Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático

MÉTODOS TOPOLÓGICOS Y VARIACIONALES EN EL ESTUDIO DE PROBLEMAS DE CONTORNO RESONANTES CON NO LINEALIDADES PERIÓDICAS

TESIS DOCTORAL

Francisco Roca Rodríguez

Granada, 1.998

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. Antonio Cañada Villar, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Francisco Roca Rodríguez el día 8 de octubre de 1.998, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Jean Mawhin (Presidente), D. Pavel Drábek, D. Jaume Llibre Saló, D. Juan José Nieto Roig (Vocales) y D. Salvador Villegas Barranco (Secretario). Obtuvo la calificación de Sobresaliente *"cum laude"* por unanimidad.

A mis padres,
a mi mujer
y a mi hija.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Fijó su mirada en una lámpara de aceite, obra de Benvenuto Cellini, cuyas velas acababan de ser encendidas; ésta se bamboleaba en la catedral de Pisa, él se tomó el pulso y comprobó que, independientemente de la amplitud, la lámpara "oscilaba con la misma frecuencia, o con una diferencia casi imperceptible". Era alrededor de 1583, cuando Galileo Galilei descubría la propiedad denominada isocronismo de las pequeñas oscilaciones del péndulo. "El padre de la física moderna", como lo denominó Einstein ([39]), no se equivocaba al afirmarlo, pues aunque el isocronismo no es una propiedad de las soluciones de la ecuación del péndulo de longitud l

$$u''(x) + \frac{g}{l}\operatorname{sen}(u(x)) = 0,$$

sí lo es de las de la ecuación linealizada

$$u''(x) + \frac{g}{l}u(x) = 0,$$

la cual aproxima a la anterior para oscilaciones pequeñas. También fue él quien afirmó que el período de oscilación no depende de la masa que cuelga del hilo, sino de la raíz cuadrada de la longitud del mismo.

Hemos de señalar que, desde los tiempos de Galileo, la ecuación del péndulo es una de las más importantes en el campo de las Ecuaciones Diferenciales y que ha tenido una influencia significativa en el desarrollo de muchos métodos del Análisis clásico y del Análisis no Lineal (véase [56], [59]). Precisamente uno de los problemas usuales en Análisis no Lineal es la descripción del rango de operadores, que surgen frecuentemente en las aplicaciones prácticas. Dados X e Y, espacios de Banach reales, $M : dom(M) \to Y$ un operador lineal ($dom(M)$, el dominio de M, es un subespacio vectorial de X) y $N : X \to Y$ un operador no lineal, el problema consiste en dar una descripción, tan precisa como sea posible, del conjunto $Im(M - N)$, el rango o imagen del operador $M - N$ (véase [1], [15], [17], [25], [40], [53], [55]).

Es claro que no se puede precisar una respuesta con un planteamiento tan general. Generalmente, el interés se centra en tipos especiales de operadores M y N que tienen una gran significación en las aplicaciones. Desde este punto de vista, surgen numerosos problemas donde el operador M es de la forma $M = L - \lambda_n I$ siendo L un operador diferencial con inverso compacto (en subconjuntos acotados de Y), λ_n un valor propio de L, I la aplicación identidad y N un operador acotado y continuo. En Análisis no Lineal, tal tipo de problemas suelen denominarse **problemas en resonancia**.

Los ejemplos de problemas que responden a la formulación anterior y que surgen en las diversas aplicaciones de la Matemática son muy numerosos (véase [15], [18], [38], [42], [43], [45], [58]), y el efecto de la resonancia se relaciona con diversos hechos bastante conocidos, a saber, desde la caida del puente de Tacoma Narrows en 1940 ([85]), pasando por el desplome, en 1959 y 1960, de dos de los primeros aviones comerciales con propulsión a chorro ([78]), la ruptura de vasos de vidrio por cantantes de ópera ([89]), la sintonización de una emisora en un receptor (resonancia eléctrica) ([13]), hasta el derrumbamiento de las murallas de Jericó por los gritos del pueblo (Josué 6:20), la sonoridad de los instrumentos musicales e incluso la armonía de los acordes (por ejemplo Do-Mi-Sol).

Galileo, según narra su biógrafo y protegido Viviani, en los últimos años de su vida, expuso su idea para adaptar el péndulo "a relojes de pared con mecanismo de ruedas con el fin de ayudar al navegante a determinar la longitud", uno de los dilemas científicos más importante de la época (ver [82]). Su hijo Vincenzo, realizó una maqueta a partir de los dibujos de Galileo, pero fué Christian Huygens, heredero intelectual de Galileo y primer gran especialista en 'horología', quien lo construyó en 1656 ([82]).

Precisamente, el movimiento del péndulo del reloj se puede modelar por la ecuación diferencial

$$-u''(x) - \alpha u'(x) - \beta u(x) + g(u(x)) = h(x). \tag{0.1}$$

donde α es una pequeña constante de amortiguación, β una constante determinada por la gravedad y por la longitud del péndulo, u el desplazamiento angular, g el momento de la rueda dentada aplicado una vez por ciclo por el mecanismo de escape del péndulo (g, en general, es una función periódica y no lineal) y h una fuerza externa. Esta ecuación, cuando $\alpha = 0$, es la que vamos a considerar en el presente trabajo (y su correspondiente versión en Ecuaciones en Derivadas Parciales). Es un modelo razonablemente válido, para la situación mencionada, si el rozamiento es pequeño (ver [45]).

La ecuación (0.1) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden, y se pueden considerar diferentes problemas de contorno asociados. Uno de los más interesantes es el que impone condiciones de contorno de tipo Dirichlet en la frontera de algún intervalo, digamos $[0,\pi]$. Ello origina el problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \beta u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.2)$$

donde, $\beta \in \mathbb{R}$, g es una función continua real, T-periódica y h es una función continua en el intervalo $[0,\pi]$.

Uno de los objetivos prioritarios es, dados el parámetro β y la función periódica g, describir, de manera tan precisa como sea posible, el conjunto de fuerzas externas h para las que el problema anterior tiene solución. En este caso, conviene también estudiar la posible multiplicidad de soluciones, sugerida por el carácter oscilante de la función g.

Un caso especialmente interesante es aquél en el que β pertenece al conjunto $\{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. De hecho, puede demostrarse elementalmente que si β no pertenece al conjunto previo, entonces, para cualquier $h : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, continua, (0.2) tiene, al menos, una solución. La demostración es una aplicación elemental del método de la función de Green y del Teorema del punto fijo de Schauder. Precisamente, n^2 son los valores propios del problema de valores propios

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \lambda u(x) & = & 0, \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.3)$$

En esta tesis, que tuvo su origen en una serie de sesiones de trabajo mantenidas con el director de la misma, Dr. Cañada, a finales de 1.994, presentamos diferentes resultados novedosos para el caso $\beta = 1$. Además, adoptamos tanto el punto de vista topológico como el variacional, mostrándose claramente cómo se enriquecen los resultados cuando se usan ambos. También abordamos algunas de las cuestiones para el correspondiente problema en E.D.P., aunque los resultados obtenidos en este caso no son tan precisos como en el caso ordinario.

De manera más concreta, en el Capítulo 1 tratamos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.4)$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica la hipótesis

[P] $\quad g \in C_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tiene valor medio cero $\left(\int_0^T g(s)\,ds = 0\right)$,

siendo $C_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones reales, de variable real, continuas y T-periódicas, y $h \in C([0,\pi],\mathbb{R}) \equiv C[0,\pi]$.

Notemos que el tipo de no linealidades que verifican la hipótesis [P] surge frecuentemente en el estudio de fenómenos naturales ([54], [56], [59]).

El primer valor propio del problema de valores propios (0.3) es el número real 1, así que estamos considerando un problema resonante con no linealidad acotada, el cual no satisface las condiciones ya clásicas de Landesman-Lazer ([49]).

Si consideramos la función propia $\operatorname{sen}(x)$, asociada a $\lambda = 1$, entonces cada $h \in C[0,\pi]$ lo podemos descomponer de forma única como

$$h(x) = a \operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x),$$

con $\tilde{h}(x) \in \tilde{C}[0,\pi]$, donde

$$\tilde{C}[0,\pi] = \left\{ h \in C[0,\pi] : \int_0^\pi h(x) \operatorname{sen} x \, dx = 0 \right\}.$$

Por lo tanto, el problema de contorno (0.4) puede ser escrito de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & a \operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.5)$$

Esta idea, junto con el uso del Método Alternativa (o Reducción de Liapunov-Schmidt), sub y super soluciones y técnicas topológicas y variacionales, nos permiten describir el problema de la existencia de solución de (0.5) como sigue:

$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]$, existen dos números reales $a_1(\tilde{h}) \leq 0 \leq a_2(\tilde{h})$, tales que (0.5) tiene solución si, y sólo si, $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ (ver [2], [4], [5], [18], [81], [87]). Más aún, usando teoría de bifurcación, ha sido demostrado en [74] que para $a = 0$, (0.5) tiene infinitas soluciones (ver además [33] para el caso particular $g(u) = k\,\mathrm{sen}(u)$).

De los anteriores resultados conocidos, surgen obviamente algunas cuestiones, tales como:

(Q1): ¿Puede el intervalo $[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ reducirse al punto cero, para algún $\tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]$ y alguna no linealidad no trivial g?.

(Q2): ¿Qué podemos decir de la multiplicidad de solución de (0.5) para $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})] \setminus \{0\}$?.

Respecto a la pregunta (Q1), probamos en el primer capítulo (en la Sección 2 para el caso particular en que la no linealidad es de clase C^1, y su derivada satisface ciertas restricciones relacionadas con los dos primeros valores propios de (0.3), y en la Sección 3, para el caso general), un resultado definitivo: Dado $\tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]$, el intervalo $[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ se reduce al punto cero si, y sólo si, $g \equiv 0$. Concretamente demostramos que si g satisface [P] y g no es la función constantemente cero, entonces

$$a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h}), \quad \forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]. \tag{0.6}$$

Es interesante mencionar que aún no ha sido demostrado, al menos que sepamos nosotros, un resultado similar para el problema de contorno con condiciones de frontera tipo Neumann o periódicas (ver [37], [47], [48], [54], [56], [55], [60], [64], [84]).

En relación con las pregunta (Q2), ha sido demostrado en [81] que si $a \in (a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})) \setminus \{0\}$, entonces (0.5) tiene al menos dos soluciones, y se conjeturó, en este mismo artículo, basándose en opiniones previas de Dancer, que el número de soluciones de (0.5) tiende a infinito cuando a tiende a cero. En este sentido demostramos que si g verifica [P] y no es la función constante cero, entonces, para cada $\tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ y para cada número natural dado n, existe un real positivo ε_n, tal que (0.5) tiene al menos n soluciones si $0 < |a| \leq \varepsilon_n$.

Probaremos además, en la Sección 4 que, en muchas situaciones, (0.5) tiene, para $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})] \setminus \{0\}$, un número finito de soluciones, con lo que el resultado de multiplicidad mencionado es óptimo en algún sentido.

Además probamos la continuidad de las funciones $a_1(\tilde{h})$ y $a_2(\tilde{h})$, con respecto a $\tilde{h}$ cuando la norma uniforme se considera en $\tilde{C}[0, \pi]$, y damos una nueva demostración del hecho de que para $a = 0$, el problema (0.5) tiene infinitas soluciones.

Nuestros principales resultado de este Capítulo 1 están basados en un interesante lema, relativo a la existencia de algunos subconjuntos conexos del conjunto de soluciones de la ecuación auxiliar del Método Alternativa (véase [2], [33], [69]), junto a un detallado estudio del comportamiento oscilatorio de ciertas integrales asociadas a la ecuación de bifurcación, cuya idea previa se puede ver en [16] y [74].

En el Capítulo 2, adoptamos el punto de vista variacional. Si consideramos el problema lineal correspondiente a (0.4), esto es, el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) & = & h(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (0.7)$$

donde $h \in C[0, \pi]$, el Teorema de la Alternativa de Fredholm ([28]) demuestra que (0.7) tiene solución si, y sólo si,

$$\int_0^\pi h(x)\operatorname{sen}(x)dx = 0. \tag{0.8}$$

Desde el punto de vista variacional, lo que ocurre es que si h satisface (0.8) (condición sobre h que se supondrá en todo el Capítulo 2), entonces el funcional $\Phi_0 : H_0^1(0, \pi) \to \mathbb{R}$, definido como

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(x)|^2 dx - \int_0^\pi h(x)u(x)dx, \tag{0.9}$$

tiene mínimo global (donde $H_0^1(0, \pi)$ es el espacio de Sobolev usual). Supongamos ahora el problema (0.4) con $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y h satisfaciendo (0.8). Entonces podemos asociar al problema (0.4) el funcional $\Phi_G : H_0^1(0, \pi) \to \mathbb{R}$, definido

$$\begin{aligned}\Phi_G(u) = {} & \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(x)|^2 dx - \int_0^\pi h(x)u(x)dx + \\ & + \int_0^\pi G(u(x))dx,\end{aligned} \tag{0.10}$$

donde $G'(u) = g(u), \forall u \in \mathbb{R}$. Sabemos (véase [3], [61], [70]) que $\Phi_G \in C^1(H_0^1(0, \pi), \mathbb{R})$ y $u \in H_0^1(0, \pi)$ es solución débil de (0.4) si, y solamente si, $\Phi_G'(u) = 0$. Este funcional no tiene necesariamente mínimo, aunque g y G sean pequeñas ([10]). Sin embargo, desde el punto de vista de las aplicaciones (especialmente en Física), es importante establecer condiciones que impliquen la existencia de mínimo global.

En el Capítulo 2 presentamos una clase de perturbaciones no lineales g bajo las cuales la propiedad de existencia de mínimo global para Φ_G se mantiene. Nuestras hipótesis están motivadas por el caso en que la no linealidad g satisface la condición [P] (ver [16], [87]), aunque son más generales, y requieren que g, G (alguna primitiva de g) y H (alguna primitiva de G), estén acotadas. Además suponemos un comportamiento adecuado de H en infinito. Este comportamiento será principalmente de dos tipos diferentes: H decreciente o con una oscilación apropiada (ver hipótesis (H3) del Capítulo 2). Estas suposiciones no garantizan, en general, que Φ_G sea coercivo, ni la condición de compacidad del tipo Palais-Smale, pero demostraremos que siempre existen sucesiones minimizantes acotadas.

Recalquemos que obtenemos la existencia de mínimo global usando condiciones sobre la segunda primitiva de g, lo cual constituye una de las principales novedades de este segundo capítulo. También presentamos diferentes ejemplos para hacer más claro el resultado general. Estos incluyen algunos casos donde g es una combinación conveniente de funciones periódicas y otros en los que (0.4) es fuertemente resonante en infinito ([11], [51], [81]).

En la Nota 2.10 presentamos un contraejemplo para demostrar que no es posible demostrar un resultado análogo para el caso de condiciones en la frontera tipo Neumann (o periódicas).

La Sección 3 del Capítulo 2 está dedicada a analizar algunas propiedades cualitativas de los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{ u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi_G(u) = \min\nolimits_{H_0^1(0,\pi)} \Phi_G \right\}, \\ B &= \left\{ u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi_G'(u) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Demostramos que si g es no trivial, y bajo las hipótesis de la Sección 2, es posible que el conjunto B tenga un número finito de elementos (a diferencia del Capítulo 1). También mostramos que dicho número puede ser infinito. Además demostramos que puede darse el caso en que A sea finito y B infinito. Este último resultado es nuevo incluso para el caso en que g satisface la condición [P].

Para demostrar estos resultados, la idea básica es estudiar la restricción del funcional Φ_G a subconjuntos apropiados de $H_0^1(0,\pi)$: aquellos donde la proyección sobre el subespacio generado por la función sen$(\cdot)$ es fija. La restricción de Φ_G a estos subespacios es coercivo. Usando esta idea, en combinación con el Método de los Multiplicadores de Lagrange, es posible dar una demostración variacional de los resultados presentados en el Capítulo 1 y también, obtener algunas extensiones a ecuaciones en derivadas parciales (como veremos en el Capítulo 3). Más aún, podemos estudiar problemas donde h no satisface necesariamente la condición (0.8).

En el Capítulo 3, extendemos algunos de los resultados del Capítulo 1, utilizando técnicas del Capítulo 2, al caso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Más concretamente, consideramos el problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) &= h(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{0.12}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y regular, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ (el operador laplaciano) en $H_0^1(\Omega)$ (espacio de Sobolev usual), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica

$$[\mathbf{P}] \qquad g \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \int_0^T g(s)ds = 0$$

y $h \in C(\overline{\Omega})$.

Como sucede con (0.4), el problema (0.12) es un problema resonante en el valor propio principal con no linealidad periódica. Por lo tanto, la condición clásica de Landesman-Lazer, que garantiza la existencia de solución para gran cantidad de problemas de valores en la frontera no lineales (ver [38], [42], [49]), no se verifica. El caso de E.D.P., bajo la hipótesis [P], ha sido poco tratado en la literatura matemática sobre el tema (véanse [29], [30], [32], [33], [51], [75], [76], [77], [81]) y, según nuestros conocimientos, gran cantidad de cuestiones básicas permanecen sin respuesta en la actualidadad. Por ejemplo, la descripción de las funciones h para las cuales (0.12) tiene solución. En el tercer capítulo vamos a mostrar algunos avances novedosos en esta dirección.

Si denotamos por $\phi_1(x)$ a la función propia correspondiente a λ_1, normalizada en el sentido $\int_\Omega |\nabla\phi_1(x)|^2 dx = 1$, entonces toda función $h \in C(\overline{\Omega})$ se puede descomponer (de manera única) como $h(x) = a\phi_1(x) + \tilde{h}(x)$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\tilde{h}$ verificando $\int_\Omega \tilde{h}(x)\phi_1(x)dx = 0$.

Es conocido ([81]) que para cada $\tilde{h}$ dado, existen números reales $a_1(\tilde{h})$, $a_2(\tilde{h})$, con $a_1(\tilde{h}) \leq 0 \leq a_2(\tilde{h})$ tales que (0.12) tiene solución si, y sólo si, $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$. Nos podemos preguntar, igual que en el Capítulo 1:

(Q3): ¿Puede el intervalo $[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ reducirse al punto cero, para algún $\tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ y alguna no linealidad no trivial g?.

En el Capítulo 3, usando el punto de vista variacional junto con los Multiplicadores de Lagrange, presentamos un nuevo resultado general sobre la existencia de solución de (0.12), que permite probar que el intervalo es no degenerado en distintas situaciones, a saber: para dominios generales, donde el funcional energía tiene la geometría del Teorema del Punto de Silla de Rabinowitz ([71]); otros casos, con condiciones adicionales sobre $g(0)$ y $g'(0)$; y problemas como (0.12) donde el dominio Ω es de una clase concreta (acotado convexo en dimensión dos, o clases especiales de dominios anulares en dimensión mayor o igual a dos).

A pesar de los resultados obtenidos en esta Tesis, quedan numerosos interrogantes por resolver en torno a problemas no lineales en resonancia con no linealidades periódicas. Algunos de ellos los exponemos en las Notas Finales.

Algunos de los resultados mostrados en esta Tesis Doctoral han sido publicados o aceptados para su publicación en revistas internacionales, y otros expuestos en distintos congresos nacionales e internacionales ([19], [20], [21], [22] y [73]).

AGRADECIMIENTOS.

No puedo concluir esta introducción sin mostrar mi más sincero agradecimiento a "mi padre, matemáticamente hablando" (y con eso lo digo todo), el profesor Antonio Cañada Villar, catedrático de Análisis Matemático y director de esta Tesis Doctoral. Me ha guiado sabiamente hacia la resolución de las diversas cuestiones aquí desarrolladas; pero lo más importante: ha modelado en mí un *estilo de vida*, profesional y humanamente hablando.

Extender dicho agradecimiento a los miembros del seminario que sobre Análisis no lineal y Ecuaciones Diferenciales se celebra habitualmente en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada. Con ellos he tenido el gusto de debatir los avances logrados, lo que ha producido un enriquecimiento de mi trabajo.

Dar las gracias (děkuji) al profesor Pavel Drabek (University of West Bohemia, Pilsen, República Checa), por las intensas e interesantes sesiones de trabajo, y a sus colaboradores, en especial Petr Girg, por la hospitalidad que me brindaron durante mi estancia en la República Checa.

Agradecer al profesor Jean Mawhin (Université Catholique de Louvain, Bélgica) el seguimiento e interés mostrado, desde el comienzo, por todos los resultados que ahora aparecen aquí compilados.

