Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

UN ANÁLISIS INTRÍNSECO DE LAS PROPIEDADES DE LOS M-IDEALES.

Por

Eduardo Antonio Nieto Arco.

Granada, 1.997

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. Juan Carlos Cabello Piñar, Profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Eduardo Antonio Nieto Arco el día 18 de Abril de 1 997, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Rafael Payá Albert (Presidente), D. Manuel Contreras Márquez, D. Manuel González Ortiz, Dña. Eve Oja (Vocales) y D. Ginés López Pérez (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto *"cum laude"* por unanimidad.

A Marina: Ella es la luz que me guía y elimina las sombras del sendero de mi vida.

A mis Padres y Hermanas: A ellos les debo todo lo que soy.

CONTENIDO.

Introducción.

En el año 1972, E. M. Alfsen y E. G. Effros introdujeron el concepto de M-ideal en un artículo capital titulado *"Structure in real Banach spaces. Part I and II"* [AE]. Dado X un subespacio cerrado de un espacio de Banach Y, se dice que X es un **M-ideal** de Y si existe una proyección p en Y^* cuyo núcleo es $X^\perp$ y tal que

$$\|y^*\| = \|py^*\| + \|y^* - py^*\|, \forall y^* \in Y^*. \qquad (*)$$

Especialmente interesante resulta la clase de los espacios de Banach que son M-ideales de su bidual (abreviadamente M-ideales). Ésta ha sido ampliamente estudiada por la *"escuela de Berlín"* (E. Behrends, P. Harmand, D. Werner, W. Werner...) e investigadores de la talla de G. Godefroy, N. J. Kalton, Å. Lima, entre otros. P. Harmand, D. Werner y W. Werner publicaron en 1993 una amplia y completa monografía [HWW] donde se ordena y estructura la ingente información obtenida hasta ese momento acerca del tema.

Los espacios $c_0(I)$ -donde I es cualquier conjunto-, equipados con la norma usual, así como ciertos espacios de operadores compactos $\mathcal{K}(X)$, con X reflexivo, son elementos distinguidos de esta clase.

Los M-ideales gozan de muchas e interesantes propiedades isométricas e isomórficas. Así por ejemplo, Å. Lima prueba que los M-ideales son espacios de Asplund [L2], y M. Fabian y G. Godefroy que son WCG [FaG]. En [GLi] (resp. en [GSa]), G. Godefroy y D. Li (resp. G. Godefroy y P. Saab) prueban que tienen la propiedad (u) (resp. (V)) de Pełczyński. Después de [Ph1], es evidente que también satisfacen la propiedad U de Phelps. La proximinalidad en el bidual fue probada por ejemplo por T. Ando en [An]. Finalmente, la propiedad de que todo isomorfismo isométrico del bidual es el bitranspuesto de un isomorfismo isométrico del espacio fue probada por P. Harmand y Å. Lima en [HL].

Igualmente es amplio el estudio de dicha clase dentro del marco de los espacios de operadores (ver por ejemplo, [HL], [K], [L2], [L5], [W2], [Ww]) (cf. [HWW]). En [L2] se prueba que si $\mathcal{K}(X)$ es M-ideal de $\mathcal{L}(X)$, entonces X es M-ideal. Por otra parte, en estos trabajos se pone de manifiesto la estrecha relación existente entre las propiedades de aproximación y el hecho de que $\mathcal{K}(X)$ sea un M-ideal de $\mathcal{L}(X)$, siendo X un espacio de Banach.

Una gran familia de generalizaciones surge a partir de la noción de M-ideal. Son de destacar aquéllas que aparecen en términos de la proyección canónica. De especial interés son las nociones de HB-subespacio y propiedad U, introducidas y estudiadas respectivamente por J. Hennefeld en [He] y R. R. Phelps en [Ph1]. De mayor interés si cabe resulta ser el concepto de u-ideal introducido por P. G. Cassaza y N. J. Kalton en [CsK].

Desde nuestro punto de vista, estas generalizaciones tienen su justificación en el hecho de que presentan hipótesis más suaves en las que se siguen verificando algunas de las propiedades ya descritas. Así por ejemplo, G. Godefroy, N. J. Kalton y P. D. Saphar [GKS] prueban que un u-ideal (canónico en un cierto sentido) es un espacio de Asplund, y verifica la propiedad (u) de Pełczyński y además todo isomorfismo isométrico del bidual es el bitranspuesto de un isomorfismo isométrico del espacio. Por otra parte, una primera ojeada de la igualdad $(*)$ nos pone sobre aviso de que toda su fuerza recae sobre la desigualdad

$$\|y^*\| \geq \|py^*\| + \|y^* - py^*\|, \forall y^* \in Y^*.$$

El objeto-motivación de la presente memoria es el estudio de hasta qué punto los pesos de ambos sumandos de la derecha han de ser uno, a la hora de obtener una determinada propiedad. Este hecho motiva la introducción de un nuevo concepto: la $M(r,\, s)$-desigualdad.

Sean Y un espacio de Banach, X un subespacio cerrado suyo y $r, s \in]0,1]$. Diremos que X es un **ideal** de Y si existe una proyección p en Y^* de norma uno cuyo núcleo es $X^\perp$. Si además se verifica la relación

$$\|y^*\| \geq r\|py^*\| + s\|y^* - py^*\|, \forall y^* \in Y^*,$$

se dirá que X es un ideal de Y verificando la **$M(r,\, s)$-desigualdad**. Por supuesto, si $r = s = 1$, reencontramos el concepto de M-ideal.

El capítulo I desarrolla la teoría de ideales que verifican la $M(r,\, s)$-desigualdad. Comenzamos éste haciendo un primer análisis del concepto de ideal, que resultará clave en todo lo que sigue.

Obsérvese que X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad para cualesquiera que sean $r, s \in]0,1]$ tales que

$$r + s\|I_{Y^*} - p\| \leq 1.$$

Por tanto, si nuestro objetivo es poner de manifiesto la riqueza que genera la $M(r,\ s)$-desigualdad, habremos de centrarnos en el caso en que $r + s\|I_{Y^*} - p\| > 1$, o si se quiere, dado que $\|I_{Y^*} - p\| \geq 1$, en el caso $r + s > 1$.

A las primeras propiedades vistas para ideales (Proposición I.1.2) añadimos otras nuevas, consecuencia de que el ideal además verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad. Entre ellas se prueba (Proposición I.3.10) que "*si X es un ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad, entonces:*

$$P_{X^\perp}(y^*) \subseteq B_{X^\perp}\left(y^* - py^*, \frac{1-r}{s}\|y^* + X^\perp\|\right), \forall y^* \in Y^*,$$

donde

$$P_{X^\perp}(y^*) = \{x^\perp \in X^\perp : \|y^* - x^\perp\| = \|y^* + X^\perp\|\}\text{''}.$$

Se prueba además que el valor del radio es óptimo (cf. Proposición I.3.13).

La Proposición I.3.11 nos sugiere la siguiente interpretación geométrica del concepto de $M(r,\ s)$-desigualdad:

Definimos $Y^{(*)} = \{y^* \in Y^* : py^* \neq 0, py^* \neq y^*\}$, y para cada $y^* \in Y^{(*)}$ notamos $X(y^*) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ es la norma en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$|(u,v)| = \|uf + vg\|, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

siendo $f = \frac{py^*}{\|py^*\|}$ y $g = \frac{y^*-py^*}{\|y^*-py^*\|}$. Entonces, X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^{(*)}$, $B_{X(y^*)}$ está contenida en el rombo de vértices $\left(\pm\frac{1}{r}, \pm\frac{1}{s}\right)$.

Entre los ejemplos que ilustran este capítulo, merecen especial atención el Ejemplo I.3.12, que muestra una ruptura con una tradición de los ideales clásicos (HB-subespacios y u-ideales -ver [GKS]-), a saber, no existe unicidad de la proyección que los define. También resulta interesante la Proposición I.3.14, que entre otras cosas afirma que *"para cada $\gamma \in]0,1[$, existen X e Y espacios de Banach y p proyección en Y^*, tales que X es un p-ideal (no M-ideal) de Y verificando simultáneamente la $M(1,\ \gamma)$ y la $M(\gamma,\ 1)$-desigualdad".*

El concepto de M-ideal también puede ser interpretado en términos de propiedades referidas a la disposición del subespacio X en el interior de Y. Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X tiene **la propiedad de la $n(r,\ s)$-bola en** Y si para cualesquiera $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $y \in Y$ con $\|x_i\| \leq \|y + X\|$, y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} B(sy + rx_i, \|y + X\| + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Es sabido (ver [AE, Th. A]) que X es M-ideal de Y si, y sólo si, X tiene la propiedad de la $3(1,\ 1)$-bola en Y.

En la siguiente sección analizamos ésta y otras interpretaciones en el caso general (r y s arbitrarios). Primordial resulta en este sentido una versión debida a E. Behrends del Principio de Reflexividad Local (Teorema I.4.16), y la dualización de la $M(r,\ s)$-desigualdad (Lema I.4.17). Así conseguimos la caracterización de la $M(r,\ s)$-desigualdad en términos de la topología $\sigma(Y, X^*)$ (Proposición I.4.18), y una *"pseudo-caracterización"* (caracterización si $r = 1$) en términos de propiedades de intersección de bolas (Proposiciones I.4.21 y I.5.22).

La dificultad para obtener una caracterización en el caso $r < 1$ estriba en no conocer ni el *"tamaño"* de $P_{X^\perp}(y^*)$ ni la posición que $y^* - py^*$ ocupa en dicho conjunto. Recuérdese que en el caso $r = 1$, se tiene $P_{X^\perp}(y^*) = \{y^* - py^*\}$.

Se prueba en la Proposición I.4.21 que "*si X es un ideal de Y, entonces:*

(i) $M(r, s)$-desigualdad $\Rightarrow$ $n(r, s)$-bola, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $2(r, s)$-bola $\overset{r>1/2}{\Rightarrow}$ $M(2r - 1, s)$-desigualdad".

Nótese que si $r = 1$, obtenemos la equivalencia entre ambas propiedades, de hecho, probamos (Proposición I.5.22) que "*si X es un subespacio cerrado de Y, entonces*

$$M(1, s)\text{-}desigualdad \Leftrightarrow 3(1, s)\text{-}bola".$$

En otro caso, quedan como problemas abiertos:

(i) *ideal* + $2(r, s)$-*bola* $\overset{?}{\Rightarrow}$ $M(r, s)$-*desigualdad.*

(ii) $3(r, s)$-*bola* $\overset{?}{\Rightarrow}$ $M(r, s)$-*desigualdad.*

El objeto de la última sección de este capítulo es mostrar la especial relevancia del caso $r = 1$. Así por ejemplo, aseguramos que, bajo ciertas condiciones (la proyección asociada no es w^*-continua), la

$M(1, s)$-desigualdad fuerza la contención de c_0 (Teorema I.5.25), y probamos que cada elemento $y \in Y$ admite una expansión incondicional en series de elementos de cualquier subespacio separable que sea ideal y verifique la $M(1, s)$-desigualdad (Teorema I.5.26). Más adelante veremos (Ejemplo II.2.11) que $r = 1$ es esencial en estos últimos resultados.

En el segundo capítulo pasamos de la situación general (X, Y) a la más concreta (X, X^{**}). Se dirá que X **verifica la $M(r, s)$-desigualdad** (resp. es un **U^*-espacio**) si X es un ideal de su bidual verificando la $M(r, s)$-desigualdad, con la proyección canónica π_X como proyección asociada (resp. $\|x^{***} - \pi_X x^{***}\| < \|x^{***}\|$, siempre que $\pi_X x^{***} \neq 0$).

En este capítulo hacemos para la $M(r, s)$-desigualdad un estudio confrontado con el ya conocido para M-ideales (ver por ejemplo el capítulo III de la monografía de Harmand, Werner y Werner [HWW]). Este estudio puede resumirse en la siguiente tabla:

(X, X^{**})	$\overset{r+s>1}{M(r,s)}$	$\overset{s<1}{M(1,s)}$	$\overset{r<1}{M(r,1)}$
propiedad (u)	NO	SI	NO
propiedad U	NO	SI	NO
Asplund	SI	SI	SI
propiedad A	SI	SI	SI
WCG	?	?	SI
propiedad B	NO	NO	SI
proximinal	NO	NO	?

Diremos que X verifica la **propiedad A** (resp. **B**) si su dual no tiene subespacios propios normantes (resp. si todo isomorfismo isométrico de su bidual es el bitranspuesto de un isomorfismo isométrico del propio X).

Una generalización de [LORW, Prop. 2.7] (cf. [HWW, Prop. III.1.9 y Cor. III.1.10]) es el Teorema II.1.4, el cual muestra que la $M(r, s)$-desigualdad viene determinada por los subespacios separables. Del hecho de que X verifique la propiedad A, junto con la hereditariedad de la $M(r, s)$-desigualdad para subespacios (Proposición II.1.3), se deduce que X es un espacio de Asplund (Teorema II.1.7), y a partir de aquí se obtienen importantes consecuencias (Corolario II.1.8).

La Proposición II.2.10 y el Corolario II.2.14 son técnicas debidas esencialmente a E. Oja [O1], que permiten construir espacios que verifican la $M(r, s)$-desigualdad, siempre que dichos espacios tengan una base *"shrinking"*.

Utilizando la Proposición II.2.10 renormamos el espacio de James [Du] de forma que verifique la $M(r, 1)$-desigualdad, para cierto r (Ejemplo II.2.11). Esta renormación nos proporciona una importante información acerca del objetivo principal de esta memoria. Así por ejemplo, es sabido [Si, Cor. II.15.4] que el espacio de James no tiene la propiedad (u) de Pełczyński. Esto deshace la sospecha de que todo espacio de Banach que verifica la $M(r, s)$-desigualdad puede renormarse de forma equivalente para obtener un M-ideal; lo que da un renovado interés a todas las propiedades isomórficas obtenidas en el capítulo. En otro orden de cosas, es igualmente conocido que la bola unidad del espacio de James es dentable. En efecto, el bidual del espacio de James es un dual separable, y por tanto, en virtud del teorema de Dunford y Pettis (ver [DiU]), tiene la RNP, y en consecuencia, todo subconjunto acotado suyo es dentable [DaPh]. Este hecho es contrario a lo obtenido para los espacios que verifican la $M(1, s)$-desigualdad (Proposición II.3.20).

El Corolario II.2.14 permite comprobar que con la renormación de c_0 debida a J. Johnson y J. Wolfe (ver [JW] -cf. [O2]-), c_0 verifica la $M(1, s)$-desigualdad (para cierto s), pero no es ni un u-ideal canónico ni un HB-subespacio (Ejemplo II.2.15).

El Ejemplo II.2.16 muestra una nueva renormación de c_0, para la cual c_0 verifica la $M(1, s)$-desigualdad y no es proximinal.

El Ejemplo II.2.17 y la Proposición I.3.10 dejan bien claro que la propiedad U de Phelps sólo se tiene asegurada en el caso $r = 1$.

Espacios que son simultáneamente HB-subespacios, u-ideales canónicos y U^*-espacios, pero que no pueden ser renormados para que verifiquen la $M(1, s)$-desigualdad son mostrados en el Ejemplo II.2.18.

El Teorema II.3.21 nos muestra que si X verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces tiene la propiedad (u) de Pełczyński con $\frac{1}{s}$ como cota para la constante de dicha propiedad. Las consecuencias que se deducen de este resultado son extraordinariamente interesantes (Corolario II.3.22).

En la última parte del segundo capítulo (Teoremas II.4.25 y II.4.27 -suponiendo además en este último que X es un espacio de Asplund-), se demuestra que los U^*-espacios (condición ésta más débil que la $M(r, 1)$-desigualdad -ver Ejemplo II.2.19-) verifican la propiedad B y son WCG. Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado importante:

Corolario II.4.29. *Si X es un U^*-espacio y, o bien es un u-ideal canónico, o bien verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces X contiene una copia complementada de c_0.*

El Ejemplo II.4.26 nos muestra que la propiedad B falla para la $M(1, s)$-desigualdad, sin embargo, queda el siguiente problema abierto:

¿Existen espacios de Banach que verifiquen la $M(1, s)$-desigualdad y no sean WCG?

En el capítulo III se estudia la $M(r, s)$-desigualdad en los espacios de operadores. En una primera etapa nos proponemos determinar valores de r y s para los cuales se tiene que X verifica la $M(r, s)$-desigualdad, siempre que $\mathcal{K}(X)$ la verifique.

Dado X un espacio de Banach, $\mathcal{E}$ será cualquier subespacio de $\mathcal{L}(X)$ que contenga al espacio de los operadores compactos de X, que notaremos $\mathcal{K}(X)$, y al operador identidad. Se dirá que $\mathcal{K}(X)$ **verifica la** $M(r, s)$**-desigualdad** si existe $\mathcal{E}$ de manera que $\mathcal{K}(X)$ sea un ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad. La estrategia seguida en el caso $r = s = 1$ puede resumirse en el siguiente gráfico:

$$\mathcal{K}(X) \overset{M\text{-ideal}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(X) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathcal{K}(X) \overset{3\text{-bola}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(X) \overset{(2)}{\Rightarrow} X \overset{3\text{-bola}}{\longrightarrow} X^{**} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} X \overset{M\text{-ideal}}{\longrightarrow} X^{**}.$$

Por lo que respecta al caso general (r y s no necesariamente uno), esta estrategia podría repetirse en los pasos (1) y (2) sin especial dificultad; el primero de los pasos ya fue comprobado para el ambiente más general posible en la Proposición I.4.21, y el segundo

$$(\mathcal{K}(X) \overset{3(r,s)\text{-bola}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(X) \overset{(2)}{\Rightarrow} X \overset{3(r,s)\text{-bola}}{\longrightarrow} X^{**})$$

puede establecerse sin dificultad (Proposición III.1.2).

Respecto al tercer paso las cosas son bien diferentes porque no sabemos si la propiedad de la $n(r,\, s)$-bola fuerza la $M(r,\, s)$-desigualdad (ver la nota de la Proposición I.4.21). Recuérdese que éste no es el caso cuando $r = 1$ (Corolario III.1.3).

Es evidente pues que debe seguirse otro camino para poder generalizar el resultado inicial. Los pasos claves en dicha trayectoria son (en el supuesto de que $\mathcal{K}(X)$ verifique la $M(r,\, s)$-desigualdad, con P como proyección asociada), por un lado, que X verifica la $M(2r - 1,\, s)$-desigualdad (Proposición III.1.5), y por otro, si además se exige que $P(x^{**} \otimes x^*)$ sea la extensión *"natural"* de $x^{**} \otimes x^*$, que X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad (Proposición III.1.6).

Nuestra estrategia consiste ahora en buscar condiciones que nos aseguren que $x^{**} \otimes x^*$ tenga única extensión, ya que, en virtud de la Proposición I.1.2 se tendrá que $P(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^*$. En este momento resulta crucial una versión revisitada de [L5, Lemma 3.4], que afirma que el operador $x^{**} \otimes x^* \in \mathcal{K}(X)^*$ admite una única extensión equinórmica a $\mathcal{L}(X)$, siempre que x^* sea un w^*-punto diente (Lema III.1.8).

A partir de aquí es fácil probar

Corolario III.1.9. *Si $\mathcal{K}(X)$ es un P-ideal en $\mathcal{E}$ y*

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\},$$

entonces

$$P(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^*, \forall x^{**} \in X^{**}, x^* \in X^*.$$

Una vez establecidos estos últimos resultados disponemos ya de una alternativa real para probar que la $M(r,\, s)$-desigualdad es *"hereditaria"*, tal como se enuncia en:

Teorema III.1.10. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad.*

Obsérvese que la condición $r + \frac{s}{2} > 1$ (algo más restrictiva que la condición $r + s > 1$ y $r > \frac{1}{2}$) viene impuesta por la necesidad de asegurarnos que

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}$$

(cf. Corolario III.1.7 y Proposición III.1.5).

Como consecuencia de este último teorema se obtienen importantes consecuencias (Corolario III.1.11).

Completamos esta sección extrayendo una nueva y trascendental consecuencia del Corolario III.1.9. Obsérvese que éste último representa un punto de inflexión en el problema de la multiplicidad de proyecciones, como ya subrayábamos en el Ejemplo I.3.12. De hecho, este resultado nos va a permitir probar la unicidad en este ambiente más restrictivo.

Teorema III.1.14. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad con $r+\frac{s}{2}>1$, entonces la proyección asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$ es única.*

La segunda sección del capítulo está centrada en la relación que existe entre la $M(r,\ s)$-desigualdad y las propiedades de aproximación. En concreto, se trata de generalizar el siguiente resultado, debido a W. Werner:

Teorema. [Ww, Th. 5.2]. *Sea X un espacio de Banach. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{K}(X)$ *es M-ideal de* $\mathcal{L}(X)$.

(ii) Existe una red $\{K_\alpha\}$ *en* $B_{\mathcal{K}(X)}$ *tal que:*

(a) $\lim_\alpha x^*K_\alpha x = x^*x, \forall x \in X, x^* \in X^*$.

(b) $\overline{\lim}_\alpha \|K_\alpha S + (I_X - K_\alpha)T\| \leq \max\{\|S\|, \|T\|\}, \forall S, T \in \mathcal{L}(X)$.

Para enunciar esta generalización debidamente es preciso introducir la siguiente notación:

Una red $\{K_\alpha\}$ en $\mathcal{K}(X)$ es una **aproximación compacta de la identidad** (que notaremos abreviadamente **a.c.i.**) si

$$\|K_\alpha x - x\| \to 0, \forall x \in X.$$

Si además

$$\|K_\alpha^* x^* - x^*\| \to 0, \forall x^* \in X^*,$$

$\{K_\alpha\}$ es una **aproximación compacta *"shrinking"* de la identidad** (abreviadamente **a.c.s.i.**).

El problema de la caracterización se centra en resolver una doble cuestión:

(i) Si $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad, entonces ¿X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$?

(ii) En caso de existir una tal $\{K_\alpha\}$, ¿verifica ésta una desigualdad del tipo del apartado (ii) del teorema de W. Werner?

Para dar respuesta a la primera cuestión, comenzamos analizando algunas perfecciones sencillas del concepto de ideal, que aseguran la existencia de a.c.i. en el espacio base, véanse por ejemplo, Lema III.2.16, Corolario III.2.20 y

Corolario III.2.17. *Si $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ que satiface la propiedad U (en particular si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(1, s)$-desigualdad), entonces X admite una a.c.i. en $B_{\mathcal{K}(X)}$.*

Lamentablemente la $M(r, s)$-desigualdad en general no fuerza la propiedad U (ver Ejemplo II.2.17), por lo que el corolario anterior no permite concluir como en el caso $r = 1$. Para otros casos necesitamos revisar aquellas consecuencias que en X tiene el hecho de que $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad. Como consecuencia se obtienen curiosos resultados (Corolarios III.2.19 y III.2.20), y además el siguiente

Teorema III.2.21. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$.*

Una vez resuelto el problema de la existencia de una a.c.s.i., para establecer una desigualdad del tipo del apartado (ii) generalizamos (Proposición III.2.23) un resultado del propio W. Werner [Ww, Th. 3.5] (cf. [HWW, Th. V.3.2]), del que damos una nueva demostración que evita las técnicas de álgebras de Banach usadas en este último.

Llegados a este punto es obligado mencionar el resultado de Johnson (Proposición III.2.24), que por un lado afirma que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$, siempre que exista una a.c.i. ó una a.c.s.i., y por otro da una expresión explícita de la proyección. La unicidad de la proyección (Teorema III.1.14) y las anteriores observaciones nos permiten obtener el teorema central de esta sección:

Teorema III.2.28. *Sean $r, s \in]0,1]$ tales que $r + \frac{s}{2} > 1$. Entonces equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad.

(ii) X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$, tal que

$$\overline{\lim_\alpha}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| \leq 1, \forall S,T \in B_{\mathcal{E}},$$

(iii) X admite una a.c.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$, tal que

$$\overline{\lim_\alpha}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \leq 1, \forall S,T \in B_{\mathcal{E}}.$$

Para finalizar este último capítulo, se muestra una técnica similar a las usadas en el capítulo II (Proposición III.3.31), con la que construimos espacios de Banach X de manera que $\mathcal{K}(X)$ verifique la $M(r, s)$-desigualdad (Corolario III.3.32).

Gran parte del segundo capítulo está recogido en los trabajos de investigación [CN1] y [CN2], realizados conjuntamente con el profesor Juan Carlos Cabello Piñar. El tercer capítulo está recogido en un trabajo (en preparación), realizado de manera conjunta con los profesores Eve Oja y Juan Carlos Cabello Piñar.

AGRADECIMIENTOS.

En primer lugar, quisiera agradecer la inestimable ayuda en este trabajo de mi director de Tesis, D. Juan Carlos Cabello Piñar. Su continuo esfuerzo y su constante motivación han sido para mí los mayores estímulos para poder sacar adelante este trabajo. Sin él, nada de ésto habría sido posible.

Mi más sincera gratitud a mi compañero el profesor D. Ginés López Pérez, el cual me ha prestado en todo momento su apoyo, tanto a nivel de trabajo como a nivel personal y de amigo.

Asímismo, quiero agradecer también al profesor D. Miguel Cabrera García su dedicación en el desarrollo de esta memoria, así como sus valiosas aportaciones.

Mi sincera gratitud al profesor D. Rafael Payá Albert por su ayuda y gran interés mostrado en este trabajo.

De igual manera agradezco la importante ayuda recibida por los profesores D. Jerónimo Alaminos Prats y D. Antonio Moreno Galindo a nivel informático.

Igualmente, agredecer el constante apoyo recibido por parte de mi compañero y amigo D. Juan Aurelio Montero Sánchez.

Por último, quiero agradecer la desinteresada cooperación de todos los profesores del Departamento de Análisis Matemático.

Eduardo Antonio Nieto Arco.

Capítulo I

$M(r,\, s)$-desigualdad.

En este capítulo introducimos y estudiamos el concepto general que servirá de hilo conductor en la presente memoria: la $M(r,\, s)$-desigualdad. El ambiente natural para poder establecer ésta es la clase de los espacios X que son ideales de algún espacio Y que lo contiene; esta desigualdad involucra dos parámetros r y s, y la proyección que los define (como ideales). En el caso concreto en que esta desigualdad se verifique para los parámetros con valores máximos ($r = s = 1$), se obtienen los subespacios cerrados (de un cierto espacio de Banach) que son M-ideales, los cuales han sido objeto de un amplio estudio (véanse por ejemplo [AE], [Be1], [BeH], [FaG], [GKS], [GLi], [HL], [HWW], [K], [L1], [L2], [W3], [Y]*). Nuestro objetivo es analizar para qué valores de r y s se conservan algunas de las propiedades más conocidas de los subespacios que son M-ideales, con el fin de preparar un terreno abonado para los capítulos II y III.*

I.1 Ideales

Dado un espacio de Banach Z, se indicará por Z^*, Z^{**} y Z^{***} respectivamente, el espacio dual, bidual y triple dual de Z.

Si A es un subconjunto de Z, notaremos por $\mathrm{co}(A)$ (resp. $\overline{\mathrm{co}}(A)$) a la envolvente convexa (resp. convexa y cerrada) de A. Análogamente, $\mathrm{lin}A$ (resp. $\overline{\mathrm{lin}}A$) al subespacio (resp. subespacio cerrado) generado por A.

Si M es un subespacio cerrado de Z, notaremos por $M^\perp$ al anulador de M en Z^*, esto es,

$$M^\perp = \{z^* \in Z^* : z^*m = 0, \forall m \in M\}.$$

Usaremos j_Z para señalar a la **inyección canónica** de Z en Z^{**}, y π_Z a la **proyección (canónica)** en Z^{***} cuyo núcleo es $j_Z(Z)^\perp$ y cuya imagen es $j_{Z^*}(Z^*)$, esto es, $\pi_Z = j_{Z^*} \circ (j_Z)^*$. Por otra parte, I_Z denotará al operador identidad en Z.

Asímismo, representaremos por B_Z (resp. S_Z) a la bola (resp. esfera) unidad de Z, y por $P_M(z)$ al conjunto de mejores aproximaciones del elemento $z \in Z$ en M, es decir,

$$P_M(z) = \{m \in M : \|z - m\| = \|z + M\|\}.$$

Recordemos que M es un **subespacio proximinal** (resp. **de Chebyshev**) de Z si para cualquier $z \in Z$, $P_M(z)$ tiene al menos (resp. exactamente) un elemento.

En todo lo que sigue Y representará un **espacio de Banach** sobre el cuerpo de los números reales, y X un **subespacio cerrado** suyo.

Definición I.1.1 . *Diremos que X es un* **ideal de** Y *si existe una proyección p en Y^* de norma uno cuyo núcleo es $X^\perp$.*

Cuando sea necesario hacer referencia a la proyección p se dirá que X es un **p-ideal de** Y ó que p es una **proyección asociada al ideal** X.

Subrayamos a continuación algunas propiedades inmediatas de los ideales.

Proposición I.1.2. *Sea X un p-ideal de Y. Entonces:*

(i) $\|y^* + X^\perp\| = \|py^*\|$ *(equivalentemente, $y^* - py^* \in P_{X^\perp}(y^*)$, $\forall y^* \in Y^*$).*

(ii) Para cada $y^* \in Y^*$ se verifica que $x^\perp \in P_{X^\perp}(y^*)$ si, y sólo si, $y^* - x^\perp$ es una extensión equinórmica de $y^*|_X$. En particular, py^* es una extensión equinórmica de $py^*|_X(= y^*|_X)$.

(iii) $B_Y \subseteq \overline{B_X}^{\sigma(Y,p(Y^*))}$.

(iv) X^* es linealmente isométrico a $p(Y^*)$.

(v) Sea Z un subespacio cerrado de Y que contiene a X. Entonces la aplicación $\tilde{p} : Y^*/Z^\perp \longrightarrow Y^*/Z^\perp$, definida por

$$\tilde{p}(y^* + Z^\perp) = py^* + Z^\perp, \forall y^* \in Y^*,$$

es una proyección de norma uno . En particular, si ϕ es la identificación natural de Z^* con $Y^*/Z^\perp$, X es un q-ideal de Z, con $q = \phi^{-1}\tilde{p}\phi$.

Demostración. En toda la demostración usaremos sin previo aviso la conocida identificación de X^* con $Y^*/X^\perp$.

(i) Sea $y^* \in Y^*$. Dado que $y^*-py^* \in \operatorname{Ker} p = X^\perp$, $\|y^*+X^\perp\| \leq \|py^*\|$. Ahora bien, para cualquier $x^\perp \in X^\perp$,

$$\|py^*\| = \|p(y^* - x^\perp)\| \leq \|y^* - x^\perp\|,$$

por lo que, tomando el ínfimo en $X^\perp$, se obtiene la igualdad deseada.

(ii) Es consecuencia de que para cada $y^* \in Y^*$, $\|y^*|_X\| = \|y^* + X^\perp\|$. El apunte sobre py^* se desprende de este hecho y de (i).

(iii) Supongamos que existe $y \in B_Y \setminus \overline{B_X}^{\sigma(Y,p(Y^*))}$. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach, existen $y^* \in Y^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$(y^*x =)py^*(x) < \alpha < py^*(y), \forall x \in B_X,$$

y por tanto

$$\|py^*|_X\| < py^*(y) \leq \|py^*\|,$$

lo cual contradice el apartado anterior.

(iv) Basta aplicar que X^* es linealmente isométrico a $Y^*/X^\perp$, junto con el apartado (i).

