de representación gráfico, para identificar un patrón. Por tanto, los estudiantes ponen de manifiesto que la visualización juega un papel importante, ya que lo utilizan para reorganizar la información que les proporciona el problema (aunque tiendan, posteriormente, a buscar el trabajo con el sistema de representación numérico).

Según Curso

Como se observa en los resultados recogidos en el Capítulo 7, únicamente se han identificado diferencias significativas en cuatro estrategias inductivas, que los estudiantes han utilizado en los problemas 2, 3 y 5. Estas estrategias son utilizadas con una frecuencia significativamente mayor por los estudiantes de 4º. En dichos problemas se han planteado los términos k-ésimos en los sistemas de representación verbal y gráfico. En los problemas en los que los términos k-ésimos se expresan numéricamente, no se han observado diferencias significativas en la frecuencia de utilización de estrategias inductivas debidas al curso de los alumnos.

En tres de las cuatro estrategias en las que se han observado las diferencias significativas, los estudiantes han llegado a expresar la generalización. Por tanto, podemos concluir que las diferencias encontradas en esos problemas son debidas fundamentalmente a ciertas estrategias en las que los estudiantes generalizan. Sin embargo, no podemos hablar de tendencia en estrategias en las que alcanzan la generalización puesto que, como se ha visto en la relación entre el curso y los pasos, no se ha identificado una asociación entre la generalización y el curso.

Destacamos que las diferencias significativas en el empleo de las estrategias inductivas han sido puntuales y que se han dado en un número de estrategias muy bajo, teniendo en cuenta en número total de estrategias que se han identificado en los seis problemas.

Según Centro

Si nos centramos en las diferentes estrategias inductivas utilizadas por los estudiantes en función del centro al que pertenecen, recogemos las siguientes conclusiones para cada uno de los centros de Granada, Madrid, Cúllar-Vega y Teruel:

- En los estudiantes de Granada hemos observado diferencias significativas en las frecuencias de empleo de estrategias inductivas constituidas por diferentes tipos de transformaciones y en distintos problemas. En esas estrategias no hemos observado características comunes que nos permitan determinar una tendencia clara de estos estudiantes con respecto a los de otros centros.
- Los estudiantes de la muestra pertenecientes al centro de Madrid tienden a emplear con una frecuencia significativamente inferior al resto, estrategias en las que los términos k-ésimos se expresan sólo numéricamente o numérica y verbalmente. Por otro lado, en los problemas 2 y 5, en los que los términos k-ésimos están expresados numéricamente, estos estudiantes destacan por el empleo de estrategias inductivas de generalización algebraica. Es posible que las diferencias encontradas en el centro de Madrid, se deban a que estos estudiantes han trabajado las progresiones en fechas próximas a las fechas de la realización de la prueba.
- Los estudiantes de Cúllar-Vega utilizan con una frecuencia superior a la media estrategias en las que no llegan a expresar la generalización y trabajan con los términos k-ésimos en los sistemas de representación numérico únicamente o numérico y verbal con una frecuencia superior al resto de los centros.
- En el centro de Teruel, algunas frecuencias de estrategias inductivas empleadas por los estudiantes tienden a estar por encima de la media, en relación con las frecuencias de estudiantes de otros centros que emplean esas mismas estrategias. Este hecho se ha observado tanto en estrategias en las que llegan a expresar la generalización como en otras en las que no lo hacen. Esto nos hace pensar que estos estudiantes han adquirido capacidades relacionadas con el contenido matemático y con la generalización que son superiores a las adquiridas por estudiantes de otros centros.

UTILIZACIÓN DE LA REGLA DE TRES

Algunos estudiantes de la muestra no avanzan en su trabajo más allá del trabajo con términos k-ésimos de la progresión. Entre ellos, hemos incluido a los que utilizan la regla de tres como estrategia de resolución. Este algoritmo no soluciona los problemas planteados ni permite profundizar en el razonamiento inductivo que llevan a cabo los estudiantes, por lo que no lo hemos considerado como parte de las estrategias inductivas. Estos estudiantes aplican directamente dicho algoritmo sobre los datos que extraen de los enunciados de los problemas, sin haber comprobado si los términos k-ésimos siguen una relación que les permita aplicarla. El lenguaje algebraico es utilizado en estos casos en relación con algún término k-ésimo de la progresión y no lo vinculan al término general de la misma.

En cuanto a las transformaciones en los sistemas de representación que realizan los estudiantes que emplean la regla de tres, las hemos codificado como corresponde al trabajo con los términos k-ésimos.

La utilización de este algoritmo pone de manifiesto un error en el que incurren algunos estudiantes al considerar que los problemas propuestos en la prueba pueden ser resueltos aplicando la regla de tres. Esto pone de manifiesto un empleo de la proporcionalidad en problemas que se corresponden con patrones lineales y problemas que se corresponden con patrones cuadráticos. Van Dooren y sus colaboradores (De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006) advierten de esta tendencia a lo proporcional en diferentes tipos de problemas en los que no es una estrategia adecuada. De estos trabajos, obtenemos tres elementos que pueden explicar la utilización de la proporcionalidad en nuestra investigación:

- Elementos relacionados con la linealidad/proporcionalidad por su carácter intuitivo, su simplicidad y su presencia en la vida diaria.
- Elementos relacionados con las experiencias de los estudiantes en el sistema escolar formal.
- Elementos relacionados con el dominio matemático específico en el que el fenómeno se produce.

PERFILES DE RAZONAMIENTO INDUCTIVO

En el Capítulo 8 se ha hecho una descripción de los pasos de razonamiento inductivo y de las estrategias inductivas que llevan a cabo siete estudiantes de la muestra, seleccionados porque emplean las estrategias inductivas predominantes en los seis problemas. Este análisis complementa a los llevados a cabo en los Capítulos 6 y 7 en dos sentidos. Por un lado, utilizamos los Pasos y las Estrategias Inductivas como elementos para describir las producciones de los estudiantes, de manera conjunta (en el Capítulo 6 nos hemos centrado en los pasos y en el Capítulo 7 en las estrategias). Por otro lado, analizamos el trabajo de cada uno de esos estudiantes en los seis problemas de la prueba (en los capítulos 6 y 7 hemos hecho referencia a la muestra o a grupos de estudiantes).

Como parte de esta descripción, para cada estudiante mostramos la identificación de procedimientos, basándonos en los pasos y en las estrategias inductivas en cada problema y, finalmente, recogemos las tendencias de cada estudiante en los seis problemas de la prueba, conjuntamente. Consideramos que esos son los perfiles de los siete estudiantes, que se pueden considerar representantes de las estrategias inductivas predominantes.

La información recogida respecto a los perfiles de los estudiantes confirma los análisis presentados en los otros capítulos. En cuanto a los pasos de razonamiento inductivo, el trabajo con los términos k-ésimos, la identificación del patrón y la formulación de conjeturas se confirman como los pasos destacados, ya que son los que los sujetos emplean con mayor frecuencia, tal y como se identificó en el apartado referente a la validación del modelo teórico. En cuanto a las estrategias inductivas de los siete estudiantes, se sigue observando en los procedimientos usados en los seis problemas (al igual que en el Capítulo 7), que tienden a restringirse al trabajo con términos k-ésimos; y que los expresan, predominantemente, en el sistema de representación numérico.

Entre los perfiles, encontramos ejemplos de que los pasos del razonamiento inductivo del modelo teórico no se dan siempre linealmente en el trabajo real de los estudiantes. Esto explica, en parte, la falta de regularidad en los análisis de (in)dependencia de uno de los pasos con respecto a otros considerados previos en el modelo teórico.

Por último, destacamos la utilidad de poder comparar los perfiles, según su complejidad, en función del modelo teórico de razonamiento inductivo. Atendiendo al avance de los estudiantes en función de los pasos del modelo, la consideramos una primera aproximación a un posible establecimiento de niveles del razonamiento inductivo que emplean los estudiantes de 3º y 4º de ESO.

DISCUSIÓN

Hemos cubierto algunas cuestiones planteadas en otros trabajos y hemos obtenido resultados que pueden ser comparados con los de otras investigaciones. Organizamos esta información en tres bloques en función de la proximidad con nuestro trabajo. En primer lugar establecemos la relación con nuestro estudio piloto (Cañadas, 2002). En segundo lugar con las investigaciones llevadas a cabo en el seno de nuestro grupo de investigación. Y, en tercer y último lugar, comparamos nuestros resultados con los de otras investigaciones.

Estudio Piloto

Con esta investigación hemos cubierto algunas cuestiones que quedaron pendientes en nuestro estudio exploratorio (Cañadas, 2002). Una de ellas, fue la consideración de aspectos relativos al contenido matemático utilizado en el planteamiento de los problemas y que se tuvieran en cuenta en la descripción del razonamiento inductivo. En este trabajo, hemos seleccionado las progresiones como contenido matemático y hemos llevado a cabo una descripción detallada de ellas, lo cual ha permitido, por un lado, seleccionar justificadamente problemas adecuados a nuestros objetivos de investigación y, por otro, conocer los aspectos que pueden influir en el proceso inductivo que llevan a cabo los estudiantes.

Nuestro estudio exploratorio estaba enfocado en un nivel local y se llevó a cabo con 12 alumnos de cuatro cursos de educación secundaria. En esta ocasión, el estudio empírico, se ha llevado a cabo con 359 estudiantes de cuatro centros españoles diferentes que participaron en la prueba, pertenecientes a 3º y 4º de ESO, lo que supone un cambio significativo en el número de estudiantes participantes en la investigación. Esto nos permite recopilar información, teniendo en cuenta un mayor número de variables de contexto, con lo cuál los resultados han ganado en validez externa, es decir, en capacidad de generalización a otros contextos. Además, se han reducido el número de cursos a los que pertenecen los estudiantes, lo que permite centrarnos en aspectos más específicos de los estudiantes de esos cursos y de los propios cursos.

Otras Investigaciones

La caracterización del razonamiento inductivo de los estudiantes, llevada a cabo mediante la consideración de los pasos y las estrategias inductivas en la resolución de problemas relacionados con las progresiones, ha permitido contribuir a uno de los objetivos que se propone el grupo de investigación de *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (FQM-0193), en el que se encuadra el trabajo. El objetivo al que hacemos referencia se centra en los procesos cognitivos con que las personas asignan y comparten significados utilizando estructuras numéricas (Castro, 1995).

Esta investigación complementa los resultados obtenidos en otras investigaciones que han sido referenciadas en los antecedentes de esta memoria (ver Capítulo 4). Recogemos estos aportes en unos epígrafes que se corresponden con los principales aspectos relacionados con el razonamiento inductivo a los que se refieren.

<u>Sistema de representación</u>

Los estudiantes utilizan el sistema de representación numérico de forma predominante en todos los problemas de la prueba. El sistema de representación gráfico se introdujo como opción potente cuando se trata de identificar estrategias utilizadas por los estudiantes en tareas relacionadas con la generalización, según los antecedentes de esta investigación. Hemos puesto de manifiesto la relevancia del sistema de representación gráfico en la búsqueda de patrones ya que los estudiantes han encontrado métodos alternativos de avanzar a partir de los términos k-ésimos de la sucesión expresados en este sistema de representación. La visualización ha jugado un papel importante en el desarrollo de los primeros pasos del razonamiento inductivo de estos alumnos, tal y como señala Ben-Chaim (1989), ya que les ha inspirado para realizar descubrimientos creativos (Zimmermann y Cunningham, 1991).

En las producciones de los estudiantes en los problemas en los que los términos k-ésimos de la progresión son expresados gráficamente (problemas 3 y 6), hemos identificado las visiones estática y dinámica que indican García y Martinón (1999). Por un lado, en el Problema 3, hay pocos estudiantes que trabajen con los términos k-ésimos en el sistema de representación gráfico, aunque algunos de ellos llegan a la generalización, lo cual se corresponde con la visión estática. Por otro, en el Problema 6, los estudiantes imaginan el objeto creciendo hasta el término por el que se les pregunta, que se corresponde con la visión dinámica. Las visiones estática y dinámica se pueden observar relacionados, en los problemas mencionados, con las propuestas de extrapolar y continuar, respectivamente.

Esta investigación revela que los estudiantes, pese a haber trabajado previamente con patrones expresados gráficamente y haber comprobado su utilidad en el proceso de generalización (ver Capítulo 5), no recurren espontáneamente a este sistema de representación como apoyo en problemas en los que los términos k-ésimos están expresados en otros sistemas de representación, tal y como se deduce de las estrategias inductivas empleadas en los problemas de la prueba.

Trabajo y organización de términos k-ésimos

Como se puede observar en los antecedentes de esta investigación, los trabajos relacionados con el razonamiento inductivo se centran fundamentalmente en los pasos relativos a los patrones y sucesivos. Sin embargo, no prestan atención a estos primeros pasos que nosotros hemos considerado claves dentro del proceso inductivo.

Identificación de patrón

La flexibilidad en el trabajo con los patrones se presenta como una garantía de éxito en la resolución de problemas de generalización (Lee y Wheeler, 1987). Estos autores y otros como Fou-Lai y Kai-Lin (2004) identifican diferencias en el proceso de generalización que siguen los estudiantes en el trabajo de patrones lineales y cuadráticos. En nuestra investigación no se han encontrado diferencias significativas en la identificación de patrones entre los problemas en los que las progresiones son de orden 1 y los problemas en los que las progresiones son de orden 2. En este sentido, nuestros resultados pueden tener relación con los comentarios que hace Mason (1996), quien apunta la posibilidad de que la identificación de un patrón (adecuado o no) pueda suponer un estancamiento en lo trivial y los estudiantes no vean la necesidad de generalizar.

Algunos de los patrones no adecuados que consideran los estudiantes no son identificados como erróneos por ellos porque tienden a asumir el patrón observable en los primeros términos k-ésimos como válido para todos. No se percatan que deben identificar las reglas que lo definen y no comprueban si es aplicable en otros casos (Bell, Burkhardt, Crust, Pead y Swan, 2004).

Generalización

La generalización se ha considerado un paso fundamental en el proceso de razonamiento inductivo. Sin embargo, en esta investigación, los estudiantes no llegan a ella con una frecuencia significativamente superior al resto de los pasos. La generalización es ilustrada por Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985) mediante el *ciclo de generalización*. En este proceso cíclico incluyen el reconocimiento de un patrón, percibir una generalidad en éste, expresar la generalidad y manipular esas expresiones. Según indican los autores, la expresión de la generalidad se suele hacer mediante el lenguaje algebraico y así es como lo hacen en algunos casos los estudiantes participantes en nuestro trabajo. En estos casos sí se ha podido observar, en ocasiones, la manipulación de esas expresiones. Sin embargo, también hay estudiantes que aún viendo claramente la generalización, no la expresan espontáneamente mediante el lenguaje algebraico, tal y como también indica la investigación de Stacey (1989). Algunos estudiantes expresan verbalmente la generalización en los problemas que les hemos propuesto. En esos casos, los estudiantes no manipulan la expresión de la generalización, sino que llegan a ella cuando tratan de justificar sus conjeturas.

Validación de conjeturas

El análisis de la resolución de los problemas por los alumnos de 3º y 4º de ESO confirma la tendencia de los alumnos, señalada en otras investigaciones de acoger las hipótesis o conjeturas como conclusión (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira y Varandas, 1998; Brocardo, 2004). Cuando los alumnos consideran un hecho evidente, no sienten la necesidad de justificarlo (Callejo, 2004). Al igual que observa Ledesma (1996) con alumnos de igual edad a la de los participantes en nuestro trabajo, se ha observado que algunos de los patrones no adecuados identificados se deben a una *inducción prematura* que llevan a cabo mediante el análisis de pocos casos particulares. Además, la tendencia a no justificar su respuesta hace que permanezcan anclados en esas conjeturas no adecuadas.

En la validación de conjeturas, Fou-Lai y Kai-Lin (2004) observan diferencias entre los patrones lineales y los cuadráticos. Sin embargo, en nuestra investigación no se han observado diferencias significativas entre ambos tipos de patrones, los cuales están presentes en los dos tipos de sucesiones considerados (sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas).

Los estudiantes no están acostumbrados a expresar sus ideas relacionadas con matemáticas y, en la mayoría de las ocasiones, el énfasis se centra en la producción de soluciones correctas (Glass y Maher, 2004). Esto se observa en nuestra investigación ya que, a pesar de haber insistido en la justificación de las respuestas, los estudiantes se centran en la tarea de continuación y extrapolación. Consideramos que ésta es una de las razones que hace que los alumnos no justifiquen sus conjeturas. Otra de las razones es que no ven la necesidad de hacerlo, tal y como se ha mencionado anteriormente.

Waring, Orton y Roper (1999) manifiestan la vinculación entre la validación y la identificación de patrón y la validación posterior. Sin embargo, en este trabajo hemos concluido únicamente en el Problema 6, que la justificación depende estadísticamente de la identificación de patrones. Los estudiantes no han demostrado sus conjeturas, ni en este ni en otros problemas. Esta diferencia se puede deber a que, mientras que en la investigación de Waring, Orton y Roper se lleva a cabo un proceso de instrucción en el que los alumnos trabajan una serie de tareas relacionadas con el razonamiento inductivo, en nuestro trabajo, los alumnos han seguido el ritmo habitual que utilizan sus profesores en el aula, donde la demostración no se ha trabajado porque no está presente en el currículum español de 3º y 4º de ESO.

Además, mientras que la identificación de patrones sí es un elemento curricular presente en el currículum español de 3º y 4º de ESO, no ocurre así con la demostración.

Tal y como se manifestó en el capítulo dedicado a la justificación de la investigación, los alumnos de educación secundaria no avanzan hacia los procesos de prueba formal de una manera natural y siguen prefiriendo argumentos empíricos (Martin y Harel, 1989; Porteous, 1991; Chazan, 1993). En este trabajo se ha observado esta tendencia y ningún estudiante ha recurrido a procesos de prueba formal o a argumentos deductivos para justificar su respuesta. De hecho, los estudiantes de esta investigación han seguido una tendencia habitual de los estudiantes de estas edades a no ver la necesidad de justificar las conjeturas que han formulado (Ledesma, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira y Varandas, 1998; Cañadas, 2002; Brocardo, 2004). Estos estudiantes no son conscientes de la provisionalidad de las conjeturas que no han sido sometidas a algún proceso de prueba. En los casos en los que realizan alguna validación de sus respuestas, se han mantenido en el trabajo con lo empírico. Este comportamiento de los estudiantes es afín a la tendencia observada en el Reino Unido en el *Longitudinal Proof Project*, donde la mayoría de los alumnos tienden a utilizar verificaciones empíricas (Healy y Hoyles, 1998; Küchemann y Hoyles, 2001).

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Esta investigación no contempla entre sus objetivos, ninguno relacionado con la enseñanza. Sin embargo, queremos mencionar el interés que tiene para los docentes conocer las limitaciones y las lagunas del razonamiento inductivo de los estudiantes. Esto puede ayudar a los profesores a reflexionar sobre las tareas que proponen a los estudiantes y guiarlos en la utilización de ciertos tipos de problemas y el empleo de procedimientos para despertar un interés por el descubrimiento con base en el razonamiento inductivo, teniendo en cuenta la importancia de éste en la ciencia y, en particular, en matemáticas.

Destacamos el papel del procedimiento descrito para identificar perfiles de razonamiento inductivo de los estudiantes en el ámbito educativo. Detectados los perfiles de los estudiantes, el docente posee un criterio para seleccionar problemas adecuados al mismo, de modo que guíe a los estudiantes hacia perfiles más complejos.

LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Somos conscientes de algunas limitaciones que puede conllevar este diseño. Por un lado, la selección no aleatoria de la muestra, no permite la generalización de los resultados a todos los estudiantes españoles de estos cursos puesto que no hemos controlado todas las variables que pudieran aparecer implicadas. Por otro lado, el diseño transversal de la investigación limita la descripción del desarrollo del razonamiento inductivo de estos estudiantes.

La utilización de las progresiones como contenido matemático específico nos ha permitido profundizar en ciertos aspectos relacionados con el razonamiento inductivo. Con esto, también hemos podido limitar otros aspectos que pudieran haber surgido con la consideración de otros conceptos matemáticos.

El planteamiento de una prueba escrita a los estudiantes puede suponer una limitación de esta investigación. Aunque utilizamos la información obtenida en el estudio exploratorio mediante entrevistas semiestructuradas, en el diseño definitivo nos restringimos a la información escrita que expresan los estudiantes en sus producciones. La obtención de datos mediante otras fuentes, como pueden ser grabaciones audio-visuales de trabajo individual en resolución de problemas o de trabajo en grupo de los estudiantes de educación secundaria, puede arrojar información complementaria del razonamiento inductivo de los estudiantes de estos niveles educativos.

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

Las limitaciones identificadas en esta investigación y algunos intereses surgidos de la reflexión durante el desarrollo de la misma, son el origen de algunas líneas de investigación que dejamos abiertas. Investigaciones que consideren otros conceptos matemáticos en la resolución de problemas pueden complementar los resultados que hemos obtenido. Otra forma de presentar a los estudiantes los problemas puede aportar información adicional. Por ejemplo, el planteamiento de los problemas de manera oral podría arrojar luz sobre otras formas de expresión utilizadas por los alumnos.

La realización de un estudio longitudinal en España mediante el que se pueda observar el desarrollo del razonamiento inductivo de los estudiantes complementaría los resultados obtenidos en estudios longitudinales llevados a cabo en otros países.

En el análisis de las producciones de los estudiantes se han identificado diferentes tipos de patrones, algunos de ellos no adecuados a los problemas que constituyen la prueba. Estos patrones pueden deberse a errores en los que incurren y a dificultades que se han encontrado. Una profundización en el conocimiento de esos errores y la necesidad de estudiar la naturaleza de los obstáculos cognitivos y epistemológicos que llevan a esas dificultades sería un trabajo que aportaría riqueza a esta línea de investigación.

El establecimiento de niveles es una cuestión planteada por algunos de nuestros antecedentes y consideramos de interés abordarla en un futuro. En este trabajo hemos establecido una metodología para identificar perfiles que puede ser utilizada como base para la detección de diferentes niveles. Para ello, proponemos la utilización de un tipo concreto de problema de los utilizados en esta investigación y establecer una escala donde se puedan observar los pasos del razonamiento inductivo que realizan los sujetos.

REFERENCIAS

Allen, L. G. (2001). Teaching mathematical induction. An alternative approach. *Mathematics Teacher, 94,* 500-504.

Almeida, D. (1996a). Proof in undergraduate mathematics in the UK: a case of bridging from the informal to the formal? En M. De Villiers y F. Furinghetti (Eds.), *Proceedings of Group 8 of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 86-93). South Africa: Association for Mathematics Education of South Africa.

Almeida, D. (1996b). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 9*. Descargado el 20/01/2007, de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome/pompart8.htm.

Anderson, M. (1995) *Abduction*. Trabajo presentado en el Mathematics Education Colloquium Series en la University of North California. Charlotte, North Carolina.

Andrew, P. (1995). Proof in secondary mathematics: The necessary place of the concrete. *Mathematics in School, 24,* 40-42.

Andrews, P. (1990). Generalising number pattern. *Mathematics in School, 4,* 9-13.

Baker, J. D. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical induction*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Bakker, G. y Clark, L. (1998). *La explicación, una introducción a la filosofía de la cienci*a. California: Mayfield Publishing Company.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemática*s. Bogotá: Una Empresa Docente.

Ballieu, M. (1989). Differences finies, Charles Babbage et son differential engine. *Mathématique et Pédagogie*, *73*, 27-39.

Barrera, V. J. (2004). *Trabajo con razonamiento inductivo por profesores de educación primaria en formación*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher, 7*(2), 48-54.

Bell, A. (1976). A study of pupils´ proof-explanation in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: two aspects. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 167-186). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Bell, A., Burkhardt, H., Crust, R., Pead, D. y Swan, M. (2004). Strategies for problem solving and proof. En National Council of Teachers of Mathematics (Ed.), *International perspective on learning and teaching mathematics* (pp. 129-143). Sweden: Göteborg University.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics, Winter and Spring Edition*, 49-60.

Berelson, B. (1971). *Content analysis communication research*. Nueva York: Hafner.

Bisanz, J., Bisanz, G. L. y Korpan, C. A. (1994). Inductive reasoning. En R.J. Sternberg (Ed.), *Thinking and problem solving* (pp. 181-214). London: Academic Press.

Bishop, A. J. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Bishop, A. J. (2003). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Black, M. (1979). More about metaphor. En A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (pp. 19-43). Cambridge: Cambridge University Press.

Blum, W. y Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 2*(2), 183-203.

Boletín Oficial del Estado (2003). *Real Decreto 831/2003 de 27 de junio, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria* (BOE nº 158), pp. 25683-25743). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial del Estado (2004). *Real Decreto 116/2004 de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria* (BOE, nº 35, pp. 5712-5791). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, England: NFER-NELSON.

Booth, R. y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 169-190.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-123.

Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal.

Boyd, H. (1987). *Experiments with patterns in mathematics*. USA: Dale Seymour Publications.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Brocardo, J. (2004). Analizar hipótesis, argumentar y demostrar: un ejemplo en el contexto de un proyecto curricular centrado en la exploración de investigaciones matemáticas. En J. Jiménez, L. Santos y J. P. da Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 71-77). Barcelona: Graó.

Brown, J. R. (1999). *Philosophy of mathematics*. New York: Routledge.

Bruner, J. S. (1998). *Desarrollo cognitivo y educación. Selección de textos por Jesús Palacios*. Madrid: Morata.

Bueno, A. y Pérez, L. (2006). El razonamiento inductivo desde los enfoques de dominio general y específico. *EduPsykhé, 5*(1), 73-97.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35-49.

Callejo, M. L. (2004). Ver lo general en lo particular: introducción a la inducción completa. En J. Jiménez, L. Santos y J. P. da Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 137-145). Barcelona: Graó.

Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.* Trabajo de Investigación Tutelada. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Gómez, P. (2002). Didactical reflections about some proofs of the Pythagorean proposition. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Norwich: University of East Anglia.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalizations and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th International Congress of Mathematics Education. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 155-152). Melbourne: University of Melbourne.

Carrillo, J. (1994). Resolución de problemas: clave del desarrollo profesional. *Epsilon 30*, 27-38.

Carrillo, J. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon*, *40*, 15-26.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E. (2002). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 13-30). Granada: SAEM THALES y Dpto. Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Castro, E. (2002). Razonamiento inductivo desde la didáctica de la matemática. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Actas del V Simposio sobre aportaciones del área Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 157-166). Alicante: Universidad de Alicante.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations produced by secondary education pupils in mathematical problem solving. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Actas del XXI Annual Meeting North American Chapter of the International Group of the PME* (vol. 2, pp. 547 – 558). México: Centro de Investigación de Estudios Avanzados – IPN.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Cea D´Ancona, M. A. (1996). *Metodología cuantitativa. Estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid: Síntesis.

Chazan, D. (1993). High school geometry justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Christou, C. y Papageorgiou, E. (En prensa). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction.*

Cifarelli, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association (Chicago, Marzo, 1997).

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 239-264.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics*. London: HMSO. (Traducción al castellano: Ministerio de Educación y Ciencia, 1985, Las matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC.)

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2004). *Educación Secundaria. Matemáticas 3*. Madrid: Anaya.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2004). *Educación Secundaria. Matemáticas 4b*. Madrid: Anaya.

Copi, I. M. (1953). *Introduction to logic*. New York: Macmillan. (Traducción al castellano: N. A. Miguez, 1962, Introducción a la Lógica. Buenos Aires: Eudeba.)

Cruz, J. y Carrillo, J. (2004). ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años. En E. Castro y E. de la

Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 195-205). A Coruña: Universidad de A Coruña.

Csapó, B. (1997). The Development of Inductive Reasoning: Crosssectional Assessments in an Educational Context. *International Journal of Behavioral Development, 20*(4), 609–626.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students´ errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 311-334.

De Burgos, J. (1980). *Curso de algebra y geometría*. Madrid: Alhambra.

De Groot, C. (2001). From description to proof. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(4), 244-248.

De Guzmán, M. (1999). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.

De Guzmán, M. y Rubio, B. (1990). *Números reales, sucesiones y series*. Madrid: Pirámide.

De Ketele, J. M. (1984). Vers une redécouverte de l´identité de la pédagogie expérimentale. En Laboratoire de Pédagogie Expérimentale, *Hommage au Professeur Arthur Pilles, Méthodologie de l´enseignement, histoire et recherche en pédagogie,* Louvain-la Neuve: Université Catholique, Lovaina.

