SOBRE EL TEOREMA PRINCIPAL DE WEDDERBURN EN ALGEBRAS DE BANACH COMPLEJAS CONMUTATIVAS

MARIA VICTORIA VELASCO COLLADO

Memoria de la Licenciatura.

Dpto. de Análisis Matemático.

Facultad de Ciencias.

Granada

Memoria de Licenciatura dirigida por el Dr. D. Juan Martínez Moreno. Leída el día 11 de Octubre de 1.990, ante el Tribunal formado por los doctores: D. M. Cabrera García, D. J. A. Cuenca Mira y D. A. Rodríguez Palacios, con la calificación de Sobresaliente por Unanimidad.

Granada, Universidad, 1.990.

A mi padre.

Memoria para optar al Grado de Licenciada en Ciencias Matemáticas, que presenta Dña. María Victoria Velasco Collado, dirigida por el Dr. D. Juan Martínez Moreno, Prof. Titular del Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Granada, Julio de 1.990.

Vº Bº

EL DIRECTOR

INDICE

INTRODUCCION

Sea A un álgebra asociativa sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Como es conocido, existe un más grande ideal, R, de A tal que todos sus elementos son casi inversibles. Dicho ideal se denomina *Radical de Jacobson*, o simplemente *Radical*, de A. Cuando el radical es cero, el álgebra se llama *semisimple*, mientras que si el radical coincide con la totalidad del álgebra, se dice entonces que el álgebra *es de radical*. También se sabe que el álgebra cociente A/R es semisimple.

A partir de los famosos teoremas de *Wedderburn* se deduce que, si centramos nuestra atención en el caso de las álgebras asociativas complejas finito dimensionales, el estudio de estas álgebras se debe concentrar en el caso de aquellas que son de radical. En concreto, en este ambiente los teoremas mencionados se pueden enunciar en los siguientes términos:

i) **Teorema Principal de Wedderburn**: *Si A es un álgebra asociativa, compleja de dimensión finita, entonces existe una subálgebra, B, de A, isomorfa a A/R tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$.*

ii) **Primer Teorema de Wedderburn**: *Toda álgebra asociativa compleja finito dimensional y semisimple, es suma directa finita de sus ideales biláteros minimales los cuales a su vez son álgebras simples.*

iii) **Segundo Teorema de Wedderburn**: *Cualquier álgebra asociativa compleja de dimensión finita, simple, es isomorfa a conveniente álgebra de matrices complejas,* $M_n(\mathbb{C})$*, para cierto natural* n.

Desde que Wedderburn formuló sus teoremas, a comienzos de siglo, han sido múltiples los intentos para trasladar los mismos al ambiente de álgebras infinito dimensionales añadiendo, como suele ser usual en la Teoría de espacios vectoriales de dimensión infinita, condiciones analíticas y considerando en particular el marco de las álgebras de Banach. En este último caso a lo que se debe aspirar es a que, dada una tal álgebra A, con radical R, exista una subálgebra, B, cerrada y propia de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$. Si esto ocurre, se dirá entonces que A es *fuertemente descomponible*, mientras que se reserva el término *descomponible* para cuando la descomposición anterior sea sólamente algebraica (no se exige que B sea cerrada).

El objetivo de esta memoria consiste en presentar extensiones del Teorema Principal de Wedderburn en el ambiente de las álgebras de Banach complejas conmutativas.

Comenzamos la **Sección I** comprobando que, del enunciado del Teorema Principal de Wedderburn, no se puede suprimir la hipótesis de finito dimensionalidad del álgebra. Por otra parte, se pone de manifiesto que un álgebra de Banach conmutativa puede ser descomponible y sin embargo no serlo fuertemente; lo que prueba que habrá que enriquecer el álgebra si se desea conseguir una descomposición fuerte de la misma.

También se presenta un criterio (**Proposición 1.7**) que permite decidir cuándo un álgebra de Banach conmutativa no es fuertemente descomponible. En concreto:

Si A es un álgebra de Banach conmutativa tal que la envolvente lineal de sus idempotentes es densa en A, entonces A no se puede expresar como la suma directa de su radical y de una subálgebra cerrada y propia suya.

Si se supone que A es compleja, entonces se dispone de otro criterio (**Nota 1.10**), del cual el resultado anterior es un caso particular, que permite obtener una serie de ejemplos de álgebras de Banach complejas conmutativas infinito dimensionales que no son fuertemente descomponibles.

Sabemos que un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y semisimple, A, puede identificarse mediante la *Transformada de Gelfand* con una subálgebra del álgebra, $C(\phi_A)$, de las funciones continuas complejo valuadas sobre el espacio de los caracteres de A. Enseguida, surge la cuestión de cuándo podemos identificar A con la propia $C(\phi_A)$. Gelfand y Naimark (1.943) contestan afirmativamente a esta cuestión en el caso concreto de que A sea C^*- álgebra. En la **Sección II** de esta memoria se recogen otras respuestas afirmativas a dicho problema que pasamos a comentar.

Nótese que con el objeto de establecer cuándo un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad, es isomorfa al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre un compacto Hausdorff, es muy natural imponer que dicha álgebra sea semisimple así como que, el conjunto de sus idempotentes sea acotado. Sin embargo estas dos condiciones no son suficientes para asegurar la existencia de un tal isomorfismo como se puede comprobar considerando el Algebra Disco.

A partir de una lectura muy esmerada de un conocido *teorema de tipo Wedderburn* para ciertas álgebras de operadores, debido a Dunford, nosotros demostramos (**Teorema 2.1**, **Corolario 2.2** y **Corolario 2.6**):

a) *Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad tal que el conjunto de sus idempotentes está acotado y la envolvente lineal de dicho conjunto es densa en A, entonces la Transformada de Gelfand asociada a A es un isomorfismo, lo que fuerza la semisimplicidad de A. Además el espacio de los caracteres de A es totalmente disconexo.*

Recíprocamente (**Teorema 2.8**):

b) *Si A es semisimple, el conjunto de sus idempotentes está acotado y el espacio de sus caracteres es totalmente disconexo, entonces la Transformmada de Gelfand asociada a A es un isomorfismo y A es el cierre de la envolvente lineal de sus* *idempotentes.*

Otras condiciones sobre un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y semisimple que conducen a que una tal álgebra se pueda identificar con un álgebra de funciones continuas complejo valuadas sobre un compacto Hausdorff se recopilan en el **Teorema 2.9**.

Todos estos resultados, que poseen interés intrínseco, van a ser de gran utilidad para establecer *teoremas de descomposición fuerte de tipo Wedderburn*, tarea de la que nos ocupamos primordialmente en la **Sección III**.

En lo que sigue, salvo que se indique otra cosa, A va a denotar un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y con radical, R, no cero.

En 1.960 Badé y Curtis enunciaron (**Teorema 3.5**) el siguiente criterio de descomposición fuerte:

c) *Si el espacio de los caracteres de A es totalmente disconexo, entonces:*

i) A es descomponible y la Transformada de Gelfand asociada a A/R es un isomorfismo si y sólo si el conjunto de los idempotentes de A está acotado.

ii) Si el conjunto de los idempotentes de A está acotado, entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte es única.

Es de notar que el teorema anterior sigue siendo cierto si no se supone la conmutatividad de A pero se exige la conmutatividad de A/R y que los idempotentes de A conmuten entre sí.

No es difícil probar que *un álgebra de Banach, A, es fuertemente descomponible si y sólo si posee una subálgebra cerrada, B, tal que la restricción, π/B, a dicha subálgebra de la proyección canónica, π, de A en A/R es un isomorfismo*. Esta observación es el punto de partida de la prueba de **c**). La hipótesis de que el espacio de los caracteres de A sea totalmente disconexo permite asegurar la abundancia de idempotenes en A, lo que motiva considerar como candidata a subálgebra cerrada de A que complemente al radical, la subálgebra cerrada, B, engendrada por los idempotentes de A. De hecho, si se supone que el conjunto de los idempotentes de A está acotado, no sin esfuerzo y con la ayuda del enunciado **a**) aplicado a B, se prueba que π/B es inyectiva. Por otro lado, dado que el espacio de los caracteres de A/R es totalmente disconexo, aplicando el resultado **b**) al álgebra A/R y mediante sofisticadas manipulaciones que requieren el conocimiento de algunos resultados profundos de la Teoría de álgebras de Banach conmutativas, se demuestra que π/B es sobreyectiva.

Si se refuerza la hipótesis topológica sobre el espacio de los caracteres de A y se supone que dicho espacio es estoneano, se puede enunciar (**Teorema 3.7**):

Si el espacio de los caracteres de A es estoneano entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

En la prueba de **c)** es básico el hecho de que los idempotentes, tanto de A como de A/R, estén globalmente acotados y es evidente que si el conjunto de los idempotentes de A está acotado entonces también lo está el conjunto de los de A/R. Sin embargo el recíproco no es cierto ni siquiera suponiendo que A/R es isomorfa a $C(\phi_{A/R})$ y que el espacio de sus caracteres sea totalmente disconexo (ver contraejemplo de las **pág. 45** y **46**). Resulta pues claramente interesante conocer resultados que permitan decidir cuándo los idempotentes de A están globalmente acotados, si se sabe que los de A/R lo están. A este respecto nosotros probamos el siguiente teorema (**Teorema 3.11**), debido a Gorin y Lin, que extiende otros resultados que aparecen en la literatura:

Sea π la proyección canónica natural de A en A/R. Si la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero uniformemente en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces si S es cualquier subconjunto de idempotentes de A tal que $\pi(S)$ está acotado en A/R, se verifica que S está acotado.

Del resultado anterior y del criterio **c)**, se obtiene el siguiente teorema de tipo Wedderburn (**Teorema 3.12**):

Sea A un álgebra de Banach compleja, conmutativa con unidad con radical R no cero y con espacio de caracteres totalmente disconexo. Si el conjunto de los idempotentes de A/R está acotado y la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces A es fuertemente descomponible y tal descomposición es única.

Un segundo criterio de descomponibilidad fuerte en el que se prescinde de la acotación del conjunto de los idempotentes de A (resp. A/R) así como de la presencia de unidad y que no postula que el álgebra sea compleja, ni que tenga espacio de caracteres totalmente disconexo, se recoge en esta memoria (**Teorema 3.13**) y se enuncia en los siguientes términos:

Si A es un álgebra de Banach conmutativa con radical R no nulo, tal que A/R es isomorfa a l_1, entonces:

i) A es descomponible si y sólo si los idempotentes primitivos de A están acotados.

ii) Si los idempotentes primitivos de A están acotados entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

La prueba original de Badé y Curtis del teorema anterior es bastante fácil y la subálgebra cerrada que complementa al radical de A es precisamente la engendrada por los idempotentes primitivos de A.

De nuevo el criterio anterior junto con el teorema de Gorin y Lin permite enunciar el siguiente teorema de tipo Wedderburn (**Teorema 3.14**) que mejora otros que en la misma línea enunciaron Badé, Curtis y Khelemskii:

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con radical R no cero. Si A/R es isomorfa a l_1 y la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero uniformemente en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces A es fuertemente descomponible y tal descomposición es única.

Si bien, como ya se ha comentado, la condición de que A/R sea isomorfa al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre el espacio de sus caracteres no basta para garantizar la descomponibilidad fuerte de A, la prueba del **Teorema 3.5** pone de manifiesto que, el que dicha condición se cumpla es substancial. Surge así el interés de establecer teoremas de descomposición fuerte en los que se supone que se verifica la mencionada condición. A ello vamos a dedicar nuestros últimos comentarios.

Se sabe que el bidual de toda álgebra de Banach conmutativa, con la topología usual y el producto de Arens, es una nueva álgebra de Banach la cual no tiene por qué ser conmutativa y que la primera puede verse como una subálgebra de ésta última. Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y con radical R no cero, tal que A/R es isomorfa al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre su espacio de caracteres, se puede probar que, el álgebra cociente del bidual por el bipolar de R, A^{**}/R^{oo}, es isomorfa a un álgebra de funciones continuas complejo valuadas sobre conveniente espacio compacto Hausdorff estoneano. De este modo el espacio de caracteres de A^{**}/R^{oo} resulta ser estoneano (lo que fuerza que sea totalmente disconexo). En consecuencia, si el bipolar de R coincide con el radical de A^{**} podemos asegurar que el conjunto de los idempotentes de A^{**} está acotado y que su espacio de caracteres es totalmente disconexo. También puede probarse que los idempotentes de A^{**} conmutan entre sí. Por consiguiente, podemos aplicar el primer criterio de descomponibilidad, **c**), en su versión más débil, para concluir que A^{**} es fuertemente descomponible.

Finalmente, si el bipolar de R, además de coincidir con el radical de A^{**}, coincide con R, es trivial comprobar que A es descomponible y un esfuerzo adicional permite ver que A es fuertemente descomponible. La sorpresa radica en el hecho de que, basta suponer la coincidencia de R con su bipolar para tener asegurada la coincidencia de los radicales de A y de A^{**}. En consecuencia, nosotros probamos el siguiente teorema de tipo Wedderburn (**Teorema 3.16**), que en particular abarca al **Teorema 4.4** de [7], y en el que no se impone la hipótesis de que el espacio de los caracteres de A sea totalmente disconexo:

Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y con radical R, tal que A/R es isomorfa al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre el espacio de sus caracteres. Si R coincide con su bipolar, entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

La combinación de este último resultado con el **Teorema 2.9**, permite obtener toda una gama de teoremas que extienden al Teorema Principal de Wedderburn.

Sólo me queda manifestar mi más profunda gratitud al Prof. D. Juan Martínez Moreno, mi director, por su abnegada y eficaz colaboración y sus innumerables enseñanzas y orientaciones.

Quisiera también agradecer la asistencia recibida por parte de los profesores W. Zelazko, del Instituto Banach de Varsovia, y D. Pretel Martínez, de la Escuela de Traductores e Intérpretes de la Universidad de Granada, en la traducción de algunos artículos en lengua rusa que me han sido de gran utilidad en la elaboración de esta memoria.

Por último deseo dejar constancia del estímulo y ayuda de todo tipo que he recibido siempre de todos mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Granada, Julio de 1.990.