(v) Claramente $\tilde{p}$ está bien definida, de hecho, es fácil ver que es una proyección. Veamos que su norma es uno. En efecto, para cada $z^\perp \in Z^\perp$ $(\subseteq X^\perp)$, se tiene

$$\|\tilde{p}(y^* + Z^\perp)\| = \|py^* + Z^\perp\| \leq \|py^*\| = \|p(y^* + z^\perp)\| \leq \|y^* + z^\perp\|,$$

con lo que basta tomar ínfimo en $Z^\perp$. En particular, q es una proyección en Z^* de norma uno. Por otra parte, si $z^* \in \operatorname{Ker} q$ e $y^* \in Y^*$ es tal que

$\phi z^* = y^* + Z^\perp$, es claro que $py^* \in Z^\perp$ ($\subseteq X^\perp$), en particular, $y^* \in \operatorname{Ker} p$, y por tanto,

$$z^*x (= y^*x) = 0, \forall x \in X,$$

esto es,

$$\operatorname{Ker} q \subseteq \{z^* \in Z^* : z^*x = 0, \forall x \in X\}.$$

Recíprocamente, si $z^* \in Z^*$ es tal que $z^*x = 0, \forall x \in X$, entonces cualquiera que sea $y^* \in Y^*$ verificando que $\phi z^* = y^* + Z^\perp$, satisface que $y^* \in X^\perp = \operatorname{Ker} p$, luego

$$qz^* = \phi^{-1}(py^* + X^\perp) = 0.$$

En consecuencia, X es un q-ideal de Z. ∎

Nota. Obsérvese que en la primera afirmación del apartado (ii) no se necesita que X sea ideal de Y.

EJEMPLOS.

Ejemplo I.1.3. $\mathbb{R}(1,0)$ *es un ideal de* $(\mathbb{R}^2, L)$, *donde*

$$L(u,v) = |u| + |v|, \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Sea p una proyección no trivial de norma uno en $(\mathbb{R}^2, L)^*$. $\mathbb{R}(1,0)$ es un p-ideal de $(\mathbb{R}^2, L)$ si (y sólo si) $p(u,v) = (u, \lambda u)$, con $|\lambda| \leq 1$.

Ejemplo I.1.4. *Todo espacio de Banach* Z *es un* π_Z*-ideal de* Z^{**}.

Antes de continuar, y con el objeto de disponer de una interpretación geométrica de las diferentes clases de ideales que vamos a presentar, fijamos la siguiente notación:

Sea X un p-ideal de Y, y notemos

$$Y^{(*)} = \{y^* \in Y^* : py^* \neq y^*, py^* \neq 0\}.$$

Para cada $y^* \in Y^{(*)}$, definamos

$$f = \frac{py^*}{\|py^*\|}, \text{ y } g = \frac{y^* - py^*}{\|y^* - py^*\|},$$

y consideremos en $\mathbb{R}^2$ la norma $|\cdot|$ definida por

$$|(u, v)| = \|uf + vg\|, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Notaremos $X(y^*) = (\mathbb{R}^2, |\cdot|)$. Obsérvese que en este caso,

$$B_{X(y^*)} \subseteq \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| \leq 1\}, \forall y^* \in Y^{(*)}.$$

Ejemplo I.1.5. *HB-subespacios.*

Se dice que X tiene la **propiedad** U (de Phelps) en Y si todo funcional $x^* \in X^*$ tiene una única extensión equinórmica a Y, o equivalentemente, si $X^\perp$ es un subespacio de Chebyshev de Y^* (cf. Proposición I.1.2 y su nota).

En virtud de la Proposición I.1.2, supuesto que X es un p-ideal de Y, entonces X tiene la propiedad U (en Y) si, y sólo si,

$$\|y^*\| = \|py^*\| \Rightarrow y^* = py^*. \tag{1}$$

(Equivalentemente,

$$P_{X^\perp}(y^*) = \{y^* - py^*\}, \forall y^* \in Y^*).$$

Obsérvese que la implicación (1) puede enunciarse también diciendo que $B_{Y^*} \subseteq \mathrm{co}\left(B_{p(Y^*)} \cup X^\perp\right)$. En efecto, supuesto (1), si $y^* \in B_{Y^*}$ con $py^* \neq 0$ y $py^* \neq y^*$ (y por tanto $\|py^*\| < 1$), entonces

$$y^* = \|py^*\| \frac{py^*}{\|py^*\|} + (1 - \|py^*\|) \frac{y^* - py^*}{1 - \|py^*\|}.$$

Recíprocamente, dado $y^* \in Y^*$ con $py^* \neq y^*$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|y^*\| = 1$. Sean $\alpha \in [0,1]$, $z^* \in B_{p(Y^*)}$, $x^\perp \in X^\perp$ tales que $y^* = \alpha z^* + (1-\alpha)x^\perp$. En consecuencia $py^* = \alpha z^*$. Ya que $y^* \neq py^*$, $\alpha < 1$, y por tanto $\|py^*\| = \alpha\|z^*\| < 1$.

Esta última observación puede interpretarse en términos geométricos de la siguiente forma: X verifica la propiedad U si, y sólo si,

$$B_{X(y^*)} \subseteq \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : | u |< 1\} \cup \{(\pm 1, 0)\}, \forall y^* \in Y^{(*)}.$$

Se dice que X es un **HB-subespacio de** Y si X es un p-ideal de Y que verifica la propiedad U y tal que $\|I_{Y^*} - p\| \leq 1$.

En lenguaje geométrico, podemos decir que X es un HB-subespacio de Y si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^{(*)}$, $B_{X(y^*)}$ está contenida en el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$, y no toca a los lados verticales más que en sus puntos medios.

La propiedad U y el concepto de HB-subespacio fueron introducidos respectivamente por R. Phelps [Ph1] y J. Hennefeld [He]. Un estudio muy interesante de ambos conceptos puede verse en [O2].

Ejemplo I.1.6. *u-ideales.*

Se dice que X es un **u-ideal de Y** si existe una proyección p en Y^* cuyo núcleo es $X^\perp$ y tal que

$$\|I_{Y^*} - 2p\| \leq 1.$$

Obsérvese que la condición sobre p fuerza $\|p\| \leq 1$ (y $\|I_{Y^*} - p\| \leq 1$), y por tanto todo u-ideal es, de hecho, un ideal.

Este concepto fue introducido por Casazza y Kalton en [CsK], y ampliamente estudiado posteriormente por Godefroy, Kalton y Saphar en [GKS].

En cuanto a su interpretación geométrica, nótese que X es un u-ideal de Y si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^{(*)}$, $B_{X(y^*)}$ es simétrica respecto de los ejes de coordenadas, ya que

$$\|\lambda py^* + \mu(y^* - py^*)\| = \|\lambda py^* - \mu(y^* - py^*)\|, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Concluimos la sección con una sencilla técnica debida a E. Oja (ver [O1]) para construir ejemplos de ideales.

Proposición I.1.7. *Sea T un operador lineal y continuo de X^* en Y^* con $\|T\| \leq 1$, y notemos por i a la inclusión de X en Y. Si $y^* - Ti^*y^* \in X^\perp, \forall y^* \in Y^*$, entonces X es un p-ideal de Y, con $p = Ti^*$.*

Demostración. Es fácil probar que $i^*Ti^* = i^*$, ó equivalentemente, que $i^*T = I_{X^*}$. A partir de aquí y de la condición $y^* - Ti^*y^* \in X^\perp$ se tiene de inmediato que p es una proyección, y que $y^* \in \operatorname{Ker} p$ si, y sólo si, $y^* \in \operatorname{Ker} i^*(= X^\perp)$. La condición $\|p\| \leq 1$ se deduce de la condición impuesta a la norma de T. ∎

I.2 Normas absolutas

Antes de pasar al estudio del concepto clave de la presente memoria dedicamos esta sección a introducir una herramienta que nos permitirá construir muchos de los ejemplos que la ilustran.

Una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ se llama **norma absoluta** si verifica:

(i) $|(u,v)| = |(|u|,|v|)|, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $|(1,0)| = |(0,1)| = 1$.

Como ejemplos de normas absolutas en $\mathbb{R}^2$ destacaremos las siguientes:

- Normas clásicas:

$$L(u,v) = |u| + |v|, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

$$M(u,v) = \max\{| u |, | v |\}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Para $p > 1$,

$$L_p(u,v) = (| u |^p + | v |^p)^{\frac{1}{p}}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

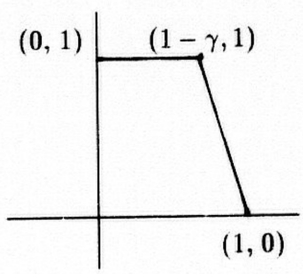
- Normas hexagonales:

$$| (u,v) |_\gamma = \max\{| u | + \gamma | v |, | v |\}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $\gamma \in [0,1]$. Nótese que

$$| \cdot |_0 = M \ , \ | \cdot |_1 = L.$$

Su denominación proviene del hecho de que, para $\gamma \in]0,1[$, la esfera unidad de $(\mathbb{R}^2, | \cdot |_\gamma)$ es un hexágono, tal como indica el siguiente dibujo:



- Normas octogonales:

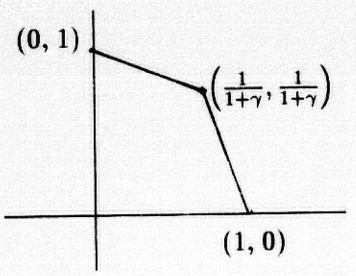
Para cada $\gamma \in [0,1]$ definimos

$$\Omega^\gamma(u,v) = \max\{| u | + \gamma | v |, \gamma | u | + | v |\},$$

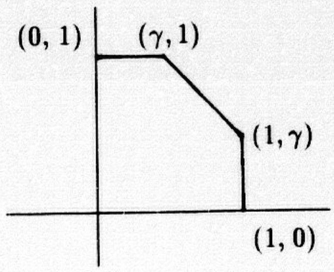
y

$$\Omega_\gamma(u,v) = \max\left\{|\,u\,|,|\,v\,|,\frac{|\,u\,|+|\,v\,|}{1+\gamma}\right\},\forall(u,v)\in \mathbb{R}^2.$$

Su denominación está basada igualmente en el hecho de que, para $\gamma \in\,]0,1[$, las esferas unidad de los espacios $(\mathbb{R}^2,\Omega^\gamma)$ y $(\mathbb{R}^2,\Omega_\gamma)$, son octógonos, tal como se advierte en las siguientes figuras:



Ω^γ



Ω_γ

Dada una norma absoluta $|\cdot|$, se define su **índice**, que notaremos por $n(|\cdot|)$, mediante la fórmula

$$n(|\cdot|) = \lim_{t\to 0^+}\frac{|\,(1,t)\,|-1}{t}.$$

Nótese que

$$n(|\cdot|_\gamma) = n(\Omega^\gamma) = \gamma\ ,\ n(L_p) = n(\Omega_\gamma) = 0.$$

Es fácil probar (véase por ejemplo, [MPR, Lemma 1.5]) que para cualquier norma absoluta $|\cdot|$ se verifica que

$$|\,(u,v)\,|\geq|\,u\,|+n(|\cdot|)\,|\,v\,|,\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2. \qquad (2)$$

Por otra parte, asociada a cada norma absoluta $|\cdot|$, se pueden definir dos nuevas normas absolutas, a saber, la **norma revertida** y la **norma dual**, definidas respectivamente por

$$|(u,v)|^R = |(v,u)|,$$

$$|(u,v)|^* = \max\{|au+bv| : |(a,b)| = 1\}.$$

Es claro que $(|\cdot|^R)^R = |\cdot|$, y usando que $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ es isométrico a su bidual, se tiene también que $(|\cdot|^*)^* = |\cdot|$.

Para mayor comodidad en las referencias sobre normas absolutas recogemos en el siguiente resultado el resto de las propiedades que usaremos en adelante.

Lema I.2.8. *Sean* $|\cdot|$ *una norma absoluta en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\gamma \in [0,1]$. *Entonces:*

(i) $M(u,v) \le |(u,v)| \le L(u,v), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $|\cdot|_\gamma^* = |\cdot|_{1-\gamma}^R$.

(iii) $(\Omega^\gamma)^* = \Omega_\gamma$.

(iv) $\Omega^\gamma(a+b, c+d) \ge \Omega^\gamma(\Omega^\gamma(a,c), \Omega^\gamma(b,d)), \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}_0^+$.

(v) Si E y F son dos espacios normados, y consideramos en $E \times F$ la norma $|||\cdot|||$ definida por

$$|||(e,f)||| = |(\|e\|, \|f\|)|, \forall (e,f) \in E \times F,$$

entonces, el espacio dual de dicho producto se puede identificar, vía la siguiente expresión

$$< (e^*, f^*), (e, f) >= e^*e + f^*f, \forall (e, f) \in E \times F, (e^*, f^*) \in E^* \times F^*,$$

con el espacio $(E^* \times F^*, |||\cdot|||^*)$*, donde la norma* $|||\cdot|||^*$ *viene dada por*

$$|||(e^*, f^*)|||^* = |\, (\|e^*\|, \|f^*\|)\, |^*, \forall (e^*, f^*) \in E^* \times F^*.$$

Demostración. La demostración de (i) puede verse en [BoD, Lemma 21.1].

(ii) Basta probar que los segmentos $[(1,0),(1,\gamma)]$ y $[(1,\gamma),(0,1)]$ están en la esfera unidad de los espacios $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\gamma^*)$ y $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{1-\gamma}^R)$.

(iii) Basta observar que los segmentos $[(1,0),(1,\gamma)]$, $[(1,\gamma),(\gamma,1)]$ y $[(\gamma,1),(0,1)]$ están en la esfera unidad de los espacios $(\mathbb{R}^2, (\Omega^\gamma)^*)$ y $(\mathbb{R}^2, \Omega_\gamma)$.

(iv) En efecto, para cualesquiera a, b, c, d reales no negativos, se tiene

$$\Omega^\gamma(a+b, c+d) = \max\{a+b+\gamma(c+d), c+d+\gamma(a+b)\} =$$

$$= \max\{a+\gamma c+b+\gamma d, c+\gamma a+d+\gamma b\} \geq$$

$$\geq \max\left\{\begin{array}{c} \max\{a+\gamma c+\gamma(b+d), c+\gamma a+\gamma(b+d)\}, \\ \max\{b+\gamma d+\gamma(a+c), d+\gamma b+\gamma(a+c)\} \end{array}\right\} =$$

$$= \max\left\{\begin{array}{c} \gamma(b+d)+\max\{a+\gamma c, c+\gamma a\}, \\ \gamma(a+c)+\max\{b+\gamma d, d+\gamma b\} \end{array}\right\} =$$

$$= \max\{\gamma(b+d)+\Omega^\gamma(a,c), \gamma(a+c)+\Omega^\gamma(b,d)\} \geq$$

$$\geq \max\{\Omega^\gamma(a,c) + \gamma\Omega^\gamma(b,d), \Omega^\gamma(b,d) + \gamma\Omega^\gamma(a,c)\} =$$

$$= \Omega^\gamma(\Omega^\gamma(a,c), \Omega^\gamma(b,d)).$$

(v) Es consecuencia fácil de la definición de norma absoluta y de la expresión dada de la dualidad. En [P, Cor. 8.4] puede verse esta propiedad en una forma equivalente. ∎

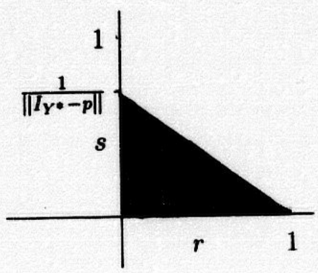
I.3 $M(r,\ s)$-desigualdad

Definición I.3.9. *Sea X un p-ideal de Y, y sean $r, s \in\ ]0,1]$. Diremos que X* **verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad en** *Y si*

$$\|y^*\| \geq r\|py^*\| + s\|y^* - py^*\|, \forall y^* \in Y^*.$$

Diremos que X es un **ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad** *si existe una proyección p en Y^* para la cual X es un p-ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad. Cuando sea necesario, se dirá que p es una* **proyección asociada a la $M(r,\ s)$-desigualdad**.

Obsérvese que si X es un p-ideal de Y, entonces X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad para cualesquiera que sean $r, s \in\ ]0,1]$ tales que $r + s\|I_{Y^*} - p\| \leq 1$. Por tanto, si nuestro objetivo es poner de manifiesto la riqueza que genera la $M(r,\ s)$-desigualdad, habremos de centrarnos en el caso en que $r + s\|I_{Y^*} - p\| > 1$, y más en concreto, dado que $\|I_{Y^*} - p\| \geq 1$, en el caso $r + s > 1$. La siguiente figura (parte sombreada) ilustra el conjunto de pares (r,s) para los que se verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad de forma automática:



A las primeras propiedades vistas para ideales (véase Proposición I.1.2) añadimos otras nuevas, consecuencia de que el ideal además verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad.

Proposición I.3.10. *Sean $r, s \in]0,1]$, y X un p-ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad. Entonces:*

(i) $P_{X^\perp}(y^*) \subseteq B_{X^\perp}\left(y^* - py^*, \frac{1-r}{s}\|y^* + X^\perp\|\right), \forall y^* \in Y^*.$

(ii) Si $r = 1$, X tiene la propiedad U en Y.

(iii) Si Z es un subespacio cerrado de Y que contiene a X, entonces X es un ideal de Z verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad.

Demostración. (i) Sean $y^* \in Y^*$, y $x^\perp \in P_{X^\perp}(y^*)$. Es claro que

$$\|x^\perp - (y^* - py^*)\| = \|(x^\perp - y^*) - p(x^\perp - y^*)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{s}(\|x^\perp - y^*\| - r\|p(x^\perp - y^*)\|) =$$

$$= \frac{1}{s}(\|x^\perp - y^*\| - r\|py^*\|) = \frac{1-r}{s}\|y^* + X^\perp\|.$$

(ii) En virtud de (i) y de la Proposición I.1.2, $P_{X^\perp}(y^*) = \{y^* - py^*\}$, en particular, X tiene la propiedad U en Y.

(iii) Sean $z^* \in Z^*$ e y^* una extensión equinórmica de z^* a Y. En virtud de la Proposición I.1.2 y la $M(r,\, s)$-desigualdad, se tiene

$$\|z^*\| = \|y^*\| \geq r\|py^*\| + s\|y^* - py^*\| \geq$$

$$\geq r\|py^* + Z^\perp\| + s\|(y^* - py^*) + Z^\perp\| = r\|qz^*\| + s\|z^* - qz^*\|,$$

donde q representa la proyección dada en la Proposición I.1.2. ∎

Nota. Obsérvese que la cota del diámetro de $P_{X^\perp}(y^*)$

$$\left(\operatorname{diam} P_{X^\perp}(y^*) \leq 2\frac{1-r}{s}\|y^* + X^\perp\|\right)$$

no depende de la proyección asociada p.

Intentemos ahora comprender un poco qué sugiere esta desigualdad. De hecho, el siguiente resultado nos permitirá obtener una interpretación geométrica del concepto de $M(r,\, s)$-desigualdad.

Proposición I.3.11 . *Sean X un p-ideal de Y, y $r, s \in\,]0,1]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad.

(ii) $B_{Y^*} \subseteq \operatorname{co}\left(\frac{1}{r}B_{p(Y^*)} \cup \frac{1}{s}B_{X^\perp}\right)$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $y^* \in B_{Y^*}$. Si $py^* = 0$ ó $y^* = py^*$, lo que se pretende probar es claro. En otro caso nótese que

$$0 < r\|py^*\| \leq \|y^*\| - s\|y^* - py^*\| \leq 1 - s\|y^* - py^*\| < 1,$$

por lo que si tomamos $\lambda := \|y^*\| - s\|y^* - py^*\|$, se verifica que

$$\lambda \in]0,1[\ , \ \frac{py^*}{\lambda} \in \frac{1}{r}B_{p(Y^*)} \ , \ \frac{y^* - py^*}{1-\lambda} \in \frac{1}{s}B_{X^\perp},$$

y en consecuencia el enunciado se sigue sin más que escribir

$$y^* = \lambda\frac{py^*}{\lambda} + (1-\lambda)\frac{y^* - py^*}{1-\lambda}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$. Por hipótesis, existen $x^\perp \in B_{X^\perp}$, $z^* \in B_{p(Y^*)}$, $\lambda \in [0,1]$ tales que

$$y^* = \lambda\frac{1}{r}z^* + (1-\lambda)\frac{1}{s}x^\perp.$$

Como $Y^* = p(Y^*) \oplus X^\perp$, se tiene que

$$\lambda\frac{1}{r}z^* = py^* \ , \ (1-\lambda)\frac{1}{s}x^\perp = y^* - py^*.$$

Por tanto,

$$r\|py^*\| + s\|y^* - py^*\| = \lambda\|z^*\| + (1-\lambda)\|x^\perp\| \leq 1 = \|y^*\|. \qquad \blacksquare$$

A la vista del resultado anterior, si X es un p-ideal de Y, entonces verifica la $M(r,s)$-desigualdad si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^{(*)}$, $B_{X(y^*)}$ está contenida en el rombo de vértices $\left(\pm\frac{1}{r}, \pm\frac{1}{s}\right)$.

EJEMPLOS.

Ejemplo I.3.12 . *Sean $X = \mathbb{R}(1,0)$ y p, q las proyecciones en $\mathbb{R}^2$ definidas por*

$$p(u,v) = (u,0)\ ,\ q(u,v) = \left(u, \frac{u}{3}\right), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces X es simultáneamente p-ideal y q-ideal de $Y = \left(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{\frac{1}{2}}\right)$, verificando la $M\left(\frac{1}{6},1\right)$-desigualdad.

Demostración. En virtud del Lema I.2.8, se tiene que $\left(|\cdot|_{\frac{1}{2}}\right)^* = |\cdot|_{\frac{1}{2}}^R$. Además,

$$|(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R = \max\left\{|v| + \frac{1}{2}|u|, |u|\right\} \geq$$

$$\geq |v| + \frac{1}{2}|u| = |v| + \frac{1}{3}|u| + \frac{1}{6}|u|,$$

y dado que

$$|q(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R = |u|,$$

y

$$|(u,v) - q(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R = \left|\left(0, v - \frac{u}{3}\right)\right|_{\frac{1}{2}}^R = \left|v - \frac{u}{3}\right| \leq |v| + \frac{1}{3}|u|,$$

se tiene

$$|(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R \geq \frac{1}{6}|q(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R + |(u,v) - q(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R,$$

esto es, X es un q-ideal de Y verificando la $M\left(\frac{1}{6},1\right)$-desigualdad.

Por otra parte, la proyección p verifica que

$$|p(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R = |u|\ ,\ |(u,v) - p(u,v)|_{\frac{1}{2}}^R = |v|,$$

y por tanto,

$$|(u,v)|_{\frac{1}{2}}^{R} \geq |v| + \frac{1}{2}|u| = \frac{1}{2}|p(u,v)|_{\frac{1}{2}}^{R} + |(u,v) - p(u,v)|_{\frac{1}{2}}^{R},$$

de donde se deduce que X es un p-ideal de Y verificando la $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$-desigualdad, en particular, X verifica también la $M\left(\frac{1}{6}, 1\right)$-desigualdad. ∎

Nótese que este último ejemplo muestra una ruptura con una tradición de los ideales clásicos (HB-subespacios y u-ideales -ver [GKS]-), a saber, no existe unicidad de la proyección que los define.

Se dice que X es un **ideal absoluto de** Y si existe una norma absoluta $|\cdot|$ y una proyección p en Y^* verificando:

(i) $\operatorname{Ker} p = X^{\perp}$.

(ii) $\|y^*\| = |(\|py^*\|, \|y^* - py^*\|)|^*, \forall y^* \in Y^*$.

Cuando sea necesario hacer referencia a la norma absoluta $|\cdot|$, diremos que X es un $|\cdot|$**-ideal absoluto de** Y.

Nótese que la propiedad (ii) nos permite asegurar que $I_{Y^*} - 2p$ es una isometría. En efecto, para cada $y^* \in Y^*$,

$$\|y^* - 2py^*\| = |(\|p(y^* - 2py^*)\|, \|y^* - 2py^* - p(y^* - 2py^*)\|)|^* =$$

$$= |(\|py^*\|, \|y^* - py^*\|)|^* = \|y^*\|.$$

En consecuencia, X es un u-ideal de Y, y en particular un ideal de Y.

El concepto de ideal absoluto fue introducido y ampliamente estudiado por Mena, Payá y Rodríguez en [MPR].

Después del Lema I.2.8, y hablando en clave geométrica, puede decirse que X es un ideal absoluto de Y si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^{(*)}$, $B_{X(y^*)}$ es simétrica respecto de los ejes de coordenadas, y está contenida en el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$, y contiene al rombo de vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$.

Por otra parte, conviene resaltar el siguiente hecho, que puede verse en [MPR, Prop. 1.2 y Lemma 2.8]:

Proposición I.3.13. *Sea $|\cdot|$ una norma absoluta. Si X es un $|\cdot|$-ideal absoluto de Y, entonces*

$$P_{X^\perp}(y^*) = B_{X^\perp}(y^* - py^*, n(|\cdot|)\|py^*\|), \forall y^* \in Y^*.$$

Obsérvese que si tomamos como norma absoluta la norma hexagonal $|\cdot|_\gamma$ con $\gamma = \frac{1-r}{s}$ (supuesto $r + s > 1$), se obtiene que

$$P_{X^\perp}(y^*) = B_{X^\perp}\left(y^* - py^*, \frac{1-r}{s}\|py^*\|\right), \forall y^* \in Y^*,$$

de donde se desprende que la cota obtenida para el radio en la Proposición I.3.10 es óptima.

El siguiente resultado explicita la relación que existe entre el concepto de ideal absoluto y la $M(r, s)$-desigualdad.

Proposición I.3.14. *Sean $r, s \in]0,1]$.*

(i) Sea X un $|\cdot|$-ideal absoluto de Y. Entonces X verifica la $M(r, s)$-desigualdad si, y sólo si, $|(r,s)| \leq 1$.

(ii) Existen normas absolutas $|\cdot|$ y espacios de Banach X e Y, tales que X es $|\cdot|$-ideal absoluto de Y para los que no existe proyección alguna p, de manera que X sea p-ideal de Y verificando la $M(r, s)$-desigualdad, con $r + s > 1$.

(iii) Para $\gamma \in]0,1[$, existen X e Y espacios de Banach y p proyección en Y^*, tales que verifican simultáneamente:

(a) X es un p-ideal de Y verificando la $M(1, \gamma)$ y la $M(\gamma, 1)$-desigualdad.

(b) No existe ninguna norma absoluta $|\cdot|$, tal que X sea un $|\cdot|$-ideal absoluto de Y.

Demostración. Notemos por p a la proyección en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$p(u,v) = (u,0), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Para probar (i) basta tener en cuenta las siguientes observaciones:

(a) Si X es un $|\cdot|$-ideal absoluto de Y, entonces X verifica la $M(r, s)$-desigualdad si, y sólo si, $\mathbb{R}(1,0)$ es un p-ideal de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad.

(b) Si $\mathbb{R}(1,0)$ es un p-ideal de $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, entonces $\mathbb{R}(1,0)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad si, y sólo si, $|(r,s)| \leq 1$.

De hecho, y con respecto a la segunda observación, nótese que para cada $\varepsilon > 0$ existen $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^+$ con $|(\alpha_0, \beta_0)|^* \leq 1$ tal que

$$|(r,s)| \leq r\alpha_0 + s\beta_0 + \varepsilon.$$

Si ahora imponemos que $\mathbb{R}(1,0)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad, entonces

$$|(r,s)| \leq r\alpha_0 + s\beta_0 + \varepsilon \leq |(\alpha_0, \beta_0)|^* + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon,$$

con lo que basta hacer tender ε hacia cero.

El recíproco de (b) es consecuencia del hecho de que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ se tiene

$$\frac{r \mid \alpha \mid + s \mid \beta \mid}{\mid (\alpha, \beta) \mid^*} \leq \sup\{\mid ru + sv \mid : \mid (u,v) \mid^* \leq 1\} = \mid (r,s) \mid .$$

(ii) Tómese $|\cdot| = L$, $X = \mathbb{R}(1,0)$, e $Y = (\mathbb{R}^2, L)$. Como hicimos observar en el Ejemplo I.1.3, X es un p-ideal de Y si, y sólo si, $p(u,v) = (u, \lambda u)$, con $|\lambda| \leq 1$. Si además X verifica la $M(r, s)$-desigualdad, entonces por (i), $r + s = L(r,s) \leq 1$, lo cual es una contradicción.

(iii) Sea X_i un M-ideal de Y_i, para $i = 1, 2$. Consideremos el espacio producto $Y_1 \times Y_2$, con la norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|(y_1, y_2)\| = \Omega_\gamma(\|y_1\|, \|y_2\|), \forall (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2.$$

Notemos por Y a dicho espacio producto y $X = X_1 \times X_2$. En virtud del Lema I.2.8, podemos identificar el dual de Y con $(Y_1^* \times Y_2^*, \|\cdot\|)$, donde la norma $\|\cdot\|$ viene definida por

$$\|(y_1^*, y_2^*)\| = \Omega^\gamma(\|y_1^*\|, \|y_2^*\|).$$

Para cada $i \in \{1,2\}$, existe p_i proyección en Y_i^* tal que X_i es p_i-ideal de Y_i verificando la $M(1,\, 1)$-desigualdad.

Para probar (a), basta tomar X e Y como arriba, y como proyección $p = p_1 \times p_2$. En efecto, por el Lema I.2.8 tenemos que

$$\|(y_1^*, y_2^*)\| = \Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\| + \|y_1^* - p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\| + \|y_2^* - p_2 y_2^*\|) \geq$$

$$\geq \Omega^\gamma(\Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\|), \Omega^\gamma(\|y_1^* - p_1 y_1^*\|, \|y_2^* - p_2 y_2^*\|)) =$$

$$= \Omega^\gamma(\|p(y_1^*, y_2^*)\|, \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|).$$

Veamos ahora que, de existir una norma absoluta $|\cdot|$ tal que X es un $|\cdot|$-ideal absoluto con q como proyección asociada, entonces $q = p$ y $|\cdot| = M$. En efecto, en virtud de la Proposición I.3.10, para cada X_i,

$$P_{X_i^\perp}(y_i^*) = \{y_i^* - p_i y_i^*\},$$

y por tanto,

$$P_{X^\perp}(y_1^*, y_2^*) = P_{X_1^\perp}(y_1^*) \times P_{X_2^\perp}(y_2^*) =$$

$$= \{(y_1^* - p_1 y_1^*, y_2^* - p_2 y_2^*)\} = \{(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\}.$$

Ahora bien, por ser X q-ideal de Y, aplicando la Proposición I.1.2, se tiene

$$(y_1^*, y_2^*) - q(y_1^*, y_2^*) \in P_{X^\perp}(y_1^*, y_2^*)(= \{(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\}),$$

esto es, $q = p$.

Supongamos de nuevo que X es un $|\cdot|$-ideal absoluto de Y, esto es,

$$\|(y_1^*, y_2^*)\| = |\,(\|p(y_1^*, y_2^*)\|, \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|)\,|^* .$$

Por definición, tendremos entonces que

$$\Omega^\gamma(\|y_1^*\|, \|y_2^*\|) = | \, (\|p(y_1^*, y_2^*)\|, \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|) \, |^* .$$

Tomando y_1^*, y_2^* tales que

$$\|p_1 y_1^*\| = \|y_1^* - p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\| = \|y_2^* - p_2 y_2^*\|,$$

se tiene que

$$2\Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\|) = | \, (\|p(y_1^*, y_2^*)\|, \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|) \, |^* .$$

Por otra parte, dado que

$$\|p(y_1^*, y_2^*)\| = \|(p_1 y_1^*, p_2 y_2^*)\| = \Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\|) =$$

$$= \Omega^\gamma(\|y_1^* - p_1 y_1^*\|, \|y_2^* - p_2 y_2^*\|) = \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|,$$

se obtiene

$$2\Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\|) = | \, (1,1) \, |^* \, \Omega^\gamma(\|p_1 y_1^*\|, \|p_2 y_2^*\|),$$

esto es, $| \, (1,1) \, |^* = 2$, y por tanto $| \cdot |^* = L$, luego $| \cdot | = M$.

