Estudio de algunos problemas de Control Óptimo que surgen en Dinámica de Poblaciones

Tesis Doctoral

Juan Aurelio Montero Sánchez

Granada, 1.998.

... y cuando me veo perdido en un mundo infinito de conceptos, la imagen de tu dulce y sincera sonrisa, que se manténdrá viva en mí, me hace sentir que hay más cosas de las que se ven, oyen o puedan pensar.

Índice General

Introducción.

Los problemas de optimización tienen una gran importancia dentro de la Matemática y sus aplicaciones. Su origen se remonta a la antigua Grecia (recordemos que ya los griegos conocían que el segmento rectilíneo que une dos puntos dados del plano, proporciona la distancia más corta entre ellos y que, de entre todas las curvas planas de longitud dada, la circunferencia es la que encierra un área mayor). Sin embargo, un desarrollo sistemático de la teoría adecuada para tratar problemas de ese tipo, no fue posible hasta el siglo XVIII, con el nacimiento del Cálculo de Variaciones, que necesitó previamente una definición precisa de los conceptos de derivación e integración. El Cálculo de Variaciones tiene una dilatada historia, que comenzó con el problema de la Braquistocrona, y constituye en la actualidad uno de los campos de la Matemática más atractivo e interesante, debido a sus aplicaciones, que incluyen problemas de disciplinas muy diversas, tales como Física (Mecánica, Astronomía, Elasticidad), Ingeniería, Economía, Biología, etc. De manera especial, en los años 50 de este siglo, muchos problemas provenientes de los procesos industriales y de los viajes espaciales, no respondían al modelo clásico del tipo tratado en el Cálculo de Variaciones. Básicamente constituían una clase de problemas donde se deseaba controlar el estado del sistema considerado, con objeto de optimizar algún tipo de coste. Así nació lo que se conoce hoy en día con el nombre de Teoría de Control Óptimo. Podemos consultar más aspectos históricos del tema en Neustad [57] o en Lee y Markus [41].

Existe una gran variedad de problemas y técnicas dentro de lo que se denomina Teoría de Control Óptimo. Podríamos citar los problemas de control óptimo estocástico, problemas de control óptimo no diferenciable, problemas de control óptimo con ecuaciones diferenciales ordinarias, con ecuaciones en derivadas parciales o con ecuaciones integrales, etc.(ver por ejemplo [16], [30], [50], [51] y [59])

En líneas generales, un problema de control óptimo constará, básicamente, de los siguientes elementos:

a) Un control a nuestra disposición, f, que podrá ser elegido entre una familia de controles A (generalmente un subconjunto apropiado de un espacio de funciones) y cuyo objeto es modificar a voluntad, los diferentes estados de un sistema.

b) El estado del sistema, u, que se desea controlar y que depende del control.

c) Una ecuación, llamada ecuación de estado, que establece la dependencia entre el control y el estado.

d) Un funcional a maximizar (o minimizar), J, dependiente del estado u y el control f. Normalmente, el funcional J recibe el nombre de funcional de beneficio o coste, según se pretenda maximizar o minimizar.

En esta tesis, motivada, en gran parte, por el trabajo de Leung-Stojanovic [47], nos centraremos en algunos problemas de control óptimo que surgen en Dinámica de Poblaciones. La ecuación de estado será, según el caso, una ecuación o un sistema en derivadas parciales de tipo elíptico. La clase de ecuaciones considerada incluye a las ecuaciones elípticas de tipo Lotka-Volterra. Tanto en el caso de ecuaciones, como de sistemas en derivadas parciales, pretendemos el estudio de la existencia, unicidad, propiedades cualitativas y aproximación de los posibles controles óptimos. El uso de técnicas de análisis no lineal y de la teoría de control óptimo para E.D.P. (ecuaciones en derivadas parciales) será una constante a lo largo de esta memoria.

A continuación presentaremos brevemente los problemas que hemos estudiado y los objetivos conseguidos.

En las secciones 1-4 del primer capítulo estudiaremos un problema de control óptimo cuya ecuación de estado es una ecuación elíptica logística con condición en la frontera de tipo Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) = u(x)[a(x) - f(x) - b(x)u(x)], \quad & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^N$, el operador Δ representa el operador Laplaciano y $a, b, f \in L^\infty(\Omega)$, con $b(x) \geq s > 0$ para $x \in \Omega$.

La ecuación anterior modela las situaciones de equilibrio del correspondiente modelo parabólico de tipo Lotka-Volterra, referente a la evolución en el tiempo de una especie u (ver Smoller [63], Okubo [56]). La función a expresa la tasa de crecimiento de dicha especie, mientras que b refleja los efectos de la superpoblación; por su parte, f juega el papel de control. Su acción dentro del proceso es el de influir en la razón de crecimiento de las especies para mejorar la calidad, así tiene una influencia también en el beneficio final del proceso (ver [13], [47]).

Se sabe (ver por ejemplo [5] o [37]), que para cada $f \in L^\infty(\Omega)$, la ecuación (0.1) tiene una única solución maximal no negativa $u_{\Omega,a,b,f}$ (en la sección primera haremos un estudio detallado de esta ecuación y de las propiedades cualitativas de su solución no negativa). Si notamos por K y M, respectivamente, el precio de la especie u, al realizar la venta, y del control f, la diferencia que se obtiene entre los ingresos y gastos puede expresarse por la cantidad

$$J_{K,M}(f) = \int_\Omega (K u_{\Omega,a,b,f} f - M f^2).$$

Así, nuestro interés se centra en maximizar $J_{K,M}$. Notemos que el valor de $J_{K,M}(f)$ representa el precio de venta de la población total menos el coste del control que sobre ella se ha efectuado, ponderado por la acción del control f.

En realidad, usaremos un funcional equivalente

$$J(f) \equiv \frac{J_{K,M}(f)}{M} = \int_{\Omega} (\lambda u_{\Omega,a,b,f}\, f - f^2), \tag{0.2}$$

donde ahora $\lambda = \frac{K}{M}$.

La pregunta natural que puede uno hacerse es ¿para qué subconjuntos A de $L^{\infty}(\Omega)$, tiene J (restringido a A), máximo global?

Tomando como espacio de controles el conjunto

$$A = L^{\infty}_{+}(\Omega) = \{g \in L^{\infty}(\Omega) : g \geq 0 \text{ c.e.t. } \Omega\},$$

en la sección segunda probaremos que el funcional J alcanza su supremo en $L^{\infty}_{+}(\Omega)$, i.e., $\exists f \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ tal que $J(f) = \sup_{g \in L^{\infty}_{+}(\Omega)} J(g)$. También daremos, en función de las propiedades espectrales del operador Δ, del dominio Ω y de la tasa de natalidad a, una condición necesaria y suficiente para que el beneficio óptimo sea positivo. Creemos interesante este resultado, sobre todo desde el punto de vista de las aplicaciones. Como consecuencia, obtendremos una acotación inferior para el beneficio. Completaremos la sección con un estudio de las propiedades cualitativas que se deducen del hecho que un control sea óptimo (condiciones de optimalidad); en particular, teniendo en cuenta estas condiciones de optimalidad, derivaremos un sistema de ecuaciones diferenciales (sistema de optimalidad) en el que vienen relacionados el estado del sistema, u, y el control óptimo.

En la sección tercera abordaremos el problema de la unicidad del control óptimo. Tendremos en cuenta las condiciones que garantizan que el beneficio sea positivo (en otro caso de (0.2) deduciríamos que el beneficio óptimo sería nulo y que el control óptimo sería la función constantemente cero) y el sistema de optimalidad. El tipo de hipótesis bajo las cuales hemos probado la unicidad del control óptimo es de dos clases: tomar el parámetro $0 < \lambda$, que aparece en el funcional J, suficientemente pequeño y/o tomar el ínfimo de b suficientemente grande (ver el Corolario 1.20 y el Teorema 1.25 para más detalles).

El problema de la aproximación del control óptimo ha sido estudiado en la sección cuarta. La idea es construir convenientes sucesiones monótonas, aprovechando las propiedades de monotonía que tiene el sistema de optimalidad, que converjan al único control óptimo. Para la construcción de ellas nos hemos basado en el trabajo de Leung-Stojanovic [47]. A diferencia de estos autores, nosotros sí logramos dar condiciones, del mismo tipo que las obtenidas en el estudio de la unicidad, que garantizan la convergencia de dicha aproximación.

La última sección de este capítulo la hemos dejado para extender los resultados obtenidos en las secciones 1-4, a un problema de control, donde tomamos una ecuación de estado como (0.1), pero considerando condiciones en la frontera del dominio Ω del tipo Neumann. La novedad más importante, con respecto a las técnicas consideradas en las secciones anteriores, es la demostración, usando elementos del análisis convexo, de la unicidad del control óptimo. La elegancia y simplicidad de este tipo de razonamientos es evidente y su utilidad se pondrá de manifiesto sobre todo, en el estudio de la unicidad en el caso de sistemas, como veremos en el capítulo siguiente.

Los resultados sobre la caracterización del beneficio positivo, unicidad y aproximación del control óptimo, demostrados en este capítulo, son nuevos en el caso de tomar condiciones de contorno tipo Dirichlet e incluyen de manera estricta los obtenidos en el trabajo de Leung-Stojanovic [47], cuando consideramos condiciones en la frontera de Ω de tipo Neumann. Además, prueban la unicidad del control óptimo bajo ciertas hipótesis y dan condiciones que responden afirmativamente a la cuestión abierta, planteada al final del artículo citado, en la que se cuestiona la convergencia de unas sucesiones al control óptimo.

En el capítulo segundo hemos tratado un problema de control, cuyo estado sigue un comportamiento descrito por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, con condiciones en la frontera de tipo Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = \sigma(x)v - d_1(x)u - c_1u(u+v), & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u - d_2(x)v - c_2v(u+v), & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^N$, el símbolo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ representa la derivada en la dirección del vector normal exterior, las funciones σ, b, d_1, d_2 pertenecen al espacio de funciones $L^\infty_+(\Omega)$ y c_1, c_2 son constantes positivas.

La idea es modelar el comportamiento de una población que viene dividida en dos subpoblaciones de individuos: jóvenes y adultos. "Necesariamente" los individuos jóvenes son generados por adultos. De la misma manera los individuos adultos provienen de la "maduración" de los jóvenes. Esta es la razón de la "simetría" que se puede observar en los coeficientes del sistema anterior. También es interesante constatar que en este modelo, de forma diferente a lo que ocurre en otros modelos de la Biología (modelo Lotka-Volterra para varias especies), no hay soluciones semitriviales (presencia de una especie en ausencia de la otra), lo cual es lógico desde el punto de vista de la interpretación biológica del problema. Y aún más, en los modelos de tipo Presa-Depredador o Competición, los procedimientos usuales para garantizar un estado de coexistencia (supervivencia de las dos especies a la vez) permiten el que una especie pueda existir en ausencia de la otra (ver Gámez [32], Li [48], Li-Logan [49] y López-Gómez [52]). Sin embargo, en nuestro modelo, si ningún individuo llegase a adulto (ausencia de adultos) la población total se extinguiría y de la misma manera si no hay "nacimiento" de jóvenes la población está abocada a la desaparición. Así, la función σ representará la proporción de jóvenes que llegan a adultos y b la razón de jóvenes que "nacen" de los adultos. Las constantes $c_1, c_2 > 0$ expresarán la interacción existente entre cada subpoblación con el total y las funciones d_1, d_2 tomarán el papel de control. Su acción dentro del proceso es influir en el crecimiento de cada una de las subespecies con el objeto de mejorar la calidad y por tanto el beneficio.

Como funcional de beneficio vamos a tomar la variante bidimensional de

(0.2), a saber,

$$J(d_1,d_2)=\int_\Omega\Big\{\lambda u_{d_1,d_2}(x)d_1(x)-(d_1(x))^2+ \\ +\mu v_{d_1,d_2}(x)d_2(x)-(d_2(x))^2\Big\}\,dx, \tag{0.4}$$

donde ahora $(d_1,d_2)\in C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}$. El espacio de controles $C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}$ se define para $\delta_i>0,\ i=1,2$, tomando $C_{\delta_i}=\{g\in L^\infty(\Omega):0\leq g\leq\delta_i\}$.

El contenido del segundo capítulo se organiza como sigue: comenzamos la primera sección incluyendo un resultado de existencia y unicidad de solución para sistemas lineales de tipo cooperativo. Este resultado nos será de utilidad cuando busquemos la expresión de la derivada direccional de las soluciones de (0.3), $(u_{d_1,d_2},v_{d_1,d_2})$, respecto de los controles $(d_1,d_2)\in C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}$ (ver sección segunda). Además, mediante un argumento de concavidad-convexidad para operadores cóncavos y positivos entre espacios de Banach ordenados, obtendremos condiciones que garanticen la unicidad de solución con ambas componentes positivas del sistema (0.3). Por su parte, la existencia la probaremos usando métodos monótonos. Así, podremos dotar de sentido pleno a las expresiones u_{d_1,d_2} y v_{d_1,d_2}, $\forall(d_1,d_2)\in C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}$, que aparecen en la expresión de $J(d_1,d_2)$.

En la segunda sección demostraremos la existencia de control óptimo, i.e., $\exists(d_1,d_2)\in C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}$ tal que $J((d_1,d_2))=\sup_{C_{\delta_1}\times C_{\delta_2}}J$. Usando razonamientos como los efectuados en el primer capítulo, deduciremos que, bajo ciertas condiciones, es posible mejorar la acotación inicial que se tiene sobre los controles, cuando éstos son óptimos. También expresaremos cualquier control óptimo en términos de la solución de un sistema de EDP (el sistema de optimalidad).

La sección tercera la reservamos para probar, bajo ciertas condiciones, la unicidad del control óptimo. Para ello será esencial completar el conocimiento que tenemos sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones de (0.3) (usaremos, por ejemplo, que tienen un carácter localmente lipschitziano con respecto a los controles) y de los controles óptimos (probaremos, por ejemplo, que bajo ciertas condiciones el conjunto de todos los controles óptimos forma un conjunto precompacto y además está en el interior de $C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, con la topología de $L^\infty(\Omega)$).

En nuestra opinión lo más destacado de este capítulo, ha sido el construir un modelo distinto (dividimos una población en varias subpoblaciones) a los existentes y el ser capaces de probar, con la ayuda de las "herramientas" que nos brinda el Análisis Funcional, resultados de existencia y unicidad de control óptimo, así como describir propiedades cualitativas importantes que verifican los mismos.

En todo trabajo de investigación siempre surgen comentarios, cuestiones, problemas, ideas,... que aunque no traten exactamente del problema o los problemas considerados, tienen interés por sí mismos. Algunos de estos problemas pueden ser analizados en un estudio posterior, otros no pasarán de simples comentarios u observaciones. Todo ello lo hemos incluido al final de esta Memoria en una parte que hemos llamado "Notas finales".

Parte de los resultados de esta tesis han sido expuestos en Congresos Nacionales e Internacionales y publicados o aceptados en diferentes revistas de investigación especializadas (véase: [4], [12], [13], [14], [33], [53] y [54])

A G R A D E C I M I E N T O S

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a quienes han sido mis directores, los profesores D. Antonio Cañada Villar y D. José Luis Gámez Ruiz, durante la preparación de esta Memoria. Al primero debo la propuesta de estudio del modelo escalar; de su buen tino y disposición a proponernos campos nuevos queda constancia al ser esta la primera tesis de control óptimo realizada en nuestro grupo de investigación. Al segundo debo gran parte de los conocimientos sobre Dinámica de Poblaciones; sin todo ese trabajo serio y brillante, plasmado en muchas sesiones de trabajo con ambos, la realización de esta Memoria no hubiera sido posible. Espero seguir aprendiendo de ellos en el futuro.

También quiero expresar mi agradecimiento al Prof. Ovide Arino de la Universidad de Pau (Francia). En el curso de una visita realizada por el autor de esta Memoria a la Universidad de Pau en octubre del año 1995, se gestó gran parte de lo que es el capítulo segundo. Su acogida y hospitalidad, junto con sus indicaciones y aportaciones me han sido de gran ayuda.

A la profesora Suzanne Lenhart de la Universidad de Tennessee. El intercambio de ideas y publicaciones con ella ha sido muy fructífero e interesante.

A los profesores D. Eduardo Casas de la Universidad de Cantabria y D. Enrique Zuazua de la Universidad Complutense de Madrid por su interés y apoyo en temas relacionados con este trabajo.

Quiero agradecer también, la disponibilidad de los demás miembros del grupo de investigación que sobre Ecuaciones Diferenciales y Análisis no Lineal existe en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada; sus consejos y sugerencias, recibidas durante nuestras reuniones del Seminario que periódicamente se organiza, han sido muy útiles. También el desarrollo de esta tesis se ha realizado en el marco del proyecto de investigación "Control Óptimo en Dinámica de Poblaciones", sufragado por la DGES, Ministerio de Educación y Ciencia (PB95-1190).

No quiero dejar pasar esta oportunidad sin destacar la colaboración de todos los miembros del Departamento, y cómo no, la de mis "ex-compañeros" de despacho, los profesores D. Ginés López y D. Eduardo Nieto.

Capítulo I

Ecuación de estado de tipo elíptico logístico. Diferentes condiciones de contorno.

Comenzaremos este capítulo estudiando el primer problema de control comentado en la introducción. Partimos de la ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)[a(x) - f(x) - b(x)u(x)], & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde suponemos la hipótesis:

[H] *Ω es un dominio acotado y con frontera regular de $\mathbb{R}^N$,*
$a, b, f \in L^\infty(\Omega)$, $\operatorname{ess\,inf} b > 0$.

Fijemos un poco de notación. La expresión $\operatorname{ess\,inf} b$, que representaremos en lo sucesivo por $\underline{b}$, significa ínfimo esencial de la función b y puede definirse, para cada función e de $L^\infty(\Omega)$, como el supremo del conjunto $\{c \in \mathbb{R} : e(x) \geq c \text{ c.e.t. } x \in \Omega\}$. Con el término c.e.t. queremos abreviar la expresión "casi en todo" que indica que la propiedad de la que estemos hablando se cumple salvo en un conjunto de medida de Lebesge nula. De igual forma puede definirse el supremo esencial $\operatorname{ess\,sup} e$. En este caso representaremos $\overline{e} = \operatorname{ess\,sup} e$.

También trabajaremos con diversos espacios de funciones equipados con sus correspondientes normas. Por ejemplo, en el espacio $C(\overline{\Omega})$ de las funciones continuas sobre $\overline{\Omega}$, consideraremos la norma

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C^k(\Omega) : D^\sigma v$ admite una extensión continua a $\overline{\Omega}, \ |\sigma| \leq k\}$, irá dotado con la norma

$$\|v\|_k = \|v\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\sigma| \leq k} \|D^\sigma v\|_\infty.$$

Para $0 < \alpha < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos los espacios de Hölder $C^\alpha(\overline{\Omega})$ y $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, como

$$C^\alpha(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : O_\alpha(u) < +\infty\},$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : O_\alpha(D^\sigma u) < +\infty, \ \forall |\sigma| \leq k\},$$

donde

$$O_\alpha(u) = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^\alpha}$$

y con las normas asociadas

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|u\|_\infty + O_\alpha(u),$$

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_k + \textstyle\sum_{|\sigma|\leq k} O_\alpha(D^\sigma(u)).$$

Con la notación $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$, representaremos los espacios de Sobolev, modelados sobre los correspondientes espacios de medida $L^p(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ con sus normas usuales (véase [7], [15] ó [34]).

Bajo la hipótesis **[H]** y como veremos en la primera sección, en el Teorema 1.6, fijados Ω, a, b, f, la ecuación (1.1) tiene una única solución maximal no negativa que notaremos por $u_{\Omega,a,b,f}$.

Nuestro espacio de controles admisibles va a ser el conjunto $L_+^\infty(\Omega) = \{g \in L^\infty(\Omega) : g \geq 0 \text{ c.e.t. } \Omega\}$.

Asociado con la ecuación de estado (1.1) tenemos el funcional de coste-beneficio

$J : L_+^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido como

$$J(f) = \int_\Omega (\lambda u_{\Omega,a,b,f}(x) f(x) - [f(x)]^2)dx, \tag{1.2}$$

donde $\lambda > 0$.

Denotaremos por $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ al problema de encontrar un control óptimo, esto es, un control admisible, $f \in L_+^\infty(\Omega)$, que maximice J,

$$J(f) = \sup_{g\in L_+^\infty(\Omega)} J(g).$$

Una vez presentado el problema de control, pasemos brevemente a interpretar biológicamente los datos del mismo. La ecuación (1.1) surge en problemas de Dinámica de Poblaciones, concretamente aparece en el estudio de la evolución de algunas especies biológicas y modela las soluciones estacionarias o de equilibrio del correspondiente problema de evolución no lineal (véase Smoller [63]). La función u es la concentración de la especie biológica, a representa su razón de crecimiento, la función b expresa la autolimitación de la especie a crecer indefinidamente y f juega el papel de control, ejercido durante el proceso de producción. Su acción dentro del proceso, es influir en la razón de crecimiento de las especies para mejorar la calidad; así tiene una influencia también en el beneficio final del proceso (véase [13], [47]). El funcional (1.2) representa, en cierto sentido, la diferencia entre ingresos y gastos. El número real λ, que tomaremos estrictamente positivo, describe el cociente entre el precio de las especies y el coste del control. Esta interpretación puede verse más claramente si en vez de J, tomásemos el funcional

$$J_{K,L}(f) = \int_\Omega \left[K u_{\Omega,a,b,f}(x) f(x) - L f^2(x)\right] dx,$$

donde $K > 0$ denota el precio de venta de las especies y $L > 0$ el coste del control. Por ejemplo, este es el funcional de beneficio-coste que toman los autores en [47]. Por razones de simplicidad, hemos preferido hacer el estudio del funcional $J = \frac{J_{K,L}}{L}$, con $\lambda = \frac{K}{L}$. Otros tipos de funcionales de coste pueden verse en [43], [46].

Pasemos a describir como se organiza este capítulo. En la primera sección estudiaremos a fondo el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación de estado de nuestro problema, o sea de la ecuación logística con condiciones en la frontera de tipo Dirichlet. El éxito de la investigación dependerá en gran parte de los conocimientos que podamos recabar sobre dicha ecuación. Propiedades como acotación a priori de sus soluciones, existencia y unicidad de solución maximal no negativa, continuidad y derivabilidad de las soluciones respecto de los controles... etc, van a ser fundamentales para obtener la máxima información sobre los controles óptimos como veremos en la segunda sección de este primer capítulo. Los resultados más importantes de la segunda sección van a ser: la existencia de controles óptimos y el estudio de las consecuencias que se derivan del hecho que un control sea óptimo. A partir de estas condiciones necesarias para la existencia de control óptimo, deduciremos algunas propiedades cualitativas de los mismos y condiciones que caractericen la positividad del beneficio óptimo (esto es recomendable en el estudio de la rentabilidad de un problema). También veremos que cualquier control óptimo admite una expresión en términos de la solución de un sistema de EDP's: el sistema de optimalidad. Este sistema será usado para el estudio de su unicidad, como veremos en la sección tercera. En la sección cuarta definiremos un método iterativo que, bajo ciertas condiciones, permite aproximar el control óptimo.

I.1. Preliminares. La ecuación logística con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

En esta primera sección daremos una exposición detallada de las principales propiedades de la ecuación de estado de nuestro problema de control: la ecuación logística que aparece en (1.1). Para el estudio de esta ecuación no lineal, es conveniente recordar algunos resultados y conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo lineal.

Comencemos con el estudio del problema lineal de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= \sigma u(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde Ω es un dominio acotado y con frontera regular de $\mathbb{R}^N$ y la función q pertenece a $L^\infty(\Omega)$. Diremos que $\sigma \in \mathbb{R}$ es un valor propio de (1.3), si existe una función u, no nula, en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, solución en sentido débil del problema anterior. A tales soluciones, cuando existan, se les llama funciones propias asociadas al valor propio σ. Se sabe, véase por ejemplo Gilbarg-Trudinger [34], que los valores propios del problema (1.3) pueden ordenarse en una sucesión no acotada de la siguiente forma

$$\sigma_1(q) < \sigma_2(q) \leq \cdots \leq \sigma_n(q) \leq \cdots$$

En la sucesión anterior aparece cada valor propio repetido tantas veces como indica su multiplicidad (que es finita). El primer valor propio que aparece, llamado también valor propio principal, tiene multiplicidad algebraica y geométrica igual a uno (para la definición de estos conceptos puede verse, por ejemplo, el libro de Brézis [7] y el ya citado de Gilbarg-Trudinger [34]) y admite una caracterización variacional del tipo

$$\sigma_1(q) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega q|u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}. \tag{1.4}$$

Es posible escoger una única función propia, $\phi_1(q)$, asociada a $\sigma_1(q)$, (en donde el ínfimo anterior se alcanza), verificando

1. $\phi_1(q) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

2. $\phi_1(q)$ es estrictamente positiva en Ω.

3. $\|\phi_1(q)\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

Gracias a la anterior caracterización del primer valor propio, Gilbarg-Trudinger [34], se puede demostrar que la aplicación $\sigma_1 : L^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ goza de las siguientes propiedades:

i) $\sigma_1(q)$ es estrictamente creciente con respecto a la función peso q, i.e., si $q_1 \leq q_2$ son funciones de $L^\infty(\Omega)$, tenemos que $\sigma_1(q_1) \leq \sigma_1(q_2)$ y esta desigualdad es estricta siempre que $q_1(x) < q_2(x)$ sobre algún subconjunto de Ω con medida positiva.

ii) Para cualquier constante $M \in \mathbb{R}$ y $\forall q \in L^\infty(\Omega)$, tenemos que $\sigma_1(q + M) = \sigma_1(q) + M$.

iii) $\sigma_1(q)$ es continua con respecto a $q \in L^\infty(\Omega)$.

La importancia del primer valor propio o valor propio principal es de sobra conocida: en nuestro caso nos va a permitir deducir algunas propiedades muy útiles de los operadores diferenciales elípticos de tipo Schrödinger, $(-\Delta + q)u$, $u \in H^1(\Omega)$. Hagamos antes una definición que dé sentido, para funciones u, v de $H^1(\Omega)$, a la expresión $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Tomaremos la definición que se hace en Gilbarg-Trudinger [34].

Definición 1.1. *Sean u, v funciones de $H^1(\Omega)$. Diremos que*

$$u \leq v, \text{ en } \partial\Omega \quad \Leftrightarrow \quad (u - v)^+ = \max\{0, u - v\} \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 1.2. (Algunas propiedades de los operadores de tipo Schrödinger).
Consideremos $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo $\sigma_1(q) > 0$. Entonces:

i) Para cada $f \in L^2(\Omega)$, el problema lineal

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

admite una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$. Además, si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$ (en particular, por el Teorema de Rellich-Kondrachov, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$).

ii) *Sean* $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ *tales que* $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\begin{gathered} \int_\Omega \nabla u_1 \nabla \phi + \int_\Omega q u_1 \phi \leq \int_\Omega \nabla u_2 \nabla \phi + \int_\Omega q u_2 \phi, \\ u_1 \leq u_2 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Entonces $u_1 \leq u_2$ c.e.t. Ω.

iii) *Sea* $f \in L^2(\Omega)$, $f(x) \geq 0$ *c.e.t.* $x \in \Omega$, $p_1, p_2 \in L^\infty(\Omega)$ *con* $p_1(x) \geq p_2(x)$ *c.e.t.* $x \in \Omega$ *y* $\sigma_1(p_2) > 0$. *Denotamos por* w_i $(i = 1, 2)$ *la única solución débil (que existe por i)) del problema*

$$\begin{aligned} -\Delta w_i(x) + p_i(x) w_i(x) &= f(x), \quad && x \in \Omega, \\ w_i(x) &= 0, && \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Entonces

$$w_1(x) \leq w_2(x) \text{ c.e.t. } x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN.

Probemos *i)*. Para ello aplicaremos el Teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal $L : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida como

$$L(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega q u v$$

y al funcional $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\varphi(v) = \int_\Omega f v.$$

Teniendo en cuenta que $q \in L^\infty(\Omega)$ y la caracterización variacional de $\sigma_1(q)$ se prueba fácilmente que L es continua. Veamos que es coerciva, i.e., existe $c > 0$ (en nuestro caso lo supondremos en el intervalo $(0, 1]$) satisfaciendo la desigualdad

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega q u^2 \geq c \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En efecto, la anterior desigualdad es equivalente a esta otra

$$(1-c)\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega qu^2\right] + c\int_\Omega qu^2 \geq 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Por la caracterización variacional de $\sigma_1(q)$, (recordad (1.4)), sabemos que (1.6) se cumplirá siempre que sea cierta la desigualdad

$$(1-c)\sigma_1(q)\int_\Omega u^2 + c\int_\Omega qu^2 \geq 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De esta forma, si

$$0 < c \leq \frac{\sigma_1(q)}{\sigma_1(q) + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}} \tag{1.7}$$

obtenemos $\sigma_1(q)(1-c) + cq \geq 0$ c.e.t. Ω, lo que implica que

$$\int_\Omega u^2[(1-c)\sigma_1(q) + cq] \geq 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De aquí es fácil deducir (1.6).

Veamos ahora que si $f \in L^\infty(\Omega)$ entonces $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$. Este tipo de razonamientos se conocen con el nombre de argumentos de regularidad o "bootstrap". Comencemos con el **caso** $2 < N$. Como $f \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (Ω está acotado por hipótesis), la solución $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega)$ (inyección continua) con $r_1 = \frac{2N}{N-2} > 2 = r_0$. De esta forma, como $-\Delta u = f - qu$ con $f - qu \in L^{r_1}(\Omega)$, por [1], $u \in W_0^{1,r_1}(\Omega) \cap W^{2,r_1}(\Omega)$. En este primer paso hemos "subido" la solución u, que antes estaba en $H_0^1(\Omega)$, al espacio $W_0^{1,r_1}(\Omega) \cap W^{2,r_1}(\Omega)$ cuyos elementos son más regulares. Si $r_1 \geq N$, ya hemos terminado porque entonces, otra vez por el Teorema de Rellich-Kondrachov, [7], $u \in L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1,\infty)$, de donde deducimos que $-\Delta u = f - qu \in L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1,\infty)$ y usando [1], $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in [1,\infty)$. Si por el contrario, $2 < r_1 < N$, repetimos el procedimiento hasta que exista un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n_0+1} = \frac{r_{n_0}N}{N - r_{n_0}} \geq N$. Aplicando ahora a r_{n_0+1} el argumento hecho antes a r_1 terminamos la demostración de este apartado.

Notemos que en el **caso** $N \leq 2$, de nuevo el Teorema de Rellich-Kondrachov nos garantiza directamente que $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$. Y así, $u \in W^{2,p}(\Omega), \forall p \in (N,\infty)$ que está compactamente inmerso en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

Probemos ahora *ii)*. Tomemos $\phi = (u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(\Omega)$ en la expresión (1.5). Restando tengo

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)^+ + \int_\Omega q(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)^+ =$$

$$= \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)^+|^2 + \int_\Omega q[(u_1 - u_2)^+]^2 \leq 0.$$

Ahora, usando la caracterización variacional de $\sigma_1(q)$ (recuérdese (1.4)), obtenemos $\sigma_1(q)\int_\Omega \phi^2 \leq 0$. Así $\phi = 0$ c.e.t. Ω, de donde se deduce que $u_1 \leq u_2$ en Ω.

Para probar *iii)* razonamos de forma parecida. Tomemos $\phi = (w_1 - w_2)^+ \in H_0^1(\Omega)$ como función test en las ecuaciones verificadas por w_1 y w_2. Restando ambas igualdades obtenemos

$$0 \geq \int_\Omega \nabla(w_1 - w_2)\nabla(w_1 - w_2)^+ + \int_\Omega p_2(w_1 - w_2)(w_1 - w_2)^+ \geq$$

$$\geq \sigma_1(p_2)\int_\Omega [(w_1 - w_2)^+]^2 \geq 0.$$

Y al igual que antes, tenemos $\int_\Omega \phi^2 = 0$, por lo que $\phi = 0$ c.e.t en Ω y consecuentemente $w_1 \leq w_2$. ∎

Notas.

1. La constante c, obtenida en la demostración del apartado *i)*, puede obtenerse con una cierta "uniformidad". Concretamente, supongamos que tenemos $A \in L^\infty(\Omega)$ acotado ($\exists M > 0$ tal que $\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, $\forall q \in A$)

y que $\exists\mu \in \mathbb{R}$ verificando $\sigma_1(q) \geq \mu > 0$, $\forall q \in A$. Entonces, tomando c en el intervalo $(0, \frac{\mu}{\mu+M}]$, se cumple que

$$c\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega qu^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),\ \forall q \in A.$$

2. Otro resultado parecido al del apartado *ii)* puede verse en el trabajo de Li-Logan [49]. Trasladándolo a nuestro ambiente diría:

Supongamos que Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^N$ y consideremos el operador $(-\Delta + q)$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Entonces son equivalentes las propiedades siguientes

i) Para cualquier función $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$, no constante, tal que

$$(-\Delta u + qu) \geq 0, \quad u_{|\partial\Omega} = 0,$$

se tiene $u(x) > 0$ para $x \in \Omega$.

ii) El primer valor propio de la función q verifica $\sigma_1(q) > 0$.

Otra de las herramientas básicas a tener en cuenta en el estudio de los problemas de ecuaciones elípticas no lineales es el método de sub-súper soluciones. Las ideas usadas en él son ya clásicas. Las utiliza ya Perron [58] (hacia el año 1923) en el estudio de un problema relacionado con funciones armónicas. También son usadas en problemas de EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias) semilineales de segundo orden por Dragoni (1931) [23], [24] y Nagumo (1937) [55]. Bastante más tarde aparecen en otros problemas relacionados con EDP (ecuaciones en derivadas parciales) en los trabajos de Cohen y Keller (1967) [17], [18], [38], [39]. Pero los primeros trabajos en los que estas ideas se aplican para resolver un problema en EDP con un planteamiento como el que vamos a tratar aquí, son los de Amann [3] (1971) y Sattinger [62] (1972).