SECCION I

TEOREMA PRINCIPAL DE WEDDERBURN.

DIFICULTADES DE SU EXTENSION AL CASO INFINITO DIMENSIONAL.

Sea A un álgebra asociativa sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Dados dos elementos a y b, pertenecientes a A, se define el *casi producto* de a por b, denotado por $a \circ b$ como:

$$a \circ b := a + b - ab$$

Se dirá que un elemento a de A es *casi inversible* si existe b en A, llamado *casi inverso* de a, tal que:

$$a \circ b = b \circ a = 0$$

Un subconjunto de A se llamará *casi inversible* si todos sus elementos son casi inversibles.

El casi inverso de un elemento, si existe, es único. Esto se obtiene de la unicidad del inverso y de la siguiente proposición [9, **Proposición 3.5**] que relaciona ambos conceptos:

Proposición 1.1

Sea A un álgebra asociativa. Entonces:

i) *Si A posee unidad, I, un elemento $a \in A$ es casi inversible si y sólo si $I-a$ es casi inversible.*

ii) *Si A no posee unidad y A_1 es la unitización de A*

entonces un elemento $a \in A$ *es casi inversible en* A *si y sólo si* $I-a$ *es un elemento casi inversible en* A_1.

En cualquier caso, si a *posee casi inverso,* a^o*, éste viene dado por* $a^o = I - (a-I)^{-1}$.

Estamos ya en condiciones de definir lo que se conoce como *Radical de Jacobson* o simplemente *Radical* de un álgebra asociativa.

Definición 1.2

Sea A un álgebra asociativa. Se define el *Radical de Jacobson* de A, *Rad* A, como el más grande ideal casi inversible de A. Se dice que A es *semisimple* si su radical es cero. Si A coincide con su radical, entonces se dice que A es un álgebra *de radical*.

Supongamos que la dimensión del álgebra A es **finita**. Hay un famoso teorema, debido a J. H. M. Wedderburn [**1, Cap. III, Teorema 8.23**], cuyos orígenes se remontan al año 1.908, y que actualmente podemos enunciar en los siguiente términos:

Teorema 1.3 (PRINCIPAL DE WEDDERBURN)

Sea A *un álgebra asociativa de dimensión finita y sea* R *su radical. Entonces existe una subálgebra,* B*, de* A *tal que* $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$. *Además, si* A *es conmutativa* B *es* *necesariamente única.*

Enseguida surge la cuestión de si la hipótesis de finito dimensionalidad del álgebra A es también necesaria para obtener la tesis de dicho teorema.

El siguiente ejemplo de Zelinsky, [**30**], pone de manifiesto que la finito dimensionalidad del álgebra no se puede suprimir. Antes de presentar dicho ejemplo y con el objeto de facilitar su comprensión, conviene hacer las siguientes precisiones:

Proposición 1.4

Sea A un álgebra asociativa, con radical R, y B una subálgebra de A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$.

ii) *La restricción de la proyección canónica, de A en A/R, a B es un isomorfismo de álgebras.*

En vista de la proposición anterior, si la tesis del Teorema de Wedderburn es cierta, cualquier familia de idempotentes ortogonales, dos a dos, de la subálgebra B, ha de provenir de una familia de idempotentes ortogonales, dos a dos, del álgebra A/R.

El contraejemplo de Zelinsky se basa en el hecho anterior. En concreto se construye un álgebra A y se muestra, en $A/Rad\ A$, una familia de idempotentes ortogonales dos a dos, de la que se sabe que si su tamaño es suficientemente grande (infinito no numerable), no existe en A (y con más razón en ninguna subálgebra de A) ninguna familia de idempotentes ortogonales dos a dos, que tenga a la familia de partida por imagen mediante la proyección canónica.

Ejemplo de Zelinsky 1.5

Sea J un conjunto de índices infinito no numerable. Se considera el siguiente conjunto de objetos matemáticos:

$$\{e_i,\ n_{ij} / \ i,j \in J\}.$$

Sea A el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) engendrado por el conjunto anterior. Se define la siguiente tabla de multiplicación que dota al espacio vectorial A de estructura de álgebra asociativa, no conmutativa sin unidad:

$$e_i^2 = e_i$$

$$e_i e_j = n_{ij} \qquad (i \neq j)$$

$$e_i n_{jk} = \delta_{ij} n_{jk}$$

$$n_{jk} e_i = \delta_{ki} n_{jk}$$

$$n_{ij} n_{kl} = 0$$

$\forall\ i,j,k,l \in J$ donde δ_{ij} denota la aplicación *Delta de Kronecker*.

Sea R la envolvente lineal del conjunto $\{n_{ij} / \ i,j \in J\}$ que notamos por $Lin\{n_{ij} / i,j \in J\}$. Veamos que $R = Rad\ A$.

Es claro que:

- R un ideal bilátero de A.

- R es nilpotente de grado dos ($R^2 = 0$) y por consiguiente:

- R es casi inversible.

Además R es maximal como ideal casi inversible ya que los elementos de la forma

$$\sum_{n=1}^{n=k} \alpha_k e_k \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\quad \forall\ k = 1,2,\ldots n)$$

no pueden pertener al radical salvo que $\alpha = 0$, $\forall\ i = 1,2,\ldots n$. (Observese que si $1 \le i \le n$, como e_i no pertenece a $Rad\ A$, el elemento $e_i \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k e_k = \alpha_i e_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{k=n} \alpha_k n_{ik}$ tampoco pertenece a $Rad\ A$).

Ahora consideramos, en A/R, la familia de idempotentes ortogonales dos a dos $\{e_i + R\}_{i\in J}$. Veamos que no existe ninguna familia de idempotentes ortogonales dos a dos de A tal que su imagen por la proyección canónica sea $\{e_i + R\}_{i\in J}$, lo que fuerza que A no pueda verificar la tesis del Teorema de Wedderburn.

En efecto, si suponemos lo contrario ha de existir una familia $\{a_i\}_{i\in J}$ de elementos de A, idempotentes y dos a dos ortogonales, tal que para cada $i \in J$ $\pi(a_i) = e_i + R$.

Para cada i de J consideramos el elemento $x_i = a_i - e_i$, perteneciente a $Rad\ A$ y definimos los conjuntos:

$$G_i = \{j \in J/\ e_i x_j \neq 0\}$$

$$D_i=\{j \in J/\ e_j x_i \neq 0\}$$

$$R_i=\{j \in J/\ x_i e_j \neq 0\}$$

Como para cada $i \in J$ el elemento x_i pertenece a R que sabemos que es $Lin\{n_{ij} / i,j \in J\}$, se tiene que x_i ha de ser una combinación lineal finita de elementos n_{ij}, es decir x_i será de la forma $x_i = \sum \beta_{kl} n_{kl}$ donde k y l varian en un subconjunto finito de J y por consiguiente:

$$e_j x_i = \sum \beta_{kl} \delta_{jk} n_{kl} = \sum \beta_{jk} n_{jl}$$

y en consecuencia $e_j x_i$ será distinto de cero si existe un subíndice l para el cual sea $\beta_{jl} \neq 0$. Dado que el número de coeficientes de la suma anterior es finito, se deduce que D_i es finito y esto para cada i en J. Analogamente R_i es finito para cada $i \in J$.

De la condición de ortogonalidad de la familia $\{a_i\}_{i \in J}$ se obtiene que si $i \neq j$, entonces

$$0 = a_i a_j = (e_i + x_i)(e_j + x_j) = n_{ij} + e_i x_j + x_i e_j$$

por lo que si $e_i x_j = 0$ ha de ser, en ese caso, $x_i e_j = - n_{ij} \neq 0$. De donde si $j \notin G_i$ necesariamente ha de pertenecer a R_i y por consiguiente el complementario de G_i, (CG_i), es finito.

Por otra parte de la definición de G_i y D_j se tiene que j pertenece a G_i si y sólo si i pertenece a D_j que sabemos que es finito, así pues ningún $j \in J$ puede pertenecer a infinitos G_i simultaneamente. Luego dado G, subconjunto *infinito numerable* de J, se tiene que:

$$\bigcap_{i\in G} G_i = \emptyset \quad \text{y} \quad J = \bigcup_{i\in G} CG_i$$

Como CG_i es finito para cada i de J y G es numerable esto nos lleva a que J también es numerable, lo que contradice el hecho de que J es infinito no numerable.

La teoría de álgebras de Banach está repleta de ejemplos que ponen de manifiesto que el hecho de que un álgebra asociativa A sea un espacio de Banach junto al de que su producto sea continuo fuerza en dicha álgebra numerosas perfecciones de tipo algebraico. Por consiguiente es inmediato preguntarse si la tesis del Teorema Principal de Wedderburn es cierta para álgebras de Banach, claro está, no finito dimensionales. En este ambiente no sólo se aspira a que el álgebra de Banach sea suma de su radical con cierta subálgebra suya, sino también a que dicha suma directa, sea topológica.

Nos proponemos ahora dar respuesta negativa a la cuestión planteada mediante un conocido contraejemplo debido a Feldman [13], [6].

Vamos a empezar presentando una serie de resultados que serán de gran utilidad tanto en el desarrollo de dicho contraejemplo como en lo sucesivo.

Recordemos que un *álgebra de Banach*, A, es un álgebra asociativa, cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio de Banach, verificando que $\|a\, b\| \leq \|a\|\, \|b\|$ para todo a y b en A.

El siguiente lema codifica los lemas 2.1 y 2.2 de [7]

Lema 1.6

Sea A un álgebra de Banach conmutativa y sea R su radical. Llamanos P_A al conjunto de los idempotentes de A. Entonces:

i) $P_A \cap R = \{0\}$.

ii) *Si* e_1 *y* e_2 *son dos elementos de* P_A *tales que* $e_1 - e_2 \in R$ *entonces* $e_1 = e_2$.

iii) *Si* $x \in A$ *es tal que* $x - x^2 \in R$, *entonces existe* $e \in P_A$ *tal que* $e - x \in R$.

iv) *Si existe una subálgebra, B, de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$, entonces P_A está contenido en B.*

Nota: i) e iii) son ciertas independientemente de que A sea o no conmutativa. Además, para que ii) e iv) sean ciertas en el caso de que A no sea conmutativa, basta con que para cualesquiera dos idempotentes e_1 y e_2 de A, se verifique que

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 .$$

Proposición 1.7

Sea A un álgebra de Banach conmutativa tal que la envolvente lineal de sus idempotentes, Lin P_A, es densa en A.

Entonces A no se puede expresar como suma directa de su radical y una subálgebra propia y cerrada de A.

Demostración

Si existe una subálgebra cerrada B de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$, por iv) del lema anterior, tal subálgebra ha de contener al conjunto P_A, y por tanto a su envolvente lineal. De donde por ser B cerrada y contener a un subconjunto denso de A, B no puede ser propia.

Ejemplo de Feldman 1.8

Sea la familia de objetos matemáticos $\{e_i, r / i \in \mathbb{N}\}$. Sea A_o el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) engendrado por el conjunto anterior. Dotamos a A_o de estructura de álgebra definiendo para todo i, j, perteneciente a $\mathbb{N}$ la siguiente tabla de multiplicación:

$$e_i^2 = e_i \qquad\qquad r^2 = 0$$

$$e_i e_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \qquad\qquad e_i r = r e_i = 0$$

La aplicación de A en los reales no negativos definida por:

$$\left\| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i + \gamma\, r \right\| = \text{Máx} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|^2 \right]^{1/2} ,\ \left| \gamma - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \right| \right\}$$

es una norma en el espacio vectorial subyacente de A_o que dota a A_o de estructura de álgebra normada, claramente conmutativa.

Sólo probamos la desigualdad triangular de la suma y la propiedad submultiplicativa del producto, puesto que las demás propiedades son inmediatas:

Sean $x = \sum \alpha_i e_i + \gamma r$, $y = \sum \beta_j e_j + \lambda r$ en A. Si fuese preciso sumamos los ceros necesarios hasta conseguir que el rango de estas dos sumatorias sea el mismo.

Por la desigualdad de Minkowski:

$$\|x + y\| = \text{Máx} \left\{ \left[\sum |\alpha_i + \beta_i|^2 \right]^{1/2}, \ |\gamma + \lambda - \left(\sum \alpha_i + \beta_i \right) | \right\} \leq$$

$$\text{Máx} \left\{ \left[\sum |\alpha_i|^2 \right]^{1/2} + \left[\sum |\beta_i|^2 \right]^{1/2}, \ |\gamma - \sum \alpha_i| + |\lambda - \sum \beta_i| \right\} \leq$$

$$\text{Máx} \left\{ \left[\sum |\alpha_i|^2 \right]^{1/2}, |\gamma - \sum \alpha_i| \right\} + \text{Máx} \left\{ \left[\sum |\beta_i|^2 \right]^{1/2}, |\lambda - \sum \beta_i| \right\} =$$

$\|x\| + \|y\|$. Lo que prueba la desigualdad triangular.

Dado que $x\, y = \sum \alpha_i \beta_i e_i$, se tiene que:

$$\|x\, y\| = \text{Máx} \left\{ \left[\sum |\alpha_i \beta_i|^2 \right]^{1/2}, \ | \sum \alpha_i \beta_i | \right\}.$$

Ahora, de la desigualdad de Cauchy - Schwartz y de la de Hölder se obtiene que:

$$| \sum \alpha_i \beta_i | \leq \left[\sum |\alpha_i|^2 \right]^{1/2} \left[\sum |\beta_i|^2 \right]^{1/2}$$

y por otra parte:

$$\left[\sum |\alpha_i\beta_i|^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum |\alpha_i|^2\right]^{1/2}\left[\sum |\beta_i|^2\right]^{1/2}$$

de donde por definición de $\|.\|$:

$$\|x\ y\| \leq \left[\sum |\alpha_i|^2\right]^{1/2}\left[\sum |\beta_i|^2\right]^{1/2} \leq \|x\|\ \|y\|.$$

lo que prueba la propiedad submultiplicativa.