Al profesor Antonio Ambrosetti (Scuola Normale Superiore de Pisa, Italia), quiero darle las gracias por la sugerencia del empleo del Método de los Multiplicadores de Lagrange, utilizado en los Capítulos 2 y 3.

Al profesor Charles Stuart (École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suiza), por su amable invitación a hablar en su Centro de estos temas y con quien tuve la oportunidad de debatir acerca de algunos resultados de tipo variacional.

A Antonio J. Ureña por sugerirnos la función (2.20), que nos ha servido para la construcción del contraejemplo de la Nota 2.10.

Por otra parte, dar las gracias a todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, al cual siempre he denominado "mi departamento" (ellos lo han hecho posible con su afectuosa acogida). Y aunque no pueda poner a todos no sería justo omitir a Jerónimo Alaminos y a José Luis Gámez, quienes me han resuelto todo tipo de dudas surgidas con el procesador LaTeX.

También agradezco a todos los compañeros del Departamento de Matemáticas de la recién nacida Universidad de Jaén, al cual pertenezco en la actualidad, por haberse interesado en todo momento por mi carrera personal y profesional.

Gracias a los profesores Salvador Villegas, Aurelio Montero y José Carmona por dedicar parte de su tiempo a leerse esta Tesis antes de su impresión definitiva.

Mostrar tambien mi gratitud a la DGICYT dependiente del Ministerio de Educación y Ciencia por la Beca Predoctoral que me concedió (FP93 24256838) y por haber financiado los Proyectos de Investigación (PB92-0941 y PB95-1190). También a la Junta de Andalucía por subvencionar al Grupo de Investigación FQM 116, al que pertenezco, y a la

Comunidad Económica Europea por subvencionar el Proyecto Europeo (Human Capital and Mobility program) ERBCHRXCT 940494.

En otro orden de cosas, doy las gracias a mi abuelo matemático, Antonio Rodríguez (Q.E.P.D.), al que le hubiera gustado ver desde aquí este trabajo, a mi tío Antonio Roca, Doctor en Ciencias, y a mi padrino Eduardo Roca, Catedrático de Derecho, pues siempre me han animado y he visto en ellos un ejemplo a seguir y una meta a alcanzar.

Por último, aunque en primer lugar, a mis padres, pues este trabajo es corona de muchos de sus esfuerzos, y ya comienzan a recoger los frutos de lo que durante tantos años han cosechado. Gracias por haberme llevado de la mano durante el tiempo necesario, y por haberme soltado en el momento justo.

A mi hija Lorena, le doy las gracias porque muchas veces me ha hecho "perder el tiempo", y me ha dejado abierto un nuevo problema: ¿Cuál es el tiempo realmente perdido?.

Y como no, a Lorena mi amada esposa. Por su ayuda, apoyo, paciencia, oración, aguante, sacrificio, cariño, ..., y porque mientras yo me he dedicado a esto, ella ha metido su hombro sustituyendo el mío con creces.

Y como católico que soy, doy gracias a Dios por haber puesto en mi camino a todos los anteriormente citados, y a aquellos que quedan en el tintero...

Capítulo 1

Método Alternativa (Reducción de Liapunov-Schmidt).

1.1. Preliminares.

Consideremos el problema

$$\left.\begin{aligned} -u''(x) - u(x) &= h(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

donde $h \in C([0,\pi], \mathbb{R})$. El Teorema de la Alternativa de Fredholm (ver [28]) afirma que (1.1) tiene solución $u \in C^2[0,\pi]$, si y sólo si, h es ortogonal a la función $\operatorname{sen}(\cdot)$, en el sentido

$$\int_0^\pi h(x)\operatorname{sen}(x)dx = 0.$$

En este caso, (1.1) tiene un conjunto infinito de soluciones, las cuales se obtienen sumándole a una solución particular de (1.1) (que puede calcularse a partir de h), todas las funciones que son múltiplos reales de la función $\operatorname{sen}(\cdot)$.

En realidad, (1.1) es un problema lineal resonante en el valor propio principal. En efecto, el número real 1 es el primer valor propio del problema de valores propios:

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \lambda u(x) & = & 0, \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

cuya sucesión de valores propios viene dada por $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. La función sen$(\cdot)$ constituye una base del conjunto de funciones propias asociado a (1.2), para $\lambda = \lambda_1 = 1$.

Visto desde el punto de vista de la teoría de operadores, si consideramos el operador lineal

$$M_0 : C_0^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$$

$$(M_0(u))(x) = -u''(x) - u(x), \qquad \forall u \in C_0^2[0,\pi], \forall x \in [0,\pi]$$

donde $C_0^2[0,\pi] = \{u \in C^2[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$, entonces, lo que acabamos de afirmar es que conocemos una descripción precisa del rango de M_0, así como del conjunto $M_0^{-1}(h)$, $\forall h \in Im M_0$.

Sin embargo, la mayoría de los problemas que se presentan en el mundo real tienen un carácter no lineal. Al modelar tales problemas, aparece en la ecuación considerada un término dado por alguna función g, no lineal. Es frecuente también que esta función tenga algún carácter de periodicidad, debido a que muchos fenómenos naturales son de tipo periódico. Por ejemplo, este es el caso de la ecuación que modela el movimiento de un reloj de péndulo (véase [45]). Más concretamente, la ecuación que se propone para estudiar este fenómeno es de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica dada (problema que vamos a estudiar en este capítulo, cuando el valor medio de g es cero). La principal dificultad (además de la resonancia), para el estudio de (1.3), estriba en el carácter oscilante del término no lineal, aunque, como veremos, esto puede enriquecer o modificar sustancialmente los resultados de multiplicidad que se conocen, en relación con otros tipos de no linealidades ([4], [8], [49]).

Planteado el problema desde el punto de vista de la teoría de operadores, si consideramos

$$M_g : C_0^2[0,\pi] \to C[0,\pi]$$

$$(M_g(u))(x) = -u''(x) - u(x) + g(u(x)), \qquad \forall u \in C_0^2[0,\pi], \forall x \in [0,\pi]$$

lo que tratamos de estudiar, tan precisamente como sea posible, es $M_g(C_0^2[0,\pi])$ así como $M_g^{-1}(h)$, $\forall h \in Im M_g$. En general, cabe esperar que la introducción del término no lineal g altere sustancialmente la descripción del rango del operador M_0. En efecto, como se confirmará en este capítulo, cuando g no es la función idénticamente cero, el rango de M_g incluye estrictamente al de M_0. Otros hechos, sin embargo, se mantienen inalterables como el que se refiere al número infinito de soluciones de la ecuación tratada, cuando el término independiente h satisface la condición de ortogonalidad expresada previamente. Algunas otras propiedades de multiplicidad serán, en cambio, nuevas y típicas del problema no lineal, sin comparación posible con el problema lineal. Esto no debe extrañarnos, pues la aparición de tales propiedades es un hecho habitual del Análisis Funcional no lineal.

Después de desarrollar el capítulo tendremos la confirmación de las grandes analogías y también grandes diferencias que existen entre el problema (1.3) y el correspondiente problema periódico en el valor propio principal (en este caso, el número real cero) (véase [37], [56], [84]). Tales diferencias están causadas sin duda por las ya existentes cuando se comparan las funciones propias principales para ambos problemas: la función sen(·) para (1.3) y la función constantemente uno para el problema periódico.

Comenzamos este capítulo por el caso en que la ecuación auxiliar, del Método Alternativa, es resoluble de manera única, para después tratar el caso general. Creemos que es la manera más adecuada de presentar los resultados, además de que fue precisamente éste el orden que seguimos en el curso de nuestra investigación. No obstante, previamente presentamos un resultado general que será fundamental en este primer capítulo.

Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

donde, en todo el capítulo, y salvo que explícitamente se diga otra cosa, g verifica

$$[\mathbf{P}] \quad g \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \int_0^T g(s)ds = 0$$

denotando $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas, reales de variable real y T-periódicas, y $h \in C([0, \pi], \mathbb{R}) \equiv C[0, \pi]$.

Para poder tener una respuesta satisfactoria a la cuestión que trata sobre el tipo de términos independientes h para los que el problema anterior tiene solución, es fundamental la siguiente observación: es claro que cada función dada h, se puede descomponer de forma única como

$$h(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad a \in \mathbb{R}, \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi] \tag{1.5}$$

donde

$$\tilde{C}[0,\pi] = \left\{ h \in C[0,\pi] : \int_0^\pi h(x)\operatorname{sen}(x)dx = 0 \right\}.$$

Utilizando diferentes técnicas, como el Método Alternativa (o Reducción de Liapunov-Schmidt), sub y supersoluciones y Teoría del Grado, puede probarse el lema siguiente, cuya demostración está fundamentalmente basada en los resultados de [2] (véase también [4], [5], [18] y [64]). No obstante, damos un esquema de la misma, porque la notación se utilizará posteriormente.

LEMA 1.1

Dada la función g satisfaciendo la hipótesis $[P]$, entonces $\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]$ existe un intervalo real, no vacío y acotado, $J_{\tilde{h}}$, tal que el problema:

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & a\operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \quad (1.6)$$

tiene solución si y sólo si $a \in J_{\tilde{h}}$.

Demostración.

Consta de los siguientes pasos:

1. *Formulación abstracta del problema (1.6) y reducción de Liapunov-Schmidt.*

   Sean los espacios normados $U = (C_0[0,\pi], \|\cdot\|_0)$ y $Z = (C[0,\pi], \|\cdot\|_0)$, donde $C_0[0,\pi] = \{u \in C[0,\pi]; u(0) = u(\pi) = 0\}$ y $\|\cdot\|_0$ denota la norma uniforme. Definamos los operadores:

$$L : U \cap C^2[0,\pi] \to Z$$

$$L(u) = -u'' - u, \quad \forall u \in domL$$

y

$$N : U \to Z$$

$$(Nu)(x) = a\,\text{sen}(x) + \tilde{h}(x) - g(u(x)), \quad \forall u \in U, \forall x \in [0,\pi].$$

Así, $u \in C_0^2[0,\pi]$ es solución de (1.6) si y sólo si u satisface

$$Lu = Nu. \tag{1.7}$$

Por otra parte, L es un operador lineal de Fredholm de índice cero. En efecto,

(a) ImL es cerrado en Z, puesto que

$$ImL = \left\{ z \in Z : \int_0^\pi z(t)\,\text{sen}(t)dt = 0 \right\}$$

(b) $\dim KerL = \text{codim}\, ImL = 1$, puesto que $KerL = <\ \text{sen}(\cdot)\ >$ y cada $z \in Z$ puede descomponerse, de manera única, como

$$z(x) = \overbrace{z(x) - \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi z(t)\,\text{sen}(t)dt\right)\text{sen}(x)}^{\in ImL} +$$
$$+ \overbrace{\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi z(t)\,\text{sen}(t)dt\right)\text{sen}(x)}^{\in KerL},$$

Al ser L un operador lineal de Fredholm de índice cero, existen proyeccciones

$$P : U \to U$$

$$P(u(x)) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\,\text{sen}(t)dt\right)\text{sen}(x)$$

$$Q : Z \to Z$$

$$Q(z(x)) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z(t)\,\mathrm{sen}(t)dt\right)\mathrm{sen}(x)$$

tales que $KerL = ImP$ e $ImL = KerQ$. De esta forma, el problema (1.7) es equivalente al sistema de ecuaciones (llamado Sistema Alternativa)

$$\left.\begin{array}{rcl} u - Pu & = & K(I-Q)Nu \\ QNu & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (1.8)$$

siendo K (inverso generalizado de L), el operador inverso del operador $L : domL \cap KerP \to ImL$.

Puede probarse fácilmente que la expresión explícita de K es:

$$\begin{aligned}(Kz)(x) = &-\left(\int_0^x z(\tau)\cos(\tau)d\tau\right)\mathrm{sen}(x)+\\ &+\left(\int_0^x z(\tau)\,\mathrm{sen}(\tau)d\tau\right)\cos(x)+\\ &+\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\tau} z(s)\cos(s)ds\ \mathrm{sen}^2(\tau)\ +\right.\right.\\ &\left.\left.+\int_0^{\tau} z(s)\,\mathrm{sen}(s)ds\cos(\tau)\,\mathrm{sen}(\tau)\right)d\tau\right)\mathrm{sen}(x).\end{aligned}$$

Escribiendo ahora cada $u \in U$, de la forma $u = \overline{u} + \tilde{u}$, con $\overline{u} = c\,\mathrm{sen}(\cdot) \in KerL$, $\tilde{u} \in KerP$ tenemos que el anterior sistema es en realidad

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u} = K(I-Q)N(\overline{u}+\tilde{u}) \\ QN(\overline{u}+\tilde{u}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.9)$$

A la primera ecuación de (1.9) se llama ecuación *auxiliar*, y la denotaremos por (1.9.1); a la segunda, que análogamente denotaremos por (1.9.2), se le denomina ecuación de *bifurcación*.

2. *Solución del problema Alternativa.*

Comencemos por la ecuación auxiliar. Para ello, observemos que para cada $\overline{u} \in KerL$, fijo, el operador

$$K(I-Q)N(\overline{u}+(\cdot)) : KerP \to KerP$$

es un operador compacto (es decir, continuo y aplicando conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos). Esta propiedad de compacidad del operador anterior es fácil de deducir, teniendo en cuenta la expresión explícita de K y el Teorema de Ascolí-Arzelá ([36], [42]). Además, $K(I-Q)N(\overline{u}+(\cdot))(KerP)$ es un conjunto acotado. Así, el Teorema del Punto Fijo de Schauder ([88]) garantiza que $\forall c \in \mathbb{R}$ existe al menos una solución $\tilde{u} \in KerP$ de (1.9.1).

Denotemos por Σ al conjunto solución de (1.9.1), es decir,

$$\Sigma = \{(c,\tilde{u}) \in \mathbb{R} \times KerP : \tilde{u} = K(I-Q)N(c\,\mathrm{sen}(\cdot)+\tilde{u})\}. \tag{1.10}$$

Teniendo en cuenta la expresión explícita de Q, la ecuación de bifurcación es

$$a = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x)+\tilde{u}(x))\ \mathrm{sen}(x)\ dx.$$

Por tanto, dado $\tilde{h}$, el problema de contorno (1.6) tiene solución si y solamente si a pertenece a la imagen de la función $\Gamma_{\tilde{h}} : \Sigma \to \mathbb{R}$, definida como

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c,\tilde{u}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x)+\tilde{u}(x))\,\mathrm{sen}(x)dx \tag{1.11}$$

Notemos $J_{\tilde{h}} = \Gamma_{\tilde{h}}(\Sigma)$. Entonces:

(a) Puesto que Σ es no vacío, $J_{\tilde{h}} \neq \emptyset$.

(b) $J_{\tilde{h}}$ es conexo. En efecto, sean $\underline{a}, \overline{a} \in J_{\tilde{h}}$ con $\underline{a} \leq \overline{a}$. Entonces existen funciones u_1 y u_2, de clase $C^2[0,\pi]$, que verifican los problemas de contorno

$$\left.\begin{aligned} -u_2''(x) - u_2(x) + g(u_2(x)) &= \overline{a}\operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u_2(0) &= u_2(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

y

$$\left.\begin{aligned} -u_1''(x) - u_1(x) + g(u_1(x)) &= \underline{a}\operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u_1(0) &= u_1(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Sea $a \in [\underline{a}, \overline{a}]$, y consideremos el problema

$$\left.\begin{aligned} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) &= a\operatorname{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Entonces, u_1 es una subsolución de (1.14), por ser solución de (1.13), y u_2 es una supersolución de (1.14), por ser solución de (1.12). Por el Teorema 3.1 de [2], concluimos que $a \in J_{\tilde{h}}$.

(c) Por último, es trivial, por (1.11), que $J_{\tilde{h}}$ es acotado al serlo g.

□

NOTA 1.2
Observemos que las conclusiones del Lema 1.1 son válidas suponiendo únicamente que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada. También puede suponerse que la función g depende, además, de la variable independiente x y de la derivada u' de la función incógnita u, siempre que se mantenga su propiedad de acotación (ver [18]). El lema puede asímismo extenderse a Ecuaciones en Derivadas Parciales (véase [81]).

NOTA 1.3
Merece la pena destacar el hecho de que la mera existencia de una solución superior y otra inferior (sin que estén necesariamente ordenadas), es suficiente para la existencia de solución de problemas como (1.14). Esto no es cierto para términos no lineales más generales, ni cuando se consideran problemas resonantes en valores propios de orden superior (véase [34]).

1.2. ECUACIÓN AUXILIAR RESOLUBLE DE MANERA ÚNICA.

Vamos a tratar de avanzar un poco más en el estudio de $J_{\tilde{h}}$. Para ello, observemos que la función $\Gamma_{\tilde{h}}$ es continua. Ahora bien, la gran dificultad para poder concretar algunas propiedades más de $\Gamma_{\tilde{h}}(\Sigma)$ es precisamente el conjunto Σ además, obviamente, del caracter oscilatorio de g. Suponiendo que g es más regular, y una adecuada relación entre la función derivada de g y los dos primeros valores propios del problema de valores propios (1.2), el conjunto Σ va a ser "muy bueno", desde el punto de vista de algunas propiedades topológicas, como la conexión. Esto va a permitir obtener información adicional sobre $J_{\tilde{h}}$, como vamos a ver en este apartado.

En el teorema que se presenta a continuación se prueba que, bajo algunas hipótesis adicionales sobre g, $J_{\tilde{h}}$ es siempre, para cada $\tilde{h}$, un intervalo cerrado no trivial que contiene al cero en su interior. Además se demuestra que si $a \in J_{\tilde{h}} \setminus \{0\}$, entonces podemos conseguir tantas soluciones como queramos de (1.6), sin más que tomar a suficientemente pequeño. En el Teorema 1.9 se muestra que, en general, no cabe esperar un resultado mejor en lo que se refiere a la multiplicidad de soluciones cuando $a \in J_{\tilde{h}} \setminus \{0\}$. Por último, es conocido (véase [74]) que, para $a = 0$ el problema (1.6) tiene infinitas soluciones. Aquí damos una nueva demostración de este hecho.

TEOREMA 1.4

Sea $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \not\equiv 0$, T-periódica, $\int_0^T g(s)ds = 0$ tal que

$$g'(u) > -3, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Entonces se verifican

1. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ existen $a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h}) \in \mathbb{R}$, $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$, tales que (1.6) tiene solución si y sólo si $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$.*

2. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ el conjunto de soluciones de (1.6) para $a = 0$ es un conjunto infinito no acotado.*

3. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ dado y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ (que depende de g, $\tilde{h}$ y n), tal que si $0 < |a| \leq \varepsilon_n$ entonces el problema (1.6) admite al menos n soluciones.*

Demostración.

1. De (1.15), y teniendo en cuenta el Lema 1.7 de [6], se deduce que para cada $\overline{u} \in ImP$ existe una única solución, $\tilde{u}(\overline{u})$, de (1.9.1) que depende continuamente de $\overline{u}$. Por tanto, el Sistema Alternativa se reduce a
$$QN(\overline{u} + \tilde{u}(\overline{u})) = 0 \tag{1.16}$$
O lo que es lo mismo,
$$a = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c(x))\,\mathrm{sen}(x)dx$$
donde $\tilde{u}_c = \tilde{u}(c\,\mathrm{sen}(\cdot))$.

Ahora, de la ecuación (1.9.1), se obtiene la existencia de tres constantes M_1, M_2 y $M_3 > 0$, independientes de c tales que
$$\|\tilde{u}_c\|_0 \leq M_1,\ \|\tilde{u}_c'\|_0 \leq M_2 \quad y \quad \|\tilde{u}_c''\|_0 \leq M_3,\ \forall\, c \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$
En efecto, la existencia de M_1 es trivial, puesto que $\tilde{u}_c = K(I - Q)N(\overline{u} + \tilde{u}_c)$.

Además, aplicando L a la ecuación $\tilde{u}_c = K(I - Q)N(\overline{u} + \tilde{u}_c)$ tenemos $L\tilde{u}_c = (I-Q)N(\overline{u}+\tilde{u}_c)$, de donde se obtiene la existencia de M_3.

Por último, basta tener en cuenta que $\tilde{u}_c(0) = \tilde{u}_c(\pi) = 0$ y el Teorema del Valor Medio, para la existencia de M_2.