Aunque las definiciones que vamos a hacer y los resultados que vamos a exponer a continuación se pueden realizar para operadores elípticos más generales, por razones de comodidad emplearemos el operador laplaciano.

Consideremos el problema elíptico

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde Ω es un dominio acotado y con frontera regular de $\mathbb{R}^N$ y la "no linealidad" $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface una condición de tipo "Carathéodory", a saber

[H1] *f es continua con respecto a la variable $u \in \mathbb{R}$, para x fijado en $\overline{\Omega}$. Además $\forall u \in L^\infty(\Omega)$, la función $f(.,u(.)) \in L^\infty(\Omega)$.*

También supondremos que f verifica esta otra condición

[H2] *$\exists M > 0$ tal que la función $f(x,u) + Mu$ es creciente en u, para $(x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.*

Definamos ahora el último ingrediente necesario para el teorema de existencia de solución para el problema (1.8): el concepto de supersolución y subsolución.

Definición 1.3. (Supersolución y subsolución).
Sea $u_* \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diremos que la función anterior es una **subsolución** *para la ecuación (1.8), si verifica:*

a) $u_*(x) \leq 0$ *en* $\partial\Omega$.

b) $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0$, *tenemos* $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_* \nabla \varphi \leq \int_\Omega f(x, u_*)\varphi.$

Análogamente, diremos que una función $u^* \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una **supersolución** *para la ecuación (1.8), si:*

a) $u^*(x) \geq 0$ *en* $\partial\Omega$.

b) $\forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0$, *tenemos* $\displaystyle\int_\Omega \nabla u^* \nabla \varphi \geq \int_\Omega f(x, u^*)\varphi$.

Teorema 1.4. *Supongamos que la función* f *satisface las hipótesis* **[H1]** *y* **[H2]** *y sea* $u_* \leq u^*$, *c.e.t.* Ω, *una pareja ordenada de sub-súper soluciones para el problema* (1.8). *Entonces, existen* $w, W \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$, $w \leq W$, *soluciones en sentido débil del problema* (1.8), *con la siguiente propiedad de maximalidad:*
"Si u *es otra solución de* (1.8) *con* $u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x)$ *entonces* $w(x) \leq u(x) \leq W(x)$ *para* $x \in \Omega$*".*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema es un caso particular del correspondiente para sistemas que se verá más adelante en el Teorema 1.27 de la sección cuarta de este capítulo. También puede demostrarse directamente siguiendo, punto por punto, las ideas contenidas en los trabajos de Amann [2] y Sattinger [62], pero usando un principio del máximo para operadores elípticos en versión débil como el que se encuentra en Gilbarg-Trudinger [34, Capítulo 8] ∎

Notas.

1. El enunciado de este teorema impone unas hipótesis más débiles que las enunciadas en [2] y [62]. En los trabajos citados, con la idea de obtener más regularidad de la solución, se impone más regularidad a la "no linealidad" f. Con todo, recordemos que las soluciones obtenidas por este método van a estar en el espacio de funciones $W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$. Usando el Teorema de Rellich-Kondrachov, para $p > N$, el

espacio $W^{2,p}(\Omega)$ está compactamente "embebido" en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Por consiguiente dichas soluciones pertenecen al espacio de Hölder $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$. De esta forma la regularidad obtenida para la solución, en muchos casos, será más que suficiente.

2. La hipótesis **[H2]** puede ser un poco más débil, de hecho bastaría con que la función $f(x,u) + Mu$ fuera creciente en la variable u para $(x,u) \in \overline{\Omega} \times [\operatorname{essinf} u_*, \operatorname{esssup} u^*]$. Todavía podría considerarse más generalidad sustituyendo la constante M por una función g conveniente (véase [11], [32]).

3. Obsérvese que la definición de sub-súper solución engloba el caso de funciones u_* y $u^* \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tales que $u_*(x) \leq 0 \leq u^*(x)$ en $\partial\Omega$ y
$$\begin{aligned} -\Delta u_*(x) &\leq f(x, u_*(x)), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta u^*(x) &\geq f(x, u^*(x)), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

4. Conviene aclarar que la desigualdad entre las soluciones "minimal" y "maximal", $w \leq W$, obtenida en el teorema anterior, en general no tiene porque ser estricta, o sea, que en algunos casos, cuando haya unicidad por ejemplo, esas "dos" soluciones sólo son en realidad "una".

Dado que en la Biología y en el estudio de otras ciencias, se suele estar interesado en el estudio de soluciones positivas, creemos conveniente recoger un resultado que, con hipótesis bastante generales, garantice la unicidad de las mismas.

Teorema 1.5. (Brézis-Oswald [8]).
Supongamos que la función $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua en la variable $u \in [0, \infty)$ para casi todo $x \in \Omega$ y que la función $f(., u) \in L^\infty(\Omega)$, $\forall u \in [0, \infty)$. Si, además, la función $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{u}$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$,

para casi todo $x \in \Omega$, entonces el problema (1.8) *admite a lo sumo, una solución débil acotada no negativa y no trivial, u, que en caso de existir, verifica $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$, $\forall x \in \Omega$. (La notación $\frac{\partial}{\partial \nu}$ significa derivada en la dirección del vector normal exterior).* ∎

Volviendo de nuevo a nuestra ecuación logística, el próximo teorema, cuya demostración, salvo algunos retoques, puede encontrarse en [5], [37], nos permitirá caracterizar la existencia de solución maximal no negativa del problema (1.1). Este resultado, en particular, nos asegura que el funcional de coste-beneficio (1.2) de nuestro problema de control está bien definido.

Teorema 1.6. (Existencia de solución no negativa y no trivial de (1.1)).
Supongamos cierta la hipótesis **[H]**. *Entonces, la ecuación* (1.1) *tiene solución débil no negativa y no trivial, si y sólo si $\sigma_1(-a+f) < 0$. En este caso, existe una única solución no negativa no trivial de* (1.1) *que denotaremos por u. Además, u verifica las estimaciones siguientes:*

$$\frac{-\sigma_1(-a+f)}{\overline{b}}\,\phi_1(-a+f)(x) \leq u(x) \leq \frac{\overline{a}-f}{\underline{b}},\ \forall x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Comentemos esquemáticamente algunas ideas de la demostración de este teorema. La existencia de solución no negativa y no trivial, cuando $\sigma_1(-a+f) < 0$, puede obtenerse tomando $u^* \equiv \dfrac{\overline{a}-f}{\underline{b}}$ como supersolución y $u_* \equiv \dfrac{-\sigma_1(-a+f)}{\overline{b}}\,\phi_1(-a+f)$ como subsolución y usar el Teorema 1.4. Así, tenemos garantizada la existencia de una solución no negativa y no trivial que verifica las acotaciones del enunciado. El Teorema 1.5 nos garantiza que ésta es la única solución acotada no negativa y no trivial. Resta probar que no hay soluciones no negativas no acotadas. Concretamente, veremos que toda solución débil, u, de (1.1) verifica $u \leq k \equiv \dfrac{\overline{a}-\underline{f}}{\underline{b}}$.

En efecto, sea u una solución débil de la ecuación (1.1), eso quiere decir que $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ se cumple:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \varphi u(a-f-bu).$$

Tomemos ahora $\varphi = (u-k)^+$, que pertenece a $H_0^1(\Omega)$, y entonces

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla (u-k)^+|^2 = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega u(u-k)^+(a-f-bu) \leq 0.$$

Por tanto, $\|\nabla(u-k)^+\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y consecuentemente $\|(u-k)^+\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$. De esta forma $u \leq k$ c.e.t Ω.

Recíprocamente, si u es una solución débil de (1.1) no negativa y no trivial, tenemos, en virtud de la caracterización variacional de $\sigma_1(-a+f)$,

$$\sigma_1(-a+f) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega(-a+f)u^2}{\int_\Omega u^2} = \frac{-\int_\Omega bu^3}{\int_\Omega u^2} < 0. \blacksquare$$

Este teorema que acabamos de ver, da sentido a la siguiente definición

Definición 1.7. *Para cualquier $f \in L^\infty(\Omega)$ definimos $u_{\Omega,a,b,f}$, como la solución maximal no negativa de la ecuación (1.1). Por tanto, $u_{\Omega,a,b,f} > 0$ en Ω si y sólo si $\sigma_1(-a+f) < 0$ y $u_{\Omega,a,b,f} \equiv 0$ si y sólo si $\sigma_1(-a+f) \geq 0$.*

Conviene ahora recoger las propiedades más importantes de la solución, $u_{\Omega,a,b,f}$, de la ecuación (1.1), con respecto a la variable $f \in L^\infty(\Omega)$. Algunas de ellas, como la diferenciabilidad, influirán decisivamente en el estudio del problema de control.

Proposición 1.8. (Propiedades de la solución de la ecuación logística). *Supuesta la hipótesis* **[H]**, *tenemos que:*

1. *La aplicación* $f \mapsto u_{\Omega,a,b,f}$ *es monótona en el sentido siguiente: Si* $f, g \in L^\infty(\Omega)$ *son tales que* $f \leq g$ *c.e.t.* $x \in \Omega$, *entonces* $u_{\Omega,a,b,f}(x) \geq u_{\Omega,a,b,g}(x)$, $\forall x \in \Omega$.

2. *La aplicación anterior definida de* $L^\infty(\Omega)$ *en* $C^1(\overline{\Omega})$ *es continua.*

3. *Consideremos el siguiente abierto en* $L^\infty(\Omega)$, $A = \{g \in L^\infty(\Omega) : \sigma_1(-a+g) < 0\}$. *Entonces la aplicación* $f \mapsto u_{\Omega,a,b,f}$ *de* A *en* $C^1(\overline{\Omega})$ *es de clase* C^1.

DEMOSTRACIÓN. Antes de comenzar la demostración, como los datos Ω, a y b permanecen fijos a lo largo de la misma, no hay ambigüedad si representamos la solución de (1.1), $u_{\Omega,a,b,f}$, como u_f. Para demostrar el primer apartado, observemos que el caso en que $\sigma_1(-a+g) \geq 0$ es trivial, ya que entonces $u_g \equiv 0$ y por tanto $u_f \geq u_g$. Supongamos entonces que $\sigma_1(-a+g) < 0$. En ese supuesto podemos tomar la función u_g como subsolución, para el problema que satisface u_f, y $\dfrac{\overline{a} - \underline{f}}{\underline{b}}$ como supersolución. Teniendo en cuenta la propiedad de maximalidad de las soluciones obtenidas por el método de sub-súper soluciones en el Teorema 1.4 y la unicidad de solución no negativa y no trivial de (1.1) vista en el Teorema 1.6, terminamos la demostración de este apartado.

Para demostrar el segundo apartado, voy a seguir ideas contenidas en parte en el trabajo de Blat-Brown [6]. Consideraremos dos casos

Caso $[\sigma_1(-a+f) < 0]$.

Supongamos $f_n \to f$ en $L^\infty(\Omega)$. Veamos que entonces $u_{f_n} \to u_f$ en $C^1(\overline{\Omega})$. En efecto, en virtud de la continuidad de la aplicación $\sigma_1(\cdot)$, a partir de un natural n_0 en adelante, tendremos $\sigma_1(-a+f_n) < \frac{\sigma_1(-a+f)}{2} < 0$ o, equivalentemente, $u_{f_n} > 0$. La sucesión $\{f_n\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$ y por tanto $0 < u_{f_n} \leq \frac{\overline{a}+M}{\underline{b}}$, donde M es la cota de $\{f_n\}$. De esta acotación, usando estimaciones elípticas (puede consultarse el ya clásico artículo de Agmon-Douglis-Nirenberg [1]) se deduce que la sucesión $\{u_{f_n}\}$ está acotada en $W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$, por lo que existe una parcial, que notaremos $\{u_n\}$, convergente a una función $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Bastará un simple cálculo con límites para convencerse que esta función u es solución de (1.1). Además $u \gneq 0$ en Ω ya que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \geq -\dfrac{\sigma_1(-a+f_n)}{\underline{b}} > -\dfrac{\sigma_1(-a+f)}{2\underline{b}} > 0$, siempre que $n \geq n_0$. Gracias a la unicidad de solución no negativa y no trivial de la ecuación (1.1) tenemos que $u \equiv u_f$. Por un argumento similar se puede probar que cualquier subsucesión de $\{u_{f_n}\}$ que sea convergente en $C^1(\overline{\Omega})$ (recuérdese la inmersión compacta $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$) deberá de converger a la función u_f. Esto nos garantiza que toda la sucesión $\{u_{f_n}\}$ es convergente a $u_f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Caso $[\sigma_1(-a+f) \geq 0]$.

Hagamos esta demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $u_{f_n} \not\to 0$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Entonces existe una parcial de ella, notada $\{u_n\}$ fuera de un cierto entorno de 0 en $C^1(\overline{\Omega})$. Igual que antes dicha parcial está acotada uniformemente en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ (compactamente); así, existe una parcial de esta última que converge a una cierta $w \not\equiv 0$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Pero w es solución no negativa y no trivial de (1.1) con $\sigma_1(-a+f) \geq 0$ y esto es absurdo.

Demostremos ahora el tercer apartado. Para ello primero probaremos el

Lema 1.9. *La aplicación $u_{(\cdot)} : A \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ($\alpha \in (0,1)$), $f \mapsto u_f$ es Gâteaux-diferenciable en A, con derivada $D_G u(f)(g) = \xi (= \xi_{f,g})$, donde ξ es la única solución del problema lineal*

$$\begin{aligned} -\Delta\xi + [-a+f+2bu_f]\xi &= -gu_f, && \text{en } \Omega \\ \xi &= 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.9}$$

DEMOSTRACIÓN. Concretamente, probaremos que, fijado $f \in A$ y $\alpha \in (0,1)$,

$\forall g \in L^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\frac{u_{f+\beta g}-u_f}{\beta} \to \xi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \text{cuando } \beta \to 0.$$

Observemos que el problema (1.9) tiene solución única ya que $\sigma_1(-a+f+2bu_f) > \sigma_1(-a+f+bu_f) = 0$. (Recordemos que $\sigma_1(-a+f+bu_f)$ es el único valor propio del problema de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u + (-a+f+bu_f)u &= \sigma u, && \text{en } \Omega,\\ u &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

cuya función propia asociada no cambia de signo en Ω y que 0 es valor propio para el problema con función propia asociada u_f). Sea $g \in L^\infty(\Omega)$ un vector arbitrario y definamos $\xi_\beta = \dfrac{u_{f+\beta g}-u_f}{\beta}$, $\beta \neq 0$, que safisface el problema lineal

$$\begin{aligned} -\Delta\xi_\beta + [-a+f+b(u_{f+\beta g}+u_f)]\xi_\beta &= -gu_{f+\beta g} \quad en\ \Omega,\\ \xi_\beta = 0\ en\ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Usando que $\sigma_1(q)$ es creciente y continua con respecto a $q \in L^\infty(\Omega)$, y que u_f es decreciente con respecto a f, tenemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cada $|\beta| \leq \epsilon_0$, se cumple la desigualdad

$$\sigma_1(-a+f+b(u_{f+\beta g}+u_f)) \geq \mu \equiv \sigma_1(-a+f+b(u_{f+\epsilon_0\|g\|_\infty}+u_f)) > 0.$$

Teniendo en cuenta ahora la Nota 1 del Lema 1.2, la ecuación que satisface ξ_β y la acotación de las soluciones de la ecuación (1.1) dada en el Teorema 1.6, existe una constante positiva c, independiente de $\beta \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, cumpliendo que

$$\begin{aligned} c\|\xi_\beta\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega \{|\nabla\xi_\beta|^2 + [-a+f+b(u_{f+\beta g}+u_f)]\xi_\beta^2\} = \\ = \int_\Omega -gu_{f+\beta g}\xi_\beta \leq K\|\xi_\beta\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}^+$. Así, existe una constante positiva, que volvemos a llamar K, verificando

$$\|\xi_\beta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K. \tag{1.11}$$

Recordando ahora el problema (1.10) que satisface ξ_β, y el Lema 1.2 tenemos la acotación

$$\|\xi_\beta\|_\infty \leq \|\eta\|_\infty, \tag{1.12}$$

uniformemente en $\beta \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ y con η solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\eta + [-a + f + b(u_{f+\epsilon_0\|g\|_\infty} + u_f)]\eta = \|g\|_\infty \frac{\overline{a} - \epsilon_0 \underline{g}}{\underline{b}} \quad &en\ \Omega, \\ \eta = 0 \ en\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Así, ξ_β es acotada en $H_0^1(\Omega)$ y en $L^\infty(\Omega)$ para un conveniente $K \in \mathbb{R}$.

Tomemos ahora cualquier sucesión $\{\beta_n\} \to 0$. Escribiendo la ecuación que satisface ξ_β de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta\xi_\beta + [-a + f + 2bu_f]\xi_\beta = -gu_f - \beta[g + b\xi_\beta]\xi_\beta, \qquad &en\ \ \Omega \\ \xi_\beta = 0, \qquad &en\ \ \partial\Omega, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta lo anterior y (1.12), tenemos $\|\xi_{\beta_n}\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ acotada, $\forall p \in (1, \infty)$. Esto implica que existe una sucesión parcial, denotada por ξ_n, $\xi_n \rightharpoonup \xi \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, y por tanto $\xi_n \to \xi$ en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, donde ξ es solución de (1.9). Ahora, la unicidad de solución de (1.9) implica que toda la sucesión ξ_n converge a ξ en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Claramente la función ξ depende linealmente con respecto a la función g y además se mantiene acotada (en la norma de $W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$ y por tanto en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$) cuando g está acotada en $L^\infty(\Omega)$. De esta forma ξ es la diferencial Gâteaux de la función $f \mapsto u_f$ en la dirección del vector $g \in L^\infty(\Omega)$, o sea $D_G u(f)(g) \equiv \xi (\equiv \xi_{f,g})$. ∎

Una vez probado el Lema 1.9, la aplicación $A \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f \mapsto u_f$, es Gâteaux-diferenciable, para terminar de demostrar la Proposición 1.8 queda probar la continuidad de dicha Gâteaux-diferencial con respecto a la variable $f \in A$.

Sea $f_n \to f \in A$, debemos probar que $D_G u(f_n) \to D_G u(f)$ o equivalentemente $\sup\limits_{\|g\|_\infty = 1} \left\{ \|D_G u(f_n)(g) - D_G u(f)(g)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \right\} \to 0$.

Para ello, tomemos ϵ suficientemente pequeño como para que $\sigma_1(-a+f+2bu_f) > \epsilon(1+2\bar{b})$. Entonces, por la monotonía de la función $\sigma_1(\cdot)$, deducimos que $\sigma_1(-a+f-\epsilon+2b(u_f-\epsilon)) \geq \sigma_1(-a+f-\epsilon+2bu_f-2\bar{b}\epsilon) > 0$. Para el ϵ fijado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$f_n \geq f-\epsilon, \qquad u_{f_n} \geq u_f - \epsilon.$$

Ahora, usando *ii), iii)* del Lema 1.2, tomando η como la única solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\eta + (-a+f-\epsilon+2b(u_f-\epsilon))\eta &= \frac{\overline{a}+\epsilon}{\underline{b}}, \qquad &\text{en } \Omega,\\ \eta &= 0, &\text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\|\xi_{f_n,g}\|_\infty \leq \|\eta\|_\infty,$$

independiente de $g \in E_{L^\infty(\Omega)} := \{h \in L^\infty(\Omega) : \|h\|_\infty = 1\}$ y para todo $n \geq n_0$. Así, obtenemos que toda la sucesión $\{\xi_{f_n,g}\} \to \xi_{f,g} \in C^1(\overline{\Omega})$.

Necesitamos que la convergencia anterior no sólo sea puntual, sino uniforme en $\|g\|_\infty = 1$. Para ello, tomemos ahora $\tau_n = \xi_{f_n,g} - \xi_{f,g}$ que satisface

$$\begin{aligned} -\Delta\tau_n + [-a+f+2bu_f]\tau_n &= \\ = -g(u_{f_n}-u_f) - \xi_{f_n,g}[f_n - f + 2b(u_{f_n}-u_f)], &\qquad \text{en } \Omega,\\ \tau_n = 0, &\qquad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que, $\sup\limits_{g\in E_{L^\infty(\Omega)}} \left\{\|\xi_{f_n,g} - \xi_{f,g}\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right\} \to 0$, como queríamos probar. ∎

I.2. Estudio de la existencia de control óptimo. Sistema de optimalidad.

En esta sección probaremos la existencia de control óptimo en el espacio de controles $L^\infty_+(\Omega)$, esto es, demostraremos que hay elementos, $f \in L^\infty_+(\Omega)$, que maximizan el funcional de coste-beneficio J, definido por (1.2) . Daremos además, una condición necesaria y suficiente para que el beneficio óptimo sea positivo. Esto puede ser interesante con vistas a las posibles aplicaciones. También haremos un estudio de las condiciones necesarias que debe cumplir un control admisible para ser control óptimo. Dentro de este tipo de condiciones necesarias merece ser destacado el sistema de optimalidad. Éste es un sistema de EDP, en términos de cuyas soluciones podremos expresar los controles óptimos y deduciremos así algunas propiedades cualitativas de "los controles óptimos"; por ejemplo, la regularidad será una de ellas.

Pasemos ahora a enunciar un lema, interesante por sí mismo, ya que nos permite probar que todo control óptimo está acotado "apriori", y que usaremos para, entre otras cosas, demostrar la existencia de solución para el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$.

Lema 1.10.(Cotas a priori del control óptimo).
Supongamos que se cumple **[H]** *y sea* $\mathcal{M} = \max\left\{\dfrac{\lambda \overline{a}}{2\underline{b}}, 0\right\}$. *Si* $f \in L^\infty_+(\Omega)$ *es un control óptimo entonces,*

$$0 \le f \le \mathcal{M}. \tag{1.13}$$

DEMOSTRACIÓN.
Caso $[\sigma_1(-a) \ge 0]$.

En esta situación, tenemos que $\sigma_1(-a+g) \ge 0, \ \ \forall g \in L^\infty_+(\Omega)$ y por tanto $u_g \equiv 0, \ \ \forall g \in L^\infty_+(\Omega)$ y entonces $J(g) = \int_\Omega \lambda u_g g - g^2 = \int_\Omega -g^2 \le 0$. Como f es control óptimo debe de ser $f \equiv 0$ c.e.t. Ω, ya que maximiza J.

Caso $[\sigma_1(-a) < 0]$.

Observemos primero que, bajo este supuesto, tenemos $\overline{a} > 0$, ya que $\sigma_1(0) - \overline{a} = \sigma_1(-\overline{a}) \leq \sigma_1(-a) < 0$ y como consecuencia $0 < \sigma_1(0) < \overline{a}$.

Sea $h \in L^\infty_+(\Omega)$ un control arbitrario. Demostremos que el control definido como $g = \min\left\{\frac{\lambda\overline{a}}{2b}, h\right\}$ verifica $J(h) \leq J(g)$. Si además $\Omega_1 = \{x \in \Omega : h(x) > g(x)\}$ tiene medida positiva, entonces $J(h) < J(g)$. En efecto, si $u_h \equiv 0$ entonces $J(h) = \int_\Omega -h^2 \leq \int_\Omega -g^2 \leq \int_\Omega \lambda u_g g - g^2 = J(g)$ con desigualdad estricta si Ω_1 tiene medida positiva. Si por el contrario $u_h > 0$ en Ω, usando que $u_h \leq u_g$, por la Proposición 1.8, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda u_h(x)h(x) - h^2(x) &\leq \lambda u_g(x)h(x) - h^2(x) = \\ &= \lambda u_g(x)g(x) - g^2(x), \quad \forall x \notin \Omega_1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda u_h(x)h(x) - h^2(x) &\leq \lambda u_g(x)h(x) - h^2(x) < \\ &< \lambda u_g(x)g(x) - g^2(x), \quad \forall x \in \Omega_1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Obsérvese que la última desigualdad es equivalente a

$$\lambda u_g(x)(h(x) - g(x)) < (h(x) - g(x))(h(x) + g(x)), \quad \forall x \in \Omega_1$$

que a su vez equivale a

$$u_g(x) < \frac{h(x)}{\lambda} + \frac{\overline{a}}{2b}, \quad \forall x \in \Omega_1. \tag{1.16}$$

Basta ahora recordar la definición de g y el que $u_g \leq \frac{\overline{a}}{b}$ para comprobar (1.16). Integrando en (1.14) sobre $\Omega \setminus \Omega_1$, en (1.15) sobre Ω_1 y sumando, teniendo en cuenta (1.16), terminamos la demostración. ∎

Nota.

Como hemos visto en la demostración de este lema, en el caso que la función a verifique $\sigma_1(-a) \geq 0$, el problema de control óptimo está perfectamente determinado y su solución es trivial, ya que el único control óptimo posible, $f \in L^\infty_+(\Omega)$, es $f \equiv 0$. Esta es una de las razones, aparte de la que veremos en el Teorema 1.12, de por qué en lo sucesivo limitaremos nuestro estudio al caso $\sigma_1(-a) < 0$.

Teorema 1.11. (Existencia de control óptimo).
Bajo las hipótesis **[H]**, *existe un control óptimo para el problema* $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$, *i.e.,*

$$\exists f \in L^\infty_+(\Omega) \text{ tal que } J(f) = \sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g).$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, como $u_g(x) \le \frac{\overline{a}}{\underline{b}}$, $\forall x \in \Omega$ y $\forall g \in L^\infty_+(\Omega)$, el funcional J está acotado superiormente. Sea $s = \sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g)$ y tomemos una sucesión maximizante $\{f_n\}$ en $L^\infty_+(\Omega)$, i.e., $J(f_n) \to s$. En virtud del Lema 1.10 podemos suponer que

$$0 \le f_n \le \frac{\lambda \overline{a}}{2\underline{b}}.$$

Por tanto, podemos obtener una subsucesión, notada otra vez por $\{f_n\}$, verificando

$$\begin{aligned} f_n &\rightharpoonup f \quad \text{débilmente en} \quad L^2(\Omega) \\ u_{f_n} &\to u_f \quad \text{en} \quad W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Usando ahora que la norma de $L^2(\Omega)$ es débilmente semicontinua inferiormente, se tiene

$$\|f\|_2 \le \liminf \|f_n\|_2.$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \lambda u_{f_n} f_n = \int_\Omega \lambda u_f f.$$

Entonces concluimos que

$$J(f) = \int_\Omega \lambda u_f f - \int_\Omega f^2 \ge \limsup J(f_n) = \sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g),$$

con lo que terminamos la demostración. ∎

El teorema anterior asegura la existencia de controles óptimos en $L^\infty_+(\Omega)$. Sin embargo nada se dice de que el beneficio óptimo asociado, $J(f)$, sea positivo; de hecho podría ser cero y trivialmente en este caso el control óptimo sería cero. En el próximo teorema daremos condiciones que garanticen un beneficio óptimo positivo y una acotación inferior para este beneficio óptimo. Todavía no seremos capaces de "describir" cómo son los controles óptimos pero damos un paso adelante en el estudio de este problema de control ya que sí podemos caracterizar cuando habrá beneficio positivo.

Teorema 1.12.(Beneficio positivo).
Consideremos el problema de control $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ junto con la hipótesis **[H]**. *Entonces*

$$\sup_{g\in L^\infty_+(\Omega)} J(g) > 0 \Leftrightarrow \sigma_1(-a) < 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si el beneficio óptimo es positivo, entonces existe $g \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que $J(g) > 0$ y por tanto $u_g > 0$. De esta forma obtenemos $\sigma_1(-a) \leq \sigma_1(-a+g) < 0$.

El recíproco lo podemos probar de dos formas:

Forma 1.- Observemos que para $f \in L^\infty_+(\Omega)$ es válida la igualdad

$$-f^2 + \lambda u_f f = -\left[f - \frac{\lambda}{2}u_f\right]^2 + \left[\frac{\lambda}{2}u_f\right]^2. \tag{1.17}$$

La idea es ahora encontrar una $\widehat{f} \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que $\widehat{f} = \frac{\lambda}{2}u_{\widehat{f}}$. Esto es equivalente a encontrar una solución $\widehat{f}$ del problema

$$\begin{aligned} -\Delta p(x) &= p(x)\left[a(x) - \tfrac{2b(x)+\lambda}{\lambda}p(x)\right], & \forall x \in \Omega \\ p(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $\sigma_1(-a) < 0$ y el Teorema 1.6, existe una única solución positiva, $\widehat{f}$, del problema anterior. Además por el Teorema 1.6, $\widehat{f}$

satisface las acotaciones

$$-\frac{\lambda}{2\bar{b}+\lambda}\sigma_1(-a)\phi_1(-a) \leq \hat{f} \leq \frac{\bar{a}\lambda}{2\underline{b}+\lambda}, \quad \text{en } \Omega, \tag{1.18}$$

por lo que

$$J(\hat{f}) = \int_\Omega \left(\hat{f}\right)^2 > 0,$$

y consecuentemente

$$\sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g) > 0. \blacksquare$$

Forma 2.- Para probar que $\sup_{g\in L^\infty_+(\Omega)} J(g) > 0$, observemos que $u_0 > 0$ en Ω y que si tomamos una sucesión de números reales positivos $\{\epsilon_n\} \to 0$ entonces $u_{\epsilon_n} \to u_0$ en $C^1(\overline{\Omega})$ (véase Proposición 1.8). De esta forma $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que

$$J(\epsilon_0) = \epsilon_0 \left[\int_\Omega \lambda u_{\epsilon_0} - \epsilon_0|\Omega|\right] > 0. \blacksquare$$

Notas.

1. Bajo las hipótesis del teorema anterior, si $g \in L^\infty_+(\Omega)$ verifica $g \gneq \hat{f}$ c.e.t. Ω y tenemos en cuenta la expresión (1.17) y la monotonía de $f \mapsto u_f$, obtenemos $J(g) < J(\hat{f})$. Por tanto una función g de esas características no podrá ser control óptimo.

2. Si el beneficio es positivo, o equivalentemente $\sigma_1(-a) < 0$, usando las acotaciones de $\hat{f}$ en (1.18) obtenemos

$$\frac{\lambda^2\sigma_1^2(-a)}{(2\bar{b}+\lambda)^2}\|\phi_1(-a)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq J(\hat{f}) \leq \sup_{g\in L^\infty_+(\Omega)} J(g).$$

Esta fórmula permite obtener una acotación inferior para el beneficio, siempre que sea positivo, en términos de los coeficientes del problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$.

3. La razón de porqué hemos incluido estas dos formas de demostrar el mismo resultado es porque en nuestra opinión la primera ofrece la posibilidad de acotar inferiormente el beneficio, pero se basa "fuertemente" en la forma concreta del funcional, mientras que aunque la segunda no nos ofrezca la posibilidad de acotación inferior es "esenci: nente" una demostración por continuidad y tiene la ventaja de poder utilizarse para demostrar positividad de beneficio en funcionales más generales que el usado en nuestro trabajo.

4. A la vista de este teorema, parece claro, que el interés de nuestro problema de control $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ se centra en el caso que $\sigma_1(-a) < 0$. En caso contrario, el beneficio óptimo sería cero y se alcanzaría sobre el control $f = 0$ c.e.t. Ω. De ahí que la hipótesis $\sigma_1(-a) < 0$ se convierta en un invitado "a perpetuidad" en lo que nos queda de capítulo.

Aunque de hecho ya hayamos encontrado algunas condiciones necesarias para que un control admisible sea control óptimo (acotación "a priori"), las condiciones que más información nos van a proporcionar serán las deducidas del sistema de optimalidad. Para obtenerlo, básicamente usaremos la diferenciabilidad de la aplicación $f \mapsto u_f$.

Lema 1.13. (Condiciones de optimalidad).
Supongamos **[H]** *y* $\sigma_1(-a) < 0$. *Si* $f \in L^\infty_+(\Omega)$ *es un control óptimo cualquiera, entonces*

$$f = \frac{\lambda}{2}\, u_f(1 - P_{\Omega,a,b,f})^+, \quad \text{c.e.t. } \Omega, \tag{1.19}$$

donde $P_{\Omega,a,b,f}$ *es la única solución del problema lineal*

$$\begin{aligned} -\Delta P_{\Omega,a,b,f} + (-a + f + 2bu_f)P_{\Omega,a,b,f} = f, \quad &\text{en } \Omega, \\ P_{\Omega,a,b,f} = 0, \quad &\text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.20}$$

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada, por comodidad en la notación, representaremos la función $P_{\Omega,a,b,f}$ como P_f. Sea $f \in L^\infty_+(\Omega)$ un control óptimo arbitrario y sea $g \in L^\infty(\Omega)$ verificando que $f + \beta g \in L^\infty_+(\Omega)$ cuando $\beta \to 0^+$. Entonces,

$$J(f + \beta g) - J(f) \leq 0.$$

Dividiendo por β, obtenemos

$$\int_\Omega \left[\lambda \, \frac{u_{f+\beta g} - u_f}{\beta} \, (f + \beta g) + \lambda u_f g - 2gf - \beta g^2 \right] \leq 0.$$

Haciendo ahora $\beta \to 0^+$ y usando la Proposición 1.8, tenemos

$$\int_\Omega (\lambda \xi f + \lambda u_f g - 2gf) \leq 0, \tag{1.21}$$

donde ξ es definida como en (1.9). Ahora, multiplicando la ecuación (1.9) por P_f, la ecuación (1.20) por ξ, integrando en Ω y restando ambas expresiones, obtenemos

$$\int_\Omega f\xi + \int_\Omega g u_f P_f = 0. \tag{1.22}$$

Combinando (1.21) y (1.22), deducimos en particular que

$$\int_\Omega g[\lambda u_f(1 - P_f) - 2f] \leq 0, \ \forall \, g \in L^\infty_+(\Omega),$$

y por tanto

$$f \geq \frac{\lambda}{2} u_f(1 - P_f), \text{ c.e.t. } \Omega. \tag{1.23}$$

Tomando ahora $g = -f$ y $0 < \beta < 1$ con $\beta \searrow 0$, como $f + \beta g \in L^\infty_+(\Omega)$, por el argumento anterior obtendríamos

$$\int_{\Omega \cap \{f > 0\}} f[\lambda u_f(1 - P_f) - 2f] = \int_\Omega f[\lambda u_f(1 - P_f) - 2f] \geq 0,$$

que junto con (1.23), nos daría

$$f = \frac{\lambda}{2} u_f(1 - P_f), \text{ c.e.t. } \Omega \cap \{f > 0\}. \tag{1.24}$$

Así, por (1.23) y (1.24), concluimos (1.19). ∎

Nota.