De Koning, E. y Hamers J. H. M. (1999). Teaching inductive reasoning: Theoretical background and educational implications. En J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit y B. Csapó (Eds.), *Teaching and learning thinking skills* (pp. 156-188). Lisse: Swets & Zeitlinger.

De Koning, E., Hamers, J. H. M., Sijtsma, K., Vermeer, A. (2002). Teaching Inductive Reasoning in Primary Education. *Developmental Review, 22*(2), 211-241.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26,* 15-30.

Del Río, A. (2005). *El reto de Fermat*. Madrid: Nivola.

Devlin, K. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós.

Díez, J. A. y Moulines, C. U. (1997). *Fundamentos de filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel Filosofía.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* México D.C.: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Edwards, L. D. (1999). Odds and evens: Mathematical Reasoning and informal proof among high school students. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 489-504.

English, L. D. (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Ensley, D. E. y Crawley, J. W. (2006). *Discrete mathematics. Mathematical reasoning and proof with puzzles, patterns and games*. NJ: Wiley.

Ershov, Y. y Paliutin, E. (1990). *Lógica matemática.* Moscú: Mir.

Espino, O. G. (2004). *Pensamiento y razonamiento*. Madrid: Pirámide.

Espinosa, M. E. (2005). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada

Evans, J. St. B. T. (1982). *The Psychology of Deductive reasoning.* London: Routledge and Kegan Paul.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Málaga: Universidad de Málaga.

Fernández, F. (1997). *Evaluación en competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Fernández, F. J. (1988). *Diccionario de Francisco José Ferrater Mora*. Madrid: Alianza.

Fernández, M. L. y Anhalt, C. O. (2001). Transition toward algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(4), 236-241.

Fetísov, A. I. (1980). *Acerca de la demostración en geometría. Lecciones populares de matemática*s. Moscú: Mir.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics, 3*(2), 9-24.

Fisk, J. E. (2005). Age and probabilistic reasoning: Biases in conjunctive, disjunctive and bayesian judgements in early and late adulthood. *Journal of Behavioral Decision Making, 18,* 55-82.

Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics, 8*(5), 269-274.

Fou-Lai, L. y Kai-Lin, Y. (2004). Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number pattern. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 457-464). Bergen: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Academic Publishers Group.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

García, F. (2005). *Matemática Discreta*. Madrid: Thompson.

García, J. (2000). *Representaciones en resolución de problemas. Un estudio comparativo con estudiantes españoles y mexicanos*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.

García, J. A. y Carretero, M. (1986). Estrategias en el razonamiento humano: tareas lógicas y probabilísticas. En H. Peralta (Coord.), *Psicología cognitiva y ciencia cognitiva* (pp. 171-204). Madrid: UNED.

García, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 31-43.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción*. Barcelona: Gedisa.

Gick, M. L. y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, *12*, 306-355.

Gilhooly, K. J. (2005). Working memory and reasoning. En J. P. Leighton and R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 49-77). Cambridge: Cambridge University Press.

Goetting, M. (1995). *The college student's understanding of mathematical proof*. Doctoral Disseration. Maryland: Philosophy Department of University of Maryland.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematics learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Goldin, G. A. y McClintock, C. E. (1980). *Task variables in mathematical problem solving.* Philadelphia, Pensilvania: The Franklin Institute Press.

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the developments of mathematical concepts. En A. Couco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

González, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Madrid: Trotta.

Green, A., Fugelsang, J. y Dunbar, K. (2006). Automatic activation of categorical and abstract analogical relations in analogical reasoning. *Memory and Cognition, 34*(7), 1414-1421.

Greeno, J. G. (1977). Process of understanding in problem solving. En N. J. Castellan, D. B. Pisoni, y G. R. Potts (Eds.), *Cognitive Theory* (vol. 2, pp. 43-83). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Grouws, D. A. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. En M. F. Moreno, G. Gil, M. Socas y J. Godino (Eds.), *Actas del V simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 83-94). Almería: Universidad de Almería.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*, 519-524.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. II, pp. 45-51). Paris: Universidad de Paris.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 5-23.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinski, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in* *collegiate Mathematics Education III,* (pp. 234-283). Washington, D. C.: American Mathematical Society.

Haussmann, K. (1985). Iterative and recursive modes of thinking in mathematical problem solving processes. En L Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 18-23). Utrecht: State University of Utrecht.

Haverty, L. A., Koedinger, K. R. y Alibali, M. W. (2000). Solving inductive reasoning problems in mathematics: Not-so-trivial pursuit. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal, 24*(2), 249-298.

Healy, L. y Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. (Technical Report on The Nationwide Survey). Institute of Education, University of London.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Heit, E. (2000). Properties of inductive reasoning. *Psychonomic Bulletin & Review, 7*(4), 569-592.

Heller, P. Heller, K., Henderson, C., Kuo, V. H. y Yerushalmi, I. (2001). *Instructors´ beliefs and values about learning problem solving*. Descargado el 22/02/2007, de http://groups.physics.umn.edu/physed/Talks/Heller%20PERC01.pdf.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. y Thagard, P. R. (1986). *Induction: processes of inference, learning and discovery*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Holyoak, K. J. (2005). Analogy. En K. J. Holyoak y R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 117-142). Cambridge: Cambridge University Press.

Holyoak, K. J. y Morrison, R. G. (2005). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerat*o. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1996). Mathematical proof: classification and examples for use in secondary education. En M. De Villiers y F. Furinghetti (Orgs.), *Proceedings of Group 8 of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 109-154). South Africa: Association for Mathematics Education of South Africa.

Jaffe, A. y Quinn, F. (1993). "Theoretical mathematics": Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 29*(1), 1-13.

Janvier, C., Girardon, C. y Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jeffery, R. (1978). *A study of the generalisation and explanation strategies of 10 and 11 year old children in mathematics*. Thesis for the Degree of Master of Philosophy, University of Nottingham.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Johnson-Laird, P. N. (1993). *Human and machine thinking*. Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. y Byrne, R. M. J. (1991). *Deduction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Johnson-Laird, P. N. y Byrne, R. M. J. (1993). Precise of deduction. *Behavioural and Brain Sciences, 16*, 323-380.

Jones, B. W. (1969). *Teoría de los números*. México: Trillas.

Jones, L. (1996). A developmental approach to proof. En M. De Villiers y F. Furinghetti (Orgs.), *Proceedings of Group 8 of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 235-240). South Africa: Association for Mathematics Education of South Africa.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to Modelling. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 381-398). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kaput, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En National Council of Teachers of Mathematics, The Nature and role of algebra in the K-14 curriculum*. Washington, D. C.: National Academy Press.

Keith. D. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. New York: Scientific American Library.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (1999). *Handbook of research design in Mathematics and Science Education*. Nahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. London: Kluwer.

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving*. Athens, GA: Hatfield y Bradbard.

Kilpatrick, J. (1985a). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1985b). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 1-26.

Kilpatrick, J., Hoyles, C. y Skovsmose, O. (Eds.) (2005). *Meaning in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Kinshuk, T. y McNab, P. (2006). Cognitive trait modelling: the case of inductive reasoning ability. *Innovation in Education and Teaching International, 43*(2), 151-161.

Klauer, K. J. (1996). Teaching inductive reasoning: Some theory and there experimental studies. *Learning and Instruction, 6*, 37-57.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2001a). *Identifying differences in students' evaluation of mathematical reasons*. Trabajo presentado en el BSRLM Conference, Roehampton, Manchester.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2001b). Investigating factors than influence students' mathematical reasoning. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 257-264). Holland: Utrecht University.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2005). *Pupils awareness of structure on two number/algebra questions*. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of European Research in Mathematics Education IV* (pp. 438-447). Barcelona: FUNDEMI IQS-Universitat Ramón Llull.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*. vol. 2. Cambridge: University Press. (Trad. Castellano de Ribes Nicolás, D: Matemáticas, Ciencia y Epistemología. Madrid: Alianza, 1981).

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teacher in the Middle School, 8*(7), 342-348.

Ledesma, A. (1996). Problemas de inducción matemática en el Open Matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 39-52.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). London: Kluwer.

Lee, L. y Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification*. Montreal: Concordia University.

Lee, S. S. (1982). Acquisition of inductive bicondicional reasoning skills: training of simultaneous and sequential processing. *Contemporary Educational Psychology, 7*, 371-383.

Legrenzi, P. (2000). *Cómo funciona la mente*. Madrid: Alianza.

Leighton, J. P. (2005). Defining and describing reasoning. En J. P. Leighton y R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 3-11). Cambridge: Cambridge University Press.

León, O. y Montero, I. (2000). *Introducción a la lógica de la investigación en psicología y educación*. Madrid: McGraw-Hill.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Lester, F. (1977). Ideas about problem solving: a look at some psychological research. *Arithmetic Teacher, 25*, 12-14.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286 – 323). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lewis, B. (1983). *Matemáticas modernas. Aspectos recreativos*. Madrid: Alhambra.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190.

Long, C. T. y De Temple, D. W. (2002). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. USA: Addison Wesley.

Maher, C. y Martino, A. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 194-214.

Manavopoulos, K. y Tzouriadou, M. (1998). Narrative reproduction in preschoolers after the application of an inductive reasoning training programme. *European Early Childhood Education Research Journal, 6*(1), 37-62.

Marchushévich, A. I. (1974). *Sucesiones recurrentes. Lecciones populares de matemáticas*. Moscú: Mir.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publisher.

Markman, A. B. y Gentner, D. (2000). Structure-mapping in the comparison process. *American Journal of Psychology, 113*, 501-538.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Martínez, A. (2000).*Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemátic*a. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Mason, J. (1988). *Expressing generality*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (1991). *Supporting primary mathematics: Algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (1995). *Abduction at the heart of mathematical being*. Trabajo presentado en honor de David Tall en el Centre for Mathematics Education of the Open University, Milton Keynes.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer.

Mason, J. (2002). *What makes an example exemplary? Pedagogical and research issues in transitions from numbers to number theory*. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.224-229). Norwich: University of East Anglia.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277-290.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC-Labor.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Milton Keynes: Open University Press.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Mill, J. S. (1858). *System of logic, raciocinative and inductive*. London: Harper & Brothers.

Miller, W. (1990). Polygonal numbers and recursion. *Mathematics Teacher, 83*(7), 555-558.

Ministerio de Educación y Ciencia (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria I*. Madrid: Autor.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of proof for the sum of two even numbers. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 353-360). Norwich: University of East Anglia.

Miyakawa, T. (2004). Reflective symmetry in construction and proving. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 337-344). Bergen: Bergen University College.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 47-68.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de María Moliner.* Madrid: Gredos.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Movshovitz-Hadar, N. (1996). On striking a balance between formal and informal proofs. En M. De Villiers y F. Furinghetti (Eds.), *Proceedings of Group 8 of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 43-52). South Africa: Association for Mathematics Education of South Africa.

National Council of Teachers of Mathematics (1978). *Practical ways to teach the basic mathematical skills*. Virginia: Virginia Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, V.A.: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Autor y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, D. C.: National Education Association.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novick, L. R. y Basokk, M. (2005). Problem solving. En K. J. Holyoak y R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 321-350). Cambridge: Cambridge University Press.

Ortiz, A. (1993). *Series numéricas y razonamiento inductivo*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, A. (1997) *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, A. y González, J. L. (2000). *Investigación en razonamiento inductivo numérico y algebraico*. L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 147-161). Huelva: Universidad de Huelva.

Orton, A. (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell.

Orton, J. y Orton, A. (1994). Students´ perception and use of pattern and generalization´. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 407-414). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Orton, J. y Orton, A. (1996). Making sense of children's patterning. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceeding of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 83-90). Valencia: Universidad de Valencia.

Orton, J., Orton, A. y Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Pask, C. (2003). Mathematics and the science of analogies. *American Journal of Physics*, *71*, 526-534.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 33-40). Utrecht: Utrecht University.

Pegg, J. y Redden, E. (1990). Procedures for, and experiences in, introducing algebra in New South Wales. *Mathematics Teacher, 83*(5), 386-391.

Peirce (1918). *Tres tipos de razonamiento.* Descargado el 20/10/2006, de http://www.unav.es/gep.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Phillips, E. (1992). *Patterns and functions*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. y Beth, E. W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Crítica.

Pisot, C. y Zamansky, M. (1996). *Matemáticas generales. Álgebra-Análisis*. Barcelona: Montaner y Simon.

Poincaré, H. (1902). *Science and Hipótesis*. New York: Dover. (Traducción al castellano: A. B. Besio, y J. Banti, J., 1963, La ciencia y la hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe.)

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press. (Traducción al castellano: J. Zugazagoitia, 1965, Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas)

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (1967). *Le Découverte des Mathématiques*. París: DUNOD.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. E. y Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. En P. Abrantes, J. Porfírio y M. Baia (Orgs.), *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Popper, K. (1967). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.

Popper, K. (1985). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.

Porteous, K. (1991). What do children believe? *Educational Studies in Mathematics, 21*(2), 589-598.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, methaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates .

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Tesis Doctoral. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.) *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 3*(6), 21-36.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 107-111). Boston: Kluwer.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objetification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Reid, D. A. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching*. Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics. Montreal: Concordia University.

Rico, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada

Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997b). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 219-231). Huelva: Universidad de Huelva.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.

Rínikov, K. (1974). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Mir.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científic*a. Barcelona: Antrophos.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: students' access to significant mathematical ideas. En D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-163). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (pp. 113-120). Bergen: Bergen University College.

Ropo, E. (1987). Skills for learning. A review of studies on inductive reasoning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 31*(1), 31-39.

Russell, B. (1973). *Essays in Analysis*. London: Allen & Unwin.

Santamaría, C. (1995). Un análisis del razonamiento. En M. Carretero, J. Almaraz y P. Fernández (Eds.), *Razonamiento y comprensión* (pp.13-45). Madrid: Trotta.

Sawyer, W. W. (1963). *Prelude to mathematics*. Penguin Books.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academia Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). New York: MacMillan.

Schultz, J. E. y Waters, M. S. (2000). Why representation? *Mathematics Teacher*, *3*(6), 448-453.

Schumann, H. (1991). Interactive generalizing of geometric configurations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(3), 953-963.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Shell Centre for Mathematical Education (1984). *Problems with patterns and numbers*. Manchester: University of Notthingham.

Sierra, B. (1995). Solución analógica de problemas. En M. Carretero, J. Almaraz y P. Fernández (Eds.), *Razonamiento y comprensión* (pp.179-218). Madrid: Trotta.

Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 197-210.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 39-46). London: Institute of Education, University of London.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics. Volume II: Special Topics of Elementary Mathematics.* New York: Dover.

Smith, L. (2002). *Reasoning by mathematical induction in children's.* Netherlands: Pergamon.

Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1998). Clasificación de los problemas aritméticos de estructura verbal aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 51-67). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Solís, C. y Sellés, M. (2005). *Historia de la Ciencia*. Madrid: Espasa-Calpe.

Sowder, L. y Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 3*(2), 243-260.

Spivak, M. (1996). *Calculus*. Barcelona: Reverté

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K. y Groves, S. (1999). *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el pensamiento matemático*. Madrid: Narcea.

Stenning, K. y Monaghan, P. (2005). Strategies and knowledge representation. En J. P. Leighton y R. J. Sternberg (Eds.), *The nature of reasoning* (pp. 129-168). Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1986). Towards a unified theory of human reasoning. *Intelligence, 10*, 281-314.

Sternberg, R. J. (1998). When will the milk spoil?: Everyday inductive in human intelligence. *Intelligence, 25*(3), 185-203.

Sternberg, R. J. y Gardner, M. K. (1983). Unities in inductive reasoning. *Journal of Experimental Psychology: General, 112*(1), 80-116.

Struik, D. J. (1986). *Historia concisa de las matemáticas*. México: Instituto Politécnico Nacional de México.

Swan, M. (1984). *Problems with patterns and numbers*. Nottingham: Shell Centre for Mathematics Education.

Szetela, W. (1999). Triangular numbers in problem solving. *The Mathematics Teacher, 92*, 820-824.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 23-40.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics.* USA: Mathematical Association of America.

Taplin, M. (1995). Spatial patterning: a pilot study of pattern formation and generalization. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 42-49). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Thurstone, L. L. (1947). *Primary Mental.* Chicago: University Chicago Press.

Tomic, W. y Kingma, J. (1997). *Reflection on the concept of intelligence*. Greenwich, Connecticut: JAI Press.

Van Asch, A. G. (1993). To proof, why and how? *International Journal Mathematics Education in Science and Technology,* 24(2), 301-313.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa, IV*, 115-135.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 8*(1), 17-34.

Van Essen, G. y Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.

Vega, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza.

Verstappen, P. (1982). Some reflections on the introduction of relations and functions. En G. Van Barneveld y H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of Conference on Functions* (pp. 166-184). Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development.

Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: un marco de análisis de protocolos*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada

Vizmanos, J. R. y Anzola, M. (2002). *Algoritmo 3º ESO Matemáticas*. Madrid: SM.

Vizmanos, J. R. y Anzola, M. (2003). *Algoritmo 4º ESO Matemáticas. Opción A.* Madrid: SM.

Vizmanos, J. R. y Anzola, M. (2003). *Algoritmo 4º ESO Matemáticas. Opción B.* Madrid: SM.

Volmik, J. D. (1990). The nature and role of proof in mathematics education. *Pythagora*s, 7-10.

Waring, S., Orton, A. y Roper, T. (1999). Pattern and proof. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 192-206). London: Cassell.

Wason, P. (1966). Reasoning. En B. M. Foss (Ed.), *New horizons in Psychology* (pp. 135-151). Middlesex, UK: Penguin.

Wexler, M. (1999). Inductive learning with external representation. En A. Riegler y M. Peschl (Eds.), *Understaning representation*. New York: Plenum Press. Descargado el 22/02/2007, de http://wexler.free.fr/papers/induction.pdf.

Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking mathematical concepts*. Chichester: Ellis Horwood Limited.

Wussing H. (1998) *Lecciones de historia de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI.

Yevdokimov, O. (2003). Intuitive proofs as a tool for development of student's creative abilities while solving and proving. En N. A. Pateman, B. J. Doherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 264). Honolulu, USA: PME.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

ANEXOS

ANEXO A. BÚSQUEDA DE INFORMACIÓN

Una vez hecha la primera aproximación al problema de investigación, nuestro interés en una búsqueda de información se centra en dos puntos. Por un lado, en la identificación y determinación del significado de ciertos términos que aparecen relacionados con nuestro trabajo. Por otro lado, en la identificación y revisión de investigaciones que permitan avanzar en nuestro trabajo desde diferentes perspectivas.

Con la intención de conocer las investigaciones realizadas relacionadas con nuestro problema de investigación, llevamos a cabo una búsqueda sistemática de información a través de diferentes medios que estaban a nuestro alcance. En este apartado mencionamos los medios utilizados y las fuentes de información que han sido relevantes para nuestra investigación.

BIBLIOTECAS

Las bibliotecas que fueron consultadas son:

- Biblioteca del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Bibliotecas de la Universidad de Granada.
- Bibliotecas de la Universidad de Zaragoza.
- Biblioteca personal del Dr. Luis Rico.

Las bibliotecas de la Universidad de Granada y de la Universidad de Zaragoza fueron consultadas a través del acceso identificado en internet, como se comentará en el epígrafe correspondiente.

DICCIONARIOS Y ENCICLOPEDIAS

Para la determinación de diferentes términos empleados en esta investigación cuyos significados se reflejarán en el marco conceptual de este trabajo, utilizamos los siguientes diccionarios y enciclopedias:

Diccionario de la Lengua Española (Real Academia Española, 1992).

Diccionario de Francisco José Ferrater (Ferrater, 1988).

Diccionario María Moliner (Moliner, 1986).

Diccionario de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1990).

Enciclopedia Gran Larousse Universal (Burrel i Floría, G., 1987).

Diccionario Enciclopédico Larousse 2000.

Enciclopedia electrónica Microsoft Encarta (Microsoft Encarta, 2003).

BÚSQUEDA EN INTERNET

Desde que centramos nuestro interés en el razonamiento inductivo en la educación secundaria, se han llevado a cabo diferentes búsquedas en Internet empleando diferentes términos clave de esta investigación. Las primeras búsquedas se hicieron en 2002, cuando en el buscador *Google* se consiguieron 2870 entradas para "razonamiento inductivo" o "inductive reasoning". Añadir el nivel educativo en el que se centra este trabajo a la búsqueda, la educación secundaria, no permitió afinar nuestra búsqueda. Sin embargo, cuando se utilizaron "razonamiento inductivo" y "Educación Matemática" como términos clave, se consiguieron 344 entradas, lo cuál facilitó la revisión de las referencias encontradas en Google y se pudo concluir que la búsqueda no fue satisfactoria porque no proporcionó referencias distintas a las ya consideradas a través de otras fuentes de información.

En 2006 se han localizado 86600 entradas en Google con "razonamiento inductivo", 2260000 para "inductive reasoning". Al añadir el nivel educativo, "educación secundaria" y "secondary", respectivamente, no conseguimos hacer más operativa la búsqueda ya que no obtuvimos información adicional a la conseguida por otras vías.

Desde el acceso identificado de las direcciones electrónicas de la Universidad de Granada (www.ugr.es) y de la Universidad de Zaragoza (www.unizar.es), lo cual nos permitió tener acceso a revistas a las que se encuentran subscritas ambas universidades. Algunas de estas revistas internacionales especializadas de nuestro área fueron consultadas en *Kluwer on line* y en *Dialnet*.

Destacamos la página web http://www.lettredelapreuve.it, en la que se selecciona bibliografía sobre trabajos relacionados con las matemáticas y los procesos de prueba.

BASES DE DATOS

La primera base de datos que revisamos fue la más próxima en nuestro entorno, la específica de nuestro grupo de investigación: la Base de Datos PNA (http://cumbia.ath.cx/pna.htm).

MATHDI y Eric Database son bases de datos obligatorias en toda revisión bibliográfica para una investigación. En la primera, se obtuvieron 57 entradas con los términos clave "*inductive*" y "*reasoning*". En la segunda conseguimos 147 entradas para "inductive reasoning". A partir de estas entradas, obtuvimos nuevas referencias.

En la base de datos TESEO del Consejo de Coordinación Universitaria, consultamos tesis doctorales leídas y consideradas aptas en las universidades españolas desde 1976 para detectar investigaciones relacionadas con nuestro trabajo. Las tesis de otros países europeos fueron consultadas en la versión oficial del tesauro, elaborada conjuntamente por los países de la Unión Europea y por el Consejo de Europa, se puede descargar desde la web de EURYDICE (http://www.eurydice.org).

A través de la página web del Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE), http://www.mec.es/cide/, hemos tenido acceso a las bases de datos Eurybase, REDINED y a un catálogo de investigaciones. El catálogo de investigaciones educativas recoge las investigaciones financiadas o realizadas por el CIDE y los organismos del Ministerio de Educación que le precedieron. Algunos de los trabajos que se resumen en este catálogo son inéditos y por ello consideramos interesante esta búsqueda.

REVISTAS

Las búsquedas en las bibliotecas y en Internet permitieron seleccionar una serie de revistas especializadas, tanto nacionales como internacionales, a las que podíamos tener acceso. Estas revistas fueron la principal fuente de obtención de antecedentes para este trabajo. A continuación recogemos las revistas y el año de publicación desde el que hemos hecho la revisión.

Revistas Nacionales

Las revistas españolas en las que hemos llevado a cabo una búsqueda sistemática han sido:

SUMA, desde 1988.

Epsilon, desde 1984.

UNO, desde 1994.

Enseñanza de las Ciencias, desde 1983.

Revistas Internacionales

Destacamos una serie de revistas internacionales a las que hemos tenido acceso y que se han podido revisar de una manera sistemática desde el año que se indica hasta la actualidad:

Educational Studies in Mathematics, desde 1988.

Journal for Research in Mathematics Education, desde 1995.

Journal of Mathematical Behavior, desde 1985.

Journal of Mathematics Teacher Education, desde 1998.

Journal for Research in Mathematics Education, desde 1995.

Journal of Mathematical Imaging and Vision, desde 1997.

Journal of the Association for Institutional Research, desde 1998.

Mathematics in School, desde 1975.

En las referencias bibliográficas de esta investigación se observan los trabajos que fueron de interés para nuestra investigación. Destacamos las revistas *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, *Research on Higher Education* y *Journal of the association for Institutional Research*, en las cuales no se localizaron artículos de interés para nuestro trabajo, ya que la mayoría de ellos están relacionados con matemáticas de niveles superiores a los de educación secundaria y bachillerato. Sin embargo, esta revisión, al igual que las demás, sirvió para obtener nuevas referencias.

Se consultaron otra serie de revistas puntualmente, ya que nos limitamos a artículos que sabíamos que podían ser de interés para nuestro trabajo. Ejemplos de estas revistas son *Mathematics Teaching in the Middle School*, *Mathematics Teacher* o *Educación Matemática.*

ACTAS DE CONGRESOS

Actas de Congresos Nacionales

La revisión de actas de diversos congresos celebrados en nuestro país ha sido una fuente de información importante ya que ha permitido conocer trabajos relacionados con esta investigación dentro de nuestras fronteras. Destacamos en este apartado:

1. Las actas de los simposios celebrados por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebradas anualmente
2. Las actas de los seminarios de investigación celebrados por el grupo de investigación de Pensamiento Numérico de la SEIEM
3. Las actas de las Jornadas Thales de investigación en el aula de matemáticas celebradas anualmente
4. Las actas de las Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, encuentro que se celebra bianualmente

Actas de Congresos Internacionales

La búsqueda bibliográfica en las actas de los congresos internacionales fue centrada en algunos de los eventos más relevantes en educación matemática. Destacamos las actas del *International Congress on Mathematical Education* (ICME), las del *International Meeting for the Psychology of Mathematics Education* (PME) y las del *European Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME).

TESIS

En general, las tesis han sido especialmente útiles para conocer el estado actual de nuestro problema de investigación. El razonamiento inductivo como objeto de investigación ha sido trabajado en nuestro área dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico (Ortiz, 1993). En los años 90 destacamos las tesis doctorales de Castro (1995) y Ortiz (1997).

Mencionamos también las tesis doctorales de Martínez (2000) e Ibañes (2001) porque han aportado información acerca de la demostración matemática y su aprendizaje. Estos trabajos nos han acercado al conocimiento de aspectos cognitivos relativos a los razonamientos inductivo y deductivo implicados en el proceso de la demostración.

En el panorama internacional, destacamos la tesis Reid (1992) para la obtención del grado de master de profesores de matemáticas (Concordia University) y la tesis doctoral de Goetting (1995). Reid se centra en la *inducción matemática* como tema problemático para los estudiantes. El autor diseña un estudio clínico para examinar el pensamiento de los estudiantes cuando ellos razonaban utilizando la recursividad, formal e informalmente. La tesis de Goetting, defendida en la Universidad de Maryland y realizada en un contexto más filosófico que las mencionadas anteriormente, ha permitido un acercamiento a las argumentaciones que los estudiantes pueden encontrar convincentes. Este trabajo ha despertado nuestro interés por algunos interrogantes relacionados con nuestra investigación, relativos a la convicción de las argumentaciones inductivas y a la generalización.

HANDBOOKS

Mencionamos los siguientes *handbooks,* que han sido consultados para la investigación que nos ocupa por tratar aspectos relacionados con nuestro tema:

Handbook of research on mathematics teaching and learning (Grouws, 1992).

International handbook of mathematics education (Bishop, 1996).

Handbook of research design in mathematics and science education (Kelly y Lesh, 1999).

Handbook of international research in mathematics education (English, 2002).

Second international handbook of mathematics education (Bishop, 2003).

The Cambridge handbook of thinking and reasoning (Holyoak, K. J. y Morrison, 2005).

ANEXO B. PRUEBA

En las páginas siguientes de este anexo, presentamos la prueba en el mismo formato en el que se les propuso a los estudiantes que participaron en la investigación.

NOMBRE Y APELLIDOS:____
CURSO:_____ ESO
EDAD:____ años
INDICA EL TIEMPO (APROXIMADO) QUE LLEVAS EN ESTE CENTRO___
NACIONALIDAD:________________________
Si no eres español. Indica cuánto tiempo llevas en España __________

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.

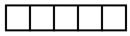
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

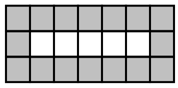
3, 7, 13, 21,...

- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

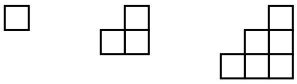
4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

ANEXO C. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE LA PRUEBA

En este apartado presentamos un modo de resolución para cada una de los seis problemas que conforman la prueba. Las resoluciones se han hecho teniendo en cuenta los pasos del razonamiento inductivo considerados para esta investigación, a saber: trabajo con casos particulares, detección del patrón, generalización y demostración. No presentamos el paso sobre organización de términos k-ésimos como parte de la resolución de los problemas porque se reduce a diferentes formas de estructurar o distribuir los casos particulares (términos k-ésimos de las progresiones). El paso sobre justificación basada en casos particulares tampoco lo explicitamos porque es directo a partir de la expresión del término general, dado que es la comprobación de esa fórmula con términos k-ésimos de la progresión.

Pueden existir otras formas de resolver esos mismos problemas diferentes a las presentadas en este anexo, por supuesto! Debemos recordar que, como ya se ha mencionado en el marco conceptual, la consideración de estos pasos, no significa que se tengan que dar todos ni que si aparecen, lo tengan que hacer en ese mismo orden. Además, los diferentes sistemas de representación empleados en la resolución que presentamos pueden variar incluso utilizando los modos que empleamos nosotros, en cuyo caso utilizarían representaciones sinónimas.

Los problemas han sido resueltos teniendo en cuenta el contenido matemático en el que se ha centrado esta investigación, las sucesiones de números naturales lineales y cuadráticas. Por lo tanto, en las resoluciones se han utilizado los patrones y las propiedades características de este concepto matemático. Aunque pueden los alumnos puedan identificar otros patrones, cuya validez para los problemas planteados será descrita en el capítulo en el que se realiza un análisis de la resolución de los problemas que llevan a cabo los alumnos.

En algunos problemas aparecen notas sobre diferentes patrones válidos que identificamos para un mismo problema, habiendo seguido los criterios que acabamos de describir.

PROBLEMA 1

Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.

- *¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?*
- *Justifica tu respuesta.*

Trabajo con Términos k-ésimos

Si el primer día alquilan 50 películas y cada día alquilan 3 más, el segundo día alquilarán 53, el tercero 56... y así sucesivamente. (A partir de esto, ya se podría obtener que el primer día alquilan 50; el segundo día, 53; el tercero, 56; el cuarto, 59; y el quinto, 62.)

Identificación de Patrón-Recurrencia

El primer día alquilan 50 películas más 3; el segundo día, 53 películas (las del día anterior) más 3; el tercer día, 56 películas (las del día anterior) más tres...

Generalización

Si el patrón es que cada día alquilan tres películas más que el anterior, esto se puede expresar de un modo general como $a_n = a_{n-1} + 3$ mediante la generalización de la ley de recurrencia.

A partir de los casos particulares que aparecen en el problema, que constituyen los términos k-ésimos de la sucesión, se puede observar que:

Día (n)	Nº de películas alquiladas (a_n)
1	50 + 3 (a_1)
2	50 + 3 + 3 (a_2)
3	50 + 3 + 3 + 3 (a_3)
. . .	
n	50 + 3n (a_n)

Por lo tanto, la expresión para el término general de la sucesión parece ser $a_n = 50 + 3n$. A esta fórmula también se puede llegar si se sabe que el patrón responde a una sucesión aritmética, que el primer día alquilan 50 (primer término de la sucesión) y que 3 es la diferencia que hay entre dos términos consecutivos.

Utilizando esta fórmula se puede calcular el número de películas que se alquila cualquier día. En particular, sustituyendo n por 1, 2, 3, 4 y 5 días (por los que pregunta el enunciado), obtenemos que se alquilan 53, 56, 59, 62 y 65 películas respectivamente.

n es el número de días que pasan y a_n es el número de películas que alquilan en el día *n*.

Justificación

La justificación de la expresión general se puede hacer probando con nuevos casos particulares (justificación informal). O, formalmente, mediante inducción matemática:

a) Para $n = 1$, $a_1 = 53$.

b) Se supone que $a_n = 50 + 3n$ y veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = 50 + 3n + 3 = 50 + 3 (n + 1)$

<u>Nota sobre los patrones</u>

Esta tarea se puede resolver de una manera análoga considerando que el primer día se alquilan 53 películas, teniendo en cuenta que la observación se hace ese mismo día, con lo que los restantes días se alquilarían 56, 59, 62, 65 y 68 películas.

PROBLEMA 2

Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21,...

- *Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.*
- *Justifica tu respuesta.*

Trabajo con Términos k-ésimois

Trabajando con los números de la secuencia, se observa que:

3

7 = 3 + 4 2 x 3 + 1

13 = 7 + 6 3 x 4 + 1

21 = 13 + 8 4 x 5 + 1

Identificación Patrón-Recurrencia

Se observa una regularidad en la formación de esa secuencia numérica. A partir de los casos particulares, se puede conjeturar que los siguientes números pueden ser 21 + 10 = 31; 31 + 12 = 43; 43 + 14 = 57; y 57 + 16 = 73.

Este patrón se puede expresar de diferentes formas a partir de los términos k-ésimos de la secuencia y se puede llegar a la expresión del término general:

Posición	Nº	Patrón 1 (Recurrente)	Patrón 2
1	3		1 x 2 + 1
2	7	3 + 4 = 3 + 2 x 2	2 x 3 + 1
3	13	7 + 6 = 7 + 2 x 3	3 x 4 + 1
4	21	13 + 8 = 13 + 2 x 4	4 x 5 + 1
...			
N	a_n	$a_n = a_{n-1} + 2n$	$a_n = n (n + 1) + 1$

Generalización

En la tabla anterior se observa cómo se puede llegar a la expresión del término general de forma recurrente o utilizando la expresión polinómica general. *n* se corresponde con el lugar que ocupa cada término en la sucesión.

n es la posición que ocupa un término dentro de la sucesión numérica y a_n es el término de la posición *n*.

Justificación

Mediante la inducción matemática se demuestra::

a) Para n = 1, $a_1 = 3$.

b) Se supone que $a_n = n (n + 1) + 1$ ($= n^2 + n + 1$)y veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 2 (n + 1) = n^2 + n + 1 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + (n + 1) + 1$

<u>Nota sobre los patrones</u>

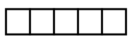
El patrón de la secuencia no es único. Por ejemplo, también se puede decir que el cuarto término es el resultado de multiplicar el primer y el segundo término; que el quinto lugar debe aparecer el resultado de multiplicar el segundo por el tercero; y así sucesivamente. Los cuatro números siguientes a los dados en esta secuencia serían:

3, 7, 13, 21, *91, 273, 1911, 24843,...*

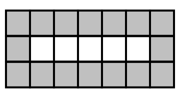
En este caso, la expresión de la ley recurrente sería: $a_n = a_{n-3} \times a_{n-2}$.

PROBLEMA 3

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



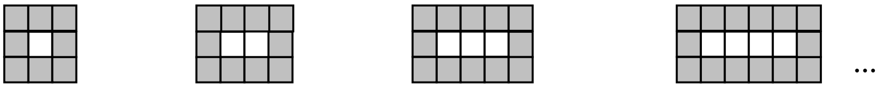
Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

PROBLEMA 3 PATRÓN 1

Trabajo con Términos k-ésimos



8 10 12 14 ...

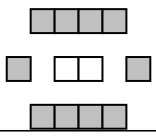
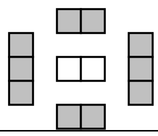
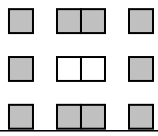
En el caso particular que se presenta en el enunciado hay 16 baldosas grises.

Identificación de Patrón-Recurrencia

Se observa una diferencia constante de 2 baldosas grises entre dos casos particulares consecutivos.

8	8 + 0
10 = 8 + 2	8 + 2
12 = 10 + 2	8 + 4
14 = 12 + 2 ...	8 + 6 ...

El número de baldosas grises se pueden obtener a partir del patrón visualizado en el gráfico que aparece en el enunciado. En la siguiente tabla mostramos los diferentes patrones visuales (aparece el gráfico para el segundo término de la sucesión) y cómo a partir de ellos pueden surgir los términos generales de las sucesiones:

3 + 3 + 1 + 1	1 + 1 + 6	1 + 1 + 1 + 1 + 4
4 + 4 + 1 + 1	2 + 2 + 6	2 + 2 + 1 + 1 + 4
5 + 5 + 1 + 1	3 + 3 + 6	3 + 3 + 1 + 1 + 4
6 + 6 + 1 + 1	4 + 4 + 6	4 + 4 + 1 + 1 + 4
...	...	...
(n + 2) + (n + 2) + 1 + 1	n + n + 6	n + n + 1 + 1 + 4
		

Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: 2 (n + 2) + 1 + 1 (n + 2) + (n + 2) + 2 2 (n + 2) + 2 2n + 6	Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: n x 2 + 6 2n + 6	Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: 2n + 1 + 1 + 4 n + n + 2 + 4 2n + 2 + 4 2n + 6

En el sistema de representación numérico pueden aparecer otras formas de descomponer el número de baldosas grises. Algebraicamente pueden aparecer también otras formas pero equivalentes a 2n + 6.

Generalización

Los patrones observados anteriormente, se corresponden con los siguientes términos generales, respectivamente:

$a_n = a_{n-1} + 2$

A partir de la relación recurrente, se puede escribir $a_n = 8 + 2\ (n – 1) = 2n + 6$

Los patrones señalados en el paso anterior, se pueden expresar en los siguientes términos generales equivalentes:

a) $a_n = n + 2 + n + 2 + 1 + 1 = 2n + 6$

b) $a_n = n + n + 1 + 1 + 4 = 2n + 6$

c) $a_n = n \text{ x } 2 + 6 = 2n + 6$

d) $a_n = (n + 2)\ 2 + 2 = 2n + 6$

e) $a_n = n \text{ x } 2 + 2 + 4 = 2n + 6$

En la primera forma de expresar el patrón se está utilizando la ley de recurrencia. La segunda es la expresión del término general mediante la función polinómica de primer grado correspondiente. *n* hace referencia al número de baldosas blancas y se corresponde con el lugar que ocupa en la sucesión. Por ejemplo, como en el caso particular del enunciado hay 5 baldosas blancas, ocupa el lugar quinto dentro de la sucesión. a_n representa el número de baldosas grises y es el número que aparece en el lugar *n* de la sucesión.

Justificación

La justificación informal se haría comprobando la generalización con nuevos casos particulares.

La justificación formal se hace mediante inducción matemática:

a) Para n = 1, $a_1 = 8$.

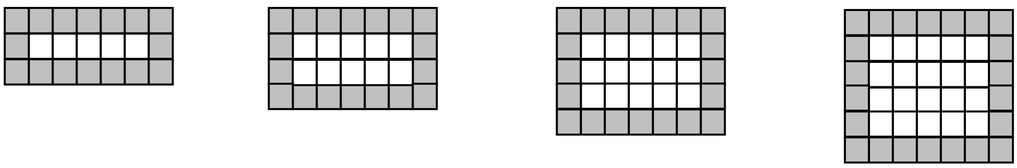
b) Se supone que $a_n = 2n + 6$ y veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 2 = 2n + 6 + 2 = 2n + 2 + 6 = 2 (n + 1) + 6$

PROBLEMA 3 PATRÓN 2

Trabajo con Términos k-ésimos

Existe otro patrón que se puede detectar se basa en considerar que el caso particular que se presenta en el enunciado es el primer término de la sucesión. Los términos k-ésimos de la sucesión son:



...

16 18 20 22 ...

Identificación de Patrón-Recurrencia

La relación recurrente permite obtener cada término k-ésimo en función del anterior:

8

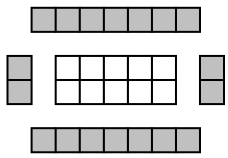
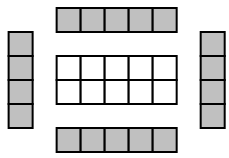
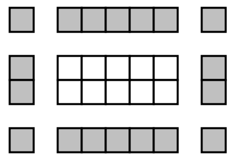
10 = 8 + 2

12 = 10 + 2

14 = 12 + 2

El número de baldosas grises que se van obteniendo también se puede expresar según los siguientes patrones:

Las tres formas para visualizar el patrón gráficamente que hemos seleccionado (para el segundo término de la sucesión que, en este caso, llevará dos filas de cinco baldosas blancas cada una) permiten obtener las diferentes expresiones algebraicas para expresar el término general:

7 + 7 + 1 + 1 7 + 7 + 2 + 2 7 + 7 + 3 + 3 7 + 7 + 4 + 4 ... 7 + 7 + n + n  Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: 7 + 7 + 2n 2 x 7 + 2n 14 + n + n 2 x 7 + n + n 2 x 7 + 2n 14 + 2n	5 + 5 + 3 + 3 5 + 5 + 4 + 4 5 + 5 + 5 + 5 5 + 5 + 6 + 6 ... 5 + 5 + (n + 2) + (n + 2)  Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: 2 x 5 + (n + 2) + (n + 2) 5 + 5 + 2 (n + 2) 2 x 5 + 2 (n + 2) 5 + 5 + 2n + 4 2 x 5 + 2n + 4 10 + 2 (n + 2) 10 + 2n + 4 14 + 2n	5 + 5 + 1 + 1 + 4 5 + 5 + 2 + 2 + 4 5 + 5 + 3 + 3 + 4 5 + 5 + 4 + 4 + 4 ... 5 + 5 + n + n + 4  Este patrón también se puede generalizar algebraicamente como: 5 + 5 + 2n + 4 2x 5 + 2n + 4 10 + 2n + 4 14 + 2n

En el sistema de representación numérico pueden aparecer otras formas de descomponer el número de baldosas grises. Algebraicamente pueden aparecer también otras formas pero equivalentes a 2n + 14.

Generalización

El término general de la sucesión se puede expresar como:

$a_n = a_{n-1} + 2$ mediante la ley de recurrencia, o mediante la expresión polinómica lineal:

$a_n = 10 + 2\ (n + 2) = 2n + 14$

En este caso *n* es el lugar que ocupa el término en la sucesión y se corresponde con el número de filas de baldosas blancas. Análogamente al caso anterior, a_n es el número de baldosas grises y se corresponde con el término que está en el lugar *n* de la sucesión.

Justificación

a) Para n = 1, $a_1 = 8$.

b) Se supone que $a_n = 2n + 14$ y veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 2 = 2n + 14 + 2 = 2n + 2 + 14 = 2\ (n + 1) + 14$

PROBLEMA 4

Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.

- *Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.*
- *Justifica tu respuesta.*

Trabajo con Términos k-ésimos

El enunciado ya indica que el número de partidos depende del número de equipos. Se puede empezar a ver el número de partidos cuando el número de equipos sea menor de lo que plantea el enunciado:

- Si hay 1 sólo equipo, no se puede jugar ningún partido.
- Si hay 2 equipos, tendrán que jugar 2 partidos.
- Si hay 3 equipos, deben jugar 6 partidos.

El cálculo del número de partidos cuando aumenta el número de equipos se dificultad. Para calcularlos más fácilmente, se pueden situar los equipos en una tabla de doble entrada y se eliminan los partidos que jugaría cada equipo consigo mismo (la diagonal de la tabla), tal y como se muestra en los siguientes casos particulares:

- Si hay 4 equipos:

	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
Equipo 1	NO	1	2	3
Equipo 1	7	NO	4	5
Equipo 1	8	10	NO	6
Equipo 1	9	11	12	NO

Se jugarán 12 partidos.

- Si hay 5 equipos:

	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Equipo 5
Equipo 1	NO	1	2	3	4
Equipo 2	11	NO	5	6	7
Equipo 3	12	15	NO	8	9
Equipo 4	13	16	18	NO	10
Equipo 5	14	17	19	20	NO

Se jugarán 20 partidos.

Identificación de Patrón-Recurrencia

Atendiendo a los casos particulares con los que ya hemos hecho los cálculos, obtenemos:

Nº de equipos	Nº de partidos
1	0
2	2 (2 x 1)
3	6 (3 x 2)
4	12 (4 x 3)
5	20 (5 x 4)
...	

Se observa que va aumentando la diferencia en dos unidades más entre cada dos términos consecutivos.

Generalización

Teniendo en cuenta el patrón recurrente detectado, se puede llamar *n* al número de equipos y a_n al número de partidos que juegan *n* equipos y podemos definir $a_n = a_{n-1} + 2 (n - 1)$. Si llamamos n al número de equipos, la tabla anterior nos incita a escribir que el número de partidos será el número de equipos multiplicado por el número de equipos menos 1. Así: $a_n = n (n - 1)$.

Justificación

Se puede comprobar la fórmula mediante nuevos casos particulares pero la justificación formal de esta fórmula se realiza mediante inducción matemática:

a) Para $n = 1$, $a_1 = 0$; para $n = 2$, $a_2 = 2$

b) Se supone que $a_n = n (n - 1)$ y veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 2 = n (n - 1) + 2 n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = n (n + 1)$.

PROBLEMA 5

Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- *Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.*
- *Justifica tu respuesta.*

Trabajo con Términos k-ésimos

Trabajando con los números de la secuencia, se observa que:

1	1	1
4 = 1 + 3	4 = 1 + 3	4 = 1 + 3 x 1
7 = 4 + 3	7 = 1 + 3 + 3	7 = 1 + 3 x 2
10 = 7 + 3 ...	10 = 1 + 3 + 3 + 3 ...	10 = 1 + 3 x 3 ...

Identificación de Patrón-Recurrencia

Entre cada dos números consecutivos de la secuencia, existe una diferencia constante de tres unidades. Así, cada número se obtiene sumándole tres al número anterior.

Generalización

El patrón detectado anteriormente se puede expresar mediante la ley de recurrencia como $a_n = a_{n-1} + 3$.

O teniendo en cuenta las descomposiciones de los números de la sucesión, tal y como aparece en la siguiente tabla:

Posición	Número
1	1
2	4 = 1 + 3
3	7 = 1 + 3 x 2
4	10 = 1 + 3 x 3
...	...
N	$a_n = 1 + 3\ (n - 1) = 3n - 2$

Justificación

Se puede comprobar que la fórmula es válida para los números de la secuencia que presenta el enunciado y para otros nuevos que se formen según el patrón identificado. Éstas serían justificaciones informales.

La justificación formal de la fórmula se hace mediante inducción matemática:

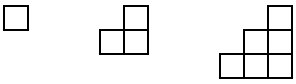
a) Para $n = 1$, $a_1 = 1$.

b) Se supone que $a_n = 3n - 2$ y $a_{n+1} = a_n + 3$. Veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 3 = 3n - 2 + 3 = 3n + 1 = 3\ (n + 1) - 2$.

PROBLEMA 6

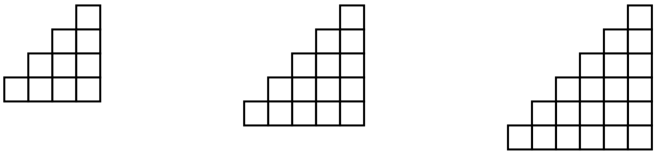
Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- *Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.*
- *Justifica tu respuesta.*

Trabajo con Términos k-ésimos

Las escaleras de 4, 5 y 6 pisos son las siguientes:



Atendiendo al número de palillos necesario para la construcción de cada una de las escaleras, tendríamos que para la escalera de un piso se necesitan cuatro palillos; para la de dos pisos, 10; para la de tres pisos, 18; para la de cuatro pisos, 28; para la de cinco pisos, 40, etc.

Identificación Patrón-Recurrencia

Atendiendo al número de palillos se obtiene la siguiente secuencia numérica:
4, 10, 18, 28,...
El número de palillos para escaleras de más pisos se pueden calcular pero ya resulta más tedioso, lo haremos mediante la generalización en este caso.
El patrón que se observa en esos números es que cada vez se le suma al número anterior el número par siguiente al que se ha sumando en el caso anterior:
4
10 = 4 + 6
18 = 10 + 8
28 = 18 + 10
40 = 28 + 12...

Generalización

El término general de la sucesión se puede expresar como: $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$.

A partir de los casos particulares, se puede elaborar la siguiente tabla para organizar la información:

Número de pisos	Número de palillos
1	4 = 4 x 1
2	10 = 5 x 2
3	18 = 6 x 3
4	28 = 7 x 4
5	40 = 8 x 5
...	...
N	$a_n = (n + 3)\, n = n^2 + 3n$

Justificación

La justificación informal se puede hacer comprobando la expresión para el término general con casos particulares.

La demostración se hace mediante la inducción matemática:

a) Para $n = 1$, $a_1 = 4$.

b) Se supone que $a_n = (n + 3)\, n$ y $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$. Veamos qué ocurre para a_{n+1}.

$a_{n+1} = a_n + 2\,(n + 1) + 2 = (n + 3)\, n + 2\,(n + 1) + 2 = n^2 + 3n + 2n + 4 = n^2 + 5n + 4 = [(n + 1) + 3]\,(n + 1)$

ANEXO D. ESQUEMAS ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

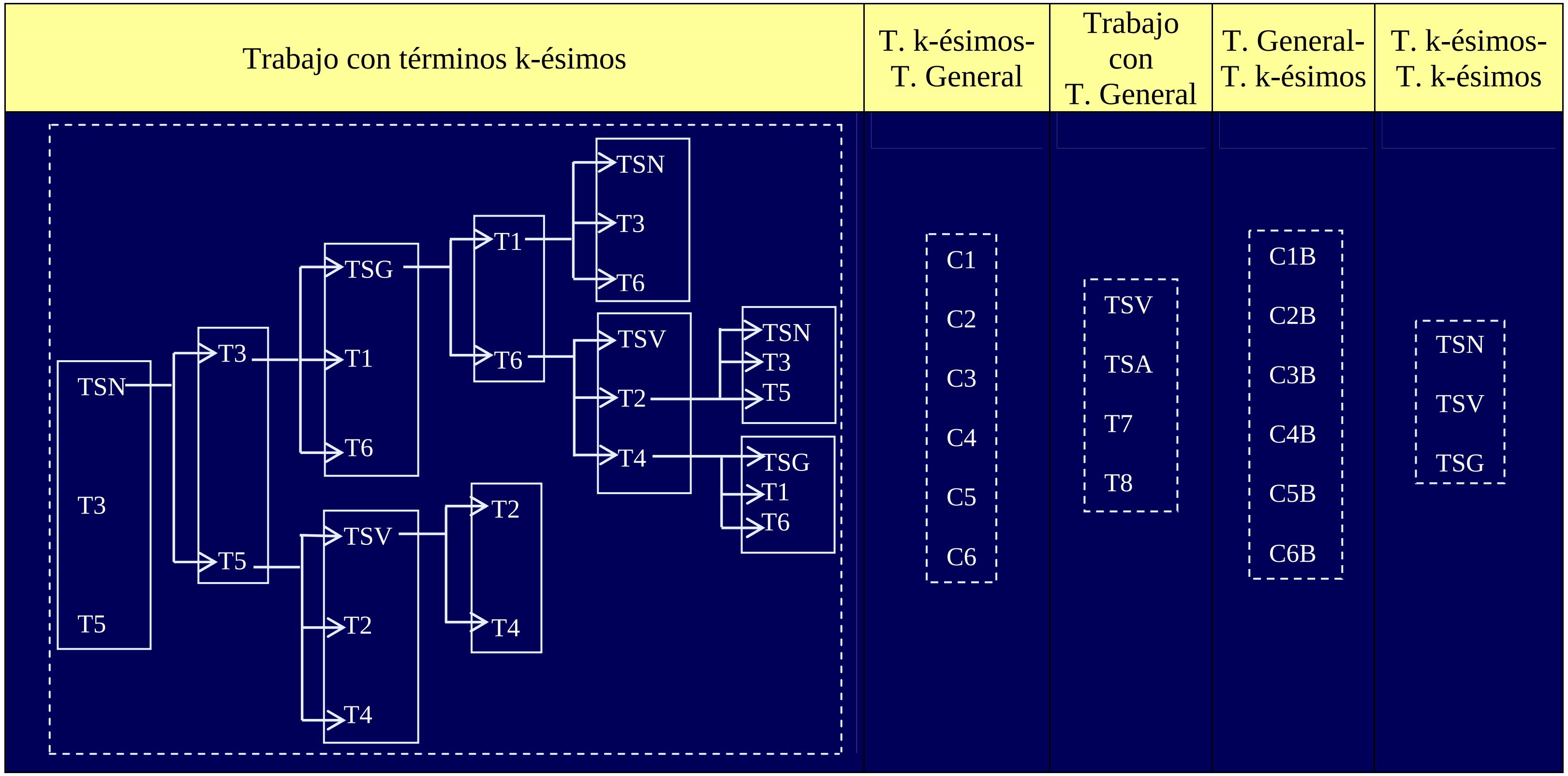


Figura D - 1. Esquema para la descripción de estrategias inductivas partiendo de términos k-ésimos expresados en el sistema de representación numérico

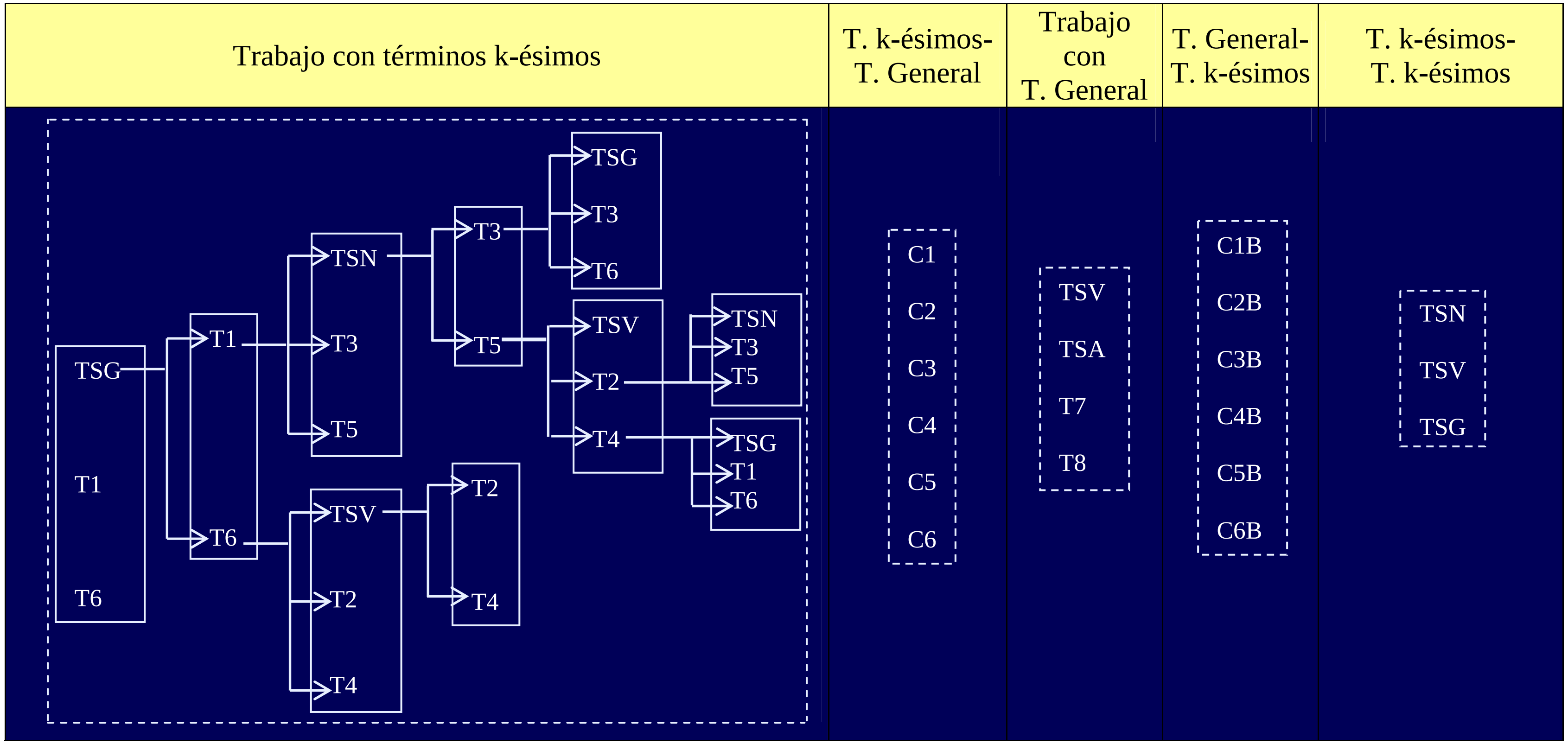


Figura D - 2. Esquema para la descripción de estrategias inductivas partiendo de términos k-ésimos expresados en el sistema de representación gráfico