Antes de continuar, y denotando por $p_c(x) = c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c(x)$, vamos a exponer el siguiente lema (similar al Lema 1 de [16]):

$\boxed{\text{LEMA } 1.5}$

$\forall\delta,\ 0<\delta<\dfrac{\pi}{2}$, $\exists c_0(\delta)\in\mathbb{R}^+$ *tal que si* $c\geq c_0(\delta)$ *entonces*

(a) $p_c(x)>0,\ \forall\ x\in(0,\pi)$.

(b) $p_c'(x)>0,\ \forall\ x\in[0,\delta]$;
$p_c'(x)<0,\ \forall\ x\in[\pi-\delta,\pi]$.

(c) $p_c''(x)<0,\ \forall\ x\in[\delta,\pi-\delta]$.

(d) $\exists_1 x_0(c)\in(0,\pi)$ *tal que* $p_c'(x_0(c))=0$, $\|p_c\|_0=p_c(x_0(c))$ *y* $p_c''(x_0(c))<0$.

Para la demostración del lema previo basta definir, para cada $c\in\mathbb{R}$, la función $f_c(x)=\frac{\tilde{u}_c(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, si $x\in(0,\pi)$, $f_c(0)=\tilde{u}_c'(0)$, $f_c(\pi)=-\tilde{u}_c'(\pi)$, y tomar

$$c_0(\delta)>\sup_{c\in\mathbb{R}}\left\{\|f_c\|_0,\ \frac{\|\tilde{u}_c'(\cdot)\|_0}{\cos(\delta)},\ \frac{\|\tilde{u}_c''(\cdot)\|_0}{\operatorname{sen}(\delta)}\right\}. \tag{1.18}$$

Véase [16] para más detalles.

Usando este lema, junto a las acotaciones (1.17), concluimos, mediante un razonamiento similar al realizado en [16], que para c suficientemente grande tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\Gamma_{\tilde{h}}(c) &= \int_0^\pi g(p_c(x))\operatorname{sen}(x)dx = \\ &= -\int_0^\pi \left(G\left(p_c(x)\right)-G\left(\|p_c\|_0\right)\right)\frac{c+\cos(x)\tilde{u}_c'(x)-\operatorname{sen}(x)\tilde{u}_c''(x)}{\left(p_c'(x)\right)^2}dx\end{aligned} \tag{1.19}$$

donde G es la primitiva de g con valor medio cero, y hemos denotado $\Gamma_{\tilde{h}}(c)=\Gamma_{\tilde{h}}(c,\tilde{u}_c)$.

Una vez llegados a la expresión (1.19) estamos en condiciones de obtener la conclusión del teorema. Para ello, sea $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{c_n\} \rightarrow +\infty$, una sucesión tal que $G(\|p_{c_n}\|_0) = \min_{u\in\mathbb{R}} G(u)$ (esto es posible ya que $\{\|p_c\|_0,\ c \in \mathbb{R}\}$ es un intervalo no acotado puesto que p_c es continua respecto de c).

Teniendo en cuenta la expresión (1.19) y (1.17), para n suficientemente grande se deduce

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c_n) \leq 0.$$

Veamos que, de hecho, la desigualdad anterior es estricta. En efecto, si $\Gamma_{\tilde{h}}(c_n) = 0$, entonces

$$G(p_{c_n}(x)) = G(\|p_{c_n}\|_0) = \min_{u\in\mathbb{R}} G(u), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Pero $p_{c_n}([0,\pi])$ es un intervalo y, además, $p_{c_n}(0) = 0$, $p_{c_n}(\frac{\pi}{2}) = c_n \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + \tilde{u}_{c_n}(\frac{\pi}{2}) = c_n + \tilde{u}_{c_n}(\frac{\pi}{2}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Esto implica que, para n suficientemente grande, $G\mid_{[0,T]}$ es constante. Ahora bien, como G es T-periódica entonces ha de ser constante en todo $\mathbb{R}$, con lo que $G' \equiv 0$, que contradice el hecho de que g es no trivial. Por tanto $\Gamma_{\tilde{h}}(c_n) < 0$.

Análogamente, podemos elegir una sucesión $\{d_n\} \rightarrow +\infty$ tal que $G(\|p_{d_n}\|_0) = \max_{u\in\mathbb{R}} G(u)$. Así $\Gamma_{\tilde{h}}(d_n) > 0$.
Lo anterior prueba obviamente que $J_{\tilde{h}}$ contiene valores positivos y negativos, y consecuentemente, al valor cero.

Demostremos que $J_{\tilde{h}}$ es un intervalo cerrado. Para ello, sean $a_1(\tilde{h})$, $a_2(\tilde{h})$ el ínfimo y el supremo de $J_{\tilde{h}}$, respectivamente. Sea $\{a_n\} \subset J_{\tilde{h}}$ tal que $\{a_n\} \rightarrow a_1(\tilde{h})$ y la correspondiente sucesión de funciones $\{u_n\}$, $u_n = c_n \operatorname{sen}(.) + \tilde{u}_{c_n}$ tal que:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(c_n \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_{c_n}(x)) \operatorname{sen}(x)dx \tag{1.20}$$

Ahora bien, la sucesión $\{c_n\}$ debe estar acotada. En efecto, si esto no fuese así, usando la generalización del Lema de Riemann-Lebesgue, dada en la Nota 2.2 de [87], se tendría que $a_1(\tilde{h}) = 0$, lo que contradice el hecho de que $J_{\tilde{h}}$ contiene valores negativos. Además, de (1.17), y usando el Teorema de Ascolí-Arzelá, junto con la acotación de la sucesión $\{c_n\}$, obtenemos que una cierta sucesión parcial de la sucesión de funciones $\{u_n\}$ es uniformemente convergente en $[0,\pi]$ a alguna función $u_o \in U$, de la forma $u_o = c_o \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_{c_o}$ tal que $a_1(\tilde{h}) = \Gamma_{\tilde{h}}(c_o)$, o lo que es lo mismo, $a_1(\tilde{h}) \in J_{\tilde{h}}$.

2. De la existencia de dos sucesiones, $\{c_n\} \to +\infty$ y $\{d_n\} \to +\infty$, tales que, $\Gamma_{\tilde{h}}(c_n) < 0$, $\Gamma_{\tilde{h}}(d_n) > 0$ y de la continuidad de la función $\Gamma_{\tilde{h}}$ se deduce la existencia de una sucesión $\{e_n\} \to +\infty$ tal que $\Gamma_{\tilde{h}}(e_n) = 0$. Esto prueba el segundo apartado del teorema.

3. Para probar el apartado tercero, sea m cualquier número natural dado. De cada una de las sucesiones anteriores, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$, elijamos m elementos, c_{n_j} y d_{n_j} respectivamente, satisfaciendo

$$c_{n_1} < d_{n_1} < c_{n_2} < d_{n_2} < \ldots < c_{n_m} < d_{n_m}$$

y tales que

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c_{n_j}) < 0 < \Gamma_{\tilde{h}}(d_{n_j}),$$

para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$. Entonces, podemos tomar

$$\varepsilon_m = \min_{1\le j\le m}\left\{-\Gamma_{\tilde{h}}(c_{n_j}), \Gamma_{\tilde{h}}(d_{n_j})\right\}.$$

□

1.3. CASO GENERAL.

1.3.1. RESULTADO PRINCIPAL.

Nuestro objetivo a continuación es tratar de conseguir las conclusiones del teorema previo, eliminando algunas de las hipótesis sobre la función g; más concretamente, estamos interesados en quitar aquellas que se refieren a la regularidad C^1 de la función g, y a la interacción de g' con los valores propios del problema (1.2). Notemos que la dificultad principal en este caso es la siguiente: Para cada $\overline{u} \in ImP$, la ecuación (1.9.1) tiene al menos una solución, pero ésta no es necesariamente única. Esto complica la estructura topológica del conjunto Σ. No obstante, una de las claves para poder tener éxito en nuestro estudio está en el hecho de que Σ contiene subconjuntos conexos apropiados para nuestros propósitos (véase [2], [33], [50], [69]). Los detalles los damos seguidamente.

Consideremos, de nuevo, el problema (1.6):

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & a\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface **[P]**.

Entonces se verifican las tesis del Teorema 1.4, sin necesidad de hipótesis adicionales (para g no trivial). Vamos a enunciarlo y demostrarlo:

TEOREMA 1.6

Sea $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T-periódica, $\int_0^T g(s)ds = 0$ y $g \not\equiv 0$, entonces se verifican:

1. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ existen $a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h}) \in \mathbb{R}$, $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$, tales que (1.6) tiene solución si y sólo si $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$.*

2. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ el conjunto de soluciones de (1.6) para $a = 0$ es un conjunto infinito no acotado.*

3. *$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$ dado, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ (que depende de g, $\tilde{h}$ y n), tal que si $0 < |a| \leq \varepsilon_n$ entonces el problema (1.6) admite al menos n soluciones.*

Demostración.

1. Procediendo como en el Teorema 1.4, dado $\tilde{h} \in \tilde{C}[0, \pi]$, el problema (1.6) tendrá solución, si y sólo si a pertenece a la imagen de la función $\Gamma_{\tilde{h}} : \Sigma \to \mathbb{R}$, definida en (1.11)

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c, \tilde{u}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(c \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}(x)) \operatorname{sen}(x) dx$$

donde Σ es el conjunto definido en (1.10).

Definamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} p_1 : \Sigma &\to \mathbb{R} \\ p_1(c, \tilde{u}) &= c, \qquad \forall (c, \tilde{u}) \in \Sigma \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_2 : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p_2(c,\tilde{u}) &= \tilde{u}, \qquad \forall (c,\tilde{u}) \in \Sigma \end{aligned}$$

Razonando de forma análoga a la sección anterior, concluimos que existen tres constantes M_1, M_2 y $M_3 > 0$, independientes de $c \in \mathbb{R}$, tales que

$$\|\tilde{u}\|_0 \leq M_1, \|\tilde{u}'\|_0 \leq M_2 \;\; y \;\; \|\tilde{u}''\|_0 \leq M_3, \; \forall \tilde{u} \in p_2(\Sigma). \tag{1.21}$$

y así llegamos a que existe $c_0 > 0$ (ver (1.18)) tal que si $c \geq c_0$ y $(c,\tilde{u}) \in \Sigma$, denotando $u_{c,\tilde{u}}(x) = c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}\Gamma_{\tilde{h}}(c,\tilde{u}) &= \int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}(x))\,\mathrm{sen}(x)dx = \\ &= -\int_0^\pi \left(G\left(u_{c,\tilde{u}}(x)\right) - G\left(\left\|u_{c,\tilde{u}}(\cdot)\right\|_0\right)\right) \frac{c+\cos(x)\tilde{u}'(x) - \mathrm{sen}(x)\tilde{u}''(x)}{\left(c\cos(x)+\tilde{u}'(x)\right)^2} dx \end{aligned}$$

donde G es la función primitiva de g, con valor medio cero.

De (1.21) se deduce que, para c suficientemente grande, el término

$$\frac{c + \cos(x)\tilde{u}'(x) - \mathrm{sen}(x)\tilde{u}''(x)}{\left(c\cos(x) + \tilde{u}'(x)\right)^2}$$

es positivo. Por tanto, para demostrar que $\Gamma_{\tilde{h}}$ puede tomar valores positivos y negativos, necesitamos estudiar el signo de

$$\left(-G\left(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}(x)\right) + G\left(\|c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}(\cdot)\|_0\right)\right).$$

Igual que en la sección previa, podríamos controlar el signo del término anterior si pudiésemos elegir $(c,\tilde{u}) \in \Sigma$, con c suficientemente grande, tal que $G\left(\|c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}(\cdot)\|_0\right) = \min_{\mathbb{R}} G$ (o max $_{\mathbb{R}}G$.) Ahora bien, ello va a ser posible, gracias al siguiente lema (que se puede consultar, junto a su demostración, como Lema 1.2 en [2], Proposición 1 en [33] y Lema A5 en [69]):

$\boxed{\text{LEMA } 1.7}$

Para cada intervalo $[b_1, b_2] \subset \mathbb{R}$, *existe algún subconjunto conexo* $\Sigma_{b_1 b_2}$ *de* Σ *tal que* $p_1(\Sigma_{b_1 b_2}) = [b_1, b_2]$.

Tomemos entonces b_1 y b_2, números reales tales que

$$b_1 > \max\{c_0, M_2 + M_3, M_1 + T\}, \quad b_2 \geq b_1 + 2M_1 + T$$

Por el Lema 1.7, existe algún subconjunto conexo $\Sigma_{b_1 b_2} \subset \Sigma$ tal que $p_1(\Sigma_{b_1 b_2}) = [b_1, b_2]$. Como $\|\cdot\|_0 : \Sigma_{b_1 b_2} \to \mathbb{R}_0^+$ es continua y $\Sigma_{b_1 b_2}$ es conexo, el conjunto

$$I_{b_1 b_2} = \{\|c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}\|_0;\ (c, \tilde{u}) \in \Sigma_{b_1 b_2}\}$$

es un intervalo real. Además, existen $(b_1, \tilde{u}), (b_2, \tilde{v}) \in \Sigma_{b_1 b_2}$, tales que se verifica

$$\|b_1\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}\|_0 \leq b_1 + M_1, \quad \|b_2\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{v}\|_0 \geq b_2 - M_1.$$

Por tanto, la longitud de $I_{b_1 b_2}$ es al menos $b_2 - b_1 - 2M_1$, cantidad mayor o igual a T. Consecuentemente, existen $(c_1, \tilde{u}_1), (c_2, \tilde{u}_2) \in \Sigma_{b_1 b_2}$ verificando

$$G(\|c_1\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_1\|_0) = \min_{\mathbb{R}} G, \quad G(\|c_2\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_2\|_0) = \max_{\mathbb{R}} G. \tag{1.22}$$

Por (1.22) tenemos

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c_1, \tilde{u}_1) \leq 0 \leq \Gamma_{\tilde{h}}(c_2, \tilde{u}_2), \tag{1.23}$$

dándose las desigualdades estrictas, pues si $\Gamma_{\tilde{h}}(c_1, \tilde{u}_1) = 0$, entonces

$$G(c_1 \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_1(x)) = \min_{\mathbb{R}} G, \ \forall\, x \in [0, \pi], \tag{1.24}$$

Pero el conjunto $(c_1 \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_1(\cdot))([0, \pi])$ es un intervalo cuya longitud es al menos $c_1 - M_1 > T$ (tengamos en cuenta que $c_1 \operatorname{sen}(0) + \tilde{u}_1(0) = 0$, $c_1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + \tilde{u}_1(\frac{\pi}{2}) = c_1 + \tilde{u}_1(\frac{\pi}{2}) \geq c_1 - M_1$). Por lo que si $\Gamma_{\tilde{h}}(c_1, \tilde{u}_1) = 0$, entonces G es una constante, lo que contradice el hecho de ser g no trivial.

De forma análoga se prueba que $\Gamma_{\tilde{h}}(c_2, \tilde{u}_2) > 0$, lo que prueba que $\Gamma_{\tilde{h}}(\Sigma)$ contiene valores positivos y negativos. El resto del primer apartado del teorema es idéntico a la sección anterior.

2. Observemos que, por el apartado previo de la demostración, el conjunto $\Gamma_{\tilde{h}}(\Sigma_{b_1 b_2})$ es un intervalo real que contiene al cero, por lo que existe $(c, \tilde{u}) \in \Sigma_{b_1 b_2}$ tal que $0 = \Gamma_{\tilde{h}}(c, \tilde{u})$. Por tanto, si $a = 0$, el problema (1.6) tiene al menos una solución de la forma $c \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}$, con $(c, \tilde{u}) \in \Sigma_{b_1 b_2}$ (en particular $c \in [b_1, b_2]$).

   Eligiendo una sucesión de números reales $\{b_n\}$ tal que

$$\begin{gathered} b_1 > \max\{c_0, M_2 + M_3, M_1 + T\}, \\ b_{2n} > b_{2n-1} + 2M_1 + T, \ b_{2n} < b_{2n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{1.25}$$

   tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el problema (1.6) tiene, para $a = 0$, al menos una solución de la forma

$$c_n \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_n,$$

con $(c_n, \tilde{u}_n) \in \Sigma_{b_{2n-1}b_{2n}}$ y $c_n \in [b_{2n-1}, b_{2n}]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, (1.6) tiene infinitas soluciones para $a = 0$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. Tomemos números reales $d_1, d_2, ..., d_{2n}$, tales que

$$\begin{aligned} d_1 &> \max\{c_0, M_2 + M_3, M_1 + T\}, \\ d_{2m} &> d_{2m-1} + 2M_1 + T,\ \forall\, m \in \{1, ..., n\}, \\ d_{2m} &< d_{2m+1},\ \forall\, m \in \{1, ..., n-1\}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Entonces, cada intervalo de la forma $[d_{2m-1}, d_{2m}]$, $1 \leq m \leq n$, satisface (1.25). Por tanto existen n subconjuntos conexos disjuntos de Σ, que denotamos $\Sigma_{d_{2m-1}d_{2m}}$, $1 \leq m \leq n$, y $2n$ elementos de la forma $(c_{2m-1}, \tilde{u}_{2m-1}), (c_{2m}, \tilde{u}_{2m})$, $1 \leq m \leq n$, con $(c_{2m-1}, \tilde{u}_{2m-1})$, $(c_{2m}, \tilde{u}_{2m}) \in \Sigma_{d_{2m-1}d_{2m}}$, $1 \leq m \leq n$, y tales que

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m-1}, \tilde{u}_{2m-1}) < 0 < \Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m}, \tilde{u}_{2m}),\ 1 \leq m \leq n.$$

Tomando

$$\varepsilon_n = \min\{-\Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m-1}, \tilde{u}_{2m-1}),\ \Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m}, \tilde{u}_{2m}),\ 1 \leq m \leq n\},$$

entonces

$$[-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \subset \left[\Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m-1}, \tilde{u}_{2m-1}), \Gamma_{\tilde{h}}(c_{2m}, \tilde{u}_{2m})\right] \subset \Gamma_{\tilde{h}}\left(\Sigma_{d_{2m-1}d_{2m}}\right),$$

para $1 \leq m \leq n$, con lo que si $0 < |a| \leq \varepsilon_n$, entonces $a \in \Gamma_{\tilde{h}}\left(\Sigma_{d_{2m-1}d_{2m}}\right)$, $1 \leq m \leq n$. Esto implica la conclusión del apartado tercero del teorema.

□

1.3.2. OTROS RESULTADOS DE INTERÉS.

En esta sección probamos dos resultados adicionales: en el primero se demuestra la continuidad de los funcionales a_1 y a_2, cuando se considera la norma uniforme en $\tilde{C}[0,\pi]$. Esto puede ser un primer paso en un estudio más profundo de otras propiedades cualitativas de tales funcionales, que no hemos podido conseguir hasta ahora; por ejemplo, aquellas que se refieren al comportamiento asintótico de $a_1(\tilde{h})$ y $a_2(\tilde{h})$ cuando la norma uniforme de $\tilde{h}$ diverge a $+\infty$ (véase [47] para el problema periódico).

El segundo teorema que mostramos en esta sección viene a decirnos que el resultado de multiplicidad dado en el apartado tercero del Teorema 1.6 es el que se puede razonablemente esperar, al menos en muchas situaciones, para el tipo de términos no lineales aquí considerados.

TEOREMA 1.8

Los funcionales $a_1(\cdot), a_2(\cdot) : \tilde{C}[0,\pi] \to \mathbb{R}$, son continuos, considerando la norma uniforme en $\tilde{C}[0,\pi]$.

Demostración.

Demostremos, por ejemplo, que a_2 es continuo. Para ello, es suficiente demostrar que $a_2(\cdot)$ es semicontinua superiormente, ya que en [64] ha sido probada la propiedad de semicontinuidad inferior.

Sea $\{\tilde{h}_n\} \to \tilde{h}$ en $\tilde{C}[0,\pi]$ y $\{\tilde{h}_{n_k}\}$ cualquier subsucesión suya verificando que $a_2(\tilde{h}_{n_k}) \to \beta \in \mathbb{R}$. Denotaremos por u_{n_k} a una solución del problema

$$\left.\begin{array}{lr} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) = a_2(\tilde{h}_{n_k})\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}_{n_k}(x), & x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) = 0 & \end{array}\right\} \tag{1.27}$$

Entonces (ver 1.21), existe una constante positiva M, independiente de n_k, tal que

$$\|\tilde{u}_{n_k}\|_0 \leq M, \quad \forall\, n_k. \tag{1.28}$$

Además,

$$a_2(\tilde{h}_{n_k}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(\overline{u}_{n_k}(x) + \tilde{u}_{n_k}(x))\ \mathrm{sen}(x)\, dx. \tag{1.29}$$

Ahora, pueden ocurrir dos casos:

- $\{\overline{u}_{n_k}\}$ no está acotada. Entonces, por el Lema 2.5 de [87], $\beta = 0$, y así, $\beta \leq a_2(\tilde{h})$.