Como podemos observar en la demostración anterior, para obtener (1.21), no necesitamos toda la regularidad obtenida en la Proposicion 1.8, sino que bastaría que

$$\frac{u_{f+\beta g} - u_f}{\beta} \rightharpoonup \xi \in H_0^1(\Omega), \quad \text{cuando } \beta \to 0,$$

donde ξ es la única solución del problema (1.9). Razonamientos de este tipo pueden encontrarse en [42] y [47]. Pueden ser útiles en el estudio de problemas de control en los que no se conozca una regularidad, como la probada en nuestro caso, para la función u_f, respecto de $f \in L^\infty(\Omega)$.

El lema anterior nos asegura una cierta regularidad para los controles óptimos, a saber

Corolario 1.14. (Regularidad de los controles óptimos).
Supuesto **[H]**, *si* $\sigma_1(-a) < 0$ *y* $f \in L_+^\infty(\Omega)$ *es un control óptimo, entonces* $f \in C(\overline{\Omega})$ *y además*

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow P_f(x) < 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Nota.

Bastaría que alguna de las desigualdades de la equivalencia anterior se cumpliera para, automáticamente tener más regularidad en los controles óptimos. De hecho, si ello es así, tendríamos $f \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$. Más adelante (Corolarios 1.16 y 1.23) veremos que podemos conseguir que estas desigualdades se cumplan imponiendo ciertas restricciones al parámetro λ y/o a la función b.

Nuestro próximo objetivo será dar condiciones que permitan probar que si $f \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ es un control óptimo, entonces $P_f \leq 1$ c.e.t. Ω. Para ello, podemos usar los apartados *i)* y *ii)* del Lema 1.2. En efecto, del apartado *ii)* deducimos que $P_f \geq 0$. Pero, si además, queremos encontrar una cota superior para P_f, debemos usar una cota superior para f y una cota inferior para la función $-a + f + 2bu_f$. La cota superior para f, cuando éste sea control óptimo, es la dada en el Lema 1.10 y la cota inferior para la función citada la encontraremos usando, entre otras cosas, la continuidad de la función u_f con respecto a f, como vamos a ver en el próximo lema.

Lema 1.15. *Supongamos la hipótesis* **[H]** *y* $\sigma_1(-a) < 0$. *Sea* $f \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ *un control óptimo para el problema* $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. *Elijamos* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, *tal que*

$$\epsilon < \frac{\lambda_1(-a + 2bu_0)}{2\overline{b}}. \tag{1.25}$$

Entonces, existe una constante positiva Λ_0 *(que depende de* Ω, a *y* b*) tal que si* $\lambda \leq \Lambda_0$, *la función* P_f, *definida en* (1.20), *satisface la siguiente desigualdad*

$$0 \leq P_f \leq \lambda\, Q, \quad \text{c.e.t.} \quad \Omega, \tag{1.26}$$

donde Q *es la única solución del problema*

$$\begin{aligned} -\Delta Q + (-a + 2b(u_0 - \epsilon))Q &= \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \quad \text{en} \quad \Omega, \\ Q &= 0, \quad \text{en} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que, gracias a la condición $\sigma_1(-a) < 0$, la función u_0 es estrictamente positiva en Ω y que por tanto, como hemos visto en el apartado 3 de la Proposición 1.8, $\sigma_1(-a + 2bu_0) > 0$. Ahora, por la elección hecha de ϵ y la continuidad de la aplicación $u_{(\cdot)} : L^{\infty}(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$, $f \mapsto u_f$, existe una constante positiva Λ_0 tal que

$$g \in L^{\infty}_{+}(\Omega), \; g \leq \Lambda_0 \frac{\overline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow u_g \geq u_0 - \epsilon, \quad \text{c.e.t.} \quad \Omega. \tag{1.28}$$

Usando el Lema 1.2, existe una única solución Q para el problema (1.27). Por ser lineal la ecuación (1.27), la función $\lambda Q \in H_0^1(\Omega)$ será solución de este otro problema

$$-\Delta(\lambda Q) + (-a + 2b(u_0 - \epsilon))\lambda Q = \lambda \frac{\overline{a}}{\underline{b}}.$$

Para terminar la demostración de este lema basta observar que si $\lambda \leq \Lambda_0$ y que al ser $f \in L_+^\infty(\Omega)$ un control óptimo debe ser $f \leq \lambda \frac{\overline{a}}{\underline{b}}$. Usando (1.28) tendremos $-a + f + 2bu_f \geq -a + 2b(u_0 - \epsilon)$. El Lema 1.2 nos da la acotación buscada. ∎

Corolario 1.16. *Supongamos* [H] *y* $\sigma_1(-a) < 0$. *Sea* $f \in L_+^\infty(\Omega)$ *un control óptimo para el problema* $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. *Si*

$$\lambda \leq \min\left\{\Lambda_0, \frac{1}{\|Q\|_\infty}\right\} \equiv \Lambda_1, \tag{1.29}$$

entonces, la función P_f, *definida en* (1.20), *verifica la desigualdad*

$$0 \leq P_f \leq 1, \quad c.e.t. \quad \Omega.$$

Ahora es fácil deducir, para cualquier control óptimo, el sistema de optimalidad.

Teorema 1.17. (Sistema de optimalidad).
Si se verifican [H], $\sigma_1(-a) < 0$ *y* (1.29), *entonces, cualquier control óptimo,* $f \in L_+^\infty(\Omega)$, *puede expresarse de la forma*

$$f = \frac{\lambda}{2} u_f (1 - P_f), \tag{1.30}$$

donde el par $(u_f, P_f) \equiv (u, p)$, *satisface el siguiente sistema (de optimalidad)*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u\left(a - [b + \frac{\lambda}{2}(1-p)]u\right), \quad en \ \Omega, \\ -\Delta p + p(-a + 2bu) &= \frac{\lambda}{2}u(1-p)^2, \quad en \ \Omega, \\ u = p &= 0, \quad en \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.31}$$

con las restricciones

$$0 \leq p \leq 1, \; u > 0, \quad c.e.t. \ \Omega \tag{1.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Es trivial teniendo en cuenta los resultados anteriores. ∎

Notas.

1. Si eliminamos la condición (1.29) (¡manteniendo las condiciones $\sigma_1(-a) < 0$ y **[H]**!) podríamos obtener un sistema de EDP parecido a (1.31). Habría que cambiar en (1.31) la expresión $(1-p)$ por $(1-p)^+$.
2. El teorema anterior da condiciones que nos permiten obtener el sistema de optimalidad, pero quizá, el principal inconveniente puede presentarse a la hora de comprobar en la práctica cuándo se cumple la condición (1.29).

I.3. Estudio de la unicidad del control óptimo.

En esta sección probaremos la unicidad del control óptimo en el caso que el parámetro λ del funcional (1.2) sea suficiente pequeño. Si, además, suponemos que la función b, que aparece en (1.1), es una constante positiva, podemos completar un poco más esta información y decir que el control óptimo será único cuando la cantidad $\frac{\lambda}{b}$ sea suficientemente pequeña. Por último, motivados por este resultado, nos preguntamos si sería posible afirmar lo mismo cuando la función b no fuera constante. La respuesta es afirmativa si, además, imponemos una restricción sobre el crecimiento de b. Concretamente obtendremos que si $b \in L^\infty(\Omega)$ es tal que $1 \leq \frac{\overline{b}}{\underline{b}} < 2$ con $\underline{b}$ suficientemente grande, existe un único control óptimo para el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. En los tres supuestos anteriores, para probar la unicidad de solución del problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$, bastará con probar la unicidad de solución del sistema de optimalidad (1.31)-(1.32), debido a que, cualquier control óptimo admite una expresión en términos de una solución (u,p) del sistema de optimalidad (1.31) junto con las condiciones (1.32) (recordemos el Teorema 1.17).

Para comenzar la sección, probaremos algunas acotaciones necesarias que cumplen las soluciones del sistema (1.31)-(1.32).

Lema 1.18. (Acotación para las soluciones del sistema de optimalidad).
Supongamos **[H]**, $\sigma_1(-a) < 0$, *que hemos elegido* ϵ *como en* (1.25) *y* (1.29). *Sea* (v,q) *cualquier solución de* (1.31) *verificando* (1.32). *Entonces se verifica*

$$u_0(x) - \epsilon \leq w(x) \leq v(x) \leq \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \quad 0 \leq q(x) \leq \lambda Q(x), \quad \text{c.e.t. } \Omega, \tag{1.33}$$

donde w *es la solución maximal no negativa del problema*

$$\begin{aligned} -\Delta w &= w\left[a - \frac{\lambda}{2}w - bw\right] \quad \text{en } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.34}$$

y Q *es la solución del problema* (1.27).

DEMOSTRACIÓN. Con la notación que venimos empleando, $w = u_{\frac{\lambda}{2}w}$ y como $\sigma_1(-a) < 0$, la función w es estrictamente positiva en Ω. De esta forma, por ser w solución de una ecuación tipo logístico, el Teorema 1.6 da la acotación $w \leq \frac{\overline{a}}{\underline{b}}$ y por la elección hecha de λ, tenemos $\frac{\lambda}{2}w \leq \Lambda_0\frac{\overline{a}}{\underline{b}}$. Finalmente (1.28) asegura la estimación $w(x) \geq u_0(x) - \epsilon$, en Ω. Por otro lado, como w es una subsolución acotada para la primera ecuación del sistema de optimalidad (1.31), que es de tipo logístico con $v = u_{\frac{\lambda}{2}(1-p)v}$, la unicidad de solución no negativa para el problema (1.1), vista en el Teorema 1.6, nos garantiza que $w(x) \leq v(x)$ en Ω y $v(x) \leq \frac{\overline{a}}{\underline{b}}$.

En relación con la función q, pensemos que satisface el problema

$$\begin{aligned} -\Delta q + q(-a + 2bv) &= \frac{\lambda}{2}v(1-q)^2, \quad \text{en } \Omega,\\ q &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Como se cumplen las acotaciones $-a+2bv \geq -a+2b(u_0-\epsilon)$ y $\frac{\lambda}{2}v(1-q)^2 \leq \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}$ (la última de ellas por (1.32)), deducimos $q \leq \lambda Q$ de la misma forma que lo hicimos en el Lema 1.15. ∎

Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema principal de esta sección. Usando el sistema de optimalidad, probaremos que el control óptimo es único cuando el parámetro λ se toma suficientemente pequeño. Más precisamente,

Teorema 1.19.(Unicidad del control óptimo).
Supongamos [H], $\sigma_1(-a) < 0$ *y elijamos* ϵ *como en* (1.25). *Sea* $\delta_0 \equiv \lambda_1(-a + 2b(u_0 - \epsilon))$, *que es estrictamente positivo por la elección hecha de* ϵ. *Supongamos además que*

$$\lambda \leq \Lambda_2 \equiv \min\left\{\Lambda_1, \frac{4\delta_0}{4\overline{b}\|Q\|_\infty + 1 + \frac{\overline{a}^2}{\underline{b}^2}}\right\}. \tag{1.35}$$

Entonces, el sistema (1.31) *tiene una única solución* (u,p) *verificando* (1.32).

DEMOSTRACIÓN. Sean (u,p) y (v,q) dos soluciones del sistema (1.31) verificando (1.32). Veremos que necesariamente son la misma. Restando las ecuaciones que satisfacen ambas, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = &-\Delta(u-v) - a(u-v) + b(u-v)(u+v)+ \\ &+\frac{\lambda}{2}(1-p)(u+v)(u-v) - \frac{\lambda}{2}v^2(p-q) \end{aligned} \tag{1.36}$$

y

$$\begin{aligned} 0 = &-\Delta(p-q) - a(p-q) + 2bu(p-q)+ \\ &+2bq(u-v) - \frac{\lambda}{2}(u-v) + \lambda u(p-q)+ \\ &+\lambda q(u-v) - \frac{\lambda}{2}u(p-q)(p+q) - \frac{\lambda}{2}q^2(u-v). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Ahora multiplicamos (1.36) por $(u-v)$, (1.37) por $(p-q)$, integramos sobre Ω y después de sumar las dos expresiones obtenidas, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = &\int_\Omega \Big[|\nabla(u-v)|^2 - a(u-v)^2 + b(u+v)(u-v)^2+ \\ &+\frac{\lambda}{2}(1-p)(u+v)(u-v)^2 - \frac{\lambda}{2}v^2(u-v)(p-q)\Big] + \\ &+\int_\Omega \Big[|\nabla(p-q)|^2 - a(p-q)^2 + 2bu(p-q)^2+ \\ &+(u-v)(p-q)\left(2bq - \frac{\lambda}{2} + \lambda q - \frac{\lambda}{2}q^2\right) + \\ &+\frac{1}{2}\lambda u(2-(p+q))(p-q)^2\Big]. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Observemos que las expresiones $\frac{\lambda}{2}(1-p)(u+v)(u-v)^2$ y $\frac{1}{2}\lambda u(2-(p+q))(p-q)^2$, son no negativas, siendo además la segunda estrictamente positiva cuando $p \neq q$ en Ω (esto último es consecuencia de (1.32)). El Lema 1.18 nos garantiza, en particular, que las funciones u y v son mayores que la función $u_0 - \epsilon$. Además, la caracterización variacional del valor propio principal δ_0, nos asegura que

$$\int_\Omega |\nabla r|^2 + \int_\Omega (-a + 2b(u_0 - \epsilon))r^2 \geq \delta_0 \int_\Omega r^2, \ \forall\, r \in H_0^1(\Omega). \tag{1.39}$$

Teniendo en cuenta todo esto, (1.38) implica

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_\Omega &\left[\delta_0(u - v)^2 + \delta_0(p - q)^2 + \right.\\ (u - v)(p - q) &\left.\left(2bq - \frac{\lambda}{2} + \lambda q - \frac{\lambda}{2}(q^2 + v^2)\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Notemos que, si $p(x) \neq q(x)$ en algún subconjunto de medida positiva de Ω, entonces la desigualdad anterior es estricta.

La expresión que aparece en el integrando de (1.40) es del tipo $\delta_0 r^2 + \delta_0 s^2 - \gamma r s$ con $\gamma = 2bq - \frac{\lambda}{2} + \lambda q - \frac{\lambda}{2}(q^2 + v^2)$ y $r, s \in \mathbb{R}$. Si conseguimos probar que $|\gamma| \leq 2\delta_0$ dicha expresión será no negativa en virtud de la cadena de desigualdades siguiente

$$\delta_0 r^2 + \delta_0 s^2 - \gamma r s \ \geq \ \delta_0 r^2 + \delta_0 s^2 - |\gamma||rs| \ \geq \ \delta_0(|r| - |s|)^2.$$

De esta forma, si $|\gamma| \leq 2\delta_0$, la desigualdad (1.40) será una igualdad. Consecuentemente $p = q$ en Ω y de aquí, de nuevo por (1.38), ya es fácil ver que $u = v$ en Ω.

Queda por probar que $|\gamma| \leq 2\delta_0$. Para ello, usando la hipótesis (1.35) y las acotaciones (1.33), tenemos

$$\begin{aligned} &\left|2bq - \frac{\lambda}{2} + \lambda q - \frac{\lambda}{2}(q^2 + v^2)\right| = \\ &= \left|2bq - \frac{\lambda}{2}(1 - q)^2 - \frac{\lambda}{2}v^2\right| \leq \\ &\leq \lambda\left[2\overline{b}\|Q\|_\infty + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{a}^2}{\underline{b}^2}\right)\right] \leq 2\delta_0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Nota.

Una consecuencia importante del teorema anterior es la unicidad del control óptimo para el problema de control considerado. Podemos hacer otra demostración de la unicidad del control óptimo usando que el funcional (1.2), supuesto λ suficientemente pequeño, es estrictamente cóncavo, como veremos en la sección quinta. Sin embargo, el haberlo hecho así, tiene la ventaja de dotar al único control óptimo, de una expresión en términos de la única solución de un sistema de EDP que, como veremos en la próxima sección, proporcionará un método iterativo para aproximarlo, basado en el método de sub-súper soluciones. Observando las ecuaciones del sistema de optimalidad (1.31)-(1.32), podemos notar que consta de una ecuación tipo logístico, en la variable u, acoplada con otra ecuación que tiene una parte lineal, en la variable p, con otra no lineal en las variables u y p y que las expresiones que relacionan las variables u y p entre sí, van multiplicadas por el parámetro λ. Parece lógico pensar, que si el parámetro λ es pequeño, la parte "mala" del sistema influirá poco y así se mantendrá la unicidad de solución que cada ecuación tiene por "separado" cuando no están acopladas.

Corolario 1.20. *Consideremos el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. Supongamos que se cumplen las hipótesis* [**H**] *y $\sigma_1(-a) < 0$. Entonces, existe un $\Lambda_2 = \Lambda_2(\Omega, a, b) > 0$ tal que si*

$$0 < \lambda \leq \Lambda_2,$$

el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ tiene un único control óptimo.

DEMOSTRACIÓN. Definir Λ_2 como en el Teorema 1.19 y aplicar dicho teorema. ∎

Hasta ahora, hemos encontrado condiciones para obtener la unicidad de solución para el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ fijando el dominio Ω, las funciones a y b y tomando el parámetro λ suficientemente pequeño. El siguiente corolario muestra que es posible cambiar un poco esta situación. De hecho, mostraremos, que en el caso que la función b sea una constante positiva, la condición para obtener la unicidad del problema que estamos considerando, es que $\frac{\lambda}{b}$ sea suficientemente pequeño. Esta condición, en particular, permite cambiar el esquema anterior. Podemos ahora fijar el dominio Ω, la función a y el parámetro λ, y tomando b suficientemente grande, tendremos asegurada la unicidad del problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. Veamos esto con detalle en el siguiente corolario.

Corolario 1.21. *Consideremos el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ con b una constante positiva. Supongamos también que el dominio Ω y la función a son fijadas cumpliendo* [H] *y $\sigma_1(-a) < 0$. Elijamos ahora $\Lambda_2(\Omega, a, 1)$, dado por el corolario anterior. Si además*

$$\frac{\lambda}{b} \leq \Lambda_2(\Omega, a, 1),$$

entonces el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ tiene un único control óptimo.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente constatar que la unicidad de solución maximal no negativa para el problema (1.1), recuérdese el Teorema 1.6, nos asegura que

$$b u_{\Omega,a,b,f} = u_{\Omega,a,1,f}. \tag{1.41}$$

De esta forma, para cada $f \in L^\infty_+(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned} &J_{\Omega,a,b,\lambda}(f) = \\ &= \int_\Omega (\lambda u_{\Omega,a,b,f} f - f^2) = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{b} b u_{\Omega,a,b,f} f - f^2\right) = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{b} u_{\Omega,a,1,f} f - f^2\right) = \\ &\qquad = J_{\Omega,a,1,\frac{\lambda}{b}}(f). \end{aligned}$$

Por tanto, si aplicamos ahora el Corolario 1.20 obtendremos la conclusión deseada. ∎

Notas.

1. Como podemos observar, repasando la demostración del corolario anterior, cuando la función b es una constante positiva, los problemas $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ y $PD_{\Omega,a,1,\frac{\lambda}{b}}$ son equivalentes, i.e., $f \in L^\infty_+(\Omega)$ es solución de $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ si y sólo si es solución de $PD_{\Omega,a,1,\frac{\lambda}{b}}$.

2. En realidad, en el resultado anterior hemos considerado una función fija $b_0 \equiv 1$ cumpliendo [H] y hemos demostrado que si la función b es un múltiplo de b_0, $b = \gamma b_0$, con γ una constante positiva suficientemente grande, el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ tiene solución única. Esto se puede generalizar fácilmente al caso en el que consideremos una función $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, no necesariamente constante, cumpliendo [H] y $b = \gamma b_0$, con $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

El corolario anterior nos motiva para estudiar el problema de unicidad del control óptimo fijando el dominio Ω, la función a y el parámetro λ pero permitiendo a la función b no ser constante. De nuevo por comodidad en la notación, denotaremos por $u_{b,f}$ la solución maximal no negativa de (1.1), en lugar de u_f, y por $P_{b,f}$ la solución de (1.20), en lugar de P_f.

Nuestro primer objetivo será probar condiciones sobre la función b que garanticen, para cualquier control óptimo $f \in L^\infty_+(\Omega)$, la siguiente acotación de la solución de (1.20)

$$P_{b,f} \leq 1, \text{ c.e.t. } \Omega.$$

En este caso, podremos expresar, usando el Lema 1.13, cualquier control óptimo, como una solución del sistema de optimalidad (1.31). Vamos a obtener la estimación anterior de una forma parecida, quizá algo más técnica, a como se obtuvo en el Lema 1.15 y en el Corolario 1.16.

Lema 1.22. *Supongamos que las funciones a, b satisfacen* [**H**], $\sigma_1(-a) < 0$ *y*

$$\overline{b} \leq M\underline{b}, \text{ para algún } 1 \leq M < 2. \tag{1.42}$$

Elijamos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\varepsilon < \frac{M}{2}\sigma_1(-a + \frac{2}{M}u_{1,0}). \tag{1.43}$$

Entonces, existe una constante positiva b_0 (que depende de Ω, a, λ y ε), tal que si $\underline{b} \geq b_0$ y f es cualquier control óptimo, la función $P_{b,f}$ definida como la solución de (1.20), *satisface las acotaciones*

$$0 \leq P_{b,f} \leq \frac{Q}{\underline{b}}, \text{ c.e.t. } \Omega, \tag{1.44}$$

donde Q es la única solución de

$$\begin{array}{ll} -\Delta Q + (-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon))Q = \lambda\overline{a}, & \textit{en } \Omega, \\ Q = 0, & \textit{en } \partial\Omega. \end{array} \tag{1.45}$$

DEMOSTRACIÓN. Como una consecuencia de la hipótesis $\sigma_1(-a) < 0$, la función $u_{1,0}$ es estrictamente positiva en Ω y similarmente a lo hecho en la demostración del Lema 1.15,

$$\sigma_1(-a + \frac{2}{M}u_{1,0}) > 0.$$

Usando ahora el Lema 1.2 y teniendo en cuenta la elección de ε, que en particular garantiza que $\sigma_1(-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon)) > 0$, es fácil deducir que existe una única solución Q de (1.45). Sabemos también que la función $L^\infty(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$, $f \mapsto u_{b,f}$, es continua (recordad la Proposición 1.8); luego existe una constante positiva, b_0, tal que para $\underline{b} \geq b_0$, si $g \in L^\infty_+(\Omega)$ con $g \leq \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}$, entonces

$$u_{1,g} \geq u_{1,0} - \varepsilon \text{ c.e.t. } \Omega. \tag{1.46}$$

Sea ahora $f \in L^\infty_+(\Omega)$ un control óptimo para el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. Usando que $u_{\bar{b},f}$ es una subsolución para (1.1) y que $ku_{k,f} = u_{1,f}$, $\forall k > 0$, obtenemos que

$$2bu_{b,f} = 2\frac{b}{\bar{b}}\bar{b}u_{b,f} \geq \frac{2}{M}\bar{b}u_{\bar{b},f} = \frac{2}{M}u_{1,f}. \tag{1.47}$$

Como además $\underline{b} \geq b_0$, (1.13) y (1.46) implican

$$-a + f + 2bu_{b,f} \geq -a + 2bu_{b,f} \geq -a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon) \text{ c.e.t. } \Omega. \tag{1.48}$$

La función $\frac{Q}{\underline{b}}$ satisface

$$-\Delta\left(\frac{Q}{\underline{b}}\right) + \left(-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon)\right)\frac{Q}{\underline{b}} = \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}.$$

Si tenemos en cuenta que $f \leq \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}$ y la desigualdad (1.48), por el Lema 1.2 concluimos la demostración. ∎

Corolario 1.23. *Supongamos* **[H]**, $\sigma_1(-a) < 0$, (1.42) *y*

$$\underline{b} \geq b_1 \equiv \max\left\{b_0, \|Q\|_\infty\right\}. \tag{1.49}$$

Entonces, cualquier control óptimo $f \in L^\infty_+(\Omega)$, puede ser expresado como

$$f = \frac{\lambda}{2}u_{b,f}(1 - P_{b,f}), \tag{1.50}$$

donde el par $(u,p) \equiv (u_{b,f}, P_{b,f})$, es una solución del sistema de optimalidad (1.31), *satisfaciendo las condiciones* (1.32).

DEMOSTRACIÓN. La condición (1.49) junto con (1.44) nos garantiza que

$$0 \leq P_{b,f} \leq 1, \text{c.e.t. } \Omega.$$

El Lema 1.13 hace el resto. ∎

Nota.

El corolario anterior viene a dar otra forma distinta, imponiendo condiciones a la función b, de conseguir que un control óptimo se pueda expresar de la forma (1.50) con $(u_{b,f}, P_{b,f})$ soluciones de (1.31)-(1.32).

Lema 1.24. *Supongamos* **[H]**, $\sigma_1(-a) < 0$, (1.42) *y* (1.49). *Entonces cualquier solución* (v, q) *del sistema* (1.31), *bajo las condiciones* (1.32), *satisface*

$$w(x) \leq v(x) \leq \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \quad 0 \leq q(x) \leq \frac{Q(x)}{\underline{b}}, \text{ c.e.t. } \Omega,$$

donde w *es la única solución maximal de* (1.34) *y* Q *está definido por* (1.45). *Si además escogemos* ε *como en* (1.43), *tendremos*

$$2b(x)w(x) \geq \frac{2}{M}(u_{1,0}(x) - \varepsilon) \text{ c.e.t. en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este lema es similar a la del Lema 1.18. ∎

Pasemos ahora a dar una demostración de la unicidad del control óptimo, pero imponiendo condiciones sobre la función b. Para ello probaremos, en particular, que el sistema de optimalidad, tiene una única solución que cumpla unas determinadas condiciones.

Teorema 1.25.(Unicidad del control óptimo).
Supongamos **[H]**, $\sigma_1(-a) < 0$ *y* (1.42). *Entonces, el problema* $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ *admite un único control óptimo, siempre que* $\underline{b}$ *sea suficientemente grande.*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos ε verificando (1.43). Entonces $\delta \equiv \sigma_1(-a+\frac{2}{M}(u_{1,0}-\varepsilon)) > 0$. Como veremos en el transcurso de la demostración, para obtener la unicidad de solución de (1.31)-(1.32) bastará tomar

$$\underline{b}^2 \geq b_2 \equiv \max\left\{ \frac{\lambda\overline{a}^2\left\{\frac{\lambda}{2}+2M\|Q\|_\infty\right\}}{2\delta^2}, b_1^2 \right\} \tag{1.51}$$

donde Q está definido como la única solución de (1.45), y b_1 por (1.49).

En efecto, fijemos $\alpha = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\lambda}{2}+2M\|Q\|_\infty\right)$. En virtud del Lema 1.24, es fácil comprobar que (u,p) es una solución del sistema (1.31)-(1.32) si y sólo si $(u,r)\equiv(u,\frac{p}{\alpha})$ es una solución del sistema

$$\begin{aligned} -\Delta u - au + bu^2 + \frac{\lambda}{2}(1-r\alpha)u^2 &= 0, && \text{en } \Omega,\\ -\Delta r + r(-a+2bu) - \frac{\lambda}{2\alpha}u(1-r\alpha)^2 &= 0, && \text{en } \Omega,\\ u = r &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.52}$$

junto con las condiciones

$$0 \leq r(x) \leq \frac{Q(x)}{\alpha\underline{b}} \quad (\leq \frac{1}{\alpha})\ ,\ w(x) \leq u(x) \leq \frac{\overline{a}}{\underline{b}},\ \text{c.c.t. } \Omega. \tag{1.53}$$

Para probar la unicidad de (1.52), bajo las restricciones (1.53), consideremos otra solución (v,s) de (1.52)-(1.53). Restando el sistema que verifica (v,s) del que verifica (u,r), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = & -\Delta(u-v) - a(u-v) + b(u^2-v^2)+\\ & +\frac{\lambda}{2}(u^2-v^2) - \frac{\lambda\alpha}{2}(u^2r - v^2s) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 = & -\Delta(r-s) - a(r-s) + 2b(ur-vs)-\\ & -\frac{\lambda\alpha}{2}\left(u(\frac{1}{\alpha}-r)^2 - v(\frac{1}{\alpha}-s)^2\right). \end{aligned}$$

Haciendo algunas operaciones elementales

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -\Delta(u-v) - a(u-v) + b(u-v)(u+v)+\\ & +\frac{\lambda}{2}(u+v)(u-v) - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2(r-s) - \frac{\lambda\alpha}{2}s(u+v)(u-v) \end{aligned} \tag{1.54}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta(r-s) - a(r-s) + 2bu(r-s) + 2bs(u-v) + \\ &+ \frac{\lambda\alpha}{2} u \left[\frac{2}{\alpha} - (r+s)\right](r-s) - \frac{\lambda\alpha}{2}(u-v)\left(\frac{1}{\alpha} - s\right)^2 . \end{aligned} \tag{1.55}$$

Multiplicando (1.54) por $(u-v)$, (1.55) por $(r-s)$, integrando sobre Ω, y sumando ambas expresiones,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big[|\nabla(u-v)|^2 - a(u-v)^2 + b(u+v)(u-v)^2 + \\ &+ \frac{\lambda}{2}(u+v)(u-v)^2(1-\alpha s) - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2(u-v)(r-s)\Big] + \\ &+ \int_\Omega \Big[|\nabla(r-s)|^2 - a(r-s)^2 + 2bu(r-s)^2 + \\ &+ (u-v)(r-s)\left(2bs - \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - s\right)^2\right) + \\ &+ \frac{\lambda\alpha}{2} u \left(\frac{2}{\alpha} - (r+s)\right)(r-s)^2\Big] . \end{aligned} \tag{1.56}$$

A partir de ahora, al haber introducido el parámetro α, la prueba se hace un poco más delicada que la del Teorema 1.19. Observemos que $\frac{\lambda}{2}(u+v)(u-v)^2(1-\alpha s)$ y $\frac{\lambda\alpha}{2}u\left(\frac{2}{\alpha} - (r+s)\right)(r-s)^2$ son no negativas. Además, si $r(x) \neq s(x)$ en un subconjunto de Ω de medida positiva, entonces, como consecuencia de (1.53),

$$\int_\Omega \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{2}{\alpha} - (r+s)\right)(r-s)^2 > 0.$$

Ahora, usando las acotaciones dadas por el Lema 1.24 y (1.53), las funciones $(u+v)$ y $2bu$ deben satisfacer

$$\begin{aligned} (u+v)b &\geq \tfrac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon) \\ 2bu &\geq \tfrac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon) \end{aligned}$$

en Ω.

Teniendo en cuenta la caracterización variacional que cumple δ (ver (1.4)) aplicada a las funciones $q_1 = u - v$ y $q_2 = r - s$ y considerando lo anterior junto con (1.56), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_\Omega \Big[& \delta(u-v)^2 + \delta(r-s)^2 + \\ & +(u-v)(r-s)\left(2bs - \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - s\right)^2 - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2\right)\Big]. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Además, si $r(x) \neq s(x)$ en un subconjunto de Ω con medida positiva, entonces la desigualdad anterior es estricta. La elección de α, (1.51) y (1.53) implica

$$\begin{aligned} \left|2bs - \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - s\right)^2 - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2\right| & \leq \frac{2\bar{b}\|Q\|_\infty}{\underline{b}\alpha} + \frac{\lambda\alpha}{2\alpha^2} + \frac{\lambda\alpha\bar{a}^2}{2\underline{b}^2} \leq \\ & \leq \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\lambda}{2} + 2M\|Q\|_\infty\right] + \frac{\lambda\alpha\bar{a}^2}{2\underline{b}^2} \leq \\ & \leq \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta (1.57),

$$\begin{aligned} & \int_\Omega [\delta(u-v)^2 + \delta(r-s)^2] \leq \\ & \qquad \leq \left|\int_\Omega (u-v)(r-s)\left(2bs - \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - s\right)^2 - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2\right)\right| \\ & \qquad \leq 2\delta \int_\Omega |u-v||r-s|. \end{aligned}$$

Y por tanto $\int_\Omega (|u-v| - |r-s|)^2 \leq 0$, con desigualdad estricta si $r(x) \neq s(x)$ en un subconjunto de Ω de medida positiva. De aquí deducimos que, $r \equiv s$ y $u \equiv v$ en Ω. ∎

I.4. Aproximación del control óptimo.

El objetivo que nos hemos marcado para esta sección es: dar un esquema iterativo que nos permita aproximar el (único) control óptimo; será por tanto necesario mantener las condiciones que garanticen la unicidad del mismo. La idea principal es usar que cualquier control óptimo viene descrito por la fórmula (1.30). Como, en particular, las condiciones de unicidad del control óptimo que hemos obtenido en la sección anterior, garantizan la unicidad de solución del sistema (1.31)-(1.32), si conseguimos dar con un método que aproxime la única solución del sistema (1.31)-(1.32), en virtud de la expresión (1.30) ya comentada, el método descrito nos servirá también para aproximar el control óptimo. Algunas de las ideas que vamos a usar pueden encontrarse en Leung [45, cap. V]. A diferencia de los sistemas que se estudian en este trabajo, los términos que aparecen en nuestro sistema (1.31) no tienen un comportamiento monótono.

Vamos a movernos en un marco más general que el que nos proporciona el sistema (1.31); ello no sólo no aumentará la dificultad sino que además nos permitirá ganar claridad en la exposición.