Sea A el álgebra de Banach conmutativa, completación del álgebra A_o. Para probar que A no se puede poner como suma directa de su radical y de una subálgebra cerrada suya, y a la luz de la **Proposición 1.7**, será suficiente ver que la envolvente lineal de los idempotentes de A_o, $Lin\ P_{A_o}$, es densa en A.

En efecto: Para ello bastará probar que r pertenece al cierre de $Lin\ P_{A_o}$, pues en ese caso el cierre de $Lin\ P_{A_o}$ contendría a A_o, y por consiguiente a A. Por tanto será suficiente encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $Lin\ P_{A_o}$ tal que $\|x_n - r\| \longrightarrow 0$. Tales x_n serán de la forma:

$$x_n = -\sum_{i\in J}\beta_i^{(n)}e_i$$

donde J es conveniente subconjunto finito de $\mathbb{N}$, que depende de x_n, siendo los $\beta_i^{(n)}$ pertenecientes a $\mathbb{K}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\forall\ i \in J$. De hecho vamos a conseguir que tales $\beta_i^{(n)}$ sean reales positivos. A tal efecto consideramos los conocidos espacios:

$$l^1=\left\{ \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \alpha_n\in\mathbb{R} \;;\; \sum_{n\geq 1}|\alpha_n| < +\infty \right\}$$

$$l^2=\left\{ \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;/\; \alpha_n\in\mathbb{R} \;;\; \sum_{n\geq 1}|\alpha_n|^2 < +\infty \right\}$$

con sus respectivas normas:

$$\|x\|_1=\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n| \;,$$

$$\|x\|_2=\left[\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|^2\right]^{1/2}$$

Ambos son espacios normados completos tales que l^1 está estrictamente contenido en l^2, siendo la topología de l^1 mas fuerte que la de l^2 y por tanto dado x en l^1 se verifica que $\|x\|_2\leq \|x\|_1$. Ya que estas dos normas no son equivalentes, para cada k real positivo, existirá un elemento x en l^1 tal que

$$\|x\|_1>k\|x\|_2.$$

Tomando k = n , obtenemos una sucesión de elementos de l^1, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|y_n\|_1 > n\,\|y_n\|_2, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Si $y_n=\{\alpha_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}}$, definimos la sucesión:

$$z_n=\left\{ \frac{|\alpha_i^{(n)}|}{\|y_n\|_1} \right\}_{i\in\mathbb{N}} := \{\beta_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}}$$

Obsérvese que $\|z_n\|_1 = 1$, mientras que $\|z_n\|_2 < \frac{1}{n}$ por la forma de elegir y_n. Por tanto :

$$\text{Máx}\left\{ \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i^{(n)}|^2 \right]^{1/2},\ \left| 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^{(n)} \right| \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

de donde para cada n de $\mathbb{N}$:

$$\left[\sum_{i=1}^{i=N} |\beta_i^{(n)}|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i^{(n)}|^2 \right]^{1/2} < \frac{1}{n}$$

y esto para cualquier N en $\mathbb{N}$. De otra parte para cada n de $\mathbb{N}$ existe un natural n_0 tal que:

$$\left| 1 - \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i^{(n)} \right| < \frac{1}{n}.$$

Ahora basta elegir:

$$x_n = - \sum_{i=1}^{i=n_0} \beta_i^{(n)} e_i$$

para obtener la sucesión deseada.

Nota 1.9

Si bien el ejemplo anterior prueba que no es posible encontrar una subálgebra *B*, de *A*, tal que *A* sea suma topológica directa de su radical, *R*, y de *B*, Bade y Curtis [6, **Teorema 6.1, c)**] prueban que existe una subálgebra no cerrada, *C*, de *A* tal que $A = C + R$ con $C \cap R = \{0\}$.

Nota 1.10

El álgebra de Feldman, no agota la gama de los ejemplos de álgebras de Banach, A, para las cuales no es posible encontrar una subálgebra cerrada suya, B, tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$, donde R denota el radical de A. De hecho, la **Proposición 1.7** constituye un primer criterio que decide cuando un álgebra de Banach conmutativa no es *suma directa* de una subálgebra cerrada suya y de su radical. En este sentido un segundo criterio, del cual la **Proposición 1.7** es un caso particular, y del que se disponen ejemplos que lo satisfacen, se debe a G. Bachelis y S. Saeki [**4**]. Antes de enunciar dicho criterio necesitamos introducir alguna terminología:

Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad, I, y con radical R. Se dice que un elemento inversible, x, de A es *de potencias doblemente acotadas*, si la sucesión "doblemente" infinita

$$\{\|x^k\| \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

está acotada. Si denotamos por D el conjunto de los elementos de A que son de potencias doblemente acotadas entonces, como caso particular de [**4**, **Teorema 1**], podemos enunciar:

Si la envolvente lineal de D es densa en A, entonces no *existe ninguna subálgebra cerrrada y propia, B, de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = \{0\}$.*

Finalmente, notemos que la **Proposición 1.7** resulta ser un caso particular del resultado anterior dado que, *el hecho de que la envolvente lineal del conjunto de los idempotentes de A sea densa en A, es suficiente para asegurar que la envolvente lineal de D es densa en A*; lo que a su vez es una consecuencia del siguiente resultado de fácil comprobación: *Si e es un idempotente de A, entonces $I - 2e$ pertenece a D. El recíproco no es cierto* (el elemento iI, donde i denota la unidad imaginaria de $\mathbb{C}$, pertenece a D y sin embargo no es idempotente).

Ya que se dispone de ejemplos de álgebras de Banach, conmutativas, con radical, que no son suma directa de ninguna de sus subálgebras cerradas y propias y de su radical, se deduce que habrá que enriquecer el álgebra si deseamos obtener un teorema *de tipo Wedderburn*.

SECCION II

LA TRANSFORMADA DE GELFAND - FOURIER.

Esta sección la dedicamos fundamentalmente a establecer condiciones bajo las cuales se pueda asegurar que la *Transformada de Gelfand* es un isomorfismo.

Dar una respuesta a cuándo un álgebra de Banach, compleja, conmutativa, semisimple y con unidad, puede identificarse con el álgebra de las funciones contínuas, complejo valuadas sobre un compacto Hausdorff, va a ser básico (como se verá en la **Sección III**) para el objetivo prioritario de ésta memoria: la búsqueda de hipótesis naturales, o al menos bellas, que hagan que un álgebra de Banach conmutativa se descomponga en suma directa de su radical y de una subálgebra cerrada suya.

Sea A un álgebra de Banach compleja, conmutativa y con unidad. Por ϕ_A denotamos el espacio de los caracteres de A (funcionales lineales, multiplicativos, sobre A). Es bien conocido que los caracteres de A son automáticamente continuos y que ϕ_A, provisto de la topología débil * que le induce el dual topológico de A, es un espacio compacto y Hausdorff.

Recordamos también [9 ,**Teorema 16.5**] que si denotamos por M al conjunto de los ideales maximales de A, existe una identificación entre ϕ_A y M, que es la aplicación que a cada carácter de A le hace corresponder su núcleo. En adelante y sin previo aviso, tendremos presente esta identificación.

Si Ω es un compacto Hausdorff notaremos, como es usual, por $C(\Omega)$ al álgebra de todas las funciones continuas sobre Ω, complejo valuadas.

El Teorema de Representación de Gelfand [9, **Teorema 17.4**] afirma que *la Transformada de Gelfand*, G, *del álgebra A en $C(\phi_A)$, dada por* $G(a)(\varphi) = \varphi(a)$, *es un homomorfismo continuo. Además tal homomorfismo es inyectivo si y sólo si A es semisimple.*

Cabe preguntarse ahora cuándo el monomorfismo anterior será un auténtico isomorfismo. Gelfand y Naimark, en 1.943, dan respuesta afirmativa a esta cuestión en el caso concreto de que A sea una B^*- álgebra, [9 **Teorema 35.4**].

De una lectura "cuidadosa" de un conocido teorema de tipo Wedderburn, para ciertas álgebras de operadores, debido a Dunford (1.954) ([**10, Teorema 4.17**], ver también [**12, Cap XVII, Aptdo 2.1**]) se obtiene el siguiente teorema que constituye una primera respuesta a la pregunta planteada.

Recordemos [**26, cap. III, Sección 2**] que dado un espacio topológico compacto y Hausdorff, Ω, y una subálgebra, H, de $C(\Omega)$, se dice que H, *separa los puntos de* Ω si para cualesquiera dos puntos distintos de Ω, existe un elemento en H que asigna a dichos puntos imágenes distintas. La subálgebra H se llamará *autoadjunta* si para cada elemento, f, de H, la aplicación que a cada elemento de Ω le hace corresponder el complejo conjugado de su imagen por f, es también un elemento de H.

Así mismo recordamos que una subálgebra, *B*, de un álgebra asociativa con unidad, *A*, se dice que es *plena* si contiene al inverso de cada uno de sus elementos inversibles en *A*.

Desde ahora en adelante, P_A va a denotar el conjunto de los idempotentes de un álgebra *A*.

Teorema 2.1

Sea A un álgebra de Banach, compleja, conmutativa, con unidad, I, tal que P_A *está acotado. Sea B la subálgebra cerrada de A engendrada por* P_A*. Entonces:*

i) *B es una subálgebra plena de A.*

ii) *El homomorfismo de Gelfand, G, de B en* $C(\phi_B)$ *es un isomorfismo bicontinuo.*

Demostración

i) Veamos que *B* es una subálgebra plena de *A*:

Es un sencillo ejercicio comprobar que el conjunto P_A es un álgebra de Boole con las operaciones:

$$e \cap f = ef$$

$$e \cup f = e + f - ef$$

$\forall\ e,\ f \in A$. También es conocido **[11, Parte I, pág 44]**, que toda álgebra de Boole es isomorfa a una conveniente álgebra de Boole de conjuntos, de la que se sabe que dados n conjuntos de dicha álgebra, cada uno de ellos se puede conseguir como una unión disjunta de convenientes conjuntos que se obtienen por intersección de los n dados y sus complementarios. Esta propiedad se traduce en el álgebra de Boole P_A en: *Dados* n *idempotentes de* A, *cada uno de ellos se puede expresar como conveniente suma de idempotentes de manera que todos los idempotentes obtenidos en estas descomposiciones son ortogonales entre sí.*

Consideremos el conjunto, $B(P_A)$, de todos los elementos de la forma $\sum_{i=1}^{i=n}\alpha_i e_i$ donde $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $e_i \in P_A$, $\sum_{i=1}^{i=n} e_i = I$, $e_i \neq 0$, $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$, $\forall\ i, j = 1,2,\ldots n$, $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $B(P_A)$ es una subálgebra de A que contiene a P_A y cuyo cierre es la subálgebra B. En efecto, dado un idempotente, e, podemos expresarlo como:

$$e = e + 0(I-e)$$

lo que prueba que $B(P_A)$ contiene a P_A. Para ver que $B(P_A)$ es una subálgebra de A, bastará probar que las operaciones naturales en $B(P_A)$ son leyes de composición internas. Trivialmente el producto por escalares es una ley de composición interna para $B(P_A)$. Demostremos que la suma también lo es:

La suma de dos elementos de $B(P_A)$, será un elemento de A, de la forma $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i$. Al ser e_1, e_2,... e_n idempotentes en A, los podemos descomponer en convenientes sumas de idempotentes por escalares, siendo todos los idempotentes que aparecen ortogonales entre sí. Se obtiene así que la suma anterior ha de ser de la forma:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{i=m} \beta_i u_i + 0\left(I - \sum_{i=1}^{i=m} u_i\right)$$

donde $u_i \neq 0$, $u_i u_j = 0$ si $i \neq j$, $u_j\left(I - \sum_{i=1}^{i=m} u_i\right) = 0$, y $\sum_{i=1}^{i=m} u_i + \left(I - \sum_{i=1}^{i=m} u_i\right) = I$, $\forall\ i,\ j = 1,2,\ldots m$, por lo que se concluye que la suma es una ley de composición interna.

Un razonamiento análogo al efectuado para la suma, prueba también que el producto es una ley de composición interna en $B(P_A)$.

Dado que la clausura de $B(P_A)$ contiene a todos los generadores de B, se deduce que B es el cierre del álgebra $B(P_A)$. En consecuencia, si e es un elemento de B, existe una sucesión, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $B(P_A)$ tal que $e_n \longrightarrow e$. En particular si e es inversible en A, del hecho de que todos los elementos de la bola de centro e y radio el inverso de la norma de e son inversibles en A, se deduce que todos los términos de la sucesión anterior, a partir de uno dado, serán inversibles. Por la continuidad de la aplicación que a cada elemento perteneciente al conjunto de los inversibles de A le hace corresponder su inverso se tiene que, para n suficientemente grande, $e_n^{-1} \longrightarrow e^{-1}$. Por consiguiente, B será plena si y sólo si $B(P_A)$ lo es.

Consideremos ahora un elemento de $B(P_A)$, $b = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i$, que sea inversible en A. Supongamos que algún escalar α_i de la suma anterior fuese cero. Entonces el correspondiente e_i no es nulo y sin embargo $e_i b = 0$, lo que es absurdo al ser b inversible. De esta manera los escalares de la expresión de b son todos distintos de cero y así $B(P_A)$ es plena pues $b^{-1} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^{-1} e_i$ claramente está en $B(P_A)$.

ii) En primer lugar probamos que la función inversa del homomorfismo de Gelfand, $G: B \longrightarrow C(\phi_B)$, existe y es una aplicación continua. Para ello es suficiente encontrar una constante real y positiva, K, tal que la desigualdad $\|G(b)\| \geq K\|b\|$ sea cierta para todo b en B. Ya que $B(P_A)$ es densa en B, bastará probar la desigualdad anterior sólo para los elementos de $B(P_A)$.

Por definición:

$$\|G(b)\| = \text{Sup}\{ \ |G(b)(\varphi)| \ / \ \varphi \in \phi_B\} = \text{Sup}\{ \ |\varphi(b)| \ / \ \varphi \in \phi_B\}$$

De donde la desigualdad anterior será cierta si probamos que

$$\|b\| \leq 4M \ \text{Sup}\{ \ |\varphi(b)| \ / \ \varphi \in \phi_B\}.$$

donde M es la cota de P_A.