- $\{\overline{u}_{n_k}\}$ está acotada. Entonces, existe una sucesión parcial de $\{u_{n_k}\}$ convergente a cierta función u solución de

$$\left.\begin{array}{rcll} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & \beta\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}, & x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 & \end{array}\right\} \tag{1.30}$$

  con lo que $\beta \leq a_2(\tilde{h})$.

Luego, en ambos casos obtenemos $\beta \leq a_2(\tilde{h})$. De aquí se deduce

$$\lim\sup\ a_2(\tilde{h}_n) \leq a_2(\tilde{h}).$$

La continuidad de $a_1(\tilde{h})$ se prueba de forma análoga. □

Tratemos ahora el tema de la multiplicidad. Hemos demostrado que el número de soluciones de (1.6) tiende a infinito cuando a tiende a cero. Vamos a probar ahora que es un resultado suficientemente informativo, ya que, por ejemplo, es posible encontrar muchas situaciones en las que el problema (1.6), para $a \in \left[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})\right] \setminus \{0\}$, tiene un número finito de soluciones distintas. En efecto, veamos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.9

Sea el problema (1.6), donde g satisface, además de **[P]**, *la condición:*

[C] *g es una función analítica y $g'(u) > -3, \quad \forall u \in \mathbb{R}$.*

Entonces si $a \in \left[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})\right] \setminus \{0\}$, el conjunto de soluciones de dicho problema es finito.

Demostración.

Evidentemente, es posible suponer que $g \not\equiv 0$. Entonces, si $a \in \left[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})\right] \setminus \{0\}$, el conjunto de todas las soluciones de (1.6) está acotado (véase la Proposición 5.1 de [81]).

Por la hipótesis [C], para cualquier $c \in \mathbb{R}$, existe un único $\tilde{u}(c) \equiv \tilde{u}_c \in KerP$, que es solución de la ecuación auxiliar (1.9.1). Además, esta única solución, $\tilde{u}_c$, es analítica en c (véase [7]).

Ahora bien, todas las soluciones de (1.6) son de la forma $c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c(\cdot)$, donde c satisface $a = F(c)$, con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F(c) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c(x))dx$. Como F es una función real, analítica, no constante y el conjunto $F^{-1}\{a\}$ es acotado, teniendo en cuenta el Principio de identidad para funciones analíticas (Proposición 4.1 de [23]), tenemos que $F^{-1}\{a\}$ es finito. □

NOTA 1.10

S. Villegas ha construido un ejemplo ([86]) donde g satisface [P], es de clase C^{∞}, no analítica, con $g'(u) > -3$, tal que para $a \in \left[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})\right]$ el problema (1.6) tiene infinitas soluciones.

1.4. EXTENSIONES Y GENERALIZACIONES.

1. Para el correspondiente problema en Ecuaciones en Derivadas Parciales, es posible obtener resultados similares en algunos casos. En efecto, consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) & = & h(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \quad (1.31)$$

donde Ω es un dominio regular y acotado de $\mathbb{R}^n$, Δ es el operador laplaciano, λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ (el espacio de Sobolev usual), g verifica $[\mathbf{P}]$, y $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Si denotamos por $\phi_1(x)$ a la función propia positiva correspondiente al primer valor propio λ_1, normalizada en el sentido

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1(x)|^2 dx = 1,$$

entonces toda función $h \in C(\overline{\Omega})$ tiene una (única) descomposición $h(x) = a\phi_1(x) + \tilde{h}(x)$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\tilde{h}$ verificando

$$\int_\Omega \tilde{h}(x)\phi_1(x)dx = 0. \quad (1.32)$$

En este caso, es posible probar que, dada $\tilde{h}$, existen números reales $a_1(\tilde{h}) \leq 0 \leq a_2(\tilde{h})$, tales que (1.31) tiene solución si y sólo si $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ (ver [81]).

Realizando razonamientos análogos a los llevados a cabo en este capítulo, la ecuación de bifurcación es, salvo una constante positiva que multiplicaría al segundo término de la siguiente identidad, de la forma :

$$a = \int_\Omega g(c\phi_1(x) + \tilde{u}(x))\phi_1(x)dx$$

La expresión anterior se puede escribir para c suficientemente grande (ver [30]), como

$$a = -\int_\Omega (G(u) - G(\gamma))\, div \left(\frac{\phi_1 \nabla u}{|\nabla u|^2}\right) dx, \qquad (1.33)$$

siendo G la primitiva de g, con valor medio cero, $\gamma = \|u\|_0$ (norma uniforme en $\overline{\Omega}$) y div indica la divergencia del campo correspondiente.

En [30] y en [75] se prueba que, en determinados dominios Ω, que incluyen los dominios convexos en dimensión 2 y ciertos dominios anulares en dimensiones mayores o iguales a 2, es posible determinar el signo de la expresión anterior. Así pues, para esta clase de dominios, sería posible obtener resultados similares a los del Teorema 1.6. De cualquier forma, creemos que es posible extender los resultados de este teorema al caso de dominios Ω generales (acotados y regulares, por supuesto), pero no lo hemos conseguido aún (véase el Capítulo 3).

2. Usando razonamientos análogos a los utilizados en este capítulo, es posible extender los resultados mostrados a problemas más generales, tales como los de tipo Sturm-Liouville:

$$\left.\begin{array}{rcll} -u''(x) - \lambda_1 r(x)u(x) + g(u(x)) & = & h(x), & x \in [0,\pi] \\ \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) & = & 0 & \\ \alpha_1 u(\pi) + \beta_1 u'(\pi) & = & 0 & \end{array}\right\} \qquad (1.34)$$

donde los coeficientes verifican $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $(\alpha_0 - \beta_0)(\alpha_1 - \beta_1) > 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $h \in C[0,\pi]$, $r \in C^1\left([0,\pi], \mathbb{R}^+\right)$, g satisface [P] y λ_1 es el primer valor propio del problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \lambda r(x)u(x) &=& 0, \quad x \in [0,\pi] \\ \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &=& 0 \\ \alpha_1 u(\pi) + \beta_1 u'(\pi) &=& 0 \end{array}\right\} \tag{1.35}$$

Notemos por φ_1 a la función propia asociada a λ_1, normalizada en el sentido $\int_0^\pi (\varphi_1'(x))^2 dx = 1$.

Entonces, si escribimos $h(x) = a\varphi_1(x) + \tilde{h}(x)$, con $\int_0^\pi \tilde{h}\varphi_1(x)dx = 0$, la ecuación de bifurcación es, salvo una constante positiva que multiplicaría al segundo miembro de la identidad que sigue, de la forma:

$$a = \int_0^\pi g\left(c\varphi_1(x) + \tilde{u}(x)\right)\varphi_1(x)dx. \tag{1.36}$$

que se puede reescribir, siguiendo las mismas ideas de este capítulo, como

$$\begin{aligned} a = \int_0^\pi g\left(u(x)\right)\varphi_1(x)dx &= \\ &= -\frac{\varphi_1(\pi)}{u'(\pi)}\left(G(u(\pi) - G(\|u\|)\right)) - \\ &\quad -\frac{\varphi_1(0)}{u'(0)}\left(G(u(0) - G(\|u\|)\right)) - \\ &- \int_0^\pi \left(G\left(u(x)\right) - G\left(\|u\|\right)\right)\frac{\varphi_1'(x)u'(x) - \varphi_1(x)u''(x)}{\left(u'(x)\right)^2} \end{aligned}$$

donde $u(x) = c\varphi_1(x) + \tilde{u}(x)$.

El signo de esta última expresión puede determinarse, teniendo en cuenta las propiedades de la función propia φ_1, de manera análoga a lo realizado para el problema (1.6) en las secciones precedentes (véase [74]).

Capítulo 2

Método variacional.

2.1. Preliminares.

Consideremos el problema (lineal) de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) & = & h(x),\ x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

donde $h \in C[0, \pi]$. Como hemos comentado en el capítulo anterior, por el Teorema de la Alternativa de Fredholm sabemos que (2.1) tiene solución $u \in C^2[0, \pi]$ si, y sólamente si, h satisface la condición

$$\int_0^\pi h(x)\operatorname{sen}(x)dx = 0. \tag{2.2}$$

Si se adopta el punto de vista variacional, lo que ocurre es que, cuando h satisface (2.2), el funcional de energía asociado al problema (2.1), $\Phi_0 : H_0^1(0, \pi) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(x)|^2\,dx - \int_0^\pi h(x)u(x)dx \tag{2.3}$$

tiene mínimo global, donde $H_0^1(0, \pi)$ denota al espacio de Sobolev usual (véanse [3], [61], [70], [83]).

Consecuentemente, al ser $\Phi_0 \in C^1(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$, existe algún elemento $u_0 \in H_0^1(0,\pi)$ satisfaciendo la ecuación

$$\Phi_0'(u_0) = 0 \tag{2.4}$$

y así u_0 es solución débil, y por tanto solución clásica de (2.1) (es conocido que las soluciones débiles de (2.1) son soluciones clásicas, ver [14]).

¿Qué puede suceder, desde el punto de vista de la existencia de mínimo global, si consideramos una perturbación no lineal de (2.1)?. Se intuye que la situación puede cambiar radicalmente.

Para responder a esta cuestión, consideremos el problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u(x)) & = & h(x),\ x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua dada, y donde h verifica (2.2) (esto es, con la notación del primer capítulo, estudiamos un problema como (1.6) para $a = 0$). En este caso, el funcional asociado $\Phi_G : H_0^1(0,\pi) \to \mathbb{R}$, es de la forma

$$\Phi_G(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(x)|^2\,dx + \int_0^\pi G(u(x))dx - \int_0^\pi h(x)u(x)dx \tag{2.6}$$

donde $G'(u) = g(u), \forall u \in \mathbb{R}$.

Es conocido, ver [70], que $\Phi_G \in C^1(H_0^1(0,\pi),\mathbb{R})$ y que $u \in H_0^1(0,\pi)$ es solución débil de (2.5) si, y solamente si, u es punto crítico de Φ_G, o sea, satisface la ecuación $\Phi_G'(u) = 0$.

Lo primero que debe resaltarse es que Φ_G no tiene necesariamente mínimo global, aunque g y G sean "pequeñas" (véase la Nota 2.6 más adelante). Sin embargo, nuestro interés se centra, de acuerdo con lo estudiado en el capítulo anterior, en el estudio de aquellos problemas donde g tenga un carácter periódico. En este sentido, si g satisface la propiedad [**P**]:

$$[\mathbf{P}] \quad g \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \int_0^T g(u)du = 0$$

entonces el funcional Φ_G tiene mínimo global (ver [16] y [10] para el caso particular en que $h \equiv 0$). Desde el punto de vista de la Física y de la posible estabilidad de las soluciones, este tipo de resultados es interesante, pues las soluciones que minimizan el funcional de energía tienen un significado especial (véase [12], [65], [66], [67], [68]).

En este capítulo presentamos un tipo de funciones no lineales g, más generales que aquellas que satisfacen la propiedad [**P**], para las cuales se conserva la propiedad de existencia de mínimo global de Φ_G. Teniendo en cuenta alguna de las ideas de [16], las condiciones suficientes para ello se dan en términos de g, G y H (alguna primitiva de G); más concretamente, necesitamos g, G y H acotadas, y ésta última con un comportamiento adecuado en infinito. Básicamente, éste puede ser de dos tipos: o bien H es decreciente o bien tiene una "oscilación" apropiada.

Las anteriores hipótesis garantizan que el funcional Φ_G está acotado inferiormente, y aunque no sea coercivo, siempre podremos demostrar la existencia de sucesiones minimizantes acotadas. Comentar también que Φ_G no satisface, en general, la condición de compacidad de Palais-Smale (véase [9]).

Una de las principales novedades de los resultados que presentamos es que obtenemos la existencia de mínimo global del funcional Φ_G, dando condiciones sobre "una segunda primitiva de la función g". Tienen además interés desde el punto de vista del estudio de la existencia de soluciones de problemas como (2.5), y nos permiten considerar

casos que no pueden ser tratados a partir de lo probado en [32], [51], [81], [87]. En particular, estudiamos un tipo de no linealidad g, la cual no satisface la hipótesis **[P]**, y para la que no existen ninguno de los límites $g(+\infty)$, $g(-\infty)$. También incluimos algunos casos de resonancia fuerte en infinito (véanse [11], [51], [81]).
La Sección 3 del capítulo se dedica al estudio de algunas propiedades cualitativas de los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi_G(u) = \min_{H_0^1(0,\pi)} \Phi_G\} \\ B &= \{u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi'_G(u) = 0\}. \end{aligned}$$

Probamos que si g es no trivial, entonces bajo las hipótesis del apartado segundo, es posible que B sea finito o infinito (esto marca una diferencia cualitativa importante respecto de los problemas considerados en el Capítulo 1). También mostramos que es posible que A sea finito, aunque B sea infinito. La idea básica será estudiar la restricción del funcional Φ_G a subconjuntos apropiados de $H_0^1(0,\pi)$: aquellos tales que su proyección sobre el subespacio generado por la función sen$(\cdot)$ es fija.

2.2. FUNCIONALES NO COERCIVOS CON MÍNIMO GLOBAL.

2.2.1. RESULTADO PRINCIPAL.

Vamos a comenzar enunciando y demostrando un teorema general sobre existencia de mínimo global de ciertos tipos de funcionales.

$\boxed{\text{TEOREMA 2.1}}$

Sea el problema de contorno (2.5), y supongamos que se verifican las hipótesis

(H1) $\int_0^\pi h(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0$

(H2) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *es acotada. Además es posible elegir* G*, una primitiva de* g*, y* H *una primitiva de* G*, tales que* G *y* H *son acotadas.*

(H3) *Existen sucesiones de números reales* $\{c_n\} \to +\infty$, $\{d_n\} \to -\infty$ *verificando que*

$$\begin{aligned} H(c_n) &= \min_{(-\infty, c_n]} H \\ H(d_n) &= \max_{[d_n, +\infty)} H \end{aligned}$$

Entonces el funcional Φ_G*, definido en (2.6), tiene mínimo global.*

Demostración.

Supongamos que $g \not\equiv 0$, ya que en caso contrario la conclusión del teorema es trivial. El hecho de que (2.5) sea resonante en el primer valor propio (ver Capítulo 1), sugiere una descomposición del espacio $H_0^1(0,\pi) = V \oplus X$ donde

$$V = \{c\,\mathrm{sen}(\cdot) : c \in \mathbb{R}\}$$

y

$$X = \left\{ u \in H_0^1(0,\pi) : \int_0^\pi u(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0 \right\}.$$

Así, cada $u \in H_0^1(0,\pi)$ se puede descomponer de manera única como

$$u(x) = \overline{u}(x) + \tilde{u}(x) \qquad (2.7)$$

con $\overline{u} \in V$ y $\tilde{u} \in X$ (de hecho $\overline{u}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t)\operatorname{sen}(t)dt\right)\operatorname{sen}(x)$).

Además, con el objeto de poner de manifiesto los diferentes papeles desempeñados por las "partes lineal y no lineal" del problema (2.5), el funcional Φ_G se puede descomponer como

$$\Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u) \tag{2.8}$$

con

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mid u'(x) \mid^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(x)|^2 dx - \int_0^\pi h(x)u(x)dx$$

definido en (2.3), y

$$N_G(u) = \int_0^\pi G(u(x))dx, \quad \forall u \in H_0^1(0,\pi).$$

Es fácil comprobar (ver [10], [70], [87]) que

$$\Phi_0(u) = \Phi_0(\tilde{u}), \quad \forall u \in H_0^1(0,\pi) \tag{2.9}$$

y que existen constantes $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi_0(\tilde{u}) \geq a\|\tilde{u}\| + b, \qquad \forall \tilde{u} \in X. \tag{2.10}$$

Además Φ_0 es débilmente semicontinuo inferiormente, con lo que existe mínimo global de Φ_0 en $H_0^1(0,\pi)$, al cual denotaremos por

$$m_L = \min_X \Phi_0 = \min_{H_0^1(0,\pi)} \Phi_0. \tag{2.11}$$

Por otra parte, es trivial que Φ_G es acotado inferiormente. Denotaremos por

$$m_G = \inf_{H_0^1(0,\pi)} \Phi_G. \tag{2.12}$$

Ahora, puesto que el funcional Φ_G es d.s.c.i. (véase [70]), para probar que m_G es de hecho mínimo, basta con demostrar que existen

sucesiones minimizantes para Φ_G, acotadas. En nuestro caso, vamos a ver que cualquier sucesión minimizante es acotada.
Para ello, vamos a utilizar los lemas siguientes:

$\boxed{\text{LEMA } 2.2}$
Para cualquier sucesión $\{u_n\} = \{\alpha_n \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_n(\cdot)\} \subset H_0^1(0,\pi)$, *con* $\{|\alpha_n|\} \to +\infty$ *y* $\{\tilde{u}_n\}$ *acotada, se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi G(\alpha_n \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_n(x))dx = 0 \tag{2.13}$$

(Para la demostración de este lema, véanse Lema 3 y Lema 4 de [16], así como [87]).

$\boxed{\text{LEMA } 2.3}$
Se verifica la desigualdad

$$m_G < m_L. \tag{2.14}$$

Demostración.
La desigualdad previa se verifica si y sólo si existe $u \in H_0^1(0,\pi)$ tal que

$$\Phi_G(u) < m_L. \tag{2.15}$$

Ahora bien, si $\tilde{u}_L \in X$ es tal que $\Phi_0(\tilde{u}_L) = m_L$, tomando $u \in H_0^1(0,\pi)$ de la forma $u = \alpha \operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_L$, (2.15) nos quedaría

$$m_L > \Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u) = \Phi_0(\tilde{u}_L + \alpha \operatorname{sen}(x)) + N_G(u) =$$

$$= \Phi_0(\tilde{u}_L) + N_G(u) = m_L + N_G(u)$$

que es equivalente a

$$\int_0^\pi G(\alpha \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_L(x))dx < 0. \tag{2.16}$$

Luego, basta probar que (2.16) se verifica, para tener (2.15). Ahora bien, para probar esta última desigualdad, es suficiente proceder como en el Teorema 1 de [16]. ◇

Concluyamos ya la demostración del Teorema 2.1. Para ello, sea $\{u_n\} \subset H_0^1(0,\pi)$ tal que $\{\Phi_G(u_n)\} \to m_G$. Entonces, debido a (2.9) y (2.10), tenemos $\Phi_G(u_n) = \Phi_0(u_n) + N_G(u_n) = \Phi_0(\tilde{u}_n) + N_G(u_n)$ y junto a la acotación de G tenemos que $\{\tilde{u}_n\}$ es acotada. Ahora bien, también $\{\overline{u}_n\}$ es acotada, pues si no fuese así, se tendría que

$$m_G = \lim_{n\to\infty} \Phi_G(u_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi_0(u_n) \geq m_L$$

lo que contradice (2.14).

□

Como consecuencia del teorema anterior, se obtiene el siguiente corolario:

COROLARIO 2.4

Si se verifican (H1), (H2) y (H3), entonces el problema (2.5) tiene solución.

NOTA 2.5

Hemos de mencionar que Solimini, [81], obtiene, bajo hipótesis diferentes, la existencia de solución del problema (2.5), pero no necesariamente la existencia de mínimo global del funcional Φ_G. Nuestro resultado es interesante, además, porque permite el estudio de niveles críticos superiores al nivel crítico mínimo (véase Corolario 3.13 en [10]). Esto es importante desde el punto de vista de la multiplicidad de soluciones.

2.2.2. COMENTARIOS Y EJEMPLOS DE INTERÉS.

A continuación exponemos algunos comentarios y ejemplos que muestran el rango de aplicabilidad e interés del Teorema 2.1.

NOTA 2.6

Es importante observar que (H1) y (H2) no son suficientes para que Φ_G alcance su ínfimo (ver Nota 3.17(i) de [10]).

NOTA 2.7

Una condición suficiente para que se verifique la hipótesis (H3) es la siguiente:

(H3') *Existen sucesiones de números reales $\{c_n\} \to +\infty$, $\{d_n\} \to -\infty$ verificando que*

$$\begin{aligned} H(c_n) &= \min_{\mathbb{R}} H \\ H(dn) &= \max_{\mathbb{R}} H \end{aligned}$$

También, la hipótesis (H3) se verifica claramente si H es una función decreciente.