Consideremos el sistema elíptico

$$\begin{aligned} &-\Delta u(x) = B(x,u(x),p(x)), && x \in \Omega, \\ &-\Delta p(x) = C(x,u(x),p(x)) + D(x,u(x),p(x)), && x \in \Omega, \\ &u(x) = p(x) = 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.58}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$, y las "no linealidades" $B, C, D : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfacen la siguiente condición de regularidad:

[C1] *B, C y D son continuas con respecto a $(u,p) \in \mathbb{R}^2$, para $x \in \overline{\Omega}$ fijo. Además, $\forall u, p \in L^\infty(\Omega)$, las funciones $B(\cdot,u(\cdot),p(\cdot)), C(\cdot,u(\cdot),p(\cdot))$ y $D(\cdot,u(\cdot),p(\cdot))$, pertenecen a $L^\infty(\Omega)$.*

También supondremos que B, C y D cumplen las siguientes condiciones de tipo monótono

[C2] *$\exists T > 0$ tal que la función $B(x,u,p) + Tu$ es creciente en u y las funciones $C(x,u,p) + \frac{T}{2}p$, $D(x,u,p) + \frac{T}{2}p$ son crecientes en la variable p, para $(x,u,p) \in \overline{\Omega} \times [inf\ ess\ \underline{u}, sup\ ess\ \overline{u}] \times [inf\ ess\ \underline{p}, sup\ ess\ \overline{p}]$. Además las funciones B, C y D satisfacen con respecto a las otras variables, las propiedades de monotonía siguientes:*
$B(x,u,p)$ es creciente en p, la función $C(x,u,p)$ es decreciente en u y la función $D(x,u,p)$ es creciente en u, para $(x,u,p) \in \overline{\Omega} \times [inf\ ess\ \underline{u}, sup\ ess\ \overline{u}] \times [inf\ ess\ \underline{p}, sup\ ess\ \overline{p}]$,

donde las funciones $\underline{u}, \overline{u}, \underline{p}, \overline{p} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ forman un sistema de sub-súper soluciones para (1.58) según la siguiente definición:

Definición 1.26. *Sean $\underline{u}, \overline{u}, \underline{p}, \overline{p} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diremos que tales funciones forman un* **sistema de sub-súper-soluciones** *para el sistema (1.58) si verifican:*

a)

$$\begin{cases} \underline{u}(x) \le \overline{u}(x), & \underline{p}(x) \le \overline{p}(x), & \text{c.e.t. } \Omega, \\ \underline{u} \le 0 \le \overline{u}, & \underline{p} \le 0 \le \overline{p}, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

b) $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \ge 0$,

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\phi \ge \int_\Omega B(x,\overline{u},\overline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \le \int_\Omega B(x,\underline{u},\underline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\overline{p} \cdot \nabla\phi \ge \int_\Omega C(x,\underline{u},\overline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\overline{u},\overline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\underline{p} \cdot \nabla\phi \le \int_\Omega C(x,\overline{u},\underline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\underline{u},\underline{p})\phi.$$

Notemos que si $C \equiv 0$, nos encontramos ante un sistema de tipo cooperativo, mientras que si $D \equiv 0$, el sistema anterior se convertirá en uno de tipo presa-depredador, véase [45]. Para nosotros, obviamente, el caso más interesante será cuando ambas funciones sean no nulas. Esto es lo que ocurrirá cuando volvamos a estudiar el sistema (1.31)-(1.32). Para esta clase de sistemas, utilizando ideas similares a las aplicadas en [10] y [45], probaremos el siguiente

Teorema 1.27. *Consideremos el sistema* (1.58) *bajo las hipótesis* **[C1-C2]**. *Supongamos que* $\underline{u}, \overline{u}, \underline{p}, \overline{p} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *es un sistema de sub-súper-soluciones para* (1.58). *Definamos por inducción las sucesiones* $\{u_n\}, \{u^n\}, \{p_n\}, \{p^n\}$, *como*

$$u_1 = \underline{u},\ u^1 = \overline{u},\ p_1 = \underline{p},\ p^1 = \overline{p},$$

y para $n > 1$ *como las únicas soluciones de los problemas*

$$\begin{aligned}
-\Delta u_n + T u_n &= B(x, u_{n-1}, p_{n-1}) + T u_{n-1} \quad \text{en } \Omega,\\
u_n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega,\\[1ex]
-\Delta u^n + T u^n &= B(x, u^{n-1}, p^{n-1}) + T u^{n-1} \quad \text{en } \Omega,\\
u^n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega,\\[1ex]
-\Delta p_n + T p_n &= C(x, u^{n-1}, p_{n-1}) + \frac{T}{2} p_{n-1} + D(x, u_{n-1}, p_{n-1}) + \frac{T}{2} p_{n-1} \quad \text{en } \Omega,\\
p_n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega,\\[1ex]
-\Delta p^n + T p^n &= C(x, u_{n-1}, p^{n-1}) + \frac{T}{2} p^{n-1} + D(x, u^{n-1}, p^{n-1}) + \frac{T}{2} p^{n-1} \quad \text{en } \Omega,\\
p^n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
u_1 \le u_2 \le \dots \le u_n \le u^n \le u^{n-1} \le \dots \le u^1,\\
p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n \le p^n \le p^{n-1} \le \dots \le p^1,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

para todo $x \in \Omega$ *y*

$$u_n \nearrow u_*, \quad u^n \searrow u^*, \quad p_n \nearrow p_*, \quad p^n \searrow p^*, \tag{1.61}$$

en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para cualquier* $\alpha \in (0,1)$, *donde* u_*, u^*, p_*, p^* *están definidas, respectivamente, como el límite puntual de las sucesiones* u_n, u^n, p_n, p^n *y satisfacen el sistema*

$$\begin{aligned}
-\Delta u_* &= B(x, u_*, p_*), && \text{en } \Omega,\\
-\Delta u^* &= B(x, u^*, p^*), && \text{en } \Omega,\\
-\Delta p_* &= C(x, u^*, p_*) + D(x, u_*, p_*), && \text{en } \Omega,\\
-\Delta p^* &= C(x, u_*, p^*) + D(x, u^*, p^*), && \text{en } \Omega,\\
u_* = u^* &= p_* = p^* = 0, && \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Además, cualquier solución (u, p) *de* (1.58) *con la propiedad*

$$\underline{u} \le u \le \overline{u}, \quad \underline{p} \le p \le \overline{p}, \tag{1.63}$$

deberá satisfacer

$$u_n \le u \le u^n, \quad p_n \le p \le p^n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, *y consecuentemente*

$$u_* \le u \le u^*, \quad p_* \le p \le p^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Los ingredientes más usados para probar (1.60) son el principio de inducción matemática y el principio del máximo para el operador $(-\Delta + T)$, con condiciones en la frontera de Dirichlet y $T \in \mathbb{R}^+$, (recordar el Lema 1.2).

Veamos $u_1 \le u_2$. Como $(-\Delta + T)(u_1 - u_2) = B(x, u_1, p_1) + Tu_1 - Tu_1 + \Delta u_1$, multiplicando la igualdad anterior por $\phi \ge 0, \phi \in H_0^1(\Omega)$ arbitraria e integrando sobre Ω obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(u_2 - u_1)\nabla\phi + T\int_\Omega (u_2 - u_1)\phi \ge 0 \quad && \text{en } \Omega,\\
u_2 = 0 \ge u_1 \quad && \text{en } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

gracias a que u_1 es subsolución de (1.58). Teniendo en cuenta el Lema 1.2, deducimos que $u_2 \geq u_1$ en Ω. De forma análoga se verían $u^2 \leq u^1$ y $u^2 \leq u_2$ (en la última desigualdad debemos usar la monotonía de B). Para probar

$$p_1 \leq p_2 \leq p^2 \leq p^1$$

se usan argumentos similares. Supongamos ahora ciertas las desigualdades (1.60) para $n = k$ y probémoslas para $n = k+1$. Hagamos por ejemplo, $u_{k+1} \leq u^{k+1}$. Sabemos que, por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} &(-\Delta + T)(u^{k+1} - u_{k+1}) = \\ &\qquad = B(x, u^k, p^k) - B(x, u_k, p_k) + T(u^k - u_k) \geq 0, \qquad \text{en } \Omega \\ &\qquad\qquad u^{k+1} = u_{k+1} = 0, \qquad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Multiplicando por una $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$, arbitraria e integrando sobre Ω, en virtud del Lema 1.2, obtengo $u_{k+1} \leq u^{k+1}$ en Ω.

Comprobemos ahora (1.61). Demostremos que las convergencias de (1.61) se realizan en el espacio $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$. En efecto, fijado $x \in \Omega$, definimos

$$\begin{aligned} u_*(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x), & u^*(x) &= \lim_{n\to\infty} u^n(x), \\ p_*(x) &= \lim_{n\to\infty} p_n(x) \quad \text{y} & p^*(x) &= \lim_{n\to\infty} p^n(x). \end{aligned}$$

Como u^1, $p^1 \in L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1,\infty)$ y mayoran a u^n, u_n, p^n, p_n, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesge tenemos que u^*, u_*, p^*, $p_* \in L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1,\infty)$. Argumentos estándar de regularidad para soluciones de ecuaciones elípticas, ver [1], garantizan que u^n, u_n, p^n, $p_n \in W^{2,q}(\Omega)$, $\forall q \in (1,\infty)$, $n \geq 2$. Usando ahora (1.60) no es difícil probar que $\exists R, K \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} R \leq u_1(x) \leq \cdots \leq u^1(x) \leq K, \\ R \leq p_1(x) \leq \cdots \leq p^1(x) \leq K, \end{aligned}$$

en Ω. Como las funciones $B + T$, $C + \frac{T}{2}$, $D + \frac{T}{2}$ tienen un comportamiento monótono, deducimos para cualesquiera $i, j, l, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &B(x, R, R) + TR \leq \cdots \leq B(x, u_i(x), p_j(x)) + Tu_i(x) \leq \\ &\qquad \cdots B(x, u^l(x), p^m(x)) + Tu^l(x) \leq \cdots \leq B(x, K, K) + TK \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&C(x,K,R)+D(x,R,R)+TR\leq\cdots\\
&\qquad\cdots\leq C(x,u^i(x),p_j(x))+D(x,u_i(x),p_j(x))+Tp_j(x)\leq\cdots\\
&\qquad\cdots\leq C(x,u_l(x),p^m(x))+D(x,u^l(x),p^m(x))+Tp^m(x)\leq\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\leq C(x,R,K)+D(x,K,K)+TK.
\end{aligned}$$

Sea $q\in(N,\infty)$, entonces, teniendo en cuenta lo anterior, la definición de las sucesiones u^n, u_n, p^n, p_n y la regularidad de las soluciones de una ecuación elíptica, las sucesiones u^n, u_n, p^n, p_n están acotadas uniformemente en la norma de $W^{2,q}(\Omega)$. Así, tenemos de nuevo sucesiones parciales u^{n_k}, u_{n_k}, p^{n_k}, p_{n_k} convergentes, respectivamente, a u^*, u_*, p^*, p_* en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha=1-\frac{N}{q}$, con u^*, u_*, p^*, p_* solución de (1.62). La monotonía de las sucesiones u^n, u_n, p^n, p_n nos proporciona la convergencia de todas las sucesiones. La arbitrariedad del $q\in(N,\infty)$ nos permite deducir la convergencia anterior para cualquier $\alpha\in(0,1)$. ∎

Notas.

1. El teorema anterior, en particular, nos permite obtener mejores estimaciones de la solución de (1.58) que las conocidas a priori. Así, en el caso de conocer, en un principio, que (u,p) solución de (1.58), verifique (1.63), podemos afinar más esta acotación y obtener

$$u_*\leq u\leq u^*,\ p_*\leq p\leq p^*.$$

2. Observemos que (u^*,u_*,p^*,p_*) es también una solución de (1.62). Por tanto, si conseguimos probar que que sólo puede haber una solución (u,v,p,q) de (1.62) satisfaciendo

$$\begin{aligned}&\underline{u}\leq u\leq\overline{u},\underline{u}\leq v\leq\overline{u},\\&\underline{p}\leq p\leq\overline{p},\underline{p}\leq q\leq\overline{p},\end{aligned}\tag{1.64}$$

entonces tendremos $u_*=u^*$, $p_*=p^*$, y consecuentemente cualquier solución de (1.58), con la propiedad (1.63), deberá ser (u_*,p_*). En este caso podríamos aproximar las soluciones de (1.58) con el procedimiento iterativo descrito.

Como hemos comentado en la nota 2 anterior vamos a estudiar la unicidad de solución (u, v, p, q) de (1.62) en lo que nos queda de sección. Antes de enunciar los teoremas de unicidad, en los que básicamente se considerarán las condiciones λ suficientemente pequeño y $\underline{b}$ suficientemente grande, vamos a hacer un lema que nos facilitará su demostración.

Lema 1.28. *Supongamos* α, β, γ, $\tau \in [-1, 1]$, *entonces, se cumple la siguiente desigualdad*

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + \alpha xu + \beta xv + \gamma yu + \tau yv \geq 0, \quad \forall u, v, x, y \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto,

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + \alpha xu + \beta xv + \gamma yu + \tau yv \ \geq$$

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - |xu| - |xv| - |yu| - |yv| \ =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[(|x| - |u|)^2 + (|x| - |v|)^2 + (|y| - |u|)^2 + (|y| - |v|)^2 \right] \quad \geq 0. \ \blacksquare$$

Con objeto de aplicar el Teorema 1.27 al sistema (1.31)-(1.32), debemos de suponer ciertas las hipótesis del Teorema 1.19 o del Teorema 1.25; así tendremos asegurada la unicidad de solución del sistema de optimalidad y, por tanto, cualquier método de aproximación a la única solución del sistema de optimalidad, en virtud de la fórmula (1.30) daría una aproximación al control óptimo. Una posibilidad para conseguir esto último es probar la unicidad de solución de (1.62).

Definamos ahora

$$
\begin{aligned}
B(x,u,p) &= u\left(a - [b + \frac{\lambda}{2}(1-p)]u\right),\\
C(x,u,p) &= p(a-2bu), \qquad\qquad (1.65)\\
D(x,u,p) &= \frac{\lambda}{2}u(1-p)^2.
\end{aligned}
$$

Claramente la hipótesis **[H]** implica **[C1]**. Un sistema de sub-súper soluciones válido para nuestro sistema, en el sentido de la Definición 1.26, puede ser el formado por las funciones

$$
\underline{u} = w, \ \overline{u} = \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \ \underline{p} = 0, \ \overline{p} = \lambda Q, \qquad (1.66)
$$

donde w y Q son definidos, respectivamente, como en (1.34) y (1.27). El anterior sistema de sub-súper soluciones es conveniente cuando estudiemos la unicidad de (1.31)-(1.32) imponiendo condiciones sobre el parámetro λ. Cuando estudiemos la unicidad de solución de (1.31)-(1.32) pero bajo condiciones que incluyan el comportamiento de la función b, el sistema de sub-súper soluciones apropiado será

$$
\underline{u} = w, \ \overline{u} = \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \ \underline{p} = 0, \ \overline{p} = \frac{Q}{\underline{b}}, \qquad (1.67)
$$

con w definido por (1.34) y Q por (1.45).

Por otro lado, para conseguir que se cumplan las hipótesis **[C2]**, para una conveniente constante T, basta tener en cuenta que las funciones B, C y D son de clase C^1 con respecto a las variables (u,p). De esta forma, el Teorema 1.27 puede aplicarse al sistema (1.31) para obtener (u_*, u^*, p_*, p^*) verificando

$$
\left.\begin{aligned}
-\Delta u_* &= u_* \left(a - [b + \frac{\lambda}{2}]u_* + \frac{\lambda}{2} p_* u_* \right) \quad \text{en} \ \ \Omega, \\
-\Delta u^* &= u^* \left(a - [b + \frac{\lambda}{2}]u^* + \frac{\lambda}{2} p^* u^* \right) \quad \text{en} \ \ \Omega, \\
-\Delta p_* &= (a - 2bu^*)p_* + \frac{\lambda}{2} u_* (1 - p_*)^2 \quad \text{en} \ \ \Omega, \\
-\Delta p^* &= (a - 2bu_*)p^* + \frac{\lambda}{2} u^* (1 - p^*)^2 \quad \text{en} \ \ \Omega, \\
& u_* = u^* = p_* = p^* = 0, \quad \text{en} \ \ \partial\Omega.
\end{aligned}\right. \tag{1.68}
$$

Disponemos de dos resultados que nos garantizan la unicidad de solución del sistema anterior bajo las condiciones (1.64). Las demostraciones son parecidas pero el tipo de condiciones que aparecen son esencialmente independientes, de hecho involucran diferentes datos del problema. Por ello, creemos conveniente enunciar los dos resultados.

Teniendo ahora en cuenta las notas del Teorema 1.27 estos dos tipos de condiciones nos permitirán aproximar el, a estas alturas único, control óptimo del problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$.

Teorema 1.29.(Primera aproximación).
Supongamos **[H]**, $\sigma_1(-a) < 0$ *y que* ϵ *es elegido como en* (1.25). *Definamos* $\delta_0 \equiv \sigma_1(-a + 2b(u_0 - \epsilon))$, *como en el Teorema* 1.19. *Entonces, si*

$$
\lambda \leq \Lambda_3 \equiv \min \left\{ \Lambda_2, \frac{\delta_0}{2\bar{b}\|Q\|_\infty}, \frac{2\delta_0 \underline{b}^2}{\underline{b}^2 + \overline{a}^2} \right\},
$$

el sistema (1.68) *sólo puede tener una solución* (u, v, p, q) *verificando las condiciones* (1.64) *(obtenida mediante el Teorema* 1.27 *con las sub-súper soluciones definidas en* (1.66)*).*

DEMOSTRACIÓN. Haremos la demostración suponiendo que hay dos soluciones (u, v, p, q) y (U, V, P, Q) del sistema (1.68) satisfaciendo las condiciones (1.64).

Entonces, restando, obtenemos

$$-\Delta(u-U) - a(u-U) + (b+\frac{\lambda}{2})(u^2-U^2) - \frac{\lambda}{2}(pu^2 - PU^2) = 0,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}-\Delta(u-U) - a(u-U) + (b+\frac{\lambda}{2})(u+U)(u-U) - \\ -\frac{\lambda}{2}u^2(p-P) - \frac{\lambda}{2}P(u^2-U^2) = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando la expresión anterior por $(u-U)$ e integrando sobre Ω, tenemos

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega \Big[|\nabla(u-U)|^2 - a(u-U)^2 + b(u+U)(u-U)^2 + \\ +\frac{\lambda}{2}(u+U)(u-U)^2 - \frac{\lambda}{2}P(u+U)(u-U)^2 - \\ -\frac{\lambda}{2}u^2(p-P)(u-U)\Big].\end{aligned}$$

De la misma forma, podemos probar

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega \Big[|\nabla(v-V)|^2 - a(v-V)^2 + b(v+V)(v-V)^2 + \\ +\frac{\lambda}{2}(v+V)(v-V)^2 - \frac{\lambda}{2}Q(v+V)(v-V)^2 - \\ -\frac{\lambda}{2}v^2(q-Q)(v-V)\Big].\end{aligned}$$

Haciendo ahora lo mismo con la tercera ecuación, nos da

$$\begin{aligned}-\Delta(p-P) - a(p-P) + 2b(vp - VP) - \\ -\frac{\lambda}{2}(u-U) + \lambda(up - UP) - \frac{\lambda}{2}(up^2 - UP^2) = 0,\end{aligned} \tag{1.69}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}-\Delta(p-P) - a(p-P) + 2bv(p-P) + \\ +2bP(v-V) - \frac{\lambda}{2}(u-U) + \lambda u(p-P) + \\ +\lambda P(u-U) - \frac{\lambda}{2}u(p+P)(p-P) - \frac{\lambda}{2}P^2(u-U) = 0.\end{aligned}$$

Multipliquemos la ecuación anterior por $(p-P)$ e integremos sobre Ω, con lo que obtendremos

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega &\Big[|\nabla(p-P)|^2 - a(p-P)^2 + 2bv(p-P)^2 + \\ &+2bP(v-V)(p-P) - \frac{\lambda}{2}(u-U)(p-P) + \\ &\lambda u(p-P)^2 + \lambda P(u-U)(p-P) - \\ &-\frac{\lambda}{2}u(p+P)(p-P)^2 - \frac{\lambda}{2}P^2(u-U)(p-P)\Big].\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo con la cuarta ecuación, quedaría

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega &\Big[|\nabla(q-Q)|^2 - a(q-Q)^2 + 2bu(q-Q)^2 + \\ &+2bQ(u-U)(q-Q) - \frac{\lambda}{2}(v-V)(q-Q) + \\ &+\lambda v(q-Q)^2 + \lambda Q(v-V)(q-Q) - \\ &-\frac{\lambda}{2}v(q+Q)(q-Q)^2 - \frac{\lambda}{2}Q^2(v-V)(q-Q)\Big].\end{aligned}$$

Usando ahora la caracterización variacional que verifica δ_0,recuérdese (1.39), obtenemos

$$\begin{aligned}0 \geq \int_\Omega &\{\delta_0\left[(u-U)^2 + (v-V)^2 + (p-P)^2 + (q-Q)^2\right] - \\ &-\frac{\lambda}{2}[u^2 + (1-P)^2](p-P)(u-U) - \\ &-\frac{\lambda}{2}[v^2 + (1-Q)^2](q-Q)(v-V) + \\ &+2bP(v-V)(p-P) + 2bQ(u-U)(q-Q)\}.\end{aligned} \tag{1.70}$$

Las hipótesis del teorema, en particular, implican que

$$\left|\frac{\lambda}{2}[u^2 + (1-P)^2]\right| \leq \delta_0, \quad \left|\frac{\lambda}{2}[v^2 + (1-Q)^2]\right| \leq \delta_0,$$
$$|2bP| \leq \delta_0, \quad |2bQ| \leq \delta_0.$$

Obsérvese que la integral que aparece en (1.70), en virtud del Lema 1.28, es también no negativa y estrictamente positiva si, además, $p(x) \neq P(x)$ o

$q(x) \neq Q(x)$ en cualquier subconjunto de Ω con medida positiva. De esta forma $p = P, q = Q$ y consecuentemente $u = U$, $v = V$ para todo punto de Ω. ∎

Ahora, partiendo del sistema de sub-súper soluciones definido por (1.67) e imponiendo condiciones adecuadas a la función b demostraremos también que el sistema (1.68) junto con las condiciones (1.64) tiene una única solución. Esto, como ya hemos comentado antes, proporciona un método de aproximación para el control óptimo de nuestro problema.

Teorema 1.30.(Segunda aproximación).
Supongamos ciertas las hipótesis [H], $\sigma_1(-a) < 0$ *y* (1.42). *Tomemos como sistema de sub-súper soluciones las definidas por* (1.67) *que, en virtud del Teorema* 1.27, *nos proporciona una solución* (u, v, p, q) *del sistema* (1.68). *Sea* $\delta \equiv \sigma_1(-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon))$, *donde* ε *está definido como en* (1.43). *Si*

$$\underline{b}^2 \geq \max\left\{b_2, \frac{\lambda\alpha\overline{a}^2}{\delta}\right\}, \tag{1.71}$$

donde $\alpha \equiv \max\left\{\frac{2M\|Q\|_\infty}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta}\right\}$, *entonces* (u, v, p, q) *es la única solución del sistema* (1.68) *satisfaciendo las condiciones* (1.64).

DEMOSTRACIÓN. Sean (u, v, p, q) y (U, V, P, Q) dos soluciones de (1.68), (1.64). Equivalentemente $(u, v, r, s) \equiv (u, v, \frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha})$ y $(U, V, R, S) \equiv (U, V, \frac{P}{\alpha}, \frac{Q}{\alpha})$ son dos soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
-\Delta u - au + bu^2 + \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{\lambda\alpha}{2}ru^2 &= 0, && \text{en } \Omega,\\
-\Delta v - av + bv^2 + \frac{\lambda}{2}v^2 - \frac{\lambda\alpha}{2}sv^2 &= 0, && \text{en } \Omega,\\
-\Delta r - ar + 2bvr - \frac{\lambda\alpha}{2}u\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2r}{\alpha} + r^2\right) &= 0, && \text{en } \Omega,\\
-\Delta s - as + 2bus - \frac{\lambda\alpha}{2}v\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2s}{\alpha} + s^2\right) &= 0, && \text{en } \Omega,\\
u = v = r = s &= 0, && \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

satisfaciendo las estimaciones

$$0 \le r(x), s(x) \le \frac{Q(x)}{\alpha \underline{b}} \quad (\le \frac{1}{\alpha}) \quad ; \quad w(x) \le u(x), v(x) \le \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \text{ c.e.t. } \Omega. \quad (1.73)$$

Debido a que (U, V, R, S) es una solución de (1.72) podemos hacer la diferencia entre la primera ecuación de ambos sistemas, obteniendo

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta(u-U) - a(u-U) + b(u^2 - U^2) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}(u^2 - U^2) - \frac{\lambda\alpha}{2}(u^2 r - U^2 R). \end{aligned}$$

Si en la igualdad anterior multiplicamos por $(u - U)$ e integramos sobre Ω,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big[|\nabla(u-U)|^2 - a(u-U)^2 + b(u+U)(u-U)^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}(u+U)(u-U)^2(1-\alpha R) - \frac{\lambda\alpha}{2}u^2(u-U)(r-R) \Big]. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Haciendo ahora el mismo proceso con la tercera ecuación,

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta(r-R) - a(r-R) + 2b(vr - VR) - \\ &\quad - \frac{\lambda\alpha}{2}\left[u\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2r}{\alpha} + r^2\right) - U\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2R}{\alpha} + R^2\right)\right] = \\ &= -\Delta(r-R) - a(r-R) + 2bv(r-R) + 2bR(v-V) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2\alpha}(u-U) + \lambda u(r-R) + \lambda R(u-U) \\ &\quad - \frac{\lambda\alpha}{2}u(r^2 - R^2) - \frac{\lambda\alpha}{2}R^2(u-U). \end{aligned}$$

Multiplicando por $(r - R)$ e integrando sobre Ω,

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \Big[& |\nabla(r-R)|^2 - a(r-R)^2 + 2bv(r-R)^2 + \\ & + 2bR(v-V)(r-R) + \frac{\lambda}{2}u(r-R)^2[2 - \alpha(r+R)] \\ & - \frac{\lambda\alpha}{2}(u-U)(r-R)\left(\frac{1}{\alpha} - R\right)^2 \Big]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Si hacemos lo mismo con la segunda y cuarta ecuación del sistema (1.72),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Big[|\nabla(v-V)|^2 - a(v-V)^2 + b(v+V)(v-V)^2 + \\ &+ \frac{\lambda}{2}(v+V)(v-V)^2(1-\alpha S)\frac{\lambda\alpha}{2}v^2(v-V)(s-S)\Big] \end{aligned} \tag{1.76}$$

y también

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \Big[&|\nabla(s-S)|^2 - a(s-S)^2 + 2bu(s-S)^2 + \\ &+2bS(u-U)(s-S) + \frac{\lambda}{2}v(s-S)^2[2-\alpha(s+S)] \\ &-\frac{\lambda\alpha}{2}(v-V)(s-S)\left(\frac{1}{\alpha}-S\right)^2\Big]. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Sumando ahora las expresiones (1.74)-(1.75)-(1.76)-(1.77), teniendo en cuenta (1.73) y las propiedades del valor propio principal $\delta \equiv \lambda_1(-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon))$, razonando de forma parecida a la realizada en la demostración del Teorema 1.25,

$$\begin{aligned} 0 \geq \int_\Omega \Big\{ &\delta\left[(u-U)^2 + (v-V)^2 + (r-R)^2 + (s-S)^2\right] \\ &-\frac{\lambda\alpha}{2}\left[u^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - R\right)^2\right](u-U)(r-R) \\ &-\frac{\lambda\alpha}{2}\left[v^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - S\right)^2\right](v-V)(s-S) \\ &+2bR(v-V)(r-R) + 2bS(u-U)(s-S)\Big\}. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Además, si $s \not\equiv S$ o $r \not\equiv R$ en un subconjunto de Ω con medida positiva, entonces la desigualdad anterior es estricta. La elección de α, (1.71) y (1.73) implican que

$$|2bR| \leq \frac{2M\|Q\|_\infty}{\alpha} \leq \delta \text{ y análogamente } |2bS| \leq \delta \tag{1.79}$$

También la hipótesis (1.71) implica $\frac{\lambda}{2\alpha} \leq \frac{\delta}{2}$, y $\frac{\lambda\alpha\overline{a}^2}{2\underline{b}^2} \leq \frac{\delta}{2}$. Por lo que,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\alpha}\left[u^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - R\right)^2\right] &\leq \frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{\overline{a}^2}{\underline{b}^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned} \tag{1.80}$$

y de la misma manera

$$\frac{\lambda}{2\alpha}\left[v^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - S\right)^2\right] \leq \delta. \tag{1.81}$$

Usando ahora (1.79), (1.80) y (1.81), se desprende que la integral que aparece en (1.78) es no negativa. De aquí deducimos que $r \equiv R$ y $s \equiv S$ y consequentemente $u \equiv U$ y $v \equiv V$ en Ω. ∎

I.5. Estudio de la ecuación de estado con condiciones de contorno tipo Neumann.

En esta sección vamos a estudiar un problema de control similar a $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ donde las condiciones en la frontera son del tipo Neumann. A este nuevo problema de control lo llamaremos $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$. Prácticamente todos los resultados y demostraciones de este apartado son casi idénticas a lo realizado hasta ahora para el problema de control $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ (salvo el Lema 1.2, el Teorema 1.6 y el estudio de la unicidad del control óptimo que lo haremos aquí a partir de la regularidad del funcional J, [13]). No obstante, creemos de interés la inclusión de esta sección, pues los resultados mostrarán notables mejoras respecto del trabajo de Leung-Stojanovic [47], el cual fue la motivación básica de la presente tesis doctoral. Más precisamente en el trabajo citado no se da ninguna condición que garantice la unicidad del control óptimo y sólo se conjetura la convergencia al control óptimo de un procedimiento iterativo, procedimiento en el que nos hemos inspirado nosotros, pero que, después de los resultados que vamos a presentar aquí, muestra su verdadera utilidad.

Más explícitamente vamos a estudiar un problema cuya ecuación de estado es

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)[a(x) - f(x) - b(x)u(x)] \quad & x \in \Omega \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.82}$$

La condición en la frontera que aparece en la ecuación anterior se conoce con el nombre de condición homogénea de tipo Neumann. La expresión $\frac{\partial}{\partial \nu}$, significa la derivada en la dirección de la normal exterior a la frontera de Ω (recordemos que Ω es un dominio acotado con frontera regular).

Mantendremos a lo largo de toda esta sección la hipótesis **[H]** que, como en el estudio del problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$ y como veremos más adelante, implicará la existencia de una única solución maximal no negativa del problema (1.82), notada a lo largo de esta sección como $u_{\Omega,a,b,f}$. Conservaremos también la notación $\overline{e}$, $\underline{e}$ para designar el supremo y el ínfimo esencial en el dominio Ω de una función arbitraria $e \in L^\infty(\Omega)$. El espacio de controles admisibles a considerar va a ser $L^\infty_+(\Omega) = \{g \in L^\infty(\Omega) : g(x) \geq 0 \text{ c.e.t. } \Omega\}$ y por último, el funcional de coste-beneficio que estamos interesados en maximizar es igual al definido por (1.2), esto es, $J : L^\infty_+(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido como

$$J(f) = \int_\Omega (\lambda u_{\Omega,a,b,f}(x) f(x) - [f(x)]^2) dx. \tag{1.83}$$

Diremos que un control admisible, $f \in L^\infty_+(\Omega)$, es un control óptimo para el problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$ si maximiza el funcional J, o sea

$$J(f) = \sup_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g).$$

Una manera de comenzar el estudio de este problema, teniendo en cuenta lo que ya sabemos del problema con ecuación de estado con condición frontera tipo Dirichlet, sería ver en qué medida, toda la herramienta descrita en los preliminares del capítulo, se puede aplicar aquí. Afortunadamente, salvo algunas demostraciones que ha habido que reformar, la mayoría de los resultados se mantienen ciertos en esta nueva situación. Vamos pues, en lo sucesivo, a demostrar los resultados que sean diferentes omitiendo la comprobación de los que sean iguales.

Como es usual en el estudio de muchos problemas de Análisis no Lineal necesitaremos información sobre el problema de valores propios correspondiente al "problema lineal conveniente asociado". Para una función arbitraria $q \in L^\infty(\Omega)$, definimos $\varrho_1(q)$ como el valor propio principal del siguiente problema de autovalores

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = \varrho u(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \tag{1.84}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^N$. El operador anterior $(-\Delta+q)$ es autoadjunto (en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$) con coeficientes acotados, y al igual que el obtenido considerando condiciones de contorno tipo Dirichlet, su más pequeño autovalor, $\varrho_1(q)$ (autovalor principal o primer valor propio), es simple (su espacio de funciones propias asociadas es de dimensión uno) y podemos tomar una función propia asociada , que denotaremos por ϕ_1 a lo largo de esta sección, estrictamente positiva en Ω y con $\|\phi_1\|_\infty = 1$. Por argumentos de regularidad para ecuaciones de tipo elíptico sabemos también que $\phi_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall\alpha \in (0,1)$ (ver [1]).

Como podemos ver, por ejemplo, en Brown-Hess [9], $\varrho_1(q)$ viene caracterizado por la expresión

$$\varrho_1(q) = \inf_{u\in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega q|u|^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2}. \tag{1.85}$$

Gracias a la caracterización anterior es inmediato probar, que la función $\varrho_1 : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ goza de las siguientes propiedades

i) $\varrho_1(q)$ es estrictamente creciente con respecto a la función peso q, i.e., si $q_1 \le q_2$, tenemos que $\varrho_1(q_1) \le \varrho_1(q_2)$ y esta desigualdad es estricta siempre que, además, $q_1(x) < q_2(x)$ sobre un subconjunto de Ω con medida positiva.

ii) Para cualquier constante $M \in \mathbb{R}$, tenemos que $\varrho_1(q+M) = \varrho_1(q) + M$.

iii) $\varrho_1(q)$ es continua con respecto a la variable $q \in L^\infty(\Omega)$.

Notemos que, a diferencia del autovalor principal en el caso Dirichlet que verificaba $\sigma_1(0) > 0$, el primer valor propio verifica ahora $\varrho_1(0) = 0$.