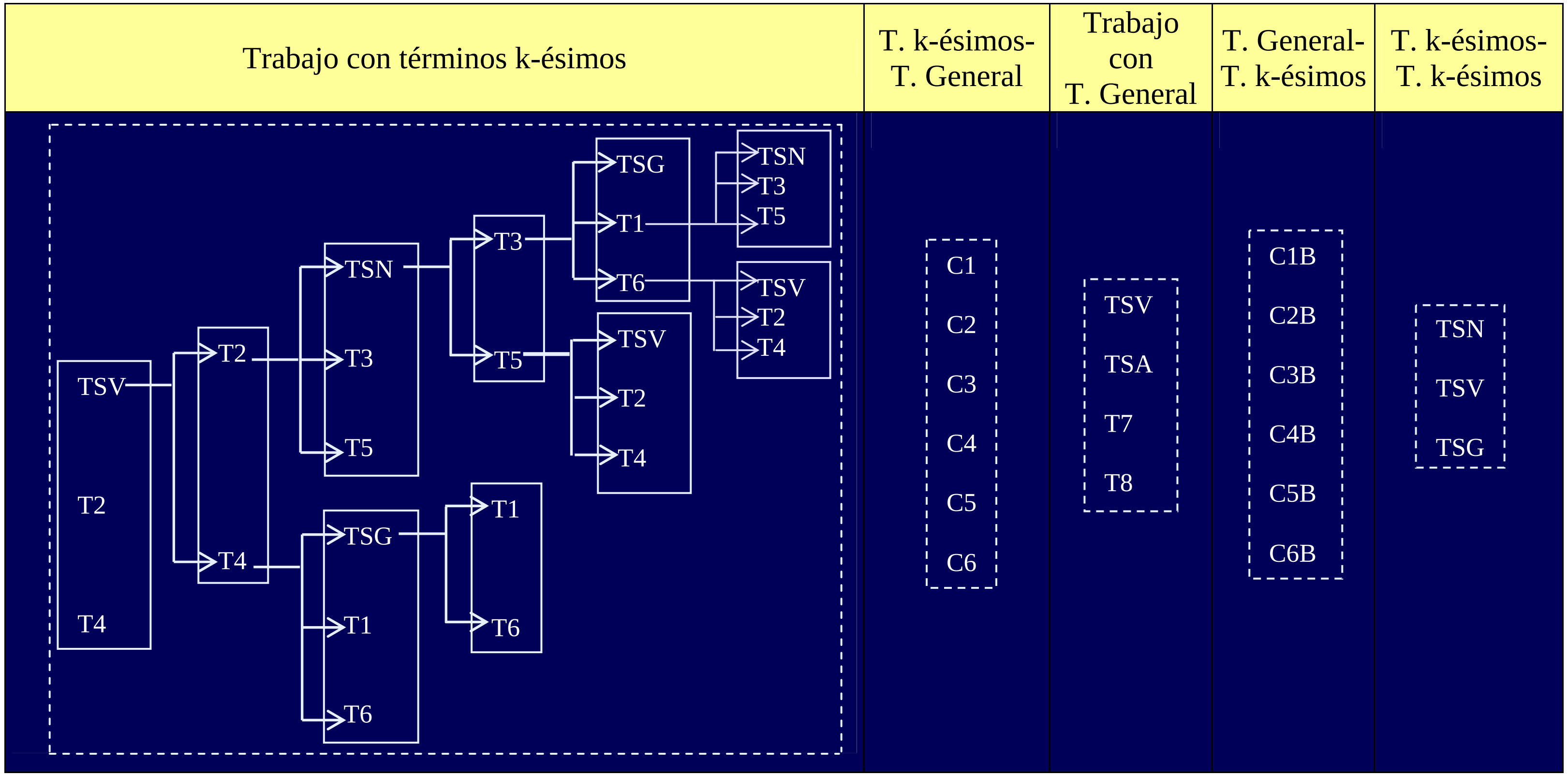


Figura D - 3. Esquema para la descripción de estrategias inductivas partiendo de términos k-ésimos expresados en el sistema de representación verbal

ANEXO E. ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

En la siguiente tabla, presentamos las subcategorías consideradas para las estrategias inductivas de cada uno de los problemas:

	PROBLEMA	ESTRATEGIAS INDUCTIVAS
ESTRATEGIAS INDUCTIVAS	1	T2 T2-TSN T2-T5 T2-TSN-T5 TSV TSV-T2-TSN T2-TSN-C1 T2-TSN-C1-C1B-TSN T2-TSN-C1-TSA-C1B-TSN T2-C1-C1B-TSN T2-C1-TSA-C1B-TSN T2-TSN-C4 C3-C1B-TSN-C4
	2	TSN T5 TSN-T5 TSN-C1 TSN-C1-C1B-TSN C1 C1-TSA-C1B-TSN TSN-C4 TSN-C4-T7-C1B-TSN
	3	T1 T1-T5 T1-TSN T1-TSN-T5 TSG-T1 TSG-T1-TSN TSG-T1-TSN-T5 TSG-T6 T6 T6-T2-TSN T1-TSN-C1-TSA T1-C4 T1-TSN-C4 TSG-C1-C1B-T5 TSG-T1-C4 TSG-T1-TSN-C4 TSG-C4-C4B-TSN T6-C3-C3B-TSN C5-C4B-TSN

	PROBLEMA	ESTRATEGIAS INDUCTIVAS
	4	T2 T2-TSN T2-T5 T2-TSN-T5 TSV TSV-T2 TSV-T2-TSN T4-T1 T2-TSN-C1-C1B-TSN T2-C4 T2-TSN-C4 TSV-T2-TSN-C4 TSV-C6
	5	TSN T5 TSN-T5 TSN-C1 TSN-C1-C1B-TSN TSN-C1-C1B-TSN-T5 TSN-C1-TSA TSN-C1-TSA-C1B-TSN C1-C1B-TSN TSN-C4 TSN-C4-C4B
	6	T1 T1-T5 T1-TSN T1-TSN-T5 TSG TSG-T1 TSG-T1-TSN TSG-T1-T5 TSG-T1-TSN-T5 TSG-T6 TSG-T6-T2 T6 T6-T2-TSN T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN TSG-T1-C1 TSG-T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN T1-C4 T1-TSN-C4 TSG-T1-C4-C4B

ANEXO F. ANÁLISIS DE DATOS I

En este anexo incluimos las tablas obtenidas del análisis de datos cuyos resultados hemos presentado en el Capítulo 6.

ANÁLISIS LINEAL-LOGARÍTMICO PARA PASOS

```
* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R *
DATA   Information

          42 unweighted cases accepted.
           0 cases rejected because of out-of-range factor values.
           0 cases rejected because of missing data.
        4534 weighted cases will be used in the analysis.

FACTOR Information
   Factor  Level  Label
   ORDEN       2
   S.REPRES    3
   PASOS       7
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R * * * * *

DESIGN 1 has generating class

    ORDEN*S.REPRES*PASOS

 Note: For saturated models   ,500 has been added to all observed cells.
 This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA subcommand.

The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 1.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals is
,000
and the convergence criterion is     ,322
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 Observed, Expected Frequencies and Residuals.
```

Factor	Code	OBS count	EXP count	Residual	Std Resid
ORDEN	1				
S.REPRES	Verbal				
PASOS	Trabajo	186,5	186,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	128,5	128,5	,00	,00
PASOS	Patrón	212,5	212,5	,00	,00
PASOS	Conjetur	322,5	322,5	,00	,00
PASOS	Justific	2,5	2,5	,00	,00
PASOS	Generali	17,5	17,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00
S.REPRES	Numérico				
PASOS	Trabajo	227,5	227,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	28,5	28,5	,00	,00
PASOS	Patrón	222,5	222,5	,00	,00
PASOS	Conjetur	249,5	249,5	,00	,00
PASOS	Justific	10,5	10,5	,00	,00
PASOS	Generali	83,5	83,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00
S.REPRES	Gráfico				
PASOS	Trabajo	7,5	7,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	,5	,5	,00	,00
PASOS	Patrón	125,5	125,5	,00	,00
PASOS	Conjetur	297,5	297,5	,00	,00
PASOS	Justific	,5	,5	,00	,00
PASOS	Generali	60,5	60,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00
ORDEN	2				
S.REPRES	Verbal				
PASOS	Trabajo	4,5	4,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	2,5	2,5	,00	,00
PASOS	Patrón	174,5	174,5	,00	,00
PASOS	Conjetur	272,5	272,5	,00	,00
PASOS	Justific	,5	,5	,00	,00
PASOS	Generali	70,5	70,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00
S.REPRES	Numérico				
PASOS	Trabajo	283,5	283,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	91,5	91,5	,00	,00
PASOS	Patrón	275,5	275,5	,00	,00

PASOS	Conjetur	285,5	285,5	,00	,00
PASOS	Justific	64,5	64,5	,00	,00
PASOS	Generali	14,5	14,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00
S.REPRES	Gráfico				
PASOS	Trabajo	244,5	244,5	,00	,00
PASOS	Organiz.	114,5	114,5	,00	,00
PASOS	Patrón	140,5	140,5	,00	,00
PASOS	Conjetur	310,5	310,5	,00	,00
PASOS	Justific	9,5	9,5	,00	,00
PASOS	Generali	8,5	8,5	,00	,00
PASOS	Demuestr	,5	,5	,00	,00

- -

Goodness-of-fit test statistics

```
   Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF
            Pearson chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF
```

- -

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R * * * * *

Tests that K-way and higher order effects are zero.

K	DF	L.R. Chisq	Prob	Pearson Chisq	Prob	Iteration
3	12	814,676	,0000	670,966	,0000	4
2	32	1337,716	,0000	1087,762	,0000	2
1	41	5667,806	,0000	4961,298	,0000	0

- -

Tests that K-way effects are zero.

K	DF	L.R. Chisq	Prob	Pearson Chisq	Prob	Iteration
1	9	4330,090	,0000	3873,536	,0000	0
2	20	523,040	,0000	416,796	,0000	0
3	12	814,676	,0000	670,966	,0000	0

>Note # 13865
>DF used for these tests have NOT been adjusted for structural or sampling
>zeros. Tests using these DF may be conservative.

```
* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * *

Tests of PARTIAL associations.

  Effect Name                              DF  Partial Chisq    Prob  Iter

ORDEN*S.REPRES                              2        175,130   ,0000     2
ORDEN*PASOS                                 6         69,441   ,0000     2
S.REPRES*PASOS                             12        255,956   ,0000     2
ORDEN                                       1          7,469   ,0063     2
S.REPRES                                    2        100,442   ,0000     2
PASOS                                       6       4222,179   ,0000     2
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 Note: For saturated models   ,500 has been added to all observed cells.
 This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA subcommand.

 Estimates for Parameters.

 ORDEN*S.REPRES*PASOS

  Parameter      Coeff.   Std. Err.     Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI

        1  1,1839398428      ,21043     5,62623      ,77149     1,59639
        2  1,7383317388      ,31059     5,59681     1,12957     2,34709
        3  -,5548076750      ,15692    -3,53557     -,86237     -,24724
        4  -,5891601610      ,15541    -3,79098     -,89377     -,28455
        5   ,6548603283      ,50772     1,28980     -,34027     1,64999
        6  -1,758256940      ,18239    -9,64029    -2,11573    -1,40078
        7  -,0707657163      ,16229     -,43604     -,38886      ,24732
        8  -,0972024855      ,26470     -,36722     -,61601      ,42161
        9  -,0426442574      ,14007     -,30446     -,31717      ,23188
       10  -,0232816746      ,13903     -,16746     -,29577      ,24921
       11  -,3400013068      ,34154     -,99551    -1,00941      ,32941
       12   ,5313002697      ,17020     3,12159      ,19770      ,86490

 ORDEN*S.REPRES
  Parameter      Coeff.   Std. Err.     Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI

        1   ,6749071335      ,15276     4,41808      ,37550      ,97432
        2  -,0425951710      ,13589     -,31344     -,30895      ,22376

 ORDEN*PASOS
  Parameter      Coeff.   Std. Err.     Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI
```

1	,0892728021	,13645	,65424	-,17818	,35672
2	-,3574769288	,24511	-1,45842	-,83790	,12294
3	,0643520222	,10903	,59022	-,14935	,27805
4	,0844281459	,10786	,78274	-,12698	,29584
5	-,4391056483	,32064	-1,36948	-1,06755	,18934
6	,4725867497	,13001	3,63489	,21776	,72741

S.REPRES*PASOS

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,5722967470	,21043	-2,71962	-,98474	-,15985
2	,2200752513	,31059	,70856	-,38869	,82884
3	,3217314033	,15692	2,05026	,01416	,62930
4	,3083112279	,15541	1,98384	,00371	,61292
5	-,9900358432	,50772	-1,94996	-1,98517	,00510
6	,4306008848	,18239	2,36093	,07312	,78808
7	,6697327613	,16229	4,12675	,35164	,98782
8	,3381896084	,26470	1,27763	-,18062	,85700
9	-,3558419511	,14007	-2,54054	-,63037	-,08131
10	-,7256065297	,13903	-5,21921	-,99810	-,45312
11	1,2285152671	,34154	3,59704	,55911	1,89792
12	-,5077056244	,17020	-2,98296	-,84130	-,17411

ORDEN

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,0859428572	,10593	-,81135	-,29356	,12167

S.REPRES

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,2816138229	,15276	-1,84350	-,58102	,01780
2	,6472835316	,13589	4,76314	,38093	,91364

PASOS

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	1,0554082411	,13645	7,73455	,78796	1,32286
2	-,2171082570	,24511	-,88575	-,69753	,26331
3	2,0555591379	,10903	18,85296	1,84186	2,26926
4	2,5004168235	,10786	23,18170	2,28901	2,71183

```
        5  -1,781535205      ,32064    -5,55625    -2,40998    -1,15309
        6   ,2451630867      ,13001     1,88567     -,00966      ,49999

* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * *

Backward Elimination (p = ,050) for DESIGN 1 with generating class

  ORDEN*S.REPRES*PASOS

 Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

If Deleted Simple Effect is          DF   L.R. Chisq Change    Prob  Iter

ORDEN*S.REPRES*PASOS                 12             814,676   ,0000     4

Step 1

  The best model has generating class

      ORDEN*S.REPRES*PASOS

  Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF

* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * *

The final model has generating class

    ORDEN*S.REPRES*PASOS

The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 0.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals is
,000
and the convergence criterion is     ,322

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 Observed, Expected Frequencies and Residuals.

  Factor          Code          OBS count  EXP count  Residual  Std Resid
  ORDEN              1
   S.REPRES   Verbal
    PASOS      Trabajo              186,0      186,0       ,00        ,00
```