EJEMPLO 2.8

Las hipótesis (H2) y (H3) se verifican si tomamos H de la forma

$$H(u) = H_1(H_2(u)) \tag{2.17}$$

donde $H_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es T-periódica, y $H_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es tal que $H_2'(u)$ y $H_2''(u)$ son acotadas y $\lim_{|u| \to +\infty} |H_2(u)| = +\infty$.

1. *Por ejemplo, tomando $H_2(u) = u$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$, tendríamos el caso en que g verifica la hipótesis* **[P]**. *Sin embargo el Teorema 2.1 es aplicable a un tipo de problemas más generales, donde se verifican (H2) y (H3), aunque no necesariamente* **[P]**. *Por ejemplo sea*

$$H(u) = \operatorname{sen}(\ln(u^2 + 1))$$

Así

$$G(u) = \frac{2u \cos(\ln(1 + u^2))}{1 + u^2}$$

y derivando de nuevo

$$g(u) = \frac{2(1 - u^2)\cos(\ln(1 + u^2)) - 4u^2 \operatorname{sen}(\ln(1 + u^2))}{(1 + u^2)^2}.$$

Pueden entonces comprobarse fácilmente las hipótesis (H2) y (H3). Sin embargo g no es T-periódica.

Este ejemplo pertenece a la clase de problemas llamados "fuertemente resonantes en infinito"; es decir, aquellos donde se verifican

$$G(\pm\infty) = g(\pm\infty) = 0 \tag{2.18}$$

(véase [11], [31], [32], [51], [81]). Notemos que la condición previa es suficiente para probar la existencia de solución del problema (2.5) si h verifica (H1) (ver [81]), aunque no lo es, en general,

para la existencia de mínimo global de Φ_G. *Para ver esto, basta tomar*

$$G(u) = \frac{1+u^2}{1+u^4}.$$

Entonces $\Phi_G(n\,\mathrm{sen}(\cdot)+\tilde{u}_L) \to m_L$, *con lo que* $m_G \leq m_L$. *Por otra parte, si existe algún* $u \in H_0^1(0,\pi)$ *verificando que* $\Phi_G(u) = m_G$ *entonces* $m_L \geq m_G = \Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u) \geq m_L + N_G(u)$, *por lo tanto* $N_G(u) \leq 0$, *lo cual no es posible.*

2. *Tomando* $H_1(z) = \mathrm{sen}(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$,
   $H_2(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{sen}(x^3)}{1+x^2}dx + \ln(1+u^2)$,
   $H(u)$ *como en (2.17), obtendríamos*

$$G(u) = \cos\left(\int_0^u \frac{\mathrm{sen}(x^3)}{1+x^2}dx + \ln(1+u^2)\right)\left(\frac{2u + \mathrm{sen}(u^3)}{1+u^2}\right)$$

y

$$\begin{aligned} g(u) = \cos&\left(\int_0^u \frac{\mathrm{sen}(x^3)}{1+x^2}dx + \ln(1+u^2)\right) \\ &\left(\frac{(2-2u^2+(3u^2+3u^4)\cos(u^3) - 2u\,\mathrm{sen}(u^3))}{(1+u^2)^2}\right) - \\ -\,\mathrm{sen}&\left(\int_0^u \frac{\mathrm{sen}(x^3)}{1+x^2}dx + \ln(1+u^2)\right)\left(\frac{\mathrm{sen}(u^3)+2u}{1+u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Si h verifica (H1) entonces Φ_G *definido en (2.6) tiene mínimo global, con lo que existe solución de (2.5). Es importante señalar que no existen ni* $g(+\infty)$ *ni* $g(-\infty)$, *con lo que no es posible deducir, para problemas de este tipo, la existencia de solución aplicando los resultados de [81]; sin embargo, aplicando el Teorema 2.1 obtenemos, no sólo existencia de ésta, sino además existencia de mínimo del funcional.*

EJEMPLO 2.9

El Teorema 2.1 permite considerar no linealidades g que son combinación de funciones periódicas adecuadas, de distinto período. Por ejemplo,

$$g(u) = \begin{cases} q_1 \operatorname{sen}(q_1(u+k_1)) & si\ u \le -k_1 \\ 0 & si\ -k_1 \le u \le k_2 \\ q_2 \operatorname{sen}(q_2(u-k_2)) & si\ u \ge k_2 \end{cases}$$

Así, G es

$$G(u) = \begin{cases} -\cos(q_1(u+k_1)) & si\ u \le -k_1 \\ -1 & si\ -k_1 \le u \le k_2 \\ -\cos(q_2(u-k_2)) & si\ u \ge k_2 \end{cases}$$

y H

$$H(u) = \begin{cases} -\dfrac{1}{q_1} \operatorname{sen}(q_1(u+k_1)) + k_1 & si\ u \le -k_1 \\ -u & si\ -k_1 \le u \le k_2 \\ -\dfrac{1}{q_2} \operatorname{sen}(q_2(u-k_2)) - k_2 & si\ u \ge k_2 \end{cases}$$

donde $k_1, k_2, q_1, q_2 > 0$ *y verifican* $\left|\dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{q_2}\right| \le k_2 + k_1$.

- *Se puede comprobar fácilmente que H es clase* $C^2(\mathbb{R})$. *Por otra parte, como se ha de satisfacer la hipótesis (H3) del Teorema 2.1, ha de existir una sucesión de números reales* $\{d_n\} \to -\infty$, *tal que* $H(d_n) = \max\limits_{[d_n,+\infty)} H$. *Esto se consigue si* $\dfrac{1}{q_1} + k_1 \ge \dfrac{1}{q_2} - k_2$, *(en este caso el máximo de la función definida en* $\mathbb{R}^-$ *es mayor que el máximo de la función en* $\mathbb{R}^+$*) y otra sucesión* $\{c_n\} \to +\infty$ *tal que* $H(c_n) = \min\limits_{(-\infty,c_n]} H$, *lo que se consigue si* $\dfrac{-1}{q_1} + k_1 \ge \dfrac{-1}{q_2} - k_2$ *(el mínimo de la función definida en* $\mathbb{R}^+$ *es menor que el mínimo de* *la función definida en* $\mathbb{R}^-$*). Combinando estas dos desigualdades obtenemos* $\left|\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right| \leq k_1 + k_2$.

Las sucesiones de la hipótesis (H3) son $\{c_n\} = \left\{k_2 + \frac{\frac{\pi}{2}}{q_2} + \frac{2n\pi}{q_2}\right\}$ *y* $\{d_n\} = \left\{-k_1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{q_1} - \frac{2n\pi}{q_1}\right\}$, *para* $n \in \mathbb{N}$*; es fácil comprobar que el mínimo vale* $-\frac{1}{q_2} - k_2$ *y el máximo* $\frac{1}{q_1} + k_1$.

NOTA 2.10

El Teorema 2.1 no es válido para el problema no lineal con condiciones de contorno tipo Neumann, esto es, para el problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) + g(u(x)) & = & h(x), \ x \in [0, \pi] \\ u'(0) = u'(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.19}$$

donde g, G *y* H *satisfacen (H2) y (H3),* $h \in C[0, \pi]$ *verifica* $\int_0^\pi h(x)dx = 0$.

Para demostrarlo vamos a considerar el siguiente contraejemplo:

Sea la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$H(u) = \left\{\begin{array}{lll} -(\frac{1}{3}\cos^3(u) - \cos(u) + \frac{2}{3})a_n & si & 2\pi(n-1) \leq u \leq 2\pi n \\ (\frac{1}{3}\cos^3(u) - \cos(u) + \frac{2}{3})a_n & si & -2\pi n \leq u \leq 2\pi(-n+1) \end{array}\right. \tag{2.20}$$

donde $\{a_n\}$ *es una sucesión estrictamente creciente y convergente de números positivos.*

Es fácil probar que (H2) y (H3) del Teorema 2.1 se verifican (tomando $c_n = \pi + 2\pi n$, $d_n = -c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$*). Además,* $G = H'$ *no alcanza su ínfimo. En este caso* $\Phi_G : H^1(0, \pi) \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$\Phi_G(u) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'(x)|^2 dx + \int_0^\pi G(u(x))dx,$$

donde $H^1(0,\pi)$ *es el espacio de Sobolev usual.*

Tenemos que

$$\inf_{H^1(0,\pi)} \Phi_G = \pi \inf_{\mathbb{R}} G, \tag{2.21}$$

o sea, Φ_G *alcanza el mínimo si, y sólo si, existe algún* $u \in H^1(0,\pi)$ *tal que*

$$\Phi_G(u) = \pi \inf_{\mathbb{R}} G. \tag{2.22}$$

Entonces u *debe ser constante, en cuyo caso (2.22) no es posible.*

NOTA 2.11

Notemos que si g *verifica* $[\mathbf{P}]$, *la conclusión del Teorema 2.1 sí es cierta para el problema de Neumann.*

NOTA 2.12

Respecto del problema (2.19), no sabemos, sin embargo, si se verifica el Teorema 2.1, en lugar de con la hipótesis (H3) con la hipótesis (H3') más algún tipo de suposición adicional sobre el comportamiento de N_G *(para que se verifique una conclusión similar a la del Lema 2.2).*

2.3. ALGUNAS PROPIEDADES CUALITATIVAS.

2.3.1. RESULTADOS PREVIOS.

En esta sección, estudiaremos algunas propiedades cualitativas de los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi_G(u) = m_G\} \\ B &= \{u \in H_0^1(0,\pi) : \Phi_G'(u) = 0\}, \end{aligned}$$

es decir, del conjunto de elementos del espacio de Sobolev $H_0^1(0,\pi)$, que tienen nivel crítico mínimo y del conjunto de puntos críticos del funcional Φ_G (o lo que es lo mismo, del conjunto de soluciones de (2.5)). Obviamente $A \subset B$.

Si g es continua, T-periódica y con valor medio cero, es decir, si verifica la hipótesis [**P**], entonces ha sido probado en [74] que B contiene infinitos elementos (véase también [20]), aunque, según nuestros conocimientos, nada se sabe en este caso sobre el número de elementos del conjunto A. Bajo las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del Teorema 2.1, que se supondrán en toda esta sección, vamos a probar que es posible que el conjunto B sea finito o infinito. Esto marca una diferencia cualitativa importante respecto del tipo de problemas estudiado en el capítulo anterior. Aquí se verá también que, si el término no lineal g satisface la hipótesis [**P**], es posible que A sea finito. La idea básica de todas las demostraciones está basada en la restricción del funcional Φ_G a subconjuntos apropiados de $H_0^1(0,\pi)$. Esta restricción es sugerida por la coercividad del funcional Φ_G sobre el subespacio X.

Comenzamos con alguna notación que será necesaria en el resto del capítulo y también con algunos resultados previos.

Para cada $c \in \mathbb{R}$, denotaremos por W_c al subconjunto de $H_0^1(0,\pi)$ dado por

$$W_c = \left\{ c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u} : \int_0^\pi \tilde{u}(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0 \right\}$$

Vamos a probar que, dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, el funcional Φ_G tiene mínimo global, cuando se restringe al subconjunto W_c:

$\boxed{\text{LEMA } 2.13}$

Para cada $c \in \mathbb{R}$, el funcional $\Phi_G|_{W_c} : W_c \to \mathbb{R}$ tiene mínimo.

Demostración.

Descomponiendo Φ_G como en (2.8), y teniendo en cuenta (2.10) se tiene que

$\Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u) = \Phi_0(\tilde{u}) + N_G(u) \geq a\|\tilde{u}\| + b + N_G(u)$, $\forall u \in H_0^1(0,\pi)$.

Denotando por m_c al ínfimo de $\Phi_G|_{W_c}$, sea $\{c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_{c_n}\}$ una sucesión minimizante. Como

$$\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_{c_n}) \geq \underbrace{a}_{>0} \|\tilde{u}_{c_n}\| + \underbrace{b + N_G(u_{c_n})}_{\text{acotado}}$$

se tiene que $\{\tilde{u}_{c_n}\}$ es acotada.

Ahora, si $c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_{c_n} \rightharpoonup c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}$, como Φ_G es d.s.c.i. entonces $\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}) \leq \liminf \Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_{c_n}) = m_c$, lo que implica que $\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}) = m_c$. □

Teniendo en cuenta el lema previo, es posible definir la función

$$M_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.23}$$

$$M_G(c) = \min \Phi_G|_{W_c}$$

(véase [79] para el problema periódico).

Imponiendo una hipótesis adicional, que exige más regularidad a g y una interacción conveniente entre los valores de su derivada y los valores propios del problema (1.2), vamos a conseguir la unicidad del elemento $\tilde{u}_c \in X$ tal que $\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c) = m_c$.

En efecto, supongamos que, además, se verifica la hipótesis

(H4) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $g'(u) \geq \mu > -3, \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Entonces tenemos el resultado siguiente:

$\boxed{\text{LEMA } 2.14}$

Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, *existe un único elemento* $\tilde{u}_c \in X$ *tal que* $\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c) = m_c$.

Demostración.

Utilizando las ideas del Lema 2.1 de [26], de hecho demostramos que existe un único "punto crítico de $\Phi|_{W_c}$". Para ello, es suficiente probar la desigualdad siguiente:

Existe un número real $m > 0$ tal que

$$\left(\Phi_G'(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c^a) - \Phi_G'(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c^b), \tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b\right) \geq m \int_0^\pi \left(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b\right)^2, \tag{2.24}$$

$\forall \tilde{u}_c^a, \tilde{u}_c^b \in X$.

- En efecto, $(\Phi_G'(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^a) - \Phi_G'(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^b), \tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) =$
$$= \int_0^\pi (c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^a)'(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)' - \int_0^\pi (c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^a)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) +$$
$$+ \int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^a)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) - \int_0^\pi h(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) -$$
$$- \int_0^\pi (c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^b)'(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)' + \int_0^\pi (c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c^b)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) -$$

$$- \int_0^\pi g(c\operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_c^b)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) + \int_0^\pi h(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) =$$

$$= \int_0^\pi (\underbrace{(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)'}_{\tilde{\omega}'})^2 - \int_0^\pi \underbrace{(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)^2}_{\tilde{\omega}^2} +$$

$$+ \int_0^\pi \underbrace{(g(c\operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_c^a) - g(c\operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_c^b))}_{g'(p(x))(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) \text{ T.V.M.}} \underbrace{(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)}_{\tilde{\omega}}$$

Teniendo en cuenta que $g'(u) \geq \mu$, y que se verifica la desigualdad $\int_0^\pi (\tilde{w}(x))^2 dx \leq \frac{1}{4}\int_0^\pi (\tilde{w}'(x))^2 dx$, $\forall \tilde{w} \in X$ (véase [61]), se obtiene que la anterior expresión es mayor o igual que

$$(4 + \mu - 1)\int_0^\pi (\tilde{\omega})^2,$$

y para concluir basta recordar que $\mu > -3$.

□

NOTA 2.15
Notemos que, en lugar de (H4), es posible imponer la hipótesis, menos restrictiva:

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \geq \mu > -3, \quad \forall s \neq t$$

En adelante, denotaremos por $\tilde{u}_c \in X$ al único elemento tal que $\Phi_G(c\operatorname{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c) = m_c$.

Claramente, M_G es una función continua. También, otra propiedad obvia, y que facilitará el estudio del conjunto A (recordemos, el conjunto de elementos de nivel crítico mínimo) es

$$\min_{c \in \mathbb{R}} M_G = \min_{u \in H_0^1(0,\pi)} \Phi_G$$

Observemos que

$$W_c = \left\{u \in H_0^1(0,\pi) : Pu = c\,\mathrm{sen}(\cdot)\right\}$$

donde P es la proyección $P : H_0^1(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$, definida por

$$P(u)(x) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u(t)\,\mathrm{sen}(t)dt\right)\mathrm{sen}(x)$$

Por tanto, por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe $\lambda_c \in \mathbb{R}$, tal que la función $u_c = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c$, satisface la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} -u_c''(x) - u_c(x) + g(u_c(x)) = h(x) + \lambda_c\,\mathrm{sen}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u_c(0) = u_c(\pi) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.25)$$

Es claro que

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(u_c(x))\,\mathrm{sen}(x)dx, \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad (2.26)$$

Así, tenemos el siguiente resultado, que resume esta primera parte:

COROLARIO 2.16

1. *El elemento* $u = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}$ $(\in H_0^1(0,\pi))$ *pertenece al conjunto* A *si, y sólo si,* $\tilde{u} = \tilde{u}_c$ *y* $M_G(c) = m_G$.
2. *El elemento* $u = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}$ $(\in H_0^1(0,\pi))$ *pertenece al conjunto* B *si, y sólo si,* $\tilde{u} = \tilde{u}_c$ *y el correspondiente multiplicador de Lagrange,* λ_c, *es igual a cero.*

Demostración.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $u = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u} \in A$, entonces $\Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}) = m_G = M_G(c)$. Además, por el Lema 2.14, debe ser $\tilde{u} = \tilde{u}_c$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Trivial.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $u = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}$ es punto crítico de Φ_G, entonces $\Phi'_G(u)(w) = 0$ para todo $w \in H_0^1(0,\pi)$. Por otra parte, $\Phi_G|_{W_c}$ tiene mínimo $u_c = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c$, y por (2.24), $\Phi'_G(u_c)(w) = 0$ para todo $w \in X$. Por el Lema 2.14 se obtiene de nuevo que $\tilde{u} = \tilde{u}_c$. Por tanto, el correspondiente $\lambda_c = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Si $u = c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_c$ es solución del problema (2.25) con $\lambda_c = 0$, es solución de (2.5), con lo que es punto crítico.

$\square$

2.3.2. Estudio cualitativo de los conjuntos de puntos críticos y de nivel crítico mínimo.

El conjunto de puntos críticos.

Después de los resultados anteriores, estamos en condiciones de estudiar, en algunos casos importantes, el cardinal de los conjuntos A y B. En este primer resultado, añadiendo una hipótesis sobre una adecuada oscilación de G "en infinito", el conjunto B tiene infinitos elementos.

$\boxed{\text{TEOREMA 2.17}}$

Supongamos que se verifican las hipótesis (H1), (H2), (H3), (H4) y

(H5) *Existen dos sucesiones de números reales* $\{e_n\} \to +\infty$ *y* $\{f_n\} \to +\infty$ *tales que*

$$G(e_n) = \min_{\mathbb{R}} G, \quad G(f_n) = \max_{\mathbb{R}} G$$

Entonces, el funcional Φ_G *tiene mínimo global y el conjunto* B *tiene infinitos elementos.*

Demostración.
La existencia de mínimo ya la tenemos. Pasemos a demostrar que el conjunto B tiene infinitos elementos.

Usando la definición de $\tilde{u}_c$ y (2.10) tenemos que

$$\Phi_G(u_c) \leq \Phi_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_L) = m_L + N_G(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u}_L)$$

y

$$\Phi_G(u_c) = \Phi_0(u_c) + N_G(u_c) \geq a\|\tilde{u}_c\| + b_1,$$

para alguna constante b_1, donde $\|\cdot\|$ indica la norma en el espacio de Sobolev $H_0^1(0,\pi)$. Por tanto, existe una constante $M_1 > 0$, independiente de $c \in \mathbb{R}$, tal que $\|\tilde{u}_c\| \leq M_1$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Puesto que $H_0^1(0,\pi)$ está incluido de manera continua en $C[0,\pi]$, existe $M_2 > 0$, independiente de $c \in \mathbb{R}$, tal que $\|\tilde{u}_c\|_0 \leq M_2$, $\forall c \in \mathbb{R}$, donde $\|\cdot\|_0$ denota la norma uniforme. Como los Multiplicadores de Lagrange son uniformemente acotados (ver (2.26)), y

$$\left.\begin{array}{l} -u_c''(x) - u_c(x) + g(u_c(x)) = h(x) + \lambda_c \mathrm{sen}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u_c(0) = u_c(\pi) = 0 \end{array}\right\} \quad (2.27)$$

razonando como en (1.17), concluimos que existe una constante $M > 0$, independiente de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\tilde{u}_c\|_0 \leq M, \quad \|\tilde{u}'_c\|_0 \leq M, \quad \|\tilde{u}''_c\|_0 \leq M, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

A partir de estas acotaciones, teniendo en cuenta las propiedades de u_c, y siguiendo un razonamiento similar al realizado en [16] (como se hizo en la Sección 2 del Capítulo 1 para demostrar (1.19)), llegamos a que, para $|c|$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\lambda(c) &= \int_0^\pi g(u_c(x))\,\mathrm{sen}(x)dx = \\ &= \int_0^\pi \left(G\left(\|u_c\|_0\right) - G\left(u_c(x)\right)\right)\frac{c + \cos(x)\tilde{u}'_c(x) - \mathrm{sen}(x)\tilde{u}''_c(x)}{\left(u'_c(x)\right)^2}dx.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por la continuidad de $\tilde{u}_c$ con respecto a c ([24], [26]), existen dos sucesiones de números reales $\{r_n\} \to +\infty$, $\{s_n\} \to +\infty$ tales que

$$G\left(\|u_{r_n}\|_0\right) = \min_{\mathbb{R}} G,\ G\left(\|u_{s_n}\|_0\right) = \max_{\mathbb{R}} G$$

con lo que

$$\lambda(r_n) \leq 0 \leq \lambda(s_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por último, por ser $\lambda(c)$ de clase C^1 respecto a c ([24] y [26]), el teorema queda demostrado. □

EJEMPLO 2.18
Una aplicación concreta de este teorema es el Ejemplo 2.9.