Recordemos ahora la definición de solución, en el sentido débil, para un problema lineal como el siguiente

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \tag{1.86}$$

Definición 1.31. (Solución en sentido débil).
Una función $u \in H^1(\Omega)$ es solución de (1.86), en sentido débil, si verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega quv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Lema 1.32. (Propiedades de los operadores tipo Schrödinger). *Consideremos $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo $\varrho_1(q) > 0$. Entonces:*

i) Para cada $f \in L^2(\Omega)$, el problema lineal

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= f(x), & x &\in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega, \end{aligned}$$

admite una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$. Además, si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$ y en particular por el Teorema de Rellich-Kondrachov, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

ii) Si $u \in H^1(\Omega)$ verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega q u \phi \geq 0, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \ \phi \geq 0,$$

entonces $u \geq 0$ en Ω.

iii) Supongamos $q_i \in L^\infty(\Omega)$ para $i = 1,2$, $q_1 \geq q_2$, $\varrho_1(q_2) > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ y $f \geq 0$. Si llamamos w_i, $i = 1,2$, a la solución débil del problema

$$\begin{aligned} -\Delta w_i(x) + q_i(x)w_i(x) &= f(x), & x &\in \Omega, \\ w_i(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.87}$$

entonces $w_1 \leq w_2$ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el apartado *i)*. Para ello usaremos el Lema de Lax-Milgram aplicado a la forma bilineal, simétrica y continua $L : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como:

$$L(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega quv$$

y al funcional $\varphi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\varphi(v) = \int_\Omega fv.$$

Veamos que es coerciva, i.e., $\exists c > 0$ tal que

$$L(u,u) \equiv \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega qu^2 \geq c\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.88}$$

Para ello, teniendo en cuenta la demostración del apartado *i)* del Lema 1.2 podemos ver que si $0 < \alpha \leq \dfrac{\varrho_1(q)}{\varrho_1(q) + \|q\|_\infty}$ entonces $L(u,u) \geq \alpha \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$. Usando ahora (1.85) tenemos

$$2L(u,u) \geq \min\{\varrho_1(q), \alpha\} \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2\right], \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Tomando $0 < c < \frac{1}{2}\min\{\varrho_1(q), \alpha\}$ terminamos la demostración de esta parte. La regularidad se obtiene de forma similar a como se hizo en el Lema 1.2

Para demostrar *ii)* tomaremos $u^- = \min\{u, 0\}$. Entonces

$$\begin{array}{rccc} 0 & \geq & \int_\Omega \nabla u \nabla u^- + \int_\Omega q u u^- & \geq \\ & \geq & \int_\Omega |\nabla u^-|^2 + \int_\Omega q(u^-)^2 & \geq \\ & \geq & \varrho_1(q) \int_\Omega (u^-)^2 & \geq 0. \end{array}$$

Al ser $\varrho_1(q) > 0$, tendremos $\int_\Omega (u^-)^2 = 0$. Así $u^- = 0$ c.e.t. Ω, de donde $u \geq 0$ c.e.t en Ω.

La demostración de *iii)* es análoga a la del Lema 1.2. ∎

Nota.

Recordaremos aquí, que para aplicar el método de sub-súper soluciones a la resolución de EDP no lineales de tipo elíptico ([3]), necesitamos usar un principio del máximo del tipo *ii)* descrito en el lema anterior. Por lo tanto definiendo adecuadamente el concepto de sub-súper soluciones cuando trabajemos con el problema de contorno tipo Neumann, podremos obtener un resultado análogo al del Teorema 1.4 que garantice la existencia de soluciones para el problema de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x)), && x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= 0, && x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Pasemos a continuación a desarrollar lo comentado en la nota anterior.

Definición 1.33.
Sea $u_* \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diremos que u_* es una **subsolución** *para la ecuación (1.89), si $\forall \varphi \in H^1(\Omega), \varphi \geq 0$, se verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u_* \nabla \varphi \leq \int_\Omega f(x, u_*)\varphi.$$

Análogamente (cambiando el sentido de la desigualdad anterior) definiríamos cuándo una función $u^* \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es una **supersolución** *de (1.89).*

Ahora podemos enunciar un teorema de existencia de solución para el problema (1.89) basado en el método de sub-súper soluciones.

Teorema 1.34.
Supongamos que la función f satisface las hipótesis **[H1]** *y* **[H2]** *(ver sección primera) y sea $u_* \leq u^*$ una pareja ordenada de sub-súper soluciones para el problema (1.89). Entonces, existen $w \leq W$, $w, W \in W^{2,p}(\Omega)$, soluciones en sentido débil del problema (1.89), con $p \in (1, \infty)$ arbitrario y con la siguiente propiedad de maximalidad:*
"Si u es otra solución de (1.89) con $u(x) \leq u^*(x)$ (respectivamente $u_*(x) \leq u(x)$) entonces $u(x) \leq W(x)$ para $x \in \Omega$ (respectivamente $w(x) \leq u(x)$)". ∎

Notas.

1. Este teorema, al igual que en el Teorema 1.4, puede demostrarse directamente siguiendo, punto por punto, las ideas contenidas en los trabajos de Amann [2] y Sattinger [62], pero usando un principio del máximo para operadores elípticos en versión débil como el que se encuentra en Gilbarg-Trudinger [34, Capítulo 8]. También, la hipótesis **[H2]** puede debilitarse. Bastaría con que la función $f(x,u) + Mu$ fuera creciente en la variable u para $(x,u) \in \overline{\Omega} \times [\operatorname{essinf} u_*, \operatorname{esssup} u^*]$.

2. Obsérvese que la definición de sub-súper solución, en versión débil, engloba la definición clásica, i.e., funciones u_* y $u^* \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tales que $\frac{\partial u_*}{\partial \nu}(x) \le 0 \le \frac{\partial u^*}{\partial \nu}(x)$ en $\partial\Omega$ y
$$\begin{aligned} -\Delta u_*(x) &\le f(x, u_*(x)), \quad x \in \Omega, \\ -\Delta u^*(x) &\ge f(x, u^*(x)), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

3. La desigualdad obtenida entre las soluciones "minimal" y "maximal", $w \le W$, en general no tiene porqué ser estricta. O sea, que en algunos casos, cuando haya unicidad por ejemplo, esas "dos" soluciones sólo son en realidad "una".

Después de estos preliminares, pasamos a estudiar la ecuación logística (1.82). Además de caracterizar la existencia y unicidad de solución positiva, nos interesa conocer el comportamiento cualitativo de la misma. Ello formará la primera parte de esta sección.

Teorema 1.35. (Existencia de solución no negativa y no trivial de (1.82)).
Supongamos cierta la hipótesis **[H]** *(definida en la introducción del capítulo). Entonces, la ecuación* (1.82) *tiene solución débil no negativa y no trivial, si y sólo si* $\varrho_1(-a+f) < 0$. *En este caso, existe una única solución no negativa y*

no trivial, u, de (1.82). Además, u, verifica las estimaciones siguientes:

$$\frac{-\varrho_1(-a+f)}{\bar{b}}\,\phi_1(-a+f)(x) \le u(x) \le \frac{\overline{a}-\underline{f}}{\underline{b}},\ \forall x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\varrho_1(-a+f) < 0$. La existencia de solución no negativa y no trivial de (1.82) se puede probar tomando $u^* \equiv \frac{\overline{a}-\underline{f}}{\underline{b}}$ como supersolución y $u_* \equiv \frac{-\varrho_1(-a+f)}{\bar{b}}\,\phi_1(-a+f)$ como subsolución en el Teorema 1.34.

Recíprocamente, sea ahora u una solución débil, no negativa y no trivial de (1.82). En virtud de la caracterización variacional de $\varrho_1(-a+f)$,

$$\varrho_1(-a+f) \le \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (-a+f)u^2}{\int_\Omega u^2} = \frac{-\int_\Omega bu^3}{\int_\Omega u^2} < 0.$$

En cuanto a la unicidad, observemos primero que cualquier solución de (1.82) está acotada en la norma de $L^\infty(\Omega)$. (Esto último se puede demostrar siguiendo un argumento de regularidad similar al utilizado en la prueba del Lema 1.2, teniendo en cuenta que todos los coeficientes de (1.82) están en $L^\infty(\Omega)$). Sean u y v dos soluciones de (1.82), en sentido débil, no negativas y no triviales. Sea $M = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty, u^*\}$ (es fácil ver que M es una supersolución para el problema (1.82)). Sean $w \le W$ las soluciones obtenidas al aplicar el método de sub-súper soluciones a la ecuación (1.82) con M como supersolución y la función 0 como subsolución. Gracias a la propiedad de maximalidad, vista en el Teorema 1.34, que verifican w y W, se cumple que $0 \le w \le u, v \le W \le M$. Por tanto, $u, v \le W$ en Ω. Veamos que tanto u como v son iguales a W. En efecto, como $u \le W$, usando la ecuación (1.82), tenemos que

$$0 = \int_\Omega bWu(W-u).$$

Como $W > 0$ (no olvidemos que ya hemos demostrado la existencia de una solución estrictamente positiva en Ω por "debajo" de M), $u \ge 0$, $(W-u) \ge 0$, deducimos que $u(W-u) = 0$. Esto último implica que el abierto $\{x \in \Omega : u >$

$0\}$ (u es continua), es igual a $\{x \in \Omega : W = u\}$ que es cerrado relativo a Ω. Al ser Ω un dominio, obtenemos que $u > 0$ y que $W = u$ en Ω. ∎

Nota.

Mediante un razonamiento similar al usado en el Teorema 1.6 se puede probar que las soluciones débiles de la ecuación (1.82) verifican la misma propiedad de acotación "a priori" que las de la ecuación (1.1), a saber,

"Toda solución débil de (1.82) tiene a la constante $k \equiv \frac{\overline{a} - \underline{f}}{\underline{b}}$ como cota a priori".

Después de este teorema tiene sentido la siguiente definición

Definición 1.36.
Para cualquier $f \in L^\infty(\Omega)$ denotaremos, a lo largo de esta sección, por $u_{\Omega,a,b,f}$, a la solución maximal no negativa de la ecuación (1.82). Por tanto, $u_{\Omega,a,b,f} > 0$ en Ω si y sólo si $\varrho_1(-a+f) < 0$ y $u_{\Omega,a,b,f} \equiv 0$ si y sólo si $\varrho_1(-a+f) \geq 0$.

Cuando no haya ambigüedad, usaremos $u_{b,f}$ o simplemente u_f en vez de $u_{\Omega,a,b,f}$. Enunciemos ahora una proposición que recoge las propiedades más importantes de la solución maximal no negativa de (1.82). El conocimiento de estas propiedades será necesario para el estudio posterior de nuestro problema de control $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$.

Proposición 1.37. (Propiedades de la solución de la ecuación logística).
Supuesta la hipótesis **[H]**, *tenemos que:*

1. *La aplicación $f \mapsto u_{\Omega,a,b,f}$ es monótona en el sentido siguiente: Si $f, g \in L^\infty(\Omega)$ son tales que $f \leq g$ casi en todo $x \in \Omega$, entonces $u_{\Omega,a,b,f}(x) \geq u_{\Omega,a,b,g}(x)$, $\forall x \in \Omega$.*

2. *La aplicación anterior definida de $L^\infty(\Omega)$ en $C^1(\overline{\Omega})$ es continua.*

3. *Consideremos el siguiente abierto en $L^\infty(\Omega)$, $A = \{g \in L^\infty(\Omega) : \varrho_1(-a+g) < 0\}$. La aplicación $f \mapsto u_{\Omega,a,b,f}$ de A en $C^1(\overline{\Omega})$ es de clase C^1.* ∎

Nos ocuparemos ahora de la existencia de control óptimo para el problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$ y de las condiciones necesarias que debe cumplir cualquier control admisible, para ser óptimo. Con los preliminares descritos anteriormente cabe esperar unos resultados similares a los obtenidos en la sección segunda. Como allí, obtendremos: la acotación "a priori" del control óptimo, la existencia de solución del problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$ o sea la existencia de controles $f \in L^\infty_+(\Omega)$ maximizando el funcional J, la caracterización de cuando habrá beneficio positivo y la posibilidad de expresar cualquier control óptimo en términos de una solución del sistema de optimalidad. Después de estas breves consideraciones pasemos ya a la exposición de estos resultados.

Lema 1.38.(Cotas a priori del control óptimo).
Supongamos que se cumple [H] *y sea* $\mathcal{M} = \max\left\{\frac{\lambda\overline{a}}{2\underline{b}}, 0\right\}$. *Si* $f \in L^\infty_+(\Omega)$ *es un control óptimo entonces,*

$$0 \leq f \leq \mathcal{M}. \blacksquare \tag{1.90}$$

Nota.

Conviene resaltar que en el caso en el que $\overline{a} < 0$ el control óptimo ha de ser necesariamente cero, lo que trivialmente daría beneficio óptimo cero. Más adelante (ver Teorema 1.40) caracterizaremos cuándo el beneficio óptimo es positivo.

Usando la anterior acotación "a priori" del control óptimo, de una forma parecida a la hecha en el Teorema 1.11, se puede demostrar el

Teorema 1.39. (Existencia de control óptimo).
Bajo la hipótesis **[H]**, *existe un control óptimo para el problema* $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$, *i.e.,*

$$\exists f \in L^{\infty}_{+}(\Omega) \text{ tal que } J(f) = \sup_{g\in L^{\infty}_{+}(\Omega)} J(g). \blacksquare$$

Nota.

En este teorema, a diferencia con otros autores que estudian el mismo problema (ver [47]), para garantizar la existencia de control óptimo, no necesitamos imponer ninguna acotación superior sobre el conjunto de los controles admisibles. La razón de este hecho se basa en que, como se desprende del Lema 1.38, si un control es óptimo, necesariamente va a estar acotado superiormente.

Una vez considerada la existencia de solución del problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$, enunciemos la prometida caracterización del beneficio positivo.

Teorema 1.40. (Beneficio positivo).
Consideremos el problema de control $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$ *bajo la hipótesis* **[H]**. *Entonces*

$$\sup_{g\in L^{\infty}_{+}(\Omega)} J(g) > 0 \Leftrightarrow \varrho_1(-a) < 0. \blacksquare$$

Nota.

Las observaciones hechas al final del Teorema 1.12 son válidas también aquí sin más que considerar, cuando $\varrho_1(-a) < 0$, la función $\widehat{f}$ como la única solución no negativa y no trivial del problema

$$\begin{aligned} -\Delta p(x) &= p(x)\left[a(x) - \tfrac{2b(x)+\lambda}{\lambda} p(x)\right], && x \in \Omega \\ \tfrac{\partial p}{\partial \nu}(x) &= 0 && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Recordemos que uno de los objetivos de esta sección es obtener una representación adecuada de cualquier control óptimo. Para ello seguiremos un camino análogo al usado en el problema de control $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$. Comencemos estudiando qué propiedades debe satisfacer cualquier control óptimo.

Lema 1.41. (Condiciones de optimalidad).
Supongamos **[H]** *y* $\varrho_1(-a) < 0$. *Si* $f \in L^\infty_+(\Omega)$ *es un control óptimo cualquiera, entonces*

$$f = \frac{\lambda}{2}\, u_f (1 - P_{\Omega,a,b,f})^+, \quad \text{c.e.t. } \Omega, \tag{1.91}$$

donde $P_{\Omega,a,b,f}$ *es la única solución del problema lineal*

$$\begin{aligned} -\Delta P_{\Omega,a,b,f} + (-a + f + 2bu \quad {}_{a,b,f} &= f, \quad \textit{en } \Omega, \\ \frac{\partial P_{\Omega,a,b,f}}{\partial \nu} &= 0, \quad \textit{sobre } \partial\Omega. \ \blacksquare \end{aligned} \tag{1.92}$$

Notas.

1. El lema anterior proporciona, en particular, información sobre la regularidad del control óptimo, a saber, si $f \in L^\infty_+(\Omega)$ es un control óptimo, entonces $f \in C(\overline{\Omega})$ y además

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow P_{\Omega,a,b,f}(x) < 1, \quad \forall x \in \Omega,$$

donde la función $P_{\Omega,a,b,f}$ es la definida en (1.92). Si alguna de las condiciones de la equivalencia anterior fuese cierta, automáticamente tendríamos más regularidad para el control. De hecho tendríamos $f \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1, \infty)$.

2. En adelante, escribiremos $P_{b,f}$ o P_f para referirnos a $P_{\Omega,a,b,f}$, siempre que no haya ambigüedad en la exposición.

El objeto de lo que sigue es buscar condiciones para que la desigualdad $P_{\Omega,a,b,f}(x) < 1$, $\forall x \in \Omega$, sea cierta. Para ello teniendo en cuenta el Lema 1.32 y la ecuación (1.92) verificada por $P_{\Omega,a,b,f}$, bastará con usar la acotación "a priori" para el control óptimo f, $(0 \le f \le \frac{\lambda\overline{a}}{2\underline{b}})$, y encontrar una estimación inferior adecuada para la función $-a+f+2bu_f$. Observemos que el Lema 1.92 garantiza también que $P_{\Omega,a,b,f} \ge 0$ en Ω. Básicamente las condiciones que nos permitirán las estimaciones anteriores serán del tipo λ pequeño y/o $\underline{b}$ grande.

Mantengamos las hipótesis del lema anterior, esto es, **[H]** y $\varrho_1(-a) < 0$ en todo lo que sigue. Escojamos ahora $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ cumpliendo

$$\epsilon < \frac{\lambda_1(-a+2bu_0)}{2\overline{b}}. \tag{1.93}$$

Gracias a la continuidad de la aplicación $f \mapsto u_f$, existe una constante $\Lambda_0 \equiv \Lambda_0(\Omega, a, b)$, tal que si $\lambda \le \Lambda_0$ entonces

$$g \in L_+^\infty(\Omega), \; g \le \Lambda_0 \frac{\overline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow u_g \ge u_0 - \epsilon, \quad \text{c.e.t. } \Omega. \tag{1.94}$$

Así, P_f, definida en (1.92), verifica la desigualdad

$$0 \le P_f \le \lambda\, Q, \quad \text{c.e.t. } \Omega, \tag{1.95}$$

donde Q es la única solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta Q + (-a + 2b(u_0 - \epsilon))Q &= \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial Q}{\partial \nu} &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Tomando

$$\lambda \le \min\left\{\Lambda_0, \frac{1}{\|Q\|_\infty}\right\} \equiv \Lambda_1, \tag{1.97}$$

entonces, la función P_f, definida en (1.92), verifica la desigualdad

$$0 \leq P_f \leq 1, \quad \text{c.e.t. en } \Omega. \tag{1.98}$$

También podemos conseguir la acotación anterior imponiendo condiciones sobre la función b. Primero observaremos que si b es constante, podemos hacer un cambio de variable, (ver (1.41) y las notas del Teorema 1.21) y nos reduciríamos al caso anterior tomando b suficientemente "grande". En el caso que b no sea constante, supongamos que la función b satisface la restricción $\bar{b} \leq M\underline{b}$, para algún $1 \leq M < 2$ ((1.42)) y elijamos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\varepsilon < \frac{M}{2}\varrho_1(-a + \frac{2}{M}u_{1,0}). \tag{1.99}$$

Sea ahora b_0 tal que para $\underline{b} \geq b_0$, si $g \in L^\infty_+(\Omega)$ y $g \leq \lambda\frac{\bar{a}}{\underline{b}}$, entonces $u_{1,g} \geq u_{1,0} - \varepsilon$ en Ω. Así, de una manera similar a lo hecho en el Lema 1.22, para f control óptimo, cuando $\underline{b} \geq b_0$ podemos asegurar que (1.48) es cierta. Por tanto,

$$0 \leq P_{b,f} \leq \frac{Q}{\underline{b}}, \quad \text{c.e.t. en } \Omega, \tag{1.100}$$

donde $P_{b,f}$ esta definida por (1.92) y Q es la única solución de

$$\begin{aligned} -\Delta Q + (-a + \tfrac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon))Q &= \lambda\bar{a}, \qquad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial Q}{\partial \nu} &= 0, \qquad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Ahora bastará tomar

$$\underline{b} \geq b_1 \equiv \max\ \{b_0, \|Q\|_\infty\}, \tag{1.102}$$

para obtener (1.98).

Teorema 1.42.(Sistema de optimalidad).
Supongamos que **[H]** *y* $\varrho_1(-a) < 0$ *se verifican. Si se cumplen o bien* (1.97) *o bien* (1.42) *y* (1.102), *entonces, cualquier control óptimo* $f \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$, *puede expresarse de la forma*

$$f = \frac{\lambda}{2} u(1-p), \tag{1.103}$$

donde el par (u,p), *satisface el siguiente sistema (de optimalidad)*

$$\begin{aligned} -\Delta u = u\left(a - [b + \frac{\lambda}{2}(1-p)]u\right), \quad en \ \Omega, \\ -\Delta p + p(-a + 2bu) = \frac{\lambda}{2} u(1-p)^2, \quad en \ \Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = \tfrac{\partial p}{\partial \nu} = 0, \quad en \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.104}$$

y las restricciones

$$0 \le p \le 1, \ u > 0, \quad c.e.t. \ \Omega \tag{1.105}$$

Nos ocuparemos a continuación del estudio de la unicidad del control óptimo para el caso de ecuación de estado con condición en la frontera de tipo Neumann. Para este problema, con pequeñas modificaciones, se podrían enunciar y probar resultados en la línea de los Teoremas 1.19 y 1.25, descritos en la sección tercera. Las demostraciones, partiendo del sistema de optimalidad, serían análogas a las allí hechas. Creemos, por tanto, más interesante hacer el estudio de la unicidad desde otro punto de vista diferente al ya tratado. Esta demostración de unicidad que vamos a hacer, en el contexto Neumann, también podría hacerse con el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$, estudiado en la primera parte de este capítulo (véase [13]). No la incluimos allí por brevedad en la exposición. Es interesante resaltar que en este estudio de la unicidad aparece también la condición λ pequeño. Realmente lo que demostraremos será que cuando λ es suficientemente pequeño, el funcional J es estrictamente cóncavo, en un subconjunto convexo apropiado de $L^\infty(\Omega)$, que contiene a los controles óptimos. Esto garantiza la unicidad del punto donde el funcional J alcanza el supremo. Pensemos que esta idea no es del todo descabellada si observamos que el funcional J, ecuación (1.83), consta de la suma de una parte cóncava, el término $-f^2$, y otra que no lo es, pero que va multiplicada por λ. Parece, por lo tanto, lógico, que si queremos tener unicidad del control óptimo, hagamos el parámetro λ pequeño para así darle más importancia a la parte "cómoda" del funcional.

Comencemos con una proposición que informa, usando los conocimientos que tenemos de la regularidad de la aplicación $f \mapsto u_f$, sobre la derivabilidad del funcional J.

Proposición 1.43. *Consideremos el abierto $A \subset L^\infty(\Omega)$ definido como $A = \{g \in L^\infty(\Omega) : \varrho_1(-a+g) < 0\}$. Entonces $J : A \to \mathbb{R}$, $f \mapsto J(f)$, es Fréchet diferenciable con continuidad y*

$$J'(f)(g) = \int_\Omega (\lambda \xi_{f,g} f + \lambda u_f g - 2fg), \ \forall\, f \in A, \ \forall\, g \in L^\infty(\Omega), \tag{1.106}$$

donde $\xi_{f,g}$ es la única solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\xi + [-a + f + 2bu_f]\xi &= -gu_f, && \text{en } \Omega \\ \tfrac{\partial \xi}{\partial \nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.107}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $f \in A$ y $g \in L^\infty(\Omega)$, entonces, como en el Lema 1.13, tenemos

$$\frac{J(f+\beta g) - J(f)}{\beta} \to \int_\Omega (\lambda f \xi_{f,g} + \lambda u_f g - 2fg), \quad \text{cuando } \beta \to 0.$$

Tomando P_f como la función definida en (1.92), de la misma forma que en (1.22), obtenemos

$$\int_\Omega f\xi_{f,g} + \int_\Omega g u_f P_f = 0,$$

por tanto

$$\frac{J(f+\beta g)-J(f)}{\beta} \to \int_\Omega (-\lambda u_f P_f + \lambda u_f - 2f)\, g, \quad \text{cuando } \beta \to 0.$$

Claramente el operador $L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \displaystyle\int_\Omega (-\lambda g u_f P_f + \lambda u_f g - 2fg)$, es lineal. Probemos que es continuo. Teniendo en cuenta que la función $(-\lambda u_f P_f + \lambda u_f - 2f)$ está en $L^\infty(\Omega)$, (recordemos la regularidad que tienen las funciones u_f y P_f y que Ω es acotado), existirá $\tilde{N} > 0$ tal que $|\int_\Omega (-\lambda u_f P_f + \lambda u_f - 2f)\, g| \le \tilde{N}\|g\|_\infty$. Esto prueba que J es Gâteaux-diferenciable en $f \in A$ con diferencial

$$J'_G(f)(g) = \int_\Omega (-\lambda u_f P_f + \lambda u_f - 2f)\, g, \ \forall\, g \in L^\infty(\Omega). \tag{1.108}$$

Para ver que J es Fréchet diferenciable con continuidad bastará con demostrar que la aplicación $J' : A \to (L^\infty(\Omega))^*$ (dual de $L^\infty(\Omega)$) definida por $f \mapsto J'_G(f)$ es continua. Para ello, si $f_n \to f \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sup_{g\in B_{L^\infty(\Omega)}} |J'_G(f_n)(g) - J'_G(f)(g)| = \\
&= \sup_{g\in B_{L^\infty(\Omega)}} \left| \int_\Omega [-\lambda(u_{f_n}P_{f_n} - u_f P_f) + \lambda(u_{f_n} - u_f) - 2(f_n - f)]\, g \right|,
\end{aligned}$$

donde $B_{L^\infty(\Omega)}$ es la bola cerrada unidad de $L^\infty(\Omega)$. Debido a que $f_n \to f$, en $L^\infty(\Omega)$, tenemos que $u_{f_n} \to u_f$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Probando que $P_{f_n} \to P_f$ en $C^1(\overline{\Omega})$, tendríamos que

$$\sup_{g\in B_{L^\infty(\Omega)}} |J'_G(f_n)(g) - J'_G(f)(g)| \to 0,$$

de donde se deduce que J es continuamente Fréchet diferenciable.

Veamos ahora que $P_{f_n} \to P_f$ en $C^1(\overline{\Omega})$. Para ello tomemos ϵ suficientemente pequeño como para que $\varrho_1(-a+f+2bu_f) \ge \epsilon(1+2\overline{b})$; esto en particular implica que $\varrho_1(-a+f-\epsilon+2b(u_f-\epsilon)) > 0$. Sabemos que existe un índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$ entonces

$$f+\epsilon > f_n > f-\epsilon, \quad u_{f_n} > u_f - \epsilon, \quad \text{en } \Omega.$$

Ahora tomando η como la única solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\eta + (-a + f - \epsilon + 2b(u_f - \epsilon))\eta &= f + \epsilon, && \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial\eta}{\partial\nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta los Lemas 1.32 y 1.37 junto con la ecuación que satisface P_{f_n}, obtenemos

$$\|P_{f_n}\|_\infty \leq \|\eta\|_\infty \quad \forall n \geq n_0.$$

Podemos ahora probar la convergencia de $P_{f_n} \to P_f$ en $C^1(\overline{\Omega})$ mediante un razonamiento de compacidad y paso al límite como el hecho en el Lema 1.9. ∎

Como hemos comentado con anterioridad, nuestro objetivo es dar condiciones para que el funcional J tenga un sólo punto en $L^\infty_+(\Omega)$ donde se alcance su supremo. Sabemos por el Lema 1.38 que los controles óptimos, esto es, los puntos de máximo de J, están en el "intervalo" convexo $[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset L^\infty_+(\Omega)$. Por tanto, basta dar condiciones para que J sea estrictamente cóncavo en ese conjunto y como sabemos que es Fréchet diferenciable, es suficiente mostrar que el funcional J' es estrictamente monótono. Para ello, como veremos en el Teorema 1.45, necesitaremos que las aplicaciones u_f y P_f sean lipschitzianas con respecto a los controles $f \in [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset L^\infty_+(\Omega)$, para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Del hecho que la aplicación $A \to C^1(\overline{\Omega})$, $f \mapsto u_f$ sea de clase C^1, se deduce que es localmente lipschitziana, como puede verse en Clarke [16]. Algo más complicado es demostrar que la aplicación $A \to L^\infty(\Omega)$, $f \mapsto P_f$ (ver (1.92) para la definición) es localmente lipschitziana. Nosotros demostraremos que es lipschitziana en $[0, \Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}]$ para Λ suficientemente pequeño.

Proposición 1.44. *Supongamos que* **[H]** *y* $\varrho_1(-a) < 0$ *son ciertas. Entonces, existe* $\Lambda_0 > 0$ *tal que si* $0 < \lambda < \Lambda_0$ *la función*

$$P : [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \to L^\infty(\Omega) \tag{1.109}$$

es lipschitziana.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que P es lipschitziana es suficiente mostrar que $\exists \Lambda_0 > 0,\ \beta_0 > 0,\ M > 0$ tales que

$$\forall f \in [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset L^\infty(\Omega),\ \forall h \in L^\infty(\Omega) \text{ con } \|h\|_\infty \leq \beta_0$$

se tiene

$$\|P_{f+h} - P_f\|_\infty \leq M\|h\|_\infty \tag{1.110}$$

siempre que $\lambda \leq \Lambda_0$.

En efecto, veamos que (1.110) implica que P es lipschitziana con respecto a f. Para ello, sean $f, g \in [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}]$; tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $h = \frac{g-f}{n}$ verifique $\|h\|_\infty \leq \beta_0$. Entonces,

$$\|P_f - P_g\|_\infty = \|P_{f+(g-f)} - P_f\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|P_{f+kh} - P_{f+(k+1)h}\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} M\|h\|_\infty = nM\|h\|_\infty = M\|f-g\|_\infty.$$

Probemos ahora (1.110). Tomemos $\Lambda > 0$ verificando que $\varrho_1(-a+\Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}) < 0$ (piénsese que $\varrho_1 : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ es continua y que por hipótesis $\varrho_1(-a) < 0$). Sea ahora γ cumpliendo $\varrho_1(-a+\Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}) < -\gamma < 0$. Esto último, en particular, implica que $\forall f \in [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset L^\infty(\Omega)$, $\forall h \in L^\infty(\Omega)$ con $\|h\|_\infty \leq \beta_0$, siempre que $\lambda \leq \Lambda$ y $\beta_0 \leq \gamma$, se tiene

$$u_{f+h} \geq u_{\Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}+\beta_0} > u_{\Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}+\gamma} > 0 \tag{1.111}$$

en Ω.

Escojamos ahora ϵ verificando

$$\epsilon < \frac{\varrho_1(-a + bu_0 + bu_{\Lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}+\gamma})}{\overline{b}}.$$

Gracias a la continuidad de la aplicación $f \mapsto u_f$, podemos tomar un $\Lambda' > 0$ con la condición de que para $\lambda \leq \Lambda'$ y $g \in [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset L^\infty(\Omega)$, se cumpla que

$$u_g \geq u_0 - \epsilon, \quad \text{en } \Omega.$$

Elijamos ahora

$$\begin{aligned} &\Lambda_0 < \min\{\Lambda, \Lambda'\}, \\ &\beta_0 = \min\{\gamma, \ \frac{\overline{a}}{\underline{b}}(\min\{\Lambda, \Lambda'\} - \Lambda_0)\}. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Si $\|h\|_\infty = 0$, entonces (1.110) es cierta trivialmente. En caso contrario, podemos definir $\zeta_h = \dfrac{P_{f+h} - P_f}{\|h\|_\infty}$ que verificará

$$\begin{aligned} -\Delta\zeta_h + [-a + f + 2bu_f]\zeta_h &= -\frac{h}{\|h\|_\infty}(P_{f+h} - 1) - 2bP_{f+h}\xi_h, && \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \zeta_h}{\partial \nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.113}$$

donde $\xi_h = \dfrac{u_{f+h} - u_f}{\|h\|_\infty}$.

Probemos que P_{f+h} está acotada en la norma de $L^\infty(\Omega)$ independiente de f y h. En efecto, P_{f+h} es solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta P_{f+h} + (-a + f + h + 2bu_{f+h})P_{f+h} &= f + h, && \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial P_{f+h}}{\partial \nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En virtud del principio del máximo, $-R \le P_{f+h} \le R$, con $R \ge 0$ solución de

$$\begin{aligned} -\Delta R + (-a + f + h + 2bu_{f+h})R &= \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}} + \beta_0, && \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial R}{\partial \nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

A su vez, $R \le S$, donde S es solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta S + (-a + b(u_0 - \epsilon) + bu_{\lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}+\beta_0})S &= \lambda\tfrac{\overline{a}}{\underline{b}} + \beta_0, && \text{en } \Omega \\ \tfrac{\partial S}{\partial \nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Obsérvese que por la elección que hicimos de β_0 en (1.112), tenemos

$$f + \beta_0 \le \Lambda_0\frac{\overline{a}}{\underline{b}} + \frac{\overline{a}}{\underline{b}}(\min\{\Lambda, \Lambda'\} - \Lambda_0) \le \Lambda'\frac{\overline{a}}{\underline{b}},$$

de donde se deduce que

$$u_{f+h} \ge u_{f+\beta_0} \ge u_0 - \epsilon.$$

Aplicando ahora el Lema 1.32 se concluye que P_{f+h} está acotado en $L^\infty(\Omega)$ independiente de $f \in [0, \Lambda_0 \frac{\overline{a}}{\underline{b}}]$ y $h \le \beta_0$. Usando de nuevo el Lema 1.32 y teniendo en cuenta la definición de ζ_h en (1.113), terminamos la demostración. ∎

En resumidas cuentas hemos demostrado que existe un valor Λ_0 tal que si $0 < \lambda \le \Lambda_0$ la aplicación $\left[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right]_{L^\infty(\Omega)} \to L^\infty(\Omega)$, $f \to u_f(1 - P_f)$, es lipschitziana. Sea L su constante de Lipschitz. Considerando estas últimas observaciones, probemos que el funcional $J' : [0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}] \subset A \to (L^\infty(\Omega))^*$ es estrictamente monótono para λ suficientemente pequeño (gracias a lo cual y como ya hemos comentado anteriormente J será estrictamente cóncavo).