PASOS	Organiz.	128,0	128,0	,00	,00
PASOS	Patrón	212,0	212,0	,00	,00
PASOS	Conjetur	322,0	322,0	,00	,00
PASOS	Justific	2,0	2,0	,00	,00
PASOS	Generali	17,0	17,0	,00	,00
PASOS	Demuestr	,0	,0	,00	,00
S.REPRES	Numérico				
PASOS	Trabajo	227,0	227,0	,00	,00
PASOS	Organiz.	28,0	28,0	,00	,00
PASOS	Patrón	222,0	222,0	,00	,00
PASOS	Conjetur	249,0	249,0	,00	,00
PASOS	Justific	10,0	10,0	,00	,00
PASOS	Generali	83,0	83,0	,00	,00
PASOS	Demuestr	,0	,0	,00	,00
S.REPRES	Gráfico				
PASOS	Trabajo	7,0	7,0	,00	,00
PASOS	Organiz.	,0	,0	,00	,00
PASOS	Patrón	125,0	125,0	,00	,00
PASOS	Conjetur	297,0	297,0	,00	,00
PASOS	Justific	,0	,0	,00	,00
PASOS	Generali	60,0	60,0	,00	,00
PASOS	Demuestr	,0	,0	,00	,00
ORDEN	2				
S.REPRES	Verbal				
PASOS	Trabajo	4,0	4,0	,00	,00
PASOS	Organiz.	2,0	2,0	,00	,00
PASOS	Patrón	174,0	174,0	,00	,00
PASOS	Conjetur	272,0	272,0	,00	,00
PASOS	Justific	,0	,0	,00	,00
PASOS	Generali	70,0	70,0	,00	,00
PASOS	Demuestr	,0	,0	,00	,00
S.REPRES	Numérico				
PASOS	Trabajo	283,0	283,0	,00	,00
PASOS	Organiz.	91,0	91,0	,00	,00
PASOS	Patrón	275,0	275,0	,00	,00
PASOS	Conjetur	285,0	285,0	,00	,00
PASOS	Justific	64,0	64,0	,00	,00
PASOS	Generali	14,0	14,0	,00	,00
PASOS	Demuestr	,0	,0	,00	,00
S.REPRES	Gráfico				
PASOS	Trabajo	244,0	244,0	,00	,00
PASOS	Organiz.	114,0	114,0	,00	,00
PASOS	Patrón	140,0	140,0	,00	,00

```
   PASOS      Conjetur            310,0      310,0       ,00        ,00
   PASOS      Justific              9,0        9,0       ,00        ,00
   PASOS      Generali              8,0        8,0       ,00        ,00
   PASOS      Demuestr               ,0         ,0       ,00        ,00
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 Goodness-of-fit test statistics

   Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF
            Pearson chi square =      ,00000    DF = 0  P =  -INF

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 1

Organización de Casos Particulares-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	158,627(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	155,755	1	,000		
Razón de verosimilitud	205,937	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	158,141	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 54,97.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,698	,031	19,297	,000
	Tau-c de Kendall	,674	,035	19,297	,000
	Gamma	1,000	,000	19,297	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Trabajo con Casos particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	218,798(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	215,342	1	,000		
Razón de verosimilitud	259,790	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	218,127	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 48,96.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,819	,030	21,438	,000
		T1C.Partic dependiente	,850	,026	21,438	,000
		T1Patrón dependiente	,789	,035	21,438	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Gamma	,995	,004	21,438	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Organización de Casos particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	113,326(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	110,809	1	,000		
Razón de verosimilitud	152,088	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	112,979	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.

b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 44,76.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,589	,031	15,224	,000
		T1Organiz.C.Partic dependiente	,604	,034	15,224	,000
		T1Patrón dependiente	,576	,035	15,224	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Gamma	1,000	,000	15,224	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Trabajo con Casos particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	253,138(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	249,557	1	,000		
Razón de verosimilitud	301,251	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	252,361	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 60,55.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,881	,026	29,446	,000
		T1C.Partic dependiente	,880	,027	29,446	,000
		T1PatrónOk dependiente	,882	,027	29,446	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,881	,026	29,446	,000
	Tau-c de Kendall	,864	,029	29,446	,000
	Gamma	,992	,004	29,446	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	138,252(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	135,573	1	,000		
Razón de verosimilitud	165,823	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	137,827	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 55,36.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,651	,035	16,663	,000
		T1PatrónOk dependiente	,661	,036	16,663	,000
		T1Organiz.C.Partic dependiente	,642	,037	16,663	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,651	,035	16,663	,000
	Tau-c de Kendall	,630	,038	16,663	,000
	Gamma	,972	,015	16,663	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	244,907(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	241,235	1	,000		
Razón de verosimilitud	301,628	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	244,156	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 47,56.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,866	,026	23,802	,000
		T1Patrón dependiente	,838	,032	23,802	,000
		T1Recurr dependiente	,896	,021	23,802	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,867	,026	23,802	,000
	Tau-c de Kendall	,815	,034	23,802	,000
	Gamma	1,000	,000	23,802	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	286,510(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	282,682	1	,000		
Razón de verosimilitud	356,647	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000

Asociación lineal por lineal	285,631	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 58,40.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada (b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,937	,019	36,857	,000
		T1C.Partic dependiente	,941	,019	36,857	,000
		T1Recurr dependiente	,934	,021	36,857	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,937	,019	36,857	,000
	Tau-c de Kendall	,915	,025	36,857	,000
	Gamma	,998	,001	36,857	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	150,851(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	148,039	1	,000		
Razón de verosimilitud	196,799	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	150,388	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 53,40.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada (b)	Sig. aproximada
Ordinal por	d de Somer	Simétrica	,680	,031	18,584	,000

ordinal	T1Recurr dependiente	,687	,033	18,584	,000
	T1Organiz.C.Partic dependiente	,674	,034	18,584	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Gamma	1,000	,000	18,584	,000
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,603(b)	1	,438		
Corrección por continuidad(a)	,103	1	,748		
Razón de verosimilitud	,595	1	,440		
Estadístico exacto de Fisher				,655	,369
Asociación lineal por lineal	,601	1	,438		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada s 2,15.

Conjetura-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,283(b)	1	,070		
Corrección por continuidad(a)	1,823	1	,177		
Razón de verosimilitud	5,037	1	,025		
Estadístico exacto de Fisher				,161	,081
Asociación lineal por lineal	3,273	1	,070		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,96.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,402(b)	1	,526		
Corrección por continuidad(a)	,011	1	,915		
Razón de verosimilitud	,384	1	,536		
Estadístico exacto de Fisher				,614	,437
Asociación lineal por lineal	,401	1	,527		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,40.

Justificación de Conjeturas-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,515(b)	1	,218		
Corrección por continuidad(a)	,264	1	,607		
Razón de verosimilitud	2,254	1	,133		
Estadístico exacto de Fisher				,508	,325
Asociación lineal por lineal	1,510	1	,219		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,86.

Justificación de Conjeturas-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,097(b)	1	,755		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,095	1	,758		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,632
Asociación lineal por lineal	,097	1	,755		

N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,79.

Justificación de Conjeturas-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,082(b)	1	,298		
Corrección por continuidad(a)	,088	1	,767		
Razón de verosimilitud	1,728	1	,189		
Estadístico exacto de Fisher				,544	,422
Asociación lineal por lineal	1,079	1	,299		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,70.

Justificación de Conjeturas- Formulación de Conjeturas

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,025(b)	1	,874		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,050	1	,824		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,976
Asociación lineal por lineal	,025	1	,875		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,02.

Generalización-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,341(b)	1	,247		
Corrección por continuidad(a)	,821	1	,365		
Razón de verosimilitud	1,393	1	,238		

Estadístico exacto de Fisher				,318	,183
Asociación lineal por lineal	1,336	1	,248		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 7,30.

Generalización-Organización de Términos k

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,730(b)	1	,393		
Corrección por continuidad(a)	,359	1	,549		
Razón de verosimilitud	,757	1	,384		
Estadístico exacto de Fisher				,454	,279
Asociación lineal por lineal	,728	1	,394		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 6,67.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,673(b)	1	,010		
Corrección por continuidad(a)	5,391	1	,020		
Razón de verosimilitud	8,611	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,008	,006
Asociación lineal por lineal	6,652	1	,010		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,94.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada (b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,110	,025	3,291	,001
		T1Patrón	,307	,063	3,291	,001

	dependiente				
	T1Gen dependiente	,067	,020	3,291	,001

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,143	,033	3,291	,001
	Tau-c de Kendall	,061	,018	3,291	,001
	Gamma	,804	,183	3,291	,001
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Recurrencia

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,440(b)	1	,118		
Corrección por continuidad(a)	1,715	1	,190		
Razón de verosimilitud	2,607	1	,106		
Estadístico exacto de Fisher				,136	,093
Asociación lineal por lineal	2,433	1	,119		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 7,09.

Generalización-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,223(b)	1	,637		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,431	1	,511		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,806
Asociación lineal por lineal	,222	1	,637		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,21.

Generalización-Justificación Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	36,577(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	19,827	1	,000		
Razón de verosimilitud	12,048	1	,001		
Estadístico exacto de Fisher				,003	,003
Asociación lineal por lineal	36,465	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,10.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,209	,070	1,427	,154
		T1Gen dependiente	,954	,012	1,427	,154
		T1Justif dependiente	,118	,078	1,427	,154

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,335	,112	1,427	,154
	Tau-c de Kendall	,023	,016	1,427	,154
	Gamma	1,000	,000	1,427	,154
N de casos válidos		326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización Algebraica-Trabajo con términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,570(b)	1	,033		
Corrección por continuidad(a)	3,288	1	,070		
Razón de verosimilitud	5,429	1	,020		
Estadístico exacto de Fisher				,048	,029

Asociación lineal por lineal	4,556	1	,033		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,29.

Generalización Algebraica-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,002(b)	1	,961		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,002	1	,961		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,601
Asociación lineal por lineal	,002	1	,961		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,93.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	5,548(b)	1	,019		
Corrección por continuidad(a)	4,075	1	,044		
Razón de verosimilitud	8,776	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,017	,013
Asociación lineal por lineal	5,531	1	,019		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,50.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,130	,021	3,219	,001
	Tau-c de Kendall	,043	,013	3,219	,001
	Gamma	1,000	,000	3,219	,001

N de casos válidos	326			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización Algebraica-Formulación de Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,128(b)	1	,720		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,251	1	,617		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,882
Asociación lineal por lineal	,128	1	,721		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,12.

Generalización Algebraica-Justificación de Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	63,590(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	35,019	1	,000		
Razón de verosimilitud	14,355	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,001	,001
Asociación lineal por lineal	63,395	1	,000		
N de casos válidos	326				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,06.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada (b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,332	,106	1,427	,154
		T1Gen.Alg dependiente	,975	,009	1,427	,154
		T1Justif dependiente	,200	,126	1,427	,154

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 2

Organización de Términos k-ésimos y Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,743(b)	1	,053		
Corrección por continuidad(a)	2,396	1	,122		
Razón de verosimilitud	6,102	1	,013		
Estadístico exacto de Fisher				,061	,048
Asociación lineal por lineal	3,730	1	,053		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,50.

Patrón-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	76,475(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	63,339	1	,000		
Razón de verosimilitud	28,430	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	76,212	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,44.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,486	,114	2,493	,013
		T2C.Partic dependiente	,368	,121	2,493	,013
		T2Patrón dependiente	,715	,153	2,493	,013

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,513	,121	2,493	,013
	Tau-c de Kendall	,076	,031	2,493	,013
	Gamma	,976	,021	2,493	,013
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	7,704(b)	1	,006		
Corrección por continuidad(a)	6,241	1	,012		
Razón de verosimilitud	12,419	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,004	,002
Asociación lineal por lineal	7,677	1	,006		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,00.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,129	,017	4,091	,000
		T2Organiz.C.Partic dependiente	,331	,028	4,091	,000
		T2Patrón dependiente	,080	,019	4,091	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,163	,022	4,091	,000
	Tau-c de Kendall	,069	,017	4,091	,000
	Gamma	1,000	,000	4,091	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	13,260(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	12,076	1	,001		
Razón de verosimilitud	15,676	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	13,214	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 15,95.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,209	,042	4,483	,000
		T2Organiz.C.Partic dependiente	,260	,052	4,483	,000
		T2PatrónOk dependiente	,175	,038	4,483	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,213	,043	4,483	,000
	Tau-c de Kendall	,150	,034	4,483	,000
	Gamma	,674	,134	4,483	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	13,260(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	12,076	1	,001		
Razón de verosimilitud	15,676	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000

Asociación lineal por lineal	13,214	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 15,95.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,213	,043	4,483	,000
	Tau-c de Kendall	,150	,034	4,483	,000
	Gamma	,674	,134	4,483	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	50,876(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	41,840	1	,000		
Razón de verosimilitud	23,301	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	50,702	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,63.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,371	,095	2,466	,014
		T2C.Partic dependiente	,253	,092	2,466	,014
		T2Recurr dependiente	,690	,154	2,466	,014

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,418	,108	2,466	,014
	Tau-c de Kendall	,074	,030	2,466	,014

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
	Gamma	,958	,035	2,466	,014
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	13,260(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	12,076	1	,001		
Razón de verosimilitud	15,676	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	13,214	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 15,95.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,209	,042	4,483	,000
		T2Organiz.C.Partic dependiente	,260	,052	4,483	,000
		T2PatrónOk dependiente	,175	,038	4,483	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,213	,043	4,483	,000
	Tau-c de Kendall	,150	,034	4,483	,000
	Gamma	,674	,134	4,483	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	171,414(b)	1	,000		

Corrección por continuidad(a)	159,161	1	,000		
Razón de verosimilitud	81,029	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	170,825	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,26.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,757	,070	4,190	,000
		T2Patrón dependiente	,648	,099	4,190	,000
		T2Recurr dependiente	,908	,061	4,190	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,767	,071	4,190	,000
	Tau-c de Kendall	,189	,045	4,190	,000
	Gamma	,996	,004	4,190	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	50,876(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	41,840	1	,000		
Razón de verosimilitud	23,301	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	50,702	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,63.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,371	,095	2,466	,014
		T2C.Partic dependiente	,253	,092	2,466	,014
		T2Recurr dependiente	,690	,154	2,466	,014

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,418	,108	2,466	,014
	Tau-c de Kendall	,074	,030	2,466	,014
	Gamma	,958	,035	2,466	,014
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Patrón Adecuado

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	105,460(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	99,672	1	,000		
Razón de verosimilitud	78,178	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	105,097	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,03.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,568	,055	5,236	,000
		T2Recurr dependiente	,427	,069	5,236	,000
		T2PatrónOk dependiente	,848	,047	5,236	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,602	,058	5,236	,000
	Tau-c de Kendall	,247	,047	5,236	,000
	Gamma	,989	,011	5,236	,000
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	51,160(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	34,706	1	,000		
Razón de verosimilitud	14,620	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	50,984	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,16.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,415	,166	1,726	,084
		T2C.Partic dependiente	,482	,204	1,726	,084
		T2Conjet dependiente	,364	,171	1,726	,084

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,419	,168	1,726	,084
	Tau-c de Kendall	,039	,023	1,726	,084
	Gamma	,965	,032	1,726	,084
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,787(b)	1	,095		
Corrección por continuidad(a)	1,500	1	,221		
Razón de verosimilitud	4,557	1	,033		
Estadístico exacto de Fisher				,182	,103
Asociación lineal por lineal	2,778	1	,096		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,88.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	44,115(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	32,914	1	,000		
Razón de verosimilitud	16,780	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	43,963	1	,000		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,33.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,389	,131	1,993	,046
	Tau-c de Kendall	,050	,025	1,993	,046
	Gamma	,957	,039	1,993	,046
N de casos válidos		291			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Justificación-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,319(b)	1	,128		

Corrección por continuidad(a)	1,188	1	,276		
Razón de verosimilitud	4,037	1	,045		
Estadístico exacto de Fisher				,207	,133
Asociación lineal por lineal	2,311	1	,128		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,76.

Justificación-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,831(b)	1	,362		
Corrección por continuidad(a)	,576	1	,448		
Razón de verosimilitud	,817	1	,366		
Estadístico exacto de Fisher				,364	,223
Asociación lineal por lineal	,828	1	,363		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 20,01.

Justificación-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,773(b)	1	,029		
Corrección por continuidad(a)	3,513	1	,061		
Razón de verosimilitud	8,207	1	,004		
Estadístico exacto de Fisher				,027	,017
Asociación lineal por lineal	4,757	1	,029		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,52.

Justificación-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,727(b)	1	,189		
Corrección por continuidad(a)	,666	1	,414		
Razón de verosimilitud	3,016	1	,082		
Estadístico exacto de Fisher				,345	,222
Asociación lineal por lineal	1,721	1	,190		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,32.

Generalización-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,416(b)	1	,519		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,800	1	,371		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,671
Asociación lineal por lineal	,414	1	,520		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,38.

Generalización-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,580(b)	1	,032		
Corrección por continuidad(a)	3,403	1	,065		
Razón de verosimilitud	4,200	1	,040		
Estadístico exacto de Fisher				,041	,036
Asociación lineal por lineal	4,565	1	,033		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,38.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,856(b)	1	,355		
Corrección por continuidad(a)	,105	1	,746		
Razón de verosimilitud	1,624	1	,203		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,445
Asociación lineal por lineal	,853	1	,356		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,77.

Generalización-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,310(b)	1	,578		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,598	1	,439		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,742
Asociación lineal por lineal	,309	1	,579		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,29.

Generalización-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,003(b)	1	,958		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,003	1	,958		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,629
Asociación lineal por lineal	,003	1	,958		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,08.

Generalización Algebraica-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,354(b)	1	,552		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,683	1	,408		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,711
Asociación lineal por lineal	,353	1	,553		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,33.

Generalización Algebraica-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,265(b)	1	,039		
Corrección por continuidad(a)	3,053	1	,081		
Razón de verosimilitud	3,901	1	,048		
Estadístico exacto de Fisher				,054	,044
Asociación lineal por lineal	4,250	1	,039		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,75.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,728(b)	1	,393		
Corrección por continuidad(a)	,043	1	,836		
Razón de verosimilitud	1,387	1	,239		

Estadístico exacto de Fisher				1,000	,500
Asociación lineal por lineal	,726	1	,394		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,66.

Generalización Algebraica-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,263(b)	1	,608		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,511	1	,475		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,775
Asociación lineal por lineal	,263	1	,608		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,25.

Generalización Algebraica-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,066(b)	1	,797		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,064	1	,800		
Estadístico exacto de Fisher				,730	,514
Asociación lineal por lineal	,066	1	,798		
N de casos válidos	291				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,64.

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 3

Organización de Términos k-ésimos y Trabajo con Términos k-ésimos

			Organiz. T. k-ésimos	
			0	Total
Trabajo T. k-ésimos	0	Frecuencia absoluta	300	300
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	97,7%	97,7%
		% del total	97,7%	97,7%
	1	Frecuencia absoluta	7	7
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	2,3%	2,3%
		% del total	2,3%	2,3%
Total		Frecuencia absoluta	307	307
		% de Trabajo T. k-ésimos	100,0%	100,0%
		% de Organiz. T. k-ésimos	100,0%	100,0%
		% del total	100,0%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor
Chi-cuadrado de Pearson	.[a]
N de casos válidos	307

a. No se calculará ningún estadístico porque T3Organiz.C.Partic es una constante.

Patrón-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,009(b)	1	,014		
Corrección por continuidad(a)	4,253	1	,039		
Razón de verosimilitud	6,224	1	,013		
Estadístico exacto de Fisher				,020	,020
Asociación lineal por lineal	5,989	1	,014		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,85.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,078	,027	2,135	,033
		T3C.Partic dependiente	,043	,020	2,135	,033
		T3Patrón dependiente	,460	,135	2,135	,033

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,140	,048	2,135	,033
	Tau-c de Kendall	,041	,019	2,135	,033
	Gamma	,802	,193	2,135	,033
N de casos válidos		307			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	9,373(b)	1	,002		
Corrección por continuidad(a)	7,036	1	,008		
Razón de verosimilitud	8,833	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,005	,005
Asociación lineal por lineal	9,342	1	,002		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,26.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,101	,031	2,271	,023
		T3C.Partic dependiente	,056	,024	2,271	,023
		T3PatrónOk dependiente	,547	,135	2,271	,023

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,175	,054	2,271	,023
	Tau-c de Kendall	,049	,021	2,271	,023
	Gamma	,861	,141	2,271	,023
N de casos válidos		307			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	14,567(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	7,506	1	,006		
Razón de verosimilitud	6,006	1	,014		
Estadístico exacto de Fisher				,018	,018
Asociación lineal por lineal	14,519	1	,000		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,23.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	-,215	,138	-1,326	,185
		T3C.Partic dependiente	-,183	,127	-1,326	,185
		T3Conjet dependiente	-,259	,171	-1,326	,185

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	-,218	,140	-1,326	,185
	Tau-c de Kendall	-,023	,017	-1,326	,185
	Gamma	-,872	,109	-1,326	,185
N de casos válidos		307			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,838(b)	1	,175		
Corrección por continuidad(a)	1,058	1	,304		
Razón de verosimilitud	2,011	1	,156		
Estadístico exacto de Fisher				,209	,152
Asociación lineal por lineal	1,832	1	,176		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,07.

Generalización-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	12,264(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	9,119	1	,003		
Razón de verosimilitud	9,103	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,004	,004
Asociación lineal por lineal	12,224	1	,000		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,37.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,132	,049	2,048	,041
		T3C.Partic dependiente	,075	,036	2,048	,041
		T3Gen dependiente	,531	,172	2,048	,041

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,200	,074	2,048	,041

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
	Tau-c de Kendall	,047	,023	2,048	,041
	Gamma	,835	,129	2,048	,041
N de casos válidos		307			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	108,581(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	105,550	1	,000		
Razón de verosimilitud	130,239	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	108,227	1	,000		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 24,43.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,581	,035	10,465	,000
		T3Patrón dependiente	,737	,028	10,465	,000
		T3Gen dependiente	,480	,045	10,465	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,595	,036	10,465	,000
	Tau-c de Kendall	,463	,044	10,465	,000
	Gamma	1,000	,000	10,465	,000
N de casos válidos		307			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)

Chi-cuadrado de Pearson	,599(b)	1	,439		
Corrección por continuidad(a)	,136	1	,713		
Razón de verosimilitud	,697	1	,404		
Estadístico exacto de Fisher				,693	,386
Asociación lineal por lineal	,597	1	,440		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,95.

Generalización Algebraica-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,071(b)	1	,790		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,139	1	,709		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,933
Asociación lineal por lineal	,070	1	,791		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,07.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,411(b)	1	,036		
Corrección por continuidad(a)	2,280	1	,131		
Razón de verosimilitud	5,434	1	,020		
Estadístico exacto de Fisher				,067	,067
Asociación lineal por lineal	4,397	1	,036		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,22.

Generalización Algebraica-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,102(b)	1	,749		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,200	1	,655		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,905
Asociación lineal por lineal	,102	1	,750		
N de casos válidos	307				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,10.

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 4

Organización de Términos k-ésimos-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	135,993(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	75,742	1	,000		
Razón de verosimilitud	18,120	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	135,496	1	,000		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,665	,167	1,430	,153
		T4C.Partic dependiente	,993	,005	1,430	,153
		T4Organiz.C.Partic dependiente	,500	,250	1,430	,153

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,705	,177	1,430	,153
	Tau-c de Kendall	,029	,020	1,430	,153
	Gamma	1,000	,000	1,430	,153
N de casos válidos		274			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,231(b)	1	,630		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,245	1	,621		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,536
Asociación lineal por lineal	,231	1	,631		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,46.

Patrón-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,159(b)	1	,691		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,153	1	,696		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,598
Asociación lineal por lineal	,158	1	,691		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,73.

Patrón Adecuado-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,060(b)	1	,806		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,119	1	,731		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,943
Asociación lineal por lineal	,060	1	,807		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,06.

Patrón Adecuado-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,030(b)	1	,863		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,059	1	,808		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,971
Asociación lineal por lineal	,030	1	,863		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

Recurrencia- Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	67,747(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	16,439	1	,000		
Razón de verosimilitud	8,724	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,015	,015
Asociación lineal por lineal	67,500	1	,000		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,399	,173	1,005	,315
		T4C.Partic dependiente	,989	,006	1,005	,315
		T4Recurr dependiente	,250	,217	1,005	,315

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,497	,216	1,005	,315
	Tau-c de Kendall	,014	,014	1,005	,315
	Gamma	1,000	,000	1,005	,315
N de casos válidos		274			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,007(b)	1	,932		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,015	1	,904		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,993
Asociación lineal por lineal	,007	1	,932		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Conjetura-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,030(b)	1	,863		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,059	1	,808		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,971

Asociación lineal por lineal	,030	1	,863		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,03.

Conjetura-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,015(b)	1	,903		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,029	1	,864		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,985
Asociación lineal por lineal	,015	1	,903		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,158(b)	1	,282		
Corrección por continuidad(a)	,115	1	,735		
Razón de verosimilitud	1,825	1	,177		
Estadístico exacto de Fisher				,535	,402
Asociación lineal por lineal	1,154	1	,283		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,73.

Generalización-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,276(b)	1	,259		

Corrección por continuidad(a)	,305	1	,581		
Razón de verosimilitud	1,112	1	,292		
Estadístico exacto de Fisher				,270	,270
Asociación lineal por lineal	1,271	1	,260		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,02.

Generalización-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,691(b)	1	,406		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	,986		
Razón de verosimilitud	1,185	1	,276		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,554
Asociación lineal por lineal	,689	1	,407		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,51.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	54,034(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	51,940	1	,000		
Razón de verosimilitud	76,883	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	53,837	1	,000		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 25,55.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,444	,031	10,160	,000
	Tau-c de Kendall	,373	,037	10,160	,000
	Gamma	1,000	,000	10,160	,000
N de casos válidos		274			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	5,871(b)	1	,015		
Corrección por continuidad(a)	2,590	1	,108		
Razón de verosimilitud	5,502	1	,019		
Estadístico exacto de Fisher				,065	,065
Asociación lineal por lineal	5,850	1	,016		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,51.

Generalización Algebraica-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	67,747(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	16,439	1	,000		
Razón de verosimilitud	8,724	1	,003		
Estadístico exacto de Fisher				,015	,015
Asociación lineal por lineal	67,500	1	,000		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,399	,173	1,005	,315
		T4C.Partic	,989	,006	1,005	,315

	dependiente				
	T4Gen.Alg dependiente	,250	,217	1,005	,315

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,497	,216	1,005	,315
	Tau-c de Kendall	,014	,014	1,005	,315
	Gamma	1,000	,000	1,005	,315
N de casos válidos		274			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización Algebraica-Organización de Término k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,007(b)	1	,932		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,015	1	,904		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,993
Asociación lineal por lineal	,007	1	,932		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,577(b)	1	,448		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,910	1	,340		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,635
Asociación lineal por lineal	,575	1	,448		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.

b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,36.

Generalización Algebraica-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,007(b)	1	,932		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,015	1	,904		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,993
Asociación lineal por lineal	,007	1	,932		
N de casos válidos	274				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 3 casillas (75,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 5

Organización de Términos k-ésimos-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,592(b)	1	,010		
Corrección por continuidad(a)	5,312	1	,021		
Razón de verosimilitud	11,394	1	,001		
Estadístico exacto de Fisher				,007	,003
Asociación lineal por lineal	6,568	1	,010		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,89.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,155	,018	4,879	,000
	Tau-c de Kendall	,071	,015	4,879	,000
	Gamma	1,000	,000	4,879	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.

b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	134,076(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	129,453	1	,000		
Razón de verosimilitud	109,964	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	133,588	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 9,25.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,698	,056	7,509	,000
		T5C.Partic dependiente	,672	,063	7,509	,000
		T5Patrón dependiente	,726	,061	7,509	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,698	,056	7,509	,000
	Tau-c de Kendall	,418	,056	7,509	,000
	Gamma	,963	,016	7,509	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón -Organización Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	7,442(b)	1	,006		
Corrección por continuidad(a)	6,127	1	,013		
Razón de verosimilitud	12,726	1	,000		

Estadístico exacto de Fisher				,004	,002
Asociación lineal por lineal	7,415	1	,006		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,40.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,159	,018	4,998	,000
		T5Organiz.C.Partic dependiente	,126	,022	4,998	,000
		T5Patrón dependiente	,215	,026	4,998	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,165	,019	4,998	,000
	Tau-c de Kendall	,078	,016	4,998	,000
	Gamma	1,000	,000	4,998	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	88,610(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	85,433	1	,000		
Razón de verosimilitud	86,631	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	88,288	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 15,36.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,556	,049	7,875	,000
		T5C.Partic dependiente	,462	,055	7,875	,000
		T5PatrónOk dependiente	,698	,051	7,875	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,568	,050	7,875	,000
	Tau-c de Kendall	,402	,051	7,875	,000
	Gamma	,944	,027	7,875	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,491(b)	1	,011		
Corrección por continuidad(a)	5,448	1	,020		
Razón de verosimilitud	7,704	1	,006		
Estadístico exacto de Fisher				,010	,007
Asociación lineal por lineal	6,467	1	,011		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 8,96.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,140	,040	3,126	,002
		T5Organiz.C.Partic dependiente	,100	,032	3,126	,002
		T5PatrónOk dependiente	,237	,066	3,126	,002

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,154	,044	3,126	,002
	Tau-c de Kendall	,087	,028	3,126	,002
	Gamma	,628	,190	3,126	,002
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia- Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	45,978(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	43,846	1	,000		
Razón de verosimilitud	51,647	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	45,811	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 22,69.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,394	,043	7,110	,000
		T5C.Partic dependiente	,311	,044	7,110	,000
		T5Recurr dependiente	,538	,051	7,110	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,409	,045	7,110	,000
	Tau-c de Kendall	,310	,044	7,110	,000
	Gamma	,895	,054	7,110	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia- Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,863(b)	1	,091		
Corrección por continuidad(a)	2,227	1	,136		
Razón de verosimilitud	2,934	1	,087		
Estadístico exacto de Fisher				,111	,067
Asociación lineal por lineal	2,853	1	,091		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 13,24.

Conjetura-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,063(b)	1	,802		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,061	1	,804		
Estadístico exacto de Fisher				,788	,489
Asociación lineal por lineal	,063	1	,802		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,54.

Conjetura-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	5,221(b)	1	,022		
Corrección por continuidad(a)	3,780	1	,052		
Razón de verosimilitud	4,134	1	,042		
Estadístico exacto de Fisher				,035	,035
Asociación lineal por lineal	5,202	1	,023		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,65.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,000(b)	1	,995		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,000	1	,995		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,616
Asociación lineal por lineal	,000	1	,995		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,01.

Justificación-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,194(b)	1	,139		
Corrección por continuidad(a)	1,117	1	,291		
Razón de verosimilitud	3,915	1	,048		
Estadístico exacto de Fisher				,218	,142
Asociación lineal por lineal	2,186	1	,139		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,75.

Justificación-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	17,991(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	13,757	1	,000		
Razón de verosimilitud	10,742	1	,001		

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Estadístico exacto de Fisher				,001	,001
Asociación lineal por lineal	17,926	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,02.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,229	,091	2,052	,040
		T5Organiz.C.Partic dependiente	,413	,159	2,052	,040
		T5Justif dependiente	,158	,073	2,052	,040

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,256	,102	2,052	,040
	Tau-c de Kendall	,058	,028	2,052	,040
	Gamma	,826	,106	2,052	,040
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Justificación-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,477(b)	1	,115		
Corrección por continuidad(a)	1,359	1	,244		
Razón de verosimilitud	4,371	1	,037		
Estadístico exacto de Fisher				,217	,113
Asociación lineal por lineal	2,468	1	,116		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,93.

Justificación-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,084(b)	1	,298		
Corrección por continuidad(a)	,241	1	,624		
Razón de verosimilitud	2,025	1	,155		
Estadístico exacto de Fisher				,606	,364
Asociación lineal por lineal	1,080	1	,299		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,95.

Generalización-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	8,628(b)	1	,003		
Corrección por continuidad(a)	7,641	1	,006		
Razón de verosimilitud	9,858	1	,002		
Estadístico exacto de Fisher				,003	,002
Asociación lineal por lineal	8,596	1	,003		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 14,49.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,174	,046	3,495	,000
		T5C.Partic dependiente	,146	,041	3,495	,000
		T5Gen dependiente	,214	,057	3,495	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,177	,047	3,495	,000

	Tau-c de Kendall	,123	,035	3,495	,000
	Gamma	,565	,156	3,495	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,397(b)	1	,529		
Corrección por continuidad(a)	,171	1	,680		
Razón de verosimilitud	,410	1	,522		
Estadístico exacto de Fisher				,665	,347
Asociación lineal por lineal	,396	1	,529		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 8,45.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	24,944(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	23,308	1	,000		
Razón de verosimilitud	34,470	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	24,853	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 16,00.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,298	,031	7,034	,000
		T5Patrón dependiente	,259	,034	7,034	,000
		T5Gen dependiente	,351	,037	7,034	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.

b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,301	,031	7,034	,000
	Tau-c de Kendall	,218	,031	7,034	,000
	Gamma	,936	,063	7,034	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,736(b)	1	,030		
Corrección por continuidad(a)	3,810	1	,051		
Razón de verosimilitud	5,560	1	,018		
Estadístico exacto de Fisher				,041	,020
Asociación lineal por lineal	4,719	1	,030		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 7,85.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,119	,041	2,661	,008
		T5Conjet dependiente	,084	,031	2,661	,008
		T5Gen dependiente	,206	,069	2,661	,008

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,131	,045	2,661	,008
	Tau-c de Kendall	,071	,026	2,661	,008
	Gamma	,568	,213	2,661	,008
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,934(b)	1	,164		
Corrección por continuidad(a)	1,081	1	,298		
Razón de verosimilitud	1,780	1	,182		
Estadístico exacto de Fisher				,175	,149
Asociación lineal por lineal	1,927	1	,165		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,02.

Generalización Algebraica-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,762(b)	1	,052		
Corrección por continuidad(a)	3,040	1	,081		
Razón de verosimilitud	4,276	1	,039		
Estadístico exacto de Fisher				,076	,035
Asociación lineal por lineal	3,749	1	,053		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 9,95.

Generalización Algebraica-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,902(b)	1	,168		
Corrección por continuidad(a)	1,284	1	,257		
Razón de verosimilitud	2,179	1	,140		
Estadístico exacto de Fisher				,221	,125
Asociación lineal por lineal	1,895	1	,169		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,80.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	17,166(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	15,639	1	,000		
Razón de verosimilitud	27,758	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	17,104	1	,000		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 10,99.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,250	,023	6,763	,000
		T5Patrón dependiente	,243	,029	6,763	,000
		T5Gen.Alg dependiente	,257	,029	6,763	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,250	,023	6,763	,000
	Tau-c de Kendall	,160	,024	6,763	,000
	Gamma	1,000	,000	6,763	,000
N de casos válidos		275			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización Algebraica-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,476(b)	1	,224		

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Corrección por continuidad(a)	,923	1	,337		
Razón de verosimilitud	1,668	1	,196		
Estadístico exacto de Fisher				,311	,169
Asociación lineal por lineal	1,470	1	,225		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,39.

Generalización Algebraica-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,727(b)	1	,394		
Corrección por continuidad(a)	,207	1	,649		
Razón de verosimilitud	,853	1	,356		
Estadístico exacto de Fisher				,693	,350
Asociación lineal por lineal	,724	1	,395		
N de casos válidos	275				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,07.

DEPENDENCIA DE PASOS EN PROBLEMA 6

Organización de Términos k-ésimos-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	57,042(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	55,015	1	,000		
Razón de verosimilitud	82,209	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	56,866	1	,000		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 27,88.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,418	,028	10,514	,000
		T6C.Partic dependiente	,378	,034	10,514	,000
		T6Organiz.C.Partic dependiente	,467	,032	10,514	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,420	,028	10,514	,000
	Tau-c de Kendall	,345	,033	10,514	,000
	Gamma	1,000	,000	10,514	,000
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,495(b)	1	,114		
Corrección por continuidad(a)	2,098	1	,148		
Razón de verosimilitud	2,533	1	,111		
Estadístico exacto de Fisher				,118	,073
Asociación lineal por lineal	2,487	1	,115		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 33,02.

Patrón-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	18,254(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	16,732	1	,000		
Razón de verosimilitud	29,542	1	,000		

Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	18,197	1	,000		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 11,74.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,238	,021	6,883	,000
	Tau-c de Kendall	,145	,021	6,883	,000
	Gamma	1,000	,000	6,883	,000
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Patrón Adecuado-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	52,137(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	49,800	1	,000		
Razón de verosimilitud	50,813	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	51,976	1	,000		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 16,94.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,385	,049	6,268	,000
		T6Organiz.C.Partic dependiente	,540	,062	6,268	,000
		T6PatrónOk dependiente	,299	,047	6,268	,000

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,402	,051	6,268	,000
	Tau-c de Kendall	,273	,044	6,268	,000
	Gamma	,841	,058	6,268	,000
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,501(b)	1	,034		
Corrección por continuidad(a)	3,868	1	,049		
Razón de verosimilitud	4,865	1	,027		
Estadístico exacto de Fisher				,043	,022
Asociación lineal por lineal	4,487	1	,034		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 17,85.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,118	,049	2,369	,018
	Tau-c de Kendall	,085	,036	2,369	,018
	Gamma	,356	,156	2,369	,018
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Recurrencia-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	38,316(b)	1	,000		
Corrección por continuidad(a)	36,612	1	,000		
Razón de verosimilitud	36,987	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000

Asociación lineal por lineal	38,197	1	,000		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 25,76.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,344	,055	5,749	,000
	Tau-c de Kendall	,275	,048	5,749	,000
	Gamma	,685	,076	5,749	,000
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,438(b)	1	,231		
Corrección por continuidad(a)	,756	1	,384		
Razón de verosimilitud	1,305	1	,253		
Estadístico exacto de Fisher				,319	,188
Asociación lineal por lineal	1,433	1	,231		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,18.

Conjetura-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	4,519(b)	1	,034		
Corrección por continuidad(a)	3,347	1	,067		
Razón de verosimilitud	5,661	1	,017		
Estadístico exacto de Fisher				,038	,026
Asociación lineal por lineal	4,505	1	,034		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.

b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 4,59.

Conjetura-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,266(b)	1	,132		
Corrección por continuidad(a)	1,487	1	,223		
Razón de verosimilitud	2,425	1	,119		
Estadístico exacto de Fisher				,161	,110
Asociación lineal por lineal	2,259	1	,133		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 5,63.

Justificación-Trabajo con Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,893(b)	1	,345		
Corrección por continuidad(a)	,304	1	,581		
Razón de verosimilitud	1,050	1	,306		
Estadístico exacto de Fisher				,694	,310
Asociación lineal por lineal	,890	1	,346		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,20.

Justificación-Organización de Casos Particulares

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	7,317(b)	1	,007		
Corrección por continuidad(a)	5,528	1	,019		
Razón de verosimilitud	6,992	1	,008		
Estadístico exacto de Fisher				,011	,011

Asociación lineal por lineal	7,294	1	,007		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,18.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,093	,033	2,202	,028
		T6Organiz.C.Partic dependiente	,437	,141	2,202	,028
		T6Justif dependiente	,052	,023	2,202	,028

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,151	,054	2,202	,028
	Tau-c de Kendall	,047	,022	2,202	,028
	Gamma	,743	,182	2,202	,028
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Justificación-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	12,101(b)	1	,001		
Corrección por continuidad(a)	9,845	1	,002		
Razón de verosimilitud	15,386	1	,000		
Estadístico exacto de Fisher				,000	,000
Asociación lineal por lineal	12,064	1	,001		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,90.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,116	,019	3,098	,002

	T6Patrón dependiente	,583	,028	3,098	,002
	T6Justif dependiente	,064	,021	3,098	,002

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,194	,032	3,098	,002
	Tau-c de Kendall	,063	,020	3,098	,002
	Gamma	1,000	,000	3,098	,002
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Conjetura-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,388(b)	1	,533		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,750	1	,386		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,688
Asociación lineal por lineal	,387	1	,534		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,36.

Generalización-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,896(b)	1	,089		
Corrección por continuidad(a)	1,652	1	,199		
Razón de verosimilitud	2,491	1	,114		
Estadístico exacto de Fisher				,104	,104
Asociación lineal por lineal	2,888	1	,089		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.

b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,96.

Generalización-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,381(b)	1	,537		
Corrección por continuidad(a)	,059	1	,808		
Razón de verosimilitud	,402	1	,526		
Estadístico exacto de Fisher				,717	,419
Asociación lineal por lineal	,379	1	,538		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 2,82.

Generalización-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	6,513(b)	1	,011		
Corrección por continuidad(a)	4,800	1	,028		
Razón de verosimilitud	6,974	1	,008		
Estadístico exacto de Fisher				,023	,013
Asociación lineal por lineal	6,493	1	,011		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 3,47.

Medidas direccionales

			Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	d de Somer	Simétrica	,081	,026	2,317	,020
		T6Patrón dependiente	,453	,120	2,317	,020
		T6Gen dependiente	,045	,019	2,317	,020

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Medidas simétricas

		Valor	Error típ. asint.(a)	T aproximada(b)	Sig. aproximada
Ordinal por ordinal	Tau-b de Kendall	,142	,045	2,317	,020
	Tau-c de Kendall	,044	,019	2,317	,020
	Gamma	,811	,184	2,317	,020
N de casos válidos		323			

a Asumiendo la hipótesis alternativa.
b Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Generalización-Formulación Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,344(b)	1	,558		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,666	1	,415		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,717
Asociación lineal por lineal	,343	1	,558		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,32.

Generalización-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	2,857(b)	1	,091		
Corrección por continuidad(a)	,363	1	,547		
Razón de verosimilitud	1,601	1	,206		
Estadístico exacto de Fisher				,204	,204
Asociación lineal por lineal	2,849	1	,091		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 1 casillas (25,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,22.

Generalización Algebraica-Trabajo con Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,980(b)	1	,322		
Corrección por continuidad(a)	,099	1	,752		
Razón de verosimilitud	1,692	1	,193		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,430
Asociación lineal por lineal	,977	1	,323		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,73.

Generalización Algebraica-Organización de Términos k-ésimos

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,005(b)	1	,943		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,005	1	,943		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,715
Asociación lineal por lineal	,005	1	,943		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,06.

Generalización Algebraica-Patrón

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	3,958(b)	1	,047		
Corrección por continuidad(a)	1,972	1	,160		
Razón de verosimilitud	5,053	1	,025		
Estadístico exacto de Fisher				,080	,080
Asociación lineal por lineal	3,946	1	,047		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 1,30.

Generalización Algebraica-Conjetura

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,127(b)	1	,722		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,248	1	,619		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,884
Asociación lineal por lineal	,127	1	,722		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,12.

Generalización Algebraica-Justificación

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)	Sig. exacta (unilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	,087(b)	1	,768		
Corrección por continuidad(a)	,000	1	1,000		
Razón de verosimilitud	,170	1	,680		
Estadístico exacto de Fisher				1,000	,918
Asociación lineal por lineal	,087	1	,769		
N de casos válidos	323				

a Calculado sólo para una tabla de 2x2.
b 2 casillas (50,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,08.

ANÁLISIS LOGARÍTMICO-LINEAL PASOS EN CURSOS Y CENTROS

```
* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R *

DATA   Information

         56 unweighted cases accepted.
          0 cases rejected because of out-of-range factor values.
          0 cases rejected because of missing data.
       4534 weighted cases will be used in the analysis.