Es una consecuencia inmediata del Teorema de Hand - Banach que para todo elemento b de un espacio normado se verifica que

$$\|b\| = \text{Sup } \{ \ |x^*(b)| \ / \ x^* \in S^* \ \}$$

donde S^* denota la esfera unidad del dual topológico del espacio normado en cuestión. Luego dado un elemento de $B(P_A)$, $b = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i$, se tiene que:

$$\|b\| = \text{Sup } \left\{ \ |\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x^*(e_i)| \ / \ x^* \in S^* \right\}$$

$$\leq \text{Sup } \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i| |x^*(e_i)| \ / \ x^* \in S^* \right\}$$

$$\leq \text{Máx } \{ \ |\alpha_i| \ / \ i= 1,2,\dots n \ \} \text{ Sup } \left\{ \sum_{i=n}^{i=1} |x^*(e_i)| \ / \ x^* \in S^* \right\}$$

Por otra parte, si definimos:

$$P = \{ \ k \in \{ \ 1,2,\dots n\} \ / \ \text{Re } (\ x^*(e_i)) \geq 0 \ \} \qquad \text{y}$$

$$N = \{ \ k \in \{ \ 1,2,\dots n\} \ / \ \text{Re } (\ x^*(e_i)) < 0 \ \}$$

se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\text{Re } (x^*(e_i))| = \sum_{i \in P} \text{Re}(x^*(e_i)) - \sum_{i \in N} \text{Re}(x^*(e_i)) =$$

$$= \text{Re } \left(\sum_{i \in P} x^*(e_i) \right) - \text{Re } \left(\sum_{i \in N} x^*(e_i) \right) =$$

$$= \text{Re } x^*\left(\sum_{i \in P} e_i \right) - \text{Re } x^*\left(\sum_{i \in Q} e_i \right) = \text{Re } x^*(a) - \text{Re } x^*(I-a)$$

donde $a = \sum_{i \in P} e_i$ es un elemento de P_A. Entonces, por estar P_A

acotado, por M, se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\mathrm{Re}\ x^*(e_i)| \le \| x^*(a)\| + \|x^*(I-a)\| \le \|x^*\| \ (\|a\| + \|I-a\|) \le 2M$$

De la misma manera se obtiene también que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\mathrm{Im}\ x^*(e_i)| \le 2M$$

de donde:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |x^*(e_i)| \le 2M + 2M = 4M.$$

Probemos ahora que:

$$\mathrm{Sup}\ \{ \ |\varphi(b)| \ / \ \varphi \in \phi_B \} = \mathrm{Máx}\ \{ \ |\alpha_i| \ / \ i=1,2,\dots n \ \}.$$

Esto va a ser una consecuencia inmediata de los dos hechos siguientes:

- Dados n idempotentes no nulos y ortogonales de A, $e_1, e_2, \dots e_n$, y elegido uno de ellos, e_k, existe un carácter, φ, de B tal que $\varphi(e_k) = 1$ mientras que $\varphi(e_i) = 0$ para todo i distinto de k. En efecto: Por ser el radical de B el núcleo de la Transformada de Gelfand de B y ser P_A disjunto del radical de A (**Lema 1.6**) y por consiguiente disjunto del radical de B, ha de existir un carácter, φ, de B tal que $\varphi(e_k) \neq 0$. Al ser e_k idempotente, $\varphi(e_k)$ ha de valer uno y por el carácter ortogonal de los n idempotentes considerados ha de ser nula la imagen por φ de cualquier otro idempotente distinto de e_k.
- Dados n idempotentes de A, $e_1, e_2, \dots e_n$, ortogonales, no nulos,

cuya suma sea la unidad de A y elegido un carácter de B, ρ, existe un y solo un idempotente del conjunto anterior tal que su imagen por ρ vale uno mientras que la imagen por ρ de cualquier otro de tales idempotentes es cero. En efecto: Ha de existir un e_k del conjunto anterior tal que $\rho(e_k) \neq 0$ pues de lo contrario $\rho(I)$ sería cero y esto no puede ser dado que los caracteres conservan la unidad. Ahora del carácter ortogonal e idempotente de estos elementos se obtiene lo deseado.

Los dos hechos anteriores prueban que: Dados n idempotentes no nulos, y ortogonales, de A, e_1, e_2,...e_n, tales que $\sum_{i=1}^{i=n} e_i = 1$, existen n caracteres de B, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, tales que $\varphi_i(e_i) = 1$ y $\varphi_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$, para todo i, $j \in \{1,2,\ldots n\}$. Además cualquier otro carácter ρ de B, restringido al conjunto de estos idempotentes, ha de coincidir con alguno de los n caracteres anteriores, de donde:

$$\text{Sup } \{|\varphi(b)| \ / \ \varphi \in \phi_B\} = \text{Máx } \{|\alpha_i|, \ i = 1,2,\ldots n\}$$

y en consecuencia:

$$\|b\| \leq 4M \ \| G(b)\|.$$

Veamos por último que la Transformada de Gelfand asociada a B es sobreyectiva. Este hecho es evidente si se tiene en cuenta que, por la continuidad de G, G(B) es cerrada y que $G(B(P_A))$ es una subálgebra autoadjunta de $C(\phi_B)$ que separa los puntos de ϕ_B y contiene a las funciones constantes y por consiguiente, en virtud del conocido Teorema de Stone -

Weierstrass [25, **Teorema 3.2.12**], se tiene que $G(B(P_A))$ es densa en $C(\phi_B)$ y con más razón lo es $G(B)$.$_\dagger$

En lo que queda de sección estamos en el ambiente: A álgebra de Banach, compleja, conmutativa, con unidad.

Nótese que con el objeto de establecer cuando el homomorfismo de Gelfand asociado a A es un isomorfismo, es muy natural, obligado, imponer que A sea semisimple, puesto que $C(\phi_A)$ lo es, y que el conjunto de los idempotentes de A esté acotado, pues los idempotentes de $C(\phi_A)$ lo están. Sin embargo estas dos condiciones no bastan para asegurar que el monomorfismo de Gelfand asociado a una tal álgebra A sea un isomorfismo, como prueba el siguiente contraejemplo:

Sea D el disco unidad cerrado de $\mathbb{C}$. LLamamos $A(D)$ al conjunto de todas las aplicaciones continuas de D en $\mathbb{C}$ que son holomorfas en el conjunto $Int\ D := \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\}$. Es fácil comprobar que $A(D)$ con las operaciones puntuales y la norma del supremo es un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad, conocida en la literatura como *Algebra Disco*. Obviamente el conjunto de sus idempotentes está acotado y claramente es semisimple. En [23, **Teorema 4.4.1**] se establece que:

- La aplicación F de D en el espacio de los ideales maximales de $A(D)$, dada por $F(z) = \{f \in A(D) \ / \ f(z) = 0\}$ es un homeomorfismo.

- La Transformada de Gelfand asocida a $A(D)$ es la inyección de $A(D)$ en $C(D)$.

Por tanto el monomorfismo de Gelfand asociado a $A(D)$ no podrá ser un isomorfismo dado que las álgebras $A(D)$ y $C(D)$ no pueden ser isomorfas.

Estamos pues obligados a añadir nuevas hipótesis si queremos obtener condiciones suficientes para que el monomorfismo de Gelfand sea un isomorfismo. Una de ellas es clara en virtud del **Teorema 2.1, ii)**:

Corolario 2.2

Si A es un álgebra de Banach, compleja, conmutativa, con unidad tal que el conjunto de sus idempotentes, P_A, está acotado, y la envolvente lineal de P_A es densa en A, entonces la transformada de Gelfand de A en $C(\phi_A)$ es un isomorfismo. En particular A es semisimple.

Obsérvese que si A es un álgebra que satisface el corolario anterior, entonces $C(\phi_A)$ ha de ser el cierre de la envolvente lineal del conjunto de sus idempotentes. Analizamos ahora cuando se da esta última situación.

Sea Ω un espacio topológico compacto y Hausdorff. Es fácil ver que si Ω es conexo, $C(\Omega)$ no tiene más idempotentes que las funciones constantemente igual a uno y a cero respectivamente. Luego si buscamos "cierta abundancia" de idempotentes, en $C(\Omega)$, queda claro que la no conexión de Ω va a nuestro favor.

Existen varios conceptos para medir el grado de no conexión de un espacio topológico:

Un espacio topológico, Ω, se llama *totalmente disconexo* si no contiene más subconjuntos conexos que los unitarios. Se dice que Ω es *cero dimensional* si cada uno de sus puntos tiene una base de entornos formada por conjuntos que son, simultaneamente abiertos y cerrados. Se dice que Ω *estoneano o extremadamente disconexo* si el cierre de cada uno de sus abiertos es un abierto de Ω.

Relacionemos estos conceptos en el ambiente que nos ocupa: Ω espacio topológico compacto y Hausdorff.

Ya que Ω es localmente compacto, de [**29, Teorema 29.7**] se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 2.3

Ω es cero dimensional si y sólo si es totalmente disconexo.

Supongamos ahora que Ω es extremadamente disconexo. Sean

x, y, dos puntos distintos de Ω, y $V(x)$ un entorno de x tal que y no pertenece al cierre de dicho entorno. Si expresamos a Ω como la unión de la clausura de $V(x)$ y de su complementario se tiene que Ω es al unión disjunta de un entorno abierto cerrado de x, (el cierre de $V(x)$), y de un entorno abierto cerrado de y (el complementario del cierre de $V(x)$), de donde cualquier subconjunto de Ω que tenga dos o más puntos distintos no podrá ser conexo. Por tanto, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.4

Si Ω es extremadamente disconexo, es también totalmente disconexo.

Sin embargo, no cabe esperar que si Ω es totalmente disconexo, tenga que ser estoneano, pues en **[18, pág 222]** se puede encontrar un contraejemplo de ello. En consecuencia, en nuestro ambiente la situación se resume:

$$\boxed{\text{Totalmente disconexo}} \iff \boxed{\text{Cero dimensional}}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\text{Estoneano}}$$

La siguiente proposición viene a mostrar como repercute el hecho de que Ω posea alguno de los grados de no conexión que acabamos de presentar, en la abundancia de idempotentes en $C(\Omega)$.

Proposición 2.5

Ω es totalmente disconexo si y sólo si $C(\Omega)$ es el cierre de la envolvente lineal de sus idempotentes.

Demostración

Dado que la envolvente lineal de los idempotentes de $C(\Omega)$, *Lin* P, es claramente una subálgebra autoadjunta y contiene a las funciones constantes, si probamos que *Lin* P separa los puntos de Ω tendremos probada, en virtud del Teorema de Stone -Weierstrass [26, **Teorema** 3.2.12] la condición necesaria.

Supongamos pues que Ω totalmente disconexo, o lo que es equivalente cero dimensional, para cualesquiera dos puntos distintos de Ω se tiene que cada uno de los puntos está contenido en un abierto cerrado de Ω, respectivamente, de manera que ambos abiertos cerrados, F_1 y F_2, son disjuntos y su unión vale la totalidad. Definiendo la función e: $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que a cada elemento de Ω le hace corresponder el cero, si el elemento pertenece a F_1, y el uno si el elemento pertece a F_2, se tiene que la función e es un idempotente que toma valores distintos en los puntos prefijados y en consecuencia *Lin* P separa los puntos de Ω.

Reciprocamente: Si $C(\Omega)$ es la clausura de *Lin* P, como $C(\Omega)$ separa los puntos de Ω se tiene que dados dos puntos distintos de Ω, ω y ν, ha de existir un idempotente, e, en $C(\Omega)$ tal que $e(\omega) \neq e(\upsilon)$. Así los conjuntos $e^{-1}(0)$ y $e^{-1}(1)$ son entornos de ω y υ, cerrados disjuntos tales que su unión es Ω, lo que prueba que Ω es totalmente disconexo.$_{\dagger}$

Volviendo a nuestro ambiente, del **Corolario 2.2** y de la proposición anterior se obtiene:

Corolario 2.6

Supongamos que el conjunto de los idempotentes de A es acotado. Si A es el cierre de la envolvente lineal de sus *idempotentes, entonces A es semisimple y el espacio de sus caracteres es totalmente disconexo.*

Nuestro próximo objetivo es probar el recíproco del corolario anterior. Esto se conseguirá dando una nueva respuesta al problema de cuando el monomorfismo de Gelfand es un isomorfismo. Dicha respuesta está inspirada en [7, **teorema 2.4**], y se recoge en el siguiente teorema. Previamente establecemos un lema:

Lema 2.7

Sea B un álgebra de Banach conmutativa. Si F: $C(\Omega) \longrightarrow B$ *es un monomorfismo de álgebras, entonces* F^{-1} *es continua. Si además* F *es de imagen densa,* F *es un isomorfismo bicontinuo.*

Demostración

Usando el hecho de que F es un monomorfismo, es fácil ver que la aplicación dada por

$$\|f\|_1 = \|F(f)\| \qquad \forall\ f \in C(\Omega),$$

es una nueva norma de álgebra en $C(\Omega)$. Por consiguiente en virtud de [21, **Teorema 6.2**] se tiene que:

$$\|f\| \le \|F(f)\|.$$

y en consecuencia el monomorfismo F tiene inversa continua.

De otra parte, si F^{-1} es continua, entonces F es cerrada, de donde si en adición F es de imagen densa ha de ser F sobreyectiva. Así F^{-1} es un isomorfismo continuo entre dos álgebras de Banach conmutativas luego, por el Teorema de los Isomorfismos de Banach, F es un isomorfismo bicontinuo.†

Teorema 2.8

Si A es semisimple, el conjunto de sus idempotentes está acotado y el espacio de sus caracteres es totalmente disconexo, entonces la Transformada de Gelfand asociada a A es un isomorfismo y en consecuencia A es el cierre de Lin P_A.

Demostración

Consideremos la restricción de la Transformada de Gelfand de A, G_A, al conjunto de los idempotentes de A, P_A. Claramente dicha restricción es inyectiva. Por otra parte, si f es un idempotente no nulo de $C(\phi_A)$ distinto de la identidad, los conjuntos $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son compactos disjuntos no vacíos tales que $\phi_A = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$, luego por el Teorema de Shilov [9, **Teorema 21.5**], existe un idempotente, e, en A tal que $G_A(e)= f$. Luego por ser $C(\phi_A)$ el cierre de la envolvente lineal de sus idempotentes (**Proposición 2.5**) se tiene que la Transformada dee Gelfand asociada a A es un monomorfismo de imagen densa.