Teorema 1.45.(Unicidad del control óptimo).
Mantenemos las condiciones [H] *y* $\varrho_1(-a) < 0$. *Sea* $\lambda < \min\{\Lambda_0, \frac{2}{L}\}$, *donde* L *es la constante de Lipschitz definida en el párrafo anterior y* Λ_0 *como en* (1.112). *Entonces, existe una única función* $f \in L^\infty_+(\Omega)$ *tal que*

$$J(f) = \max_{g \in L^\infty_+(\Omega)} J(g),$$

i.e., el problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$ *tiene una única solución.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in L^\infty_+(\Omega)$ un control óptimo. Sabemos, en virtud del Lema 1.38, que $f \in \left[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right]$. Demostraremos que J es estrictamente cóncavo en $\left[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right]$ (por lo que alcanzará su supremo una sóla vez).

En efecto, sean $f, g \in \left[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right] \subset L^\infty(\Omega)$, $f \neq g$, entonces

$$(J'(f) - J'(g))(f - g) =$$
$$\int_\Omega [(\lambda u_f(1 - P_f) - 2f)(f - g) - (\lambda u_g(1 - P_g) - 2g)(f - g)] \le$$
$$\le \int_\Omega [\lambda L(f - g)^2 - 2(f - g)^2] < 0.$$

De esta forma J' es estrictamente monótono en $\left[0, \lambda\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right]$. ∎

El objetivo principal de lo que sigue es proporcionar un esquema iterativo que aproxime la única solución del problema de control $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$, o equivalentemente, la única solución del sistema (1.104) bajo las condiciones (1.105). Al igual que en la sección cuarta necesitamos dar un esquema de aproximación, basado en el método de sub-súper soluciones, para un sistema de EDP, pero ahora con condición en la frontera tipo Neumann. El sistema sería el siguiente

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = B(x, u(x), p(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta p(x) = C(x, u(x), p(x)) + D(x, u(x), p(x)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial p}{\partial \nu}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \tag{1.114}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$, y las "no linealidades" $B, C, D : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfacen la condición de regularidad **[C1]** y las propiedades de monotonía **[C2]** definidas en la sección cuarta. Hagamos ahora una definición de sub-súper soluciones adecuada para el sistema (1.114).

Definición 1.46. *Sean $\underline{u}, \overline{u}, \underline{p}, \overline{p} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diremos que tales funciones forman un* **sistema de sub-súper-soluciones** *para el sistema* (1.114) *si verifican:*

a)

$$\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \quad \underline{p}(x) \leq \overline{p}(x), \quad \text{c.e.t. } \Omega,$$

b) $\forall \phi \in H^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\phi \geq \int_\Omega B(x, \overline{u}, \overline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \leq \int_\Omega B(x, \underline{u}, \underline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\overline{p}\cdot\nabla\phi \geq \int_\Omega C(x,\underline{u},\overline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\overline{u},\overline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\underline{p}\cdot\nabla\phi \leq \int_\Omega C(x,\overline{u},\underline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\underline{u},\underline{p})\phi.$$

La definición anterior puede parecer extraña, pero si tenemos en cuenta las propiedades de monotonía del sistema (1.114) que, sugeridas por el sistema de optimalidad (1.104), hemos impuesto a las funciones B, C y D, no parecerá tan rara. Recordemos lo hecho ya en la sección cuarta para el estudio de la aproximación en el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$.

Tenemos ya preparados los ingredientes para poder enunciar un teorema general para la existencia de soluciones de un sistema en derivadas parciales como (1.114), basado en la existencia de un sistema de sub-súpersoluciones.

Teorema 1.47. *Consideremos el sistema* (1.114) *bajo las hipótesis* **[C1-C2]**. *Supongamos que* $\underline{u},\overline{u},\underline{p},\overline{p} \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *es un sistema de sub-súpersoluciones para* (1.114). *Definamos por inducción las sucesiones* $\{u_n\},\{u^n\},\{p_n\},\{p^n\}$, *como*

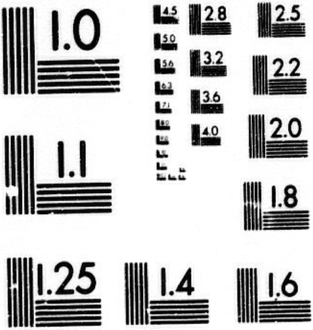
$$u_1 = \underline{u},\ u^1 = \overline{u},\ p_1 = \underline{p},\ p^1 = \overline{p},$$

y para $n > 1$ *como las soluciones de los problemas definidos en* (1.59) *pero considerando la condición de Neumann en la frontera de* Ω *en lugar de la condición de tipo Dirichlet. Entonces, las sucesiones de funciones definidas anteriormente satisfacen*

$$\begin{array}{l} u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u^n \leq u^{n-1} \leq \ldots \leq u^1, \\ p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n \leq p^n \leq p^{n-1} \leq \ldots \leq p^1, \end{array} \tag{1.115}$$

para todo $x \in \Omega$ *y*

$$u_n \nearrow u_*,\ u^n \searrow u^*,\ p_n \nearrow p_*,\ p^n \searrow p^*, \tag{1.116}$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

$$\int_\Omega \nabla \overline{p} \;\; \nabla\phi \geq \int_\Omega C(x,\underline{u},\overline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\overline{u},\overline{p})\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla \underline{p}\cdot\nabla\phi \leq \int_\Omega C(x,\overline{u},\underline{p})\phi + \int_\Omega D(x,\underline{u},\underline{p})\phi.$$

La definición anterior puede parecer extraña, pero si tenemos en cuenta las propiedades de monotonía del sistema (1.114) que, sugeridas por el sistema de optimalidad (1.104), hemos impuesto a las funciones B, C y D, no parecerá tan rara. Recordemos lo hecho ya en la sección cuarta para el estudio de la aproximación en el problema $PD_{\Omega,a,b,\lambda}$.

Tenemos ya preparados los ingredientes para poder enunciar un teorema general para la existencia de soluciones de un sistema en derivadas parciales como (1.114), basado en la existencia de un sistema de sub-súpersoluciones.

Teorema 1.47. *Consideremos el sistema* (1.114) *bajo las hipótesis* **[C1-C2]**. *Supongamos que* $\underline{u},\overline{u},\underline{p},\overline{p} \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *es un sistema de sub-súper-soluciones para* (1.114). *Definamos por inducción las sucesiones* $\{u_n\},\{u^n\},\{p_n\},\{p^n\}$, *como*

$$u_1 = \underline{u},\; u^1 = \overline{u},\; p_1 = \underline{p},\; p^1 = \overline{p},$$

y para $n > 1$ *como las soluciones de los problemas definidos en* (1.59) *pero considerando la condición de Neumann en la frontera de* Ω *en lugar de la condición de tipo Dirichlet. Entonces, las sucesiones de funciones definidas anteriormente satisfacen*

$$\begin{aligned} u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq u^n \leq u^{n-1} \leq ... \leq u^1, \\ p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \leq p^n \leq p^{n-1} \leq ... \leq p^1, \end{aligned} \tag{1.115}$$

para todo $x \in \Omega$ *y*

$$u_n \nearrow u_*,\; u^n \searrow u^*,\; p_n \nearrow p_*,\; p^n \searrow p^*, \tag{1.116}$$

en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para cualquier* $\alpha \in (0,1)$, *donde* u_*, u^*, p_*, p^* *satisfacen el sistema*

$$\begin{aligned} -\Delta u_* &= B(x, u_*, p_*) \quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta u^* &= B(x, u^*, p^*) \quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta p_* &= C(x, u^*, p_*) + D(x, u_*, p_*) \quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta p^* &= C(x, u_*, p^*) + D(x, u^*, p^*) \quad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial}{\partial\nu} u_* &= \tfrac{\partial}{\partial\nu} u^* = \tfrac{\partial}{\partial\nu} p_* = \tfrac{\partial}{\partial\nu} p^* = 0, \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.117}$$

Además, cualquier solución (u, p) *de* (1.114) *con la propiedad*

$$\underline{u} \le u \le \overline{u}, \ \underline{p} \le p \le \overline{p}, \tag{1.118}$$

deberá satisfacer

$$u_* \le u \le u^*, \ p_* \le p \le p^*.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la del Teorema 1.27 teniendo en cuenta el principio del máximo para el operador $(-\Delta + T)$, $T \in \mathbb{R}^+$, con condiciones en la frontera tipo Neumann (recordemos el Lema 1.32). ∎

Nota.

Podemos observar aquí también que (u^*, u_*, p^*, p_*) es otra solución de (1.117). Por tanto, si el sistema (1.117) tiene solución única (u, v, p, q) en $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{p}, \overline{p}] \times [\underline{p}, \overline{p}] \subset [L^\infty_+(\Omega)]^4$, debe ser $u_* = u^*$, $p_* = p^*$, y consecuentemente $u \equiv u_* = u^*$, $p \equiv p_* = p^*$ será la única solución (ver [45, cap. V]) de (1.114) en $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{p}, \overline{p}] \subset L^\infty_+(\Omega) \times L^\infty_+(\Omega)$.

Una aplicación interesante del teorema anterior es proporcionar un método aproximativo para la solución del sistema de optimalidad (1.104)-(1.105). Consideremos las funciones B, C y D de esta forma particular

$$\begin{aligned} B(x, u, p) &= u\left(a - [b + \frac{\lambda}{2}(1 - p)]u\right), \\ C(x, u, p) &= p(a - 2bu), \\ D(x, u, p) &= \frac{\lambda}{2} u(1 - p)^2. \end{aligned} \tag{1.119}$$

La hipótesis **[H]** implica **[C1]** y como las funciones B, C y D son de clase C^1 con respecto a las variables (u,p), es posible encontrar una constante $T \in \mathbb{R}^+$ para la que se verifique **[C2]**. Tomemos ahora como sistema de sub-súper soluciones al formado por las funciones

$$\underline{u} = w, \ \overline{u} = \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \ \underline{p} = 0, \ \overline{p} = \lambda Q, \tag{1.120}$$

donde Q y w son definidos, respectivamente, como en (1.96) y como la solución del problema

$$\begin{array}{l} -\Delta w = w \left[a - \dfrac{\lambda}{2} w - b w \right] \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{array} \tag{1.121}$$

Estamos en situación de poder aplicar el Teorema 1.47 para obtener una solución (u_*, u^*, p_*, p^*) del sistema

$$\begin{array}{ll} -\Delta u_* = u_* \left(a - [b + \dfrac{\lambda}{2}] u_* + \dfrac{\lambda}{2} p_* u_* \right) & \text{en } \Omega, \\ -\Delta u^* = u^* \left(a - [b + \dfrac{\lambda}{2}] u^* + \dfrac{\lambda}{2} p^* u^* \right) & \text{en } \Omega, \\ -\Delta p_* = (a - 2bu^*) p_* + \dfrac{\lambda}{2} u_* (1 - p_*)^2 & \text{en } \Omega, \\ -\Delta p^* = (a - 2bu_*) p^* + \dfrac{\lambda}{2} u^* (1 - p^*)^2 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_* = \frac{\partial}{\partial \nu} u^* = \frac{\partial}{\partial \nu} p_* = \frac{\partial}{\partial \nu} p^* = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \tag{1.122}$$

Si ahora encontramos condiciones para que el sistema anterior tenga solución única en $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{p}, \overline{p}] \times [\underline{p}, \overline{p}] \subset [L_+^\infty(\Omega)]^4$, en virtud de la nota al Teorema 1.47, habremos conseguido un método de aproximación para el control óptimo del problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$. En esta línea tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.48.(Primera aproximación).
Supongamos [H], $\varrho_1(-a) < 0$ *y que* ϵ *es elegido como en* (1.93). *Definamos* $\delta_0 \equiv \varrho_1(-a + 2b(u_0 - \epsilon))$, *que es estrictamente positivo por la elección de* ϵ. *Entonces, tomando* Λ_1 *como en* (1.97), *si*

$$\lambda \leq \Lambda_2 \equiv \min\left\{\Lambda_1, \frac{\delta_0}{2\overline{b}\|Q\|_\infty}, \frac{2\delta_0 \underline{b}^2}{\underline{b}^2 + \overline{a}^2}\right\},$$

el sistema (1.122) *sólo puede tener una solución* (u, v, p, q) *verificando las condiciones*

$$\begin{aligned} &\underline{u} \leq u \leq \overline{u}, \underline{u} \leq v \leq \overline{u}, \\ &\underline{p} \leq p \leq \overline{p}, \underline{p} \leq q \leq \overline{p}, \end{aligned} \tag{1.123}$$

donde $\underline{u}$, $\overline{u}, \underline{p}$, $\overline{p}$ *están definidas en* (1.120).

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la del Teorema 1.29 ∎

Partiendo ahora de otras sub-súper soluciones podemos encontrar diferentes condiciones que garanticen la unicidad de solución del sistema (1.122) y por tanto disponer de otra aproximación para la solución del problema $PN_{\Omega,a,b,\lambda}$. Con estas ideas presentes vamos a suponer que la función b está sujeta a la restricción (1.42) y vamos a definir unas sub-súper soluciones apropiadas. Para ello consideremos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ como en (1.99) y Q el de (1.101). Tomemos

$$\underline{u} = w, \ \overline{u} = \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \ \underline{p} = 0, \ \overline{p} = \frac{Q}{\underline{b}}, \tag{1.124}$$

donde w está definido en (1.121).

Teorema 1.49.(Segunda aproximación).
Supongamos ciertas las hipótesis [H], $\varrho_1(-a) < 0$ *y supongamos que la función* b *satisface la restricción* $\overline{b} \leq M\underline{b}$, *para algún* $1 \leq M < 2$. *Tomemos como sistema de sub-súper soluciones las definidas por* (1.124) *que, en virtud del*

Teorema 1.47, nos proporciona una solución (u, v, p, q) *del sistema* (1.122). *Sea* $\delta \equiv \varrho_1(-a + \frac{2}{M}(u_{1,0} - \varepsilon))$, *donde* ε *está definido por* (1.99). *Si*

$$\underline{b}^2 \geq \max\left\{b_1, \frac{\lambda\alpha\overline{a}^2}{\delta}\right\}, \tag{1.125}$$

donde b_1 *es el determinado por* (1.102) *y* $\alpha \equiv \max\left\{\frac{2M\|\mathcal{Q}\|_\infty}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta}\right\}$, *entonces* (u, v, p, q) *es la única solución del sistema* (1.122) *satisfaciendo las condiciones* (1.123).

DEMOSTRACIÓN. Es análoga a la del Teorema 1.30. ∎

Capítulo II

Sistemas elípticos con condiciones de contorno tipo Neumann.

En este segundo capítulo vamos a estudiar un problema de control óptimo donde, en vez de una ecuación de estado, tendremos un sistema de estado de tipo elíptico. Creemos interesante trabajar con problemas de control en el caso de sistemas, no sólo por la propia generalización matemática, que es importante en sí misma, sino por las aplicaciones que de esta generalización pudieran derivarse. El trabajo lo hemos realizado imponiendo condiciones en la frontera tipo Neumann. Una de las razones para considerar este tipo de condiciones es la de "controlar" el flujo de la solución a través de la frontera del dominio, hecho que, por ejemplo, puede ser interesante cuando se estudie el crecimiento-cultivo de una o varias especies biológicas dentro de un recinto acotado.

Empezaremos estudiando el problema:

$$\begin{array}{ll} -\Delta u = \sigma(x)v - d_1(x)u - c_1u(u+v), & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u - d_2(x)v - c_2v(u+v), & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \tag{2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^N$, las funciones σ, b, d_1, d_2 pertenecen al espacio de funciones

$$L^\infty_+(\Omega) = \{g \in L^\infty(\Omega),\ g \geq 0 \text{ c.e.t } \Omega\}$$

y c_1, c_2 son constantes positivas. El par (d_1, d_2) actuará como control del sistema y estará en el espacio de controles $C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, donde para $i = 1, 2$ y $\delta_i > 0$ prefijados, definimos

$$C_{\delta_i} = \{g \in L^\infty(\Omega), \delta_i \geq\ g \geq 0 \ \text{ c.e.t. } \Omega\}.$$

Los coeficientes del problema anterior pueden tener una interpretación biológica en estos términos: supongamos que dos subpoblaciones de la misma especie viven en el dominio Ω. La función u representa la concentración de individuos adultos y v la concentración de individuos jóvenes. La función σ

describe la razón de jóvenes que llegan a ser adultos y de la misma forma b expresa la proporción de jóvenes que son "nacidos" de los adultos. Las constantes c_1 y c_2 miden de alguna manera la competición que existe entre cada subpoblación con el total de la población. Las funciones d_1 y d_2 influyen en el crecimiento de cada una de las subespecies con el objeto de mejorar la calidad, de esta manera tienen una influencia en el beneficio final del proceso (véase el funcional de coste-beneficio (2.2) más adelante). La condición homogénea en la frontera tipo Neumann indica que no hay flujo de individuos a través de la frontera del dominio Ω.

En una primera etapa, para estudiar el problema de control asociado a (2.1), estudiaremos la existencia de soluciones del sistema (2.1) con ambas componentes no negativas y no triviales. Como veremos más adelante (sección primera), bajo determinadas hipótesis (como veremos en el Teorema 2.2), para cada par $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ el sistema (2.1) tiene una única solución, en sentido débil, $(u_{d_1,d_2}, v_{d_1,d_2})$, con ambas componentes positivas. En adelante diremos simplemente que $(u_{d_1,d_2}, v_{d_1,d_2})$ es un estado de coexistencia para el problema (2.1). Este hecho nos permite definir el funcional de coste-beneficio, $J : C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} \to \mathbb{R}$, como

$$\begin{aligned} J(d_1, d_2) = \int_\Omega \Big\{ & \lambda u_{d_1,d_2}(x) d_1(x) - (d_1(x))^2 + \\ & + \mu v_{d_1,d_2}(x) d_2(x) - (d_2(x))^2 \Big\} \, dx, \end{aligned} \tag{2.2}$$

que en cierto sentido, como ya hemos visto en el capítulo anterior, representa la diferencia entre beneficio y coste (puede consultarse también [27], [35], [44], [46], [64] para problemas similares en el caso de sistemas y [42], [43], [47], [36] para situaciones parecidas en el caso escalar). Así, las constantes $\lambda, \mu > 0$ representarán, respectivamente, el cociente entre el precio de venta y el coste del control, de las especies u y v. Diremos que un control $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ es un control óptimo si

$$J(d_1, d_2) = \sup_{C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}} J(e_1, e_2),$$

o equivalentemente, que tal control (d_1, d_2) es una solución del problema $PS_{\Omega,\sigma,b,c_1,c_2,\delta_1,\delta_2,\lambda,\mu}$. Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos PS en lugar de $PS_{\Omega,\sigma,b,c_1,c_2,\delta_1,\delta_2,\lambda,\mu}$.

También estudiamos en esta sección el caso de sistemas elípticos lineales de tipo cooperativo (véanse los trabajos [19], [26], [28] y [29]). Este estudio servirá para, entre otras cosas, deducir el sistema de optimalidad (véase más adelante el Corolario 2.12) que han de satisfacer los controles óptimos.

En una segunda etapa, nuestro interés se centrará en maximizar el funcional anterior J y en describir lo mejor posible los puntos de $C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ donde tal supremo se alcance. Más concretemente, en la sección segunda, daremos condiciones que garanticen la existencia de solución del problema PS, encontraremos algunas propiedades cualitativas que deben cumplir las soluciones de PS y deduciremos el sistema de optimalidad. En la sección tercera, usando el sistema de optimalidad probaremos que el conjunto de los controles óptimos es precompacto como subconjunto de $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. Este hecho será esencial en el estudio de la unicidad del control óptimo (compárese con los trabajos [27], [35] y [44]).

II.1 Preliminares. Sistemas elípticos de tipo cooperativo.

El objetivo de esta sección es, como ya hemos comentado brevemente, obtener condiciones que garanticen la existencia y unicidad de solución (u, v), con ambas componentes positivas, para el sistema (2.1). Las "herramientas" que vamos a necesitar van a ser: un poco de teoría sobre sistemas de EDP de tipo lineal, el método de sub-súper soluciones (recordemos los trabajos de Amann [2], [3] y Sattinger [62]) y el criterio de unicidad de soluciones positivas, para ecuaciones definidas por operadores abstractos de tipo cóncavo, entre espacios ordenados de Banach (Amann [2], Krasnosel'skii [40]). También es conveniente recordar algunos resultados sobre la regularidad de soluciones para EDP de tipo elíptico y de inmersión de espacios de Sobolev y espacios de Hölder (véase por ejemplo Fucik [31] o Gilbarg-Trudinger [34]).

Empezaremos por buscar condiciones que nos proporcionen existencia y unicidad de solución para un sistema lineal del tipo

$$\begin{array}{ll} -\Delta\xi + a(x)\xi + b(x)\eta = f(x), & \text{en } \Omega, \\ -\Delta\eta + c(x)\xi + d(x)\eta = g(x), & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu} = \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{array} \tag{2.3}$$

donde $f, g \in L^2(\Omega)$.

Recordemos que $\varrho_1(q) \in \mathbb{R}$, definido para $q \in L^\infty(\Omega)$, es el valor propio principal del problema de autovalores (1.84) y que satisface (1.85). Es también interesante tener presentes las propiedades más importantes que satisface $\varrho_1(q)$ vistas en la sección quinta del capítulo anterior. Notaremos como $\phi_1(q)$ su función propia asociada (elegida como en el primer capítulo con $\|\phi_1(q)\|_\infty = 1$ y positiva en Ω).

Enunciemos el próximo resultado que nos permite asegurar, bajo ciertas condiciones, cuándo el sistema (2.3) va a tener unicidad de solución.

Proposición 2.1. (Existencia y unicidad para el sistema lineal). *Sean $a, b, c, d \in L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo*

$$\varrho_1(a) > 0, \varrho_1(d) > 0 \ \text{ y } (\| b \|_\infty + \| c \|_\infty)^2 < 4\varrho_1(a)\varrho_1(d). \tag{2.4}$$

Entonces, $\forall f, g \in L^2(\Omega)$ el sistema (2.3) tiene una única solución en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. La haremos usando el Lema de Lax-Milgram, aplicado a la forma bilineal $A : [H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)]^2 \to \mathbb{R}$, definida como

$$\begin{aligned} A((\xi,\eta),(\phi,\varphi)) &= \int_\Omega \nabla\xi\nabla\phi + \int_\Omega a(x)\xi\phi + \int_\Omega b(x)\eta\phi \quad + \\ &+ \int_\Omega \nabla\eta\nabla\varphi + \int_\Omega c(x)\xi\varphi + \int_\Omega d(x)\eta\varphi, \end{aligned}$$

y al funcional $\Theta : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\Theta(\phi,\varphi) = \int_\Omega f\phi + \int_\Omega g\varphi.$$

De la definición de A y de las propiedades de los coeficientes a, b, c, d se deduce que A es continua. Para ver que es coerciva bastará con probar que $\exists\alpha > 0$ tal que

$$\left.\begin{aligned} A((\xi,\eta),(\xi,\eta)) &\geq \alpha\left[\int_\Omega \xi^2 + \eta^2\right] \qquad \forall\xi,\eta \in H^1(\Omega) \\ A((\xi,\eta),(\xi,\eta)) &\geq \alpha\left[\int_\Omega |\nabla\xi|^2 + |\nabla\eta|^2\right] \quad \forall\xi,\eta \in H^1(\Omega) \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

ya que entonces

$$A((\xi,\eta),(\xi,\eta)) \geq \frac{\alpha}{2}\left[\int_\Omega \xi^2 + |\nabla\xi|^2 + \int_\Omega \eta^2 + |\nabla\eta|^2\right],$$

para cualesquiera $\xi,\eta \in H^1(\Omega)$. Veamos (2.5). En virtud de la caracterización variacional de $\varrho_1(q)$ y de la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} A((\xi,\eta),(\xi,\eta)) &\geq \varrho_1(a)\int_\Omega \xi^2 + \varrho_1(d)\int_\Omega \eta^2 - (\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\int_\Omega |\xi\eta| \quad \geq \\ &\geq \varrho_1(a)\|\xi\|^2_{L^2(\Omega)} + \varrho_1(d)\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} - \\ &\qquad -(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\|\eta\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

El último término de la cadena de desigualdades anterior es una forma cuadrática en las variables $\|\xi\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|\eta\|_{L^2(\Omega)}$, que es definida positiva en virtud de la condición (2.4). Por consiguiente, podemos tomar un $\alpha_1 > 0$ que satisface la primera desigualdad de (2.5). Por otro lado, para que se cumpla la segunda desigualdad de (2.5), basta con encontrar un α_2 tal que

$$\begin{aligned}[(1-\alpha_2)\varrho_1(a) - \alpha_2\|a\|_\infty][(1-\alpha_2)\varrho_1(d) - \alpha_2\|d\|_\infty] > \\ > \frac{1}{4}(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)^2,\end{aligned} \tag{2.6}$$

lo cual es posible si tenemos en cuenta (2.4). En efecto, (2.6) implica que

$$\begin{aligned}[(1-\alpha_2)\varrho_1(a) - \alpha_2\|a\|_\infty]\,\|\xi\|_2^2 + [(1-\alpha_2)\varrho_1(d) - \alpha_2\|d\|_\infty]\,\|\eta\|_2^2 - \\ - (\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\,\|\xi\|_2\|\eta\|_2 \;\geq\; 0,\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}(1-\alpha_2)\varrho_1(a)\int_\Omega \xi^2 + (1-\alpha_2)\varrho_1(d)\int_\Omega \eta^2 - \int_\Omega |\xi\eta|(\|b\|_\infty + \|c\|_\infty) \;\geq \\ \geq\; \alpha_2\left(\|a\|_\infty \int_\Omega \xi^2 + \|d\|_\infty \int_\Omega \eta^2\right).\end{aligned}$$

Usando ahora la caracterización variacional de $\varrho_1(a)$ y $\varrho_1(d)$, de la desigualdad anterior deducimos

$$\begin{aligned}(1-\alpha_2)\left(\int_\Omega |\nabla\xi|^2 + a\xi^2\right) + (1-\alpha_2)\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2 + d\eta^2\right) + \int_\Omega \xi\eta(b+c) \;\geq \\ \geq\; -\alpha_2\left(\int_\Omega a\xi^2 + d\eta^2\right),\end{aligned}$$

que es equivalente a la segunda desigualdad de (2.5). Tomando ahora $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ tendremos el α buscado.

El Lema de Lax-Milgram garantiza que para cada $f, g \in L^2(\Omega)$, existen $\xi, \eta \in H^1(\Omega)$ únicos, tales que

$$A\left((\xi,\eta),(\phi,\varphi)\right) = \int_\Omega f\phi + \int_\Omega g\varphi, \quad \forall(\phi,\varphi) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega);$$

lo cual equivale a afirmar que (ξ,η) es la única solución débil de (2.3). ∎

Volviendo a nuestro sistema (2.1), el próximo teorema garantizará, bajo las correspondientes condiciones, la existencia de solución.

Teorema 2.2. (Coexistencia para el sistema de estado).
Sean δ_1, δ_2 dos números reales positivos tales que

$$\begin{aligned} &\underline{\sigma}\ \underline{b} > \delta_1\delta_2, \\ &\overline{\sigma} - \underline{\sigma} \leq \frac{c_2\underline{\sigma}}{c_1\underline{b}}\,\underline{\sigma}, \\ &\overline{b} - \underline{b} \leq \frac{c_1\underline{b}}{c_2\underline{\sigma}}\,\underline{b}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces, $\forall(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, existe un estado de coexistencia (u, v) para el sistema (2.1), i.e. (u, v) verifica el sistema (2.1) con $u > 0$ y $v > 0$ en $\overline{\Omega}$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar la existencia de una solución de (2.1) con ambas componentes no negativas y no triviales por el método de sub-súper soluciones.

[Caso constante].- Antes que nada, veamos qué pasa cuando σ, b, c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}^+$ y d_1, d_2 son dos constantes no negativas. En este caso particular, nos interesamos por las soluciones constantes de (2.1). (Estas soluciones constantes las utilizaremos más adelante en el caso general como subsoluciones). Concretamente probaremos que el sistema (2.1) tiene una única solución constante, (u, v), con ambas componentes positivas, si y sólo si, $\sigma b > d_1 d_2$. Además, se verifica que

$$0 < u < \frac{\sigma}{c_1}, \quad 0 < v < \frac{b}{c_2}. \tag{2.8}$$

En efecto, supongamos que (u, v) es una solución constante de (2.1), con ambas componentes positivas, entonces verifica el sistema de ecuaciones

$$0 = \sigma v - d_1 u - c_1 u(u+v) \tag{2.9}$$
$$0 = bu - d_2 v - c_2 v(u+v). \tag{2.10}$$

Multiplicando (2.9) por $b + d_2$, (2.10) por $\sigma + d_1$, sumando ambas expresiones y llamando $\alpha = \sigma b - d_1 d_2$ tenemos

$$\alpha(u+v) - (u+v)[uc_1(b+d_2) + vc_2(\sigma + d_1)] = 0, \tag{2.11}$$

de donde, por ser u, v números positivos deducimos que

$$\alpha - c_1(b+d_2)u - c_2(\sigma + d_1)v = 0. \tag{2.12}$$

De la expresión anterior se deduce que $\alpha > 0$ o lo que es lo mismo $\sigma b > d_1 d_2$.

Recíprocamente, probemos que si $\sigma b > d_1 d_2$, entonces el sistema (2.9)-(2.10) admite una solución constante con ambas componentes positivas. En efecto, el sistema que queremos resolver es equivalente al formado por las ecuaciones (2.10)-(2.11). Observemos, además, que en caso de ser $u + v \neq 0$ las ecuaciones (2.11) y (2.12) son equivalentes. Por tanto, bastará encontar una solución con ambas componentes positivas del sistema formado por las ecuaciones (2.10)-(2.12). Notemos que la ecuación (2.12) es una expresión lineal en las variables u y v. Despejando la variable u en la ecuación (2.10) deducimos que dicha variable u crece estrictamente como función de la variable v en el intervalo $[0, \frac{b}{c_2})$ verificando además, que $u(0) = 0$ y $\lim_{v \to \frac{b}{c_2}} u(v) = +\infty$. De aquí es fácil deducir que sólo existe una única pareja (u, v), con ambas componentes positivas, que satisface el sistema (2.10)-(2.12). La acotación (2.8) es consecuencia directa de (2.12).

[Caso general].- Volviendo al caso general, esto es, cuando σ, b, d_1 y d_2 son funciones, tomemos (u_*, v_*) como la única solución constante, con u_* y v_*

números positivos, del sistema

$$
\begin{array}{ll}
-\Delta u = \underline{\sigma} v - \delta_1 u - c_1 u(u+v), & \text{en } \Omega, \\
-\Delta v = \underline{b} u - \delta_2 v - c_2 v(u+v), & \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega
\end{array}
\tag{2.13}
$$

(que existe, por lo dicho con anterioridad). Entonces, (u_*, v_*) es una subsolución para el problema (2.1). En efecto, (u_*, v_*) cumple las siguientes desigualdades

$$
\begin{array}{ll}
-\Delta u_* = 0 \le \sigma v_* - d_1 u_* - c_1 u_*(u_* + v_*), & \text{en } \Omega, \\
-\Delta v_* = 0 \le b u_* - d_2 v_* - c_2 v_*(u_* + v_*), & \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial u_*}{\partial \nu} = \frac{\partial v_*}{\partial \nu} = 0 \le 0, & \text{en } \partial\Omega.
\end{array}
$$

Definamos ahora $u^* \equiv \dfrac{\underline{\sigma}}{c_1}$ y $v^* \equiv \dfrac{\underline{b}}{c_2}$ que en virtud de las hipótesis (2.7) verifican

$$
\begin{array}{ll}
-\Delta u^* = 0 \ge \sigma v^* - d_1 u^* - c_1 u^*(u^* + v^*), & \text{en } \Omega, \\
-\Delta v^* = 0 \ge b u^* - d_2 v^* - c_2 v^*(u^* + v^*), & \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial v^*}{\partial \nu} = 0 \ge 0, & \text{en } \partial\Omega.
\end{array}
\tag{2.14}
$$

Además, por el apartado anterior, $u_* \le u^*$, $v_* \le v^*$ en Ω.

Demostremos, a modo de ejemplo, una de las desigualdades de (2.14). En efecto, las condiciones impuestas en el teorema garantizan que

$$\frac{\underline{b}}{c_2}(\sigma - \underline{\sigma}) \le d_1 \frac{\underline{\sigma}}{c_1} + \underline{\sigma}\left(\frac{\underline{\sigma}}{c_1}\right), \ \forall x \in \Omega$$

y consecuentemente

$$0 \ge \sigma \frac{\underline{b}}{c_2} - d_1 \frac{\underline{\sigma}}{c_1} - c_1 \frac{\underline{\sigma}}{c_1}\left(\frac{\underline{\sigma}}{c_1} + \frac{\underline{b}}{c_2}\right), \text{ en } \Omega.$$

Observemos que las funciones

$$
\begin{array}{rcl}
f(x,u,v) & = & v(\sigma(x) - c_1 u) - d_1(x) u - c_1 u^2 + M u, \\
g(x,u,v) & = & u(b(x) - c_2 v) - d_2(x) v - c_2 v^2 + M v,
\end{array}
$$

son crecientes con respecto a $u \in [u_*, \frac{\underline{\sigma}}{c_1}]$, para todo v en el intervalo $v_* \le v \le \frac{\underline{b}}{c_2}$, $x \in \Omega$ y con respecto a $v \in [v_*, \frac{\underline{b}}{c_2}]$, para todo u en el intervalo

$u_* \leq u \leq \frac{\underline{\sigma}}{c_1}$, $x \in \Omega$, supuesto que $M > 0$ ha sido elegida suficientemente grande. Como estamos en las condiciones del Teorema 1.47, podemos asegurar que existe una solución de (2.1), $(u, v) \in (W^{2,p}(\Omega))^2$, para $p \in (1, \infty)$, con ambas componentes estrictamente positivas en $\overline{\Omega}$.

∎

Notas.