FACTOR Information

   Factor  Level  Label
   Curso       2
```

```
   Centro      4
   Pasos       7

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  *
DESIGN 1 has generating class

    Curso*Centro*Pasos

 Note: For saturated models   ,500 has been added to all observed
cells.
 This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA
subcommand.


The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 1.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals
is     ,000
and the convergence criterion is  116,281

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 Observed, Expected Frequencies and Residuals.

Factor       Code        OBS count  EXP count  Residual  Std Resid
Curso          3º
 Centro Granada
  Pasos Trabajo              192,5      192,5       ,00        ,00
  Pasos Organiz.              56,5       56,5       ,00        ,00
  Pasos Patrón               209,5      209,5       ,00        ,00
  Pasos Conjetur             341,5      341,5       ,00        ,00
  Pasos Justific              11,5       11,5       ,00        ,00
  Pasos Generali              30,5       30,5       ,00        ,00
  Pasos Demostra                ,5         ,5       ,00        ,00

 Centro Madrid
  Pasos Trabajo               92,5       92,5       ,00        ,00
  Pasos Organiz.              33,5       33,5       ,00        ,00
  Pasos Patrón               103,5      103,5       ,00        ,00
  Pasos Conjetur             205,5      205,5       ,00        ,00
  Pasos Justific               5,5        5,5       ,00        ,00
  Pasos Generali              33,5       33,5       ,00        ,00
  Pasos Demostra                ,5         ,5       ,00        ,00

 Centro Cúllar-V
  Pasos Trabajo              133,5      133,5       ,00        ,00
  Pasos Organiz.              47,5       47,5       ,00        ,00
  Pasos Patrón               163,5      163,5       ,00        ,00
  Pasos Conjetur             239,5      239,5       ,00        ,00
  Pasos Justific              21,5       21,5       ,00        ,00
  Pasos Generali              19,5       19,5       ,00        ,00
  Pasos Demostra                ,5         ,5       ,00        ,00

 Centro Teruel
  Pasos Yrabajo              121,5      121,5       ,00        ,00
  Pasos Organiz.              49,5       49,5       ,00        ,00
  Pasos Patrón               153,5      153,5       ,00        ,00
  Pasos Conjetur             192,5      192,5       ,00        ,00
  Pasos Justific              14,5       14,5       ,00        ,00
```

```
  Pasos Generali              58,5        58,5         ,00         ,00
  Pasos Demostra                ,5          ,5         ,00         ,00

Curso          4º
 Centro Granada
  Pasos Trabajo              115,5       115,5         ,00         ,00
  Pasos Organiz.              31,5        31,5         ,00         ,00
  Pasos Patrón               134,5       134,5         ,00         ,00
  Pasos Conjetur             206,5       206,5         ,00         ,00
  Pasos Justific               1,5         1,5         ,00         ,00
  Pasos Generali              30,5        30,5         ,00         ,00
  Pasos Demostra                ,5          ,5         ,00         ,00

Centro Madrid
  Pasos Trabajo               87,5        87,5         ,00         ,00
  Pasos Organiz.              34,5        34,5         ,00         ,00
  Pasos Patrón               128,5       128,5         ,00         ,00
  Pasos Conjetur             180,5       180,5         ,00         ,00
  Pasos Justific              11,5        11,5         ,00         ,00
  Pasos Generali              38,5        38,5         ,00         ,00
  Pasos Demostra                ,5          ,5         ,00         ,00

Centro Cúllar-V
  Pasos Trabajo              100,5       100,5         ,00         ,00
  Pasos Organiz.              51,5        51,5         ,00         ,00
  Pasos Patrón               120,5       120,5         ,00         ,00
  Pasos Conjetur             196,5       196,5         ,00         ,00
  Pasos Justific              14,5        14,5         ,00         ,00
  Pasos Generali              25,5        25,5         ,00         ,00
  Pasos Demostra                ,5          ,5         ,00         ,00

Centro Teruel
  Pasos Trabajo              111,5       111,5         ,00         ,00
  Pasos Organiz.              62,5        62,5         ,00         ,00
  Pasos Patrón               138,5       138,5         ,00         ,00
  Pasos Conjetur             176,5       176,5         ,00         ,00
  Pasos Justific               8,5         8,5         ,00         ,00
  Pasos Generali              19,5        19,5         ,00         ,00
  Pasos Demostra                ,5          ,5         ,00         ,00
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 Goodness-of-fit test statistics

    Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .
             Pearson chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Tests that K-way and higher order effects are zero.

K     DF   L.R. Chisq    Prob  Pearson Chisq    Prob   Iteration

3     18       38,933   ,0029         37,361   ,0047           2
2     45      143,662   ,0000        141,982   ,0000           2
1     55     4495,826   ,0000       4321,139   ,0000           0

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Tests that K-way effects are zero.
```

```
K     DF   L.R. Chisq    Prob  Pearson Chisq    Prob   Iteration

1     10     4352,164   ,0000       4179,157   ,0000           0
2     27      104,729   ,0000        104,621   ,0000           0
3     18       38,933   ,0029         37,361   ,0047           0

>Note # 13865
>DF used for these tests have NOT been adjusted for structural or
sampling
>zeros.  Tests using these DF may be conservative.


* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  *

 Tests of PARTIAL associations.

Effect Name                           DF  Partial Chisq    Prob  Iter

Curso*Centro                           3         37,607   ,0000     2
Curso*Pasos                            6          4,609   ,5948     2
Centro*Pasos                          18         61,920   ,0000     2
Curso                                  1         56,140   ,0000     2
Centro                                 3         73,844   ,0000     2
Pasos                                  6       4222,179   ,0000     2

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 Values of zero have been encountered in the cell table.
 Printing of parameter estimates will be skipped.


* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  *

Backward Elimination (p = ,050) for DESIGN 1 with generating class

  Curso*Centro*Pasos

 Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
 Note: For saturated models   ,500 has been added to all observed
cells.
 This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA
subcommand.


 Estimates for Parameters.

 Curso*Centro*Pasos

Parameter   Coeff.      Std. Err.  Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI

   1     -,0520607630   ,14233     -,36577     -,33103      ,22691
   2      ,0715824305   ,15720      ,45536     -,23653      ,37969
   3     -,0482146585   ,14131     -,34121     -,32517      ,22875
   4     -,0535999276   ,13912     -,38529     -,32627      ,21907
   5      ,5495872814   ,31671     1,73533     -,07116     1,17033
   6     -,2768494002   ,16497    -1,67818     -,60019      ,04649
   7      ,0785517268   ,14075      ,55809     -,19732      ,35443
```

8	,1229893179	,15606	,78811	-,18288	,42886
9	-,0197326984	,13870	-,14227	-,29159	,25213
10	,1179744433	,13562	,86989	-,14784	,38379
11	-,4794127777	,23625	-2,02923	-,94247	-,01636
12	,0118345747	,15858	,07463	-,29899	,32266
13	,0663826771	,13788	,48146	-,20386	,33662
14	-,0290857872	,14947	-,19459	-,32205	,26388
15	,1146715668	,13637	,84091	-,15261	,38195
16	,0257063086	,13386	,19204	-,23666	,28807
17	-,0400171626	,20434	-,19583	-,44053	,36050
18	-,1790970167	,16695	-1,07277	-,50632	,14812

Curso*Centro

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	,1904449627	,13503	1,41042	-,07421	,45510
2	-,1677954134	,13052	-1,28557	-,42362	,08803
3	-,0414394140	,12909	-,32102	-,29445	,21157

Curso*Pasos

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	,0161758998	,08072	,20040	-,14203	,17438
2	-,0707535594	,08826	-,80163	-,24375	,10224
3	-,0215032464	,07982	-,26940	-,17795	,13494
4	,0138258859	,07844	,17625	-,13992	,16758
5	,1775560072	,14321	1,23986	-,10313	,45824
6	-,0144482749	,09410	-,15355	-,19888	,16998

Centro*Pasos

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	,2750461937	,14233	1,93242	-,00393	,55402
2	-,0312444951	,15720	-,19876	-,33935	,27686
3	,1974555822	,14131	1,39736	-,07950	,47442
4	,2458061974	,13912	1,76690	-,02686	,51848
5	-,7463450124	,31671	-2,35659	-1,36709	-,12560
6	,0356171599	,16497	,21590	-,28772	,35896
7	-,1438228527	,14075	-1,02182	-,41970	,13205
8	-,1607156292	,15606	-1,02986	-,46658	,14515
9	-,0915475520	,13870	-,66003	-,36341	,18031
10	,0109611341	,13562	,08082	-,25485	,27677
11	-,0103129439	,23625	-,04365	-,47337	,45274
12	,2853828928	,15858	1,79959	-,02544	,59620
13	-,0717037891	,13788	-,52005	-,34194	,19854
14	,0336009287	,14947	,22480	-,25936	,32656
15	-,0756532589	,13637	-,55478	-,34293	,19162
16	-,0506061677	,13386	-,37806	-,31297	,21176
17	,6066534646	,20434	2,96879	,20614	1,00717
18	-,3717593084	,16695	-2,22679	-,69898	-,04454

Curso

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	,1008527123	,07567	1,33280	-,04746	,24917

```
Centro
Parameter   Coeff.      Std. Err.  Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI

   1      -,0236643744  ,13503     -,17526     -,28832      ,24099
   2      -,1100549509  ,13052     -,84319     -,36588      ,14577
   3       ,0705318692  ,12909      ,54639     -,18248      ,32354

Pasos
Parameter   Coeff.      Std. Err.  Z-Value Lower 95 CI Upper 95 CI

   1     1,3581727162   ,08072    16,82619     1,19997     1,51638
   2      ,4018941552   ,08826     4,55343      ,22890      ,57489
   3     1,5542239551   ,07982    19,47189     1,39778     1,71067
   4     1,9645534163   ,07844    25,04411     1,81080     2,11830
   5     -1,201213348   ,14321    -8,38797    -1,48190     -,92053
   6      ,0106450918   ,09410      ,11313     -,17378      ,19507
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L  L O G  L I N E A R *

Backward Elimination (p = ,050) for DESIGN 1 with generating class

  Curso*Centro*Pasos

 Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

If Deleted Simple Effect is       DF   L.R. Chisq Change    Prob
Iter
Curso*Centro*Pasos                18             38,933   ,0029
2

Step 1

  The best model has generating class

      Curso*Centro*Pasos

  Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L  L O G  L I N E A R *

The final model has generating class

    Curso*Centro*Pasos

The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 0.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals
is     ,000
and the convergence criterion is  116,281

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

 Observed, Expected Frequencies and Residuals.

Factor   Code            OBS count  EXP count  Residual  Std Resid
```

Curso 3º					
Centro Granada					
Pasos	Trabajo	192,0	192,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	56,0	56,0	,00	,00
Pasos	Patrón	209,0	209,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	341,0	341,0	,00	,00
Pasos	Justific	11,0	11,0	,00	,00
Pasos	Generali	30,0	30,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Centro Madrid					
Pasos	Trabajo	92,0	92,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	33,0	33,0	,00	,00
Pasos	Patrón	103,0	103,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	205,0	205,0	,00	,00
Pasos	Justific	5,0	5,0	,00	,00
Pasos	Generali	33,0	33,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Centro Cúllar-V					
Pasos	Trabajo	133,0	133,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	47,0	47,0	,00	,00
Pasos	Patrón	163,0	163,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	239,0	239,0	,00	,00
Pasos	Justific	21,0	21,0	,00	,00
Pasos	Generali	19,0	19,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Centro Teruel					
Pasos	Trabajo	121,0	121,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	49,0	49,0	,00	,00
Pasos	Patrón	153,0	153,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	192,0	192,0	,00	,00
Pasos	Justific	14,0	14,0	,00	,00
Pasos	Generali	58,0	58,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Curso 4º					
Centro Granada					
Pasos	Trabajo	115,0	115,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	31,0	31,0	,00	,00
Pasos	Patrón	134,0	134,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	206,0	206,0	,00	,00
Pasos	Justific	1,0	1,0	,00	,00
Pasos	Generali	30,0	30,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Centro Madrid					
Pasos	Trabajo	87,0	87,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	34,0	34,0	,00	,00
Pasos	Patrón	128,0	128,0	,00	,00
Pasos	Conjetur	180,0	180,0	,00	,00
Pasos	Justific	11,0	11,0	,00	,00
Pasos	Generali	38,0	38,0	,00	,00
Pasos	Demostra	,0	,0	,00	,00
Centro Cúllar-V					
Pasos	Trabajo	100,0	100,0	,00	,00
Pasos	Organiz.	51,0	51,0	,00	,00

```
 Pasos   Patrón              120,0      120,0        ,00         ,00
 Pasos   Conjetur            196,0      196,0        ,00         ,00
 Pasos   Justific             14,0       14,0        ,00         ,00
 Pasos   Generali             25,0       25,0        ,00         ,00
 Pasos   Demostra               ,0         ,0        ,00         ,00

Centro Teruel
 Pasos   Trabajo             111,0      111,0        ,00         ,00
 Pasos   Organiz.             62,0       62,0        ,00         ,00
 Pasos   Patrón              138,0      138,0        ,00         ,00
 Pasos   Conjetur            176,0      176,0        ,00         ,00
 Pasos   Justific              8,0        8,0        ,00         ,00
 Pasos   Generali             19,0       19,0        ,00         ,00
 Pasos   Demostra               ,0         ,0        ,00         ,00

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Goodness-of-fit test statistics

   Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P =  .
```

ANEXO G. ESTRATEGIAS INDUCTIVAS POR CURSOS

PROBLEMA 1

Tabla de contingencia Curso * T1ID

			T1ID													
			No cambios	T2	T2-TSN	T2-T5	T2-TSN-T5	TSV-T2-TSN	T2-TSN-C1	T2-TSN-C1-C1B-TSN	T2-TSN-C1-SA-C1B-TSN	T2-C1-C1B-TSN	T2-C1-TSA-C1B-TSN	T2-TSN-C4	C3-C1B-TSN-C4	TSV	Total
Curso	3º ESO	Recuento	24	14	73	24	62	2	0	0	1	4	1	4	0	2	211
		Frecuencia espe	19,4	12,3	74,6	18,8	71,7	1,2	,6	,6	,6	2,9	,6	4,1	,6	2,9	211,0
		% de Curso	11,4%	6,6%	34,6%	11,4%	29,4%	,9%	,0%	,0%	,5%	1,9%	,5%	1,9%	,0%	,9%	100,0%
		% de T1ID	72,7%	66,7%	57,5%	75,0%	50,8%	100,0%	,0%	,0%	100,0%	80,0%	100,0%	57,1%	,0%	40,0%	58,8%
		% del total	6,7%	3,9%	20,3%	6,7%	17,3%	,6%	,0%	,0%	,3%	1,1%	,3%	1,1%	,0%	,6%	58,8%
		Residuos corregi	1,7	,8	-,4	2,0	-2,2	1,2	-1,2	-1,2	,8	1,0	,8	-,1	-1,2	-,9	
	4º ESO	Recuento	9	7	54	8	60	0	1	1	0	1	0	3	1	3	148
		Frecuencia espe	13,6	8,7	52,4	13,2	50,3	,8	,4	,4	,4	2,1	,4	2,9	,4	2,1	148,0
		% de Curso	6,1%	4,7%	36,5%	5,4%	40,5%	,0%	,7%	,7%	,0%	,7%	,0%	2,0%	,7%	2,0%	100,0%
		% de T1ID	27,3%	33,3%	42,5%	25,0%	49,2%	,0%	100,0%	100,0%	,0%	20,0%	,0%	42,9%	100,0%	60,0%	41,2%
		% del total	2,5%	1,9%	15,0%	2,2%	16,7%	,0%	,3%	,3%	,0%	,3%	,0%	,8%	,3%	,8%	41,2%
		Residuos corregi	-1,7	-,8	,4	-2,0	2,2	-1,2	1,2	1,2	-,8	-1,0	-,8	,1	1,2	,9	
Total		Recuento	33	21	127	32	122	2	1	1	1	5	1	7	1	5	359
		Frecuencia espe	33,0	21,0	127,0	32,0	122,0	2,0	1,0	1,0	1,0	5,0	1,0	7,0	1,0	5,0	359,0
		% de Curso	9,2%	5,8%	35,4%	8,9%	34,0%	,6%	,3%	,3%	,3%	1,4%	,3%	1,9%	,3%	1,4%	100,0%
		% de T1ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	9,2%	5,8%	35,4%	8,9%	34,0%	,6%	,3%	,3%	,3%	1,4%	,3%	1,9%	,3%	1,4%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

				Sig. de Monte Carlo (bilateral)			Sig. de Monte Carlo (unilateral)		
					Intervalo de confianza al 99%			Intervalo de confianza al 99%	
	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig.	Límite inferior	Límite superior	Sig.	Límite inferior	Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	18,690[a]	13	,133	,085[b]	,078	,092			
Razón de verosimilitud	21,574	13	,062	,101[b]	,093	,108			
Estadístico exacto de Fisher	17,868			,088[b]	,081	,095			
Asociación lineal por lineal	2,158[c]	1	,142	,150[b]	,140	,159	,076[b]	,069	,082
N de casos válidos	359								

a. 18 casillas (64,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 605580418.

c. El estadístico tipificado es 1,469.

PROBLEMA 2

Tabla de contingencia Curso * T2ID

			T2ID										Total
			No cambios	TSN	T5	TSN-T5	TSN-C1	TSN-C1-C1 B-TSN	C1-TSA-C1 B-TSN	TSN-C4	TSN-C4-T7- C1B-TSN	C1	
Curso	3º ESO	Recuento	48	36	0	123	1	0	1	1	1	0	211
		Frecuencia espera	40,0	32,9	,6	129,3	2,9	2,4	,6	1,2	,6	,6	211,0
		% de Curso	22,7%	17,1%	,0%	58,3%	,5%	,0%	,5%	,5%	,5%	,0%	100,0%
		% de T2ID	70,6%	64,3%	,0%	55,9%	20,0%	,0%	100,0%	50,0%	100,0%	,0%	58,8%
		% del total	13,4%	10,0%	,0%	34,3%	,3%	,0%	,3%	,3%	,3%	,0%	58,8%
		Residuos corregido	2,2	,9	-1,2	-1,4	-1,8	-2,4	,8	-,3	,8	-1,2	
	4º ESO	Recuento	20	20	1	97	4	4	0	1	0	1	148
		Frecuencia espera	28,0	23,1	,4	90,7	2,1	1,6	,4	,8	,4	,4	148,0
		% de Curso	13,5%	13,5%	,7%	65,5%	2,7%	2,7%	,0%	,7%	,0%	,7%	100,0%
		% de T2ID	29,4%	35,7%	100,0%	44,1%	80,0%	100,0%	,0%	50,0%	,0%	100,0%	41,2%
		% del total	5,6%	5,6%	,3%	27,0%	1,1%	1,1%	,0%	,3%	,0%	,3%	41,2%
		Residuos corregido	-2,2	-,9	1,2	1,4	1,8	2,4	-,8	,3	-,8	1,2	
Total		Recuento	68	56	1	220	5	4	1	2	1	1	359
		Frecuencia espera	68,0	56,0	1,0	220,0	5,0	4,0	1,0	2,0	1,0	1,0	359,0
		% de Curso	18,9%	15,6%	,3%	61,3%	1,4%	1,1%	,3%	,6%	,3%	,3%	100,0%
		% de T2ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	18,9%	15,6%	,3%	61,3%	1,4%	1,1%	,3%	,6%	,3%	,3%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral)			Sig. de Monte Carlo (unilateral)		
					Intervalo de confianza al 99%			Intervalo de confianza al 99%	
				Sig.	Límite inferior	Límite superior	Sig.	Límite inferior	Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	18,487[a]	9	,030	,008[b]	,006	,010			
Razón de verosimilitud	21,500	9	,011	,011[b]	,008	,013			
Estadístico exacto de Fisher	17,869			,007[b]	,005	,009			
Asociación lineal por lineal	7,532[c]	1	,006	,006[b]	,004	,008	,003[b]	,002	,005
N de casos válidos	359								

a. 14 casillas (70,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 205597102.

c. El estadístico tipificado es 2,744.

PROBLEMA 3

Tabla de contingencia Curso * T3ID

		T3ID																				
		cambi	T1	T1-T5	1-TSN	-TSN-	SG-T	G-T1-T	T6	-T2-TS	-TSN-C TSA	T1-C4	-TSN-(	SG-C1-C B-T5	G-T1-(	TSG-T1- TSN-C4	SG-C4-C B-TSN	-C4B-TS	SG-T(	TSG-T1- TSN-T5	T6-C3 3B-TS	Total
Curs	3º E	Recuento	38	9	3	88	32	2	4	2	2	0	6	17	1	0	1	1	2	1	1	1	211
		Frecuencia	30,6	5,9	3,5	88,7	31,7	1,2	8,2	1,2	2,4	,6	5,3	21,2	,6	,6	4,1	1,2	1,2	,6	1,8	,6	211,0
		% de Curso	18,0%	4,3%	1,4%	1,7%	15,2%	,9%	1,9%	,9%	,9%	,0%	2,8%	8,1%	,5%	,0%	,5%	,5%	,9%	,5%	,5%	,5%	0,0%
		% de T3ID	73,1%	0,0%	0,0%	8,3%	59,3%	0,0%	28,6%	0,0%	50,0%	,0%	6,7%	47,2%	100,0%	,0%	14,3%	50,0%	100,0%	0,0%	33,3%	0,0%	8,8%
		% del total	10,6%	2,5%	,8%	4,5%	8,9%	,6%	1,1%	,6%	,6%	,0%	1,7%	4,7%	,3%	,0%	,3%	,3%	,6%	,3%	,3%	,3%	8,8%
		Residuos c	2,3	2,0	-,4	-,2	,1	1,2	-2,3	1,2	-,4	-1,2	,5	-1,5	,8	-1,2	-2,4	-,3	1,2	,8	-,9	,8	
	4º E	Recuento	14	1	3	63	22	0	10	0	2	1	3	19	0	1	6	1	0	0	2	0	148
		Frecuencia	21,4	4,1	2,5	62,3	22,3	,8	5,8	,8	1,6	,4	3,7	14,8	,4	,4	2,9	,8	,8	,4	1,2	,4	148,0
		% de Curso	9,5%	,7%	2,0%	2,6%	14,9%	,0%	6,8%	,0%	1,4%	,7%	2,0%	12,8%	,0%	,7%	4,1%	,7%	,0%	,0%	1,4%	,0%	0,0%
		% de T3ID	26,9%	0,0%	0,0%	1,7%	40,7%	,0%	71,4%	,0%	50,0%	100,0%	3,3%	52,8%	,0%	00,0%	85,7%	50,0%	,0%	,0%	66,7%	,0%	1,2%
		% del total	3,9%	,3%	,8%	7,5%	6,1%	,0%	2,8%	,0%	,6%	,3%	,8%	5,3%	,0%	,3%	1,7%	,3%	,0%	,0%	,6%	,0%	1,2%
		Residuos c	-2,3	-2,0	,4	,2	-,1	-1,2	2,3	-1,2	,4	1,2	-,5	1,5	-,8	1,2	2,4	,3	-1,2	-,8	,9	-,8	
Total		Recuento	52	10	6	151	54	2	14	2	4	1	9	36	1	1	7	2	2	1	3	1	359
		Frecuencia	52,0	10,0	6,0	151,0	54,0	2,0	14,0	2,0	4,0	1,0	9,0	36,0	1,0	1,0	7,0	2,0	2,0	1,0	3,0	1,0	359,0
		% de Curso	14,5%	2,8%	1,7%	2,1%	15,0%	,6%	3,9%	,6%	1,1%	,3%	2,5%	10,0%	,3%	,3%	1,9%	,6%	,6%	,3%	,8%	,3%	0,0%
		% de T3ID	00,0%	0,0%	0,0%	0,0%	00,0%	0,0%	00,0%	0,0%	00,0%	100,0%	0,0%	00,0%	100,0%	00,0%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%
		% del total	14,5%	2,8%	1,7%	2,1%	15,0%	,6%	3,9%	,6%	1,1%	,3%	2,5%	10,0%	,3%	,3%	1,9%	,6%	,6%	,3%	,8%	,3%	0,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral)			Sig. de Monte Carlo (unilateral)		
				Sig.	Intervalo de confianza al 99%		Sig.	Intervalo de confianza al 99%	
					Límite inferior	Límite superior		Límite inferior	Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	31,984[a]	19	,031	,011[b]	,008	,014			
Razón de verosimilitud	37,116	19	,008	,016[b]	,013	,020			
Estadístico exacto de Fisher	30,687			,011[b]	,008	,014			
Asociación lineal por lineal	6,066[c]	1	,014	,015[b]	,012	,018	,008[b]	,006	,010
N de casos válidos	359								

a. 28 casillas (70,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1615198575.

c. El estadístico tipificado es 2,463.

PROBLEMA 4

Tabla de contingencia Curso * T4ID

			T4ID														Total
			lo cambios	T2	T2-TSN	T2-T5	2-TSN-T5	TSV	TSV-T2	SV-T2-TSI	T4-T1	T2-TSN-C1-C1B-TSN	T2-C4	2-TSN-C4	TSV-C6	TSV-T2-TSN-C4	
Curs	3º ES	Recuento	58	10	58	6	28	4	2	4	1	1	2	35	1	1	211
		Frecuencia esp	50,0	7,1	61,7	4,7	34,7	2,9	1,8	6,5	,6	,6	3,5	34,7	1,8	,6	211,0
		% de Curso	27,5%	4,7%	27,5%	2,8%	13,3%	1,9%	,9%	1,9%	,5%	,5%	,9%	16,6%	,5%	,5%	100,0%
		% de T4ID	68,2%	83,3%	55,2%	75,0%	47,5%	80,0%	66,7%	36,4%	100,0%	100,0%	33,3%	59,3%	33,3%	100,0%	58,8%
		% del total	16,2%	2,8%	16,2%	1,7%	7,8%	1,1%	,6%	1,1%	,3%	,3%	,6%	9,7%	,3%	,3%	58,8%
		Residuos corre	2,0	1,8	-,9	,9	-1,9	1,0	,3	-1,5	,8	,8	-1,3	,1	-,9	,8	
	4º ES	Recuento	27	2	47	2	31	1	1	7	0	0	4	24	2	0	148
		Frecuencia esp	35,0	4,9	43,3	3,3	24,3	2,1	1,2	4,5	,4	,4	2,5	24,3	1,2	,4	148,0
		% de Curso	18,2%	1,4%	31,8%	1,4%	20,9%	,7%	,7%	4,7%	,0%	,0%	2,7%	16,2%	1,4%	,0%	100,0%
		% de T4ID	31,8%	16,7%	44,8%	25,0%	52,5%	20,0%	33,3%	63,6%	,0%	,0%	66,7%	40,7%	66,7%	,0%	41,2%
		% del total	7,5%	,6%	13,1%	,6%	8,6%	,3%	,3%	1,9%	,0%	,0%	1,1%	6,7%	,6%	,0%	41,2%
		Residuos corre	-2,0	-1,8	,9	-,9	1,9	-1,0	-,3	1,5	-,8	-,8	1,3	-,1	,9	-,8	
Total		Recuento	85	12	105	8	59	5	3	11	1	1	6	59	3	1	359
		Frecuencia esp	85,0	12,0	105,0	8,0	59,0	5,0	3,0	11,0	1,0	1,0	6,0	59,0	3,0	1,0	359,0
		% de Curso	23,7%	3,3%	29,2%	2,2%	16,4%	1,4%	,8%	3,1%	,3%	,3%	1,7%	16,4%	,8%	,3%	100,0%
		% de T4ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	23,7%	3,3%	29,2%	2,2%	16,4%	1,4%	,8%	3,1%	,3%	,3%	1,7%	16,4%	,8%	,3%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	18,459[a]	13	,141	,111[b]	,103	,119			
Razón de verosimilitud	20,017	13	,095	,162[b]	,152	,171			
Estadístico exacto de Fisher	18,055			,106[b]	,098	,114			
Asociación lineal por lineal	1,594[c]	1	,207	,210[b]	,200	,221	,106[b]	,098	,114
N de casos válidos	359								

a. 18 casillas (64,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 792558341.

c. El estadístico tipificado es 1,262.

PROBLEMA 5

Tabla de contingencia Curso * T5ID

			T5ID												Total
			lo cambios	TSN	T5	TSN-T5	TSN-C1	TSN-C1-C1 B-TSN	SN-C1-TSA	TSN-C1- SA-C1B-TS	1-C1B-TSN	TSN-C4	SN-C4-C4I	TSN-C1-C1 B-TSN-T5	
Cursc	3º ESC	Recuento	55	47	1	58	0	15	3	9	3	7	0	13	211
		Frecuencia espe	49,4	52,9	1,2	58,8	,6	13,5	1,8	5,9	2,4	14,7	,6	9,4	211,0
		% de Curso	26,1%	22,3%	,5%	27,5%	,0%	7,1%	1,4%	4,3%	1,4%	3,3%	,0%	6,2%	100,0%
		% de T5ID	65,5%	52,2%	50,0%	58,0%	,0%	65,2%	100,0%	90,0%	75,0%	28,0%	,0%	81,3%	58,8%
		% del total	15,3%	13,1%	,3%	16,2%	,0%	4,2%	,8%	2,5%	,8%	1,9%	,0%	3,6%	58,8%
		Residuos correg	1,4	-1,5	-,3	-,2	-1,2	,6	1,5	2,0	,7	-3,2	-1,2	1,9	
	4º ESC	Recuento	29	43	1	42	1	8	0	1	1	18	1	3	148
		Frecuencia espe	34,6	37,1	,8	41,2	,4	9,5	1,2	4,1	1,6	10,3	,4	6,6	148,0
		% de Curso	19,6%	29,1%	,7%	28,4%	,7%	5,4%	,0%	,7%	,7%	12,2%	,7%	2,0%	100,0%
		% de T5ID	34,5%	47,8%	50,0%	42,0%	100,0%	34,8%	,0%	10,0%	25,0%	72,0%	100,0%	18,8%	41,2%
		% del total	8,1%	12,0%	,3%	11,7%	,3%	2,2%	,0%	,3%	,3%	5,0%	,3%	,8%	41,2%
		Residuos correg	-1,4	1,5	,3	,2	1,2	-,6	-1,5	-2,0	-,7	3,2	1,2	-1,9	
Total		Recuento	84	90	2	100	1	23	3	10	4	25	1	16	359
		Frecuencia espe	84,0	90,0	2,0	100,0	1,0	23,0	3,0	10,0	4,0	25,0	1,0	16,0	359,0
		% de Curso	23,4%	25,1%	,6%	27,9%	,3%	6,4%	,8%	2,8%	1,1%	7,0%	,3%	4,5%	100,0%
		% de T5ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	23,4%	25,1%	,6%	27,9%	,3%	6,4%	,8%	2,8%	1,1%	7,0%	,3%	4,5%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	26,156[a]	11	,006	,003[b]	,001	,004			
Razón de verosimilitud	29,069	11	,002	,003[b]	,002	,005			
Estadístico exacto de Fisher	25,451			,003[b]	,002	,005			
Asociación lineal por lineal	,025[c]	1	,874	,884[b]	,875	,892	,438[b]	,425	,451
N de casos válidos	359								

a. 11 casillas (45,8%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 79996689.

c. El estadístico tipificado es ,159.

PROBLEMA 6

Tabla de contingencia Curso * T6ID

			T6ID																			
			cambi	T1	T1-T5	1-TSN	-TSN-	TSG	SG-T1	G-T1-T	SG-T1-	TSG-T1- TSN-T5	G-T6-	-T2-TS	-TSN-C A-C1B-T	TSG-T1- TSN-C1- A-C1B-T	SG-T1-C C4B	T1-C4	-TSN-(	SG-T6	G-T1-(	T6	Total
Cur	3º E	Recuento	21	9	6	19	10	5	60	23	16	29	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	211
		Frecuencia	21,2	8,2	5,9	21,2	15,3	2,9	54,7	31,7	14,1	25,9	,6	1,8	,6	,6	,6	1,2	1,2	1,8	,6	1,2	211,0
		% de Curso	10,0%	4,3%	2,8%	9,0%	4,7%	2,4%	8,4%	10,9%	7,6%	13,7%	,5%	,5%	,5%	,5%	,5%	,5%	,9%	,9%	,5%	,9%	0,0%
		% de T6ID	58,3%	4,3%	0,0%	2,8%	38,5%	0,0%	4,5%	42,6%	66,7%	65,9%	00,0%	33,3%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	00,0%	6,7%	00,0%	0,0%	8,8%
		% del total	5,8%	2,5%	1,7%	5,3%	2,8%	1,4%	6,7%	6,4%	4,5%	8,1%	,3%	,3%	,3%	,3%	,3%	,3%	,6%	,6%	,3%	,6%	8,8%
		Residuos c	-,1	,4	,1	-,8	-2,2	1,9	1,3	-2,6	,8	1,0	,8	-,9	,8	,8	,8	-,3	1,2	,3	,8	1,2	
	4º E	Recuento	15	5	4	17	16	0	33	31	8	15	0	2	0	0	0	1	0	1	0	0	148
		Frecuencia	14,8	5,8	4,1	14,8	10,7	2,1	38,3	22,3	9,9	18,1	,4	1,2	,4	,4	,4	,8	,8	1,2	,4	,8	148,0
		% de Curso	10,1%	3,4%	2,7%	1,5%	10,8%	,0%	2,3%	20,9%	5,4%	10,1%	,0%	1,4%	,0%	,0%	,0%	,7%	,0%	,7%	,0%	,0%	0,0%
		% de T6ID	41,7%	5,7%	0,0%	7,2%	61,5%	,0%	5,5%	57,4%	33,3%	34,1%	,0%	66,7%	,0%	,0%	,0%	0,0%	,0%	3,3%	,0%	,0%	1,2%
		% del total	4,2%	1,4%	1,1%	4,7%	4,5%	,0%	9,2%	8,6%	2,2%	4,2%	,0%	,6%	,0%	,0%	,0%	,3%	,0%	,3%	,0%	,0%	1,2%
		Residuos c	,1	-,4	-,1	,8	2,2	-1,9	-1,3	2,6	-,8	-1,0	-,8	,9	-,8	-,8	-,8	,3	-1,2	-,3	-,8	-1,2	
Total		Recuento	36	14	10	36	26	5	93	54	24	44	1	3	1	1	1	2	2	3	1	2	359
		Frecuencia	36,0	14,0	10,0	36,0	26,0	5,0	93,0	54,0	24,0	44,0	1,0	3,0	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	3,0	1,0	2,0	359,0
		% de Curso	10,0%	3,9%	2,8%	0,0%	7,2%	1,4%	5,9%	15,0%	6,7%	12,3%	,3%	,8%	,3%	,3%	,3%	,6%	,6%	,8%	,3%	,6%	0,0%
		% de T6ID	00,0%	0,0%	0,0%	0,0%	00,0%	0,0%	0,0%	100,0%	00,0%	100,0%	00,0%	00,0%	100,0%	100,0%	100,0%	0,0%	00,0%	0,0%	00,0%	0,0%	0,0%
		% del total	10,0%	3,9%	2,8%	0,0%	7,2%	1,4%	5,9%	15,0%	6,7%	12,3%	,3%	,8%	,3%	,3%	,3%	,6%	,6%	,8%	,3%	,6%	0,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	24,551[a]	19	,176	,131[b]	,122	,139			
Razón de verosimilitud	29,443	19	,059	,123[b]	,114	,131			
Estadístico exacto de Fisher	23,491			,129[b]	,120	,137			
Asociación lineal por lineal	2,374[c]	1	,123	,129[b]	,120	,137	,068[b]	,061	,074
N de casos válidos	359								

a. 23 casillas (57,5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,41.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1634676757.

c. El estadístico tipificado es -1,541.

ANEXO H. ESTRATEGIAS INDUCTIVAS POR CENTROS

PROBLEMA 1

Tabla de contingencia Centro * T1ID

			T1ID														
			No cambios	T2	T2-TSN	T2-T5	T2-TSN-T5	TSV-T2-TSN	T2-TSN-C1	T2-TSN-C1-C1B-TSN	T2-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	T2-C1-C1B-TSN	T2-C1-TSA-C1B-TSN	T2-TSN-C4	C3-C1B-TSN-C4	TSV	Total
Centro	Granada	Recuento	10	1	48	4	46	0	0	0	0	0	0	4	0	1	114
		Frecuencia esperada	10,5	6,7	40,3	10,2	38,7	,6	,3	,3	,3	1,6	,3	2,2	,3	1,6	114,0
		% de Centro	8,8%	,9%	42,1%	3,5%	40,4%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	3,5%	,0%	,9%	100,0%
		% de T1ID	30,3%	4,8%	37,8%	12,5%	37,7%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	57,1%	,0%	20,0%	31,8%
		% del total	2,8%	,3%	13,4%	1,1%	12,8%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	1,1%	,0%	,3%	31,8%
		Residuos corregidos	-,2	-2,7	1,8	-2,5	1,7	-1,0	-,7	-,7	-,7	-1,5	-,7	1,5	-,7	-,6	
	Madrid	Recuento	14	7	38	1	23	1	1	1	0	1	0	1	1	1	90
		Frecuencia esperada	8,3	5,3	31,8	8,0	30,6	,5	,3	,3	,3	1,3	,3	1,8	,3	1,3	90,0
		% de Centro	15,6%	7,8%	42,2%	1,1%	25,6%	1,1%	1,1%	1,1%	,0%	1,1%	,0%	1,1%	1,1%	1,1%	100,0%
		% de T1ID	42,4%	33,3%	29,9%	3,1%	18,9%	50,0%	100,0%	100,0%	,0%	20,0%	,0%	14,3%	100,0%	20,0%	25,1%
		% del total	3,9%	1,9%	10,6%	,3%	6,4%	,3%	,3%	,3%	,0%	,3%	,0%	,3%	,3%	,3%	25,1%
		Residuos corregidos	2,4	,9	1,6	-3,0	-2,0	,8	1,7	1,7	-,6	-,3	-,6	-,7	1,7	-,3	
	CullarVega	Recuento	6	6	25	19	25	0	0	0	0	1	0	1	0	3	86
		Frecuencia esperada	7,9	5,0	30,4	7,7	29,2	,5	,2	,2	,2	1,2	,2	1,7	,2	1,2	86,0
		% de Centro	7,0%	7,0%	29,1%	22,1%	29,1%	,0%	,0%	,0%	,0%	1,2%	,0%	1,2%	,0%	3,5%	100,0%
		% de T1ID	18,2%	28,6%	19,7%	59,4%	20,5%	,0%	,0%	,0%	,0%	20,0%	,0%	14,3%	,0%	60,0%	24,0%
		% del total	1,7%	1,7%	7,0%	5,3%	7,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,3%	,0%	,3%	,0%	,8%	24,0%
		Residuos corregidos	-,8	,5	-1,4	4,9	-1,1	-,8	-,6	-,6	-,6	-,2	-,6	-,6	-,6	1,9	
	Teruel	Recuento	3	7	16	8	28	1	0	0	1	3	1	1	0	0	69
		Frecuencia esperada	6,3	4,0	24,4	6,2	23,4	,4	,2	,2	,2	1,0	,2	1,3	,2	1,0	69,0
		% de Centro	4,3%	10,1%	23,2%	11,6%	40,6%	1,4%	,0%	,0%	1,4%	4,3%	1,4%	1,4%	,0%	,0%	100,0%
		% de T1ID	9,1%	33,3%	12,6%	25,0%	23,0%	50,0%	,0%	,0%	100,0%	60,0%	100,0%	14,3%	,0%	,0%	19,2%
		% del total	,8%	1,9%	4,5%	2,2%	7,8%	,3%	,0%	,0%	,3%	,8%	,3%	,3%	,0%	,0%	19,2%
		Residuos corregidos	-1,5	1,7	-2,4	,9	1,3	1,1	-,5	-,5	2,1	2,3	2,1	-,3	-,5	-1,1	
Total		Recuento	33	21	127	32	122	2	1	1	1	5	1	7	1	5	359
		Frecuencia esperada	33,0	21,0	127,0	32,0	122,0	2,0	1,0	1,0	1,0	5,0	1,0	7,0	1,0	5,0	359,0
		% de Centro	9,2%	5,8%	35,4%	8,9%	34,0%	,6%	,3%	,3%	,3%	1,4%	,3%	1,9%	,3%	1,4%	100,0%
		% de T1ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	9,2%	5,8%	35,4%	8,9%	34,0%	,6%	,3%	,3%	,3%	1,4%	,3%	1,9%	,3%	1,4%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	84,425[a]	39	,000	,000[b]	,000	,000			
Razón de verosimilitud	85,019	39	,000	,000[b]	,000	,000			
Estadístico exacto de Fisher	79,137			,000[b]	,000	,000			
Asociación lineal por lineal	1,365[c]	1	,243	,245[b]	,234	,256	,118[b]	,109	,126
N de casos válidos	359								

a. 37 casillas (66,1%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 126474071.

c. El estadístico tipificado es 1,168.

PROBLEMA 2

Tabla de contingencia Centro * T2ID

			T2ID										Total
			No cambios	TSN	T5	TSN-T5	TSN-C1	TSN-C1-C1 B-TSN	C1-TSA-C1 B-TSN	TSN-C4	TSN-C4-T7- C1B-TSN	C1	
Centro	Granada	Recuento	24	16	0	74	0	0	0	0	0	0	114
		Frecuencia esperada	21,6	17,8	,3	69,9	1,6	1,3	,3	,6	,3	,3	114,0
		% de Centro	21,1%	14,0%	,0%	64,9%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		% de T2ID	35,3%	28,6%	,0%	33,6%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		% del total	6,7%	4,5%	,0%	20,6%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		Residuos corregidos	,7	-,6	-,7	1,0	-1,5	-1,4	-,7	-1,0	-,7	-,7	
	Madrid	Recuento	21	25	0	34	4	4	0	0	1	1	90
		Frecuencia esperada	17,0	14,0	,3	55,2	1,3	1,0	,3	,5	,3	,3	90,0
		% de Centro	23,3%	27,8%	,0%	37,8%	4,4%	4,4%	,0%	,0%	1,1%	1,1%	100,0%
		% de T2ID	30,9%	44,6%	,0%	15,5%	80,0%	100,0%	,0%	,0%	100,0%	100,0%	25,1%
		% del total	5,8%	7,0%	,0%	9,5%	1,1%	1,1%	,0%	,0%	,3%	,3%	25,1%
		Residuos corregidos	1,2	3,7	-,6	-5,3	2,9	3,5	-,6	-,8	1,7	1,7	
	CullarVega	Recuento	9	9	1	64	1	0	0	2	0	0	86
		Frecuencia esperada	16,3	13,4	,2	52,7	1,2	1,0	,2	,5	,2	,2	86,0
		% de Centro	10,5%	10,5%	1,2%	74,4%	1,2%	,0%	,0%	2,3%	,0%	,0%	100,0%
		% de T2ID	13,2%	16,1%	100,0%	29,1%	20,0%	,0%	,0%	100,0%	,0%	,0%	24,0%
		% del total	2,5%	2,5%	,3%	17,8%	,3%	,0%	,0%	,6%	,0%	,0%	24,0%
		Residuos corregidos	-2,3	-1,5	1,8	2,9	-,2	-1,1	-,6	2,5	-,6	-,6	
	Teruel	Recuento	14	6	0	48	0	0	1	0	0	0	69
		Frecuencia esperada	13,1	10,8	,2	42,3	1,0	,8	,2	,4	,2	,2	69,0
		% de Centro	20,3%	8,7%	,0%	69,6%	,0%	,0%	1,4%	,0%	,0%	,0%	100,0%
		% de T2ID	20,6%	10,7%	,0%	21,8%	,0%	,0%	100,0%	,0%	,0%	,0%	19,2%
		% del total	3,9%	1,7%	,0%	13,4%	,0%	,0%	,3%	,0%	,0%	,0%	19,2%
		Residuos corregidos	,3	-1,8	-,5	1,6	-1,1	-1,0	2,1	-,7	-,5	-,5	
Total		Recuento	68	56	1	220	5	4	1	2	1	1	359
		Frecuencia esperada	68,0	56,0	1,0	220,0	5,0	4,0	1,0	2,0	1,0	1,0	359,0
		% de Centro	18,9%	15,6%	,3%	61,3%	1,4%	1,1%	,3%	,6%	,3%	,3%	100,0%
		% de T2ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	18,9%	15,6%	,3%	61,3%	1,4%	1,1%	,3%	,6%	,3%	,3%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	68,622[a]	27	,000	,000[b]	,000	,000			
Razón de verosimilitud	66,404	27	,000	,000[b]	,000	,000			
Estadístico exacto de Fisher	57,070			,000[b]	,000	,000			
Asociación lineal por lineal	2,728[c]	1	,099	,103[b]	,096	,111	,054[b]	,048	,060
N de casos válidos	359								

a. 28 casillas (70,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1487459085.

c. El estadístico tipificado es 1,652.

PROBLEMA 3

Tabla de contingencia Centro * T3ID

			T3ID																				
			o cambio	T1	T1-T5	T1-TSN	1-TSN-T	TSG-T1	SG-T1-TS	T6	6-T2-TSI	1-TSN-C1 TSA	T1-C4	1-TSN-C	SG-C1-C1 B-T5	SG-T1-C	TSG-T1- TSN-C4	SG-C4-C4 B-TSN	5-C4B-TS	TSG-T6	TSG-T1- TSN-T5	T6-C3- C3B-TS	Total
Centr	Granada	Recuento	18	4	0	50	23	1	2	0	0	0	2	9	0	1	2	1	1	0	0	0	114
		Frecuencia es	16,5	3,2	1,9	47,9	17,1	,6	4,4	,6	1,3	,3	2,9	11,4	,3	,3	2,2	,6	,6	,3	1,0	,3	114,0
		% de Centro	15,8%	3,5%	,0%	43,9%	20,2%	,9%	1,8%	,0%	,0%	,0%	1,8%	7,9%	,0%	,9%	1,8%	,9%	,9%	,0%	,0%	,0%	.00,0%
		% de T3ID	34,6%	40,0%	,0%	33,1%	42,6%	50,0%	14,3%	,0%	,0%	,0%	22,2%	25,0%	,0%	100,0%	28,6%	50,0%	50,0%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		% del total	5,0%	1,1%	,0%	13,9%	6,4%	,3%	,6%	,0%	,0%	,0%	,6%	2,5%	,0%	,3%	,6%	,3%	,3%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		Residuos corr	,5	,6	-1,7	,5	1,9	,6	-1,4	-1,0	-1,4	-,7	-,6	-,9	-,7	1,5	-,2	,6	,6	-,7	-1,2	-,7	
	Madrid	Recuento	20	2	1	28	14	1	8	0	1	1	3	7	0	0	2	1	0	1	0	0	90
		Frecuencia es	13,0	2,5	1,5	37,9	13,5	,5	3,5	,5	1,0	,3	2,3	9,0	,3	,3	1,8	,5	,5	,3	,8	,3	90,0
		% de Centro	22,2%	2,2%	1,1%	31,1%	15,6%	1,1%	8,9%	,0%	1,1%	1,1%	3,3%	7,8%	,0%	,0%	2,2%	1,1%	,0%	1,1%	,0%	,0%	.00,0%
		% de T3ID	38,5%	20,0%	16,7%	18,5%	25,9%	50,0%	57,1%	,0%	25,0%	100,0%	33,3%	19,4%	,0%	,0%	28,6%	50,0%	,0%	.00,0%	,0%	,0%	25,1%
		% del total	5,6%	,6%	,3%	7,8%	3,9%	,3%	2,2%	,0%	,3%	,3%	,8%	1,9%	,0%	,0%	,6%	,3%	,0%	,3%	,0%	,0%	25,1%
		Residuos corr	2,4	-,4	-,5	-2,4	,2	,8	2,8	-,8	,0	1,7	,6	-,8	-,6	-,6	,2	,8	-,8	1,7	-1,0	-,6	
	CullarVe	Recuento	13	3	4	33	10	0	2	2	2	0	3	10	1	0	3	0	0	0	0	0	86
		Frecuencia es	12,5	2,4	1,4	36,2	12,9	,5	3,4	,5	1,0	,2	2,2	8,6	,2	,2	1,7	,5	,5	,2	,7	,2	86,0
		% de Centro	15,1%	3,5%	4,7%	38,4%	11,6%	,0%	2,3%	2,3%	2,3%	,0%	3,5%	11,6%	1,2%	,0%	3,5%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	.00,0%
		% de T3ID	25,0%	30,0%	66,7%	21,9%	18,5%	,0%	14,3%	.00,0%	50,0%	,0%	33,3%	27,8%	100,0%	,0%	42,9%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	24,0%
		% del total	3,6%	,8%	1,1%	9,2%	2,8%	,0%	,6%	,6%	,6%	,0%	,8%	2,8%	,3%	,0%	,8%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	24,0%
		Residuos corr	,2	,5	2,5	-,8	-1,0	-,8	-,9	2,5	1,2	-,6	,7	,6	1,8	-,6	1,2	-,8	-,8	-,6	-1,0	-,6	
	Teruel	Recuento	1	1	1	40	7	0	2	0	1	0	1	10	0	0	0	0	1	0	3	1	69
		Frecuencia es	10,0	1,9	1,2	29,0	10,4	,4	2,7	,4	,8	,2	1,7	6,9	,2	,2	1,3	,4	,4	,2	,6	,2	69,0
		% de Centro	1,4%	1,4%	1,4%	58,0%	10,1%	,0%	2,9%	,0%	1,4%	,0%	1,4%	14,5%	,0%	,0%	,0%	,0%	1,4%	,0%	4,3%	1,4%	.00,0%
		% de T3ID	1,9%	10,0%	16,7%	26,5%	13,0%	,0%	14,3%	,0%	25,0%	,0%	11,1%	27,8%	,0%	,0%	,0%	,0%	50,0%	,0%	100,0%	.00,0%	19,2%
		% del total	,3%	,3%	,3%	11,1%	1,9%	,0%	,6%	,0%	,3%	,0%	,3%	2,8%	,0%	,0%	,0%	,0%	,3%	,0%	,8%	,3%	19,2%
		Residuos corr	-3,4	-,8	-,2	3,0	-1,3	-,7	-,5	-,7	,3	-,5	-,6	1,4	-,5	-,5	-1,3	-,7	1,1	-,5	3,6	2,1	
Total		Recuento	52	10	6	151	54	2	14	2	4	1	9	36	1	1	7	2	2	1	3	1	359
		Frecuencia es	52,0	10,0	6,0	151,0	54,0	2,0	14,0	2,0	4,0	1,0	9,0	36,0	1,0	1,0	7,0	2,0	2,0	1,0	3,0	1,0	359,0
		% de Centro	14,5%	2,8%	1,7%	42,1%	15,0%	,6%	3,9%	,6%	1,1%	,3%	2,5%	10,0%	,3%	,3%	1,9%	,6%	,6%	,3%	,8%	,3%	.00,0%
		% de T3ID	100,0%	.00,0%	.00,0%	.00,0%	100,0%	.00,0%	100,0%	.00,0%	100,0%	100,0%	.00,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	.00,0%	100,0%	.00,0%	.00,0%
		% del total	14,5%	2,8%	1,7%	42,1%	15,0%	,6%	3,9%	,6%	1,1%	,3%	2,5%	10,0%	,3%	,3%	1,9%	,6%	,6%	,3%	,8%	,3%	.00,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	86,623[a]	57	,007	,001[b]	,000	,002			
Razón de verosimilitud	89,906	57	,004	,002[b]	,001	,003			
Estadístico exacto de Fisher	77,353			,001[b]	,000	,001			
Asociación lineal por lineal	6,222[c]	1	,013	,013[b]	,010	,016	,006[b]	,004	,008
N de casos válidos	359								

a. 64 casillas (80,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1507486128.

c. El estadístico tipificado es 2,494.

PROBLEMA 4

Tabla de contingencia Centro * T4ID

			T4ID														Total
			No cambios	T2	T2-TSN	T2-T5	T2-TSN-T5	TSV	TSV-T2	TSV-T2-TSN	T4-T1	T2-TSN-C1-C1B-TSN	T2-C4	T2-TSN-C4	TSV-C6	TSV-T2-TSN-C4	
Centro	Granada	Recuento	31	2	34	0	17	2	0	1	0	0	0	26	1	0	114
		Frecuencia esperada	27,0	3,8	33,3	2,5	18,7	1,6	1,0	3,5	,3	,3	1,9	18,7	1,0	,3	114,0
		% de Centro	27,2%	1,8%	29,8%	,0%	14,9%	1,8%	,0%	,9%	,0%	,0%	,0%	22,8%	,9%	,0%	100,0%
		% de T4ID	36,5%	16,7%	32,4%	,0%	28,8%	40,0%	,0%	9,1%	,0%	,0%	,0%	44,1%	33,3%	,0%	31,8%