NOTA 2.19

Es interesante que recordemos que la hipótesis más significativa del Teorema 2.1, utilizada para probar la existencia de mínimo global de Φ_G, era la relativa al comportamiento de H en el infinito. En el teorema que acabamos de probar, el papel primordial, para conseguir que el conjunto B contenga infinitos elementos, es desempeñado por el comportamiento de G en infinito (hipótesis (H5)).

NOTA 2.20

Pensemos que si g verifica **[P]**, *entonces se verifican (H2), (H3) y (H5). Así pues, acabamos de dar otra demostración, desde el punto de vista variacional, del Apartado 2 del Teorema 1.4 (donde se usó el Método Alternativa).*

NOTA 2.21

En el teorema anterior, la hipótesis (H5) puede sustituirse por la siguiente:

(H5') *Existen dos sucesiones de números reales $\{e_n\} \to -\infty$ y $\{f_n\} \to -\infty$ tales que*

$$G(e_n) = \min_{\mathbb{R}} G, \quad G(f_n) = \max_{\mathbb{R}} G.$$

NOTA 2.22

Creemos que la hipótesis (H4) puede ser eliminada del teorema anterior. La idea básica es usar razonamientos análogos a los del Capítulo 1, cuando se trató, en primer lugar, el caso en que la ecuación auxiliar del

Método Alternativa era resoluble de manera única, y, a continuación, el caso general.

Prosiguiendo con nuestro estudio, veamos que con las hipótesis del Teorema 2.1, es posible que el conjunto B sea finito.

$\boxed{\text{TEOREMA 2.23}}$

Supongamos que se verifican las hipótesis (H1), (H2), (H4) y

(H6) g *analítica*

(H7) $g(u)u > 0, \ \forall u \neq 0$

Entonces, el funcional Φ_G *tiene mínimo global y el conjunto* B *tiene un número finito de elementos.*

Demostración.

Notar que (H2) y (H7) implican que H es estrictamente decreciente, con lo que se verifica (H3), y así tenemos la existencia de mínimo global. Demostraremos ahora que el conjunto B tiene un número finito de elementos usando el método del Capítulo 1 (Método Alternativa). En efecto, las soluciones de (2.5) son de la forma $c\,\mathrm{sen}(x)+\tilde{u}_c(x)$, donde

$$\int_0^\pi g(c\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{u}_c(x))\,\mathrm{sen}(x)dx = 0$$

y la parte izquierda de la relación anterior, es una función Γ, analítica respecto de $c \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, B es finito si, y sólo si, lo es el conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R} : \Gamma(c) = 0\} = \Gamma^{-1}\{0\}$$

Observemos que C es acotado:

En efecto, si C no estuviese acotado, $\exists\{c_n\} \subset C$ tal que $\{c_n\} \to +\infty$ o $\{c_n\} \to -\infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que se da la primera posibilidad. Entonces $c_n \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_{c_n}(x) > 0$ en $(0, \pi)$ para n suficientemente grande (recordemos que, por (1.17), las funciones $\tilde{u}_{c_n}(x)$ y sus derivadas de primer y segundo orden, están uniformemente acotadas). De aquí se obtiene $g(c_n \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_{c_n}(x)) > 0$ (por (H7)), y por tanto, $\int_0^\pi g(c_n \operatorname{sen}(x) + \tilde{u}_{c_n}(x)) \operatorname{sen}(x)dx \neq 0$.

Para el caso en que $\{c_n\} \to -\infty$ el razonamiento es análogo.

Además C es un conjunto finito, pues si no lo fuera, por el Principio de Identidad para funciones analíticas (ver demostración de la Proposición 1.9 para referencias), $\Gamma \equiv 0$, cosa que no es posible (ver Capítulo 1), ya que como $|c|$ puede ser tan grande como se quiera, $\Gamma_{\tilde{h}}$ toma valores positivos y negativos. □

EJEMPLO 2.24
Tomando la función $g(u) = \dfrac{2u}{(1+u^2)^2}\dfrac{1}{k}$, *con* k *una constante positiva suficientemente grande, se verifican todas las hipótesis del Teorema 2.23. En este caso, las primitivas serían* $H(u) = -\dfrac{\arctan(u)}{k}$, $G(u) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{1}{k}$.

El conjunto de puntos de nivel crítico mínimo.

A continuación estudiamos el cardinal del conjunto A. Comenzamos con un resultado que muestra que A puede ser finito.

$\boxed{\text{TEOREMA 2.25}}$

Supongamos que g no es idénticamente cero y se verifican las hipótesis (H1), (H2), (H3), (H4) y (H6)

Entonces, el funcional Φ_G tiene mínimo global y el conjunto A tiene un número finito de elementos.

Demostración.

La existencia de mínimo está garantizada por el Teorema 2.1. Para concluir basta demostrar que el conjunto:

$D = \{c \in \mathbb{R} : M_G(c) = m_G\} = M_G^{-1}(m_G)$ es finito, donde M_G se definió en (2.23). Ahora bien,

$$\lim_{c \to \pm\infty} M_G(c) = m_L. \tag{2.30}$$

En efecto, para probar esta relación, observemos que

$$\begin{aligned} & m_L + \int_0^\pi G(c\sin(x) + \tilde{u}_c(x))\,dx \leq \\ & \leq \Phi_0(\tilde{u}_c) + \int_0^\pi G(c\sin(x) + \tilde{u}_c(x))\,dx \leq \\ & \leq \Phi_G(u_c) \leq \Phi_G(c\sin(\cdot) + \tilde{u}_L) \leq \\ & \leq m_L + \int_0^\pi G(c\sin(x) + \tilde{u}_L(x))\,dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Entonces, usando (2.28) y el Lema 2.2, obtenemos (2.30).

Ahora, para ver que D es acotado basta recordar, ver Teorema 2.1, que $m_G = \min_{\mathbb{R}} M_G < m_L$. Además, M_G es analítica. Nuevamente, el Principio de Identidad para funciones analíticas, prueba que el conjunto D (y por tanto A), es finito. □

Para concluir esta sección, mostremos que, bajo las hipótesis de la Sección 1 de este capítulo, es posible que sea infinito el conjunto de puntos críticos del funcional Φ_G, mientras que el conjunto de puntos de nivel crítico mínimo es finito. Este resultado es nuevo, incluso, para el tipo de términos no lineales g que satisfacen la hipótesis [**P**].

COROLARIO 2.26

Supongamos que se verifican las hipótesis (H1), (H2), (H3), (H4), (H5) y (H6).

Entonces, el funcional Φ_G tiene mínimo global, el conjunto A es finito y el conjunto B infinito.

COROLARIO 2.27

Supongamos que se verifican las hipótesis (H1), (H4), (H6) y [P].

Entonces, el funcional Φ_G tiene mínimo global, el conjunto A es finito y el conjunto B infinito.

EJEMPLO 2.28

El corolario anterior es aplicable al problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + \operatorname{sen}(u(x)) & = & h(x),\ x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \qquad (2.32)$$

donde h verifica (H1).

2.4. EXTENSIONES Y GENERALIZACIONES.

1. Es de esperar que sea cierto un resultado similar al del Teorema 2.1 para el correspondiente problema en Ecuaciones en Derivadas Parciales; es decir, para el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) & = & h(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (2.33)$$

donde Ω es un dominio regular y acotado de $\mathbb{R}^n$, Δ es el operador laplaciano, λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ (el espacio de Sobolev usual), y $h \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ verificando

$$\int_\Omega h(x)\phi_1(x)dx = 0. \qquad (2.34)$$

siendo $\phi_1(x)$ la función propia positiva correspondiente al primer valor propio λ_1.

Sin embargo, hasta ahora no hemos podido conseguirlo, debido a la dificultad de probar una desigualdad como (2.16) (ver [72]). Creemos que usando algunas de las ideas contenidas en [16] y [30], sería posible probar tal resultado, al menos en algunos tipos especiales de dominios Ω.

2. Usando razonamientos análogos a los utilizados en este capítulo, es posible extender los resultados mostrados a problemas más generales, tales como los de tipo Sturm-Liouville:

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \lambda_1 r(x)u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0,\pi] \\ \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) & = & 0 \\ \alpha_1 u(\pi) + \beta_1 u'(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.35}$$

donde los coeficientes verifican $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$, $(\alpha_0 - \beta_0)(\alpha_1 - \beta_1) > 0$, $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, $h \in C[0,\pi]$, $r \in C^1\left([0,\pi], \mathbb{R}^+\right)$, g satisface [P] y λ_1 es el primer valor propio del problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - \lambda r(x)u(x) & = & 0, \quad x \in [0,\pi] \\ \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) & = & 0 \\ \alpha_1 u(\pi) + \beta_1 u'(\pi) & = & 0. \end{array}\right\} \tag{2.36}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

3.1. PRELIMINARES.

En este capítulo, extendemos algunos de los resultados del Capítulo 1 al caso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Más concretamente, consideramos el problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) &= h(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad\quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y regular, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ (el operador laplaciano) en $H_0^1(\Omega)$ (espacio de Sobolev usual), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica

$$[\mathbf{P}] \qquad g \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \int_0^T g(s)ds = 0$$

y $h \in C(\overline{\Omega})$.

Como en el Capítulo 1, el problema (3.1) es un problema resonante en el valor propio principal con no linealidad periódica. Por lo tanto, la condición clásica de Landesman-Lazer, que garantiza la existencia de solución para gran cantidad de problemas de valores en la frontera no lineales (ver [38], [42], [49]), no se verifica.

Como hemos comentado anteriormente, el tipo de no linealidades que verifican la hipótesis **[P]** surge frecuentemente en el estudio de fenómenos naturales ([54]) y esta clase de problemas, para el caso n=1, es la que hemos tratado en los dos capítulos anteriores. El caso de E.D.P. ha sido poco tratado en la literatura matemática sobre el tema (véanse [30], [32], [33], [51], [75], [81]) y, según nuestros conocimientos, gran cantidad de cuestiones básicas permanecen sin respuesta en la actualidad. Por ejemplo, la descripción, de forma análoga a como se hizo en el Capítulo 1 con E.D.O., de las funciones h para las cuales (3.1) tiene solución. En este capítulo vamos a mostrar algunos avances novedosos en esta dirección.

Si denotamos por $\phi_1(x)$ a la función propia positiva correspondiente a λ_1, normalizada en el sentido

$$\int_\Omega |\nabla \phi_1(x)|^2 dx = 1,$$

entonces, toda función $h \in C(\overline{\Omega})$ se puede descomponer (de manera única) como $h(x) = a\phi_1(x) + \tilde{h}(x)$, $a \in \mathbb{R}$, y $\tilde{h}$ verificando

$$\textbf{(H1)} \qquad \int_\Omega \tilde{h}(x)\phi_1(x)dx = 0.$$

Utilizando el Método Alternativa, sub y supersoluciones, y técnicas topológicas y variacionales, se puede demostrar (Teorema 2 de [81], ver también [2], [18] y Nota 1.2 del Capítulo 1) que para cada $\tilde{h}$ dado, existen números reales $a_1(\tilde{h})$, $a_2(\tilde{h})$, con $a_1(\tilde{h}) \leq 0 \leq a_2(\tilde{h})$ tales que (3.1) tiene solución si, y sólo si, $a \in [a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})] \equiv I_{\tilde{h}}$. Nos podemos preguntar, intentando buscar un paralelismo con el Teorema 1.6 del Capítulo 1, entre otras cosas, si el intervalo $I_{\tilde{h}}$ puede ser degenerado (quedar reducido al punto cero) para alguna función $\tilde{h}$ y alguna no linealidad no trivial g. En el Teorema 1.6 hemos demostrado que si $n = 1$, y la no linealidad g no es idénticamente cero, entonces $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$, para todo $\tilde{h}$. Sin embargo, como hemos comentado en la Sección 4 del Capítulo 1, no parece posible la extensión de la demostración allí realizada, para n general, debido a la dificultad de probar la oscilación de algunos términos procedentes de la ecuación de bifurcación del Método Alternativa. La razón básica estriba en que, para E.D.P., ϕ_1 no se conoce, en general, explícitamente. Pero, incluso en aquellos tipos de dominios donde ϕ_1 es conocido, la transcripción literal formal de la demostración realizada en el Teorema 1.6, no despeja las dudas al respecto. Según nuestros conocimientos, aún no ha sido demostrado un resultado similar al del Teorema 1.6 para el caso de Ecuaciones en Derivadas Parciales (ni para el problema (3.1) ni para el correspondiente problema con condiciones de frontera tipo Neumann).

En este capítulo, usando técnicas completamente diferentes (el punto de vista variacional junto con los Multiplicadores de Lagrange) presentamos un nuevo resultado general (ver Teorema 3.2) sobre la existencia de solución de (3.1), que permite probar que el intervalo $I_{\tilde{h}}$ es no degenerado en distintas situaciones:

1. Problemas como (3.1), para dominios generales, y donde el funcional energía tiene la geometría del Teorema del Punto de Silla de Rabinowitz ([71]).

2. Problemas como (3.1), para dominios generales, con algunas hipótesis adicionales sobre $g(0)$ y $g'(0)$.

3. Problemas como (3.1) donde el dominio Ω es del tipo tratado en [30] o [75], tales como dominios acotados convexos en dimensión dos, o clases especiales de dominios anulares en dimensión mayor o igual a dos.

3.2. RESULTADO PRINCIPAL.

Sea el problema:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) & = & \tilde{h}(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que verifica [P], y $\tilde{h}(x)$ satisface (H1). Si adoptamos el punto de vista variacional, podemos definir el funcional $\Phi_G : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.3}$$

donde

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\, dx - \int_\Omega \tilde{h}(x)u(x)dx \tag{3.4}$$

y

$$N_G(u) = \int_\Omega G(u(x))dx \tag{3.5}$$

con $G'(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$, y $\int_0^T G(s)ds = 0$.

Es sabido (ver [70]) que $\Phi_G \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y que $\Phi_G'(u) = 0$ si, y sólo si, u es una solución débil de (3.2).

Descomponiendo el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, como

$$H_0^1(\Omega) = V \oplus X = \{c\phi_1 : c \in \mathbb{R}\} \oplus \left\{\tilde{u} \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \tilde{u}(x)\phi_1(x)dx = 0\right\} \tag{3.6}$$

podemos escribir, de manera única, cualquier $u \in H_0^1(\Omega)$ de la forma $u = c\phi_1 + \tilde{u}$, con $c \in \mathbb{R}$ y $\tilde{u} \in X$. Se puede probar fácilmente (ver [10]) que

$$\Phi_0(u) = \Phi_0(\tilde{u}), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.7}$$

y que

$$\Phi_0(\tilde{u}) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \|\tilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left(\int_\Omega \left|\tilde{h}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.8}$$

donde λ_2 es el segundo valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Estas propiedades implican la existencia de mínimo global de Φ_0 (ya que es d.s.c.i.). Para su uso más adelante, denotaremos por m_L a este mínimo, y por $\tilde{u}_L$ al único elemento de X tal que $\Phi_0(\tilde{u}_L) = m_L$.

Según nuestros conocimientos, aún no es conocido si Φ_G alcanza o no su ínfimo (ver [16] para la respuesta afirmativa en el caso ordinario). En cualquier caso, las propiedades anteriores sugieren que para cada c fijo, la cantidad $\Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u})$, con $\tilde{u}$ variando en X, debe tener mínimo (que depende de c). Vamos a demostrarlo:

LEMA 3.1

Para cada $c \in \mathbb{R}$, denotamos por W_c al subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ dado por

$$W_c = \{c\phi_1(\cdot) + \tilde{u} : \tilde{u} \in X\}.$$

Entonces $\Phi_G|_{W_c}$ alcanza su ínfimo.

Demostración.
Teniendo en cuenta la descomposición (3.3), y las propiedades (3.7) y (3.8) tenemos que

$$\Phi_G(u) = \Phi_0(u) + N_G(u) = \Phi_0(\tilde{u}) + N_G(u) \geq \tag{3.9}$$
$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \|\tilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\left(\int_\Omega \left|\tilde{h}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + N_G(u).$$

Puesto que g satisface [P], G es acotada, con lo que deducimos que existe $\inf\{\Phi_G(u) : u \in W_c\}$.

Sea $\{c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_c$ una sucesión minimizante de $\Phi_G|_{W_c}$. Entonces, por (3.9) y siguiendo el mismo razonamiento que en el Lema 2.13 del Capítulo 2, $\{\tilde{u}_n\}$ está acotada. Por lo tanto, debe existir algún $\tilde{u} \in X$ tal que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ (de hecho, debe existir algún $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{u}_u \rightharpoonup u$, pero esto implica que $u \in X$). Así $c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}_n \rightharpoonup c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}$ y puesto que Φ_G es d.s.c.i. llegamos a que

$$\Phi_G\left(c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}\right) \leq \liminf \Phi_G\left(c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}_n\right) = \inf\{\Phi_G(u) : u \in W_c\}.$$

Esto implica que $\Phi_G\left(c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}\right) = \inf\{\Phi_G(u) : u \in W_c\}$. □

Teniendo en cuenta el lema previo, tiene sentido definir la función

$$M_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$M_G(c) = \min_{W_c} \Phi_G$$

que fácilmente se comprueba que es continua.

En lo que queda de capítulo, mientras no se diga explícitamente otra cosa, supondremos la hipótesis adicional siguiente, que relaciona la derivada de g con los dos primeros valores propios del operador $-\Delta$

en $H_0^1(\Omega)$:

(H2) $\quad g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $g'(u) > -(\lambda_2 - \lambda_1), \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Esta hipótesis hace posible el estudio de propiedades adicionales de la función M_G. Veamos, con un razonamiento análogo al del Lema 2.14 del Capítulo 2, tomando $\mu = \min_{u\in\mathbb{R}} g'(u)$ (ver también [26]) que, bajo las hipótesis [P], (H1) y (H2), se cumple que dado $c \in \mathbb{R}$, existe un único $\tilde{u}_c \in X$ tal que $\Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u}_c) = M_G(c)$. Para ello, es suficiente probar la propiedad siguiente:

Existe un número real $m > 0$ tal que, $\forall \tilde{u}_c^a, \tilde{u}_c^b \in X$ se verifica:

$$\left(\Phi_G'(c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}_c^a) - \Phi_G'(c\phi_1(\cdot) + \tilde{u}_c^b), \tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b\right) \geq m \int_\Omega \left(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b\right)^2. \tag{3.10}$$

- En efecto,

$$\begin{aligned}
&(\Phi_G'(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^a) - \Phi_G'(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^b), \tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) = \\
&= \int_\Omega \nabla(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^a)\nabla(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) - \lambda_1 \int_\Omega (c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^a)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) + \\
&+ \int_\Omega g(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^a)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) - \int_\Omega h(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) - \\
&- \int_\Omega \nabla(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^b)\nabla(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) + \lambda_1 \int_\Omega (c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^b)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) - \\
&- \int_\Omega g(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^b)(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) + \int_\Omega h(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b) = \\
&= \int_\Omega \left|\nabla(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)\right|^2 - \lambda_1 \int_\Omega ((\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)^2) + \\
&+ \int_\Omega (g(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^a) - g(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c^b))(\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g'(u) \geq \mu$, y que se verifica la desigualdad $\int_\Omega (\tilde{w}(x))^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_2} \int_\Omega |\nabla \tilde{w}(x)|^2 \, dx$, $\forall \tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$\int_\Omega \tilde{u}(x)\phi_1(x)dx = 0$ (ver [61]), se obtiene que la expresión anterior es mayor o igual que

$$(\lambda_2 - \lambda_1 + \mu)\int_\Omega (\tilde{u}_c^a - \tilde{u}_c^b)^2,$$

y para concluir basta recordar que $\mu > -(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Se puede probar que M_G es de hecho clase C^1 ([26]).