1. Llamando Γ a la expresión $\frac{c_2 \underline{\sigma}}{c_1 \underline{b}}$, las últimas desigualdades de (2.7) quedarían de esta forma

$$\overline{\sigma} \leq (1 + \Gamma)\underline{\sigma}$$

$$\overline{b} \leq (1 + \Gamma^{-1})\underline{b}.$$

Esta otra forma de expresar (2.7), nos permite ver el tipo de condiciones que sobre el crecimiento de las funciones σ y b hemos impuesto. Así, si permitimos que la función σ oscile entre valores "grandes", la función b deberá de hacerlo entre valores "pequeños".

2.- Quizá pueda obtenerse un teorema de existencia de estados de coexistencia para el sistema (2.1) imponiendo condiciones más débiles de las que se han considerado en el teorema anterior, usando un teorema del tipo "punto fijo de Schauder". Sin embargo, en este caso no sabemos como probar la unicidad del estado de coexistencia (ver Teorema 2.7 más adelante).

Una vez probada la existencia de estados de coexistencia del sistema (2.1) interesa dar condiciones que garanticen la unicidad del mismo. Esto último lo probaremos usando un razonamiento que implica a operadores de tipo cóncavo (veáse Krasnoselskii [40]). Con esta intención enunciamos la siguiente

Proposición 2.3. *Supongamos* $\underline{\sigma} > 0$. *Entonces, para cada* $v \in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty_+(\Omega)$ *existe una única solución no negativa,* u, *del problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sigma(x)v - d_1(x)u - c_1 u(u+v), && \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Las ideas fundamentales son el método de sub-súper soluciones y el decrecimiento de la parte derecha de (2.15) con respecto a la función u Además, u, verificará

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \forall \alpha \in (0,1).$$

En efecto, si $v \equiv 0$ estamos ante el caso de un problema con una ecuación logística, del tipo tratado en la sección quinta del capítulo anterior; por tanto la única solución no negativa que admite es la constantemente cero. Si $v \gneq 0$ en Ω, tomemos la constante $u_* \equiv 0$ como subsolución y cualquier constante $u^* > \frac{\overline{\sigma}}{c_1}$ como supersolución para el problema (2.15). Sean ahora, $w_*, w^* \in W^{2,p}(\Omega)$, para $p \in (1,\infty)$, las respectivas soluciones maximal y minimal dadas por el Teorema 1.34 que cumplirán $0 \le w_* \le w^* \le u^*$ en Ω. Ahora, usando la desigualdad

$$-\Delta(w^* - w_*) + c_1 v(w^* - w_*) \le 0$$

y el principio del máximo aplicado al operador $(-\Delta + c_1 v)$, obtenemos $w^* \le w_*$ en Ω, por consiguiente $w_* \equiv w^*$. De esta manera hemos probado la unicidad de solución no negativa en el intervalo $[u_*, u^*] \subset L^\infty(\Omega)$. Como la constante u^* era arbitraria, hemos probado la unicidad de solución no negativa del problema (2.15), para cualquier v, bajo las hipótesis de la proposición. Observemos que la función $u = w^* = w_*$ verifica $u \gneq 0$ en Ω ya que, en este caso, la función $u \equiv 0$ no es una solución de (2.15). ∎

Esta proposición nos permite hacer la

Definición 2.4. *Supongamos $\underline{\sigma} > 0$ y sea $v \in C(\overline{\Omega}) \cap L^{\infty}_{+}(\Omega)$ arbitrario. Denotaremos por $P(v) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$, a la única solución no negativa del problema* (2.15).

Teorema 2.5.(Propiedades del operador P).
Las propiedades más importantes del operador P son las siguientes:

1. *Si* $v \not\equiv 0 \Rightarrow P(v) > 0$, *en* $\overline{\Omega}$.
2. P *es cóncavo, i.e.,* $\forall t \in (0,1)$ $v \geq 0, v \not\equiv 0 \Rightarrow P(tv) > tP(v)$.
3. *Bajo la hipótesis* (2.7), $P : [0, \frac{b}{c_2}] \subset C(\overline{\Omega}) \to [0, \frac{\sigma}{c_1}] \subset C(\overline{\Omega})$ *es monótono, i.e.,* $0 \leq u \leq v \Rightarrow P(u) \leq P(v)$, *y además,*

$$\text{si } 0 \leq u \lneqq v \Rightarrow P(u) < P(v) \text{ en } \overline{\Omega}.$$

DEMOSTRACIÓN. 1.- Realmente, lo que afirma este apartado es que el operador P es fuertemente positivo de $C(\overline{\Omega}) \cap L^{\infty}_{+}(\Omega)$ en $C(\overline{\Omega})$, i.e., si v está en las hipótesis del primer apartado, entonces $u(x) = P(v)(x) > 0$ para $x \in \overline{\Omega}$. La demostración de la propiedad comentada se basa en la regularidad y acotación del dominio Ω, la regularidad del operador P (de hecho $P(v) \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$), y la condición homogénea en la frontera de tipo Neumann. Con estos "ingredientes", expresando el operador $P(v) = u$ como la única solución no negativa del problema equivalente

$$\begin{aligned} -\Delta u + [d_1(x) + c_1(v+u)]u = \sigma(x)v, &\qquad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, &\qquad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente información:

* Si el mínimo de u está en Ω, de [60, Teorema 6], deducimos que u es constante en Ω, y como por el apartado anterior $u \gneqq 0$, tenemos $u(x) > 0$ para $x \in \Omega$.

* Si por el contrario el mínimo de u se alcanza en $\partial\Omega$, supongamos en $x_0 \in \partial\Omega$, la situación $u(x_0) = 0$ implicaría, en virtud del Principio del Máximo fuerte o Principio del Máximo de Hopf ([60, Teorema 7], [61, cap. IV]), que $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} < 0$ (lo que sería absurdo ya que por hipótesis $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} = 0$), a menos que u fuese constante, en cuyo caso, también habríamos probado que $u > 0$ en $\overline{\Omega}$.

2.- Probemos que P es cóncavo. Sea $t \in (0,1)$, $v \in C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty_+(\Omega)$, $v \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} -\Delta(tP(v)) &= t(-\Delta P(v)) = t(\sigma v - d_1 P(v) - c_1 (P(v))^2 - c_1 v P(v)) \\ &= \sigma t v - d_1 t P(v) - c_1 t (P(v))^2 - c_1 t v P(v) < \\ &< \sigma t v - d_1 t P(v) - c_1 t^2 (P(v))^2 - c_1 t v t P(v). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Teniendo en cuenta que la condición $\frac{\partial t P(v)}{\partial \nu} = 0$, se mantiene cierta en $\partial\Omega$ y (2.16), concluimos que $tP(v)$ es una subsolución del problema (2.15) para tv. Usando ahora la unicidad de solución no negativa del operador P, deducimos que $tP(v) \leq P(tv)$ en Ω. Lo que queda para probar este apartado es una consecuencia de la propiedad 1. En efecto, consideremos $u_1 = tP(v)$, que como hemos comentado antes, es subsolución para el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = \sigma t v - d_1 u - c_1 u^2 - c_1 t v u, &\quad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Tomemos ahora como supersolución $u^1 = P(tv)$ (que es la solución del problema anterior). Aplicando ahora el Principio fuerte del Máximo para el operador $(-\Delta + M)$, con condiciones frontera de Neumann, y para $M > 0$ suficientemente grande, probaríamos

$$u_1 < u_2 \leq u^1, \quad \text{en } \overline{\Omega},$$

donde u_2 es la solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 + M u_2 = \sigma t v - d_1 u_1 - c_1 u_1 (u_1 + t v) + M u_1, &\quad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

3.- En virtud de (2.7) y que la función u verifica $0 \leq u \leq \frac{b}{c_2}$ podemos tomar $\frac{\sigma}{c_1}$ como supersolución para el problema que satisface $P(u)$. De esta forma $0 \leq P(u) \leq \frac{\sigma}{c_1}$. Veamos ahora que $0 \leq u \leq v \leq \frac{b}{c_2}$ implica que $P(u)$ es una subsolución para el problema que verifica $P(v)$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} -\Delta P(u) &= u(\sigma - c_1 P(u)) - d_1 P(u) - c_1 P(u)^2 \leq \\ &\leq v(\sigma - c_1 P(u)) - d_1 P(u) - c_1 P(u)^2. \end{aligned}$$

Ahora, la unicidad de solución no negativa para el operador P, y un Principio fuerte del Máximo como el considerado en el apartado anterior hace el resto. ∎

Enunciemos ahora un teorema general de unicidad de soluciones positivas, para ecuaciones definidas por operadores cóncavos y monótonos, en espacios de Banach ordenados con cono de interior no vacío. Este teorema nos permitirá obtener el resultado principal de esta sección, i.e., la unicidad de soluciones no negativas para el sistema (2.1), como una simple consecuencia.

Teorema 2.6. (Unicidad de puntos fijos positivos para un operador cóncavo y monótono). (Amann [2]).
Sea K un cono en un espacio de Banach ordenado, D un subconjunto convexo de K conteniendo al cero y $F : D \to K$ tal que

1. $\overset{\circ}{K} = int(K) \neq \phi$.
2. $F(K - \{0\}) \subset \overset{\circ}{K}$.
3. *Para* $w,\ v \in K$ *satisfaciendo* $0 \leq v \lneqq w, \Rightarrow F(w) - F(v) \in \overset{\circ}{K}$.
4. $F(tv) > tF(v),\ \forall t \in (0,1)$ *y* $\forall v \in K - \{0\}$.

Entonces, F tiene, a lo más, un punto fijo en $K - \{0\}$ ∎

Teorema 2.7.(Unicidad del estado de coexistencia).
Si las hipótesis (2.7) son ciertas, entonces el problema (2.1) tiene un único estado de coexistencia, para cada control admisible $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos considerar el operador Q, análogo al P, definido como $Q(u) = v$, donde v es la única solución no negativa del problema

$$\begin{aligned} -\Delta v = b(x)u - d_2(x)v - c_2 v(u+v), &\quad \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el operador $F : K \subset C(\overline{\Omega}) \to K$ definido como $F = Q \circ P$, donde $K = \{w \in C(\overline{\Omega}) : w \geq 0 \text{ en } \Omega\}$. (Recordemos que $\overset{\circ}{K} = \{w \in C(\overline{\Omega}) : w > 0 \text{ en } \overline{\Omega}\}$). El operador F tiene al menos un punto fijo en $K - \{0\}$ "vía" el estado de coexistencia, probado en el Teorema 2.2. En efecto, sea (u, v) una solución con ambas componentes positivas del sistema (2.1). Entonces, $P(v) = u$ y $Q(u) = v$ y de esta manera $F(v) = Q(P(v)) = Q(u) = v$. Además el operador F "hereda" de P y Q las propiedades de monotonía y concavidad. Usando ahora el Teorema 2.6 se probaría que sólo hay un punto fijo (en $K - \{0\}$).

Recíprocamente, cualquier punto fijo para el operador F nos daría un estado de coexistencia para el sistema (2.1). Sea $v \in K - \{0\}$ un punto fijo de F (por ser $F(v) = v$, realmente $v \in W^{2,p}(\Omega)$, para $p \in (1, \infty)$). Definiendo ahora $u = P(v)$, tendríamos

$$u = P(v), \qquad v = Q(u).$$

Así $(u = P(v), v)$ es un estado de coexistencia para la ecuación (2.1) y por lo comentado anteriormente es el único. ∎

II.2. Estudio de la existencia de control óptimo. El sistema de optimalidad.

En esta sección nos ocuparemos de probar que el problema de control PS tiene solución. Intentaremos extender los argumentos realizados para una ecuación al caso de sistemas. La primera dificultad que nos encontramos es que, a diferencia con el problema que estudia una ecuación (los Teoremas 1.6 y 1.35 caracterizan,respectivamente, la existencia y unicidad de solución no negativa y no trivial de (1.1) y (1.82)), aquí, sólo hemos podido dar condiciones suficientes que garanticen la existencia y unicidad de "solución positiva" del sistema de estado (2.1) (recordemos el Teorema 2.7). Esta "pérdida" de información hará que, en un principio, esta extensión no sea inmediata.

El desarrollo de este problema de control, a nuestro entender, ha sido bastante satisfactorio ya que hemos descrito el sistema de optimalidad y hemos obtenido condiciones necesarias que un control admisible debe cumplir para ser óptimo. Estas condiciones de optimalidad tendrán gran influencia en el estudio, como veremos en la próxima sección, de la unicidad del control óptimo para el problema PS.

Pasemos ya a desarrollar los resultados de que consta esta sección.

Teorema 2.8.(Existencia de control óptimo).
Supongamos (2.7), $\delta_1 < \underline{\sigma}$ *y* $\delta_2 < \underline{b}$. *Entonces el problema de control óptimo* PS *tiene solución, i.e.,* $\exists (d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ *tal que* $J(d_1, d_2) = \sup_{C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}} J(e_1, e_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos, en primer lugar, que el funcional J está acotado superiormente en $C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$. Sea $s = \sup J$ y $(d_1^n, d_2^n) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, una sucesión maximizante; entonces, existe una subsucesión, denotada de nuevo por (d_1^n, d_2^n)

tal que

$$(d_1^n, d_2^n) \rightharpoonup (d_1^*, d_2^*) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}, \quad \text{"débilmente" en } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\text{y } (u^n, v^n) \to (u^*, v^*), \quad \text{"fuertemente" en } W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega),$$

donde $(u^n, v^n) \equiv (u_{d_1^n, d_2^n}, v_{d_1^n, d_2^n})$ y (u^*, v^*) es un valor de adherencia de la sucesión $\{(u_{d_1^n, d_2^n}, v_{d_1^n, d_2^n})\} \subset W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$.

Por un procedimiento de paso al límite en el sistema (2.1) obtenemos $u^* = u_{d_1^*, d_2^*}$, y $v^* = v_{d_1^*, d_2^*}$. Ahora usando que $\|d_i^*\|_2 \leq \liminf \|d_i^n\|_2$, para $i = 1, 2$, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \lambda u^n d_1^n = \int_\Omega \lambda u_{d_1^*, d_2^*} d_1^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \lambda v^n d_2^n = \int_\Omega \lambda v_{d_1^*, d_2^*} d_2^*,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} s = \overline{\lim} J(d_1^n, d_2^n) = \\ = \overline{\lim} \int_\Omega \lambda u^n d_1^n - (d_1^n)^2 + \mu v^n d_2^n - (d_2^n)^2 = \\ = \int_\Omega \lambda u^* d_1^* + \mu v^* d_2^* + \overline{\lim} \int_\Omega - (d_1^n)^2 - (d_2^n)^2 \leq \\ \leq J(d_1^*, d_2^*). \end{aligned}$$

∎

El siguiente resultado nos dará una información muy interesante, en concreto nos permitirá, bajo ciertas condiciones sobre los datos del problema, encontrar una acotación más fina sobre cualquier control óptimo. Como vimos en el capítulo anterior, esta acotación es esencial para el estudio del problema de control.

Lema 2.9. (Nueva acotación del control óptimo).
Supongamos (2.7), *y sean* λ, $\mu \in \mathbb{R}^+$, *tomados en la definición del funcional de coste-beneficio* (2.2), *tales que*

$$\frac{\lambda\sigma}{c_1} < \delta_1, \quad \frac{\mu b}{c_2} < \delta_2. \tag{2.18}$$

Si (d_1, d_2) *es un control óptimo para el problema* PS, *entonces*

$$0 \le d_1 \le \frac{\lambda \sigma}{c_1}, \quad 0 \le d_2 \le \frac{\mu b}{c_2}, \quad \text{en } \Omega. \tag{2.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $F = \min\left\{d_1, \frac{\lambda\sigma}{c_1}\right\}$, $G = \min\left\{d_2, \frac{\mu b}{c_2}\right\}$. Bastará con probar que

$$J(F, G) > J(d_1, d_2). \tag{2.20}$$

Consideremos las funciones $f(x, u, v)$, $g(x, u, v)$ y la pareja de números positivos (u_*, v_*) definidas en la demostración del Teorema 2.2. La monotonía de las funciones $f(x, u, v)$, $g(x, u, v)$ en $[0, \frac{\sigma}{c_1}] \times [0, \frac{b}{c_2}]$ nos permite asegurar que las funciones $u_{F,G}$ y $v_{F,G}$ junto con u_* y v_*, forman un sistema de sub-súper soluciones para el sistema (2.1). Así, la unicidad de solución obtenida en el Teorema 2.7 implica

$$u_{F,G} > u_{d_1,d_2} \ge u_*, \quad v_{F,G} > v_{d_1,d_2} \ge v_*, \quad \text{en } \Omega.$$

Las desigualdades anteriores aseguran que

$$\begin{aligned} J(F,G) = & \int_\Omega \left(\lambda u_{F,G} F - F^2 + \mu v_{F,G} G - G^2\right) > \\ \ge & \int_\Omega \left(\lambda u_{d_1,d_2} F - F^2 + \mu v_{d_1,d_2} G - G^2\right). \end{aligned}$$

Probaremos que $\int_\Omega \left(\lambda u_{d_1,d_2} F - F^2\right) \ge \int_\Omega \left(\lambda u_{d_1,d_2} d_1 - d_1^2\right)$. En efecto, en

- $\Omega_1 = \left\{x \in \Omega : d_1 > \frac{\lambda\sigma}{c_1}\right\}$, tenemos que $\lambda u_{d_1,d_2} \le \frac{\lambda\sigma}{c_1} \le d_1 + F$ y por tanto,

$$\begin{aligned} -\lambda u_{d_1,d_2}(-F + d_1) + (-F + d_1)(d_1 + F) \ge 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda u_{d_1,d_2} F - F^2 \ge \lambda u_{d_1,d_2} d_1 - d_1^2. \end{aligned}$$

- Por otro lado en $\Omega - \Omega_1$ se da la igualdad $\lambda u_{d_1,d_2}F - F^2 = \lambda u_{d_1,d_2}d_1 - d_1^2$.

Usando un razonamiento análogo obtenemos

$$\mu v_{d_1,d_2}G - G^2 \geq \mu v_{d_1,d_2}d_2 - d_2^2, \text{ en } \Omega.$$

Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores e integrando sobre Ω finalizamos la demostración. ∎

Como en el caso de una ecuación, para obtener el sistema de optimalidad necesitamos derivar "en un cierto sentido" la solución $(u_{d_1,d_2}, v_{d_1,d_2})$ con respecto a (d_1, d_2). Con este fin enunciamos la

Proposición 2.10.(Derivada direccional de las soluciones respecto a los controles).
Supongamos cierta (2.7). Sea (u_*, v_*) la solución del sistema (2.13) definida en el Teorema 2.2, $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ un control admisible y $f, g \in L^\infty(\Omega)$, tales que $(d_1 + \beta f, d_2 + \beta g) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$, para $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Denotemos $(u_{d_1,d_2}, v_{d_1,d_2})$ por (u, v) y $(u_{d_1+\beta f,d_2+\beta g}, v_{d_1+\beta f,d_2+\beta g})$ por (u_β, v_β). Si, además se cumple la condición

$$\begin{aligned}(\overline{\sigma} - c_1 u_* + \overline{b} - c_2 v_*)^2 &< \\ &< 4\varrho_1(d_1 + c_1(2u_* + v_*))\varrho_1(d_2 + c_2(u_* + 2v_*)),\end{aligned} \tag{2.21}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\tfrac{u_\beta - u}{\beta} &\to \xi, \quad \text{en } H^1(\Omega),\\ \tfrac{v_\beta - v}{\beta} &\to \eta, \quad \text{en } H^1(\Omega),\end{aligned}$$

cuando $\beta \searrow 0$, donde (ξ, η), es la única solución del sistema

$$\begin{aligned}-\Delta\xi + [d_1 + c_1(2u + v)]\xi - (\sigma - c_1 u)\eta &= -fu, && \text{en } \Omega,\\ -\Delta\eta + [d_2 + c_2(u + 2v)]\eta - (b - c_2 v)\xi &= -gv, && \text{en } \Omega,\\ \tfrac{\partial\xi}{\partial\nu} = \tfrac{\partial\eta}{\partial\nu} &= 0, && \text{en } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.22}$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos comprobar que el par (ξ_β, η_β), definido de la forma

$$\xi_\beta = \tfrac{u_\beta - u}{\beta}, \quad \eta_\beta = \tfrac{v_\beta - v}{\beta},$$

es la única solución del sistema

$$\begin{aligned}
&-\Delta\xi_\beta + [d_1 + c_1(u + u_\beta + v)]\,\xi_\beta - (\sigma - c_1 u_\beta)\,\eta_\beta = -f u_\beta, && \text{en } \Omega,\\
&-\Delta\xi_\beta + [d_1 + c_1(u + v + v_\beta)]\,\eta_\beta - (b - c_2 v_\beta)\,\xi_\beta = -g v_\beta, && \text{en } \Omega, \quad (2.23)\\
&\tfrac{\partial\xi_\beta}{\partial\nu} = \tfrac{\partial\eta_\beta}{\partial\nu} = 0, && \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

De la prueba de la Proposición 2.1, se deduce que $\exists M > 0$ tal que $\|\xi_\beta\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\eta_\beta\|_{H^1(\Omega)} \leq M$, independiente de β.

Usando estimaciones elípticas (pensemos, por ejemplo, en la ecuación que satisface ξ_β o η_β), se puede ver que esa acotación es válida también en $H^2(\Omega)$, quizá con otra $M \in \mathbb{R}^+$. Para cualquier sucesión de números reales cumpliendo que $\beta_n \searrow 0$, existe una subsucesión (denotada otra vez por β_n) tal que $\xi_n \to \xi$ y $\eta_n \to \eta$ en $H^1(\Omega)$, con (ξ, η) la única solución del sistema (2.22). Por un argumento similar al realizado en la Proposición 1.8, la unicidad de solución de (2.22) asegura la convergencia de toda la sucesión a (ξ, η). ∎

Notas.

1. Usando las propiedades de $\varrho_1(q)$, para $q \in L^\infty(\Omega)$, la proposición anterior seguirá siendo cierta, si cambiamos la condición (2.21) por esta otra, un poco menos general pero más fácil de comprobar en la práctica, ya que no involucra al primer valor propio $\varrho_1(\cdot)$ de ninguna función.

$$(\overline{\sigma} - c_1 u_* + \overline{b} - c_2 v_*)^2 < 4c_1c_2(2u_* + v_*)(u_* + 2v_*). \qquad (2.24)$$

Pasemos a continuación a dar una fórmula que deben cumplir los controles óptimos del problema PS, en función de la solución de un sistema de EDP (el sistema adjunto). Esta expresión para cualquier control óptimo, en términos de la solución del sistema adjunto, nos permitirá, como veremos más adelante, obtener el sistema de optimalidad.

Teorema 2.11.(Sistema adjunto).
Supongamos (2.7) *y* (2.18). *Si* $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ *es un control óptimo satisfaciendo* (2.21), *entonces*

$$d_1 = \frac{\lambda}{2} u(1-r)^+, \quad \text{en } \Omega \qquad (2.25)$$
$$d_2 = \frac{\mu}{2} v(1-s)^+, \quad \text{en } \Omega,$$

donde (u, v) *es la única solución, con ambas componentes positivas, del sistema* (2.1) *y* (r, s) *es la única solución del sistema (que llamaremos sistema adjunto)*

$$\begin{array}{ll} -\Delta r + [d_1 + c_1(2u+v)]\, r - \frac{\mu}{\lambda}(b - c_2 v)\, s = d_1, & \text{en } \Omega, \\ -\Delta s + [d_2 + c_2(u+2v)]\, s - \frac{\lambda}{\mu}(\sigma - c_1 u)\, r = d_2, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial r}{\partial \nu} = \frac{\partial s}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \qquad (2.26)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que, bajo las hipótesis del teorema, el sistema (2.26) tiene una única solución (obsérvese que el sistema que satisface $(R, S) = (\lambda r, \mu s)$ es del mismo tipo que (2.22)). Sean ahora $f, g \in L^\infty(\Omega)$ tales que $(d_1 + \beta f, d_2 + \beta g) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ cuando $\beta \searrow 0$. Usando que (d_1, d_2) es un control óptimo, tenemos

$$J(d_1, d_2) \geq J(d_1 + \beta f, d_2 + \beta g).$$

Es decir,

$$\int_\Omega \lambda(u_\beta - u)(d_1 + \beta f) + \mu(v_\beta - v)(d_2 + \beta g) + \\ + \int_\Omega \lambda\beta u f + \mu\beta v g - 2\beta d_1 f - 2\beta d_2 g + \\ + \int_\Omega -\beta^2 f^2 - \beta^2 g^2 \leq 0.$$

Dividiendo por $\beta > 0$ y haciendo tender $\beta \searrow 0$, obtenemos

$$\int_\Omega \lambda\xi d_1 + \mu\eta d_2 + \lambda u f + \mu v g - 2 d_1 f - 2 d_2 g \leq 0. \qquad (2.27)$$

Multiplicando ahora la primera ecuación de (2.26) por $\lambda\xi$, la segunda por $\mu\eta$, e integrando sobre Ω, se obtiene

$$\int_\Omega \lambda\nabla r\nabla\xi + [d_1 + c_1(2u+v)]\lambda r\xi - (b - c_2 v)\xi\mu s +$$
$$+ \int_\Omega \mu\nabla s\nabla\eta + [d_2 + c_2(2v+u)]\mu s\eta - (\sigma - c_1 u)\lambda r\eta =$$
$$= \int_\Omega \lambda d_1\xi + \int_\Omega \mu d_2\eta.$$

Con argumentos similares, tomando λr y μs en (2.22) obtenemos

$$\int_\Omega \lambda\nabla r\nabla\xi + [d_1 + c_1(2u+v)]\lambda r\xi - (b - c_2 v)\xi\mu s +$$
$$+ \int_\Omega \mu\nabla s\nabla\eta + [d_2 + c_2(2v+u)]\mu s\eta - (\sigma - c_1 u)\lambda r\eta =$$
$$= -\int_\Omega fu\lambda r - \int_\Omega gv\mu s.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \lambda d_1\xi + \int_\Omega \mu d_2\eta + \int_\Omega fu\lambda r + \int_\Omega gv\mu s = 0,$$

y teniendo en cuenta (2.27), obtenemos

$$\int_\Omega -fu\lambda r - gv\mu s + \lambda uf + \mu vg - 2d_1 f - 2d_2 g \leq 0. \tag{2.28}$$

Tomando $g \equiv 0$, entonces (2.28) implica

$$\int_\Omega f[-\lambda ur + \lambda u - 2d_1] \leq 0.$$

Consideremos también una función $f \in L^\infty_+(\Omega)$ arbitraria. En virtud de las condiciones (2.18) tenemos que $\|d_1\|_\infty < \delta_1$, por tanto deducimos que existe un

$\beta_0 > 0$ tal que $d_1 + \beta f \in C_{\delta_1}$, para $0 \le \beta < \beta_0$. Por esta razón $2d_1 \ge \lambda u(1-r)$ o equivalentemente

$$d_1 \ge \frac{\lambda}{2} u(1-r) \text{ en } \Omega. \tag{2.29}$$

Eligiendo $f = -d_1$ y $\beta < 1$, como también se cumple que $(d_1 + \beta f, d_2 + \beta g) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ cuando $\beta \searrow 0$, deducimos que

$$\int_\Omega d_1(\lambda u(1-r) - 2d_1) \ge 0,$$

de donde,

$$d_1 = \frac{\lambda}{2} u(1-r), \text{ en } \Omega \cap \{d_1 > 0\}$$

$$d_1 \ge \frac{\lambda}{2} u(1-r), \text{ en } \Omega.$$

En conclusión

$$d_1 = \frac{\lambda}{2} u(1-r)^+ \text{ en } \Omega.$$

Y siguiendo un argumento parecido,

$$d_2 = \frac{\mu}{2} v(1-s)^+ \text{ en } \Omega.$$

∎

Como ya hemos comentado antes, este teorema me permite obtener el sistema de optimalidad, a saber,

Corolario 2.12.(Sistema de optimalidad).
Bajo las hipótesis del teorema anterior, si $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ es un control óptimo, entonces

$$d_1 = \tfrac{\lambda}{2} u(1-r)^+ \textit{ en } \Omega,$$

$$d_2 = \tfrac{\mu}{2} v(1-s)^+ \textit{ en } \Omega,$$

donde (u, v, r, s) es solución del sistema (de optimalidad)

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= v(\sigma - c_1 u) - u^2 \left[\frac{\lambda}{2}(1-r)^+ + c_1\right], && \text{en } \Omega,\\
-\Delta v &= u(b - c_2 v) - v^2 \left[\frac{\mu}{2}(1-s)^+ + c_2\right], && \text{en } \Omega,\\
-\Delta r + c_1(2u+v)r - \frac{\mu}{\lambda}(b - c_2 v)s &= \frac{\lambda}{2}u[(1-r)^+]^2, && \text{en } \Omega, \qquad (2.30)\\
-\Delta s + c_2(u+2v)s - \frac{\lambda}{\mu}(\sigma - c_1 u)r &= \frac{\mu}{2}v[(1-s)^+]^2, && \text{en } \Omega,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial r}{\partial \nu} &= \frac{\partial s}{\partial \nu} = 0, && \text{en } \Omega,
\end{aligned}
$$

junto con las estimaciones

$$0 < u < \frac{\sigma}{c_1},\ 0 < v < \frac{b}{c_2}. \qquad (2.31)$$

∎

II.3. Estudio de la unicidad del control óptimo.

Para hacer el estudio de la unicidad de control óptimo del problema PS, necesitaremos información adicional sobre el comportamiento cualitativo de los controles óptimos. Entre otras cosas mostraremos que si λ y μ son suficientemente pequeños y $(d_1, d_2) \in C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ es un control óptimo, entonces $(d_1, d_2) \in int(C_{\delta_1} \times C_{\delta_2})$. También probaremos que el funcional J es Fréchet-diferenciable en un entorno de cualquier óptimo y que el conjunto de los controles óptimos es un compacto de $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. La unicidad de solución para el problema de control PS, de una forma parecida a como hicimos en el capítulo primero de esta memoria, se sigue de un argumento de concavidad. Una buena referencia para las cuestiones de cálculo convexo puede encontrarse en los libros de Clarke [16] y Ekeland-Teman [25].

Lema 2.13.(Acotación para los controles óptimos).
Supongamos cierta la hipótesis (2.7) *y sea* (u_*, v_*) *la única solución del sistema* (2.13) *(cuyas componentes son constantes positivas). Tomemos dos constantes fijas* k_1, $k_2 \in \mathbb{R}^+$ *de tal forma que se cumpla que* $k_1\lambda < \mu < k_2\lambda$. *Sea ahora un control óptimo* (d_1, d_2) *verificando* (2.21). *Entonces, existen* $\lambda_0, \mu_0 > 0$, *tales que las desigualdades*

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\lambda}{4}u_* &\le d_1 \le \lambda\frac{\sigma}{c_1}, \text{ en } \Omega \\ 0 < \frac{\mu}{4}v_* &\le d_2 \le \mu\frac{b}{c_2}, \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

son ciertas para $0 < \lambda < \lambda_0$ *y* $0 < \mu < \mu_0$.

DEMOSTRACIÓN.

Tomando λ, μ verificando (2.18), entonces, en virtud del Teorema 2.11, (d_1, d_2) satisface (2.25); por tanto, para demostrar el lema bastará con probar que $r, s < \frac{1}{2}$, en Ω, cuando λ, μ sean suficientemente pequeños. Teniendo en cuenta la demostración de la Proposición 2.1, deducimos que existe una constante $c > 0$ tal que $(R, S) = (\lambda r, \mu s)$ cumplen las estimaciones

$$\|R\|_{H^1(\Omega)} < c\lambda^2, \ \|S\|_{H^1(\Omega)} < c\mu^2.$$

De nuevo, usando argumentos de regularidad para las soluciones de ecuaciones elípticas, obtenemos que $\|r\|_\infty < c\lambda$, $\|s\|_\infty < c\mu$ (en este segundo caso la constante c puede ser diferente). ∎

Notas.

1. En la práctica puede ser difícil comprobar la condición (2.21), sobre todo teniendo en cuenta que esta condición necesita conocer de antemano quien es el control óptimo, cosa que hasta el momento no sabemos; parece por tanto, conveniente sustituirla en el enunciado de este lema por una condición que sirva para cualquier control admisible. Puede valer, por ejemplo, (2.24).

Proposición 2.14.(Diferenciabilidad del operador J).
Bajo las hipótesis (2.7),(2.18) *y* (2.24), *el funcional de coste-beneficio*

$$J : [\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{\underline{a}}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{\underline{b}}{c_2}] \to \mathbb{R},$$

es Fréchet diferenciable con continuidad, con diferencial

$$J'(d_1, d_2)(f, g) = \int_\Omega [\lambda u(1-r) - 2d_1]f + [\mu v(1-s) - 2d_2]g, \ \forall f, g \in L^\infty(\Omega),$$

donde las funciones (r, s) *son las definidas en el Teorema* 2.11, (u, v) *es la solución del sistema* (2.1) *dada por el Teorema* 2.7 *y el par* (u_*, v_*) *es nuevamente la solución "positiva" del sistema* (2.13).

DEMOSTRACIÓN. Realmente probaremos que el funcional J es diferenciable en un abierto que contiene al conjunto $[\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{\underline{a}}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{\underline{b}}{c_2}]$. Para ello, tomemos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ verificando

$$0 < a_1 < \lambda\frac{u_*}{4}, \quad \lambda\frac{\underline{a}}{c_1} < a_2 < \delta_1, \quad 0 < b_1 < \frac{v_*}{4}, \quad \mu\frac{\underline{b}}{c_2} < b_2 < \delta_2.$$

Claramente $[\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{\underline{a}}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{\underline{b}}{c_2}] \subset (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ en $L^\infty(\Omega)$.