Veamos sin embargo que X es un p-ideal que no verifica la $M(1, 1)$-desigualdad. En efecto, basta tomar y_1^*, y_2^* tales que

$$\|p_1 y_1^*\| < \|p_2 y_2^*\|,$$

$$\|y_1^* - p_1 y_1^*\| > \|y_2^* - p_2 y_2^*\|,$$

$$\|y_1^*\| > \|y_2^*\|.$$

En tal caso

$$\|(y_1^*, y_2^*)\| = \|y_1^*\| + \gamma\|y_2^*\|,$$

$$\|p(y_1^*, y_2^*)\| = \gamma\|p_1 y_1^*\| + \|p_2 y_2^*\|,$$

$$\|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\| = \|y_1^* - p_1 y_1^*\| + \gamma\|y_2 - p_2 y_2^*\|,$$

y por tanto,

$$\|(y_1^*, y_2^*)\| = \|y_1^*\| + \gamma\|y_2^*\| =$$

$$= (\gamma\|p_1 y_1^*\| + \|p_2 y_2^*\|) + (\|y_1^* - p_1 y_1^*\| + \gamma\|y_2 - p_2 y_2^*\|) +$$

$$+ (1-\gamma)(\|p_1 y_1^*\| - \|p_2 y_2^*\|) <$$

$$< \|p(y_1^*, y_2^*)\| + \|(y_1^*, y_2^*) - p(y_1^*, y_2^*)\|,$$

lo cual prueba que X no verifica la $M(1, 1)$-desigualdad (en Y). ∎

Finalizamos esta sección poniendo de manifiesto que los conceptos de HB-subespacio o de u-ideal son independientes del concepto de ideal que verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad. Obsérvese que en el Ejemplo I.3.12, de hecho, X es un $|\cdot|_{\frac{1}{2}}$-ideal absoluto de Y. En efecto, en virtud del Lema I.2.8, para cualquier $(u, v) \in Y^*$,

$$\left(|\,(u,v)\,|_{\frac{1}{2}}\right)^* = |\,(u,v)\,|_{\frac{1}{2}}^R = |\,(|\,u\,|, |\,v\,|)\,|_{\frac{1}{2}}^R =$$

$$= \left|\left(\left(|\,p(u,v)\,|_{\frac{1}{2}}\right)^*, \left(|\,(u,v) - p(u,v)\,|_{\frac{1}{2}}\right)^*\right)\right|_{\frac{1}{2}}^*.$$

En particular, en virtud de la Proposición I.3.13, para cualquier $y^* \in Y^*$,

$$P_{X^\perp}(y^*) = B_{X^\perp}\left(y^* - py^*, \frac{1}{2}\|py^*\|\right),$$

en particular X no tiene la propiedad U, y por consiguiente no es un HB-subespacio de Y.

Igualmente, es fácil probar que $\mathbb{R}(1,0)$ es un u-ideal de $(\mathbb{R}^2, L)$, y, como hemos probado en la demostración de (ii) de la proposición anterior, no existen r y s con $r+s>1$, ni proyecciones p en Y^* de manera que X sea un p-ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad.

En un ejemplo posterior (ver Ejemplo II.2.15), mostraremos ideales que verifican la $M(1,\ s)$-desigualdad, que no son u-ideales. También se podrá ver en el Ejemplo II.2.19 un HB-subespacio que no verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad para ningún r y s, con $r^2+s^2>1$.

Finalizamos esta sección exhibiendo una técnica, ligeramente más general que la dada por E. Oja en [O1] (la cual es a su vez la versión completada de la Proposición I.1.7), para construir ideales que verifican la $M(r,\ s)$-desigualdad.

Proposición I.3.15. *Sean $r,s\in\,]0,1]$. Supongamos que existe una red $\{V_\alpha\}$ de operadores lineales y continuos de Y en X, tal que:*

(i) $\|V_\alpha\|\le 1, \forall\alpha$.

(ii) $\lim_\alpha x^*V_\alpha x = x^*x, \forall x^*\in X^*, x\in X$.

(iii) Para cualesquiera α, $x\in B_X$ e $y\in B_Y$,

$$\overline{\lim_\beta}\|rV_\alpha x + s(y-V_\beta y)\|\le 1.$$

Entonces X es un p-ideal de Y verificando la $M(r,s)$-desigualdad, donde

$$py^*y = \lim_\alpha y^*V_\alpha y, \forall y^* \in Y^*, y \in Y.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que X es un ideal de Y. En efecto, teniendo en cuenta que el espacio $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$ (espacio de los operadores lineales y continuos de X^* en Y^*) es un espacio dual (ver [DiU, Cor. 2, p. 230]), existe una subred de $\{V_\alpha^*\}$, que seguiremos notando igual, y un operador $T \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ tal que $\{V_\alpha^*\} \xrightarrow{w^*} T$. En particular,

$$Tx^*y = \lim_\alpha V_\alpha^* x^* y (= \lim_\alpha x^* V_\alpha y), \forall x^* \in X^*, y \in Y. \tag{3}$$

Es claro que $T \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ con $\|T\| \leq 1$. Sea $i : X \longrightarrow Y$ el operador inclusión. Veamos pues que $y^* - Ti^*y^* \in X^\perp$. De hecho, por (ii) se tiene

$$(y^* - Ti^*y^*)x = i^*y^*x - \lim_\alpha i^*y^*V_\alpha x = 0.$$

En virtud de la Proposición I.1.7, X es p-ideal de Y, con $p = Ti^*$. Además, por (3), para cualesquiera $y^* \in Y^*$ e $y \in Y$, se tiene que

$$py^*y = Ti^*y^*(y) = \lim_\alpha i^*y^*V_\alpha y = \lim_\alpha Ti^*y^*(V_\alpha y) = \lim_\alpha py^*V_\alpha y. \tag{4}$$

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$, y tomemos $y^* \in Y^*, y \in B_Y, x \in B_X$, tales que

$$i^*y^*x > \|i^*y^*\| - \varepsilon \ , \ (y^* - py^*)y > \|y^* - py^*\| - \varepsilon.$$

En virtud de (ii), (iii) y (4), existen α_0 y β suficientemente avanzados tales que

$$i^*y^*V_{\alpha_0}x > \|i^*y^*\| - \varepsilon,$$

$$\|rV_{\alpha_0}x + s(y - V_\beta y)\| \leq 1 + \varepsilon,$$

y

$$| py^*(y - V_\beta y) | < \varepsilon.$$

En particular,

$$(1 + \varepsilon)\|y^*\| \geq y^*(rV_{\alpha_0}x + s(y - V_\beta y)) =$$

$$= ri^*y^*V_{\alpha_0}x + s(py^*(y - V_\beta y) + (y^* - py^*)(y - V_\beta y)) >$$

$$> r(\|i^*y^*\| - \varepsilon) - \varepsilon s + s(\|y^* - py^*\| - \varepsilon).$$

Finalmente, haciendo tender ε hacia cero, y teniendo en cuenta que $\|i^*y^*\| = \|py^*\|$ (ver Proposición I.1.2), obtenemos la desigualdad deseada. ∎

I.4 $M(r, s)$-desigualdad y el Principio de Reflexividad Local

Ya desde su introducción por Alfsen y Effros [AE], el concepto de M-ideal puede ser interpretado mediante propiedades del propio X: *"X es un M-ideal de Y si, y sólo si, X satisface la propiedad de la 3-bola"*, (esto es, para cada tres bolas abiertas B_1, B_2, B_3 cuya intersección es no vacía, y cortando cada una de ellas al propio X, se sigue que $\bigcap_{i=1}^3 B_i \cap X \neq \emptyset$).

Esta caracterización intrínseca (no involucra duales) y otras semejantes en términos de la topología $\sigma(Y, X^*)$ (ver [W3, Prop. 2.3] y

[LORW, Prop. 2.7]) han proporcionado herramientas no pocas veces decisivas a la hora de estudiar las propiedades de los M-ideales.

El objetivo de esta sección es el de obtener caracterizaciones de la $M(r, s)$-desigualdad, bien en términos de la $\sigma(Y, X^*)$-topología, bien (al menos para $r = 1$) en términos de propiedades de intersección de bolas. El nexo común de ambos resultados, cuya utilidad mostraremos más adelante, es el Principio de Reflexividad Local y la dualización del concepto de $M(r, s)$-desigualdad.

Comenzamos pues esta sección introduciendo esta importante herramienta de la teoría de espacios de Banach conocida con el nombre de Principio de Reflexividad Local (PRL), que nosotros enunciamos en una versión debida a Behrends [Be2] (cf. [W3, Lemma 2.4]), y que hemos numerado para su cómoda localización.

Teorema I.4.16. *Sean $F \subseteq Y^{**}$, $G \subseteq Y^*$ subespacios de dimensión finita. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal y continuo $T : F \longrightarrow Y$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

(i) $Ty = y, \forall y \in F \cap Y$.

(ii) $(1-\varepsilon)\|y^{**}\| \leq \|Ty^{**}\| \leq (1+\varepsilon)\|y^{**}\|, \forall y^{**} \in F$.

(iii) $y^*(Ty^{**}) = y^{**}y^*, \forall y^{**} \in F, \forall y^* \in G$.

(iv) $T(F \cap X^{\perp\perp}) \subseteq X$.

Nuestro primer resultado en esta sección es la dualización del concepto de $M(r, s)$-desigualdad.

Lema I.4.17. *Sean Z un espacio de Banach, $p : Z \longrightarrow Z$ una proyección, y $r, s \in]0,1]$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) Para cada $x \in Z$, se tiene

$$\|x\| \geq r\|px\| + s\|x - px\|.$$

(ii) Para cualesquiera $x^*, y^* \in Z^*$, se tiene

$$\|p^*x^* + y^* - p^*y^*\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x^* + \mathrm{Ker}\, p^*\|, \frac{1}{s}\|y^* + p^*(Z^*)\|\right\}.$$

Demostración. Consideremos $Z \oplus_1 Z$, esto es, $Z \times Z$ con la norma $|\cdot|$ definida por

$$|(x,y)| = \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in Z.$$

En virtud del Lema I.2.8, el dual de $(Z \times Z, |\cdot|)$ puede ser identificado con $Z^* \oplus_\infty Z^*$, y tómese el operador $T : Z \longrightarrow Z \oplus_1 Z$ definido por

$$Tx = (rpx, s(x - px)), \forall x \in Z.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por hipótesis $\|T\| \leq 1$, y por tanto $\|T^*\| \leq 1$, en particular, para cualesquiera $x^*, y^* \in Z^*$, se tiene

$$\|rp^*x^* + s(y^* - p^*y^*)\| = \|T^*(x^*, y^*)\| \leq \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}.$$

Nótese que si $z^* \in \mathrm{Ker}\, p^*$, y $h^* \in p^*(Z^*)$, entonces

$$p^*x^* + y^* - p^*y^* = p^*(x^* + z^*) + (I_{Z^*} - p^*)(y^* + h^*),$$

y por tanto, en virtud de la desigualdad obtenida anteriormente,

$$\|p^*x^* + y^* - p^*y^*\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x^* + z^*\|, \frac{1}{s}\|y^* + h^*\|\right\}.$$

Tomando ínfimos en $\operatorname{Ker} p^*$ y en $p^*(Z^*)$, obtenemos el resultado deseado.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Por hipótesis $\|T^*\| \leq 1$, luego, para cada $x \in Z$, se tiene

$$r\|px\| + s\|x - px\| = | Tx | \leq \|x\|. \qquad \blacksquare$$

Nuestro primer objetivo puede establecerse como sigue:

Proposición I.4.18. *Sean X un p-ideal de Y, y $r, s \in]0,1]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X verifica la $M(r, s)$-desigualdad en Y.

(ii) Para cada $y \in Y$, existe una red $\{x_\alpha\}$ en X con $\{x_\alpha\} \overset{\sigma(Y,p(Y^*))}{\longrightarrow} y$ tal que

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rx + s(y - x_\alpha)\| \leq \max\{\|x\|, \|y + X\|\}, \forall x \in X.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ puede seguirse como $(i) \Rightarrow (ii)$ de [W3, Prop. 2.3]. En efecto, sean $x \in X$ e $y \in Y$, y consideremos la familia $A = \{(F, G, \varepsilon)\}$, donde $F \subseteq Y^{**}$ y $G \subseteq Y^*$ son subespacios de dimensión finita, y $\varepsilon > 0$, con el orden *"natural"*. Por el Teorema I.4.16, para cada $\alpha \in A$, existe un operador lineal y continuo $T_\alpha : F \longrightarrow Y$ tal que

(i) $T_\alpha y = y, \forall y \in F \cap Y$.

(ii) $(1 - \varepsilon)\|y^{**}\| \leq \|T_\alpha y^{**}\| \leq (1 + \varepsilon)\|y^{**}\|, \forall y^{**} \in F$.

(iii) $y^*(T_\alpha y^{**}) = y^{**}y^*, \forall y^{**} \in F, \forall y^* \in G$.

(iv) $T_\alpha(F \cap X^{\perp\perp}) \subseteq X$.

Para α suficientemente avanzado (de manera que $x, y, p^*y \in F$), definimos $x_\alpha = T_\alpha p^* y$ (en particular, por (iv), $x_\alpha \in X$). Veamos que la red $\{x_\alpha\}$ es $\sigma(Y, p(Y^*))$-convergente a y. De hecho, para cada $y^* \in Y^*$, tomando α tal que $py^* \in G$, por (iii),

$$py^* x_\alpha = y^* x_\alpha = y^*(T_\alpha p^* y) = py^* y.$$

Por otra parte, en virtud de (i), (ii) y el lema anterior,

$$\|rx + s(y - x_\alpha)\| = \|T_\alpha(rp^*x + s(y - p^*y))\| \leq (1+\varepsilon)\max\{\|x\|, \|y + X\|\}.$$

Para $(ii) \Rightarrow (i)$ usamos la técnica seguida en $(iv) \Rightarrow (i)$ de [LORW, Prop. 2.7]. En efecto, sean $y^* \in Y^*$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $x \in B_X$ e $y \in B_Y$ tales que

$$\|py^*\| < y^*x + \varepsilon \ , \text{ y } \|y^* - py^*\| < (y^* - py^*)y + \varepsilon.$$

Por hipótesis, existe una red $\{x_\alpha\}$ en X tal que, para α suficientemente grande,

$$\|rx + s(y - x_\alpha)\| < 1 + \varepsilon \ , \text{ y } \ | py^*(y - x_\alpha) | < \varepsilon.$$

En particular,

$$r\|py^*\| + s\|y^* - py^*\| \leq r(y^*x + \varepsilon) + s((y^* - py^*)y + \varepsilon) =$$

$$= y^*(rx + s(y - x_\alpha)) - spy^*(y - x_\alpha) + (r+s)\varepsilon \leq$$

$$\leq \|y^*\|(1+\varepsilon) + (r+2s)\varepsilon,$$

con lo que basta hacer tender ε hacia cero. ∎

Toca ahora el turno de las propiedades de intersección de bolas. La importancia de estas propiedades, como ya hemos reseñado anteriormente, radica en interpretar en el propio X las propiedades de la proyección del ideal. En esta línea, nuestro primer paso es el siguiente lema, donde se muestra una primera *"condición suficiente"* de una desigualdad tipo $M(r, s)$, en términos de una cierta propiedad de intersección de bolas.

Lema I.4.19 . *Sean $\frac{1}{2} < r \leq 1, 0 < s \leq 1$. Supongamos que para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $x \in X$ e $y \in Y$ con $\|x\| \leq \|y + X\|$, existe $z \in X$ tal que*

$$\max\{\|sy \pm rx - z\|\} \leq \|y + X\| + \varepsilon.$$

Entonces, para cualesquiera $x^{\perp} \in X^{\perp}, x^* \in X^*$, se tiene que

$$\|\hat{x}^* + x^{\perp}\| \geq (2r-1)\|x^*\| + s\|x^{\perp}\|, \tag{5}$$

para toda extensión equinórmica $\hat{x}^*$ a Y de x^*.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0, x^{\perp} \in X^{\perp}, x^* \in X^*, y \in Y, x, z \in X$ tales que

$$\|y + X\| = 1 \text{ y } x^{\perp}y > \|x^{\perp}\| - \varepsilon,$$

$$\|x\| = 1 \text{ y } x^*x > \|x^*\| - \varepsilon,$$

$$\max\{\|sy \pm rx - z\|\} \leq 1 + \varepsilon.$$

Sea $\hat{x}^*$ una extensión equinórmica a Y de x^*. Entonces se tiene que

$$2r(\|x^*\| - \varepsilon) + s(\|x^\perp\| - \varepsilon) \leq 2rx^*x + sx^\perp y =$$

$$= (\hat{x}^* + x^\perp)(sy + rx - z) - \hat{x}^*(sy - rx - z) \leq$$

$$\leq (\|\hat{x}^* + x^\perp\| + \|\hat{x}^*\|)(1+\varepsilon).$$

Luego, haciendo tender ε a cero,

$$(2r-1)\|x^*\| + s\|x^\perp\| \leq \|\hat{x}^* + x^\perp\|.$$ ∎

El siguiente resultado combina el PRL con la $M(r,\ s)$-desigualdad. Una simple inspección del PRL nos revela que éste puede formularse en forma poco precisa pero intuitiva diciendo que Y e Y^{**} tienen esencialmente los mismos subespacios finito-dimensionales. Pues bien, si X es un ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad, dicha coincidencia de los subespacios finito-dimensionales queda reflejada en la pareja (X, Y) como sigue:

Lema I.4.20. *Si X es un ideal de Y verificando la $M(r,\ s)$-desigualdad, entonces, para cada subespacio finito-dimensional G de Y y $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal y continuo $T : G \longrightarrow X$ tal que*

(i) $Tx = x, \forall x \in G \cap X$.

(ii) $\|rTy_1 + s(y_2 - Ty_2)\| \leq (1+\varepsilon)\max\{\|y_1\|, \|y_2 + X\|\}, \forall y_1, y_2 \in G$.

Demostración. Seguiremos, salvo pequeñas modificaciones, el caso clásico (ver [L4, Th. 4]).

En virtud de la Proposición I.1.2, se puede suponer que Y/X es finito-dimensional. Por definición existe una proyección p en Y^* de manera que X es un p-ideal de Y verificando la $M(r, s)$-desigualdad.

Sea G un subespacio finito-dimensional de Y y definamos $H := p^*(G) + (I_Y - p^*)(G)$. Por el PRL existe un operador lineal y continuo $S : H \longrightarrow Y$ tal que

(i) $Sy = y, \forall y \in H \cap Y$.

(ii) $y^{**}x^{\perp} = x^{\perp}(Sy^{**}), \forall y^{**} \in H, x^{\perp} \in X^{\perp}$.

(iii) $(1-\varepsilon)\|y^{**}\| \leq \|Sy^{**}\| \leq (1+\varepsilon)\|y^{**}\|, \forall y^{**} \in H$.

Si $x \in G \cap X \subseteq H \cap X = H \cap X^{\perp\perp} \cap Y$, entonces, por (i) y dado que $p^*(Y^{**}) = X^{\perp\perp}$, se tiene que $x = p^*x = Sp^*x$.

Si $x \in G$, entonces $Sp^*x \in X$. En efecto, para cada $x^{\perp} \in X^{\perp}$, en virtud de (ii), se tiene que

$$x^{\perp}(Sp^*x) = x^{\perp}(p^*x) = 0,$$

(ya que $p^*x \in X^{\perp\perp}$). Por tanto, $Sp^*x \in X^{\perp\perp} \cap Y = X$.

Nótese que $G \subseteq H \cap Y$, y en consecuencia, $Sy = y, \forall y \in G$. Teniendo en cuenta la condición (iii) de S y el lema de dualización (Lema I.4.17), para cualesquiera $y_1, y_2 \in G$ se tiene que

$$\|Sp^*y_1 + y_2 - Sp^*y_2\| = \|Sp^*y_1 + S(y_2 - p^*y_2)\| \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\|p^*y_1 + y_2 - p^*y_2\| \leq (1+\varepsilon)\max\left\{\frac{1}{r}\|y_1\|, \frac{1}{s}\|y_2 + X\|\right\}.$$

Llamando ahora $T := Sp^*|_G$ podemos concluir la demostración. ∎

Ya estamos en condiciones de establecer que la primera condición suficiente está cerca de ser necesaria, concretamente probaremos la siguiente

Proposición I.4.21. *Sean X un ideal de Y y $r, s \in]0,1]$.*

(i) Si X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad, entonces, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $y \in Y$ con $\|x_i\| \leq \|y + X\|$, y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} B(sy + rx_i, \|y + X\| + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

(ii) Si $r > \frac{1}{2}$, y para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$ con $\|x\| \leq \|y + X\|$, y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$X \cap B(sy \pm rx, \|y + X\| + \varepsilon) \neq \emptyset,$$

entonces, X verifica la $M(2r$ - $1,\, s)$-desigualdad en Y.

Demostración. (i) Fijemos $x_1, x_2, ..., x_n$, y y $\varepsilon > 0$ como arriba. Definamos $G := \text{lin}\{x_1, x_2, ..., x_n, y\}$. En virtud del Lema I.4.20, existe un operador lineal y continuo $T : G \longrightarrow X$ verificando

(i) $Tx = x, \forall x \in G \cap X$.

(ii) $\|Tz + y - Ty\| \leq (1+\varepsilon)\max\left\{\frac{1}{r}\|z\|, \frac{1}{s}\|y + X\|\right\}, \forall z \in G$.

Veamos que $x := sT(y)$ está en la intersección. En efecto,

$$\|sy + rx_i - x\| = \|rx_i + s(y - Ty)\| \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\max\{\|x_i\|, \|y + X\|\} \leq (1+\varepsilon)\|y + X\|,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Sea p una proyección en Y^* tal que X es un p-ideal de Y. Sea $y^* \in Y^*$ y consideremos $x^* = py^*|_X$, $\hat{x}^* = py^*$, y $x^\perp = y^* - py^*$. En virtud del Lema I.4.19,

$$(2r-1)\|py^*\| + s\|y^* - py^*\| \leq \|y^*\|. \qquad \blacksquare$$

Nota. Obsérvese que la proposición anterior, salvo en el caso $r = 1$, no puede ser estructurada en forma de equivalencia. La razón estriba en que, al no conocer ni el tamaño de $P_{X^\perp}(y^*)$ ni la posición que $y^* - py^*$ ocupa en dicho conjunto, no se puede obtener mayor información del Lema I.4.19. Así por ejemplo, si para cada $y^* \in Y^*$, se tuviese

$$P_{X^\perp}(y^*) = B_{X^\perp}\left(y^* - py^*, \frac{1-r}{s}\|py^*\|\right),$$

se tendría entonces la equivalencia. Por otra parte, recuérdese que esta última posibilidad no es del todo extraña, de hecho se presenta, como hemos visto en la Proposición I.3.13, cuando X es un $|\cdot|_\gamma$-ideal absoluto de Y, con $\gamma = \frac{1-r}{s}$ (supuesto $r + s > 1$).

Con el fin de hacer cómoda la referencia al apartado (i) de la proposición anterior, diremos que X **tiene la propiedad de la $n(r, s)$-bola en** Y si X verifica la tesis de dicho apartado. En el caso particular en que

$r = s = 1$, y $n = 3$, se puede probar (ver por ejemplo [HWW, Th. I.2.2]) que esta propiedad no es otra que la propiedad de la 3-bola comentada al inicio de la sección.

Recapitulando, queda por resolver el siguiente

Problema: *ideal* + $2(r, s)$*-bola* $\overset{?}{\Rightarrow}$ $M(r, s)$*-desigualdad.*

I.5 $M(1, s)$-desigualdad

El objeto de esta sección es mostrar la especial relevancia del caso $r = 1$. Algunas connotaciones especiales han sido ya establecidas, o son fáciles de establecer. Así por ejemplo, ya observamos en la Proposición I.3.10, cómo se tiene asegurada la propiedad U, y en particular la unicidad de la proyección, ya que, una eventual multiplicidad de proyecciones provoca la multiplicidad de las extensiones equinórmicas a Y de los funcionales de X (ver Proposición I.1.2). Otras propiedades requieren un esfuerzo relativo. Así, vemos a continuación que para $r = 1$ la Proposición I.4.21 puede ser sensiblemente mejorada.

Proposición I.5.22. *Sea* $s \in \,]0, 1]$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *es un ideal de* Y *verificando la* $M(1, s)$*-desigualdad.*

(ii) Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *e* $y \in Y$ *con* $\|x_i\| < \|y + X\|$, *se tiene que*

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{n} B(sy + x_i, \|y + X\|) \neq \emptyset.$$

(iii) Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$ e $y \in Y$ con $\|x_i\| < \|y + X\|$, se tiene que

$$X \cap \bigcap_{i=1}^{3} B(sy + x_i, \|y + X\|) \neq \emptyset.$$

(iv) X tiene la propiedad de la $3(1, s)$-bola en Y.

(v) X es un ideal de Y y para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$, con $\|x\| \leq \|y + X\|$, y $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$X \cap B(sy \pm x, \|y + X\| + \varepsilon) \neq \emptyset,$$

Demostración. El caso $s = 1$ puede verse en [HWW, Th. I.2.2] (cf. [L1, Th. 6.9]). Supongamos pues $s < 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $\mu > 0$ tal que $s = \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $y \in Y$ tales que $\|x_i\| < \|y + X\|$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\|y\| \leq (1 + \mu)\|y + X\| = 1 + \mu$$

(en caso contrario, tomaríamos $\frac{1}{\|y+X\|}(y - z)$, con conveniente $z \in X$, en lugar de y).

Sea $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\|x_j\| = \max_{1 \leq i \leq n}\{\|x_i\|\}$, y sean $\delta > 0$ tal que $\|x_j\|(1 + \delta) = \|y + X\|$, y $s' = \frac{s}{1+\delta}$. Veamos en primer lugar que existe $z \in X$ tal que

$$\|s'y + x_i - z\| \leq \frac{1 + \mu\delta}{1 + \delta}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

En efecto, sea $G = \text{lin}\{x_1, ..., x_n, y\}$. En virtud del Lema I.4.20, existe un operador lineal y continuo $T : G \longrightarrow X$ tal que

(i) $Tx = x, \forall x \in G \cap X$.

(ii) $\|Tu + y - Ty\| \leq (1+\mu\delta)\max\left\{\|u\|, \frac{1}{s}\right\}, \forall u \in G$.

Basta tomar $z = s'Ty$, ya que, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene

$$\|s'y + x_i - z\| \leq (1+\mu\delta)\max\left\{\|x_i\|, \frac{s'}{s}\right\} \leq \frac{1+\mu\delta}{1+\delta}.$$

En consecuencia,

$$\|sy + x_i - z\| \leq \|(s'y + x_i - z)\| + (s - s')\|y\| \leq$$

$$\leq \frac{1+\mu\delta}{1+\delta} + \frac{s\delta(1+\mu)}{1+\delta} = 1,$$

esto es, $z \in X \cap \bigcap_{i=1}^{n} B(sy + x_i, 1)$.

$(i) \Leftrightarrow (v)$ ha sido probado en la Proposición I.4.21.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ es trivial.

$(iv) \Rightarrow (i)$ La dificultad consiste en construir una proyección en Y^* cuyo núcleo sea $X^\perp$. Seguiremos en este punto el esquema trazado para el caso $s = 1$.

Veamos previamente que el conjunto

$$X^\# = \{y^* \in Y^* : \|y^*\| = \|y^*|x\|\}$$

es un subespacio. Obviamente, dicho conjunto es un cono. Veamos ahora que si $y^*, z^* \in X^\#$, entonces $y^* + z^* \in X^\#$. En efecto, sea $x^\perp \in P_{X^\perp}(y^* + z^*)$ (y por tanto, $h^* = y^* + z^* - x^\perp \in X^\#$). Escribamos $y^* + z^* = h^* + x^\perp$, y veamos que $x^\perp = 0$:

Sean $y \in Y$ con $\|y + X\| \leq 1$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $x_1, x_2, x_3 \in B_X$ tales que

$$y^* x_1 \geq \|y^*\| - \varepsilon \ , \ z^* x_2 \geq \|z^*\| - \varepsilon \ , \ -h^* x_3 \geq \|h^*\| - \varepsilon.$$

En virtud de (iv), existe $z \in X$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{\|sy + x_i - z\|\} \leq 1 + \varepsilon,$$

y por tanto,

$$(1 + \varepsilon)(\|y^*\| + \|z^*\| + \|h^*\|) \geq$$

$$\geq | y^*(sy + x_1 - z) + z^*(sy + x_2 - z) - h^*(sy + x_3 - z) | =$$

$$= | (y^* + z^* - h^*)(sy - z) + y^* x_1 + z^* x_2 - h^* x_3 | \geq$$

$$\geq s x^{\perp} y + \|y^*\| + \|z^*\| + \|h^*\| - 3\varepsilon.$$

Haciendo tender ε hacia cero y tomando el supremo en $B_{Y/X}$, obtenemos $x^{\perp} = 0$.

Veamos que X tiene la propiedad U. De hecho, si hacemos $r = 1$ en la desigualdad (5) del Lema I.4.19, se tiene tiene que, para cualesquiera $y^* \in Y^*$, y $x_1^{\perp}, x_2^{\perp} \in P_{X^{\perp}}(y^*)$, y notando $x^* = y^*|_X$,

$$\|x^*\| + s\|x_2^{\perp} - x_1^{\perp}\| \leq \|y^* - x_1^{\perp}\| = \|x^*\|,$$

esto es, $x_1^{\perp} = x_2^{\perp}$.

Construyamos en tercer lugar la proyección. Por la propiedad U, para cada $y^* \in Y^*$, consideramos $qy^* = y^* - x^{\perp}$, donde $P_{X^{\perp}}(y^*) = \{x^{\perp}\}$. Veamos que q define una proyección en Y^* de norma uno cuyo núcleo es $X^{\perp}$. En efecto, dados $y^*, z^* \in Y^*$, e $y^{\perp}, z^{\perp} \in X^{\perp}$, tales que

$$P_{X^{\perp}}(y^*) = \{y^{\perp}\} \ , \ P_{X^{\perp}}(z^*) = \{z^{\perp}\},$$

se tiene que

$$y^* - y^\perp + z^* - z^\perp \in X^\#.$$

(Obsérvese que $y^* - y^\perp, z^* - z^\perp \in X^\#$). Luego, en virtud nuevamente de la propiedad U, $P_{X^\perp}(y^* + z^*) = \{y^\perp + z^\perp\}$. En definitiva,

$$q(y^* + z^*) = y^* + z^* - (y^\perp + z^\perp) = qy^* + qz^*.$$

Por otra parte es claro que $q(\lambda y^*) = \lambda q y^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall y^* \in Y^*$, así como que $q^2 = q, \|q\| \leq 1$ y $\text{Ker}\, q = X^\perp$, esto es, X es un q-ideal de Y.

Finalmente, aplicando la Proposición I.4.21, se tiene que X verifica la $M(1, s)$-desigualdad. ∎

Nota. Obsérvese que en la proposición anterior no se impone en (ii), (iii) y (iv) que X sea ideal de Y; hipótesis que sí es esencial (al igual que ocurre con la Proposición I.4.21) en el resto de los apartados. De hecho, la propiedad U nos permite construir una *"semiproyección"* (no necesariamente lineal) $q : Y^* \longrightarrow Y^*$ definida por $qy^* = x^\perp$, donde $\{x^\perp\} = P_{X^\perp}(y^*)$, y de nuevo en virtud del Lema I.4.19,

$$\|y^*\| \geq s\|qy^*\| + \|y^* - qy^*\|, \forall y^* \in Y^*.$$

Lamentablemente, se sabe de la existencia de *"semiproyecciones"* construidas mediante este método que no son lineales (ver [PY]).

El tercer objetivo de esta sección consiste en probar que existe una estrecha relación entre la $M(1, s)$-desigualdad y la contención de c_0.

Recuérdese que en virtud de la Proposición I.3.11, si X es un p-ideal de $(Y, \|\cdot\|)$, entonces verifica la $M(1, s)$-desigualdad (si, y) sólo si

$B_{Y^*} \subseteq \mathrm{co}\left(B_{p(Y^*)} \cup \frac{1}{s} B_{X^\perp}\right)$. Por otra parte es fácil probar que el conjunto de la derecha es también w^*-cerrado. Uniendo ambos comentarios se deduce que podemos definir una norma equivalente $|\cdot|$ en Y, que coincide con la norma original en X, y respecto de la cual X es un M-ideal de Y. A partir de aquí la relación entre la $M(1, s)$-desigualdad y la contención de c_0 viene señalada por el Teorema de D. Yost ([Y, Th. 5] -cf.[HWW, II.4.9]-). No obstante, hemos preferido hacer un razonamiento un poco más descriptivo; por esta razón traemos a escena el concepto de cuasibola introducido por D. Yost en [Y].