La relación entre el problema (3.1) y la función M_G la exponemos en el siguiente teorema:

$\boxed{\text{TEOREMA 3.2}}$

1. *$\forall c \in \mathbb{R}$, la función $u_c = c\phi_1 + \tilde{u}_c$ es solución del problema:*

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u_c(x) - \lambda_1 u_c(x) + g(u_c(x)) = \tilde{h}(x) + \lambda(c)\phi_1(x), \quad x \in \Omega \\ u_c(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

donde

$$\lambda(c) = \lambda_1 \int_\Omega g(u_c(x))\phi_1(x)dx, \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

2. *Recíprocamente, si $a \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, $u = c_u\phi_1 + \tilde{u}$, es solución de*

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) = \tilde{h}(x) + a\phi_1(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

entonces $\tilde{u} = \tilde{u}_{c_u}$ y $a = \lambda(c_u)$.

Demostración.

1. Sea la función

$$P : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$P(u) = \int_\Omega u(x)\phi_1(x)dx,$$

Notemos que

$$W_c = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \; P(u) = \frac{c}{\lambda_1} \right\}.$$

Entonces, por el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, obtenemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$ existe algún número real $\lambda(c)$ verificando $\Phi_G'(u_c) = \lambda(c)P'(u_c)$. Esto último es justamente (3.11). El multiplicador de Lagrange es, precisamente

$$\lambda(c) = \lambda_1 \int_\Omega g(u_c(x))\phi_1(x)dx.$$

2. Si un elemento $u \in H_0^1(\Omega), u = c_u\phi_1 + \tilde{u}$, es solución débil de (3.13), entonces u es punto crítico del funcional

$$J_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido como

$$J_a(u) = \Phi_G(u) - \int_\Omega a\phi_1(x)u(x)dx$$

Por tanto, $J_a'(u)(v) = 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Esto implica

$$\Phi_G'(u)(v) = a\int_\Omega \phi_1(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, obtenemos

$$\Phi_G'(u)(\tilde{v}) = 0, \qquad \forall\, \tilde{v} \in X. \tag{3.14}$$

Ahora, considerando que

$$\Phi'_G(c_u\phi_1 + \widetilde{u}_{c_u})(\widetilde{v}) = 0, \qquad \forall \widetilde{v} \in X$$

y teniendo en cuenta (3.10), podemos concluir que $\widetilde{u} = \widetilde{u}_{c_u}$.

Por otra parte, multiplicando ambos miembros de (3.13) por ϕ_1 e integrando en Ω obtenemos $a = \lambda(c_u)$. Esto concluye la demostración del teorema.

□

Recordemos que nuestro propósito es establecer condiciones (sobre g y Ω), que garanticen que el intervalo $I_{\widetilde{h}}$ es no trivial. Teniendo en cuenta los resultados previos, esto es equivalente a probar que algún multiplicador $\lambda(c)$, definido en (3.12), es distinto de cero. En la siguiente sección mostramos tres formas distintas de conseguirlo, donde se ven implicadas, respectivamente, condiciones sobre la primitiva de la función $\lambda(c)$, la derivada de tal función y la propia función $\lambda(c)$.

3.3. CASOS PARTICULARES DE RANGO NO DEGENERADO.

3.3.1. CONDICIONES SOBRE UNA PRIMITIVA DE $\lambda(c)$.

PROPOSICIÓN 3.3

Supongamos que se verifican las hipótesis [P], (H1) y (H2).

Entonces la función $M_G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y se verifican

1.

$$M'_G(c) = \frac{\lambda(c)}{\lambda_1}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

2.

$$\lim_{c \to \pm\infty} M_G(c) = m_L.$$

Demostración.

1. Por la hipótesis (H2), tenemos que $\tilde{u}_c$ es de clase C^1 con respecto a c (ver [26]). Por lo tanto, $M_G(c) = \Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u}_c)$ es de clase C^1 con respecto a c.

   Por otra parte, por la regla de la cadena,

$$
\begin{aligned}
M_G'(c) &= \frac{dM_G(c)}{dc} = \Phi_G'(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\left(\phi_1 + \frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right) = \\
&= \int_\Omega \nabla(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\nabla\left(\phi_1 + \frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx - \\
&-\lambda_1\int_\Omega (c\phi_1 + \tilde{u}_c)\left(\phi_1 + \frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx - \\
&-\int_\Omega \tilde{h}\left(\phi_1 + \frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx + \int_\Omega g(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\left(\phi_1 + \frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\nabla\phi_1\,dx - \lambda_1\int_\Omega (c\phi_1 + \tilde{u}_c)\phi_1\,dx = \\
&= c\int_\Omega \nabla\phi_1\nabla\phi_1\,dx - c\lambda_1\int_\Omega \phi_1^2\,dx + \\
&+ \int_\Omega \nabla\tilde{u}_c\nabla\phi_1 - \lambda_1\int_\Omega \tilde{u}_c\phi_1\,dx = 0,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

ya que $-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1$.

Además, $\dfrac{d}{dc}\tilde{u}_c \in X$.

- En efecto, $\tilde{u}_c(x)$ verifica que $\int_\Omega \tilde{u}_c(x)\phi_1(x) = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

  Derivando respecto a c tenemos $0 = \int_\Omega \dfrac{d}{dc}\tilde{u}_c(x)\phi_1(x)dx$.

Teniendo esto en cuenta, y el hecho de que $\Phi_G'(u_c)(v) = 0$, $\forall\, v \in X$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\nabla\left(\frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx - \lambda_1\int_\Omega (c\phi_1 + \tilde{u}_c)\left(\frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx - \\
&-\int_\Omega \tilde{h}\left(\frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx + \int_\Omega g(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\left(\frac{d}{dc}\tilde{u}_c\right)dx = 0.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Con lo que podemos concluir, sustituyendo (3.16) y (3.17) en (3.15), que

$$M'_G(c) = \int_\Omega g(c\phi_1 + \tilde{u}_c)\phi_1 \, dx = \frac{\lambda(c)}{\lambda_1}, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

2. De (3.7) y (3.8), se deduce la existencia de dos números reales $a, b > 0$ tales que

$$\Phi_G(u_c) \geq a \, \|\tilde{u}_c\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b \, \|\tilde{u}_c\|_{H^1_0(\Omega)} + N_G(u_c).$$

Por otra parte, si $\tilde{u}_L \in X$ es tal que $\Phi_0(\tilde{u}_L) = m_L$, tenemos

$$\Phi_G(u_c) \leq \Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L) = m_L + N_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L) \leq D$$

para alguna constante $D \in \mathbb{R}$, independiente de $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$D \geq \Phi_G(u_c) \geq a \, \|\tilde{u}_c\|^2_{H^1_0(\Omega)} - b \, \|\tilde{u}_c\|_{H^1_0(\Omega)} + N_G(u_c)$$

Así, existe alguna constante $M > 0$ para la cual $\|\tilde{u}_c\|_{H^1_0(\Omega)} \leq M$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} m_L + N_G(u_c) &\leq \Phi_0(\tilde{u}_c) + N_G(u_c) = \Phi_G(u_c) \leq \\ &\leq \Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L) = m_L + N_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L). \end{aligned}$$

y puesto que

$$\lim_{|c|\to\infty} N_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L) = \lim_{|c|\to\infty} N_G(u_c) = 0 \qquad (3.18)$$

(ver [81]), deducimos que $\lim_{c\to\pm\infty} M_G(c) = m_L$.

□

COROLARIO 3.4

Bajo las hipótesis [P], (H1), (H2), si

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } M_G(c) \neq m_L \tag{3.19}$$

entonces $I_{\tilde{h}}$ *es no trivial. Más precisamente,* $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$.

Teniendo en cuenta que $m_L + N_G(u_c) \leq M_G(c) \leq m_L + N_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L)$, tenemos, por ejemplo, dos maneras diferentes de obtener (3.19):

1.
$$\exists c_0 \in \mathbb{R} : N_G(c_0\phi_1 + \tilde{u}_{c_0}) = \int_\Omega G(c_0\phi_1 + \tilde{u}_{c_0}) > 0 \tag{3.20}$$

2.
$$\exists c_0 \in \mathbb{R} : N_G(c_0\phi_1 + \tilde{u}_L) = \int_\Omega G(c_0\phi_1 + \tilde{u}_L) < 0 \tag{3.21}$$

EJEMPLO 3.5

Aquí usamos la condición (3.20):

Sea el problema de valores en la frontera

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) - \operatorname{sen}(u(x)) = a\phi_1(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

donde $\lambda_2 - \lambda_1 > 1$. *Entonces existen* $a_1(0) < 0 < a_2(0)$ *tales que este problema tiene solución si, y sólo si,* $a \in [a_1(0), a_2(0)]$.

En este caso, $G(u) = \cos(u)$, $c_0 = 0$ *y* $\tilde{u}_0 = 0$.

EJEMPLO 3.6

Aquí usamos la condición (3.21):

Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + \operatorname{sen}(u(x)) + \cos(u(x)) = a\phi_1(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

donde $\lambda_2 - \lambda_1 > \sqrt{2}$. *Entonces existen* $a_1(0) < 0 < a_2(0)$ *tales que este problema tiene solución si, y sólo si,* $a \in [a_1(0), a_2(0)]$.

En este caso $G(u) = -\cos u + \operatorname{sen} u$, $c_0 = 0$ *y* $\tilde{u}_0 = 0$.

NOTA 3.7

Supongamos que, además de las hipótesis [P], (H1) y (H2), el funcional Φ_G *tiene la geometría del Teorema del Punto de Silla de Rabinowitz (ver [71]); entonces se satisface la siguiente condición:*

$$\exists r > 0 \text{ tal que } \Phi_G(c\phi_1) < M_G(0) \text{ si } |c| = r.$$

Por lo tanto $M_G(c) = \Phi_G(c\phi_1 + \tilde{u}_c) \leq \Phi_G(c\phi_1) < M_G(0)$, *o sea,*

$$M_G(c) < M_G(0), \qquad \text{si } |c| = r$$

Consecuentemente, M_G *es una función no constante y el intervalo* $I_{\tilde{h}}$ *es no trivial.*

En particular, la condición anterior se verifica si $m_L < M_G(0)$. *Puesto que*

$$m_L = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \tilde{u}_L(x)|^2\, dx + \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |\tilde{u}_L(x)|^2\, dx \leq 0,$$

y

$$\begin{aligned} M_G(0) &\geq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\left(\left(\int_\Omega \left|\tilde{h}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. + \sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u)| \left(med(\Omega)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + G(0)\, med(\Omega) \end{aligned}$$

(ver [10]), obtenemos como conclusión que [P], (H1), (H2) y

$$G(0)\, med(\Omega) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\left(\left\|\tilde{h}\right\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u)| \left(med(\Omega)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

son suficientes para obtener que el intervalo $I_{\tilde{h}}$ es no degenerado.

EJEMPLO 3.8

Sea el problema de contorno:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) - \operatorname{sen}(u(x)) - \cos(u(x)) &= a\phi_1(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Entonces $G(0) = 1$ y $\sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u)| = \sqrt{2}$. Por lo tanto si Ω es tal que $\lambda_2 - \lambda_1 > \sqrt{2}$ (para que se verifique (H2)), $I_{\tilde{h}}$ es no trivial para $\|\tilde{h}\|_{L^2(\Omega)}$ suficientemente pequeño.

3.3.2. CONDICIONES SOBRE LA DERIVADA DE $\lambda(c)$.

Otra forma de probar que el intervalo $I_{\tilde{h}}$ es no degenerado es demostrar que la derivada de la función $\lambda(c)$, $\lambda'(c)$, no es constantemente igual a cero. Es trivial que

$$\begin{aligned} \lambda'(c) &= \lambda_1 \int_\Omega g'(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c(x))\phi_1^2(x)dx + \\ &+ \lambda_1 \int_\Omega g'(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c(x))\frac{d}{dc}\tilde{u}_c(x)\phi_1(x)dx \end{aligned}$$

En particular,

$$\frac{\lambda'(0)}{\lambda_1} = \int_\Omega g'(\tilde{u}_0(x))\phi_1^2(x)dx + \int_\Omega g'(\tilde{u}_0(x))\frac{d}{dc}\tilde{u}_c(x)|_{c=0}\phi_1(x)dx$$

Si, por ejemplo, suponemos que $\tilde{h} = 0$ y $g(0) = 0$, entonces $\tilde{u}_0(x) \equiv 0$ y consecuentemente

$$\frac{\lambda'(0)}{\lambda_1} = \int_\Omega g'(0)\phi_1^2(x)dx$$

Por lo tanto, si $g'(0)$ es distinto de cero, $\lambda(c)$ no puede ser la función cero.

3.3.3. CONDICIONES SOBRE $\lambda(c)$.

Por último, para dominios especiales, es posible hacer un estudio directo de la función $\lambda(c)$, para obtener la no degeneración del intervalo $I_{\tilde{h}}$. Para ello, teniendo en cuenta algunas ideas de [20] y [30], es posible demostrar que se verifica

$$\lambda_1\lambda(c) = -\int_\Omega (G(u_c(x)) - G(\|u_c\|))\, div \left(\frac{\phi_1(x)\nabla u_c(x)}{|\nabla u_c(x)|^2}\right) dx$$

donde $\|u_c\| = \|u_c\|_{C(\overline{\Omega})}$. Ahora, para ciertas clases de dominios especiales, el término

$$div\left(\frac{\phi_1(x)\nabla u_c(x)}{|\nabla u_c(x)|^2}\right)$$

tiene signo constante en Ω (suponiendo que $|c|$ es suficientemente grande) y podemos elegir c tal que $G(\|u_c\|) = \max_{\mathbb{R}} G$ o $G(\|u_c\|) = \min_{\mathbb{R}} G$. Estas ideas permiten demostrar que $\lambda(c)$ toma valores positivos y negativos. El tipo de dominios que se pueden considerar aquí incluyen dominios acotados convexos si $n = 2$ y algunos dominios anulares si $n \geq 2$ (ver [30] y [75] para los detalles de cálculo del término anterior).

Notas finales

Esta última parte de la Tesis Doctoral está dedicada a la exposición de algunas cuestiones que pueden plantearse a la luz de los resultados obtenidos. Como hemos comentado en la Introducción, tales cuestiones son numerosas. Aquí plantearemos sólo las más significativas desde nuestro punto de vista.

1. Un primer problema es el relacionado con aquellos casos en que puede presentarse amortiguación no lineal (*nonlinear damping*). Más concretamente nos referimos al problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u'(x)) & = & h(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

   con g verificando **[P]** y $h \in C[0,\pi]$. Las ideas preliminares generales se pueden ver en [18], y otra relacionadas en [17], [44], [46], [57], [63].

   Si seguimos un camino similar al del Capítulo 1, podemos descomponer cada $h \in C[0,\pi]$ de forma única como

$$h(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad a \in \mathbb{R}, \tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi] \tag{4.2}$$

   donde

$$\tilde{C}[0,\pi] = \left\{ h \in C[0,\pi] : \int_0^\pi h(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0 \right\}.$$

Así, puede probarse el siguiente lema, análogo al Lema 1.1 (véase [18]):

$\boxed{\text{LEMA } 4.1}$

$\forall \tilde{h} \in \tilde{C}[0,\pi]$ existe un intervalo real, no vacío y acotado, $J_{\tilde{h}}$, tal que el problema:

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - u(x) + g(u'(x)) & = & a\,\mathrm{sen}(x) + \tilde{h}(x), \quad x \in [0,\pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

tiene solución si y sólo si $a \in J_{\tilde{h}}$.

Realizando un desarrollo análogo al del Lema 1.1, llegamos a que $J_{\tilde{h}} = \Gamma_{\tilde{h}}(\Sigma)$, donde

$$\Sigma = \{(c,\tilde{u}) \in \mathbb{R} \times KerP : \tilde{u} = K(I-Q)N(c\,\mathrm{sen}(\cdot) + \tilde{u})\} \tag{4.4}$$

y

$$\Gamma_{\tilde{h}}(c,\tilde{u}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(c\cos(x) + \tilde{u}_c'(x))\,\mathrm{sen}(x)dx \tag{4.5}$$

(ver (1.9.1)).

El problema para estudiar el rango de $\Gamma_{\tilde{h}}$ radica en que, al aparecer ahora la función coseno en el lugar del seno, no parece posible establecer (al menos de forma trivial) un lema similar al Lema 1.5, una fórmula como (1.19), ni continuar con el tipo de demostración hecho con la función $\Gamma_{\tilde{h}}$ en dicho primer capítulo.

De hecho, según nuestros conocimientos, problemas como (4.3) con g satisfaciendo [**P**] no se han estudiado aún. No se sabe ni siquiera si el intervalo $J_{\tilde{h}}$ es cerrado, o si contiene al cero.

2. Cuando se obtiene resultados para un problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet, lo lógico es plantearse la posible extensión al problema con condiciones de frontera tipo Neumann (o periódicas). Ahora bien, hemos de decir:

   (a) Ha sido demostrado en el Capítulo 2 (ver Nota 2.10) que el Teorema 2.1 no es válido para problemas de contorno con condiciones de frontera tipo Neumann. Sería interesante establecer condiciones adicionales para obtener un resultado positivo.

   (b) Respecto al Capítulo 1, veamos qué ocurre con el Método Alternativa.

   Sea el problema contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x)+g(u(x)) & = & h(x), \quad x\in[0,\pi] \\ u'(0)=u'(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

   donde g verifica

$$[\mathbf{P}] \quad g\in C_T(\mathbb{R},\mathbb{R}), \int_0^T g(s)ds=0$$

   denotando $C_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas y T-periódicas reales de variable real, y $h\in C([0,\pi],\mathbb{R})\equiv C[0,\pi]$.

   El problema de valores propios asociado a (4.6) es

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x)-\lambda u(x) & = & 0, \quad x\in[0,\pi] \\ u'(0)=u'(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

   Así, el primer valor propio es $\lambda_1=0$, y su función propia asociada es $u_1\equiv 1$.

Por tanto (4.6) es también un problema resonante en el primer valor propio con no linealidad periódica y con valor medio cero.

Podemos descomponer cada $h \in C[0,\pi]$ de forma única como

$$h(x) = a + \tilde{h}(x), \quad a \in \mathbb{R},\ \tilde{h} \in \tilde{C}_N[0,\pi]$$

donde

$$\tilde{C}_N[0,\pi] = \left\{ h \in C[0,\pi] : \int_0^\pi h(x)dx = 0 \right\}.$$

Hasta ahora no hemos sido capaces de establecer un análogo al Teorema 1.4 en lo que se refiere al Apartado 1, ni del Teorema 1.6 (también en lo que se refiere al Apartado 1), ya que en la expresión de la ecuación de bifurcación

$$a = \int_0^\pi g\,(c + \tilde{u}(x))\,dx$$

(salvo una constante) no parece ponerse tan claramente de manifiesto la oscilación de g, como sucede en (1.19). De hecho, si se intenta probar una fórmula análoga a (1.19) se ve que ello no es posible (véase [41], [48], [52], [60], [80], [84]).

(c) Por último, y respecto a los resultados del Capítulo 3, no parece factible extender de manera fácil la Sección 3 al correspondiente problema de Neumann, ya que, por ejemplo, para demostrar el Apartado 2 de la Proposición 3.3, esto es,

$$\lim_{c \to \pm\infty} M_G(c) = m_L$$

es necesaria la condición asintótica (3.18), que no se verifica para el problema con condiciones de frontera tipo Neumann.

3. Bajo las hipótesis de la segunda sección del Capítulo 2, no conocemos ningún ejemplo no trivial (esto es, con g no idénticamente cero) para el cual el conjunto de los puntos donde se alcanza el mínimo del funcional asociado al problema, definido en la tercera sección de dicho capítulo, sea infinito. Sin embargo, el tipo de razonamiento seguido en dicha sección sugiere que, si g no es analítica, esto pueda suceder.