Por otra parte, sea B la subálgebra cerrada de A engendrada por P_A. Por el **Teorema 2.1**, la Transformada de

Gelfand asociada a B, G_B, es un isomorfismo bicontinuo de B en $C(\phi_B)$. Luego componiendo $G_A.G_B^{-1}$ es un monomorfismo entre $C(\phi_B)$ y $C(\phi_A)$ de imagen densa, que por el lema anterior, es un isomorfismo bicontínuo. Por tanto $G_A = G_A.G_B^{-1}.G_B$ es un isomorfismo. El resto se obtiene de la **Proposición 2.5.** +

Nota: Obsérvese que si A es isomorfa a $C(\phi_A)$ entonces por el **Lema 2.7** se tiene que P_A es acotado, de donde si se supone que ϕ_A es totalmente disconexo, se verificará que la Transformada de Gelfand asociada a A es un isomorfismo.

Hagamos ahora un balance de la situación: Dada A, álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad, semisimple y tal que el conjunto de sus idempotentes está acotado se tiene:

A es el cierre de la envolvente lineal de sus idempotentes
$\Updownarrow$
El espacio de caracteres de A es totalmente disconexo
$\Downarrow$
El monomorfismo de Gelfand asociado a A es un isomorfismo

La primera equivalencia se obtiene del **Corolario 2.6** y de la **Proposición 2.8**. La segunda implicación se estableció en el **Corolario 2.2**.

A continuación se presentan otras respuestas a la pregunta de cuando la Transformada de Gelfand es un isomorfismo. Estas respuestas se recogen en el siguiente teorema que resume, entre otros, los resultados principales de [**19**] y [**20**].

Previamente recordamos los conceptos que aparecerán involucrados en el resultado en cuestión. De acuerdo con [**9, pág 111**], si por A denotamos un álgebra de Banach compleja, conmutativa con unidad: Una función F, compleja de variable compleja, se dice que *opera* sobre A si para cada elemento a, de A, existe otro elemento b, de A, tal que $FG(a) = G(b)$, donde G denota la Transformada de Gelfand asociada a A.

Si A es semisimple, considerándola como subálgebra de $C(\phi_A)$, la definición anterior se puede establecer en los siguientes términos:

Dado un subconjunto Ω de $\mathbb{C}$, se dice que una función, $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, *opera* sobre A si para cada elemento , f, de A tal que su imagen esté contenida en Ω se verifica que la composición F.f pertenece a A.

Si añadimos, al hecho de ser semisimple, ser también una subálgebra autoadjunta de $C(\phi_A)$, entonces podemos asegurar que existen funciones que operan sobre A distintas de la identidad, a saber, la conjugación en el plano complejo.

Se dice que el álgebra A es *regular* (en el sentido de Shilov) si para cada cerrado C del espacio de sus caracteres y para cada elemento, φ, del complementario de C, existe un elemento, a, de A que pertenece al núcleo de cualquier elemento de C, y sin embargo es tal que $\varphi(a) \neq 0$.

Ya que todo espacio compacto Hausdorff es normal, el Lema de Urysohn [17, **Teorema** 12.2] prueba que el álgebra $C(\Omega)$ es regular.

Teorema 2.9 [19, **Teorema** 2; 20, **Teorema** 3; 20, **Teorema** 1 y **Corolario**; 23, **Corolario** 5.1.2]

Si A es semisimple, entonces el monomorfismo de Gelfand de A es un isomorfismo si se verifican alguna de las siguientes condiciones:

i) *Todas las funciones continuas operan sobre A.*

ii) *A es autoadjunta y la función* $F(x) = \sqrt{x}$, $(0 \leq x \leq 1)$, *opera sobre A.*

iii) *A es autoadjunta, regular y existe una función,* $F:]-1,1[\longrightarrow \mathbb{C}$, *que opera sobre A y verifica que* $F(0) = 0$ *y* $\lim_{x \to 0} x^{-1}F(x) = \infty$.

iv) *A es autoadjunta y existe una constante,* $k \in \mathbb{R}^+$, *tal que* $\|a\|^2 \leq k\ \|a^2\|$, *para cualquier a en A.*

Nota: Para ii) ver también [9, **teorema 21.7**].

SECCION III

EXTENSIONES DEL TEOREMA PRINCIPAL DE WEDDERBURN A ALGEBRAS DE BANACH COMPLEJAS CONMUTATIVAS.

Siguiendo la nomenclatura de [7], si A es un álgebra de Banach y R es su radical:

Se dice que A es *descomponible* si existe una subálgebra propia, B, de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = 0$.

Se dice que A es *fuertemente descomponible* si existe una subálgebra cerrada y propia, B, de A tal que $A = B + R$ y $B \cap R = 0$; es decir, A es la suma topológica directa de su radical y de B. En este caso notaremos $A = B \oplus R$.

De ahora en adelante designaremos por A, un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad. El objetivo de esta Sección consiste en presentar varios criterios que aseguren la descomponibilidad fuerte de A.

La siguiente proposición, fácil de probar, viene a verificar la irrelevancia de suponer que el álgebra A tiene unidad.

Proposición 3.1

Sea A un álgebra de Banach sin unidad y sea A_1 su unitización. Entonces A es fuertemente descomponible (respt.

descomponible) si y sólo si A_1 lo es. Además la descomposición fuerte de A (respt. descomposición) es única si y sólo si lo es la de A_1.

Con el ejemplo de Feldman, (**Nota 1.9**), queda claro que existen álgebras de Banach incluso conmutativas, descomponibles que no son fuertemente descomponibles.

Proposición 3.2

Sea R el radical de A y sean ϕ_A y $\phi_{A/R}$ los espacios de caracteres de A y A/R respectivamente. Entonces ambos espacios de caracteres son homeomorfos.

Demostración

Sea F: $\phi_{A/R} \longrightarrow \phi_A$ la aplicación dada por:

$$F(\varphi)(a) = \varphi(a + R) \quad \forall\ \varphi \in \phi_{A/R},\ a \in A$$

Claramente la aplicación F está bien definida y es inyectiva; además es sobreyectiva. En efecto: Dado $\xi \in \phi_A$, definimos φ: $A/R \longrightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi(a + R) = \xi(a)\ \forall\ a \in A$. El hecho de que el radical sea el núcleo de la Transformada de Gelfand hace que los caracteres se anulen sobre elementos del radical y de ahí que la aplicación φ esté bién definida. Obviamente $\varphi \in \phi_{A/R}$ y $F(\varphi) = \xi$.

La bicontinuidad de F es inmediata pues, teniendo en cuenta la definición de los entornos básicos tanto de A como de

A/R [9, **Definición 17.1**] es fácil observar que:

$$F(V(\varphi;\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots\pi(a_n);\varepsilon) = V(F(\varphi);a_1,a_2,\ldots a_n;\varepsilon) \quad \text{y}$$

$$F^{-1}(V(\xi;a_1,a_2,\ldots a_n;\varepsilon) = V(F^{-1}(\varsigma);\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots\pi(a_n);\varepsilon)$$

$\forall\ a_1,a_2,\ldots a_n \in A,\ \varphi \in \phi_A,\ \xi \in \phi_{A/R},\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, donde π denota la proyección canónica de A sobre A/R.$_\dagger$

Por tanto de ahora en adelante nos dará lo mismo decir que ϕ_A es totalmente disconexo o que $\phi_{A/R}$ lo es; o suponer que A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$ o que A/R es isomorfo a $C(\phi_A)$, puesto que como es bien conocido [23, **Teorema 4.1.4**], *dos compactos Hausdorff*, Ω_1 *y* Ω_2, *son homeomorfos sii las correspondientes álgebras* $C(\Omega_1)$ *y* $C(\Omega_2)$ *son isomorfas*. Finalmente también conviene observar que es equivalente decir que A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$, que decir que A/R es isomorfo a $C(\Omega)$, para conveniente espacio, Ω, compacto Hausdorff. Esto se debe a que si τ es el isomorfismo existente entre $C(\Omega)$ y A/R, y G es la Transformada de Gelfand asociada a A/R, entonces $G.\tau$ es un monomorfismo continuo entre $C(\Omega)$ y $C(\phi_{A/R})$, de donde por ser $C(\Omega)$ autoadjunta, la imagen de tal monomorfismo será una subálgebra autoadjunta de $C(\phi_{A/R})$, que claramente separa los puntos de ϕ_A, luego por el Teorema de Stone - Weierstrass, la imagen de $G.\tau$ será una subálgebra densa de $C(\phi_{A/R})$. Ya que por el **Lema 2.7** tal imagen es cerrada, se tendrá que $G.\tau$ es un isomorfismo bicontinuo, y así A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$.

La siguiente proposición es parte del enunciado de [6, **Teorema** 2.3].

Proposición 3.3

Sea B un álgebra de Banach conmutativa, D un álgebra de Banach y Ψ: $B \longrightarrow D$ un homomorfismo. Si el conjunto de los idempotentes de B, P_B, está acotado, también lo está $\Psi(P_B)$.

Corolario 3.4

Si D es un álgebra de Banach y Ψ: $C(\Omega) \longrightarrow D$ es un homomorfismo, la imagen por Ψ de los idempotentes de $C(\Omega)$ es un subconjunto acotado de D.

El siguiente resultado de Badè y Curtis (1.960), se recoge en [7, **Teorema** 2.4] y es un resultado clave en todo este trabajo.

Teorema 3.5. (Criterio de descomposición I)

Supongamos que el radical de A, R, no es cero y que el espacio de los caracteres de A, ϕ_A es totalmente disconexo. Entonces:

i) A es descomponible y A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$ si y sólo si el conjunto de los idempotentes de A, P_A, es acotado.

ii) Si P_A es acotado, entonces A es fuertemente descomponible y *tal descomposición fuerte es única.*

Demostración

i) Probemos que si A es descomponible y $A/R \cong C(\phi_{A/R})$ entonces P_A es acotado. Observemos que todo isomorfismo algebraico entre $C(\phi_{A/R})$ y A/R es un isomorfismo topológico en virtud del **Lema 2.7**. Por otra parte si A es descomponible, por la **Proposición 1.4**, ha de existir una subálgebra B de A tal que la restricción de la proyección canónica, de A en A/R, a B es un isomorfismo de álgebras, entre B y A/R. Sea μ: $C(\phi_{A/R}) \longrightarrow B$ la composición de los dos isomorfismos anteriores y sea P el conjunto de los idempotentes de $C(\phi_{A/R})$. Por ser μ isomorfismo:

$$\mu(P) = P_B.$$

Nótese ahora que el conjunto de los idempotentes de B, P_B, está incluido en P_A por ser B subálgebra de A, y que la inclusión contraria también es cierta en virtud de iv) del **Lema 1.6**, de donde $P_A = P_B$.

Por consiguiente: $\mu(P) = P_A$. Considérese, finalmente, μ vista de $C(\phi_{A/R})$ en A y aplíquese ahora el **Corolario 3.4** para concluir que P_A es acotado.

La condición suficiente de la afirmación i) de este teorema quedará probada cuando se demuestre la primera parte de la tesis ii) del enunciado del teorema ya que toda álgebra fuertemente descomponible es trivialmente descomponible y en la prueba de ii) se verá también que la Transformada de Gelfand asociada a A/R es un isomorfismo. Pasemos pues a probar ii).

ii) Supongamos que P_A es acotado. Probemos en primer lugar que A ha de ser fuertemente descomponible. Sea B la subálgebra cerrada de A engendrada por P_A. En virtud de la **Proposición 1.4** y por ser B una subálgebra "cerrada" de A, para que A se descomponga como suma topológico directa de B y R será suficiente probar que la restricción, π/B, a B de la proyección canónica, $\pi : A \longrightarrow A/R$, es un isomorfismo.

- Veamos que π/B: $B \longrightarrow A/R$ es inyectiva. Para ello probamos previamente que $B \cap R = 0$. Obsérvese que por ser $P_B = P_A$ se tiene que $B = \overline{Lin\ P_B}$ siendo P_B acotado por hipótesis, luego por el **Corolario 2.6** el espacio de los caracteres de B, ϕ_B, es totalmente disconexo, y por ii) del **Teorema 2.1**, el homomorfismo de Gelfand, G_B de B en $C(\phi_B)$ es un isomorfismo bicontínuo. Por consiguiente $B \cap R = 0$, ya que si $x \in B \cap R$, entonces $0 = r_B(x) = \|G_B(x)\| \Rightarrow x = 0$, donde r_B denota la aplicación radio espectral en B. (Ver,si acaso [**9, Teorema 17.4 y Corolario 17.7**])

Si ahora un elemento, b de B, es tal que $\pi/B(b) = 0$ entonces $b \in Ker\ \pi = R$, por lo que b pertenecerá a la intersección de B y R, que sabemos que es cero . Así $b = 0$, y por consiguiente π/B es inyectiva.