Dado $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto cerrado, acotado y convexo S de un espacio de Banach Z es llamado una **n-cuasibola** si

(i) $\mathrm{int}(S - S) \neq \emptyset$.

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n}(x_i + S) \neq \emptyset$, siempre que $x_1, x_2, ..., x_n \in \frac{1}{2}\mathrm{int}(S - S)$,

donde *"int"* denota el interior. Una cuasibola es llamada **propia** si no es simétrica. D. Yost prueba de hecho en [Y, Th. 5] que la existencia de cuasibolas propias equivale a la contención de c_0, concretamente prueba que *"cualquier espacio de Banach contiene una copia isomórfica de c_0 si, y sólo si, contiene una 3-cuasibola propia"*.

Nuestro objetivo se centra en la búsqueda de una cuasibola propia para aquellos ideales X de Y que verifican la $M(1, s)$-desigualdad. El problema quedará resuelto con un nuevo enunciado de la Proposición I.5.22.

Previamente reformulamos el apartado (ii) de dicha proposición como sigue:

Lema I.5.23. *Sea $y \in Y$. Para cada $x \in X$ con $\|x\| < \|y + X\|$, se tiene que*

$$X \cap B(sy \pm x, \|y + X\|) \neq \emptyset.$$

si, y sólo si,

$$\text{int} B_X(0, 2\|y + X\|) \subseteq A_X^s(y) - A_X^s(y) \subseteq B_X(0, 2\|y + X\|),$$

donde $A_X^s(y) = \{x \in X : \|sy - x\| \leq \|y + X\|\}$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\|x\| < \|y + X\|$. Si existe $z \in X$ tal que

$$\max\{\|sy \pm x - z\|\} \leq \|y + X\|,$$

entonces podemos escribir $2x = (x - z) - (-x - z) \in A_X^s(y) - A_X^s(y)$. La otra inclusión es igualmente trivial.

Recíprocamente, sea $x \in X$ tal que $\|x\| < \|y + X\|$. Por hipótesis existen $z_1, z_2 \in A_X^s(y)$ tales que

$$2x = z_1 - z_2.$$

Por tanto es fácil probar que

$$\frac{1}{2}(z_1 + z_2) \in X \cap B(sy \pm x, \|y + X\|). \qquad \blacksquare$$

Proposición I.5.24. *Sea $s \in \,]0,1]$.*

(i) Si X es un ideal de Y verificando la $M(1,\, s)$-desigualdad e $y \in Y$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_X^s(y)$ es una n-cuasibola.

(ii) Si para cada $y \in Y$, $A_X^s(y)$ es una 3-cuasibola, entonces X es un ideal de Y verificando la $M(1,\, s)$-desigualdad.

Demostración. (i) En virtud del lema anterior y de la Proposición I.5.22, $A_X^s(y) - A_X^s(y)$ tiene interior no vacío, y si

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \frac{1}{2}\mathrm{int}\,(A_X^s(y) - A_X^s(y)),$$

entonces, $\|x_i\| < \|y + X\|$, y existe $z \in \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + A_X^s(y))$.

(ii) Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ e $y \in Y$, tales que $\|x_i\| < \|y + X\|$. Por hipótesis, existe $z \in X$ tal que $z - x_i \in A_X^s(y)$, esto es,

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{\|sy + x_i - z\|\} \leq \|y + X\|,$$

por lo que basta aplicar de nuevo la Proposición I.5.22. ∎

Teorema I.5.25. *Sea X un p-ideal de Y verificando la $M(1,\, s)$-desigualdad. Si p no es w^*-continua, entonces X contiene una copia isomórfica de c_0.*

Demostración. En virtud del lema y proposición anteriores, para cada $y \in Y$, $A_X^s(y)$ es una 3-cuasibola tal que

$$\mathrm{int} B_X(0, 2\|y + X\|) \subseteq A_X^s(y) - A_X^s(y) \subseteq B_X(0, 2\|y + X\|).$$

Supongamos que toda cuasibola $A^s_X(y)$ tiene un centro de simetría z. Es fácil probar (ver por ejemplo [C, Cor. III.3.9]) que en tal caso,

$$B_X(z, \|y + X\|) = A^s_X(y)(\subseteq B_{X^{\perp\perp}}(p^* sy, \|y + X\|))$$

(nótese que $x = p^* x, \forall x \in X$). Luego, aplicando el teorema de la bipolar, obtenemos que

$$B_{X^{\perp\perp}}(z, \|y + X\|) \subseteq B_{X^{\perp\perp}}(p^* sy, \|y + X\|),$$

esto es, $p^* sy = z$, de donde $p^* y \in X$, y por tanto p es w^*-continua, lo cual es contradictorio. Finalmente, basta tener en cuenta el ya comentado teorema de Yost. ∎

El último objetivo de esta sección consistirá en probar que cada elemento $y \in Y$ admite una expansión incondicional en series de elementos de cualquier subespacio separable que sea ideal y verifique la $M(1, s)$-desigualdad. Concretamente, establecemos el siguiente

Teorema I.5.26 . *Sea X un subespacio separable de Y, el cual es un p-ideal de Y verificando la $M(1, s)$-desigualdad. Entonces, para cualesquiera $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que*

$$y = \sigma(Y, p(Y^*))\text{-}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

y

$$\sup_{|\varepsilon_n| \le 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\| \le (1 + \varepsilon)\frac{1}{s}\|y\|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

La demostración de este resultado puede hacerse siguiendo un razonamiento mediante renormaciones equivalentes, tal como hemos apuntado anteriormente. Nosotros preferimos hacerlo en dos etapas, interesantes en sí mismas y bien diferenciadas. La primera etapa viene resumida en la siguiente

Proposición I.5.27 . *Sea X un p-ideal de Y verificando la $M(1, s)$-desigualdad. Entonces, para cada $y \in Y$, $p^*y|_{B_{Y^*}}$ se puede expresar como diferencia de dos funciones positivas y semicontinuas inferiormente en (B_{Y^*}, w^*), tales que su suma no exceda de $\frac{1}{s}$.*

Para demostrar este resultado necesitamos introducir nuevos conceptos referidos a las funciones afines.

Sean K un conjunto no vacío y f una función real definida en K. Definimos el **subgrafo truncado** de f,

$$S(f) := \{(k, r) \in K \times \mathbb{R} : 0 \leq r \leq f(k)\}.$$

Dados E un espacio localmente convexo y T_2, K un subconjunto convexo de E y $h : K \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Se define

$$\hat{h}\,(k) = \inf\{a(k) : a \in A(K), h \leq a\},$$

donde $A(K)$ es el conjunto de las funciones afines y continuas en K.

Claramente $\hat{h}$ es cóncava y semicontinua superiormente. Veamos que además $S(\hat{h}) = \overline{\text{co}}(S(h))$.

En efecto, es fácil probar que $S(\hat{h})$ es cerrado y convexo, y por tanto que $\overline{\mathrm{co}}(S(h)) \subseteq S(\hat{h})$.

Supongamos que existe $(k,\lambda) \in S(\hat{h}) \backslash \overline{\mathrm{co}}(S(h))$. Aplicando el teorema de Hahn-Banach, existen $f \in E^*, \alpha, r \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(t) + r\mu > \alpha > f(k) + r\lambda, \forall (t,\mu) \in S(h).$$

Es evidente que $(t,0) \in S(h), \forall t \in K$. Luego,

$$f(t) > \alpha > f(k) + r\lambda, \forall t \in K.$$

Tomando $t = k$, se deduce que $r\lambda < 0$, y al ser $\lambda \geq 0$, obtenemos que $r < 0$. Por otra parte, $(t, h(t)) \in S(h), \forall t \in K$. Luego,

$$h(t) < \frac{\alpha - f(t)}{r}, \forall t \in K.$$

Definimos $a(\cdot) := \frac{\alpha - f(\cdot)}{r}$ que obviamente está en $A(K)$. Además, $h \leq a$, y por tanto $\hat{h} \leq a$. Por otra parte se tiene que $a(k) < \lambda \leq \hat{h}\,(k)$, lo cual es una contradicción.

La demostración que vamos a seguir es una adaptación del Lemma 2 de [GLi], (ver también [HWW, Lemma I.2.5]). Más adelante veremos (Ejemplo II.2.11) que esta adaptación no es posible para $r < 1$. Anunciamos que la clave de que haya una respuesta positiva en un caso y negativa en otro está estrechamente relacionada con la posible w^*-compacidad del conjunto $\mathrm{co}\left(\frac{1}{r}B_{p(Y^*)} \cup \frac{1}{s}B_{X^\perp}\right)$.

Demostración de la Proposición. Definamos

$$K := \mathrm{co}\left(\frac{1}{s}B_{X^\perp} \cup B_{p(Y^*)}\right),$$

que claramente es w^*-compacto.

Fijamos $y \in Y$ y definimos $h_y : K \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$h_y(y^*) = \begin{cases} y^*y & \text{si } y^* \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}, y^*y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que

$$S(h_y) = \left\{(y^*, r) : 0 \leq r \leq y^*y, y^* \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}\right\} \cup K \times \{0\},$$

y que los conjuntos

$$\left\{(k, r) : 0 \leq r \leq h_y(k), k \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}, k(y) \geq 0\right\} \text{ y } K \times \{0\}$$

son w^*-compactos, y por tanto (ya que $\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(S(h_y)) = S(\hat{h}_y))$, $S(\hat{h}_y) =$

$$= \mathrm{co}\left(\left\{(y^*, r) : y^* \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}, 0 \leq r \leq y^*y\right\} \cup \left(B_{p(Y^*)} \times \{0\}\right) \cup \left(\frac{1}{s}B_{X^\perp} \times \{0\}\right)\right).$$

En particular, para cada $y^* \in K$ existen $y_1^*, y_2^* \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}$, con $y_1^*y \geq 0$, $y_3^* \in B_{p(Y^*)}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$, tales que

$$y^* = \lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^* + \lambda_3 y_3^*\ ,\ \hat{h}_y(y^*) = \lambda_1 y_1^* y.$$

Utilizando la concavidad de $\hat{h}_y$ tenemos que

$$\hat{h}_y(y^*) \geq \lambda_1 \hat{h}_y(y_1^*) + \lambda_2 \hat{h}_y(y_2^*) + \lambda_3 \hat{h}_y(y_3^*) \geq$$

$$\geq \lambda_1 h_y(y_1^*) + \lambda_2 h_y(y_2^*) + \lambda_3 h_y(y_3^*) \geq$$

$$\geq \lambda_1 y_1^* y + \lambda_2 y_2^* y,$$

luego, $\lambda_2 y_2^* y \leq 0$. Si $\lambda_2 = 0$, podemos elegir $y_2^* = 0$. Por tanto, se tiene que $y_2^* y \leq 0$. Consiguientemente,

$$h_y(y_2^*) = 0 \ , \ h_y(-y_2^*) = -y_2^* y.$$

Otra vez por la concavidad de $\hat{h}_y$, se tiene que

$$\hat{h}_y\,(-y^*) \geq -\lambda_2 y_2^* y.$$

Entonces se obtiene que

$$\hat{h}_y\,(y^*) - \hat{h}_y\,(-y^*) \leq (\lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*)(y) = (y^* - py^*)(y),$$

y por ser ambas funciones impares se da la igualdad.

Definamos ahora $g_1, g_2 : B_{Y^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g_1(y^*) = \frac{\frac{1}{s} + y^* y}{2} - \hat{h}_y\,(y^*), \forall y^* \in B_{Y^*},$$

$$g_2(y^*) = \frac{\frac{1}{s} - y^* y}{2} - \hat{h}_y\,(-y^*), \forall y^* \in B_{Y^*}.$$

Veamos que ambas funciones son positivas, semicontinuas inferiormente en (B_{Y^*}, w^*) y tales que

$$py^*(y) = g_1(y^*) - g_2(y^*), \forall y^* \in B_{Y^*},$$

y

$$g_1 + g_2 \leq \frac{1}{s} \text{ en } B_{Y^*}.$$

En efecto, sea $a \in A(K)$ definida por

$$a(y^*) = \frac{\frac{1}{s} + y^*y}{2}, \forall y^* \in K.$$

Sea $y^* \in B_{Y^*} \subseteq K$. Si $y^* \in \frac{1}{s}B_{X^\perp}$, con $y^*y \geq 0$, entonces $h_y(y^*) = y^*y$ y por tanto,

$$g_1(y^*) = a(y^*) - h_y(y^*) = \frac{\frac{1}{s} - y^*y}{2} \geq 0.$$

En otro caso, $h_y(y^*) = 0$, y por tanto,

$$g_1(y^*) = a(y^*) - h_y(y^*) = \frac{\frac{1}{s} + y^*y}{2} \geq 0.$$

Luego, g_1 es positiva. Análogamente se prueba que g_2 es positiva.

Consideremos una red $\{y^*_\alpha\}$ en B_{Y^*} con $\{y^*_\alpha\} \xrightarrow{w^*} y^*$. Por ser $\hat{h}_y$ w^*-semicontinua superiormente y $a \in A(K)$, tenemos que

$$g_1(y^*) = a(y^*) - \hat{h}_y(y^*) \leq \underline{\lim}_\alpha a(y^*_\alpha) - \hat{h}_y(y^*_\alpha) = \underline{\lim}_\alpha g_1(y^*_\alpha).$$

y por tanto, g_1 es w^*-semicontinua inferiormente. Análogamente se prueba que g_2 también lo es.

Consideremos ahora $y^* \in B_{Y^*}$. Entonces tenemos que

$$g_1(y^*) - g_2(y^*) = y^*y - (\hat{h}_y(y^*) - \hat{h}_y(-y^*)) =$$

$$= y^*y - (y^* - py^*)(y) = py^*(y).$$

Por último, sea $y^* \in B_{Y^*}$. Al ser $\hat{h}_y \geq 0$, se tiene que

$$g_1(y^*) + g_2(y^*) = \frac{1}{s} - (\hat{h}_y(y^*) + \hat{h}_y(-y^*)) \leq \frac{1}{s}. \qquad \blacksquare$$

La última etapa comienza donde dejamos la anterior. De hecho, es una simple (pero crucial) observación a la demostración de [HWW, Th. I.2.10]. En dicha demostración se usa el concepto de M-ideal únicamente para llegar a la tesis de la proposición anterior; a partir de aquí nuestro resultado puede seguirse palabra por palabra de dicha prueba. Enunciamos pues esta versión revisitada como sigue

Proposición I.5.28 . *Sean X un p-ideal de Y, $y \in Y$ y $C > 0$. Supongamos que X es separable y que existen dos funciones positivas y semicontinuas inferiormente h_1, h_2 en (B_{Y^*}, w^*) tales que*

$$p^*y(y^*) = h_1(y^*) - h_2(y^*), \forall y^* \in B_{Y^*},$$

y

$$h_1(y^*) + h_2(y^*) \leq C, \forall y^* \in B_{Y^*}.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que

$$y = \sigma(Y, p(Y^*))\text{-}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

y

$$\sup_{|\varepsilon_n| \leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\| \leq (C + \varepsilon)\|y\|, \forall N \in \mathbb{N}.$$

Capítulo II

X ideal de su bidual.

A lo largo de este capítulo el espacio Y a considerar será el bidual del propio X. En tal caso, ya observamos (ver Ejemplo I.1.4) que X es siempre π_X-ideal de X^{**}. Nuestro objetivo es poner de manifiesto cómo la $M(r, s)$-desigualdad resulta ser una eficaz herramienta en el análisis cuantitativo de las propiedades de aquellos espacios de Banach que son M-ideales (de su bidual). Nuestro análisis viene a mostrar que algunas de las propiedades de los M-ideales siguen siendo válidas en el caso en que éstos verifiquen la $M(r, s)$-desigualdad, con $r + s > 1$, y que el "resto" *de las propiedades conocidas, salvo la proximinalidad y la generación por conjuntos débilmente compactos, son patrimonio exclusivo en unos casos para $r = 1$, y en otros, para $s = 1$.*

II.1 $M(r,\ s)$-desigualdad

En todo lo que sigue X será un espacio de Banach **real y no reflexivo.**

Definición II.1.1 . *Sean* $r, s \in]0,1]$. *Se dirá que* X **verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad** *si* X *es un* π_X*-ideal de* X^{**} *verificando la* $M(r,\ s)$*-desigualdad.*

En esta primera sección nos ocuparemos de poner de relieve qué propiedades de los M-ideales son satisfechas por los espacios de Banach que verifican la $M(r,\ s)$-desigualdad con r y s arbitrarios, o en todo caso, con $r + s > 1$.

Para un mejor análisis de las propiedades de los M-ideales, necesitaremos a veces un ambiente menos restrictivo incluso que el que supone la $M(r,\ s)$-desigualdad. Con este fin fijaremos la siguiente notación.

Considérense las siguientes desigualdades:

(i) $\|\pi_X x^{***}\| < \|x^{***}\|$, siempre que $x^{***} \neq \pi_X x^{***}$.

(ii) $\|I_{X^{***}} - 2\pi_X\| \leq 1$.

(iii) $\|I_{X^{***}} - \pi_X\| \leq 1$.

(iv) $\|x^{***} - \pi_X x^{***}\| < \|x^{***}\|$, siempre que $\pi_X x^{***} \neq 0$.

Se dirá que X es un **HB-subespacio** (resp. **u-ideal canónico**, resp. **U^*-espacio**) si X verifica simultáneamente las desigualdades (i) y (iii) (resp. (ii), resp. (iv)).

Diremos que X verifica una **π-propiedad** si verifica alguna de las desigualdades anteriores.

Obsérvese que X es un u-ideal canónico si, y sólo si,

$$\|x^* + x^\perp\| = \|x^* - x^\perp\|, \forall x^* \in X^*, \forall x^\perp \in X^\perp.$$

Nuestros primeros resultados aseguran la estabilidad de estos conceptos.

Proposición II.1.2. *Sea* $1 < p < +\infty$. *Si* X *verifica una* π*-propiedad, entonces* $l_p(X)$ *la verifica igualmente.*

Demostración. Comenzamos probando la siguiente afirmación: "*Si* q *es una proyección de norma uno en un espacio de Banach* Z *tal que*

$$B_Z \subseteq \mathrm{co}(B_{q(Z)} \cup \mathrm{Ker}\, q),$$

entonces

$$B_{l_p(Z)} \subseteq \mathrm{co}(B_{l_p(q(Z))} \cup l_p(\mathrm{Ker}\, q))".$$

En efecto, es fácil probar (ver Ejemplo I.1.5) que la hipótesis sobre Z equivale a que $\|qz\| < \|z\|$, siempre que $qz \neq z$.

Sea $\varphi = (x_n) \in B_{l_p(Z)}$. Por hipótesis existen tres sucesiones $\{\alpha_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ en $[0,1]$, $B_{q(Z)}$ y $\mathrm{Ker}\, q$ respectivamente, tales que

$$x_n = \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n) z_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que

$$\lambda = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \|y_n\|)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \|qx_n\|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_p \leq 1.$$

Si $\lambda = 0$, entonces $\alpha_n y_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, y por tanto

$$\varphi = ((1-\alpha_n)z_n) \in l_p(\mathrm{Ker}\, q).$$

Si $\lambda = 1$, entonces $\|(x_n)\|_p = \|(qx_n)\|_p$, y dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|qx_n\| \leq \|x_n\|$, se deduce que $\|x_n\| = \|qx_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$, luego por hipótesis, $qx_n = x_n$, esto es, $\varphi \in B_{l_p(q(Z))}$.

Supongamos pues que $0 < \lambda < 1$. En tal caso, basta tomar $\varphi_1 \in B_{l_p(q(Z))}$ y $\varphi_2 \in l_p(\mathrm{Ker}\, q)$ definidos por

$$\varphi_1(n) = \lambda^{-1}\alpha_n y_n \text{ y } \varphi_2(n) = (1-\lambda)^{-1}(1-\alpha_n)z_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

ya que entonces $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$.

Sea ahora $Y = l_p(X)$. Si X es un HB-subespacio (resp. U^*-espacio), entonces $B_{X^{***}} \subseteq \mathrm{co}(X^\perp \cup B_{X^*})$ (resp. $B_{X^{***}} \subseteq \mathrm{co}(B_{X^\perp} \cup X^*)$) (ver al respecto la interpretación geométrica hecha en el capítulo I). Por tanto, por la afirmación anterior, tomando $q = \pi_X$ (resp. $q = I_{X^{***}} - \pi_X$), y teniendo en cuenta que

$$\pi_Y(\varphi_n) = (\pi_X\varphi_n), \forall(\varphi_n) \in Y^{***},$$

obtenemos que

$$B_{Y^{***}} \subseteq \mathrm{co}(Y^\perp \cup B_{Y^*}) \text{ (resp. } B_{Y^{***}} \subseteq \mathrm{co}(B_{Y^\perp} \cup Y^*)).$$

Finalmente, obsérvese que si $\|I_{X^{***}} - \pi_X\| \leq 1$, entonces se tiene $\|I_{Y^{***}} - \pi_Y\| \leq 1$.

La demostración para u-ideales canónicos es similar; basta para ello tener en cuenta que si $\|x_n^* + x_n^\perp\| = \|x_n^* - x_n^\perp\|, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|\varphi - 2\pi_Y\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p,$$

donde $\varphi = (x_n^* + x_n^\perp)$, con $x_n^* \in X^*, x_n^\perp \in X^\perp, \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

Obsérvese que nada se afirma con respecto a la $M(r,\, s)$-desigualdad. De hecho, veremos más adelante (ver ejemplo II.2.18), que ésta no es estable para l_p-sumas. Por contra, la estabilidad para subespacios o cocientes sí es común para ambos tipos de propiedad, tal como vemos en la siguiente

Proposición II.1.3. *Todo subespacio cerrado o cociente de X verificando la $M(r,\, s)$-desigualdad (resp. una π-propiedad) verifica también la $M(r,\, s)$-desigualdad (resp. idéntica π-propiedad).*

Demostración. Sea Z un subespacio cerrado de X. Basta observar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^{***} & \xrightarrow{\pi_X} & X^{***} \\ i^{***} \downarrow & & \downarrow i^{***} \\ Z^{***} & \xrightarrow{\pi_Z} & Z^{***} \end{array}$$

Donde $i : Z \longrightarrow X$ es el operador inclusión. Obviamente, $\operatorname{Ker} i^{***} = Z^{\perp\perp\perp}$, i^{***} es sobreyectiva y para cada $x^{***} \in X^{***}$ se tiene

$$\|i^{***}x^{***}\| = \|x^{***} + Z^{\perp\perp\perp}\|.$$

Sea $z^{***} \in Z^{***}$. Dado $x^{***} \in X^{***}$ tal que $z^{***} = i^{***}x^{***}$, se tiene en particular,

$$\|z^{***}\| = \|x^{***} + Z^{\perp\perp\perp}\|.$$

Sea $y^{***} \in P_{Z^{\perp\perp\perp}}(x^{***})$ (recuérdese que $Z^{\perp\perp\perp}$ es un subespacio proximinal de X^{***}). Entonces

$$\|z^{***}\| = \|x^{***} - y^{***}\| \geq$$

$$\geq r\|\pi_X(x^{***} - y^{***})\| + s\|(x^{***} - y^{***}) - \pi_X(x^{***} - y^{***})\| \geq$$

$$\geq r\|i^{***}\pi_X(x^{***} - y^{***})\| + s\|i^{***}((x^{***} - y^{***}) - \pi_X(x^{***} - y^{***}))\| =$$

$$= r\|\pi_Z i^{***}x^{***}\| + s\|i^{***}(x^{***} - y^{***}) - \pi_Z i^{***}(x^{***} - y^{***})\| =$$

$$= r\|\pi_Z z^{***}\| + s\|z^{***} - \pi_Z z^{***}\|.$$

Sea $p : X \longrightarrow X/Z$ la proyección canónica. El siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (X/Z)^{***} & \xrightarrow{\pi_{X/Z}} & (X/Z)^{***} \\ p^{***}\downarrow & & \downarrow p^{***} \\ X^{***} & \xrightarrow{\pi_X} & X^{***} \end{array}$$

Es sabido que $(X/Z)^{***} = Z^{\perp\perp\perp}$ y que podemos considerar p^{***} como la inclusión de $Z^{\perp\perp\perp}$ en X^{***}. Sea $\varphi \in (X/Z)^{***}$. Entonces

$$\|\varphi\| = \|p^{***}\varphi\| \geq r\|\pi_X p^{***}\varphi\| + s\|p^{***}\varphi - \pi_X p^{***}\varphi\| =$$

$$= r\|p^{***}\pi_{X/Z}(\varphi)\| + s\|p^{***}\varphi - p^{***}\pi_{X/Z}(\varphi)\| =$$

$$= r\|\pi_{X/Z}(\varphi)\| + s\|\varphi - \pi_{X/Z}(\varphi)\|.$$

La demostración para la π-propiedad es similar. ∎

El siguiente resultado muestra que además la $M(r,\ s)$-desigualdad viene determinada por los subespacios separables.

Proposición II.1.4. *Sean $r, s \in \,]0,1]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X verifica la $M(r, s)$-desigualdad.

(ii) Para cualesquiera $x \in X$, $\{x_n\}$ sucesión acotada en X, $x^{**} \in X^{**}$ w^*-valor adherente de $\{x_n\}$, y $\varepsilon > 0$, existe $u \in co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\|x + x^{**} - u\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}\|x^{**} + X\|\right\} + \varepsilon.$$

(iii) Para cualesquiera $x \in X$, $\{x_n\}$ sucesión acotada en X, y $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$, $u \in co\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, y $v \in co\{x_m : m \geq n+1\}$ tales que

$$\|x + v - u\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}M\right\} + \varepsilon,$$

donde $M := \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$.

(iv) Para cada $x^{**} \in X^{**}$, existe una red $\{x_\alpha\}$ en X con $\{x_\alpha\} \xrightarrow{w^*} x^{**}$ tal que

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|x + x^{**} - x_\alpha\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}\|x^{**} + X\|\right\}, \forall x \in X.$$

(v) Cada subespacio separable Y de X verifica la $M(r, s)$-desigualdad.

Demostración. La prueba de $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv') \Rightarrow (i)$ puede seguirse de [LORW, Prop. 2.7] (cf. [HWW, Prop. III.1.9 y Cor. III.1.10]) sin ninguna modificación, donde (iv') viene enunciado de la siguiente manera:

"Para cualesquiera $x \in X$ y $x^{**} \in X^{**}$, existe una red $\{x_\alpha\}$ en X con $\{x_\alpha\} \overset{w^*}{\to} x^{**}$ tal que

$$\overline{\lim_\alpha}\|x + x^{**} - x_\alpha\| \leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}\|x^{**} + X\|\right\}".$$

En dicha demostración también puede verse $(i) \Rightarrow (ii)$, aunque con ligerísimas modificaciones, tal como exponemos a continuación.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por reducción al absurdo: supongamos que

$$\|x + x^{**} - u\| > \alpha + \varepsilon, \forall u \in A,$$

donde $\alpha := \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}\|x^{**} + X\|\right\}$ y $A := \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in B_{X^{***}}$ tal que

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(x + x^{**} - u), \forall u \in A.$$

Por tanto, para cada $u \in A$, tenemos que

$$\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leq \pi_X\varphi(x) + (\varphi - \pi_X\varphi)(x^{**}) + \pi_X\varphi(x^{**} - u) \leq$$

$$\leq |\ \pi_X\varphi(x)\ | + |\ (\varphi - \pi_X\varphi)(x^{**})\ | + |\ \pi_X\varphi(x^{**} - u)\ | \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{r}\|x\|, \frac{1}{s}\|x^{**} + X\|\right\}(r\|\pi_X\varphi\| + s\|\varphi - \pi_X\varphi\|) + |\ \pi_X\varphi(x^{**} - u)\ | \leq$$

$$\leq \alpha\|\varphi\| + |\ \pi_X\varphi(x^{**} - u)\ | \leq \alpha + |\ \pi_X\varphi(x^{**} - u)\ |.$$

Como $|\ \pi_X\varphi(x^{**} - x_n)\ | < \frac{\varepsilon}{2}$, para n suficientemente grande, llegamos a una contradicción.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$ se estableció en la Proposición I.4.18 en un ambiente más general.

$(i) \Rightarrow (v)$ Se deduce de la hereditariedad de la $M(r, s)$-desigualdad (Proposición II.1.3).

$(v) \Rightarrow (iii)$ Basta tomar $Y := \overline{\text{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y tener en cuenta que $(i) \Rightarrow (iii)$. ∎

Recuérdese que nuestro objetivo es subrayar qué propiedades conocidas para los M-ideales son de hecho consecuencia de la $M(r, s)$-desigualdad para r y/ó s distintos de uno. Con este objeto, enunciamos a continuación algunas de estas propiedades.

Sea M un subespacio cerrado de X^*. Se llama **característica** de M,

$$r(M) = \max\left\{\mu \geq 0 : \mu B_{X^*} \subseteq \overline{B_M}^{w^*}\right\}.$$

Obviamente, $0 \leq r(M) \leq 1$, y es fácil probar que

$$r(M) = \inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_M} \{| x^* x |\}.$$

Se dice que M es un **subespacio normante** de X si para cada $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_M} \{| x^* x |\}.$$

Es claro que M es un subespacio normante de X si, y sólo si, $r(M) = 1$.

Sea $\{e_n\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{e_n\}$ es una **base Schauder** (o simplemente **base**) de X si cada $x \in X$ se puede expresar de forma única:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n,$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, y dicha serie converge en norma. Equivalentemente, si $\overline{\text{lin}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = X$ (supuesto que el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente), y existe una constante positiva M tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i e_i \right\|,$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, y $\lambda_i \in \mathbb{R}$. A la mínima de esas constantes se le llama **constante básica** de $\{e_n\}$, y se nota por $\nu(\{e_n\})$. Se dice que la base es **monótona** si su constante básica es uno.

$\{e_n\}$ es una **sucesión básica** si $\{e_n\}$ es una base del subespacio cerrado generado por $\{e_n\}$.

Si $\{e_n\}$ es una base de X, se llama **sucesión de funcionales asociados** a dicha base, a la sucesión $\{f_n\}$ en X^*, donde $f_n \in X^*$ son los únicos funcionales que verifican:

$$f_n e_m = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Los funcionales asociados verifican la siguiente expresión:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) e_n, \forall x \in X,$$

y además forman una sucesión básica en X^*. Si $\{f_n\}$ es una base de X^*, se dice que la base $\{e_n\}$ es una **base** *"shrinking"*.

Se dice que X es un **espacio de Asplund** si todo subespacio separable de X tiene dual separable (cf. [Di]).

Enunciamos a continuación las primeras propiedades de los espacios que verifican la $M(r,\,s)$-desigualdad.

Proposición II.1.5. *Sea M un subespacio cerrado propio de X^*. Si X verifica la $M(r,\,s)$-desigualdad, entonces, $r(M) \leq \frac{1}{r+s}$.*

Demostración. Este resultado es una versión revisitada de [HWW, Prop. III.3.9] (cf. [GS, Lemma 4.1]). En efecto:

En primer lugar obsérvese que si M_1, M_2 son subespacios cerrados de X^*, con $M_1 \subseteq M_2$, entonces $r(M_1) \leq r(M_2)$, y por tanto, se puede suponer que $M = \operatorname{Ker} F$, con $F \in S_{X^{**}}$. Sea $\varepsilon > 0$, y tómese $f \in X^*$ tal que

$$\|f\| = \frac{1}{r+s} + \varepsilon \text{ y } Ff > \frac{1}{r+s}.$$

Si $f \in \overline{B_{\operatorname{Ker} F}}^{w^*}$, existe una red $\{g_\lambda\}$ en $\operatorname{Ker} F \cap B_{X^*}$, w^*-convergente a f. Sea φ un valor adherente de $\{g_\lambda\}$ en $(B_{X^{***}}, w^*)$. En virtud de la w^*-continuidad de $(j_X)^*$, $(j_X)^*\varphi$ es un valor adherente de $\{g_\lambda\}$ en (B_{X^*}, w^*), y por tanto $\pi_X\varphi = f$ y $\varphi = f + (\varphi - \pi_X\varphi)$. Por otra parte, [illegible] $= 0$, luego $\varphi F = 0$, y por consiguiente, $(\varphi - \pi_X\varphi)(F) = -Ff$. En consecuencia,

$$\frac{1}{r+s} < Ff \leq | Ff | = | (\varphi - \pi_X\varphi)(F) | \leq$$

$$\leq \|\varphi - \pi_X\varphi\| \leq \frac{1}{s}(\|\varphi\| - r\|f\|) \leq \frac{1}{s}\left[1 - r\left(\frac{1}{r+s} + \varepsilon\right)\right],$$

y por tanto,

$$\frac{1}{r+s} < \frac{s - r\varepsilon(r+s)}{s(r+s)},$$

lo cual es una contradicción.