		% del total	8,6%	,6%	9,5%	,0%	4,7%	,6%	,0%	,3%	,0%	,0%	,0%	7,2%	,3%	,0%	31,8%
		Residuos corregidos	1,1	-1,1	,2	-2,0	-,5	,4	-1,2	-1,6	-,7	-,7	-1,7	2,2	,1	-,7	
	Madrid	Recuento	23	6	31	0	14	0	0	1	1	0	3	10	1	0	90
		Frecuencia esperada	21,3	3,0	26,3	2,0	14,8	1,3	,8	2,8	,3	,3	1,5	14,8	,8	,3	90,0
		% de Centro	25,6%	6,7%	34,4%	,0%	15,6%	,0%	,0%	1,1%	1,1%	,0%	3,3%	11,1%	1,1%	,0%	100,0%
		% de T4ID	27,1%	50,0%	29,5%	,0%	23,7%	,0%	,0%	9,1%	100,0%	,0%	50,0%	16,9%	33,3%	,0%	25,1%
		% del total	6,4%	1,7%	8,6%	,0%	3,9%	,0%	,0%	,3%	,3%	,0%	,8%	2,8%	,3%	,0%	25,1%
		Residuos corregidos	,5	2,0	1,3	-1,7	-,3	-1,3	-1,0	-1,2	1,7	-,6	1,4	-1,6	,3	-,6	
	CullarVega	Recuento	20	3	27	7	16	3	0	1	0	0	2	6	1	0	86
		Frecuencia esperada	20,4	2,9	25,2	1,9	14,1	1,2	,7	2,6	,2	,2	1,4	14,1	,7	,2	86,0
		% de Centro	23,3%	3,5%	31,4%	8,1%	18,6%	3,5%	,0%	1,2%	,0%	,0%	2,3%	7,0%	1,2%	,0%	100,0%
		% de T4ID	23,5%	25,0%	25,7%	87,5%	27,1%	60,0%	,0%	9,1%	,0%	,0%	33,3%	10,2%	33,3%	,0%	24,0%
		% del total	5,6%	,8%	7,5%	1,9%	4,5%	,8%	,0%	,3%	,0%	,0%	,6%	1,7%	,3%	,0%	24,0%
		Residuos corregidos	-,1	,1	,5	4,3	,6	1,9	-1,0	-1,2	-,6	-,6	,5	-2,7	,4	-,6	
	Teruel	Recuento	11	1	13	1	12	0	3	8	0	1	1	17	0	1	69
		Frecuencia esperada	16,3	2,3	20,2	1,5	11,3	1,0	,6	2,1	,2	,2	1,2	11,3	,6	,2	69,0
		% de Centro	15,9%	1,4%	18,8%	1,4%	17,4%	,0%	4,3%	11,6%	,0%	1,4%	1,4%	24,6%	,0%	1,4%	100,0%
		% de T4ID	12,9%	8,3%	12,4%	12,5%	20,3%	,0%	100,0%	72,7%	,0%	100,0%	16,7%	28,8%	,0%	100,0%	19,2%
		% del total	3,1%	,3%	3,6%	,3%	3,3%	,0%	,8%	2,2%	,0%	,3%	,3%	4,7%	,0%	,3%	19,2%
		Residuos corregidos	-1,7	-1,0	-2,1	-,5	,2	-1,1	3,6	4,6	-,5	2,1	-,2	2,0	-,8	2,1	
Total		Recuento	85	12	105	8	59	5	3	11	1	1	6	59	3	1	359
		Frecuencia esperada	85,0	12,0	105,0	8,0	59,0	5,0	3,0	11,0	1,0	1,0	6,0	59,0	3,0	1,0	359,0
		% de Centro	23,7%	3,3%	29,2%	2,2%	16,4%	1,4%	,8%	3,1%	,3%	,3%	1,7%	16,4%	,8%	,3%	100,0%
		% de T4ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	23,7%	3,3%	29,2%	2,2%	16,4%	1,4%	,8%	3,1%	,3%	,3%	1,7%	16,4%	,8%	,3%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	94,917[a]	39	,000	,000[b]	,000	,000			
Razón de verosimilitud	88,302	39	,000	,000[b]	,000	,000			
Estadístico exacto de Fisher	74,420			,000[b]	,000	,000			
Asociación lineal por lineal	2,543[c]	1	,111	,116[b]	,107	,124	,061[b]	,055	,067
N de casos válidos	359								

a. 40 casillas (71,4%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1131884899.

c. El estadístico tipificado es 1,595.

PROBLEMA 5

Tabla de contingencia Centro * T5ID

			T5ID											
			No cambios	TSN	T5	TSN-T5	TSN-C1	TSN-C1-C1 B-TSN	TSN-C1-TSA	TSN-C1-TSA-C1B-TSN	C1-C1B-TSN	TSN-C4	TSN-C4-C4B	TSN-C1-C1 B-TSN-T5	Total
Centro	Granada	Recuento	25	38	0	39	0	0	0	0	0	12	0	0	114
		Frecuencia esperad	26,7	28,6	,6	31,8	,3	7,3	1,0	3,2	1,3	7,9	,3	5,1	114,0
		% de Centro	21,9%	33,3%	,0%	34,2%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	10,5%	,0%	,0%	100,0%
		% de T5ID	29,8%	42,2%	,0%	39,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	48,0%	,0%	,0%	31,8%
		% del total	7,0%	10,6%	,0%	10,9%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	3,3%	,0%	,0%	31,8%
		Residuos corregido	-,4	2,5	-1,0	1,8	-,7	-3,4	-1,2	-2,2	-1,4	1,8	-,7	-2,8	
	Madrid	Recuento	36	21	1	6	0	12	0	5	3	5	1	0	90
		Frecuencia esperad	21,1	22,6	,5	25,1	,3	5,8	,8	2,5	1,0	6,3	,3	4,0	90,0
		% de Centro	40,0%	23,3%	1,1%	6,7%	,0%	13,3%	,0%	5,6%	3,3%	5,6%	1,1%	,0%	100,0%
		% de T5ID	42,9%	23,3%	50,0%	6,0%	,0%	52,2%	,0%	50,0%	75,0%	20,0%	100,0%	,0%	25,1%
		% del total	10,0%	5,8%	,3%	1,7%	,0%	3,3%	,0%	1,4%	,8%	1,4%	,3%	,0%	25,1%
		Residuos corregido	4,3	-,4	,8	-5,2	-,6	3,1	-1,0	1,8	2,3	-,6	1,7	-2,4	
	CullarVega	Recuento	16	16	1	41	1	5	0	0	0	4	0	2	86
		Frecuencia esperad	20,1	21,6	,5	24,0	,2	5,5	,7	2,4	1,0	6,0	,2	3,8	86,0
		% de Centro	18,6%	18,6%	1,2%	47,7%	1,2%	5,8%	,0%	,0%	,0%	4,7%	,0%	2,3%	100,0%
		% de T5ID	19,0%	17,8%	50,0%	41,0%	100,0%	21,7%	,0%	,0%	,0%	16,0%	,0%	12,5%	24,0%
		% del total	4,5%	4,5%	,3%	11,4%	,3%	1,4%	,0%	,0%	,0%	1,1%	,0%	,6%	24,0%
		Residuos corregido	-1,2	-1,6	,9	4,7	1,8	-,3	-1,0	-1,8	-1,1	-1,0	-,6	-1,1	
	Teruel	Recuento	7	15	0	14	0	6	3	5	1	4	0	14	69
		Frecuencia esperad	16,1	17,3	,4	19,2	,2	4,4	,6	1,9	,8	4,8	,2	3,1	69,0
		% de Centro	10,1%	21,7%	,0%	20,3%	,0%	8,7%	4,3%	7,2%	1,4%	5,8%	,0%	20,3%	100,0%
		% de T5ID	8,3%	16,7%	,0%	14,0%	,0%	26,1%	100,0%	50,0%	25,0%	16,0%	,0%	87,5%	19,2%
		% del total	1,9%	4,2%	,0%	3,9%	,0%	1,7%	,8%	1,4%	,3%	1,1%	,0%	3,9%	19,2%
		Residuos corregido	-2,9	-,7	-,7	-1,6	-,5	,9	3,6	2,5	,3	-,4	-,5	7,1	
Total		Recuento	84	90	2	100	1	23	3	10	4	25	1	16	359
		Frecuencia esperad	84,0	90,0	2,0	100,0	1,0	23,0	3,0	10,0	4,0	25,0	1,0	16,0	359,0
		% de Centro	23,4%	25,1%	,6%	27,9%	,3%	6,4%	,8%	2,8%	1,1%	7,0%	,3%	4,5%	100,0%
		% de T5ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	23,4%	25,1%	,6%	27,9%	,3%	6,4%	,8%	2,8%	1,1%	7,0%	,3%	4,5%	100,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (bilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Sig.	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite inferior	Sig. de Monte Carlo (unilateral) Intervalo de confianza al 99% Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	158,060[a]	33	,000	,000[b]	,000	,000			
Razón de verosimilitud	160,233	33	,000	,000[b]	,000	,000			
Estadístico exacto de Fisher	139,734			,000[b]	,000	,000			
Asociación lineal por lineal	24,066[c]	1	,000	,000[b]	,000	,000	,000[b]	,000	,000
N de casos válidos	359								

a. 29 casillas (60,4%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 1122541128.

c. El estadístico tipificado es 4,906.

PROBLEMA 6

Tabla de contingencia Centro * T6ID

			T6ID																			
			o cambio	T1	T1-T5	T1-TSN	1-TSN-T	TSG	TSG-T1	SG-T1-TS	SG-T1-T	TSG-T1-TSN-T5	SG-T6-T	6-T2-TS	T1-TSN-C1-SA-C1B-TS	TSG-T1-TSN-C1-SA-C1B-TS	TSG-T1-C4 C4B	T1-C4	1-TSN-C	TSG-T6	SG-T1-C	T6	Total
Centr	Granada	Recuento	10	7	1	11	7	2	35	16	7	14	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	114
		Frecuencia esp	11,4	4,4	3,2	11,4	8,3	1,6	29,5	17,1	7,6	14,0	,3	1,0	,3	,3	,3	,6	,6	1,0	,3	,6	114,0
		% de Centro	8,8%	6,1%	,9%	9,6%	6,1%	1,8%	30,7%	14,0%	6,1%	12,3%	,9%	1,8%	,0%	,0%	,0%	,9%	,0%	,0%	,0%	,0%	.00,0%
		% de T6ID	27,8%	50,0%	10,0%	30,6%	26,9%	40,0%	37,6%	29,6%	29,2%	31,8%	100,0%	66,7%	,0%	,0%	,0%	50,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		% del total	2,8%	1,9%	,3%	3,1%	1,9%	,6%	9,7%	4,5%	1,9%	3,9%	,3%	,6%	,0%	,0%	,0%	,3%	,0%	,0%	,0%	,0%	31,8%
		Residuos corre	-,5	1,5	-1,5	-,2	-,5	,4	1,4	-,4	-,3	,0	1,5	1,3	-,7	-,7	-,7	,6	-1,0	-1,2	-,7	-1,0	
	Madrid	Recuento	21	5	1	9	5	2	23	12	3	4	0	1	0	0	0	1	1	2	0	0	90
		Frecuencia esp	9,0	3,5	2,5	9,0	6,5	1,3	23,3	13,5	6,0	11,0	,3	,8	,3	,3	,3	,5	,5	,8	,3	,5	90,0
		% de Centro	23,3%	5,6%	1,1%	10,0%	5,6%	2,2%	25,6%	13,3%	3,3%	4,4%	,0%	1,1%	,0%	,0%	,0%	1,1%	1,1%	2,2%	,0%	,0%	.00,0%
		% de T6ID	58,3%	35,7%	10,0%	25,0%	19,2%	40,0%	24,7%	22,2%	12,5%	9,1%	,0%	33,3%	,0%	,0%	,0%	50,0%	50,0%	66,7%	,0%	,0%	25,1%
		% del total	5,8%	1,4%	,3%	2,5%	1,4%	,6%	6,4%	3,3%	,8%	1,1%	,0%	,3%	,0%	,0%	,0%	,3%	,3%	,6%	,0%	,0%	25,1%
		Residuos corre	4,9	,9	-1,1	,0	-,7	,8	-,1	-,5	-1,5	-2,6	-,6	,3	-,6	-,6	-,6	,8	,8	1,7	-,6	-,8	
	CullarVe	Recuento	4	1	5	8	8	1	20	15	6	14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	86
		Frecuencia esp	8,6	3,4	2,4	8,6	6,2	1,2	22,3	12,9	5,7	10,5	,2	,7	,2	,2	,2	,5	,5	,7	,2	,5	86,0
		% de Centro	4,7%	1,2%	5,8%	9,3%	9,3%	1,2%	23,3%	17,4%	7,0%	16,3%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	1,2%	1,2%	,0%	2,3%	.00,0%
		% de T6ID	11,1%	7,1%	50,0%	22,2%	30,8%	20,0%	21,5%	27,8%	25,0%	31,8%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	50,0%	33,3%	,0%	100,0%	24,0%
		% del total	1,1%	,3%	1,4%	2,2%	2,2%	,3%	5,6%	4,2%	1,7%	3,9%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,0%	,3%	,3%	,0%	,6%	24,0%
		Residuos corre	-1,9	-1,5	2,0	-,3	,8	-,2	-,6	,7	,1	1,3	-,6	-1,0	-,6	-,6	-,6	-,8	,9	,4	-,6	2,5	
	Teruel	Recuento	1	1	3	8	6	0	15	11	8	12	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	69
		Frecuencia esp	6,9	2,7	1,9	6,9	5,0	1,0	17,9	10,4	4,6	8,5	,2	,6	,2	,2	,2	,4	,4	,6	,2	,4	69,0
		% de Centro	1,4%	1,4%	4,3%	11,6%	8,7%	,0%	21,7%	15,9%	11,6%	17,4%	,0%	,0%	1,4%	1,4%	1,4%	,0%	,0%	,0%	1,4%	,0%	.00,0%
		% de T6ID	2,8%	7,1%	30,0%	22,2%	23,1%	,0%	16,1%	20,4%	33,3%	27,3%	,0%	,0%	100,0%	100,0%	100,0%	,0%	,0%	,0%	100,0%	,0%	19,2%
		% del total	,3%	,3%	,8%	2,2%	1,7%	,0%	4,2%	3,1%	2,2%	3,3%	,0%	,0%	,3%	,3%	,3%	,0%	,0%	,0%	,3%	,0%	19,2%
		Residuos corre	-2,6	-1,2	,9	,5	,5	-1,1	-,9	,2	1,8	1,4	-,5	-,8	2,1	2,1	2,1	-,7	-,7	-,8	2,1	-,7	
Total		Recuento	36	14	10	36	26	5	93	54	24	44	1	3	1	1	1	2	2	3	1	2	359
		Frecuencia esp	36,0	14,0	10,0	36,0	26,0	5,0	93,0	54,0	24,0	44,0	1,0	3,0	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	3,0	1,0	2,0	359,0
		% de Centro	10,0%	3,9%	2,8%	10,0%	7,2%	1,4%	25,9%	15,0%	6,7%	12,3%	,3%	,8%	,3%	,3%	,3%	,6%	,6%	,8%	,3%	,6%	.00,0%
		% de T6ID	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	.00,0%
		% del total	10,0%	3,9%	2,8%	10,0%	7,2%	1,4%	25,9%	15,0%	6,7%	12,3%	,3%	,8%	,3%	,3%	,3%	,6%	,6%	,8%	,3%	,6%	.00,0%

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. de Monte Carlo (bilateral)			Sig. de Monte Carlo (unilateral)		
					Intervalo de confianza al 99%			Intervalo de confianza al 99%	
				Sig.	Límite inferior	Límite superior	Sig.	Límite inferior	Límite superior
Chi-cuadrado de Pearson	85,975[a]	57	,008	,002[b]	,001	,004			
Razón de verosimilitud	87,043	57	,006	,005[b]	,003	,006			
Estadístico exacto de Fisher	76,698			,003[b]	,001	,004			
Asociación lineal por lineal	6,738[c]	1	,009	,009[b]	,007	,012	,006[b]	,004	,008
N de casos válidos	359								

a. 54 casillas (67,5%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,19.

b. Basada en 10000 tablas muestreadas con la semilla de inicio 2110151063.

c. El estadístico tipificado es 2,596.

ANEXO I. PRODUCCIONES DE SIETE ESTUDIANTES

ESTUDIANTE 3

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

T2 - TSN - T5

50 películas al día.
Cada día 3 películas más que el anterior.

50 + 3 = 53 películas el 1.º día de observación.
53 + 3 = 56 películas el 2.º día de observación
56 + 3 = 59 películas el 3.º día de observación
59 + 3 = 62 películas el 4.º día de observación
62 + 3 = 65 películas el 5.º día de observación.

S = Se suman 3 al resultado anterior.

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:
3, 7, 13, 21,...
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

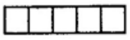
TSN - T5

31, 43, 57, 73

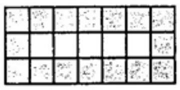
De 3 a 7 = 4
De 7 a 13 = 6
De 13 a 21 = 8
De 21 a 31 = 10
De 31 a 43 = 12
De 43 a 57 = 14
De 57 a 73 = 16

S = Cada vez se suman dos más que al anterior.

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

TSG-T1-TSN-C4

2646 baldosas grises necesitarían para rodear a 1320 baldosas blancas.

	1322	
1	1320	1
	1322	

1322 + 1322 + 1 + 1 = 2646

S: Al número de baldosas blancas hay que añadirle dos más arriba, dos más abajo y una más a cada lado.

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

T2-TSN-C4

- Si la convocatoria es autonómica: 88 partidos
- Si la convocatoria es nacional: 920 partidos.

Convocatoria autonómica: 22 + 22 = 44   44 x 2 = 88

Convocatoria nacional: 230 + 230 = 460   460 x 2 = 920

S: Se suman los equipos ya que juegan todos con todos y luego se multiplican por dos para ver los partidos.

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:
   1, 4, 7, 10,...
- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

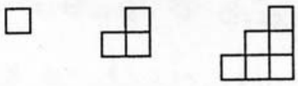
TSN-T5

234 x 3 = 702

El número que estara en el lugar 234 es el = 702.

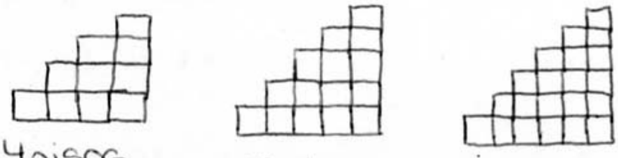
S= Usé la secuencia de 3 en 3 pues se multiplica 234 por 3 y te da el resultado.

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

TSG - T1 - TSN - T5



4 pisos   5 pisos   6 pisos

4 pisos necesitan: 36 palillos → 4 x 9 = 36

5 pisos necesitan: 56 palillos → 4 x 14 = 56

6 pisos necesitan: 80 palillos → 4 x 20 = 80

S= Se cuentan los cuadrados que tiene cada piso y se multiplican por cuatro que son los palillos que tienen cada cuadrado.

ESTUDIANTE 7

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

5 días . 3 películas = 15 películas más =

T2-TSN

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21,.31, 43, 57, 73.

- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

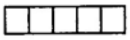
TSN-T5

~~a cad~~

entre cada número la diferencia es de dos números más

57
16
73

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

3. con 5 baldosas blancas = hay 16 baldosas grises
con 1320 baldosas = habra x grises

$x = \frac{1320 \cdot 16}{5} =$

$$\begin{array}{r} 1320 \\ \times \quad 16 \\ \hline 7920 \\ 1320 \\ \hline 21120 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 21120 & 5 \\ \hline 11 & 4224 \\ 12 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

$x = 4.220$ baldosas grises.

T1-TSN

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

autonomica = 22 equipos   21 . 2 = 42 partidos.

nacional = 230 equipos   229 . 2 = 458 partidos.

T2-TSN

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times \quad 2 \\ \hline 458 \end{array}$$

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31,

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 → 10 nomeros

31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58 ...

61

91

121

151

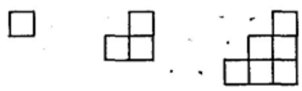
181

211, 214, 217, 220, 223, 226, 229, 232.

TSN

No esta en la tabla, en ningun lugar.

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

TSG - T1

4 pisos - 10 palillos

5 pisos - 15 palillos.

6 pisos - 21 palillos.

ESTUDIANTE 49

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

1º dia: 50
2º dia: 50+3
3º dia: 50+6
4º dia: 50+9
5º dia: 50+12
6º dia: 50+15

50·5+45 = 250+45 = $\boxed{295}$

T2-TSN-T5

alquilaron 295 peliculas en los 5 dias

si cada dia aumentan 3 peliculas cada dia serán 3 mas que el dia anterior

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:
3, 7, 13, 21,...
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

TSN-T5

3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73

he puesto esos numeros porque en los numeros que van cada se le suma 2 al numero que se le ha sumado al anterior

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:

Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

T1-TSN-T5

$$\frac{16}{5} = \frac{x}{1320}$$

$$\boxed{x = \frac{16 \cdot 1320}{5} = \frac{21120}{5} = \cancel{5\ldots}}\ 4224$$

~~[illegible] 1320 baldosas~~ se necesitarán 4224

si ~~[illegible]~~ por 5 baldosas blancas se necesita 16 grises para para 1320 blancas se necesitarán x

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

TSV-T2

~~en~~ en la autonómica se jugarán 42 partidos cada equipo
Y en la nacional se jugarán 458 partidos cada equipo

en la autonómica cada equipo tiene que jugar ~~[illegible]~~ ~~[illegible] 21~~ con los 21 equipos restantes 2 veces
Y en la nacional cada equipo tiene que jugar con los 229 equipos restantes 2 veces,

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

~~234·3+10=712~~

~~El número ...~~

234·3=702

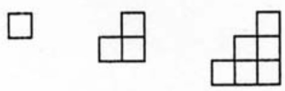
El número es 702

si la diferencia de cada número es 3 pues se ~~...~~ multiplica las diferencia 234 ~~...~~ y te sale el número

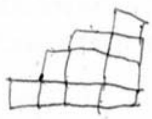
TSN-T5

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.

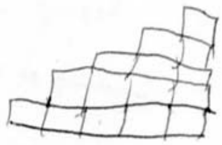
TSG-T1



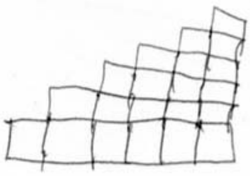
- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.



se necesitaran 28 palillos para las escaleras de 4 pisos



se necesitaran 40 palillos para las escaleras de 5 pisos



se necesitaran 54 palillos para las escaleras de 6 pisos

ESTUDIANTE 119

1. Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

T2-TSN-T5

50 = dia

1 mes = 30 dias

$$\begin{array}{r} 50 \\ +\ 3 \\ \hline 53 \\ \times\ 5 \\ \hline 265 \end{array}$$

Alquila 265 en los 5 dias siguientes

Porque en los 5 dia cincos siguiente deben de anquilas 50 anquila 53

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:
   3, 7, 13, 21,...
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

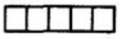
TSN-T5

4+ 6+ 8+ 10+ 12+ 14+ 16+

3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73

La progresión es suman a lo que sumes 2, es decir al primer numero de la serie es 3 se le suma 4 y toda 7 luego al ~~cuarto~~ 4 solo suma 2 y te da 6 y esto solo sumas al ~~sexto~~ 2 y así progresivamente.

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

T1-TSN-T5

1320
x2
2640
+ 6
2646

2646 baldosas grises para rodearlas

Pues si 1320 baldosas blancas estan en fila pongo debajo y ~~atras~~ arriba de las baldosas blancas 1320 baldosas grises y para terminar con las tres filas le ~~pongo~~ pongo 3 en cada lado para rodearlas

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.

- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

T2-TSN-T5

21
x2
42

229
x2
458

Autonomica jugaran = 42 partidos
Nacional jugaran = 458 partidos

Si hay 22 230 equipos pues ~~...~~ quito a mi equipo porque no voy a jugar contra mi y quedan 21 y 229 estos dos numeros los multiplico por ~~...~~ los 2 partidos que voy a jugar y todos los partidos que juego.

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

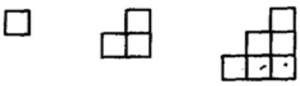
TSN-C4

~~(234·4)~~-2

234 · 3 = ~~70~~ 702 - 2 = 700

Porque cada numero multiplicado en el lugar donde esta por 3 y al resultado les restas 2 y toda el numero que esta en ese lugar

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

T1-TSN-T5

4 pisos = 4 x 10 = 40

5 pisos = 5 x 15 = 75

6 piso = 6 x 21 = 126

Pues si quieres saber lo que ~~[illegible]~~ te da la ~~[illegible]~~ 5 escaleras debes sumar todos los numeros menores de 5 y el mismo tambien, es decir, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 y estos son los bloques de 4 palillos que te da, si multiplicas 15 por 4 te da todos los palillos utilizados.

ESTUDIANTE 325

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

Si cada dia alquilan 50 peliculas, el primer dia alquilaran 53 y cada día tres más.

50, 53, 56, 59, 62

Es una progresión aritmetica

$$\text{pa.}\begin{cases} a_1 = 50 \\ d = 3 \end{cases}$$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$a_n = 50 + (3n - 3)$

$a_n = 47 + 3n.$

$a_5 = 47 + (3\cdot 5)$

$a_5 = 47 + 15$

$a_5 = 62.$

T2 - C1 - TS1 - C1b - TSN

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21,...
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

$$\cancel{\text{p.a.}\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = (n+2 \end{cases}}$$

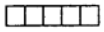
Cada vez suma 2 más que en el anterior.

$$\underbrace{3,\ 7}_{+4},\ \underbrace{7,\ 13}_{+6},\ \underbrace{13,\ 21}_{+8},\ \underbrace{21,\ 31}_{+10},\ \underbrace{31,\ 43}_{+12},\ \underbrace{43,\ 57}_{+14},\ \underbrace{57,\ 73}_{+16},\ \underbrace{73,\ 91}_{+18}$$

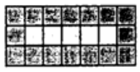
En el primero suma 4, en el segundo 6, en el tercero 8 y así sucesivam

TSN - T5

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

Pondríamos las baldosas blancas en línea(1320) y 1320 grises arriba y otros 1320 abajo y 3 a cada lado.

x = 1320 blancas → grises 2x+6

2·1320 +6 =2640+6 = 2646 baldosas grises

T6 - C3 - C1B - TSN

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

Si hay 22 equipos ~~__~~ cada equipo tendría que jugar contra los 21 restantes por lo tanto multiplicaríamos 22 por 21 ~~(__)~~ para saber cuantos partidos hay y como juegan 2 partidos lo que nos de por 2.
De la misma manera para la fase nacional 230 x 229

Autonomica

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 21 \\ \hline 22 \\ 44 \\ \hline 462 \end{array}$$

462 x 2(partidos)=924

Nacional

$$\begin{array}{r} 230 \\ \times 229 \\ \hline 2070 \\ 460 \\ 460 \\ \hline 52670 \end{array}$$

TSV - T2. - TSN

52.670 x 2 =105340

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

Vamos sumando de 3 en tres y con el término general podemos sacar cualquier número.

$$p.a. \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_n = 1+3n-3.$$

$$a_n = -2+3n.$$

$$a_{234} = -2 + 3\cdot 234$$

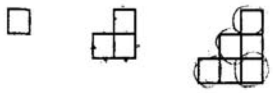
$$a_{234} = -2 + 702$$

$$a_{234} = 700$$

$$\begin{array}{r} 234 \\ \cdot 3 \\ \hline 702 \end{array}$$

TSN- C1- TSA- C1B-TSN

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

Es lo mismo que en el segundo problema, en el primero sumamos 6 palillos, y en el 2º, 8 y cada vez 2 más que en el anterior.

1piso → 4
2pisos → 10
3pisos → 18
4pisos → 28
5pisos → 40
6 pisos → 54.

$$\underbrace{4 \;,\; 10}_{+6} \;,\; \underbrace{10 \;,\; 18}_{+8} \;,\; \underbrace{18 \;,\; 28}_{+10} \;,\; \underbrace{28 \;,\; 40}_{+12} \;,\; \underbrace{40 \;\; 54}_{+14}$$

TSG- T1- TSN-T5

ESTUDIANTE 349

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.

- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

1día — 50 películas.

+1día — +3 películas

T2 - C1 - C1B - TSN

$a_n = 50 + 3n$

$a_5 = 50 + (3 \cdot 5)$

$a_5 = 50 + 15$

$a_5 = 65$ películas

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21,...

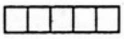
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73.

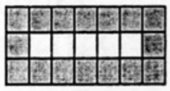
TSN

+4, +6, +8, +10..

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:

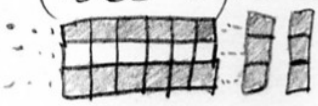


Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

$(1320 \cdot 2) + 3 + 3 = 2640 + 6 = 2646$ baldosas blancas.



TSG-T1-TSN

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

Autonómica:
22 equipos − 1 que juega = 21 equipos.
21 · 2 partidos = 42 partidos.

Nacional.
230 − 1 = 229
229 · 2 = 458 partidos.

T2-TSN

5. Se tiene la siguiente secuencia de números:

1, 4, 7, 10,...

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

progresión aritmética; d → 3

$a_n = 1 \cdot (n-1)+3$

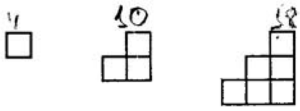
$a_{234} = 1 \cdot (234-1)+3$

$a_{234} = 1 \cdot 233+3$

a_{234} 236

TSN-C1- C1B-TSN

6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

+6, +8, +10. . .

$a_4 = 18+10$ $a_5 = 28+12$ $a_6 = 40+14$ T1-TSN

$a_4 = 28$ $a_5 = 40$ $a_6 = 54.$

ESTUDIANTE 356

1.Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.
- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en el que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

50, 53, 56, 59, 62, 65

65 peliculas

porque cada día se van sumando tres al anterior, y haciendo la progresion aritmetica sale el termino quinto

T2 - T5

2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21,...

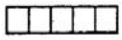
- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

31, 43, 57, 73

TSN-T5

Porque se van sumando los pares.

3. Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?
- Justifica tu respuesta.

2646 baldosas grises

Porqueson el doble de las blancas más seis de los otros lados

T1- C4

4. Se está organizando la primera ronda de un torneo. Cada equipo tiene que jugar con cada uno de los equipos restantes dos partidos – uno en casa y otro fuera-. Si la convocatoria es autonómica, participarán 22 equipos. Si la convocatoria es nacional, habrá 230 equipos.
- Calcula el número de partidos que se jugarán en la primera ronda de ese torneo si la convocatoria es autonómica y cuántos se jugarán si la convocatoria es nacional.
- Justifica tu respuesta.

autonomica → 924 partidos

nacional → 105.540 partidos

Son los que juegan unos contra otros, multiplicados por dos.

T2 - C4