- Veamos que π/B: $B \longrightarrow A/R$ es sobreyectiva. En primer lugar observamos que si consideramos la Transformada de Gelfand asociada a A/R, G: $A/R \longrightarrow C(\phi_{A/R})$, y probamos que la composición γ = G.π/B, γ: $B \longrightarrow C(\phi_{A/R})$, es sobreyectiva, entonces π/B es también sobreyectiva. En efecto: dado un elemento $[a]$ de A/R, ya que G($[a]$) es un elemento de $C(\phi_{A/R})$ y que se supone γ sobreyectiva, se tiene que ha de existir un elemento, b, de B tal que $\gamma(b)$ = G($[a]$), es decir G($\pi(b)$) = G($[a]$), y por ser G un monomorfismo (por el caracter semisimple de A/R) ha de ser $\pi(b) = [a]$. Probemos pues que γ es sobreyectiva. Nótese que por ser $\phi_{A/R}$ totalmente disconexo (**Proposición 3.2**), de la **Proposición 2.5** se tiene que $C(\phi_{A/R})$ es el cierre de la envolvente lineal de P (el conjunto de sus idempotentes) y que por definición $B = \overline{Lin\ P_B}$; de aquí que en en primer lugar veamos que $\gamma(P_A)$ = P, con lo que tendremos que $\gamma(Lin\ P_B) = Lin$ P y que por consiguiente γ: $B \longrightarrow C(\phi_{A/R})$ es un monomorfismo de imagen densa. El hecho de que $\gamma(P_A)$ = P se deduce de:

a) $\pi/B(P_A) = P_{A/R}$. En efecto: Por ser π/B un homomorfismo, $\pi/B(P_A) \subseteq P_{A/R}$. Recíprocamente: si $[x] \in P_{A/R}$ entonces por iii) del **Lema 1.6** $\exists\ p \in P_A$ tal que $\pi/B(p) = [x]$.

b) G($P_{A/R}$) = P. En efecto: Por definición de norma cociente es claro que $P_{A/R}$ es un conjunto acotado, puesto que P_A lo es; y como $\phi_{A/R}$ es totalmente disconexo, por el **Teorema 2.8**, la Transformada de Gelfand asociada a A/R, G, es un isomorfismo.

Por tanto $G(P_{A/R}) = P$.

Ahora, dado que G_B: $B \longrightarrow C(\phi_B)$ es un isomorfismo, se tiene que $\gamma.G_B^{-1}$: $C(\phi_B) \longrightarrow C(\phi_{A/R})$ es un monomorfismo de imagen densa, luego por el **Lema 2.7** es un isomorfismo bicontinuo, y así $\gamma = \gamma.G_B^{-1}.G_B$ es otro isomorfismo bicontínuo, lo que prueba que γ es sobreyectiva y, por consiguiente, que lo es π/B.

Veamos por último que la descomposición fuerte es única. Para ello supongamos que existe otra subálgebra cerrada de A, B', tal que $A = B' \oplus R$. Entonces, por la **Proposición 1.4**, se tiene que π/B': $B' \longrightarrow A/R$ es un isomorfismo continuo, que también será bicontínuo dado que B' es cerrada (Teorema de los Isomorfismos de Banach). Componiendo esta aplicación con el isomorfismo G: $A/R \longrightarrow C(\phi_{A/R})$ se obtiene un isomorfismo bicontínuo entre B' y $C(\phi_{A/R})$. Por tanto B' también ha de ser el cierre de la envolvente lineal de sus idempotentes. Pero por iv) del **lema 1.6**, B' es una subálgebra de A que contiene a P_A, luego $P_{B'} = P_A$ y en consecuencia: $B = \overline{Lin\ P_A} = B'$. $\dagger$

A la vista del teorema anterior y en el caso de que P_A sea acotado, cabe la duda de si es posible que A admita otra descomposición no fuerte, claro está. Se comprenderá enseguida el interés del siguiente resultado, probado en **[7, Teorema 2.4]**, en el que se afirma que bajo la hipótesis adicional de que R sea nilpotente, tal situación no se puede dar.

Teorema 3.6

Si P_A *es acotado,* ϕ_A *totalmente disconexo y* R *es nilpotente y no nulo, entonces toda descomposición de* A *es necesariamente fuerte y en consecuencia única.*

Según se probó en el **Teorema 3.5**, dada un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad, el hecho de que su espacio de caracteres sea totalmente disconexo junto con que el conjunto de sus idempotentes esté acotado, fuerza la descomposición fuerte (única) del álgebra A. De ahí que ahora nos preocupemos del estudio de condiciones que aseguren la acotabilidad de P_A. En este sentido, una primera respuesta la dan Badé y Curtis:

Se dice que el álgebra A satisface la *propiedad (I)*, cuando para cualesquiera sucesiones de idempotentes de A, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que

i) $\qquad a_n a_m = b_n b_m = 0 \qquad \forall\, n \neq m \in \mathbb{N}$

ii) $\qquad a_n b_m = 0 \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$

exista un idempotente, e, de A tal que:

$$e\, a_n = a_n \qquad \text{y}$$

$$e\, b_n = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como se afirma en [7, **Corolario 3.3**], *si A satisface la propiedad* (I), *entonces los idempotentes de A están acotados.* Además, es de notar que este resultado sigue siendo cierto con sólo suponer que los idempotentes de A conmutan (sin necesidad de exigir la conmutatividad del álgebra)

Si se refuerza un poco la hipótesis topológica de que el espacio de los caracteres de A, ϕ_A, sea totalmente disconexo y se supone que ϕ_A *es extremadamente disconexo entonces*, como se prueba en [7, **Sección 3**], *A satisface la propiedad* (I), por lo que el **Teorema 3.5** nos permite enunciar el siguiente resultado:

Teorema 3.7

Si el espacio de los caracteres de A es extremadamente disconexo, entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

Además, A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$.

La acotación del conjunto de los idempotentes de A/R no fuerza la acotación del conjunto de los idempotentes de A, ni siquiera suponiendo que A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$ y que el espacio de los caracteres de A es totalmente disconexo, como pone de manifiesto el siguiente contraejemplo:

Si se considera un espacio vectorial complejo n- dimensional de base $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ y se define la tabla de multiplicación siguiente:

$$e_1^2 = e_1$$

$$e_1 e_j = e_j e_1 = 0 \quad \forall\, j \neq 1$$

$$e_j e_k = e_{j+k} \qquad \text{si} \quad j,\, k \geq 2 \quad \text{y} \quad j+k \leq n$$

$$e_j e_k = 0 \qquad \text{si} \quad j,\, k \geq 2 \quad \text{y} \quad j+k > n$$

se tiene que el espacio U_n así definido tiene estructura de álgebra de Banach conmutativa, para conveniente norma [7, **Lema 5.1**]. Si a cada natural, n, se le asocia por el procedimiento anterior la correspondiente álgebra U_n, y se considera el espacio U_o de todas las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \in U_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, se tiene que U_o con las operaciones puntuales y la norma del supremo es un álgebra de Banach conmutativa. Si se denota por A a la unitización de dicha álgebra, a partir de [7, **Teorema 5.2**], se deduce que:

- A es un álgebra con radical, R, no nulo.
- los idempotentes de A/R están acotados.
- El espacio de los caracteres de A totalmente disconexo.
- A no es descomponible.

Por tanto el conjunto de los idempotentes de A no puede estar acotado (para no caer en contradicción con el **Teorema 3.5**).

A continuación nos vamos a ocupar de establecer condiciones que aseguren la acotación de P_A a partir de la acotación de $P_{A/R}$, independientemente de cómo sea el espacio de los caracteres de A o de que A/R sea o no isomorfo a $C(\phi_{A/R})$. Una primera respuesta se obtiene a partir de la siguiente proposición si se recuerda que, cuando A satisface la propiedad (I) entonces P_A está acotado.

Proposición 3.8

A *satisface la propiedad* (I) *si y sólo si* A/R *la satisface.*

Demostración

Supongamos que A satisface la propiedad (I) y consideremos dos sucesiones de elememtos de $P_{A/R}$, $\{[a_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{[b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, verificando las condiciones i), ii) de la propiedad (I). Por el **Lema 1.6, iii)**, y por el caracter sobreyectivo de π, existirán otras dos sucesiones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de P_A tales que:

$$\pi(u_n) = [a_n] \qquad \text{y}$$

$$\pi(v_n) = [b_n] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Así

$$\pi(u_n u_m) = [a_n][a_m] = [b_n][b_m] = \pi(v_n v_m) = 0 \qquad \forall\, n \neq m \in \mathbb{N}$$

$$\pi(u_n u_m) = [a_n][b_m] = 0 \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Por ii) del **lema 1.6**, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verificarán las condiciones i), ii) de la propiedad (I), por lo que existirá un idempotente, e, en A tal que:

$$e\,u_n = u_n \qquad \text{y}$$

$$e\, v_n = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto:

$$\pi(e)[a_n] = [a_n] \qquad \text{y}$$

$$\pi(e)[b_n] = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

lo que prueba que A/R satisface la propiedad (I).

Recíprocamente: Supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de P_A que satisfacen i) e ii) de la propiedad (I). Entonces, obviamente, $\{\pi(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\pi(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (donde π es la proyección canónica de A en A/R) son dos sucesiones de $P_{A/R}$ que también verifican las condiciones i), ii) de la propiedad (I). Si A/R satisface tal propiedad, ha de existir un idempotente, $[e]$, de A/R tal que

$$[e]\pi(a_n) = \pi(a_n) \qquad \text{y}$$

$$[e]\pi(b_n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Otra vez por iii) del **Lema 1.6**, existirá un idempotente de A, p, tal que $\pi(p) = [e]$, de donde:

$$\pi(p\, a_n) = \pi(a_n) \qquad \text{y}$$

$$\pi(p\, b_n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, por ii) del **Lema 1.6**, se tiene que:

$$p\, a_n = a_n \qquad \text{y}$$

$$p\, b_n = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y así, A satisface la propiedad (I).$_\dagger$

Una nueva respuesta al problema de cuando P_A es acotado, sabiendo que $P_{A/R}$ lo es, se deduce de la prueba de [7, **Teorema 4.2**] donde en concreto se demuestra que:

Si $P_{A/R}$ *es acotado y* R *es nilpotente, entonces* P_A *es acotado.*

La hipótesis de nilpotencia del resultado anterior, se ha debilitado sucesivamente por varios autores. Así A. Ya. Khelemskii, [22], en 1.966, prueba que si $P_{A/R}$ es acotado y

$$\|r^n\|^{1/n^2} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

uniformemente en el conjunto de los elementos, r, pertenecientes a la intersección del radical con la bola unidad cerrada de A, entonces P_A es acotado.

Perfeccionando algo el argumento de Khelemskii, A. B. Odulo demuestra que la condición

$$\|r^n\|^{1/n\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

uniformemente en el conjunto de los elementos, r, del radical pertenecientes a la bola unidad cerrada de A, es suficiente para garantizar lo mismo [22].

Finalmente en 1.967, Gorin y Lin prueban en [15] que la condición

$$\|r^n\|^{1/n} \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

uniformemente en el conjunto de los elementos, r, de la intersección del radical con la bola cerrada unidad de A, es suficiente para obtener la acotación de P_A.

Es bien sabido [**26, Corolario 2.3.4**] que los elementos del radical de cualquier álgebra de Banach verifican que:

$$\lim_{n\to\infty} \|r^n\|^{1/n} = 0 \qquad \forall\ r \in R$$

y que esta condición caracteriza a los elementos del radical si el álgebra es conmutativa [**26, Corolario 2.3.6**]. Por tanto, la condición de Gorin y Lin lo único que añade es que la convergencia a cero de las sucesiones $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea uniforme para los elementos del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A.

La condición de Gorin y Lin se puede reformular de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} = 0$$

donde $f(n) = \mathrm{Sup}\ \{\|r^n\|\ /\ r \in R,\ \|r\| \leq 1\}$. Ahora es facil ver que si se verifican cualesquiera de las condiciones anteriores, también se verifica la condición de Gorin y Lin. Otras reformulaciones de tal condición pueden verse en [**24, Teorema 3.2**]

Nuestro próximo objetivo es probar que *la condición de Gorin y Lin basta para garantizar la acotación de* P_A *cuando* $P_{A/R}$ *es acotado.*

Si a es un elemento de A tal que su imagen por la Transformada de Gelfand asociada a A, $G(a)$, es la identidad de $C(\phi_A)$, entonces se sabe [, **Teorema 17,4**] que el espectro de a, $Sp(a)$, viene dado por:

$$Sp(a) = \mathrm{Im}\, G(a) = 1$$

por lo que [**26, Lema 4.7.2.**] tenemos asegurada la existencia de soluciones en A de la ecuación $x^2 = a$. Sin embargo no tenemos garantizada la existencia de una solución, x, de la ecuación anterior tal que $G(x)$ sea la identidad de $C(\phi_A)$, hecho que como veremos a continuación nos será de gran utilidad.

A título de ejemplo, si el espacio de los caracteres de A es conexo es muy fácil ver que toda solución, x, de la ecuación anterior es tal que $G(x)$ es la función constantemente igual a uno ó la constantemente igual a menos uno, con lo que se tendría asegurada la existencia de soluciones de la ecuación $x^2 = a$ tales que $G(x)$ sea la unidad. Ahora bien, nosotros estamos interesados en buscar soluciones de este tipo justo en el caso en que el espacio de los caracteres de A sea totalmente disconexo.

Con independencia de como sea ϕ_A, podremos buscar soluciones del tipo anterior con la ayuda del Cálculo Funcional Holomorfo. En efecto: Si consideramos el disco $D(1, 1/2)$ y denotamos por Γ su frontera, entonces por [**9, Proposiciòn 6.4**] se tiene que si I denota la unidad de A

$$x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sqrt{z}\ (zI - a)^{-1}dz$$

es una solución de la ecuación $x^2 = a$. De la continuidad de G y la fórmula de Cauchy para el disco se obtiene que:

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sqrt{z}\ G((zI - a)^{-1})\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sqrt{z}\ (z - 1)^{-1} = \sqrt{1}$$

por lo que tenemos asegurada la existencia de una solución de la ecuación $x^2 = a$ tal que G(x) sea la unidad de $C(\phi_A)$.

Ahora probamos la unicidad de una tal solución: Supongamos que x e y son dos elementos de A tales que $x^2 = a = y^2$, siendo tanto $G(x)$ como $G(y)$ iguales a la identidad de $C(\phi_A)$. Dado que $G(x - y) = 0$, el elemento y será de la forma $y = x + r$, para conveniente r de R. Puesto que $x^2 = y^2$, se tiene que $2\,x\,r + r^2 = 0$, de donde

$$r(2\,x + r) = 0.$$

Pero al ser $Sp(2\,x + r) = Im\,G(2\,x + r) = 2$, se tiene que el elemento $2\,x + r$ es inversible en A, lo que demuestra que $r = 0$ y por consiguiente $x = y$.