Recapitulando, hemos probado que para cada $\varepsilon > 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| \leq \frac{1}{r+s} + \varepsilon$ tal que $f \notin \overline{B_M}^{w^*}$, esto es, $r(M) \leq \frac{1}{r+s}$. ∎

Corolario II.1.6. *Si X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad, y $\{e_n\}$ es una sucesión básica en X tal que $\nu(\{e_n\}) < r + s$, entonces $\{e_n\}$ es* "shrinking".

Demostración. Podemos seguir sin variaciones la demostración de [HWW, Cor. III.3.10] (cf. [GS, Cor. 4.4]). En efecto, consideremos $Y = \overline{\text{lin}}\{e_1, e_2, ...\}$. Es claro que $\{e_n\}$ es una base de Y y que éste verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad (ver Proposición II.1.3). Si $\{f_n\}$ es la sucesión de funcionales asociados y $M = \overline{\text{lin}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces, en virtud de [Du, Prop. 6.3],

$$r(M) \geq \frac{1}{\nu(\{e_n\})} > \frac{1}{r+s},$$

y por tanto, en virtud de la proposición anterior, $M = Y^*$. ∎

Teorema II.1.7. *Si X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad con $r + s > 1$, entonces X^* no tiene subespacios propios normantes y X es un espacio de Asplund.*

Demostración. En efecto, sea M un subespacio propio de X^*. Por la Proposición II.1.5, $r(M) \leq \frac{1}{r+s} < 1$. En definitiva, X^* no contiene subespacios propios normantes.

Por otro lado, sea Y el subespacio (separable) de X generado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por la Proposición II.1.3, Y verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad, por lo que su dual no contiene subespacios propios normantes, en particular, $Y^* = \overline{\text{lin}}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, donde $x_n^* \in S_{X^*}$ y es tal que $x_n^* x_n = \|x_n\|$. ∎

Nota. Téngase en cuenta que si X es separable y $r+s>1$, entonces, en virtud del teorema anterior, X^* es separable, y por tanto $B_{X^{**}}$ es w^*-metrizable. Usando un argumento estándard (ver por ejemplo [GKS, Prop. 4.3]), se pueden cambiar redes por sucesiones en el apartado (iv) de la Proposición II.1.4.

Vayamos ahora con un primer bloque de consecuencias de esta proposición. Previamente recordemos algunos conceptos.

Se dice que X tiene la **propiedad de extensión única (UEP)** si para cada isomorfismo isométrico U de X, el único operador lineal y continuo T de X^{**} en sí mismo, tal que $T|_X = U$ con $\|T\| \leq 1$ es U^{**}.

Dado $x^* \in B_{X^*}$, se dice que es un **punto w^*-fuertemente expuesto de B_{X^*}** si existe $x \in B_X$ con $x^*x = 1$ haciendo cierta la siguiente implicación:

$$\left.\begin{array}{c} x_n^* \in B_{X^*}, \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n^* x \to 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \|x_n^* - x^*\| \to 0.$$

Notaremos por $\{w^*\text{-Fexp } B_{X^*}\}$ al conjunto de todos los puntos w^*-fuertemente expuestos de B_{X^*}.

Corolario II.1.8. *Si X verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r+s>1$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) X no contiene una copia isomorfa de l_1.

(ii) X tiene la UEP.

(iii) $X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-Fexp } B_{X^*}\}$.

(iv) *Si Z es un espacio de Banach con $X \subset Z \subseteq X^{**}$, no existe ninguna proyección de norma uno de Z sobre X.*

(v) *Todo subespacio o cociente de X que sea isométrico a un espacio dual es reflexivo.*

Demostración. (i) Se deduce del teorema anterior y de que l_1 no es un espacio de Asplund.

(ii) Es consecuencia del hecho de que X^* no tiene subespacios normantes (ver [GS, Prop. 2.5]).

(iii) En primer lugar, obsérvese que si A es un subconjunto de la esfera unidad de X^* tal que $B_{X^*} = \overline{\text{co}}^{w^*}(A)$, entonces $\overline{\text{lin}}^{\|\cdot\|} A$ es un subespacio normante de X^*. Por otra parte, es sabido (ver [Ph2, Th. 5.12]) que si X es un espacio de Asplund, entonces $B_{X^*} = \overline{\text{co}}^{w^*}\{w^*\text{-Fexp } B_{X^*}\}$. En particular, $\overline{\text{lin}}\{w^*\text{-Fexp } B_{X^*}\}$ es un subespacio normante de X, luego coincide con el propio X^* en virtud del teorema anterior.

(iv) Sea q una proyección de norma uno. Para cada $z \in Z \setminus X$, se tiene que

$$q(z) \in \bigcap_{x \in X} B_X(x, \|z - x\|),$$

lo cual está en contradicción (ver [GS, Lemma 2.4]) de nuevo con el hecho de que X^* no contiene subespacios propios normantes.

(v) Sea Z un subespacio o un cociente de X. Por la Proposición II.1.3, Z también verifica la $M(r, s)$-desigualdad. Entonces, si Z fuese isométrico a un espacio dual, existiría una proyección contractiva, lo cual está en contradicción con el apartado anterior. ∎

Conviene comentar ahora que las propiedades exhibidas en el corolario anterior no son más que la punta de un iceberg. Así por ejemplo, como consecuencia del apartado (i) y usando un resultado de G. Godefroy [G, Th. 1], obtendríamos que π_{X^*} es la única proyección de norma uno de $X^{(iv)}$ sobre X^{**}. Esta propiedad está reflejada igualmente en [HWW, Prop. III.2.1], pero la demostración allí señalada no es generalizable para $r < 1$.

Finalizamos esta sección con una versión cuantitativa del apartado (v) del corolario anterior, que está inspirada en [L2, Th. 2.4]. Para ello necesitamos la siguiente adaptación del lema principal en [L2, Lemma 2.3].

Lema. *Sean $r, s \in]0,1]$ tales que $1 < r+\frac{s}{2}$ y $c \in \left]\frac{1}{r+\frac{s}{2}}, 1\right[$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existen dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{f_n\}$ en B_X y B_{X^*}, respectivamente, tales que*

(i) $f_m x_n \geq c$ si $m \geq n$

(ii) $| f_m x_n | \leq \varepsilon$ si $m < n$,

entonces X no verifica la $M(r,s)$-desigualdad.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$c\left(r+\frac{s}{2}\right) > 1+\varepsilon\left(1+\frac{s}{2}\right),$$

y sean $\{x_n\}$ y $\{f_n\}$ sucesiones sucesiones en B_X y B_{X^*} que verifican respectivamente (i) y (ii). Tomemos $f \in B_{X^*}$ un w^*-valor adherente de $\{f_n\}$ y $x^{**} \in B_{X^{**}}$ un w^*-valor adherente de $\{x_n\}$. Usando ahora (i) y (ii) se tiene

$$fx_n \geq c, \forall n \in \mathbb{N} \ , \ x^{**}f \geq c \ , \ | x^{**}f_n | \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En virtud de la demostración de la Proposición I.4.21, si X verificase la $M(r, s)$-desigualdad, existiría $y \in X$ tal que

$$\max \|sx^{**} \pm rx_1 - y\| < 1 + \varepsilon,$$

por lo que para cada natural n

$$| sx^{**}f_n \pm rf_nx_1 - f_ny | < 1 + \varepsilon.$$

Luego,

$$| f_n(y \pm rx_1) | < 1 + (1+s)\varepsilon,$$

y por consiguiente,

$$| f_ny | \leq 1 + (1+s)\varepsilon - rc,$$

y tomando límite en n,

$$| fy | \leq 1 + (1+s)\varepsilon - rc.$$

Por otra parte se tiene que

$$| sx^{**}f \pm rfx_1 - fy | < 1 + \varepsilon,$$

luego,

$$| sx^{**}f - fy | < 1 + \varepsilon - rc.$$

En definitiva tenemos que

$$sc \leq | sx^{**}f | \leq | sx^{**}f - fy | + | fy | < 2 + (2+s)\varepsilon - 2rc,$$

esto es,

$$c\left(r + \frac{s}{2}\right) < 1 + \left(1 + \frac{s}{2}\right)\varepsilon,$$

lo cual es una contradicción. ∎

Recordemos que la **distancia de Banach-Mazur** entre dos espacios de Banach Y y Z se define como:

$$d(Y, Z) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|;\ T : Y \longrightarrow Z \text{ isomorfismo}\},$$

y enunciemos ya la mencionada versión cuantitativa.

Proposición II.1.9. *Sea Y un subespacio cerrado de X, y supongamos que X verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$. Si existe un espacio Z tal que $d(Y, Z^*) < r + \frac{s}{2}$, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Sean $T : Y \longrightarrow Z^*$ un operador lineal, continuo e inyectivo con

$$\|T\|\|T^{-1}\| < r + \frac{s}{2},$$

y fijemos d con

$$\frac{\|T\|\|T^{-1}\|}{r + \frac{s}{2}} < d < 1.$$

Si Y no es reflexivo, aplicando un resultado de James y Klee (ver por ejemplo, [Di, Chapter I, Th. 2]), existen dos sucesiones $\{z_n^*\}$ en B_{Z^*} y $\{z_n\}$ en B_Z tales que

(i) $z_n^* z_m = d$ si $m \geq n$,

(ii) $z_n^* z_m = 0$ si $m < n$.

Ahora, aplicando el lema anterior a $x_n = \frac{T^{-1} z_n^*}{\|T^{-1}\|}$ y $f_n = \frac{\widetilde{T^*} z_n}{\|T\|}$ (donde $\widetilde{T^*}(z_n)$ es una extensión equinórmica de $T^* z_n$ a X), se deduce que X no verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad, lo cual contradice la hipótesis hecha sobre X. ∎

II.2 Ejemplos

A lo largo de esta sección mostraremos distintas técnicas que nos permitirán construir espacios verificando la $M(r,\, s)$-desigualdad, y construiremos algunos ejemplos con la ayuda de éstas.

Obsérvese que en esta sección, de hecho en este capítulo, no haremos referencia alguna a los $|\cdot|$-ideales absolutos que tan buen juego dieron en el primer capítulo. La razón de este aparente olvido está en el hecho de que no existen más espacios de Banach que sean $|\cdot|$-ideales absolutos de su bidual que los M-ideales [CMPR].

El siguiente resultado proporciona una primera técnica para la construcción de espacios que verifican la $M(r,\, s)$-desigualdad.

Proposición II.2.10 . *Sean* $\{e_n\}$ *una base* "shrinking" *en* X *y* $r, s \in]0,1]$. *Para cada* $x \in X$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *se define*

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ P^n x = x - P_n x = \sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i e_i,$$

donde $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e_n$. *Si para cualesquiera* $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_X$ *y* $x^{**} \in B_{X^{**}}$, *se tiene que*

$$\overline{\lim_m} \|rP_n x + sP^{m**}x^{**}\| \leq 1,$$

entonces X *verifica la* $M(r, s)$*-desigualdad.*

Demostración. En virtud de la Proposición I.3.15, tomando $Y = X^{**}$ y $V_n = P_n{}^{**}$, X es un p-ideal de X^{**}, donde la proyección p viene dada por la expresión

$$p\varphi(x^{**}) = \lim_n \varphi(P_n{}^{**}x^{**}), \forall \varphi \in X^{***}, x^{**} \in X^{**}.$$

Por ser $\{e_n\}$ una base *"shrinking"* se tiene que

$$\lim_n \varphi(P_n{}^{**}x^{**}) = \pi_X \varphi(x^{**}), \forall \varphi \in X^{***}, \forall x^{**} \in X^{**}.$$

Luego $p = \pi_X$, esto es, X verifica la $M(r, s)$-desigualdad. ∎

Nota. Obsérvese que la demostración anterior permite obtener, aún sin la condición de *"shrinking"*, que X es un p-ideal verificando la $M(r, s)$-desigualdad, eso sí, no podemos asegurar que la proyección asociada sea la proyección canónica. Recuérdese por otra parte que si X satisface la UEP (en particular si X^* no tiene subespacios propios normantes), entonces π_X es la única proyección en X^{***} de norma uno cuyo núcleo es $X^{\perp}$ (ver [HWW, Lemma III.2.4]). En tal caso, puede sustituirse en la proposición anterior la condición de *"shrinking"* por la de que X satisface la UEP.

Como buque insignia de nuestra memoria consideramos la siguiente renormación del espacio de James.

Ejemplo II.2.11. *Para $\delta > 0$, sea J_δ el espacio de todas las sucesiones nulas de números reales $\{\alpha_n\}$ verificando*

$$\sup\left\{(\delta\alpha_{k_1} - \alpha_{k_2})^2 + \sum_{i=2}^{n}(\alpha_{k_i} - \alpha_{k_{i+1}})^2 + (\alpha_{k_{n+1}} - \delta\alpha_{k_1})^2\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

donde el supremo es tomado sobre todo $n \in \mathbb{N}$ y sobre toda sucesión finita y creciente $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$ en $\mathbb{N}$, con norma $\|\cdot\|_\delta$ definida por dicho supremo. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:

(i) Para cada $\delta > 0$, $(J_\delta, \|\cdot\|_\delta)$ es isomorfo al espacio de James.

(ii) Para $\delta > \sqrt{2}$, $(J_\delta, \|\cdot\|_\delta)$ verifica la $M(t,\,1)$-desigualdad para todo $t > 0$ tal que

$$\max\left\{\frac{(1+\delta t)^2}{\delta^2}, \frac{(1+\delta t)^2 + (1+t)^2 + 2(\delta t)^2}{2\delta^2}\right\} < \frac{1}{2}.$$

Demostración. (i) La demostración es trivial.

(ii) Puede seguirse como en [Du, Properties I and II, pp. 81-82] que la sucesión $\{e_n\}$, donde $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$, es una base monótona y *"shrinking"*. Por [Du, Prop. 6.21], podemos identificar J_δ^{**} con el espacio de las sucesiones de números reales convergentes $\beta = \{\beta_n\}$ que verifican

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i \right\|_\delta \right\} < +\infty,$$

con norma $\|\beta\|_\delta$ definida por dicho supremo. En lo que sigue, utilizaremos la siguiente notación: dado $l \in \mathbb{N}$, se define $\beta^{(l)} = \left\{\beta_n^{(l)}\right\}$, donde

$$\beta_n^{(l)} = \begin{cases} \beta_n & \text{si} \quad n \leq l \\ 0 & \text{si} \quad n > l \end{cases}$$

Con dicha notación, es claro que para $\beta = \{\beta_n\} \in J_\delta^{**}$ se tiene

$$\|\beta\|_\delta = \sup \left\{ \left(\delta\beta_{k_1}^{(l)} - \beta_{k_2}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} \left(\beta_{k_i}^{(l)} - \beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{k_{n+1}}^{(l)} - \delta\beta_{k_1}^{(l)}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

donde el supremo es tomado sobre $n, l \in \mathbb{N}$, y sucesiones finitas y crecientes $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$ en $\mathbb{N}$.

Por la Proposición II.2.10 es suficiente probar que para t como en el enunciado, y para $\alpha = \{\alpha_n\} \in J_\delta$ y $\beta = \{\beta_n\} \in J_\delta^{**}$, ambos de norma uno, y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\overline{\lim_m} \|tP_n\alpha + P^{m**}\beta\|_\delta \leq 1.$$

Es obvio que para cualesquiera $n, h \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$2(\delta\alpha_n - \alpha_{n+h})^2 \leq 1 \ , \ 2(\delta\beta_n - \beta_{n+h})^2 \leq 1,$$

y

$$| \, 2(\delta\alpha_n)^2 \, |, | \, 2(\delta\beta_n)^2 \, | \leq 1.$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como $\|\beta\|_\delta = 1$, existen $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ y $j_1 < \cdots < j_{n_0+1}$ en $\mathbb{N}$ tales que para la correspondiente suma

$$s_0 := \left(\delta\beta_{j_1}^{(m_0)} - \beta_{j_2}^{(m_0)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n_0}\left(\beta_{j_i}^{(m_0)} - \beta_{j_{i+1}}^{(m_0)}\right)^2 + \left(\beta_{j_{n_0+1}}^{(m_0)} - \delta\beta_{j_1}^{(m_0)}\right)^2$$

se verifica

$$s_0 > 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

Afirmamos que para cada $l \in \mathbb{N}$ con $l > \max\{m_0, j_{n_0+1}\}$, y para cada sucesión finita $h_p < \cdots < h_{p+q}$ con $h_p > j_{n_0+1}$, se verifica que

$$\sum_{i=p}^{p+q-1}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

En efecto, sea $h_p < \cdots < h_{p+q}$ una sucesión finita con $h_p > j_{n_0+1}$. Supongamos en primer lugar que $m_0 < j_{n_0+1}$, y llamemos:

$$k = \min\{i \in \{1, 2, ..., n_0 + 1\} : j_i > m_0\}.$$

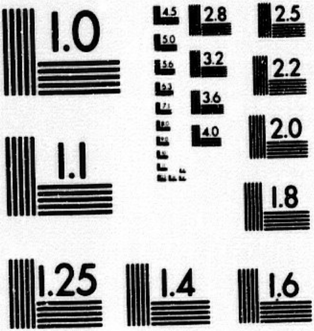
Nótese que $k > 1$, ya que $k = 1$, implica $s_0 = 0$, lo que contradice (1).

Si $k = 2$, entonces $s_0 = 2(\delta\beta_{j_1})^2$. Tomemos $h_{p+q+1} \in \mathbb{N}$ con $h_{p+q+1} > \max\{l, h_{p+q}\}$, y consideremos la sucesión finita creciente

$$j_1 < h_p < \cdots < h_{p+q} < h_{p+q+1}.$$

Tenemos que

$$\left(\delta\beta_{j_1} - \beta_{h_p}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=p}^{p+q}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{h_{p+q+1}}^{(l)} - \delta\beta_{j_1}\right)^2 \leq \|\beta\|_\delta^2 = 1.$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como $\|\beta\|_\delta = 1$, existen $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ y $j_1 < \cdots < j_{n_0+1}$ en $\mathbb{N}$ tales que para la correspondiente suma

$$s_0 := \left(\delta\beta_{j_1}^{(m_0)} - \beta_{j_2}^{(m_0)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n_0}\left(\beta_{j_i}^{(m_0)} - \beta_{j_{i+1}}^{(m_0)}\right)^2 + \left(\beta_{j_{n_0+1}}^{(m_0)} - \delta\beta_{j_1}^{(m_0)}\right)^2$$

se verifica

$$s_0 > 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

Afirmamos que para cada $l \in \mathbb{N}$ con $l > \max\{m_0, j_{n_0+1}\}$, y para cada sucesión finita $h_p < \cdots < h_{p+q}$ con $h_p > j_{n_0+1}$, se verifica que

$$\sum_{i=p}^{p+q-1}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

En efecto, sea $h_p < \cdots < h_{p+q}$ una sucesión finita con $h_p > j_{n_0+1}$. Supongamos en primer lugar que $m_0 < j_{n_0+1}$, y llamemos:

$$k = \min\{i \in \{1, 2, ..., n_0 + 1\} : j_i > m_0\}.$$

Nótese que $k > 1$, ya que $k = 1$, implica $s_0 = 0$, lo que contradice (1).

Si $k = 2$, entonces $s_0 = 2(\delta\beta_{j_1})^2$. Tomemos $h_{p+q+1} \in \mathbb{N}$ con $h_{p+q+1} > \max\{l, h_{p+q}\}$, y consideremos la sucesión finita creciente

$$j_1 < h_p < \cdots < h_{p+q} < h_{p+q+1}.$$

Tenemos que

$$\left(\delta\beta_{j_1} - \beta_{h_p}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=p}^{p+q}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{h_{p+q+1}}^{(l)} - \delta\beta_{j_1}\right)^2 \leq \|\beta\|_\delta^2 = 1.$$

Desarrollando el miembro izquierdo obtenemos

$$\left(\delta\beta_{j_1} - \beta_{h_p}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=p}^{p+q-1} \left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{h_{p+q}}^{(l)}\right)^2 + (\delta\beta_{j_1})^2 \le 1.$$

Luego

$$\sum_{i=p}^{p+q-1} \left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 \le 1 - (\delta\beta_{j_1})^2 =$$

$$= 1 - \frac{s_0}{2} < 1 - \frac{1}{2}(1-\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Si $k > 2$, se tiene entonces que

$$s_0 = (\delta\beta_{j_1} - \beta_{j_2})^2 + \sum_{i=2}^{k-2} (\beta_{j_i} - \beta_{j_{i+1}})^2 + (\beta_{j_{k-1}})^2 + (\delta\beta_{j_1})^2,$$

y considerando la sucesión finita

$$j_1 < \cdots < j_{k-1} < h_p < \cdots < h_{p+q} < h_{p+q+1},$$

con $h_{p+q+1} > l$, que nos lleva a

$$(\delta\beta_{j_1} - \beta_{j_2})^2 + \sum_{i=2}^{k-2} (\beta_{j_i} - \beta_{j_{i+1}})^2 + \left(\beta_{j_{k-1}} - \beta_{h_p}^{(l)}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=p}^{p+q-1} \left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + (\beta_{h_{p+q}})^2 + (\delta\beta_{j_1})^2 \le \|\beta\|_\delta^2 = 1,$$

deducimos que:

$$\sum_{i=p}^{p+q-1} \left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 \le 1 - s_0 + (\beta_{j_{k-1}})^2 < \frac{1}{2\delta^2} + \varepsilon < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Supongamos finalmente que $m_0 \ge j_{n_0+1}$. En este caso

$$s_0 = (\delta\beta_{j_1} - \beta_{j_2})^2 + \sum_{i=2}^{n_0} (\beta_{j_i} - \beta_{j_{i+1}})^2 + (\beta_{j_{n_0+1}} - \delta\beta_{j_1})^2,$$

y considerando la sucesión finita

$$j_1 < \cdots < j_{n_0+1} < h_p < \cdots < h_{p+q},$$

que nos lleva a

$$(\delta\beta_{j_1} - \beta_{j_2})^2 + \sum_{i=2}^{n_0}(\beta_{j_i} - \beta_{j_{i+1}})^2 + \left(\beta_{j_{n_0+1}} - \beta_{h_p}^{(l)}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=p}^{p+q-1}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{h_{p+q}}^{(l)} - \delta\beta_{j_1}\right)^2 \leq \|\beta\|_\delta^2 = 1,$$

obtenemos que

$$\sum_{i=p}^{p+q-1}\left(\beta_{h_i}^{(l)} - \beta_{h_{i+1}}^{(l)}\right)^2 \leq 1 - s_0 + (\beta_{j_{n_0+1}} - \delta\beta_{j_1})^2 < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \max\{n, m_0, j_{n_0+1}\}$, y denotemos por $\gamma = \{\gamma_n\}$ a la sucesión

$$tP_n\alpha + P^{m**}\beta = (t\alpha_1, t\alpha_2, ..., t\alpha_n, 0, ..., 0, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, ...).$$

Dados $l \in \mathbb{N}$ y una sucesión finita $k_1 < k_2 < \cdots < k_{p+1}$ en $\mathbb{N}$ denotemos por

$$S := \left(\delta\gamma_{k_1}^{(l)} - \gamma_{k_2}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{p}\left(\gamma_{k_i}^{(l)} - \gamma_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\gamma_{k_{p+1}}^{(l)} - \delta\gamma_{k_1}^{(l)}\right)^2.$$

Si $l \leq m$ ó $k_{p+1} \leq m$, entonces,

$$S = \left(\delta\alpha_{k_1}^{(n)} - \alpha_{k_2}^{(n)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{p}\left(\alpha_{k_i}^{(n)} - \alpha_{k_{i+1}}^{(n)}\right)^2 + \left(\alpha_{k_{p+1}}^{(n)} - \delta\alpha_{k_1}^{(n)}\right)^2 \leq$$

$$\leq t^2\|\alpha\|_\delta^2 = t^2 \leq 1+\varepsilon.$$

Supongamos por tanto que $l \geq m+1$ y que $k_{p+1} \geq m+1$. Si $k_1 \geq m+1$, entonces

$$S = \left(\delta\beta_{k_1}^{(l)} - \beta_{k_2}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{p}\left(\beta_{k_i}^{(l)} - \beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)} - \delta\beta_{k_1}^{(l)}\right)^2 \leq \|\beta\|_\delta^2 = 1 \leq 1+\varepsilon.$$

Si $n < k_1 \leq m$, y llamamos $r = \min\{i \in \{1,...,p+1\} : k_i \geq m+1\}$, se tiene que

$$S = (\beta_{k_r})^2 + \sum_{i=r+1}^{p+1}\left(\beta_{k_i}^{(l)} - \beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2} + \varepsilon < 1+\varepsilon.$$

Si $k_1 \leq n$, y llamamos $s = \max\{i \in \{1,...,p+1\} : k_i \leq n\}$, en el caso $s=1$ y $r=2$, tenemos que

$$S = \left(\delta t\alpha_{k_1} - \beta_{k_2}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=2}^{p}\left(\beta_{k_i}^{(l)} - \beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)} - \delta t\alpha_{k_1}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{(1+\delta t)^2}{2\delta^2} + \frac{1}{2} + \frac{(1+\delta t)^2}{2\delta^2} + \varepsilon \leq 1+\varepsilon.$$

Si $s=1$ y $r>2$, entonces

$$S = (\delta t\alpha_{k_1})^2 + \left(\beta_{k_r}^{(l)}\right)^2 + \sum_{i=r}^{p}\left(\beta_{k_i}^{(l)} - \beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2 + \left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)} - \delta t\alpha_{k_1}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{(\delta t)^2}{2\delta^2} + \frac{1}{2\delta^2} + \frac{1}{2} + \frac{(1+\delta t)^2}{2\delta^2} + \varepsilon \leq 1+\varepsilon.$$

Si $s>1$ y $r=s+1$, se tiene

$$S = (\delta t\alpha_{k_1} - t\alpha_{k_2})^2 + \sum_{i=2}^{s-1}(t\alpha_{k_i} - t\alpha_{k_{i+1}})^2 + \left(t\alpha_{k_s} - \beta_{k_{s+1}}^{(l)}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=s+1}^{p}\left(\beta_{k_i}^{(l)}-\beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2+\left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)}-\delta t\alpha_{k_1}\right)^2\leq$$

$$\leq t^2+\frac{(1+t)^2}{2\delta^2}+\frac{1}{2}+\frac{(1+\delta t)^2}{2\delta^2}+\varepsilon\leq 1+\varepsilon.$$

Si $s>1$ y $r>s+1$, entonces

$$S=(\delta t\alpha_{k_1}-t\alpha_{k_2})^2+\sum_{i=2}^{s-1}(t\alpha_{k_i}-t\alpha_{k_{i+1}})^2+(t\alpha_{k_s})^2+\left(\beta_{k_r}^{(l)}\right)^2+$$

$$+\sum_{i=r}^{p}\left(\beta_{k_i}^{(l)}-\beta_{k_{i+1}}^{(l)}\right)^2+\left(\beta_{k_{p+1}}^{(l)}-\delta t\alpha_{k_1}\right)^2\leq$$

$$\leq t^2+\frac{1}{2\delta^2}+\frac{1}{2}+\frac{(1+\delta t)^2}{2\delta^2}+\varepsilon\leq 1+\varepsilon.$$

Por tanto, hemos probado que

$$\overline{\lim_m}\|tP_n\alpha+P^{m**}\beta\|\leq 1. \qquad \blacksquare$$

Nota. El espacio de James desvanece toda sospecha de que cualquier espacio de Banach verificando la $M(r,\,s)$-desigualdad, puede renormarse de manera que sea un M-ideal de un cierto espacio, ya que como sabemos los subespacios que son M-ideales (de un espacio) contienen a c_0, y ésto no ha lugar en el espacio de James.

El ejemplo anterior se puede enriquecer un poco más. Para ello, exhibimos una técnica que permite obtener renormaciones que conservan la $M(r,\,s)$-desigualdad. Dicha técnica es una simple revisión de la desarrollada para el caso $r=s=1$ por P. Harmand y T.S.S.R.K. Rao (ver por ejemplo [HWW, Prop. III.2.11]).

Proposición II.2.12. *Supongamos que X verifica la $M(r, s)$-desigualdad. Sea Y otro espacio de Banach y $T : Y \longrightarrow X$ un operador débilmente compacto. Entonces la aplicación*

$$x^* \longrightarrow \|x^*\| + \|T^* x^*\|,$$

define una norma dual $|\cdot|^*$ en X^* para la cual $(X, |\cdot|)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad.

Demostración. En virtud de la débil compacidad (ver por ejemplo [DSc, Th. VI.4.8]) y la w^*-continuidad de T^*, se tiene que $T^{***} = \pi_Y T^{***}$ $(= T^{***}\pi_X)$, en particular, para cada $x^\perp \in X^\perp$,

$$| x^\perp |^{***} = \|x^\perp\| + \|T^{***} x^\perp\| = \|x^\perp\|.$$

A partir de aquí, puede seguirse sin apenas variaciones la demostración del caso $r = s = 1$. ∎

Ejemplo II.2.13. *Sea $r^2 < \frac{1}{3}$. Existe una norma equivalente $|\cdot|$ en el espacio de James J tal que $(J, |\cdot|)^*$ es estrictamente convexo (todo punto de la esfera unidad es un punto extremo de la bola unidad), y $(J, |\cdot|)$ verifica la $M(r, 1)$-desigualdad.*

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta^2 > 2$ y

$$\max\left\{\frac{(1+\delta r)^2}{\delta^2}, \frac{(1+\delta r)^2 + (1+r)^2 + 2(\delta r)^2}{2\delta^2}\right\} < \frac{1}{2}.$$

Como vimos en el Ejemplo II.2.11, $(J_\delta, \|\cdot\|_\delta)$ verifica la $M(r, 1)$-desigualdad. Basta pues tomar en la proposición anterior $X = (J_\delta, \|.\|_\delta)$, $Y = l_2$, y T la inclusión de l_2 en X (cf. [Du]). ∎

A veces en lugar de emplear la Proposición II.2.10, es más cómodo usar la siguiente adaptación:

Corolario II.2.14. *Sean $\{e_n\}$ una base* "shrinking" *en X y $r, s \in]0,1]$. Si para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B_X$ se verifica que*

$$\overline{\lim_m} \sup_{y \in B_X} \|rP_n x + sP^m y\| \leq 1,$$

entonces X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad.

Demostración. Usaremos la notación de la Proposición II.2.10. Dado que X^* es separable, para cada $x^{**} \in B_{X^{**}}$, existe una sucesión $\{y_k\}$ en B_X w^*-convergente a x^{**}. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B_X$ se tiene

$$w^*\text{-}\lim_k (rP_n x + sP^m y_k) = rP_n x + sP^{m**} x^{**}.$$

En virtud de la w^*-compacidad de $B_{X^{**}}$ y de la uniformidad del límite, se tiene en particular que

$$\overline{\lim_m} \|rP_n x + sP^{m**} x^{**}\| \leq 1,$$

pudiéndose ahora aplicar la Proposición II.2.10. ∎

El siguiente ejemplo a considerar es el espacio construido por Johnson y Wolfe (ver [JW] y [O2]).