4. En el Capítulo 3, hemos considerado el problema en E. D. P.

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) & = & h(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio regular acotado, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, $\phi_1(x)$ es la función propia asociada a λ_1 y normalizada en el sentido

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1(x)|^2 dx = 1,$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función verificando

[P] g es continua, T-periódica y con valor medio cero

y $h(x) = a\phi_1(x) + \tilde{h}(x)$, $a \in \mathbb{R}$, con $\tilde{h} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ verificando $\displaystyle\int_\Omega \tilde{h}(x)\phi_1(x)dx = 0$.

La dificultad a la hora de demostrar que el intervalo $[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ es no degenerado, se encuentra en probar la oscilación de la función que se deduce de la ecuación de bifurcación, al aplicar el Método Alternativa:

$$\int_\Omega g\left(c\phi_1(x) + \tilde{u}(x)\right)\phi_1(x)dx.$$

3. Bajo las hipótesis de la segunda sección del Capítulo 2, no conocemos ningún ejemplo no trivial (esto es, con g no idénticamente cero) para el cual el conjunto de los puntos donde se alcanza el mínimo del funcional asociado al problema, definido en la tercera sección de dicho capítulo, sea infinito. Sin embargo, el tipo de razonamiento seguido en dicha sección sugiere que, si g no es analítica, esto pueda suceder.

4. En el Capítulo 3, hemos considerado el problema en E. D. P.

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) & = & h(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \quad (4.8)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio regular acotado, λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, $\phi_1(x)$ es la función propia asociada a λ_1 y normalizada en el sentido

$$\int_\Omega |\nabla \phi_1(x)|^2 dx = 1,$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función verificando

[P] g es continua, T-periódica y con valor medio cero

y $h(x) = a\phi_1(x) + \tilde{h}(x)$, $a \in \mathbb{R}$, con $\tilde{h} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ verificando $\int_\Omega \tilde{h}(x)\phi_1(x)dx = 0$.

La dificultad a la hora de demostrar que el intervalo $[a_1(\tilde{h}), a_2(\tilde{h})]$ es no degenerado, se encuentra en probar la oscilación de la función que se deduce de la ecuación de bifurcación, al aplicar el Método Alternativa:

$$\int_\Omega g\left(c\phi_1(x) + \tilde{u}(x)\right)\phi_1(x)dx.$$

Pensamos que si g es no trivial, entonces $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$. De hecho, bajo las hipótesis [P], (H1) y (H2) del Capítulo 3, teniendo en cuenta que

$$m_L + N_G(u_c) \leq M(c) \leq m_L + N_G(c\phi_1 + \tilde{u}_L),$$

hemos probado que $a_1(\tilde{h}) < 0 < a_2(\tilde{h})$ si se verifica (3.20) o (3.21); y el que ninguna de las dos se verifique es lo mismo que decir

$$\int_\Omega G\left(c\phi_1(x) + \tilde{u}_c(x)\right) dx \leq 0 \leq \int_\Omega G\left(c\phi_1(x) + \tilde{u}_L(x)\right) dx, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

lo cual parece difícil de creer.

Si se tiene éxito en el problema anterior, cabe plantearse el estudio de la multiplicidad de las soluciones, esto es, extender los apartados 2 y 3 del Teorema 1.6 a ecuaciones en derivadas parciales. Ya hemos comentado a lo largo de la Tesis Doctoral los pocos resultados que existen en este sentido.

Respecto al Capítulo 2, es de esperar un resultado análogo al Teorema 2.1 para E. D. P., pero la dificultad en la extensión se debe a que, al no conocer suficientes propiedades de la función propia principal ϕ_1 asociada al problema, es difícil probar una desigualdad análoga a (2.16):

$$\int_0^\pi G(\alpha\phi_1(x) + \tilde{u}_L(x))dx < 0. \tag{4.9}$$

(ver [72]).

5. Otro problema que sería interesante estudiar es el análogo al del Capítulo 1, pero en valores propios de orden superior al primero. Más precisamente, hablamos del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcl} -u''(x) - n^2u(x) + g(u(x)) & = & h(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = u(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \quad (4.10)$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, g satisface $[\mathbf{P}]$, y $h \in C[0, \pi]$.

En este caso (y en el problema similar para E. D. P.) ha sido demostrado (ver [51]) que si h verifica $\int_0^\pi h(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0$, entonces (4.10) tiene solución. Ahora bien, si cada $h \in C[0, \pi]$ se descompone, de manera única, como

$$h(x) = a\,\mathrm{sen}(nx) + \tilde{h}(x)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^\pi \tilde{h}(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0$, ¿será posible probar resultados análogos a los del Capítulo 1?. Pensemos que las dificultades se presentan desde el principio, pues dado $\tilde{h}$, no sabemos ni siquiera si el conjunto de valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que (4.10) tiene solución es un intervalo.

6. En diferentes problemas de Mecánica ([27], [62]) se plantea el estudio de problemas de contorno para sistemas de E.D.O., donde las no linealidades son de tipo periódico. Concretamente, no conocemos ninguna referencia en la literatura matemática actual, sobre problemas de contorno de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} -u_1''(x) - u_1(x) + g_1(u_2(x)) & = & h_1(x), \quad x \in [0, \pi] \\ -u_2''(x) - u_2(x) + g_2(u_1(x)) & = & h_2(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u_1(0) = u_1(\pi) = u_2(0) = u_2(\pi) & = & 0 \end{array}\right\} \quad (4.11)$$

donde g_1, g_2 satisfacen la hipótesis [**P**], $h_1, h_2 \in C[0,\pi]$.

La dificultad en el estudio de (4.11) estriba en que, si lo planteamos como una ecuación abstracta de operadores, de la forma Lu=Nu, como hicimos en el Capítulo 1 con la ecuación escalar, entonces el núcleo del operador L tiene dimensión dos. Esto complica enormemente el estudio de la ecuación de bifurcación del Método Alternativa.

Un primer resultado que habría que intentar probar (pues se intuye que debe ser cierto) es que si

$$\int_0^\pi h_1(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \int_0^\pi h_2(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0,$$

entonces (4.11) tiene solución.

7. En el Capítulo 2 hemos demostrado que bajo las hipótesis (H1), (H2), (H3), (H4), (H5) y (H6) entonces el conjunto de puntos críticos del funcional Φ_G es infinito, mientras que el conjunto de puntos de nivel crítico mínimo es finito. Ahora bien, ¿existirán infinitos niveles críticos?. Esta es una cuestión planteada ya por Costa ([29]) en 1.988 y que sigue sin resolverse en la actualidad. La dificultad para abordar esta cuestión está en el hecho de dar un criterio adecuado que distinga unos niveles críticos de otros, pues, en general, el conjunto de niveles críticos es acotado.

Bibliografía

[1] Ahmad, S.; Lazer, A. C. y Paul, J., *Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance*, Ind. Univ. Math. J., **25**, 1.976, 933-944.

[2] Amann, H.; Ambrosetti, A. y Mancini, G., *Elliptic Equations with noninvertible Fredholm linear part and bounded nonlinearities*, Math. Z., **158**, 1.978, 179-194.

[3] Ambrosetti, A., *Critical points and nonlinear variational problems*, Bulletin de la Société Mathématique de France; Mémoire (nouvelle série), **49**, 1.992.

[4] Ambrosetti, A. y Mancini, G., *Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. The case of the single eigenvalue.*, J. Diff. Eqns., **28**, 1.978, 220-245.

[5] Ambrosetti, A. y Mancini, G., *Theorems of existence and multiplicity for nonlinear elliptic problems with noninvertible linear part.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **5**, 1.978, 15-28.

[6] Ambrosetti, A., y Prodi, G., *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press., 1.993.

[7] AMBROSETTI, A., Y PRODI, G., *Analisi nonlineare*, I quaderno, Scuola Norm. Sup. Pisa, 1.973.

[8] AMBROSETTI, A. Y PRODI, G., *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **93**, 1.973, 321-347.

[9] ARCOYA, D., *Existencia y multiplicidad de soluciones para problemas de contorno elípticos semilineales en resonancia*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1.990.

[10] ARCOYA, D. Y CAÑADA, A., *Critical points theorems and applications to nonlinear boundary value problems*, Nonl. Anal., **14**, 1.990, 393-411.

[11] ARCOYA, D. Y CAÑADA, A., *The dual variational principle and discontinuous elliptic problems with strong resonance at infinity*, Nonl. Anal., **15**, 1.990, 1145-1154.

[12] BLANCHARD, P. Y BRÜNING, E., *Variational methods in mathematical physics*, Springer-Verlag, 1.982.

[13] BRAUN, M., *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, G. E. Iberoamericana, México, 1.990.

[14] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, 1.984.

[15] BRÉZIS, H. Y NIRENBERG, L., *Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **V**, 1.978, 225-326.

[16] CAÑADA, A., *A note on the existence of global minimum for a noncoercive functional*, Nonl. Anal., **21**, 1.993, 161-166.

[17] CAÑADA, A., *Nonselfadjoint semilinear elliptic boundary value problems*, Annali di Matematica pura ed applicata, **CXLVIII**, 1.987, 237-250.

[18] CAÑADA, A. Y DRABEK, P., *On semilinear problems with nonlinearities depending only on derivatives*, SIAM J. Math. Anal., **27**, 1.996, 543-557.

[19] CAÑADA, A. Y ROCA, F., *Some qualitative properties of the range of conservative pendulum-like operators with Dirichlet boundary conditions*, Proc. International Conference on Differential Equations (Equadiff 95), Lisbon, Portugal, 1995, L. Magalhães, C. Rocha, L. Sanchez (Editores). World Scientific Pub. Co., 1.998, 300-305.

[20] CAÑADA, A. Y ROCA, F., *Existence and multiplicity of solutions of some conservative pendulum-type equations with homogeneous Dirichlet conditions*, Diff. and Int. Eqns., **10**, 1.997, 1113-1122.

[21] CAÑADA, A. Y ROCA, F., *Qualitative properties of some noncoercive functionals arising from nonlinear boundary value problems*, Nonl. Anal., Aceptado para publicación.

[22] CAÑADA, A. Y ROCA, F., *Lagrange multiplier method and nonlinear elliptic boundary value problems with periodic nonlinearity*, Proc. Third European Conf. Elliptic and Parabollic problems, Pont-a-Mousson, Francia, 1.997. H. Amman, M. Chipot, C. Bandle, F. Conrad, I. Shafrir (Editores). Pitman Research Notes in Mathematics Series, **383**, Addison Wesley Longman Limited, 1.998, 58-66.

[23] CARTAN, H., *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.*, Ed. Selecciones científicas, Madrid, 1.968.

[24] CASTRO, A., *Métodos de reducción via minimax*, In Differential Equations, de Figueiredo and Honig, editors., Lect. Notes Math., **957**, 1.982.

[25] CASTRO, A., *Reduction Methods via minimax*, Differential Equations, Proc. First Latin American School of Diff. Eqns., Lect. Notes, Springer-Verlag, **957**, 1.982.

[26] CASTRO, A. Y COSSIO, J., *Multiple solutions for a nonlinear Dirichlet problem*, SIAM J. Math. Anal., **25**, 1.994, 1554-1560.

[27] CHENCINER, A., *Systèmes dynamiques différentiables*, Encyclopaedia Universalis, Universalia, París, 1.978, 147-170.

[28] CODDINGTON, E. A. Y LEVINSON, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, 1.955.

[29] COSTA, D. G., *On a class of nonlinear problems at resonance*, Proc. College on variational problems in analysis, Int. Centre Theoret. Phys., Trieste, 1.988.

[30] COSTA, D.; JEGGLE, H.; SCHAAF, R. Y SCHMITT, K., *Oscillatory perturbations of linear problems at resonance*, Results in Math., **14**, 1.988, 275-287.

[31] COSTA, D. Y SILVA E. A., *The Palais-Smale condition versus coercivity.*, Nonl. Anal., **16**, 1.991, 371-381.

[32] COSTA, D. Y SILVA E. A., *Existence of solution for a class of resonant elliptic problems*, J. Math. Anal. Appl., **175**, 1.993, 411-424.

[33] DANCER, E. N., *On the use of asymptotics in nonlinear boundary value problems*, Ann. Mat. Pura Appl., **131**, 1.982, 167-185.

[34] DE COSTER, C. Y HABETS, P., *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results*, Recherches de mathemátique, **52**, 1.996. (Preprint Univ. Catholiqe de Louvain)

[35] DE FIGUEIREDO D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Proc. First Latin American School of Diff. Eqns., Lect. Notes, Springer-Verlag, **957**, 1.982.

[36] DIEUDONNÉ, J., *Fondements de l'Analyse moderne*, Gauthier Villars, 1.963.

[37] DONATI, F., *Some remarks about periodic solutions to the forced pendulum equation*, Diff. and Int. Eqns., **8**, 1.995, 141-149.

[38] DRABEK, P., *Solvability and bifurcations of nonlinear equations*, Longman Group UK Limited, London, 1.992.

[39] FERRIS, T., *La aventura del Universo*, Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1.990.

[40] FONDA, A. Y GOSSEZ, J. P., *Semicoercive variational problems at resonance: An abstract approach*, Diff. and Int. Eqns., **3**, 1.990, 695-708.

[41] FOURNIER, G. Y MAWHIN, J., *On periodic solutions of forced pendulum-like equations*, J. Diff. Eqns., **68**, 1.985, 381-395.

[42] FUČIK, F., *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary value problems*, D. Reidel Publ. Company, 1.980.

[43] GAINES, R. E. Y MAWHIN, J., *Coincidence degree and Nonlinear Differential Equations*, Lect. Notes Math., **568**, Springer, 1.977.

[44] HABETS, P. Y SÁNCHEZ, L., *A two-point problem with nonlinearity depending only of the derivative*, SIAM J. Math. Anal., **28**, 1.997, 1205-1211.

[45] JORDAN, D. W. Y SMITH, P., *Nonlinear Ordinary differential equations*, Oxford University Press, 1.977.

[46] KANNAN, R.; NAGLE, R. K. Y POTHOVEN, K. L., *Remarks on the existence of solutions of* $x'' + x + arctan(x') = p(t); x(0) = x(\pi) = 0$, Nonl. Anal., **22**, 1.994, 793-796.

[47] KANNAN, R. Y ORTEGA, R., *An asymptotic result in forced oscillations of pendulum-type equations*, Applicable Analysis, **22**, 1.986, 45-53.

[48] KANNAN, R. Y ORTEGA, R., *Periodic solutions of pendulum-type equations*, J. Diff. Eqns., **59**, 1.985, 123-144.

[49] LANDESMAN, E. M. Y LAZER, A. C., *Nonlinear perturbation of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech., **19**, 1.970, 609-623.

[50] LERAY, J. Y SCHAUDER, J., *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **51**, 1.934, 45-78.

[51] LUPO, D. Y SOLIMINI S., *A note on a resonance problem*, Proc. R. Soc. Edin., **102 A**, 1.986, 1-7.

[52] MARTINEZ-AMORES, P.; MAWHIN, J.; ORTEGA, R. Y WILLEM, M., *Generic results for the existence of nondegenerate periodic solutions of some differential systems with periodic nonlinearities*, J. Diff Eqns., **91** 1.991, 138-148.

[53] MAWHIN, J., *Equivalence theorems for nonlinear operators equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces*, J. Diff. Eqns., **12**, 1.972, 610-636.

[54] MAWHIN, J., *Periodic oscillations of forced pendulum-like equations*, In Ordinary and Partial Differential equations, Lec. Not. Math., Springer-Verlag, **964**, 1.982, 458-476.

[55] MAWHIN, J., *Problémes de Dirichlet variationneles non lineáires*, Séminaire de Mathématiques Supérieures no. 104, Presses de l' Université de Montréal. 1.987.

[56] MAWHIN, J., *Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation*, Proc. Conf. Equadiff 9, Brno, 1.997 Aparecerá.

[57] MAWHIN, J., *Some remarks on semilinear problems at resonance where the nonlinearity depends only on the derivatives*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, **2**, 1.994, 61-69.

[58] MAWHIN, J., *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, CBMS Reg. Conf. Series Math., **40**, AMS, 1.977.

[59] MAWHIN, J., *The forced pendulum: A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems*, Expo. Math., **6**, 1.988, 271-287.

[60] MAWHIN, J. Y WILLEM, M., *Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations*, J. Diff. Eqns., **52**, 1.984, 264-287.

[61] MAWHIN, J. Y WILLEM, M., *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Appl. Math. Sci., Springer-Verlag, **74**, 1.989.

[62] MCLACHLAN, N. W., *Ordinary nonlinear differential equations in engineering and physical sciences*, Clarendon Press, Oxford, 1.956.

[63] NAGLE, R. K.; POTHOVEN, K. Y SINGKOFER, K., *Nonlinear elliptic equations at resonance where the nonlinearity depends essentially on the derivatives*, J. Diff. Eqns., **38**, 1.980, 210-225.

[64] ORTEGA, R., *Estudio cualitativo del rango de operadores diferenciales elípticos semilineales*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1.984.

[65] ORTEGA, R., *Stability and index of periodic solutions of an equation of Duffing type*, Boll. U.M.I. (7), **3-B**, 1.989, 533-546.

[66] ORTEGA, R., *Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations*, J. London Math. Soc. (2), **42**, 1.990, 505-516.

[67] ORTEGA, R., *Some applications of the topological degree to stability theory in Topological Methods*, DEs and Inclusions, Kluwer, 1.995, 377-409.

[68] ORTEGA, R., *The number of stable periodic solutions of time-dependent Hamiltonian systems with one degree of freedom*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Aparecerá.

[69] RABINOWITZ, P. H., *Nonlinear Sturm-Liouville problems for second order differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **23**, 1.970, 936-961.

[70] RABINOWITZ, P., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Amer. Math. Soc., **65**, 1.986.

[71] RABINOWITZ, P., *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, In Nonlinear Analysis: A Colection of papers in honor to Erich H. Rothe (edited by Cesari, Kannan and Weinberger), Academic Press, 1.978, 161-177 .

[72] RAMOS, M. Y SÁNCHEZ, L., *Variational elliptic problems involving noncoercive functionals*, Pro. Roy. Soc. Edinburgh, **112A**, 1.989, 177-185.

[73] ROCA F., *Funcionales no coercivos con mínimo global y problemas de contorno no lineales*, Actas del XV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones / V Congreso de Matemática Aplicada, Vigo, 1.997. Serv. Publ. Universidad de Vigo, 1.998, 351-355.

[74] SCHAAF, R. Y SCHMITT, K., *A class of nonlinear Sturm-Liouville problems with infinitely many solutions*, Trans. Amer. Math. Soc., **306**, 1.988, 853-859.

[75] SCHAAF, R. Y SCHMITT, K., *Periodic perturbations of linear problems at resonance on convex domains*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **20**, 1.990, 1119-1131.

[76] SCHAAF, R. Y SCHMITT, K., *On the number of solutions of semilinear elliptic problems at resonance: some numerical experiments*, Lect. in Appl. Math, **20**, Amer. Math, Soc., Providence, 1.990, 541-559.

[77] SCHAAF, R. Y SCHMITT, K., *Asymptotic behavior of positive solution branches of elliptic problems with linear part at resonance*, Z. Angew. Math. Phys., **43**, 1.992, 645-676.

[78] SERLING, R. J., *Loud and Clear*, Dell, Nueva York, 1.970.

[79] SERRA, E. Y TARALLO, M., *A reduction method for periodic solutions of second-order subquadratic equations*, Adv. Diff. Eqns., **3**, 1.998, 199-226.

[80] SERRA, E.; TARALLO, M. Y TERRACINI, S., *On the structure of the solution set of forced pendulum-type equations*, J. Diff. Eqns., **131**, 1.996, 189-208.

[81] SOLIMINI, S., *On the solvability of some elliptic partial differential equations with the linear part at resonance*, J. Math. Anal. Appl., **117**, 1.986, 138-152.

[82] SOBEL, D., *Longitud*, Debate, Madrid, 1.997.

[83] STRUWE, M., *Variational methods*, Springer, Berlín, 1.996.

[84] TARANTELLO, G., *On the number of solutions for the forced pendulum equation*, J. Diff. Eqns., **80**, 1.989, 79-93.

[85] VARIOS AUTORES, *Failure of the Tacoma Narrows Bridge*, Proc. Amer. Soc. Civil Engineers, **69**, 1.943, 1555-1586.

[86] VILLEGAS, S., Comunicación personal.

[87] WARD, J.R., *A boundary value problem with periodic nonlinearity*, Nonl. Anal., **10**, 1.986, 207-213.

[88] ZEIDLER, E., *Nonlinear functional analysis and its applications I. Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, 1.986.

[89] ZILL, D. G., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, G. E. Iberoamericana, México, 1.988.