Estamos pues en condiciones de establecer la siguiente proposición:

Proposición 3.9 [15, **Lema** 1]

Sea A un álgebra de Banach, compleja, conmutativa, con unidad y sea G: $A \longrightarrow C(\phi_A)$ *su Transformada de Gelfand. Si un* *elemento, a, de A es tal que* G(a) *es la unidad de* $C(\phi_A)$ *entonces la ecuación* $x^2= a$ *tiene una única solución en A tal que su imagen por* G *es también la unidad de* $C(\phi_A)$.

Con ayuda de la proposición anterior demostramos el siguiente lema técnico, que es clave en la prueba de nuestro objetivo.

Lema 3.10 [15, **Lema** 2]

Sea T *un subconjunto de* R *tal que para conveniente constante,* C, *y para cualquier elemento,* t, *de* T *se verifica que* $\|t - t^2\| \leq C$. *Entonces si* $\|r^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$, *uniformemente* $\forall\ r \in R$ *tal que* $\|r\| \leq 1$, *se tiene que* $\|t\| \leq C_1$, $\forall\ t \in T$, *donde* C_1 *es una constante que depende de* C.

Demostración

Sea I la unidad de A. Sea $v = 4(t - t^2)$, $t \in T$. Entonces:

$$(I -2t)^2= I + 4t^2- 4t = I- v.$$

Por tanto I- $2t$ es una raiz de I - v, siendo

$$G(I - 2t) = G(I) = 1 = G(I - v).$$

Como se probó en la proposición anterior I - $2t$ ha de ser de la forma:

$$I - 2t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \sqrt{z}\ (zI - I + v)^{-1}dz \qquad (1)$$

Nos proponemos probar que $\|I - 2t\| \leq K$, $\forall\ t \in T$, para conveniente constante K. Dado que $v\ (1 - z)^{-1}\in R$, $\forall\ z \in \Gamma$, se tiene que el radio espectral de tal elemento es cero, de donde por [9, **Teorema 2.9**], el elemento $I - v(1 - z)^{-1}$ es inversible en A siendo

$$(I - v(1 - z)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (v(1 - z)^{-1})^{n}$$

Por tanto

$$(zI - I + v)^{-1} = - (1 - z)^{-1}(I - v(1 - z)^{-1})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{(1 - z)^{n+1}}$$

y así (1) queda de la siguiente forma:

$$I - 2t = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sqrt{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{(1 - z)^{n+1}} \, dz.$$

Sabiendo que la longitud del camino Γ es π, se tiene que:

$$\|I - 2t\| \leq \frac{1}{2} \left|\sqrt{z}\right| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|v^n\|}{|1 - z|^{n+1}}$$

Como z varía a lo largo de $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 1| = 1/2\}$, de aquí se obtiene por un lado que:

$$|z - 1|^{-(n+1)} = 2^{n+1}$$

y por otro que $|z| < 3/2$, de donde $|\sqrt{z}| < 2$. Por tanto:

$$\|I - 2t\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2+1} \|v^n\| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \|v^n\| \qquad (2)$$

Ahora bien, dado que $v \in R$:

$$\left\| \frac{v^n}{\|v\|^n} \right\| \le \text{Sup } \{ \|r^n\| \; / \; r \in R, \; \|r\| \le 1\}$$

De donde recordando que:

$$f(n) = \text{Sup } \{ \|r^n\| \; / \; r \in R, \; \|r\| \le 1\}$$

de la desigualdad anterior se deduce que:

$$\|v^n\| \le \|v\|^n f(n).$$

Como por hipótesis $\|v\| \le 4C$, se tiene que:

$$\|v^n\| \le (4C)^n f(n).$$

con lo que a partir de (2):

$$\|I - 2t\| \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} (8C)^n f(n).$$

Ya que la hipótesis de Gorin y Lin, en términos de f(n), es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} f(n)^{1/n} = 0,$$

por el criterio de la raiz n-ésima la serie anterior es convergente, luego $\|I - 2t\| < K \; \forall \; t \in T$, y conveniente constante K.

La demostración del lema se concluye observando que:

$$t = 1/2 \; I - 1/2 \; (I - 2t)$$

por lo que:

$$\|t\| \le 1/2 \; \|I\| + 1/2 \; \|I - 2t\| \le 1/2 \; (\|I\| + K) := C_1, \quad \forall \; t \in T. \dagger$$

El siguiente teorema, **[15]**, cumple con el objetivo que nos habíamos propuesto y supone una mejora de [7, **Corolario 4.3**].

Teorema 3.11

Sea π la proyección canónica natural de A en A/R. Si la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a cero uniformemente en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces si* S *es cualquier subconjunto de* P_A *tal que* π(S) *está acotado en A/R, se verifica que* S *está acotado.*

Demostración

Puesto que por hipótesis el conjunto π(S) está acotado en *A/R*, existirá una constante, C, tal que:

$$\|[p]\| \leq C \qquad \forall\ p \in S$$

De esta manera a cada elemento, p, de S, de podremos asociar un elemento, *r*, de *R* tal que:

$$\|p + r\| \leq C + 1 := C_1 \tag{1}$$

Por cada elemento, *p*, de S, con su r asociado, construimos el elemento de R:

$$\sigma_p := (I - 2p)r$$

y definimos el subconjunto T de *R* dado por:

$$T := \{\sigma_p \ / \ p \in S\}$$

Los elementos de T verifican que:

$$\sigma_p^2 - \sigma_p = (I - 2p)^2 r^2 - (I - 2p)r = (I + 4p^2 - 4p)r^2 - (I - 2p)r =$$

$= r(r - I + 2p)$

De otra parte:

$(p + r)^2 - (p + r) = p + r^2 + 2pr - p - r = r(r + 2p - I)$

Por consiguiente:

$$\sigma_p^2 - \sigma_p = (p + r)^2 - (p + r) \qquad \forall\, \sigma_p \in T$$

luego por (1):

$$\|\sigma_p^2 - \sigma_p\| \leq C_1^2 + C_1 \qquad \forall\, \sigma_p \in T.$$

Aplicando el **lema 3.10**, tendremos que:

$$\|\sigma_p\| \leq C_2 \qquad \forall\, \sigma_p \in T$$

siendo C_2 una constante que depende de C_1 (concretamente de $C_1^2 + C_1$). Como de la definición del elemento σ_p se tiene que

$$\sigma_p = 2(I - p)r - r$$

tomando normas:

$$\|\sigma_p\| = \|2(I - p)r - r\| \leq C_2 \qquad \forall \sigma_p \in T \qquad (2)$$

Luego de (1) y (2) se deduce que:

$$\|p + 2(I - p)r\| \leq \|p + r\| + \|2(I - p)r - r\| \leq C_1 + C_2 := C_3$$

Si llamamos $\tau = 2(I - p)r$ se verifica que $p\tau = 2(p - p)r = 0$ y por tanto $(p + \tau)^2 = p + \tau^2$, de donde:

$$\|\tau^2 - \tau\| = \|(\tau^2 + p) - \tau - p\| = \|(p + \tau)^2 - (\tau + p)\| \leq$$

$$\leq \|(p + \tau)^2\| + \|\tau + p\| \leq \|p + 2(I - p)r\|^2 + \|p + 2(I - p)r\| \leq$$

$$\leq C_3^2 + C_3$$

De manera que si llamamos T' al conjunto de los τ que se acaban de definir, se verificará que:

$$\|\tau^2 - \tau\| \le C_3^2 + C_3 \qquad \forall\ \tau \in T'$$

y otra vez por el **Lema 3.10**, existirá una constante, C_4, que dependerá de C_3 (y por tanto de C) tal que:

$$\|\tau\| = \|2(I - p)r\| \le C_4 \qquad \forall\ \tau \in T'.$$

De esta forma, para cada elemento, p, de S se tendrá que:

$$\|p\| = \|p + 2(I - p)r - 2(I - p)r\| \le$$

$$\le \|p + 2(I - p)r\| + \|2(I - p)r\| \le$$

$$\le C_3 + C_4 := C_5$$

siendo C_5 una constante que depende de C. Por tanto S es un subconjunto acotado de A.†

En el caso de que los idempotentes de A/R estén acotados, el teorema anterior, junto con el **Teorema 3.5**, nos permite establecer el siguiente resultado que mejora [7, **Teorema 4.2**].

Teorema 3.12

Sea A un álgebra de Banach, compleja, conmutativa, con unidad, con radical R no cero y con espacio de caracteres totalmente disconexo. Si el conjunto de los idempotentes de A/R está acotado y la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero, en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces A es fuertemente descomponible y tal descomposición es única.

Ahora nos proponemos presentar un nuevo Criterio de descomposición *de tipo Wedderburn*, donde se prescinde de la hipótesis de acotabilidad del conjunto de todos los idempotentes, tanto de A como de A/R.

Se recuerda [1, **Cap.** II.10] que un idempotente se llama *primitivo* cuando no se puede expresar commo suma de idempotentes ortogonales.

Como es usual, denotamos por l_1 al álgebra de Banach de las sucesiones, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuya serie asociada es absolutamente sumable, con las operaciones puntuales y la norma:

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

El siguiente teorema [7, **Teorema** 5.6], cuya prueba no ofrece ninguna dificultad, recoge el mencionado criterio.

<u>**Teorema 3.13**</u> **(Criterio de descomposición II)**

Si A es un álgebra de Banach conmutativa, con radical R no nulo, tal que A/R es isomorfa a l_1 entonces:

i) A es descomponible si y sólo si los idempotentes primitivos de A están acotados.

ii) Si los idempotentes primitivos de A están acotados entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

Dado que los idempotentes primitivos de l_1 están acotados, cada vez que A/R sea isomorfa l_1 se tendrá que el conjunto de los idempotentes primitivos de A/R también está acotado y por consiguiente cada vez que conozcamos condiciones que, a partir de la acotabilidad de los idempotentes primitivos de A/R, garanticen la acotabilidad de los idempotentes primitivos de A, tendremos un teorema *de descomposición* derivado del criterio anterior. A título de ejemplo, del **Teorema 3.11** se obtiene el siguiente resultado, que mejora el **Teorema 5.5** de [7], y que Khelemskii en [22, **Teorema** 3] probaba bajo su hipótesis.

Teorema 3.14

Sea A un álgebra de Banach conmutativa, con radical R no cero. Si A/R es isomorfa a l_1 y la sucesion $\{\|r^n\|^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero uniformemente en el conjunto de los elementos, r, del radical que pertenecen a la bola unidad cerrada de A, entonces A es fuertemente descomponible y tal descomposición es única.

Cabe preguntarse, a la vista del criterio de descomponibilidad anterior, si es posible que A admita más de una descomposición no fuerte, claro está. Guiados por la respuesta que dimos en el caso de que el espacio de los caracteres de A fuese totalmente disconexo, P_A acotado, y el radical nilpotente (ver **Teorema** 3.6), cabe preguntarse si, añadiendo al **Teorema** 3.13 ii) la hipótesis de nilpotencia del radical, se consigue también la unicidad de la descomposición no fuerte. La respuesta es negativa como prueba el siguiente contraejemplo [7, **pág. 366**]:

Dado un objeto matemático arbitrario, r, consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}r$ y dotémoslo del producto cero. Sea A el álgebra suma directa (ortogonal) de l_1 y $\mathbb{C}r$, con la norma:

$$\|x + \alpha\, r\| = \|x\| + |r| \qquad \forall\, x \in l_1,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Es fácil comprobar que el radical, R, de A es el conjunto $\mathbb{C}r$. Si ahora f es un funcional lineal no contínuo de l_1 en $\mathbb{C}$ tal que su restricción a $l_1 l_1$ es cero y se considera la inmersión natural isométrica, i, de l_1 en A, se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{g}:\ l_1 &\longrightarrow A \\ x &\longrightarrow \mathrm{i}(x) + \mathrm{f}(x)\, r \end{aligned}$$

es lineal, inyectiva (por serlo i), y conserva el producto. Considerando la subálgebra $B' := \mathrm{Im}\ \mathrm{g}$, se tiene que

$$A = B' + R \qquad \text{y} \qquad B' \cap R = \{0\}$$

ya que cualquier elemento de A, $a = x + \alpha\, r$, se puede expresar de la forma $a = (\mathrm{i}(x) + \mathrm{f}(x)\, r) + (\alpha - \mathrm{f}(x))\, r$, y $B' \cap R = \{0\}$ puesto que si $\mathrm{i}(x) = 0$ entonces $x = 0$. Por último obsérvese que B' es una subálgebra de A que no puede ser cerrada, pues en ese caso g sería continua, lo que forzaría la continuidad de f.

Si bién la condición de que *A/R* sea isomorfa a $C(\phi_{A/R})$ no es suficiente (ni en presencia de que $\phi_{A/R}$ sea totalmente disconexo) para garantizar la descomposición de *A* (Véase el ejemplo de la **pág. 45** y **46**), la prueba del **Teorema 3.5** pone de manifiesto que el que dicha condición se cumpla es sustancial, de ahí el interés de presentar teoremas *de descomposición fuerte* en los que se supone que *A/R* es isomorfa a $C(\phi_{A/R})$. Ya que disponemos de una amplia gama de resultados que aseguran la existencia de un tal isorfismo (ver **Sección II**), combinando éstos con los que vamos a presentar, se consigue toda una variedad de teoremas *de tipo Wedderburn*. En esta linea un primer resultado es el siguiente:

Teorema 3.15 [7, **Teorema 4.1**]

Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad tal que A/R es isomorfa a $C(\phi_{A/R})$*. Si A es descomponible, entonces es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.*

Es de notar que la hipótesis de que *A* sea descomponible es, en principio, demasiado fuerte ya que no conocemos criterios que aseguren la descomponibilidad de un álgebra (sin llegar a la descomponibilidad fuerte de la misma). Sin embargo, el teorema anterior será de gran utilidad para establecer el siguiente resultado, cuya filosofía consiste en obtener una descomposición fuerte del álgebra a partir de una tal descomposición de su bidual. Previamente recordamos que dado un subespacio lineal, M, de A se define el *subespacio polar u ortogonal de M* como el conjunto:

$$M^{0} := \{f \in A^{*} / \ f(r) = 0 \quad \forall\ r \in M\}$$

donde A^{*} denota el dual topológico de A. El polar de M^{o}, que notaremos como M^{oo}, es lo que se conoce como *bipolar de M.*

Teorema 3.16

Sea A un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y con radical R, tal que A/R es isomorfa a $C(\phi_{A/R})$. Si R coincide con su bipolar entonces A es fuertemente descomponible y la descomposición fuerte de A es única.