Ejemplo II.2.15 . *Sea $0 < \mu < 1$. Consideremos en c_0 la siguiente norma:*

$$\|x\| = \sup \left\{ \frac{|\ x_1\ |}{\mu}, |\ x_1 - x_2\ |, |\ x_1 - x_3\ |, \ldots \right\},$$

donde $x = \{x_n\} \in c_0$. Notamos $s := \frac{1-\mu}{1+\mu}$. Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:

(i) $X_\mu = (c_0, \|\cdot\|)$ *verifica la* $M(1, s)$*-desigualdad.*

(ii) X_μ *no es ni un u-ideal canónico ni un HB-subespacio. En particular,* X_μ *no es un* M*-ideal.*

Demostración. (i) Es fácil demostrar que X_μ verifica la hipótesis del Corolario I.4.21 (ver [O2, Example 4]).

(ii) En virtud de [JW], $\|I_{X_\mu^{***}} - \pi_{X_\mu}\| = 1 + \mu$, en particular X_μ no es un HB-subespacio. Por otra parte, si X_μ es un u-ideal canónico, entonces $\|I_{X_\mu^{***}} - 2\pi_{X_\mu}\| = 1$, y en consecuencia $\|I_{X_\mu^{***}} - \pi_{X_\mu}\| = 1$, lo cual contradice el hecho de que $\mu > 0$. ∎

En seguida mostramos que en general la $M(r, s)$-desigualdad no fuerza la proximinalidad, ni tan siquiera en el caso $r = 1$ (y $s < 1$).

Ejemplo II.2.16 . *Sea* $\sum a_n$ *una serie convergente de reales positivos con suma* $a \in]0, 1[$. *Para cada* $x = \{x_n\} \in c_0$ *se define*

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ |x_n| + \sum_{k=1}^{n} |x_k| a_k \right\}.$$

Entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:

(i) $(c_0, \|\cdot\|)$ *verifica la* $M(1, 1 - a)$*-desigualdad.*

(ii) $(c_0, \|\cdot\|)$ *no es un subespacio proximinal de su bidual. En particular,* $(c_0, \|\cdot\|)$ *no es un M-ideal.*

Demostración. Claramente $X = (c_0, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach cuyo bidual es $(l_\infty, \|\cdot\|)$, donde

$$\|y\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ |y_n| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| a_k \right\}, \forall y = \{y_n\} \in l_\infty.$$

(i) Sean $x, y \in B_X$, $n \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon > 0$. Fijemos $m > n$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{1-a}.$$

Es obvio que

$$| x_p | + \sum_{k=1}^{p} | x_k | a_k \leq 1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Sea $p \geq m+1$. Entonces se tiene que

$$(1-a) | y_p | + \sum_{k=1}^{n} | x_k | a_k + (1-a) \sum_{k=m+1}^{p} | y_k | a_k \leq$$

$$\leq (1-a) + \sum_{k=1}^{n} a_k + (1-a) \sum_{k=m+1}^{p} a_k < 1 + \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\overline{\lim_{m}} \sup_{x,y\in B_X} \|P_n x + (1-a) P^m y\| \leq 1,$$

y basta aplicar el Corolario II.2.14.

(ii) Sea $e = (1, 1, ...) \in l_\infty$. Para cada $x = \{x_n\} \in c_0$ se tiene que

$$\|x - e\| \geq \|x - e\|_\infty \geq 1.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$. Si notamos $x := \sum_{k=1}^{m} e_k$, se tiene entonces que

$$\|x - e\| \leq 1 + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k < 1 + \varepsilon,$$

y por tanto $\|e + c_0\| = 1$. Si hubiese $x = \{x_n\} \in c_0$ tal que $\|x - e\| = \|e + c_0\| = 1$, entonces

$$1 \geq | x_n - 1 | + \sum_{k=1}^{n} | x_k - 1 | a_k, \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo que tomando límite

$$1 \geq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} | x_k - 1 | a_k,$$

luego

$$\sum_{k=1}^{+\infty} | x_k - 1 | a_k = 0,$$

esto es, $x_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. ∎

Este hecho limita la posible obligada proximinalidad a aquellos ideales que verifican la $M(r, 1)$-desigualdad. En el caso $r = s = 1$ la proximinalidad es sobradamente conocida (ver [HWW, Prop. II.1.1]). Sin embargo queda abierto el siguiente

Problema: *¿Existen X, Y, y r, tales que X es un ideal de Y verificando la $M(r, 1)$-desigualdad y que no es proximinal en Y?*

Nota. Obsérvese por otra parte, que pese a no tener respuesta acerca del problema anterior, en virtud de las Proposiciones I.4.18 y I.4.21, se tiene que: "*Si X es un p-ideal de Y verificando la $M(r, 1)$-desigualdad, entonces para cada $y \in Y$ se verifican:*

(i) Existe una red $\{x_\alpha\}$ en X tal que

$$\{x_\alpha\} \overset{\sigma(Y,p(Y^*))}{\longrightarrow} y \ , \ \overline{\lim_{\alpha}} \|y - x_\alpha\| \leq \|y + X\|.$$

(ii) Para cualesquiera $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ con $\|x_i\| \leq \|y + X\|$, existe $z \in X$ tal que

$$\max_{1\leq i\leq n}\{\|y + rx_i - z\|\} \leq (1+\varepsilon)\|y + X\|".$$

Evidentemente ninguno de los dos resultados anteriores permite asegurar la proximinalidad de X, aunque no deja de ser interesante que, para cada $\varepsilon > 0$ y para cada colección finita $\{x_1, ..., x_n\}$ exista un z común.

Ejemplo II.2.17. *Sea $Z = (\mathbb{R} \times c_0, \|\cdot\|_\gamma)$, donde $0 < \gamma < 1$, y*

$$\|(\alpha, y)\|_\gamma = |\,(\alpha, \|y\|)\,|_\gamma, \forall \alpha \in \mathbb{R}, y \in c_0.$$

Entonces, Z verifica la $M(1 - \gamma, 1)$-desigualdad, y no tiene la propiedad U.

Demostración. Sean $e_1 = (1,(0,0,...)), e_{n+1} = (0,(\underbrace{0,...,0}_{n-1},1,0,...))$ para $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\{e_n\}$ es una base *"shrinking"* de Z. Sean ahora $x = (\alpha, \{x_j\})$, $y = (\beta, \{y_j\}) \in B_Z$, $n < m$. Nótese que

$$\|(1-\gamma)P_n x + P^m y\|_\gamma =$$

$$= \max\left\{\begin{array}{c} (1-\gamma)(|\,\alpha\,| + \gamma\|(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0, ...)\|), \\ (1-\gamma)\,|\,\alpha\,| + \gamma\|(0,0,...,0,y_m,y_{m+1},...)\|, \\ (1-\gamma)\|(x_1,x_2,...,x_{n-1},0,...)\|, \\ \|(0,0,...,0,y_m,y_{m+1},...)\| \end{array}\right\} \leq$$

$$\leq \max \left\{ \begin{array}{c} | (\alpha, \|\{x_j\}\|) |_\gamma, \\ | (\beta, \|\{y_j\}\|) |_\gamma, \\ (1-\gamma) \mid \alpha \mid + \gamma \mid (\beta, \|\{y_j\}\|) |_\gamma \end{array} \right\} \leq 1,$$

por lo que basta aplicar de nuevo el Corolario II.2.14.

Por otra parte, en virtud de la Proposición I.2.8, $Z^{***} = (\mathbb{R} \times l_\infty^*, \|\cdot\|)$, con

$$\|(\alpha, \varphi)\| = \max\{\mid \alpha \mid, \|\varphi\| + (1-\gamma) \mid \alpha \mid\}, \forall (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \times l_\infty^*.$$

Es fácil probar que

$$P_{Z^\perp}(\alpha, \varphi) = \{0\} \times \left(B_{l_\infty^*}(\varphi, \max\{\|\varphi + c_0^\perp\|, \gamma \mid \alpha \mid\}) \cap c_0^\perp \right),$$

y por tanto, que $Z^\perp$ no es un subespacio de Chebyshev en Z^{***}. En efecto, tómese $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \times l_\infty^*$, tal que $\|\varphi + c_0^\perp\| < \gamma \mid \alpha \mid$. Es claro que $(0, \psi) \in P_{Z^\perp}(\alpha, \varphi)$, siempre que $\psi \in c_0^\perp$ y $\|\varphi - \psi\| \leq \gamma \mid \alpha \mid$. ∎

Concluimos esta sección construyendo espacios que verifican todas las π-propiedades, y sin embargo no verifican la $M(r, s)$-desigualdad.

Ejemplo II.2.18. *Si X es un M-ideal separable y $1 < p < +\infty$, entonces $l_p(X)$ verifica toda π-propiedad pero no puede ser renormado de manera que verifique la $M(1, s)$-desigualdad para ningún $s \in]0, 1]$.*

Demostración. Sea $Y = (l_p(X), \|\cdot\|_p)$. Por ser X un M-ideal, verifica toda π-propiedad. Por tanto, en virtud de la Proposición II.1.2, Y verifica igualmente toda π-propiedad. Sea $0 < s \leq 1$. Dada una sucesión de números reales positivos $\{\delta_n\}$ con $\sum_{n=1}^{+\infty}\delta_n < +\infty$, veamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ en X con $\|x_n\| \geq \frac{s}{2}$ y tal que

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)\|_p < C_n, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

donde $C_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\delta_k)$. En efecto, fijado $x_1 \in X$, con $\|x_1\| = \frac{s}{2}$, es claro que

$$\|(x_1, 0, ...)\|_p = \frac{s}{2} < C_1.$$

Supongamos ahora elegidos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ cumpliendo las condiciones requeridas, y llamemos $S_{n-1} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0, ...)$, X_n al espacio X identificado con el subespacio de Y dado por

$$\{(\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x, 0, ...) : x \in X\}.$$

Tomemos $e_n^{**} \in X_n^{\perp\perp}$ con

$$\|e_n^{**}\|_p = \|e_n^{**} + X_n\|_p = s$$

(nótese que X es proximinal en X^{**} -ver por ejemplo, [HWW, Prop. II.1.1]-).

En virtud de la nota del Teorema II.1.7, si Y verifica la $M(1, s)$-desigualdad, podemos encontrar una sucesión $\{z_k\}$ en Y (si se quiere en X_n), w^*-convergente a e_n^{**}, y tal que

$$\overline{\lim_k}\|S_{n-1} + e_n^{**} - z_k\|_p \leq C_{n-1}.$$

Elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_{n-1} + e_n^{**} - z_k\|_p < C_n$. A partir del teorema de Goldstine es fácil encontrar una sucesión $\{u_j\}$ en X_n w^*-convergente a $e_n^{**} - z_k$ y tal que

$$\|S_{n-1} - u_j\|_p < C_n \text{ y } \underline{\lim}_j \|u_j\| \geq \|e_n^{**} + X_n\|_p = s.$$

Basta pues tomar $x_n = u_j$, con j suficientemente avanzado, y observar que $\|x_n\| > \frac{s}{2}$, lo cual está en contradicción con (2).

Para cualquier norma equivalente $|||\cdot|||$, encontraríamos $K > 0$ y $R > 0$ tales que

$$|||x_n||| \geq K \text{ y } |||S_n||| \leq R, \forall n \in \mathbb{N},$$

igualmente contradictorio. ∎

Ejemplo II.2.19 . *Sea* $X = c_0 \oplus_{l_2} c_0$. *Entonces* X *verifica toda* π*-propiedad, y no verifica la* $M(r,\ s)$*-desigualdad para* $r, s \in\ ]0,1]$ *con* $r^2 + s^2 > 1$.

Demostración. Es claro que

$$X^* = l_1 \oplus_{l_2} l_1,\ X^{**} = l_\infty \oplus_{l_2} l_\infty \text{ y } \pi_X = \pi_{c_0} \times \pi_{c_0}.$$

En virtud de la Proposición II.1.2, X verifica toda π-propiedad.

Supongamos ahora que X verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad para ciertos $r, s \in\ ]0,1]$ con $r^2 + s^2 > 1$. Sean $\varphi, \psi \in l_\infty^*$. Notamos

$$a = \|\pi_{c_0}\varphi\|, b = \|\pi_{c_0}\psi\|, c = \|\varphi - \pi_{c_0}\varphi\|, d = \|\psi - \pi_{c_0}\psi\|.$$

Suponemos que $a = d = 0, b > 0, c > 0$. Entonces se tiene que

$$b^2 + c^2 \geq r^2 b^2 + s^2 c^2 + 2rsbc.$$

Distinguimos varios casos:

Caso 1: $r = 1, s = 1$. Entonces se deduce que $bc < 0$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: $r = 1, s < 1$. Si tomamos $c < \frac{2sb}{1-s^2}$, llegamos a una contradicción.

Caso 3: $r < 1, s = 1$. Es análogo al caso 2.

Caso 4: $r < 1, s < 1$. Definimos $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = (1-r^2)x^2 - 2rscx + c^2(1-s^2), \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$

f tiene un mínimo en el punto $x_0 = \frac{rsc}{1-r^2}$. Además se tiene que

$$f(x_0) = c^2\left((1-s^2) - \frac{(rs)^2}{1-r^2}\right) = \frac{c^2(1-r^2-s^2)}{1-r^2} < 0.$$

Tomando $b = x_0$, llegamos a una contradicción. ∎

II.3 $M(1,\ s)$-desigualdad y propiedad (u)

El objeto principal de esta sección es probar que los espacios que verifican la $M(1,\ s)$-desigualdad tienen la propiedad (u) de Pełczyński, de la cual derivarán otras muchas propiedades ya conocidas para los M-ideales. Por otra parte, conviene observar que la condición $r = 1$ es esencial en dicho teorema, tal como veremos a continuación.

Antes de comenzar a desarrollar este objetivo, nos gustaría remarcar otras consecuencias del caso $r = 1$, y para ello necesitamos recordar algunas nociones.

Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach Z. Se dice que C es **dentable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in C$ tal que

$$x_\varepsilon \notin \overline{\mathrm{co}}(C \setminus B(x_\varepsilon, \varepsilon)).$$

A los subconjuntos de C de la forma:

$$S(C, x^*, \alpha) = \{x \in C : x^*x > \sup x^*(C) - \alpha\},$$

donde $x^* \in Z^*, \alpha > 0$, se les denomina **secciones** de C.

Se puede probar (ver [Ri]) que C es dentable si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sección de C con diámetro menor que ε.

Se dice que X tiene la **propiedad de Radon-Nikodým (RNP)** si todo subconjunto acotado de X es dentable (ver [DaPh]). (Conviene recordar que X es un espacio de Asplund si, y sólo si, X^* tiene la RNP -ver por ejemplo [DiU]-).

Proposición II.3.20. *Si X verifica la $M(1,\, s)$-desigualdad, entonces:*

(i) X satisface la propiedad U en X^{**}.

(ii) Toda sección de B_X tiene diámetro mayor o igual que $2s$. En particular, B_X no es dentable.

Demostración. (i) está visto en la Proposición I.3.10.

(ii) Tómese $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\|x^{**} + X\| = 1$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ tales que $x^*x > 1 - \delta$. En virtud del Teorema II.1.4, existe una red $\{x_\alpha\}$ en X w^*-convergente a x^{**} y tal que

$$\overline{\lim_{\alpha}} \|s(x^{**} - x_\alpha) \pm x\| \leq 1.$$

Es claro que existen $0 < \lambda < 1$, suficientemente próximo a uno, y α suficientemente avanzado tales que

$$| sx^*(x^{**} - x_\alpha) | < \delta,$$

y

$$\lambda(x \pm s(x^{**} - x_\alpha)) \in \overline{S(B_X, x^*, \varepsilon)}^{w^*}.$$

Entonces,

$$\text{diam} S(B_X, x^*, \varepsilon) = \text{diam} \overline{S(B_X, x^*, \varepsilon)}^{w^*} \geq$$

$$\geq \lambda \|(x + s(x^{**} - x_\alpha)) - (x - s(x^{**} - x_\alpha))\| =$$

$$= 2\lambda s\|x^{**} - x_\alpha\| \geq 2\lambda s\|x^{**} + X\| = 2\lambda s,$$

con lo que basta hacer tender λ hacia 1. ∎

Nota. Es fácil probar (ver por ejemplo, [HWW, Lemma III.2.14]) que si $x^* \in S_{X^*}$, entonces x^* tiene una única extensión equinórmica a X^{**} si, y sólo si, la aplicación $I_{B_{X^*}} : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow (B_{X^*}, w)$ es continua en x^*. En particular, si X tiene la propiedad U en X^{**}, las topologías w y w^* relativas a B_{X^*} coinciden en S_{X^*}.

Conviene hacer notar por otra parte, que no conocemos ningún texto en el que aparezca recogido el apartado (ii) de la proposición anterior ni siquiera con $s = 1$.

Obsérvese finalmente que la condición $r = 1$ es condición *"sine quanum"* para que se verifiquen las propiedades (i) y (ii) de la proposición anterior, tal como muestran los Ejemplos II.2.17 y II.2.11. Nótese que en este último ejemplo, B_{J_δ} es dentable. En efecto, el bidual del espacio de James es un dual separable, y por tanto, en virtud del teorema de Dunford y Pettis (ver [DiU, Th. 1, p. 79]), tiene la RNP. En consecuencia, cualquier espacio isomorfo a él tiene la RNP, en particular, J_δ la tiene, esto es, cualquier subconjunto acotado suyo es dentable.

Recordemos que una serie $\sum x_n$ en X es **débilmente incondicionalmente de Cauchy (wuC)** si para cada $x^* \in X^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} | x^* x_n | < +\infty,$$

o equivalentemente, si existe un número real positivo M tal que para todo subconjunto finito de números naturales Δ se tiene que

$$\sup_{|\varepsilon_n| \leq 1} \left\| \sum_{n \in \Delta} \varepsilon_n x_n \right\| \leq M.$$

Notemos por $B_a(X)$ al cierre secuencial de X en (X^{**}, w^*). X tiene la **propiedad** (u) **de Pełczyński** si para cada $x^{**} \in B_a(X)$ existe una serie $\sum x_n$ wuC en X tal que

$$x^{**} = w^*\text{-} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Para cada $x^{**} \in X^{**}$ se define la constante $k_u(x^{**})$ como el ínfimo del conjunto de todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^{**} = w^*\text{-} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

para conveniente sucesión $\{x_n\}$ en X tal que, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_k = \pm 1$ para $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leq a.$$

Notaremos $k_u(x^{**}) = +\infty$ si tales *"aes"* no existen. Obsérvese que X tiene la propiedad (u) de Pełczyński si cada $x^{**} \in B_a(X)$ tiene $k_u(x^{**}) < +\infty$. Es fácil probar que la aplicación $x^{**} \longrightarrow k_u(x^{**})$ define una norma equivalente en $B_a(X)$. De hecho, $k_u(x^{**}) \geq \|x^{**}\|$, y en virtud del teorema de la gráfica cerrada se deduce que existe $M \geq 0$ tal que

$$k_u(x^{**}) \leq M\|x^{**}\|, \forall x^{**} \in B_a(X).$$

A partir de ahora, $k_u(X)$ servirá para notar al más pequeño valor admisible de esa constante M, que obviamente será mayor o igual que uno.

Enunciamos a continuación el resultado principal de esta sección, que ya había sido preparado minuciosamente en el Teorema I.5.26.

Teorema II.3.21. *Si X verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces X tiene la propiedad (u) de Pełczyński con constante $k_u(X) \leq \frac{1}{s}$.*

Demostración. Sean $x^{**} \in B_a(X)$ e $\{y_n\}$ una sucesión en X con $\{y_n\} \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Definimos $Z = \overline{\text{lin}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. En virtud de la Proposición II.1.3, Z verifica la $M(1, s)$-desigualdad, por lo que usando el Teorema I.5.26, para cada $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{z_n\}$ en X tal que

$$x^{**} = w^*\text{-}\sum_{n=1}^{+\infty} z_n,$$

y

$$\sup_{|\varepsilon_n|\leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n z_n \right\| \leq \frac{1}{s}(1+\varepsilon)\|x^{**}\|, \forall N \in \mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

Nota 1. El Ejemplo II.2.11 sirve también para probar que la condición $r = 1$ es esencial en el teorema anterior (ver [Si, Cor. II.15.4]).

Nota 2. Recordemos, como ya vimos en el Ejemplo II.2.15, que $\|I_{X_\mu^{***}} - \pi_{X_\mu}\| = 1 + \mu$, y por tanto, en virtud de [GKS, Lemma 5.3],

$$1 + 2\mu \leq \|I_{X_\mu^{***}} - 2\pi_{X_\mu}\| \leq k_u(X_\mu),$$

en particular, $k_u(X_\mu) > 1$. Obsérvese que el teorema anterior nos proporciona una cota superior de $k_u(X_\mu)$, a saber, $\frac{1+\mu}{1-\mu}$, tanto mejor cuanto menor sea el valor de μ.

El próximo corolario, cuya demostración puede seguirse como en [HWW, Prop. III.3.6 y Cor. III.3.7], con los cambios pertinentes, muestra la potencia del teorema anterior.

Se dice que X tiene la **propiedad (V) de Pełczyński** si para cada operador no débilmente compacto $T : X \longrightarrow E$, donde E es un espacio de Banach, se verifica que X contiene un subespacio Y isomorfo a c_0 tal que la restricción de T a Y es un isomorfismo de Y a $T(Y)$.

Se dice que X es **débilmente secuencialmente completo (wsc)** si toda sucesión débilmente de Cauchy es débilmente convergente.

Corolario II.3.22. *Si X verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) Cada subespacio de X tiene la propiedad (V). En particular, X contiene una copia de c_0, X no es wsc, X no tiene la RNP, y la aplicación $(j_X)^*$ es w^*-w-secuencialmente continua.

(ii) X^* es wsc y contiene una copia complementada de l_1.

(iii) X no está complementado en X^{**}.

(iv) X^{**}/X no es separable.

(v) Cada subespacio o cociente de X isomorfo a un espacio dual es reflexivo.

(vi) Cada operador de X en un espacio que no contenga a c_0 (en particular, cada operador de X en X^*) es débilmente compacto.

II.4 U^*-espacios

Esta sección está motivada por dos razones bien diferentes. Por un lado, cumple una misión estética, por cuanto completa el estudio de la

$M(r, s)$-desigualdad en el otro caso extremo, a saber, con $s = 1$. Por otro lado, y ya que aún quedan importantes propiedades de los M-ideales que no se verifican en el caso $r = 1$, se hace necesaria la búsqueda de nuevas condiciones suficientes para éstas. Es pues natural preguntarse si el caso $s = 1$ puede servir como tal condición suficiente. La respuesta a esta cuestión es, cuando menos curiosa: la condición suficiente es incluso más débil que la $M(r, 1)$-desigualdad (ver Ejemplo II.2.19), concretamente, necesitaremos sólo que X sea un U^*-espacio.

Empezamos esta sección con un resultado que prepara las dos propiedades que nos quedaban por destacar: *"todo U^*-espacio es débilmente compactamente generado"* y *"toda biyección isométrica entre los biduales de dos U^*-espacios es la bitranspuesta de una biyección isométrica entre los propios espacios"*.

Proposición II.4.23. *Si X es un U^*-espacio, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) X no contiene una copia isomorfa de l_1.

(ii) Si q es una proyección de norma uno en X^*, $q(X^*)$ es w^*-cerrado.

(iii) Si Y es un M-ideal de X, entonces la proyección asociada a Y es w^*-continua.

Demostración. (i) Si $l_1 \subseteq X$, entonces $\|I_{X^{***}} - \pi_X\| = 2$ (ver [CMPR, Prop. 2]), en contra de la hipótesis.

(ii) Veamos primero que $q^{**}\pi_X q^{**} = \pi_X q^{**}$. En efecto, si $\varphi \in X^{***}$, es obvio que $q^{**}\pi_X q^{**}\varphi \in X^*$, y por tanto, $\pi_X q^{**}\pi_X q^{**} = q^{**}\pi_X q^{**}$. Si $\pi_X(q^{**}\pi_X q^{**}\varphi - q^{**}\varphi) \neq 0$, se tiene que

$$\|\pi_X q^{**}\varphi - q^{**}\varphi\| \geq \|q^{**}\pi_X q^{**}\varphi - q^{**}\varphi\| >$$

$$> \|(q^{**}\pi_X q^{**}\varphi - q^{**}\varphi) - \pi_X(q^{**}\pi_X q^{**}\varphi - q^{**}\varphi)\| =$$

$$= \|q^{**}\varphi - \pi_X q^{**}\varphi\|,$$

lo cual es una contradicción. Luego,

$$\pi_X q^{**}\varphi = \pi_X q^{**}\pi_X q^{**}\varphi = q^{**}\pi_X q^{**}\varphi.$$

Ya que

$$\pi_X = j_{X^*}(j_X)^*, \; q^{**}(X^{***}) = q(X^*)^{\perp\perp}, \text{ y } q^{**}j_{X^*} = j_{X^*}q,$$

tenemos que

$$j_{X^*}(j_X)^*q^{**} = \pi_X q^{**} = q^{**}\pi_X q^{**} = q^{**}j_{X^*}(j_X)^*q^{**} = j_{X^*}q(j_X)^*q^{**}.$$

Por consiguiente, al ser j_{X^*} injectiva, se verifica que

$$(j_X)^*q^{**} = q(j_X)^*q^{**},$$

y por tanto,

$$(j_X)^*(q(X^*)^{\perp\perp}) = (j_X)^*(q^{**}(X^{***})) = q(j_X)^*q^{**}(X^{***}) \subseteq q(X^*),$$

luego, $q(X^*)$ es w^*-cerrado.

(iii) Sea q la proyección asociada al M-ideal Y. En virtud de la nota de la Proposición I.3.7 (cf. [Bel, Prop. 1.5, p. 14]) tenemos que $q^{**} : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección verificando

$$\|x^{***}\| = \|q^{**}x^{***}\| + \|x^{***} - q^{**}x^{***}\|, \forall x^{***} \in X^{***}. \qquad (3)$$

Veamos pues que $q^*(X) \subseteq X$, o equivalentemente, $q^{**}(X^{\perp}) \subseteq X^{\perp}$. En efecto, sea $x^{\perp} \in X^{\perp}$. Por hipótesis y por (3), es claro que

$$\|q^{**}x^{\perp}\| + \|x^{\perp} - q^{**}x^{\perp}\| = \|x^{\perp}\| \leq$$

$$\leq \|q^{**}x^{\perp} - \pi_X q^{**}x^{\perp}\| + \|x^{\perp} - (q^{**}x^{\perp} - \pi_X q^{**}x^{\perp})\| =$$

$$= \|q^{**}x^{\perp} - \pi_X q^{**}x^{\perp}\| + \|x^{\perp} - q^{**}x^{\perp} - \pi_X(x^{\perp} - q^{**}x^{\perp})\|,$$

y por tanto no queda más salida que $\pi_X q^{**}x^{\perp} = 0$, esto es, $q^{**}x^{\perp} \in X^{\perp}$, como queríamos demostrar. ∎

El siguiente resultado pasa por probar que la segunda propiedad puede ser más ambiciosa, de hecho

Proposición II.4.24. *Si X es un U^*-espacio e Y un espacio de Banach cuya proyección canónica es bicontractiva, entonces todo isomorfismo isométrico de X^{**} en Y^{**} es el bitranspuesto de un isomorfismo isométrico de X en Y.*

Demostración. Sean $\varphi \in X^{***}$ y $x^* \in X^*$ con $\pi_X\varphi \neq x^*$. Entonces se verifica que

$$\|\varphi - x^*\| > \|\varphi - x^* - \pi_X\varphi + \pi_X x^*\| = \|\varphi - \pi_X\varphi\|.$$

Por tanto, $P_{X^*}(\varphi) = \{\pi_X\varphi\}, \forall\varphi \in X^{***}$. Por otra parte, dado que $\|I_{Y^{***}} - \pi_Y\| \leq 1$, entonces $\pi_Y\chi \in P_{Y^*}(\chi), \forall\chi \in Y^{***}$, y además Y no contiene copias de l_1 (ver de nuevo [CMPR, Prop. 2]).

Sea $U : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ un isomorfismo isométrico. Como X e Y no contienen una copia de l_1, por [GKS, Lemma 5.6] y [GK, Cor. 5.5], se tiene que U es w^*-continua. En particular, $U^*(Y^*) = X^*$. Es claro que

$$\|U^*\chi - U^*\pi_Y\chi\| = \|\chi - \pi_Y\chi\| = \|\chi + Y^*\| = \|U^*\chi + X^*\|, \forall\chi \in Y^{***}.$$

Por tanto, $U^*\pi_Y = \pi_X U^*$, luego $U^*(Y^\perp) = X^\perp$. Aplicando el teorema de Hahn-Banach, se tiene que $U(X) = Y$. Definimos $H : X \longrightarrow Y$ por

$$H(x) = j_Y{}^{-1}Uj_X(x), \forall x \in X.$$

Nótese que el operador H es continuo y $H^{**}|_X = U|_X$. Por ser ambos operadores w^*-continuos, tenemos que $H^{**} = U$, como queríamos demostrar. ∎

Nuestra primera propiedad es pues consecuencia evidente de la proposición anterior.

Teorema II.4.25. *Sean X e Y dos U^*-espacios. Todo isomorfismo isométrico de X^{**} en Y^{**} es el bitranspuesto de un isomorfismo isométrico de X en Y.*

Obsérvese que el concepto de U^*-espacio no puede ser sustituido por el de $M(1, s)$-desigualdad, tal como se demuestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo II.4.26. *Sea $0 < \mu < 1$, y X_μ el espacio considerado en el Ejemplo II.2.15. Entonces, el isomorfismo isométrico V de X_μ^{**} definido por*

$$V(\{\beta_n\}) = (-\beta_1, \beta_2 - 2\beta_1, ..., \beta_n - 2\beta_1, ...), \forall\{\beta_n\} \in X_\mu^{**},$$

no es el bitranspuesto de ningún isomorfismo isométrico de X_μ.

Demostración. En efecto, consideremos $U : X_\mu^* \longrightarrow X_\mu^*$ definido por $U(\{\lambda_n\}) = \{\mu_n\}$, donde $\mu_1 = -\lambda_1 - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \lambda_n$ y $\mu_n = \lambda_n$ para $n \geq 2$. Es sabido (ver [JW]) que

$$\|\{\lambda_n\}\| = \mu \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\right| + \sum_{n=2}^{+\infty} | \lambda_n |, \forall\{\lambda_n\} \in X_\mu^*.$$

A partir de aquí es fácil ver que U es una isometría involutiva de X_μ^*, y que $V = U^*$. Si embargo, es claro que $V(X_\mu) \neq X_\mu$. ∎

Pasemos ya al segundo resultado de esta sección. Necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Recordemos que X es **débilmente compactamente generado (WCG)** si es la envolvente lineal cerrada en norma de algún conjunto débilmente compacto.

Se notará por:

(i) dens M a la más pequeña cardinalidad de un subconjunto denso de M, siendo M un subespacio de X.

(ii) ω al primer ordinal numerable.

(iii) $|\,\alpha\,|$ al cardinal del ordinal α.

(iv) μ al primer ordinal de cardinalidad dens X.

Teorema A. [FaG, Th. 1]. *Si X es un espacio de Asplund, entonces existe una* "sucesión larga" *no decreciente $\{M_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$ de subespacios de X y una* "sucesión larga" *$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$ de proyecciones en X^* tales que $M_\mu = X, P_\mu = I_{X^*}$, y para todo $\omega < \alpha \leq \mu$ se tienen las siguientes propiedades:*

(i) dens $M_\alpha \leq |\,\alpha\,|$.

(ii) $\bigcup_{\beta<\alpha} M_{\beta+1}$ *es denso en* M_α.

(iii) $\|P_\alpha\| = 1$.

(iv) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\beta$ *si* $\beta \leq \alpha$.

(v) dens $P_\alpha X^* \leq |\,\alpha\,|$.

(vi) $\bigcup_{\beta<\alpha} P_{\beta+1}X^*$ *es denso en* $P_\alpha X^*$.

(vii) La aplicación $R_\alpha : P_\alpha X^* \longrightarrow M_\alpha^*$ definida por

$$R_\alpha f = f|_{M_\alpha}, \forall f \in P_\alpha X^*,$$

es una isometría sobreyectiva y $P_\alpha f = R_\alpha^{-1}(f|_{M_\alpha}), \forall f \in X^*$.

Por comodidad, diremos que una tal pareja $(M_\alpha, P_\alpha)_{\omega\leq\alpha\leq\mu}$ verificando la tesis del Teorema A es una **doble sucesión larga proyectiva en X^*.**

El siguiente resultado es una versión revisitada de [FaG, Th. 3].

Teorema B. *Si X admite una doble sucesión larga proyectiva $(M_\alpha, P_\alpha)_{\omega\leq\alpha\leq\mu}$ en X^*, y P_α es w^*-continua para todo $\alpha \in\,]\omega,\mu]$, entonces, X es WCG.*

Teorema II.4.27 . *Si X es un espacio de Asplund y un U^*-espacio, entonces X es WCG.*

Demostración. En virtud del Teorema A, existe una doble sucesión larga proyectiva $(M_\alpha, P_\alpha)_{\omega\leq\alpha\leq\mu}$ en X^*.

Veamos ahora que P_α es w^*-continua. En efecto, en primer lugar, por la Proposición II.4.23 tenemos que $P_\alpha X^*$ es w^*-cerrado.

Considérese ahora el subespacio

$$Z = \{x \in X : P_\alpha x^*(x) = 0, \forall x^* \in X^*\},$$

y defínase $T : (X/Z)^* \longrightarrow X^*$ por

$$Tg(x) = g(x + Z), \forall g \in (X/Z)^*, \forall x \in X.$$

Es fácil probar que T es w^*-continua y una isometría de $(X/Z)^*$ sobre $P_\alpha X^*$.

Por otra parte, en virtud de la Proposición II.1.3, X/Z y M_α son U^*-espacios, luego, aplicando el Teorema II.4.25, $T^{-1}R_\alpha^{-1}$ es w^*-continua. La w^*-continuidad de P_α se deduce finalmente de la propia definición de R_α^{-1}. ∎

Nótese que la clave del teorema anterior está en la segunda afirmación de la Proposición II.4.23. Desconocemos si esta afirmación es válida para espacios que verifiquen la $M(1, s)$-desigualdad (con $s < 1$), lo que nos plantea el siguiente

Problema: *¿Existen espacios de Banach no WCG que verifiquen la $M(1, s)$-desigualdad?*

Por otra parte, y como consecuencia inmediata del teorema anterior y de [Di, Cor. 3, Cor. 4 y Th. 3, pp. 148, 149] obtenemos el siguiente

Corolario II.4.28 . *Si X es un espacio de Asplund y un U^*-espacio, entonces:*

(i) *B_{X^*} es w^*-secuencialmente compacto.*

(ii) *Todo funcional de X^* que sea w^*-secuencialmente continuo es de hecho w^*-continuo.*

(iii) *Para cada subespacio separable Z de X, existe otro subespacio separable H de X y una proyección p de norma uno en X tal que $Z \subseteq H$ e $\operatorname{Im} p = H$.*

Si ahora nos aseguramos previamente la contención de c_0 podemos concluir

Corolario II.4.29 . *Si X es un U^*-espacio y, o bien es un u-ideal canónico, o bien verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces X contiene una copia complementada de c_0.*

Demostración. Es claro después de [GKS, Prop. 2.8] y de la Proposición II.1.3 en el caso de los u-ideales canónicos, o del Teorema II.1.7 en el otro caso, que X es un espacio de Asplund. Por el apartado (iii) del corolario anterior, existe un subespacio separable Z de X y una proyección q en X cuya imagen es Z. Por otra parte, en virtud de la Proposición II.1.3, Z es un u-ideal canónico (resp. verifica la $M(1, s)$-desigualdad), y por tanto contiene una copia isomorfa de c_0 (ver Corolario II.3.22). Así pues, por el teorema de Sobczyk (ver por ejemplo [HWW, Cor. II.2.9]), existe una proyección $p : Z \longrightarrow c_0$, de donde se deduce que $p \circ q$ es una proyección cuya imagen es c_0. ∎

El resultado anterior supone un pequeño avance en la teoría de u-ideales, por cuanto da una nueva condición suficiente para que éstos contengan una copia complementada de c_0.

Conviene recordar finalmente que en la Proposición I.3.14 dábamos una técnica que permitía construir U^*-espacios que verifican la $M(1, s)$-desigualdad, concretamente:

Ejemplo II.4.30. *Sean Y y Z dos M-ideales. Dado $0 < \gamma \leq 1$, definimos*

$$\|(y,z)\| = \max\left\{\|y\|, \|z\|, \frac{\|y\| + \|z\|}{1+\gamma}\right\}, \forall (y,z) \in Y \times Z.$$

Entonces, $(Y \times Z, \|\cdot\|)$ verifica simultáneamente la $M(1, \gamma)$-desigualdad y la $M(\gamma, 1)$-desigualdad. Además, si $\gamma \neq 1$, $Y \times Z$ no es un M-ideal.

Capítulo III

La $M(r, s)$-desigualdad en operadores compactos.

La subclase más importante de espacios de Banach que son M-ideales está constituida por los espacios X tales que $\mathcal{K}(X)$ es M-ideal de $\mathcal{L}(X)$ (ver al respecto [HWW]). *Este hecho motiva el presente capítulo; en él estudiamos, por ejemplo, para qué valores de r y s la clase de los espacios de Banach X tales que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$ verificando la M(r, s)-desigualdad está contenida en la clase de aquellos espacios que verifican idéntica desigualdad (en su bidual). También ensayamos alguna caracterización, en términos del propio X, de los elementos de dicha subclase, y damos algunos ejemplos.*

III.1 X hereda la $M(r, s)$-desigualdad de $\mathcal{K}(X)$

El objetivo de esta sección es el de analizar para qué valores de r y s, X verifica la $M(r, s)$-desigualdad siempre que $\mathcal{K}(X)$ la verifique. Es bien conocido que la respuesta es afirmativa en el caso $r = s = 1$.

Un primer análisis de la demostración del caso clásico ($r = s = 1$) [HWW, Prop. VI.4.4], nos permite observar que dicha prueba está basada en dos supuestos: por un lado en la equivalencia del concepto de M-ideal y de la propiedad de la 3-bola (ver [HWW, Th. I.2.2] -cf. [L1, Th. 6.17]-), y por otro en una técnica sencilla que permite descender de la propiedad de la 3-bola de $\mathcal{K}(X)$ (en $\mathcal{L}(X)$) a la propiedad de la 3-bola de X (en X^{**}). Concretamente, la estrategia a seguir puede resumirse en el siguiente gráfico:

$$\mathcal{K}(X) \stackrel{M\text{-ideal}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(X) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \mathcal{K}(X) \stackrel{3\text{-bola}}{\longrightarrow} \mathcal{L}(X) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} X \stackrel{3\text{-bola}}{\longrightarrow} X^{**} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} X \stackrel{M\text{-ideal}}{\longrightarrow} X^{**}.$$

Por lo que respecta al caso general (r y s no necesariamente uno), esta estrategia podría repetirse en los pasos (1) y (2) sin especial dificultad; el primero de los pasos ya fue comprobado para el ambiente más general posible en la Proposición I.4.21, y el segundo podrá verse enseguida.

En el presente capítulo, $\mathcal{K}(X)$ (resp. $\mathcal{L}(X)$) representará al espacio de los operadores compactos (resp. lineales y continuos) de X en X.

Definición III.1.1. *Notaremos por $\mathcal{E}$ a cualquier subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X)$ que contenga al operador identidad y a $\mathcal{K}(X)$. Se dice que $\mathcal{K}(X)$*

verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad *si existe $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r,\, s)$-desigualdad.*

Proposición III.1.2. *Sean $r, s \in]0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la propiedad de la $n(r,\, s)$-bola en $\mathcal{E}$, entonces X verifica la propiedad de la $n(r,\, s)$-bola en X^{**}.*

Demostración. Sean $x_1, x_2, ..., x_n \in B_X$, $x^{**} \in S_{X^{**}}$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $x^* \in B_{X^*}$ tal que $| \; 1 - x^{**}x^* \; | \leq \frac{\varepsilon}{2r}$ y definamos los operadores $S_i = x_i \otimes x^* \in B_{\mathcal{K}(X)}$. Por hipótesis existe $S \in \mathcal{K}(X)$ tal que

$$\|rS_i + sI_X - S\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \;, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Entonces, para $z := S^{**}x^{**} \in X$ (S es un operador compacto), tenemos que

$$\|rx_i + sx^{**} - z\| = \|(rS_i^{**} + sI_{X^{**}} - S^{**})(x^{**}) + r(1 - x^{**}x^*)x_i\| \leq 1 + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Respecto al tercer paso las cosas son bien diferentes porque no sabemos si la propiedad de la $n(r,\, s)$-bola fuerza la $M(r,\, s)$-desigualdad (ver el problema suscitado por la Proposición I.4.21). Recuérdese que ésto no es el caso cuando $r = 1$, lo que nos permite enunciar el siguiente:

Corolario III.1.3. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(1,\, s)$-desigualdad, entonces X verifica la $M(1,\, s)$-desigualdad.*

Y por tanto, como consecuencia inmediata de los Teoremas II.1.7 y II.3.21 y Corolario II.3.22, se tiene:

Corolario III.1.4. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) X es un espacio de Asplund y X^* no tiene subespacios propios normantes.

(ii) X tiene la propiedad (u) de Pełczyński, con $k_u(X) \leq \frac{1}{s}$.

(iii) X tiene la propiedad (V) de Pełczyński.

(iv) X contiene un subespacio isomorfo a c_0.

(v) X^* contiene un subespacio complementado isomorfo a l_1.

Continuando con el caso general, podemos usar igualmente las Proposiciones I.4.21 y III.1.2, para obtener al menos la siguiente

Proposición III.1.5 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r > \frac{1}{2}$, entonces X verifica la $M(2r - 1, s)$-desigualdad.*

No obstante, la aparente frustración que provoca el cambio del primer parámetro ($r \to 2r - 1$), este resultado será clave en todo lo que sigue. Por ahora, sólo está claro que debemos cambiar de estrategia. El siguiente resultado presenta una importante novedad en este campo por cuanto permite pasar directamente de propiedades de la proyección P en $\mathcal{L}(X)^*$ a idénticas propiedades para la proyección natural e.. X, siempre que $P(x^{**} \otimes x^*)$ sea la extensión *"natural"* a $\mathcal{E}$ de los funcionales de la forma $x^{**} \otimes x^*$.

Proposición III.1.6 . *Sea $\mathcal{K}(X)$ un P-ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r,\, s)$-desigualdad, y tal que para cualesquiera $x^{**} \in X^{**}, x^* \in X^*$ se verifica*

$$P(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^*.$$

Entonces X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad.

Demostración. Consideremos $x^{***} = x^* + x^{\perp} \in X^{***}$, con $x^* \in X^*, x^{\perp} \in X^{\perp}$. Hemos de demostrar que

$$\|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^{\perp}\|.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea $x^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que

$$\|x^{\perp}\| < x^{\perp}x^{**} + \varepsilon.$$

Consideremos $f = x^{**} \otimes x^{***} \in \mathcal{E}^*$ definido por

$$f(T) = x^{***}(T^{**}x^{**}), \forall T \in \mathcal{E}.$$

Entonces, $f = g + h$, donde $g = x^{**} \otimes x^*$, $h = x^{**} \otimes x^{\perp}$, ambos definidos de manera análoga a f. Ya que

$$g(u^* \otimes u) = x^{**}(u^*)x^*(u),$$

se tiene que

$$\|g\| \leq \|x^{**}\| \cdot \|x^*\| = \|x^*\| = \|g|_{X^* \otimes X}\| \leq \|g\|,$$

luego, $\|g\| = \|x^*\|$. Sea $S \in \mathcal{K}(X)$. Entonces $S^{**}x^{**} \in X$, y por tanto,

$$h(S) = x^{\perp}(S^{**}x^{**}) = 0,$$

luego $h \in \mathcal{K}(X)^\perp$, esto es, $Pf = Pg = g$, y por tanto, $h = f - Pf$. Por otra parte se tiene que

$$\|f\| \leq \|x^{***}\|,$$

$$\|h\| \geq h(I_X) = x^\perp x^{**} > \|x^\perp\| - \varepsilon.$$

Luego, por la $M(r, s)$-desigualdad tenemos que

$$\|x^{***}\| \geq \|f\| \geq r\|Pf\| + s\|f - Pf\| = r\|g\| + s\|h\| \geq$$

$$\geq r\|x^*\| + s\|x^\perp\| - s\varepsilon.$$

Por tanto, $\|x^{***}\| \geq r\|x^*\| + s\|x^\perp\|$. ∎

Nuestra estrategia consiste ahora en buscar condiciones que nos aseguren que $x^{**} \otimes x^*$ tenga única extensión, ya que, en virtud de la Proposición I.1.2 se tendrá que $P(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^*$.

Nota. Obsérvese que en virtud de la Proposición I.3.10, si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(1, s)$-desigualdad, entonces $\mathcal{K}(X)$ tiene la propiedad U en $\mathcal{E}$. Por lo que aplicando la Proposición I.1.2 estaríamos en condiciones de aplicar la proposición anterior, reencontrando de nuevo el Corolario III.1.3.

Para lo que sigue, necesitamos definir el concepto de punto diente. Recuérdese que dado $x^* \in S_{X^*}$, se dice que x^* es un **w^*-punto diente de B_{X^*}** si para cada $\varepsilon > 0$, existen $x \in X$ y $\alpha > 0$ tales que

$$x^* \in S(B_{X^*}, x, \alpha) = \{y^* \in B_{X^*} : y^* x > \|x\| - \alpha\},$$

y diámetro de $S(B_{X^*}, x, \alpha)$ menor que ε.

Notaremos por $\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}$ al conjunto de todos los w^*-puntos diente de B_{X^*}. Es fácil probar que todo punto w^*-fuertemente expuesto es, de hecho, un w^*-punto diente. En particular, después del Corolario II.1.8, se tiene el siguiente

Corolario III.1.7. *Si X verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + s > 1$, entonces*

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}.$$

El siguiente resultado, el cual es una versión revisitada de [L5, Lemma 3.4] (cf. [R, Th. 2]), resulta trascendental en la búsqueda de condiciones naturales que aseguren la deseada unicidad.

Lema III.1.8. *Sean $x^{**} \in X^{**}$ y x^* un w^*-punto diente de B_{X^*}. Entonces el operador $\phi = x^{**} \otimes x^* \in \mathcal{K}(X)^*$ admite una única extensión equinórmica a $\mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|x^{**}\| = 1$. Usando la condición necesaria de punto diente dada por D. Werner en [W1, Lemma 3], para cada $0 < \varepsilon < 1$, y para $\delta \in]0, \varepsilon[$ suficientemente pequeño, existe $x \in X$ de manera que

(i) $x^* x = 1$.

(ii) $\|x\| \leq 1 + \varepsilon\delta$.

(iii) Si $y^*x > 1 - \delta$ y $\|y^*\| \leq 1$, entonces $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$.

Sean $T \in \mathcal{L}(X)$ e $y^* \in S_{X^*}$ tal que $x^{**}y^* > 1 - \frac{\delta^2}{2}$. Definimos los operadores $S, U \in \mathcal{K}(X)$ por $S = y^* \otimes x$, $U = T^*x^* \otimes x$. Sean $\hat{\phi}$ la extensión *"natural"* de ϕ a $\mathcal{L}(X)$ y ψ una extensión equinórmica de ϕ a $\mathcal{L}(X)$. Veamos que $\hat{\phi}(T) = \psi(T)$. En primer lugar, es obvio que $\|\phi\| \leq 1$. Por otra parte se tiene que

$$\psi(U) = \phi(U) = x^*(x).x^{**}(T^*x^*) = \hat{\phi}(T).$$

Ya que $\|T\| = \sup\{\mid (x \otimes x^*)(T) \mid : x^* \in B_{X^*}, x \in B_X\}$, en virtud del Teorema de Hahn-Banach,

$$B_{\mathcal{L}(X)^*} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(B_X \otimes B_{X^*}).$$

Luego existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in B_X$, $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in B_{X^*}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tales que

$$\mid \psi(U) - \eta(U) \mid < \varepsilon,$$

$$\mid \psi(T) - \eta(T) \mid < \varepsilon,$$

$$\mid \psi(S) - \eta(S) \mid < \frac{\delta^2}{2},$$

donde $\eta = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes x_i^*$. Entonces se tiene que

$$\mid \hat{\phi}(T) - \psi(T) \mid = \mid \psi(U) - \psi(T) \mid \leq$$

$$\leq \mid \psi(U) - \eta(U) \mid + \mid \psi(T) - \eta(T) \mid + \mid \eta(U) - \eta(T) \mid \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + \mid \eta(U) - \eta(T) \mid .$$

Ya que

$$\eta(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T^* x^*(x_i) x_i^*(x),$$

$$\eta(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T^* x_i^*(x_i),$$

$$\psi(S) = \phi(S) = x^{**} y^* > 1 - \frac{\delta^2}{2},$$

tenemos que

$$1 - \delta^2 < \eta(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^*(x) y^*(x_i).$$

Sea $J = \{i \in 1, 2, ..., n : x_i^* x \leq 1 - \delta\}$. Entonces se tiene que

$$1 - \delta^2 < \sum_{i \in J} \lambda_i (1 - \delta) + \sum_{i \notin J} \lambda_i (1 + \varepsilon\delta) =$$

$$= \sum_{i \in J} \lambda_i + \sum_{i \notin J} \lambda_i (1 + \varepsilon\delta) - \delta \sum_{i \in J} \lambda_i \leq (1 + \varepsilon\delta) - \delta \sum_{i \in J} \lambda_i.$$

Por tanto,

$$\sum_{i \in J} \lambda_i < \delta + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Por otra parte, para $i \notin J$, se tiene que $\|x^* - x_i^*\| \leq \varepsilon$. Luego se tiene que

$$| \eta(U) - \eta(T) | \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mid x_i^*(x) T^* x^*(x_i) - T^* x_i^*(x_i) \mid =$$

$$= \sum_{i \in J} \lambda_i \mid x_i^*(x) T^* x^*(x_i) - T^* x_i^*(x_i) \mid +$$

$$+ \sum_{i \notin J} \lambda_i \mid T^* x^*(x_i)(x_i^*(x) - 1) - T^* x_i^*(x_i) + T^* x^*(x_i) \mid \leq$$

$$\leq (2 + \varepsilon\delta)\|T\| \sum_{i \in J} \lambda_i + (\varepsilon + \delta)\|T\| \sum_{i \notin J} \lambda_i \leq$$

$$\leq 6\|T\|\varepsilon + \|T\|(\varepsilon + \delta) = \|T\|(7\varepsilon + \delta).$$

Por tanto, $\hat{\phi}(T) = \psi(T)$, como queríamos demostrar. ∎

Corolario III.1.9. *Si $\mathcal{K}(X)$ es un P-ideal de $\mathcal{E}$ y*

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\},$$

entonces

$$P(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^*, \forall x^{**} \in X^{**}, x^* \in X^*.$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $x^{**} \in X^{**}$, $x^* \in X^*$ y $g = x^{**} \otimes x^*$. Por hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in \{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\|x^* - \hat{x}^*\| < \varepsilon$, donde $\hat{x}^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*$. Definimos

$$\hat{g} = x^{**} \otimes \hat{x}^* \ , \ g_i = x^{**} \otimes x_i^* \in \mathcal{E}^* \ , \ i = 1, 2, ..., n.$$

Entonces, $\|g - \hat{g}\| < \varepsilon$. Por el lema anterior, g_i son las únicas extensiones equinórmicas de $x^{**} \otimes x_i^* \in \mathcal{K}(X)^*$. En virtud de la Proposición I.1.2, tenemos que $Pg_i = g_i$, $P\hat{g} = \hat{g}$, y por tanto, haciendo tender ε a cero, $Pg = g$. ∎

Una vez establecidos estos últimos resultados disponemos ya de una alternativa real para probar que la $M(r, s)$-desigualdad es *"hereditaria"*, tal como se enuncia en el siguiente

Teorema III.1.10 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces X verifica la $M(r, s)$-desigualdad.*

Demostración. Obsérvese que, por hipótesis, $(2r - 1) + s > 1$, en particular, $r > \frac{1}{2}$. En virtud de la Proposición III.1.5, X verifica la

$M(2r - 1, s)$-desigualdad, de donde, usando el Corolario III.1.7, se tiene que

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\},$$

pudiéndose aplicar ahora el corolario anterior y la Proposición III.1.6. ∎

Nota. Obsérvese que la condición $r + \frac{s}{2} > 1$ (algo más restrictiva que la condición $r + s > 1$ y $r > \frac{1}{2}$) viene impuesta por la necesidad de asegurarnos que

$$X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}.$$

Usando ahora el Teorema II.1.7 y los Corolarios II.1.8 y III.1.7, se obtiene el siguiente

Corolario III.1.11 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) *X es un espacio de Asplund y X^* no tiene subespacios propios normantes.*

(ii) *X no contiene una copia isomorfa de l_1.*

(iii) *X tiene la UEP.*

(iv) $X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-Fexp } B_{X^*}\}$.

(v) $X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}$.

(vi) *Si Z es un espacio de Banach con $X \subset Z \subseteq X^{**}$, entonces no existe ninguna proyección contractiva de Z sobre X.*

(vii) *Todo subespacio o cociente de X que sea isométrico a un espacio dual es reflexivo.*

Por otra parte, en virtud del Teorema II.4.27, se tiene:

Corolario III.1.12. *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, 1)$-desigualdad con $r > \frac{1}{2}$, entonces:*

(i) *X verifica la $M(r, 1)$-desigualdad.*

(ii) *X es WCG.*

Para finalizar esta sección vamos a extraer una nueva y trascendental consecuencia del Corolario III.1.9. Obsérvese que éste último representa un punto de inflexión en el problema de la multiplicidad de proyecciones, como ya subrayábamos en el Ejemplo I.3.12. De hecho, este resultado nos va a permitir probar la unicidad en este ambiente más restrictivo. El eslabón que falta viene sugerido por el teorema de representación de $\mathcal{K}(X)^*$, debido a Feder y Saphar (ver [FeS, Th. 1]).

Concretamente, obtenemos la siguiente

Proposición III.1.13. *Sea $\mathcal{K}(X)$ un ideal de $\mathcal{E}$. Si X es un espacio de Asplund y*

$$X^* = \overline{\operatorname{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\},$$

entonces la proyección P asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$ es única.

Demostración. Sea Q otra proyección en $\mathcal{E}^*$ de norma uno con $\operatorname{Ker} Q = \mathcal{K}(X)^\perp$. Definimos $\phi, \psi : \mathcal{K}(X)^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$, para cada $g \in \mathcal{K}(X)^*$, por:

$$\phi(g) = Pf \ , \ \psi(g) = Qf,$$

donde f es una extensión a $\mathcal{E}$ de g. Entonces

$$Pf = \phi(f|_{\mathcal{K}(X)}) \ , \ Qf = \psi(f|_{\mathcal{K}(X)}), \forall f \in \mathcal{E}^*.$$

Hemos de probar que $\psi = \phi$.

En virtud del teorema de Feder y Saphar [FeS, Th. 1], existe una aplicación cociente $V : \overline{X^{**} \otimes X^*} \longrightarrow \mathcal{K}(X)^*$, definida por

$$V(v)(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{**}(S^* x_n^*), \forall v \in \overline{X^{**} \otimes X^*}, S \in \mathcal{K}(X),$$

donde $v = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{**} \otimes x_n^*$.

Consideremos ahora el conjunto

$$A = \{x^{**} \otimes x^* : x^{**} \in X^{**}, x^* \in X^*\} \subseteq \mathcal{K}(X)^*.$$

Por hipótesis $\overline{\operatorname{lin}} A = \mathcal{K}(X)^*$, y por tanto, basta con demostrar que $\psi|_A = \phi|_A$. Pero en virtud del Corolario III.1.9, para cada $x^{**} \otimes x^* \in A$,

$$\phi(x^{**} \otimes x^*) = x^{**} \otimes x^* = \psi(x^{**} \otimes x^*). \qquad \blacksquare$$

Enunciamos finalmente el resultado deseado.

Teorema III.1.14 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces la proyección asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$ es única.*

Demostración. En virtud del Corolario III.1.11, X es un espacio de Asplund y $X^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\}$, por lo que basta aplicar la proposición anterior. ∎

III.2 Caracterización de la $M(r, s)$-desigualdad para operadores compactos

El objetivo de esta sección es el de generalizar el siguiente resultado de W. Werner:

Teorema [Ww, Th. 5.2]. *Sea X un espacio de Banach. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{K}(X)$ es M-ideal de $\mathcal{L}(X)$.

(ii) Existe una red $\{K_\alpha\}$ en $B_{\mathcal{K}(X)}$ tal que:

(a) $\lim_\alpha x^* K_\alpha x = x^* x, \forall x \in X, x^* \in X^*$.

(b) Para cualesquiera $S, T \in \mathcal{L}(X)$, se tiene que

$$\overline{\lim_\alpha} \|K_\alpha S + (I_X - K_\alpha)T\| \leq \max\{\|S\|, \|T\|\}. \tag{1}$$

El punto clave de la demostración de este teorema reside en un resultado de Harmand y Lima (ver [HWW, Prop. VI.4.10]) en el que demuestran que X posee la propiedad de aproximación métrico compacta siempre que $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal de $\mathcal{L}(X)$. A propósito, dicha propiedad resulta de hecho también suficiente para aquellos subespacios y cocientes de cualquier espacio de Banach X tal que $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal de $\mathcal{L}(X)$ (ver [HWW, Th. VI.4.19]).

A partir de la existencia de dicha aproximación métrico compacta, W. Werner, usando técnicas específicas de la teoría de álgebras de Banach (ver [Ww, Th. 3.5]) (cf. [HWW, Th. V.3.2]) consigue probar la desigualdad (1). El recíproco, aunque algo menos complicado, vuelve a necesitar de esta misma herramienta. Nuestro objetivo se centra en encontrar una demostración para el caso general, y a ser posible usando técnicas más propias de la teoría de espacios de Banach, eso sí, inspiradas en las del caso clásico. En el caso separable, N. Kalton (ver [K, Th. 2.4]) consigue un resultado más ambicioso con técnicas de espacios de Banach. Sin embargo, éstas no parecen adaptables para r y s distintos de uno.

Conviene ahora introducir una notación referida a las propiedades de aproximación.

Se dice que X tiene la propiedad de **aproximación compacta (CAP)** si $I_X \in \overline{\mathcal{K}(X)}$, donde la clausura es tomada respecto de la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Diremos que X tiene la propiedad de **λ-aproximación compacta (λ-CAP)**, donde $\lambda \geq 1$, si $I_X \in \overline{B_{\mathcal{K}(X)}(0, \lambda)}$. Usualmente la 1-CAP es llamada la propiedad de **aproximación métrica compacta (MCAP)**.

Dados X e Y dos espacios de Banach, recordemos que la **topología fuerte de operadores** es la topología más fina en $\mathcal{L}(X, Y)$ (el espacio de los operadores lineales y continuos de X en Y) tal que las aplicaciones $E_x : \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow Y$ definidas por

$$E_x(T) = Tx, \forall T \in \mathcal{L}(X,Y),$$

son continuas para todo $x \in X$. En esta topología una red de operadores $\{T_\alpha\}$ converge a un operador T si, y sólo si,

$$\|T_\alpha x - Tx\| \longrightarrow 0, \forall x \in X.$$

La **topología débil de operadores** en $\mathcal{L}(X,Y)$ es la topología más fina que hace continuas las aplicaciones $E_{x,y^*} : \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E_{x,y^*}(T) = y^*(Tx), \forall T \in \mathcal{L}(X,Y),$$

para cualesquiera $x \in X, y^* \in Y^*$. Una red de operadores $\{T_\alpha\}$ converge a un operador T en la topología débil de operadores si, y sólo si,

$$| y^*(T_\alpha x) - y^*(Tx) | \longrightarrow 0, \forall x \in X, y^* \in Y^*.$$

Diremos que X^* tiene la propiedad de **λ-aproximación compacta (resp. métrico-compacta) con operadores adjuntos** si existe una red $\{K_\alpha\}$ en $\mathcal{K}(X)$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$ (resp. $\|K_\alpha\| \leq 1$), y tal que

$$\|K_\alpha^* x^* - x^*\| \longrightarrow 0, \forall x^* \in X^*.$$

Finalmente diremos que una red $\{K_\alpha\}$ en $\mathcal{K}(X)$ es una **aproximación compacta de la identidad** (que notaremos abreviadamente **a.c.i.**) si

$$\|K_\alpha x - x\| \longrightarrow 0, \forall x \in X.$$

Si además

$$\|K_\alpha^* x^* - x^*\| \longrightarrow 0, \forall x^* \in X^*,$$

se dirá que $\{K_\alpha\}$ es una **aproximación compacta** ***"shrinking"*** **de la identidad** (abreviadamente **a.c.s.i.**).

En orden a clarificar un poco estas propiedades, consideremos el siguiente:

Lema III.2.15. *Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) X tiene la λ-CAP.

(ii) X admite una a.c.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$. (En particular,

$$\lim_\alpha \|K_\alpha S - S\| = 0, \forall S \in \mathcal{K}(X)).$$

(iii) Existe una red $\{K_\alpha\}$ en $\mathcal{K}(X)$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$ convergiendo a la identidad en la topología débil de operadores.

Además equivalen:

(i) X^* tiene la λ-CAP con operadores adjuntos.

(ii) X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$.

(iii) Existe una red $\{K_\alpha\}$ en $\mathcal{K}(X)$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$ tal que $\{K_\alpha^*\}$ converge a la identidad en la topología débil de operadores.

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Basta tener en cuenta que la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos es equivalente a la convergencia en la topología fuerte de operadores.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es trivial.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Es consecuencia de que los conjuntos cerrados y convexos son los mismos para la topología fuerte y la débil de operadores (ver por ejemplo [DSc, Cor. VI.1.5]).

La demostración del segundo bloque de equivalencias es similar. ∎

El problema inicial de la caracterización puede pues centrarse en resolver una doble cuestión:

(i) Si $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{L}(X)$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad, entonces ¿X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$?

(ii) En caso de existir una tal $\{K_\alpha\}$, ¿verifica ésta una desigualdad del tipo (1) vista en el teorema que motivaba la presente sección?

Para dar respuesta a la primera cuestión, comenzamos analizando algunas perfecciones sencillas del concepto de ideal, que aseguran la MCAP en el espacio base. Así por ejemplo,

Lema III.2.16. *Si $\mathcal{K}(X)$ es un P-ideal de $\mathcal{E}$ y para cualesquiera $x \in X$ y $x^* \in X^*$ se verifica que $P(x^* \otimes x)(I_X) = x^*x$, entonces X tiene la MCAP.*

Demostración. En virtud de la Proposición I.1.2, existe una red $\{K_\alpha\}$ en $B_{\mathcal{K}(X)}$ tal que

$$\{K_\alpha\} \overset{\sigma(\mathcal{E},P(\mathcal{E}^*))}{\longrightarrow} I_X.$$

En particular,

$$\{x^* K_\alpha x\} = \{(x^* \otimes x)(K_\alpha)\} \longrightarrow P(x^* \otimes x)(I_X) = x^* x,$$

esto es, en virtud del Lema III.2.15, X tiene la MCAP. ∎

Corolario III.2.17. *Si $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ que satiface la propiedad U (en particular si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(1, s)$-desigualdad), entonces X tiene la MCAP.*

Lamentablemente la $M(r, s)$-desigualdad en general no fuerza la propiedad U (ver Ejemplo II.2.17), por lo que el lema anterior no permite concluir como en el caso $r = 1$. Para otros casos necesitamos revisar aquellas consecuencias que en X tiene el hecho de que $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad. Interesante en este punto resulta ser de nuevo el Corolario III.1.11, tal como permite adivinar la siguiente

Proposición III.2.18. *Sea $\mathcal{K}(X)$ un ideal de $\mathcal{E}$. Si*

$$X^* = \overline{\mathrm{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{X^*}\},$$

entonces X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$.