Ahora nos proponemos recorrer todo un camino que nos lleve a dar la prueba del teorema anterior, que sigue las ideas de Badé y Curtis de [7, **teorema 4.4**] (donde se establece dicho teorema suponiendo que R es finito dimensional, lo que conduce a que R coincida con R^{oo}).

Es bien conocido ([3], [9, **pág. 50**]) que si A es un álgebra de Banach conmutativa, su bidual, A^{**}, con la topología usual y el *producto de Arens* es otra álgebra de Banach, si bien es cierto que el producto anterior no es en general conmutativo. Además la inmersión canónica, i, de A en A^{**} dada por $i(a)(f) = f(a)$, donde f es cualquier elemento de A^{*}, es un monomorfismo de álgebras isométrico. De otra parte, por ser A conmutativa, su imagen por i está contenida en el centro de A^{**}. Esto se debe a que si consideramos en A^{**} la topología w^{*}, entonces $i(A)$ es una subálgebra densa de A^{**} [8, **Teorema 45.2**], de donde considerando A vista en A^{**}, se tiene que para cualquier elemento, y, de A^{**}, existe una red de elementos de A, $\{y_{\alpha}\}$, convergente a y en la topología w^{*}. Entonces por la continuidad separada del producto de Arens en dicha topología [**27,Teorema 1.7.8**] se tiene que para cualquier elemento, y, de A se verifica que:

$$\{y_{\alpha}x\} \longrightarrow y\,x$$

$$\{x\,y_{\alpha}\} \longrightarrow x\,y$$

de donde por ser $y_{\alpha}x = x\,y_{\alpha}$ se deduce que $y\,x = x\,y$.

También recordamos [**8, pág 171**] que dadas dos espacios normados E y F sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), si denotamos por $BL(E,F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, se tiene que cada aplicación τ de $BL(E,F)$ da lugar, de manera natural, a una aplicación τ^{*} de $BL(F^{*}, E^{*})$ definida como sigue:

$$\tau^{*}(g):\ E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$e \longrightarrow g(\tau(e)).$$

La aplicación τ^* recibe el nombre de *adjunta* o *transpuesta* de τ. Por el mismo procedimiento se puede construir la segunda transpuesta, $\tau^{**} := (\tau^*)^*$, y entonces se verifica que:

Lema 3.17 [7, **Lema 4.3**]

Siempre que ν sea un homomorfismo continuo entre dos álgebras de Banach A y B, se tiene que ν^{**} es un homomorfismo entre A^{**} y B^{**}, respecto a la multiplicación de Arens. Además, si ν es sobreyectiva y su núcleo es N, entonces ν^{**} es también sobreyectiva y su núcleo es N^{oo}.

Aplicando el lema anterior a la proyección canónica, π, de A en A/R se obtiene que R^{oo} es un ideal cerrado de A^{**} y se tiene probada la siguiente proposición:

Proposición 3.18

Si A es cualquier álgebra de Banach conmutativa con radical R, entonces las álgebras A^{**}/R^{oo} y $(A/R)^{**}$ son isomorfas.

Es bien conocido ([9, **Teorema 38.19**] o [27, **Teorema 1.17.2**]) que el bidual, A^{**}, de una C^*- álgebra, A, con el producto de Arens y la involución natural, es una C^*- álgebra. En el caso particular de ser $A = C(\Omega)$, donde Ω es un compacto

Hausdorff, Arens [2] prueba que además A^{**} es conmutativa, por lo que a partir de [**18, Teorema 5.2.1 y Teorema 4.1.8.iii)**] se tiene probado el siguiente lema.

Lema 3.19

Si A es un álgebra de Banach compleja conmutativa con unidad y con radical R, entonces $C^{**}(\phi_{A/R})$ es isométricamente isomorfo a $C(\Omega)$ para conveniente espacio compacto *Hausdorff estoneano, Ω.*

Finalmente necesitamos:

Lema 3.20

Si Ω es estoneano entonces $C(\Omega)$ satisface la propiedad (I).

Demostración

Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de idempotentes de $C(\Omega)$ tales que:

$$f_n f_m = g_n g_m = 0 \qquad \forall\ n\neq m \in \mathbb{N}$$

$$f_n g_m = 0 \qquad \forall\ n,\ m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Consideremos el conjunto:

$$W = \{w \in \Omega /\ f_n(w) = 1,\ \text{para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que W es abierto por ser $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(\mathbb{C}-\{0\})$.

Si W es denso en Ω tendriamos que cualquier elemento, w, de Ω es límite de una red de elementos de W. Como por la condición (1), cualquier g_n ha de anularse sobre los elementos de W, se tiene que, por la continuidad de g_n, ha de ser $g_n(w) = 0$, y esto para cualquier w de Ω y cualquier natural n. Por tanto, en en este caso, la función identidad, i, verificará que:

$$i\, f_n = f_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$i\, g_n = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si ahora suponemos que W no es denso en Ω, por ser Ω estoneano se tendria que $\bar{W}$ es un subconjunto propio de Ω que es simultaneamente abierto y cerrado, de donde la función h definida como $h(w) = 1$, si $w \in \bar{W}$, y $h(w) = 0$ en caso contrario, sería un idempotente de $C(\Omega)$ que verificaría:

$$h\, f_n = f_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$h\, g_n = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

La primera igualdad es obvia y la segunda se deduce de que si $g_n(w) = 1$ para algún w de Ω y algún n de $\mathbb{N}$, en virtud de la condición (1) se tiene que w no pertenece a $\bar{W}$, por lo que $h(w) = 0$ y por consiguiente $h\, g_n = 0$.

En cualquier caso, tanto si W es denso como si no lo es, $C(\Omega)$ satisface la propiedad (I).$_\dagger$

Pasamos ya a probar el **Teorema 3.16**

Demostración

Sea A un álgebra de Banach compleja, conmutativa, con unidad tal que A/R es isomorfo a $C(\phi_{A/R})$. Del **Lema 3.17** se deduce que las álgebras $(A/R)^{**}$ y $C^{**}(\phi_{A/R})$ son isomorfas; por la **proposición 3.18** se tiene que $(A/R)^{**}$ es isomorfa a A^{**}/R^{oo}; y en virtud del **Lema 3.19** $C^{**}(\phi_{A/R})$ es isomorfa a $C(\Omega)$ para conveniente espacio compacto Hausdorff y estoneano, Ω, luego componiendo estos isomorfismos se concluye que el álgebra A^{**}/R^{oo} es isomorfa a $C(\Omega)$ y por consiguiente el espacio de caracteres de A^{**}/R^{oo} es, en virtud de la **Proposición 2.4**, totalmente disconexo.

Probemos ahora que si $R^{oo}= R$ (lo que es equivalente a decir que R es reflexivo) entonces se verifica que el radical de A, R, coincide con el radical de A^{**}. En efecto:

Sea x es un elemento del radical de A^{**}, entonces se verifica que $\|x^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$. Si ahora denotamos por π^{**} la doble transpuesta de la proyección canónica, π: $A \longrightarrow A/R$, dado que $\|\pi\| = \|\pi^{**}\|$ ([8, **Teorema 40.19.ii)**]), de lo anterior se deduce que $\|\pi^{**}(x)^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$; es decir el radio espectral de $\pi^{**}(x)$ es cero, lo que fuerza que $\pi^{**}(x) = 0$ ya que, como hemos visto, $(A/R)^{**}$ es un álgebra de Banach conmutativa y semisimple (es isomorfa a $C(\Omega)$). Por consiguiente, en virtud del **Lema 3.17**, el elemento x ha de pertenecer a $R^{oo}= R$. Hemos probado pues que el radical de A^{**} está contenido en el de A.

Recíprocamente: Si x es un elemento de R, al estar A contenida en el centro de A^{**} (ver **pág. 64**), se ha de verificar que para cualquier elemento y de A^{**}

$$\|(x\ y)^n\|^{1/n} = \|x^n y^n\|^{1/n} \leq \|y\|\ \|x^n\|^{1/n} \longrightarrow 0$$

Luego por [9, **Proposición 25.1**] se tiene que x pertenece al radical de A^{**}, de donde el radical de A está contenido en el de A^{**}.

Si ahora observamos que por estar contenida A en el centro de A^{**} se tiene, en particular, que los idempotentes de A^{**} conmutan con los elementos del radical de dicha álgebra, y que A^{**}/R es conmutativa; el **Lema 2.3 de** [7] nos dice que los idempotentes de A^{**} conmutan. Por otra parte, ya que A^{**}/R es isomorfa a $C(\Omega)$ con Ω estonano, del **Lema 3.20** y de la **Proposición 3.8**, se deduce que el conjunto de los idempotentes de A^{**} es acotado (ver **pág. 45**).

En resumen tenemos que A^{**} es un álgebra de Banach compleja, con unidad y con radical R, siendo A^{**}/R conmutativa, con espacio de caracteres totalmente disconexo, con conjunto de idempotentes acotado y verificando que $e_1e_2= e_2e_1$ para cualesquiera dos idempotentes e_1 y e_2 de A^{**}; condiciones que son suficentes para asegurar la tesis del **Teorema 3.5** y en consecuencia existirá una subálgebra cerrada B' de A^{**} tal que:

$$A^{**} = B' \oplus R.$$

Basta ahora considerar la subálgebra, de A, $B = A \cap B'$, para obtener la descomposición fuerte de A como suma directa de la subálgebra B y de R, una vez que apliquemos el **Teorema 3.15.**$\dagger$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. **Albert**. *Structure of algebras*. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 24. New York. (1.939).

[2] R. **Arens**. *Operations induced in functions classes*. Monatshefte für Mathematik. Vol. 55. Pág. 1 - 19. (1.951).

[3] R. **Arens**. *The adjoint of a bilinear operation*. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 2. Pág. 839 - 848. (1.951)

[4] G. F. **Bachelis**, S. **Saeki**. *Banach algebras with uncomplemented radical*. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 100, n° 2. Pág. 271 - 274. (1.987).

[5] W. G. **Badé**. *On Boolean algebras of projections and algebras of operators*. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 80. Pág 345 - 360. (1.955).

[6] W. G. **Badé**, P. G. **Curtis**, Jr. *Homomorphism of commutative Banach algebras.* American Journal of Mathematics. Vol. 82. Pág. 589 - 568. (1.960).

[7] W. G. **Badé**, P. G. **Curtis**. *The Wedderburn Decomposition of commutative Banach algebras.* American Journal of Mathematics. Vol 82. Pág 851 - 866. (1.960).

[8] S. K. **Berberian**. *Lectures in functional analysis and operator theory.* Springer - Verlag. New York. (1.974).

[9] F. F. **Bonsall**, J. **Duncan**. *Complete normed algebras.* Springer - Verlag. New York. (1.973).

[10] N. **Dunford**. *Spectral operator.* Pacific Journal of Mathematics. Vol 4. Pág. 321 - 354. (1.954).

[11] N. **Dunford**, J. T. **Shawartz**. *Linear operators. Part. I: Genaral theory.* Interscience Publishers Inc. New York. (1.963).

[12] N. **Dunford**, J. T. **Schawartz**. *Linear operators. Part III: Spectral operators.* Interscience Publiser Inc. New York (1.971).

[13] C. **Feldman**. *The Wedderburn Principal Theorem in Banach algebras*. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol.2. Pág. 771 -777. (1.951).

[14] L. **Gillman**, M. **Henriksen**. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 82. Pág. 366 - 391. (1.956).

[15] E. A. **Gorin**, V. Ya. **Lin**. *On a condition on the radical of a Banach algebra ensuring strong decomposability*. M. V. Lomonosov Moscow State University. Translated from Mathematicheskie Zametki. Vol 2, n° 6. Pág. 589 - 592. December (1.967).

[16] M. **Henriksen**. *Some remarks on a paper of Aronszajn and Panitchpakdi*. Pacific Journal of Mathematics. Vol 7. Pág. 1619 - 1621. (1.957).

[17] G. J. O. **Jameson**. *Topology and normed spaces*. Chapman and Hall. London.(1.974).

[18] R. V. **Kadison**, J. R. **Ringrose**. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I: Elementary theory*. Academic Press. New York. (1.983).

[19] Y. **Katznelson**. *Algèbres caracterisées par les fonctions que opèrant sur elles*. C. R. Acad. Sci. Paris Sérv. A -B, 247. Pág 903 - 905. (1.958).

[20] Y. **Katznelson**. *Algèbres dont les éléments non négatifs admetten des racines cerrées*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 77. Pág 167 - 174. (1.960).

[21] I. **Kaplansky**. *Normed algebras*. Duke Mathematical Journal. Vol. 16. Pág. 399 - 417. (1.949).

[22] A. Ya. **Khelemskii**. *On analitic condition on the radical of commutative Banach algebra and its relationship to decomposability*. Dokl, AN SSSR. Vol. 167, n° 3. Pág 525 - 527. (1.966).

[23] R. **Larsen**. *Banach algebras. An introduction*. Marcel Dekker Inc.. New York (1.973).

[24] J. K. **Mizidek**, T. **Müldner**, A. **Rek**. *On topologically nilpotens algebras*. Studia Mathematica. T. XLIII. (1.972).

[25] C. E. **Rickart**. *On spectral permanence for certain Banach algebras*. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 4. Pág. 191 - 196. (1.953).

[26] C. E. **Rickart**. *General theory of Banach algebras*. Robert E. K. Publishing Company Huntington. New York (1.960).

[27] C. **Sakai**. *C^*- algebras and W^*- algebras*. Springer - Verlag. New York (1.971).

[28] R. D. **Schafer**. *An introduction to nonassociative algebras*. Academic Press. New York and London. (1.966).

[29] S. **Willard**. *General topology*. Addison - Wesley. New York. (1.960).

[30] D. **Zelinsky**. *Raisinig idempotents*. Duke Mathematical Journal. Vol. 21. Pág. 315 - 322. (1.954).