Demostración. Sea P la proyección asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$. En virtud de la Proposición I.1.2, existe una red $\{K_\alpha\}$ en $B_{\mathcal{K}(X)}$ tal que

$$\{K_\alpha\} \overset{\sigma(\mathcal{E},P(\mathcal{E}^*))}{\longrightarrow} I_X.$$

Por el Corolario III.1.9, para cualesquiera $x^{**} \in X^{**}$ y $x^* \in X^*$, se tiene

$$\{P(x^{**} \otimes x^*)(K_\alpha)\} = \{x^{**}(K_\alpha^* x^*)\} \longrightarrow P(x^{**} \otimes x^*)(I_X) = x^{**}x^*.$$

Por tanto, $\{K_\alpha\}$ y $\{K_\alpha^*\}$ convergen a la identidad en los respectivos espacios en la topología débil de operadores, por lo que usando de nuevo un argumento de convexidad, obtenemos que $\{K_\alpha\}$ es una a.c.s.i. ∎

Corolario III.2.19. *Sean $\mathcal{K}(X)$ un M-ideal de $\mathcal{L}(X)$, y Z un subespacio cerrado o un cociente de X. Entonces $\mathcal{K}(Z)$ es un M-ideal de $\mathcal{L}(Z)$ si, y sólo si, $\mathcal{K}(Z)$ es un ideal de $\mathcal{L}(Z)$.*

Demostración. En virtud del Teorema III.1.10 (cf. [HWW, Prop. VI.4.4]), X es un M-ideal, y por tanto, vía la Proposición II.1.3 (cf. [HWW, Th. III.1.6]), Z es igualmente un M-ideal. Por el Corolario III.1.7,

$$Z^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{Z^*}\},$$

en particular, si $\mathcal{K}(Z)$ es un ideal de $\mathcal{L}(Z)$, Z admite una a.c.s.i., con lo que basta aplicar [HWW, Th. VI.4.19]. ∎

Antes de recoger velas para obtener condiciones suficentes para la existencia de una a.c.s.i. en el caso general, permítasenos hacer un apunte en el caso reflexivo (cf. [GKS, Th. 8.3]), e incluso en un caso más amplio.

Corolario III.2.20 . *Sea Z un espacio de Banach reflexivo (resp. $\|I_{Z^{***}} - \lambda \pi_Z\| = a < \lambda \leq 2$). Si $\mathcal{K}(Z)$ es un ideal de $\mathcal{L}(Z)$, entonces Z admite una a.c.s.i.*

Demostración. Si Z es reflexivo, es claro que

$$Z^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{Z^*}\}.$$

En otro caso, en virtud de [GKS, Prop. 2.7],

$$r(M) \leq a\lambda^{-1} < 1,$$

para cualquier M subespacio propio arbitrario de Z^*, esto es, Z^* no tiene subespacios propios normantes. Por otra parte, Z es un espacio de Asplund (ver [GKS, Prop. 2.8]). Repitiendo argumentos (ver por ejemplo Corolario II.1.8),

$$Z^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-Fexp } B_{Z^*}\},$$

en particular

$$Z^* = \overline{\text{lin}}\{w^*\text{-dent } B_{Z^*}\}.$$

Basta ahora aplicar la proposición anterior. ∎

Sin más dilación, enunciamos el siguiente

Teorema III.2.21 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r,\ s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición III.2.18 y el Corolario III.1.11. ∎

Una vez resuelto el problema de la existencia de una a.c.s.i., la dificultad se centra en probar la desigualdad (1), para lo cual adaptaremos un resultado de W. Werner [Ww, Th. 3.5] (cf. [HWW, Th. V.3.2]), que a su vez necesita de la siguiente versión del PRL, también debida a Berhends (ver por ejemplo [HWW, Th. V.1.4]):

Teorema III.2.22 . *Sea Y un espacio de Banach, $F \subseteq Y^{**}$, $G \subseteq Y^*, H \subseteq \mathcal{L}(Y)$ subespacios finito-dimensionales, y consideremos el espacio $F_H := \operatorname{lin}\{h^{**}y^{**}, h \in H, y^{**} \in F\} + F$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal y continuo $T : F_H \longrightarrow Y$, cumpliendo las siguientes propiedades:*

(i) $Ty = y, \forall y \in F \cap Y$.

(ii) $(1-\varepsilon)\|y^{**}\| \leq \|Ty^{**}\| \leq (1+\varepsilon)\|y^{**}\|, \forall y^{**} \in F_H$.

(iii) $y^*(Ty^{**}) = y^{**}y^*, \forall y^{**} \in F, \forall y^* \in G$.

(iv) $\|(hT - Th^{**})|_F\| < \varepsilon\|h\|, \forall h \in H$.

Enunciemos ya el resultado que involucra las desigualdades.

Proposición III.2.23 . *Si $\mathcal{K}(X)$ es un P-ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad, y X admite una a.c.s.i. (resp. a.c.i.) $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$ tal que para cualesquiera $T \in \mathcal{E}$, $\phi \in \mathcal{E}^*$,*

$$P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(TK_\alpha) \tag{2}$$

$$(resp.\ P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(K_\alpha T)),$$

entonces

$$\overline{\lim_\alpha}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| \leq 1, \forall S, T \in B_\mathcal{E}$$

$$(resp.\ \overline{\lim_\alpha}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \leq 1, \forall S, T \in B_\mathcal{E}).$$

Demostración. Sea $S \in \mathcal{E}$. Notemos por L_S al operador en $\mathcal{E}$ definido por $L_S(T) = ST, \forall T \in \mathcal{E}$.

En virtud de (2), se tiene, para cada $g \in \mathcal{E}^*$,

$$(L_S^{**}(P^* I_X))(g) = (P^* I_X)(L_S^* g) = P(L_S^* g)(I_X) =$$

$$= \lim_\alpha (L_S^* g)(K_\alpha) = \lim_\alpha g(SK_\alpha) = (P^* S)(g),$$

luego

$$P^* S = L_S^{**}(P^* I_X), \forall S \in \mathcal{E}. \tag{3}$$

Ahora, como en la demostración de [Ww, Th. 3.5] (cf. [HWW, Th. V.3.2]), consideramos el conjunto $B = \{(F, G, H, \varepsilon)\}$, donde $F \subseteq \mathcal{E}^{**}$ ($P^* I_X \in F$), $G \subseteq \mathcal{E}^*, H \subseteq \mathcal{E}$ son subespacios de dimensión finita, y $\varepsilon > 0$, con el orden natural, a saber,

$$(F, G, H, \varepsilon) \leq (F_1, G_1, H_1, \varepsilon_1) \text{ si } F \subseteq F_1, G \subseteq G_1, H \subseteq H_1, \varepsilon \geq \varepsilon_1.$$

En virtud del PRL (ver Teorema III.2.22), para cada $\beta \in B$, existe un operador $T_\beta : \mathrm{lin}(F \cup \{L_S^{**} f : S \in H, f \in F\}) \longrightarrow \mathcal{E}$ tal que

$$T_\beta S = S, \forall S \in F \cap \mathcal{E}; \tag{4}$$

$$g(T_\beta f) = f(g), \forall f \in F, \forall g \in G; \tag{5}$$

$$\|T_\beta f\| \leq (1+\varepsilon)\|f\|, \forall f \in F; \tag{6}$$

$$\|(L_S T_\beta - T_\beta L_S^{**})|_F\| \leq \varepsilon\|S\|, \forall S \in H.$$

Obsérvese que en virtud de (3)

$$\|ST_\beta(P^* I_X) - T_\beta(P^* S)\| = \|ST_\beta(P^* I_X) - T_\beta(L_S^{**}(P^* I_X))\| =$$

$$= \|L_S T_\beta(P^* I_X) - T_\beta(L_S^{**}(P^* I_X))\| \leq \varepsilon\|S\|, \forall S \in H,$$

esto es,

$$\|ST_\beta(P^* I_X) - T_\beta(P^* S)\| \leq \varepsilon\|S\|, \forall S \in H. \tag{7}$$

En particular, para cada $g \in \mathcal{E}^*$, en virtud de (5),

$$\{g(T_\beta(P^* I_X))\} \longrightarrow (P^* I_X)(g),$$

mientras que, por (2),

$$\{g(K_\alpha)\} \longrightarrow (P^* I_X)(g).$$

Con el fin de unificar el índice de las redes, consideramos $\Lambda = A \times B$ dotado del orden lexicográfico, donde A es el conjunto de todos los α.

Notaremos

$$\hat{K}_\lambda = K_\alpha \text{ y } \hat{T}_\lambda = T_\beta,$$

siempre que $\lambda = (\alpha, \beta)$. Obsérvese que las redes $\{\hat{K}_\lambda\}$ y $\{\hat{T}_\lambda\}$ cumplen las mismas propiedades que las redes $\{K_\alpha\}$ y $\{T_\beta\}$. Por comodidad, serán notadas de la misma manera e indizadas en A.

En particular, $\{K_\alpha - T_\alpha(P^* I_X)\}$ converge a cero en la topología débil. Mediante un argumento de convexidad, podemos suponer que

$$\|K_\alpha - T_\alpha(P^* I_X)\| \longrightarrow 0. \tag{8}$$

En virtud del Lema I.4.17, para cada $S, T \in B_{\mathcal{E}}$,

$$\|rP^*S + s(T - P^*T)\| \leq 1.$$

Las condiciones (8), (7), (4) y (6) junto con la última desigualdad permiten obtener que

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| =$$

$$= \overline{\lim_{\alpha}}\|rT_\alpha(P^*S) + s(T - T_\alpha(P^*T))\| =$$

$$= \overline{\lim_{\alpha}}\|T_\alpha(rP^*S + s(T - P^*T))\| \leq 1.$$

La demostración es análoga si es el caso en que X admite una a.c.i. En efecto, tomando el operador $R_S : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ definido por

$$R_S T = TS, \forall T \in \mathcal{E},$$

puede seguirse idéntico razonamiento para concluir ahora que

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| =$$

$$= \overline{\lim_{\alpha}}\|T_\alpha(rP^*S + s(T - P^*T))\| \leq 1. \quad \blacksquare$$

Nota. Obsérvese que en la proposición anterior no se tiene asegurada la unicidad de la proyección P, y por tanto ha de imponerse la igualdad (2).

Llegados a este punto es obligado mencionar el siguiente resultado, que muestra un procedimiento constructivo (llamado procedimiento de Johnson) de una proyección en $\mathcal{L}(X)^*$ a partir de la MCAP.

Proposición III.2.24. [J, Lemma 1] (cf. [L5, Th. 3.1]). *Sea $\lambda \geq 1$. Si X admite una a.c.i. (resp. a.c.s.i.) $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq \lambda$, entonces existe una subred de $\{K_\alpha\}$, que seguimos notando igual, tal que la aplicación $P : \mathcal{L}(X)^* \longrightarrow \mathcal{L}(X)^*$ definida por*

$$P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(K_\alpha T), \forall \phi \in \mathcal{L}(X)^*, T \in \mathcal{L}(X),$$

$$(resp.\ P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(T K_\alpha), \forall \phi \in \mathcal{L}(X)^*, T \in \mathcal{L}(X)),$$

es una proyección con norma menor o igual que λ y cuyo núcleo es $\mathcal{K}(X)^\perp$.

Nota. En las condiciones del anterior enunciado, en virtud de la Proposición I.1.2, y si $\|K_\alpha\| \leq 1$, se puede encontrar una proyección $Q : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ definida por

$$Q(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(K_\alpha T)(\text{resp. } Q(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(T K_\alpha)), \forall \phi \in \mathcal{E}^*, T \in \mathcal{E},$$

tal que $\mathcal{K}(X)$ es un Q-ideal de $\mathcal{E}$.

Si unimos el resultado anterior con el teorema de la unicidad de proyecciones (Teorema III.1.14) y el Teorema III.2.21, podemos establecer el siguiente

Corolario III.2.25 . *Si $\mathcal{K}(X)$ verifica la $M(r, s)$-desigualdad con $r + \frac{s}{2} > 1$, entonces cualquier a.c.s.i. en $B_{\mathcal{K}(X)}$ admite una subred $\{K_\alpha\}$, tal que la (única) proyección asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$ viene definida por:*

$$P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(K_\alpha T) = \lim_\alpha \phi(T K_\alpha), \forall \phi \in \mathcal{E}^*, \forall T \in \mathcal{E}.$$

Profundizando un poco más en esta misma dirección se puede afirmar incluso que las sucesivas perfecciones de la red $\{K_\alpha\}$ desembocan en sucesivas perfecciones de la proyección P, o si se quiere sobre la misma proyección π_X, o incluso sobre el propio X. Así por ejemplo obtenemos la siguiente

Proposición III.2.26. *Sean $r, s \in]0,1]$. Si $\{K_\alpha\}$ es una a.c.i (resp. a.c.s.i.) con $\|K_\alpha\| \leq 1$ tal que*

$$\overline{\lim_\alpha}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \leq 1, \forall S, T \in B_{\mathcal{E}} \tag{9}$$

$$\textit{(resp. } \overline{\lim_\alpha}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| \leq 1, \forall S, T \in B_{\mathcal{E}}), \tag{10}$$

entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r,\, s)$-desigualdad.

(ii) Sean $x^*, y^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Si $\{x^*_\alpha\}$ es una red acotada y w^*-nula, entonces

$$\overline{\lim_\alpha}\|rx^* + sx^*_\alpha\| \leq \overline{\lim_\alpha}\|y^* + x^*_\alpha\|.$$

(iii) X verifica la $M(r,\, s)$-desigualdad.

(iv) Si además $r = 1$, entonces la topología de la norma y w^* coinciden en S_{X^*}.

Demostración. (i) En virtud del procedimiento de Johnson (ver nota de la Proposición III.2.24), existe una proyección Q en $\mathcal{E}^*$, tal que, para cualesquiera $S, T \in \mathcal{E}$ y $g \in \mathcal{E}^*$, se tiene

$$r(Qg)(S) + s(g - Qg)(T) = \lim_{\alpha} g(rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T),$$

$$(\text{resp. } r(Qg)(S) + s(g - Qg)(T) = \lim_{\alpha} g(rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)),$$

y por tanto, en virtud de (9) (resp. de (10))

$$r\|Qg\| + s\|g - Qg\| \leq \|g\|.$$

(ii) Es fácil encontrar un operador S^* de rango uno w^*-continuo que aplica y^* en x^*. Por otra parte es claro que $\lim_\alpha \|K_\beta^* x_\alpha^*\| = 0$. Por tanto,

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rx^* + sx_\alpha^*\| = \overline{\lim_{\alpha}}\|rS^*(y^* + x_\alpha^*) + s(I_{X^*} - K_\beta^*)x_\alpha^*\| \leq$$

$$\leq \|rS^* + s(I_{X^*} - K_\beta^*)\|\overline{\lim_{\alpha}}\|y^* + x_\alpha^*\| + s\|(I_{X^*} - K_\beta^*)y^*\|.$$

Basta finalmente tomar límite superior en β.

(iii) Sean $x^\perp \in X^\perp$ y $x^* \in X^*$. Para cada $\lambda < 1$, existen $x^{**} \in B_{X^{**}}$ e $y^* \in X^*$ tales que

$$x^{**}x^* > \lambda\|x^*\| \text{ , } \|y^*\| = \|x^*\| \text{ y } x^{**}y^* > \lambda\|x^*\|.$$

Tomemos una red $\{y_\alpha^*\}$ en X^* w^*-convergente a $x^\perp$ y tal que

$$\|x^* + y_\alpha^*\| \leq \|x^* + x^\perp\| \text{ y } x^{**}y_\alpha^* > \lambda\|x^\perp\|.$$

En definitiva, obtenemos

$$\|x^* + x^\perp\| \geq \overline{\lim_{\alpha}}\|x^* + y_\alpha^*\| \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{\alpha}}\|ry^* + sy^*_\alpha\| \geq \overline{\lim_{\alpha}} x^{**}(ry^* + sy^*_\alpha) \geq$$
$$\geq \lambda(\|rx^*\| + s\|x^\perp\|),$$

por lo que haciendo tender λ hacia uno, se obtiene que X satisface la $M(r,\, s)$-desigualdad.

(iv) Sea $x^*_0 \in S_{X^*}$ y $\{x^*_\alpha\}$ una red en S_{X^*} convergiendo a x^*_0 en la topología w^*. Sea x^* un punto w^*-fuertemente expuesto (téngase en cuenta que éstos existen en virtud del apartado (iii) y del Corolario II.1.8).

Claramente $\{x^* + s(x^*_\alpha - x^*_0)\} \xrightarrow{w^*} x^*$, y

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|x^* + s(x^*_\alpha - x^*_0)\| \leq \overline{\lim_{\alpha}}\|x^*_0 + x^*_\alpha - x^*_0\| = 1.$$

Por tanto, por la condición impuesta a x^*, se tiene que la red $\{\|x^*_\alpha - x^*_0\|\}$ converge a cero. ∎

Nota. Es fácil probar igualmente que si $\{K_\alpha\}$ es una a.c.i. con $\|I_X - 2K_\alpha\| \leq 1$, entonces $\mathcal{K}(X)$ es un u-ideal de $\mathcal{E}$.

El paso de aproximaciones compactas a aproximaciones compactas *"shrinking"* es en ciertos casos automático, tal como probamos en la siguiente

Proposición III.2.27. *Sean $r, s \in\,]0,1]$ tales que $r + s > 1$. Si X admite una a.c.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \leq 1$ tal que*

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \leq 1, \forall S, T \in B_{\mathcal{E}},$$

entonces $\{K_\alpha\}$ es una a.c.s.i.

Demostración. En virtud de la proposición anterior, X verifica la $M(r, s)$-desigualdad, por lo que usando el Corolario II.1.8, X tiene la UEP. En particular, vía [GS, Th. 2.2], $\{K_\alpha\}$ es una a.c.s.i. ∎

A la vista de este último resultado, puede deducirse que, en la hipótesis de la Proposición III.2.23, X admite, *a posteriori*, una a.c.s.i.

Las anteriores observaciones nos llevan a la buscada caracterización, concretamente,

Teorema III.2.28. *Sean $r, s \in]0,1]$ tales que $r + \frac{s}{2} > 1$. Entonces equivalen las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{E}$ verificando la $M(r, s)$-desigualdad.

(ii) X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \le 1$, tal que

$$\overline{\lim_\alpha}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| \le 1, \forall S, T \in B_{\mathcal{E}},$$

(iii) X admite una a.c.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \le 1$, tal que

$$\overline{\lim_\alpha}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \le 1, \forall S, T \in B_{\mathcal{E}}.$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ y $(i) \Rightarrow (iii)$ Sea P la proyección asociada al ideal $\mathcal{K}(X)$. En virtud del Corolario III.2.25, X admite una a.c.s.i. $\{K_\alpha\}$ con $\|K_\alpha\| \le 1$ tal que

$$P(\phi)(T) = \lim_\alpha \phi(K_\alpha T) = \lim_\alpha \phi(TK_\alpha), \forall \phi \in \mathcal{E}^*, \forall T \in \mathcal{E}.$$

Aplicando ahora la Proposición III.2.23, se tiene

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rSK_\alpha + sT(I_X - K_\alpha)\| \leq 1, \forall S, T \in B_\mathcal{E},$$

y

$$\overline{\lim_{\alpha}}\|rK_\alpha S + s(I_X - K_\alpha)T\| \leq 1, \forall S, T \in B_\mathcal{E}.$$

Las implicaciones $(ii) \Rightarrow (i)$ y $(iii) \Rightarrow (i)$ están probadas en la Proposición III.2.26. ∎

Finalizamos esta sección obteniendo nuevas consecuencias para el caso reflexivo. Para ello resulta crucial el siguiente resultado, el cual es una versión revisitada de [HL, Lemma 5.2] (cf. [HWW, Prop. VI.4.11]).

Lema. *Sea X un espacio de Asplund. Si X admite una a.c.s.i., entonces $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{K}(X)^{**} \subseteq \mathcal{L}(X^{**})$.*

Combinando el resultado anterior con el Corolario III.2.20, se obtiene:

Corolario III.2.29. *Sea Z un espacio de Banach reflexivo. Si $\mathcal{K}(Z)$ es un ideal de $\mathcal{L}(Z)$, entonces, $\mathcal{K}(Z)^{**} = \mathcal{L}(Z)$.*

Su *"recíproco"* es también cierto, esto es,

Proposición III.2.30. *Si $\mathcal{K}(Z)$ verifica la $M(r,s)$-desigualdad en su bidual con $r + s > 1$, entonces Z es reflexivo.*

Demostración. Consideremos la inclusión natural de Z^* en $\mathcal{K}(Z)$. En virtud del Corolario II.1.8, Z^* es reflexivo, y por tanto, Z también lo es.

∎

III.3 Ejemplos

Concluimos con algunos ejemplos de ideales de operadores compactos que verifican la $M(r, s)$-desigualdad. Necesitamos un pequeño ajuste de la Proposición I.3.15.

Proposición III.3.31 . *Sean* $r, s \in]0,1]$. *Supongamos que* X *admite una a.c.i.* $\{K_\alpha\}$ *con* $\|K_\alpha\| \leq 1$ *tal que*

$$\overline{\lim_\alpha} \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} \|rK_\alpha x + s(I_X - K_\alpha)y\| \leq 1.$$

Entonces, $\mathcal{K}(X)$ *verifica la* $M(r, s)$*-desigualdad en* $\mathcal{L}(X)$.

Demostración. Es fácil ver que para $Y = \mathcal{L}(X)$ y V_α definida por

$$V_\alpha(T) = K_\alpha T, \forall T \in \mathcal{L}(X),$$

se verifica las hipótesis de la Proposición I.3.15. ∎

Definimos a continuación el espacio de Lorentz $d(a, p)$.

Sea $1 < p < +\infty$. Para cada $a = \{a_i\} \in c_0 \setminus l_1$ con $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$, sea

$$d(a,p) = \left\{ x = \{x_n\} \in c_0 : \sup_{\sigma\in\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} | x_{\sigma(n)} |^p a_n < +\infty \right\},$$

donde π es el conjunto de todas las permutaciones de números naturales. Recordemos que $d(a, p)$ con la norma

$$\|x\| = \sup_{\sigma\in\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} | x_{\sigma(n)} |^p a_n \right)^{\frac{1}{p}},$$

es un espacio de Banach.

Corolario III.3.32.

(i) $\mathcal{K}(d(a,p))$ *verifica la* $M\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}, \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\right)$*-desigualdad en* $\mathcal{L}(d(a,p))$.

(ii) Sea $Z = (\mathbb{R} \times c_0, \|\cdot\|_\gamma)$, *con* $0 < \gamma < 1$, *donde*

$$\|(\alpha, y)\|_\gamma = |\,(|\,\alpha\,|, \|y\|)\,|_\gamma, \forall \alpha \in \mathbb{R}, y \in c_0.$$

Entonces, $\mathcal{K}(Z)$ *es un u-ideal de* $\mathcal{L}(Z)$ *que verifica la* $M(1 - \gamma, 1)$*-desigualdad en* $\mathcal{L}(Z)$, *y no tiene la propiedad U en* $\mathcal{L}(Z)$.

(iii) $\mathcal{K}(X_\mu)$ *verifica la* $M\left(1, \frac{1-\mu}{1+\mu}\right)$*-desigualdad en* $\mathcal{L}(X_\mu)$.

(iv) Sea $\sum a_n$ *una serie convergente de reales positivos y sea* $a \in]0,1[$ *su suma. Para cada* $x = \{x_n\} \in c_0$ *se define*

$$\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |x_n| + \sum_{k=1}^{n} |x_k| a_k \right\}.$$

Entonces $\mathcal{K}((c_0, \|\cdot\|))$ *verifica la* $M(1, 1 - a)$*-desigualdad en* $\mathcal{L}((c_0, \|\cdot\|))$.

Demostración. (i) Es claro que, para cada $x, y \in d(a,p)$,

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p,$$

donde x e y tienen soporte disjunto. Luego, basta aplicar la proposición anterior.

(ii) Basta recordar lo obtenido en el Ejemplo II.2.17. Por otra parte, siguiendo la notación de dicho ejemplo, es claro que $\|I_Z - 2P_n\| \leq 1$, luego (recordar nota a la Proposición III.2.26) $\mathcal{K}(Z)$ es un u-ideal de

$\mathcal{L}(Z)$. Si $\mathcal{K}(Z)$ tuviese la propiedad U, en virtud de [L3, Th. 4.5], entonces Z tendría igualmente la propiedad U en su bidual, lo cual está en contradicción con lo visto en el Ejemplo II.2.17.

(iii) y (iv) ya han sido vistos respectivamente en los Ejemplos II.2.15 y II.2.16. ∎

Bibliografía.

[AE] E. M. ALFSEN and E. G. EFFROS, *Structure in real Banach spaces. Part I and II.* Ann. of Math. **96** (1972) 98-173.

[An] T. ANDO, *Closed range theorems for convex sets and linear liftings.* Pacific J. Math. **44** (1973) 393-410.

[Be1] E. BEHRENDS, *M-structure and the Banach-Stone Theorem.* Lecture Notes in Math. 736. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[Be2] E. BEHRENDS, *On the principle of local reflexivity.* Studia Math. **100** (1991) 109-128.

[BeH] E. BEHRENDS and P. HARMAND, *Banach spaces which are proper M-ideals.* Studia Math. **81** (1985) 159-169.

[BoD] F. F. BONSALL and J. DUNCAN, *Numerical Ranges II.* London Mathematical Society. Lecture Note Series 10. Cambridge University Press, 1973.

[C] J. C. CABELLO, *Espacios de Banach que son subespacios absolutos de su bidual.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, 1988.

[CMPR] J. C. CABELLO-PIÑAR, J. F. MENA-JURADO, R. PAYÁ-ALBERT, and A. RODRIGUEZ-PALACIOS, *Banach spaces which are absolute subspaces in their biduals.* Quart. J. Math. Oxford (2) **42** (1991) 175-182.

[CN1] J. C. CABELLO and E. NIETO, *On Properties of M-ideals.* Preprint.

[CN2] J. C. CABELLO and E. NIETO, *$M(s)$-inequality and property (u).* Comunicación presentada en el Workshop FAMA'95, *"Functional Analysis: Methods and Applications"*. Camigliatello Silano, Cosenza (Italia), 29 Mayo - 2 Junio, 1995. Publicado en Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Número 40 (1996) 73-78.

[CsK] P. G. CASAZZA and N. J. KALTON, *Notes on approximation properties in separable Banach spaces.* In: P. F. X. Müller and W. Schachermayer, editors, *Geometry of Banach Spaces, Proc. Conf. Strobl 1989*, London Mathematical Society. Lecture Note Series 158, pp. 49-63. Cambridge University Press, 1990.

[DaPh] W. J. DAVIS and R. R. PHELPS, *The Radon-Nikodým property and dentables sets in Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974) 119-122.

[Di] J. DIESTEL, *Geometry of Banach Spaces - Selected Topics.* Lecture Notes in Math. 485. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[DiU] J. DIESTEL and J. J. UHL, *Vector Measures.* Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[Du] D. VAN DULST, *Reflexive and Superreflexive Banach Spaces.* Math. Centre Tracts 102. Amsterdam, 1978.

[DSc] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, *Linear Operators. Part I. General Theory.* John Wiley and Sons. New York, 1988.

[FaG] M. FABIAN and G. GODEFROY, *The dual of every Asplund space admits a projectional resolution of the identity.* Studia Math. **91** (1988) 141-151.

[FeS] M. FEDER and P. SAPHAR, *Spaces of compact operators and their dual spaces.* Israel J. Math. **21** (1975) 38-49.

[G] G. GODEFROY, *Quelques remarques sur l'unicité des préduaux.* Quart. J. Oxford Math. (2) **35** (1984) 147-152.

[GK] G. GODEFROY and N. J. KALTON, *The ball topology and its applications.* In: Bor-Luh Lin, editor, *Banach Space Theory. Proc. of the Iowa Workshop on Banach Space Theory 1987*, pp. 195-237. Contemp. Math. **85**, 1989.

[GKS] G. GODEFROY, N. J. KALTON, and P. D. SAPHAR, *Unconditional ideals in Banach spaces.* Studia Math. **104** (1) (1993) 13-59.

[GLi] G. GODEFROY and D. LI, *Banach spaces which are M-ideals in their bidual have property* (u). Ann. Inst. Fourier, Grenoble **39.2** (1989) 361-371.

[GSa] G. GODEFROY and P. SAAB, *Weakly unconditionally convergent series in M-ideals.* Math. Scand. **64** (1989) 307-318.

[GS] G. GODEFROY and D. SAPHAR, *Duality in spaces of operators and smooth norms in Banach spaces.* Illinois J. Math. **32** (1988) 672-695.

[HL] P. HARMAND and Å. LIMA, *Banach spaces which are M-ideals in their biduals.* Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984) 253-264.

[HWW] P. HARMAND, D. WERNER, and W. WERNER, *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras.* Lecture Notes in Math. 1547. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[He] J. HENNEFELD, *M-ideals, HB-subspaces, and compact operators.* Indiana Univ. Math. J. **28** (1979) 927-934.

[J] J. JOHNSON, *Remarks on Banach spaces of compact operators.* J. Funct. Anal. **32** (1979) 304-311.

[JW] J. JOHNSON and J. WOLFE, *On the norm of the canonical projection of E^{***} onto $E^{\perp}$.* Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979) 50-52.

[K] N. J. KALTON, *M-ideals of compact operators.* Illinois J. Math. **37** (1993) 147-169.

[L1] A. LIMA, *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977) 1-62.

[L2] A. LIMA, *On M-ideals and best approximation.* Indiana Univ. Math. J. **31** (1982) 27-36.

[L3] A. LIMA, *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and liftings of linear dependences.* Math. Scand. **53** (1983) 97-113.

[L4] A. LIMA, *The metric approximation property, norm-one projections and intersection properties of balls.* Israel J. Math. **84** (1993) 451-475.

[L5] A. LIMA, *Property (wM^*) and the unconditional metric compact approximation property.* Studia Math. **113** (1995) 249-263.

[LORW] A. LIMA, E. OJA, T. S. S. R. K. RAO, and D. WERNER, *Geometry of operators spaces.* Michigan Math. J. **41** (1994) 473-490.

[MPR] J. F. MENA-JURADO, R. PAYÁ, and A. RODRIGUEZ-PALACIOS, *Semisummands and semiideals in Banach spaces.* Israel J. Math. **51** (1985) 33-67.

[O1] E. OJA, *On the uniqueness of the norm-preserving extension of a linear functional in the Hahn-Banach theorem.* Izv. Akad. Nauk Est. SSR **33** (1984) 424-438. (Russian).

[O2] E. OJA, *Strong uniqueness of the extension of linear continuous functionals according to the Hahn-Banach theorem*. Math. Notes **43** (1988) 134-139.

[P] R. PAYÁ, *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1980.

[PY] R. PAYÁ AND D. YOST, *The two-ball property: transitivity and examples*. Mathematika **35** (1988) 190-197.

[Ph1] R. R. PHELPS, *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation*. Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960) 238-255.

[Ph2] R. R. PHELPS, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. Lecture Notes in Math. 1364. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[R] T. S. S. R. K. RAO, *Remarks on uniqueness of norm preserving extension of certain functionals on subspaces of $L(X, Y)$*. Preprint.

[Ri] M. A. RIEFFEL, *Dentable subsets of Banach spaces, with applications to a Radon-Nikodým theorem*. Proc. Conf. Irvine. California. Academic Press (1967) 71-77.

[Si] I. SINGER, *Bases in Banach Spaces I*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[W1] D. Werner, *Denting points in tensor products of Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1) (1987) 122-126.

[W2] D. Werner, *New classes of Banach spaces which are M-ideals in their biduals.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **111** (1992) 337-354.

[W3] D. Werner, *M-ideals and the 'basic inequality'.* J. Approx. Th. **76** (1994) 21-30.

[Ww] W. Werner, *Inner M-ideals in Banach algebras.* Math. Ann. **291** (1991) 205-223.

[Y] D. Yost, *Banach spaces isomorphic to proper M-ideals.* Colloq. Math. **56** (1988) 99-106.

Indice Alfabético.