Sea (d_1, d_2) un control admisible de $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \subset C_{\delta_1} \times C_{\delta_2}$ y $f, g \in L^\infty(\Omega)$. Aplicando la Proposición 2.10 obtenemos

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \{J(d_1 + \beta f, d_2 + \beta g) - J(d_1, d_2)\} = J'(d_1, d_2)(f, g)$$

donde el funcional J' viene definido como

$$\begin{aligned} J'(d_1, d_2)(f, g) &= \\ &= \int_\Omega (\lambda \xi d_1 + \mu \eta d_2 + \lambda u f + \mu v g - 2d_1 f - 2d_2 g) = \\ &= \int_\Omega ([\lambda u(1 - r) - 2d_1]f + [\mu v(1 - s) - 2d_2]g) \qquad (2.32) \end{aligned}$$

y (r, s) son los definidos en el Teorema 2.11. Como las expresiones $[\lambda u(1 - r) - 2d_1]$ y $[\mu v(1 - s) - 2d_2]$ están acotadas en la norma del espacio $L^\infty(\Omega)$, se deduce fácilmente que el operador lineal $J'(d_1, d_2) : L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ es continuo. Hemos demostrado así que $J'(d_1, d_2)$ es la diferencial Gâteaux de J en $(d_1, d_2) \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$. Tomemos ahora una sucesión (d_1^n, d_1^n) en $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \subset L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ con $(d_1^n, d_2^n) \to (d_1, d_2)$. Con argumentos y notación similares a los aplicados en la demostración de la Proposición 2.10, obtenemos que $(u^n, v^n) \to (u, v)$ y $(r^n, s^n) \to (r, s)$ en $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. De esta forma usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesge probaríamos que la diferencial Gâteaux de J, J', es continua en el abierto $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$. De esta forma tenemos, en particular, que

$$J : [\lambda \frac{u_*}{4}, \lambda \frac{\underline{a}}{c_1}] \times [\mu \frac{v_*}{4}, \mu \frac{\underline{b}}{c_2}] \to \mathbb{R}$$

es diferenciable Fréchet con continuidad. ∎

Notas.

1. Es claro que, bajo las hipótesis (2.7), (2.18), (2.24) y con a_i, b_i, $i = 1, 2$ como en la demostración precedente, las funciones

$$u, v : (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \to L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$$

son lipschitzianas. Esto es una consecuencia de la diferenciabilidad Gâteaux de (u,v) en puntos de $(a_1,a_2)\times(b_1,b_2)$, con derivada en la dirección del vector $(f,g)\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$ (véase la Proposición 2.10) igual a (ξ,η) y la acotación uniforme de (ξ,η) con respecto a (d_1,d_2).

Lema 2.15. *Consideremos las hipótesis* (2.7), (2.18) *y* (2.24). *Sea* (u_*,v_*) *la única solución "positiva" del sistema* (2.13). *Entonces las funciones*

$$r,s:[\lambda\frac{u_*}{4},\lambda\frac{\sigma}{c_1}]\times[\mu\frac{v_*}{4},\mu\frac{b}{c_2}]\to L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega),$$

definidas en el Teorema 2.11, *son localmente lipschitzianas.*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la siguiente versión del Teorema de la Función Implícita que, con ligeras variantes, puede consultarse en Crandall-Rabinowitz [20], Deimling [21] o Dieudonné [22].

Teorema 2.16. (Teorema de la Función Implícita).
Sean X,Y,Z espacios de Banach, $U\subset X$ y $V\subset Y$ entornos de $x_0\in X$ e $y_0\in Y$ respectivamente, $F:U\times V\to Z$, $(x,y)\to F(x,y)$ continua y continuamente diferenciable con respecto a la variable y. Supongamos también que $F(x_0,y_0)=0$ y $F_y^{-1}(x_0,y_0)\in L(Z,Y)$, donde $L(Z,Y)$ es el espacio de los funcionales lineales y continuos de Z en Y. Entonces existen $\overline{B}_r(x_0)\subset U$ y $\overline{B}_\delta(y_0)\subset V$ y exactamente una aplicación $T:B_r(x_0)\to B_\delta(y_0)$ tal que $Tx_0=y_0$ y $F(x,(Tx))=0,\forall x\in B_r(x_0)$. Esta aplicación T, es continua. ∎

Para la demostración del Lema 2.15 no basta el teorema anterior; necesitamos una información complementaria, a saber, "si además, la función F es lipschitziana, entonces la función implícita T es lipschitziana en un entorno de la forma $B_{r'}(x_0)$". Posiblemente el radio r', dado aquí, sea más pequeño que el dado por el teorema anterior. Demostremos esta afirmación

Definamos $L \equiv \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$. Como L es un isomorfismo lineal de Y a Z, existirá $K_1 > 0$ tal que, para x_1, x_2 en una cierta bola centrada en x_0,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq K_1\|x_1 - x_2\|,$$

si y sólo si, existe $K_2 > 0$ cumpliendo que

$$\|LTx_1 - LTx_2\| \leq K_2\|x_1 - x_2\|.$$

Probemos entonces que LT es lipschitziana en un entorno del punto x_0. Con este objetivo, definamos la función

$$S(x, y) = L^{-1}F(x, y) - y, \ \forall (x, y) \in U \times V.$$

La función S así definida es continua, con derivada continua con respecto a la variable y y como $S_y(x_0, y_0) = 0$, existen entornos $B'_r(x_0) \subset B_r(x_0) \subset X$ y $B'_\delta(y_0) \subset B_\delta(y_0) \subset Y$, tales que, para algún $k \in (0, 1)$,

$$\|S(x, y) - S(x, z)\| \leq k\|y - z\|, \ \forall x \in B'_r(x_0), \ \forall y, z \in B'_\delta(y_0). \tag{2.33}$$

Además,

$$\begin{aligned} &\|S(x_1, y) - S(x_2, y)\| = \\ &\qquad = \|L^{-1}(F(x_1, y) - F(x_2, y))\| \leq M\|L^{-1}\|\|x_1 - x_2\|, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $x_1, x_2 \in B'_r(x_0)$, $y \in B'_\delta(y_0)$ y M es la constante de Lipschitz de F. De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} &\|LTx_1 - LTx_2\| = \\ &\qquad = \|F(x_1, Tx_1) - LTx_1 - F(x_2, Tx_2) + LTx_2\| \leq \\ &\qquad \leq \|L\|\|L^{-1}F(x_1, Tx_1) - Tx_1 - L^{-1}F(x_2, Tx_2) + Tx_2\| = \\ &\qquad = \|L\|\|S(x_1, Tx_1) - S(x_2, Tx_2)\|. \end{aligned}$$

Usando (2.33) y (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned}\|LTx_1 - LTx_2\| &\leq \\ &\leq k\|L\|\|Tx_1 - Tx_2\| + M\|x_1 - x_2\| \leq \\ &\leq k\|LTx_1 - LTx_2\| + M\|x_1 - x_2\|,\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $k \in (0,1)$,

$$\|LTx_1 - LTx_2\| \leq \frac{M}{1-k}\|x_1 - x_2\|, \; \forall x_1, x_2 \in B_r'(x_0).$$

Después de probar que la función implícita T es lipschitziana en $B_r'(x_0)$, volvamos a nuestro Lema 2.15. Para probarlo elijamos primero una $k > 0$ suficientemente pequeña como para que se satisfaga la siguiente desigualdad

$$(\overline{\sigma} - c_1 u_* + \overline{b} - c_2 v_*)^2 < 4(c_1(2u_* + v_*) - k)(c_2(u_* + 2v_*) - k).$$

Entonces, el sistema (2.26) puede reescribirse de la forma

$$\begin{array}{lr} (-\Delta + k)r + [d_1 + c_1(2u+v) - k]\,r - \frac{\mu}{\lambda}(b - c_2 v)\,s = d_1, & \text{en } \Omega, \\ (-\Delta + k)s + [d_2 + c_2(u+2v) - k]\,s - \frac{\lambda}{\mu}(\sigma - c_1 u)\,r = d_2, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial r}{\partial \nu} = \frac{\partial s}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{array}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} &= (-\Delta + k)^{-1}\begin{pmatrix} [-d_1 - c_1(2u+v) + k]r + \frac{\mu}{\lambda}(b - c_2 v)s + d_1 \\ [-d_2 - c_2(u+2v) + k]s + \frac{\lambda}{\mu}(\sigma - c_1 u)r + d_2 \end{pmatrix} = \\ &= F(r, s, d_1, d_2).\end{aligned}$$

La función F es "afín" y continua con respecto a las variables (r,s); así F es Fréchet diferenciable con continuidad en las variables (r,s). Además, F es lipschitziana con respecto a las variables (d_1, d_2). Como estamos en las condiciones del Teorema de la Función Implícita, la aplicación $(d_1, d_2) \in [\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{\sigma}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{b}{c_2}] \mapsto (r,s)$ es localmente lipschitziana. ∎

Notas.

1. Este resultado aporta la misma información que la Proposición 1.44; viene a decir que las soluciones de la ecuación o del sistema adjunto son localmente Lipschitz con respecto a los controles. Sin embargo, este tipo de demostración es, a nuestro juicio, más elegante que el dado en dicha proposición. Si intentásemos reconstruir la demostración de la Proposición 1.44, aparecerían unas expresiones más complicadas de tratar.

Teorema 2.17.(Unicidad del control óptimo).
Supongamos ciertas las hipótesis (2.7), (2.24) y tomemos λ y μ cumpliendo $k_1\lambda < \mu < k_2\lambda$ para k_1,k_2 constantes positivas fijadas de antemano. Entonces, existen $\lambda_1, \mu_1 > 0$ tales que si $0 < \lambda < \lambda_1, 0 < \mu < \mu_1$, el problema PS tiene un único control óptimo.

DEMOSTRACIÓN. El esquema de la prueba es el siguiente. Primero demostraremos que el conjunto de los controles óptimos del problema PS es precompacto, después probaremos que el funcional J de coste-beneficio es estrictamente cóncavo, en un conveniente subconjunto del espacio de controles admisibles que contiene a los controles óptimos. Estas dos propiedades tienen como consecuencia que el conjunto de los óptimos se reduce a un punto.

Definamos

$$K = \{(d_1, d_2) \in [\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{\sigma}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{b}{c_2}] : (d_1, d_2) \text{ es un control óptimo}\},$$

donde (u_*, v_*), $0 < \lambda \leq \lambda_0$ y $0 < \mu \leq \mu_0$ (λ_0 y μ_0 son tomados como en el Lema 2.13). Veamos que el conjunto $K \subset L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ es precompacto. En efecto, sea (d_1^n, d_2^n) una sucesión de elementos de K. A partir del Teorema 2.11 y del Lema 2.13 deducimos que

$$\begin{aligned} d_1^n &= \tfrac{\lambda}{2}u^n(1 - r^n) \\ d_2^n &= \tfrac{\mu}{2}v^n(1 - s^n). \end{aligned}$$

Pero las sucesiones (u^n, v^n) y (r^n, s^n) admiten subsucesiones que convergen en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, en particular en $L^\infty(\Omega)$ (recordemos que ambas sucesiones están acotadas en $W^{2,p}(\Omega), \forall p \in (1,\infty)$). Esto prueba la precompacidad del conjunto de los controles. Consideremos ahora la clausura de la envolvente convexa de K en $[\lambda\frac{u_*}{4}, \lambda\frac{a}{c_1}] \times [\mu\frac{v_*}{4}, \mu\frac{b}{c_2}]$, $\overline{co}(K)$, que, gracias al Teorema de Mazur, es un conjunto compacto. La función $\overline{co}(K) \to L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, $(d_1, d_2) \longmapsto (u(1-r), v(1-s))$ es lipschitziana; denotemos de nuevo por L su constante de Lipschitz. Tomemos $\lambda_1 < \min\{\lambda_0, \frac{1}{L}\}$, $\mu_1 < \min\{\mu_0, \frac{1}{L}\}$. Bajo esta situación particular, probaremos que $J' : \overline{co}(K) \to (L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))^*$ definido como

$$J'(d_1, d_2)(f, g) = \int_\Omega [\lambda u(1-r) - 2d_1]f + [\mu v(1-s) - 2d_2]g,$$

para todo $f, g \in L^\infty(\Omega)$, es estrictamente monótono, esto es,

$$< J'(d_1, d_2) - J'(\overline{d}_1, \overline{d}_2), (d_1, d_2) - (\overline{d}_1, \overline{d}_2) > < 0, \tag{2.35}$$

para cualesquiera (d_1, d_2), $(\overline{d}_1, \overline{d}_2) \in \overline{co}(K)$ distintos. En efecto, la elección de λ y μ implica que

$$\begin{aligned}&(-2 + \lambda L) \mid d_1 - \overline{d_1} \mid^2 + \\ &\quad + (-2 + \mu L) \mid d_2 - \overline{d_2} \mid^2 + \mid d_1 - \overline{d_1} \mid\mid d_2 - \overline{d_2} \mid L(\lambda + \mu) < \\ &\quad\quad < - \mid d_1 - \overline{d_1} \mid^2 - \mid d_2 - \overline{d_2} \mid^2 + 2 \mid d_1 - \overline{d_1} \mid\mid d_2 - \overline{d_2} \mid \leq 0,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$< J'(d_1, d_2) - J'(\overline{d}_1, \overline{d}_2), (d_1, d_2) - (\overline{d}_1, \overline{d}_2) > < 0,$$

para cualesquiera (d_1, d_2), $(\overline{d}_1, \overline{d}_2) \in \overline{co}(K)$ distintos. Por tanto, J es estrictamente cóncavo sobre $\overline{co}(K)$, de donde se deduce que K se reduce a un punto. ∎

Ejemplo.

Para terminar el contenido de este capítulo nos gustaría, mediante un ejemplo simple, ilustrar el hecho de que las condiciones aquí obtenidas pueden usarse para el estudio de un caso concreto. Consideremos el problema de control PS, donde $\sigma \equiv b$ son constantes positivas, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ y también $c_1 = c_2 = c$. De esta forma, el sistema de estado sería

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sigma(x)v - d_1(x)u - cu(u+v), && \text{en } \Omega, \\ -\Delta v &= \sigma(x)u - d_2(x)v - cv(u+v), && \text{en } \Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= \tfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde ahora d_1, $d_2 \in C_\delta \subset L^\infty(\Omega)$. Observemos que, para que se cumpla la condición (2.7), bastará imponer $\sigma > \delta$. De esta forma, si $\sigma > \delta$ se deduce, gracias a los Teoremas 2.2 y 2.7, que para cada $(d_1, d_2) \in C_\delta \times C_\delta$ el sistema (2.36) tiene un único estado de coexistencia $(u, v) \equiv (u_{d_1,d_2}, v_{d_1,d_2})$. Además, como se desprende de la demostración del Teorema 2.2, estará "comprendido" entre la pareja de sub y súper soluciones correspondiente

$$u_* = \frac{\sigma - \delta}{2c} \leq u \leq \frac{\sigma}{c} = u^*, \quad v_* = \frac{\sigma - \delta}{2c} \leq v \leq \frac{\sigma}{c} = v^*.$$

Bajo la hipótesis $\sigma > \delta$, podemos también usar el Teorema 2.8 que nos asegura la existencia de solución para el problema PS, i.e., $\exists (d_1, d_2) \in C_\delta \times C_\delta$ tal que $J(d_1, d_2) = \sup_{C_\delta \times C_\delta} J$.

Recogiendo la información que nos proporcionan el Corolario 2.12 y el Teorema 2.17 podemos enunciar el

Teorema 2.18. *Supongamos que $2\delta < \sigma$ y tomemos λ y μ verificando $k_1\lambda < \mu < k_2\lambda$ para k_1, k_2 constantes positivas fijadas de antemano (como en el Lema 2.13). Entonces, existen λ_1, $\mu_1 > 0$ tales que si $0 < \lambda < \lambda_1$, $0 < \mu < \mu_1$, el único control óptimo, $(d_1, d_2) \in C_\delta \times C_\delta$, del problema PS viene descrito por la fórmula*

$$d_1 = \tfrac{\lambda}{2} u(1 - r)^+ \text{ en } \Omega,$$

$$d_2 = \tfrac{\mu}{2} v(1 - s)^+ \text{ en } \Omega,$$

donde (u, v, r, s) es solución del sistema (de optimalidad)

$$-\Delta u = v(\sigma - cu) - u^2 \left[\frac{\lambda}{2}(1-r)^+ + c\right], \qquad \text{en } \Omega,$$

$$-\Delta v = u(\sigma - cv) - v^2 \left[\frac{\mu}{2}(1-s)^+ + c\right], \qquad \text{en } \Omega,$$

$$-\Delta r + c(2u+v)r - \frac{\mu}{\lambda}(\sigma - cv)s = \frac{\lambda}{2}u[(1-r)^+]^2, \qquad \text{en } \Omega,$$

$$-\Delta s + c(u+2v)s - \frac{\lambda}{\mu}(\sigma - cu)r = \frac{\mu}{2}v[(1-s)^+]^2, \qquad \text{en } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial r}{\partial \nu} = \frac{\partial s}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{en } \Omega.$$

NOTAS FINALES.

Hemos querido recoger, en esta parte de la memoria, una serie de comentarios, cuestiones, y problemas que a lo largo de ella han surgido y que por su interés, al menos en nuestra opinión, vamos a destacar a continuación. Algunas de ellas pueden ser origen de investigaciones posteriores y otras son cuestiones abiertas que, a pesar del tiempo dedicado a ellas, aún no hemos sabido resolver.

*En el capítulo primero, hemos considerado $L^\infty_+(\Omega)$ como espacio de controles admisibles. Podríamos haber considerado otros espacios de funciones, por ejemplo, el usado por Leung-Stojanovic en [47]. Allí se considera el problema (1.82) con el funcional de coste-beneficio asociado (1.83), definido sobre el espacio de controles $C_\rho = \{g \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq g \leq \rho \text{ c.e.t. } \Omega\}$ con $\rho > 0$ fijo.

Trivialmente el Teorema 1.11 sigue siendo cierto, tomando C_ρ en lugar de $L^\infty_+(\Omega)$. También podemos probar que

$$\sup_{g \in C_\rho} J(g) > 0 \Leftrightarrow \sigma_1(-a) > 0.$$

La demostración sería como la hecha en el Teorema 1.12, tomando ahora $\epsilon_0 < \rho$.

Por último, usando (1.13), podemos probar los mismos resultados sobre unicidad y aproximación del control óptimo, como en los Teoremas 1.19, 1.25, 1.29 y 1.30, si además suponemos $0 < \lambda \frac{\overline{a}}{\underline{b}} < \rho$.

Creemos también interesante el estudio del problema de control PD tomando como espacio de controles $L^\infty(\Omega)$. Pese a que aparentemente "sólo" hemos cambiado un poco el espacio de controles, no hemos podido, al menos con las técnicas empleadas, avanzar gran cosa en el estudio de este problema. Las dificultades más grandes que hemos tenido han sido: por un lado el Teorema 1.6 ya no garantiza la acotación uniforme de la solución $u_f, \forall f \in L^\infty(\Omega)$, y además, tampoco sabemos cómo obtener ahora, una acotación a priori para los controles óptimos, al estilo del Lema 1.10. Por todo lo expuesto, creemos interesante un estudio futuro de estas cuestiones.

*Otro posible cambio a considerar puede venir motivado por la forma del funcional J (ver (1.2) o (1.83)). En principio, este funcional $J(f)$, tiene sentido tomando $f \in L^2_+(\Omega)$, siempre que seamos capaces de encontrar una solución u_f del problema (1.1) para cada $f \in L^2_+(\Omega)$. Una posibilidad para definir u_f puede ser ésta: consideremos funciones $f_n = \min\{f, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas punto a punto. Como $f_n \in L^\infty_+(\Omega)$ con $f_n \nearrow f$, la sucesión u_{f_n} será una sucesión decreciente en n y acotada inferiormente por 0; podemos definir su límite puntual como u_f. Esta podría ser, a grandes rasgos, una manera de abordar la resolución de la ecuación (1.1), pero ahí no acaban nuestros problemas, ya que tampoco sabemos como definir propiamente el autovalor principal $\sigma_1(q)$ para cualquier $q \in L^2(\Omega)$ (recordemos que dependiendo de la dimensión N del dominio Ω, el operador $(\Delta + q)^{-1}$ puede no ser compacto). Como vemos, al considerar el espacio de controles $L^2_+(\Omega)$, aparecen nuevas dificultades añadidas a las anteriores, en las que cabe esperar, no obstante, algún fruto.

*En el capítulo primero, usando el sistema de optimalidad, hemos probado que bajo las hipótesis λ suficientemente pequeño y/o $\underline{b}$ suficientemente grande los problemas PD y PN tienen un único control óptimo (ver Teoremas 1.19 y 1.25). También, en el Teorema 1.45, hemos probado la unicidad del control óptimo demostrando que la hipótesis λ pequeño implicaba que el funcional J

era estrictamente cóncavo. La hipótesis $\underline{b}$ "grande" ¿implicará también que el funcional J es estrictamente cóncavo? Esta es una pregunta que creemos puede ser atractiva de responder.

*Para terminar las cuestiones relacionados con problemas de control con una ecuación de estado de tipo logístico, consideremos el siguiente problema concreto: Supongamos que el dominio Ω es una bola abierta de $\mathbb{R}^N$ de radio $R > 0$ y que los datos a, b, λ son fijados, ¿es posible encontrar un radio, o un intervalo real, (α, β), donde el problema PD tenga unicidad de solución al considerar $R \in (\alpha, \beta)$? En caso negativo, ¿qué hipótesis adicionales habría que imponer a los datos a, b, λ para que fuera afirmativa la respuesta a la pregunta anterior? Supuesto que encontremos respuesta afirmativa a las preguntas anteriores, ¿es factible hacer lo mismo con otro tipos de dominios de $\mathbb{R}^N$?

*Al igual que hemos hecho en el capítulo primero, sería muy instructivo investigar, para el caso de sistemas, la extensión del problema PS (ver capítulo segundo para la definición), al caso en el que el sistema de estado tiene condiciones frontera tipo Dirichlet. Más concretamente podríamos considerar el sistema

$$\begin{aligned}
&-\Delta u = \sigma(x)v - d_1(x)u - c_1 u(u+v), && \text{en } \Omega,\\
&-\Delta v = b(x)u - d_2(x)v - c_2 v(u+v), && \text{en } \Omega,\\
&u = v = 0, && \text{en } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

con un funcional de coste asociado, $J : C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} \to \mathbb{R}$, como el definido por (2.2). Así, el problema PSD, consistiría en maximizar, si es posible, J.

Por el tipo de herramientas utilizadas, y teniendo en cuenta los conocimientos que tenemos para el caso escalar, parece posible la extensión al problema PSD, de los resultados obtenidos en el estudio del problema PS. Esto será objeto de una ulterior investigación.

*Sería interesante, en nuestra opinión, comprobar si las ideas contenidas en la sección tercera del capítulo segundo, pueden aplicarse, para el estudio de la unicidad de control óptimo, en otros problemas de control óptimo que surgen de la Biología y que consideran estados en los que intervienen sistemas de EDP (ver los trabajos de He-Leung-Stojanovic [35], Leung [44]). En los trabajos citados, los autores no consideran el problema de la unicidad de control óptimo. Por la similitud en el tipo de sistemas de ecuaciones y el funcional de coste tomados, creemos que es posible aplicar un tipo de argumento como el utilizado en esta memoria.

También sería interesante, comparar el tipo de condiciones que garantizan la unicidad del control óptimo dadas en Fister [27], con las que hemos expuesto en el capítulo tercero de esta memoria. En el trabajo de Fister [27], se estudia básicamente, el problema de maximizar un funcional de coste como el definido en (2.2) por $J : C_{\delta_1} \times C_{\delta_2} \to \mathbb{R}$. En este caso (u, v) son soluciones del sistema parabólico de tipo Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u(a_1 - b_1 u) - c_1 uv - d_1 u, && \text{en } Q = \Omega \times (0,T) \\ v_t - \Delta v &= v(a_2 - b_2 v) + c_2 uv - d_2 v, && \text{en } Q = \Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0, \quad v(x,0) = v_0, \qquad \text{para } x \in \Omega$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{en } \partial\Omega \times (0,T).$$

Aquí, las funciones a_i, b_i, $i = 1,2$, "trabajan", de una forma parecida al caso de la ecuación logística, como la tasa de natalidad y autolimitación de crecimiento de las soluciones u y v respectivamente. Los coeficientes c_i, $i = 1,2$, representan la interacción entre las especies u y v y d_i, $i = 1,2$, toman el papel de control. El tipo de condiciones que los autores imponen para garantizar la unicidad del control óptimo, esencialmente, son considerar un intervalo de tiempo $(0,T)$, $T > 0$, con T suficientemente pequeño.

Quisiera terminar esta memoria con un cuentecito de R. Tagore. Creo que recoge muy bien lo que, aparte de otras cuestiones mucho más importantes, tiene para mí esta tarea que solemos llamar investigación.

> ¡¡¡Qué feliz eres, chiquillo, tirado ahí en el polvo, jugando hora tras hora con ese palito! No puedo menos de reírme viéndote jugar y jugar toda la mañana con ese pedacillo de palo. Yo sumo y sumo, hora tras hora también, preocupado con mis cuentas. Y quizá tú, mirándome, piensas: "¡Vaya un juego tonto! ¡Qué ganas de perder la mañana!"
>
> ¡Ay chiquillo! ¡Yo he olvidado ya el arte de distraerme con palitos y tortas de barro! ¡No quiero más que juguetes caros, reunir pedazos de oro y plata! Tú, con cualquier cosilla que te encuentras juegas contento. Yo malgasto tiempo y fuerzas en cosas que nunca podré tener. Pretendo atravesar el mar de la ambición con mi frágil barquilla, ¡y me olvido de que yo también estoy jugando!¿¿

Bibliografía

[1] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, N.; *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727.

[2] Amann, H.; *Fixed points equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces.* SIAM review, 18, no. 4, october (1976), pp. 620-709.

[3] Amann, H.; *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 125-146.

[4] Arino, O. y Montero, J.A.; *Optimal Control of a Nonlinear Elliptic Population System* . Aceptado en los Proc. of the Roy. Soc. Edinbur.

[5] Berestycki, H. y Lions, P.L.; *Some applications of the method of super and subsolutions.* Lect. Not. Math., Vol. 782, Springer-Verlag, (1980), 16-42.

[6] Blat, J. y Brown, K.J.; *Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems.* Proc. of the Roy. Soc. Edinbur., Vol. 97 A, (1984), 21-34.

[7] Brézis, H.; Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris 1983.

[8] Brézis, H y Oswald, L.; *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonl. Anal. T.M.A.,10, (1986), 55-64.

[9] Brown, K.J.; Hess, P.; *Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion systems*, Nonl. Anal. T.M.A., 16, No. 12, (1991), pp. 1147-1158

[10] Cañada, A.; Drábek, P. y Gámez, J.L.; *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion* , Transations of the A.M.S., Vol. 349, (1997), pp. 4231-4249.

[11] Cañada, A. y Gámez, J.L.; *Some new applications of the method o lower and upper solutions to elliptics problems*, Appl. Math. Lett. Vol. 6, No.6, (1993), pp.41-45.

[12] Cañada, A.; Gámez, J.L. y Montero, J.A.; *An optimal control problem for a nonlinear elliptic equation arising from population dynamics*. Longman, Pitman Research Notes in Mathematics Series, C. Bandle, J. Bemelmans, M. Chipot, J. Saint Jean Paulin and I. Shafrir, editors. Vol. 326 (1995), 35-40.

[13] Cañada, A.; Gámez, J.L. y Montero, J.A.; *Study of a nonlinear optimal control problem for diffusive nonlinear elliptic equations of logistic type.* SIAM Journal on Control and Optimization Vol. 36, No. 4, pp. 1171-1189, July 1998.

[14] Cañada, A.; Gámez, J.L. y Montero, J.A.; *Uniqueness of the optimal for a nonlinear elliptic equation arising from population dynamics*, Actas del XIV C.E.D.Y.A., Vic, España, (1995). (Http://www-ma1.upc.es/cedya/html.)

[15] Casas, E; Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Servicio de publicaciones de la Universidad de Cantabria. Santander 1992.

[16] Clarke, F.H.; Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics, vol 5 SIAM Philadelphia 1990.

[17] Cohen, D.S.; *Positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems*, J. Math. Mech.,17 (1967), 209-216.

[18] Cohen, D.S.; *Positive solutions of non-linear eigenvalue problems: aplications to non-linear reactor dynamics* , Arch. Rat. Mech. Anal., 26 (1967), 305-315.

[19] Correa, F.J. y Souto, M.A.; *On Maximun Principles for Cooperative Elliptic Systems via Fixed Point Index*. Nonlinear Analysis, TMA, 26, no.5,(1996), 997-1006.

[20] Crandall, M. G. y Rabinowitz, P.H.; *Bifurcation from simple eigenvalues*, Journal of Func. Anal. No. 8 (1971), 321-340.

[21] Deimling, K.; Nonlinear Functional Analysis. Springer, Berlin 1985.

[22] Dieudonné, J.; Fundamentos de análisis moderno. Reverté, Zaragoza 1966.

[23] Dragoni, G.S.; *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazione differenziale del secondo ordine*, Giornale di Mat (Battaglini) 69 (1931), 77-112.

[24] Dragoni, G.S.; *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazione differenziali del secondo ordine*, Math. Ann. 105 (1931), 133-143.

[25] Ekeland, I. y Teman, R.; Convex Analysis and Variational Problems. Studies in Mathematics and its Applications, vol. 1. North-Holland, Amsterdam 1976.

[26] Figueiredo (De), D.G. y Mitidieri E.; *A maximun principle for an elliptic system and applications to semilinear problems*, SIAM J. Math. Analysis No 17, (1986), 836-849.

[27] Fister, R.; *Optimal Control of Harvesting in a Predator-Prey Parabolic System*, preprint, Universidad de Tenessee.

[28] Fleckinger, J.; Hernández J. y De Thélin, F.; *A maximun principle for linear cooperative elliptic systems*, International Conference of Differential Equations and Mathematical Physics, Georigiatech, March (preprint)(1992).

[29] Fleckinger, J.; Hernández J. y De Thélin, F.; *On maximun principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems* . Preprint.

[30] Fleming, W. y Rishel, R.; Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag, New York 1975.

[31] Fucik, S.; Kufner, A.; Nonlinear differential equations. Elsevier Scientific Publishing Company. North-Holland the Netherlands 1980.

[32] Gámez, J.L.; *Sistemas elípticos no lineales y aplicaciones en dimámica de poblaciones*, Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada 1993.

[33] Gámez, J.L. y Montero, J.A.; *Uniqueness of the optimal control for a Lotka-Volterra control problem with a large crowding effect.* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Vol. 2, January 1997, pp. 1-12. URL:HTTP: //www.emath.fr/cocv/.

[34] Gilbarg, D. y Trudinger N.S.; Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[35] He, H.; Leung, A. y Stojanovic, S; *Periodic optimal control for competing parabolic Volterra-Lotka-type systems.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 52,(1994), 199-217.

[36] He, H.; Leung, A. y Stojanovic, S; *Periodic optimal control for parabolic Volterra-Lotka equations.* Math. Meth. in Appl. Sci., No.18 (1995) 127-146.

[37] Hess, P.; Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. Longman Group U.K. Limited, 1991.

[38] Keller, H.B.; *Elliptic boundary value problems suggested by non-linear diffusion processes* , Arch. Rat. Mech. Anal., 35 (1969),363-381.

[39] Keller, H.B. y Cohen, D.S.; *Some positone problems suggested by non-linear heat generation* , J. Math. Mech., 16 (1967), 1361-1376.

[40] Krasnosel'skii, M.A.; Positive Solutions of Operator Equations. P. Noordhoff Ltd.Groningen, The Netherlands 1964.

[41] Lee, E.B. y Markus, L; Foundations of optimal control theory. John Wiley, New York 1967.

[42] Lenhart, S.M.; *Optimal control of a convective-diffusive fluid problem.* Math. Models and Meth. in Appl. Sci., Vol. 5, No. 2 (1995), 225-237.

[43] Lenhart, S.M. y Bath, M.G.; *Aplication of distributed parameter control model in wildlife damage management.* Math. Models and Meth. in Appl. Sci., Vol. 2, No 4 (1992) 423-439.

[44] Leung, A.; *Optimal Harvesting-Coefficient Control of Steady-State Prey-Predator Diffusive Volterra-Lotka Systems.* Appl. Math. Optim., 31,(1995), 219-241.

[45] Leung, A.; *Systems of nonlinear partial differential equations.* The Netherlands, Kluwer Acacemic Publishers, 1.989.

[46] Leung, A. y Stojanovic, S.; *Direct methods for some distributed games.* Diff. and Int. Eqns., 3, (1990), 1113-1125.

[47] Leung, A. y Stojanovic, S.; *Optimal control for elliptic Volterra-Lotka equations*. J. Math. Anal. Appl., 173 (1993), 603-619.

[48] Li, L.; *Coexistence theorems of steady states for predator-prey interacting systems*, Trans. of the A.M.S., Vol. 305, (1988), 143-166.

[49] Li, L. y Logan, R.; *Positive solutions to general elliptic competition models*. Diff. and Int. Eqns., 4, (1991), 817-834.

[50] Lions, J.L.; Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Published by SIAM, Philadelphia 1972.

[51] Loewen, P.D. y Rockafellar, R.T.; *The adjoint arc in nonsmooth optimization*. Trans. Amer. Math. Soc., 325 (1991), pp. 39-72.

[52] López-Gómez, J.; *Positive periodic solutions of Lotka-Volterra reaction-diffusion systems*, Diff. and Int. Eqns., Vol. 5, (1992), 55-72.

[53] Montero, J.A.; *An optimal control problem for a diffusive elliptic Volterra-Lotka type equation*, Actas del I Congreso Internacional sobre *"Modelos y Métodos Matemáticos Aplicados a la Biología y Medicina"*. Alicante 1997.

[54] Montero, J.A.; *Some remarks about an optimal control problem for elliptic equations of Volterra-Lotka type*. Comunicación presentada en "University of Zurich conference in Nonlinear Analysis, 14-16 de Octubre 1996, Ittingen (Switzerland).

[55] Nagumo, M.; *Über die differentialgleichung* $y'' = f(t, y, y')$, Proc. Phys-Math. Soc. Japan 19 (1937),861-866.

[56] Okubo, A.; *Diffusion and ecological problems: mathematical models*, Springer-Verlag, Berlín 1980.

[57] Neustad, L.W.; Optimization. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1976.

[58] Perron, O.; *Eine neue Behandlung der Ranwertaufgabe für* $\Delta u = 0$, Math. Z. 18, (1923), 42-54.

[59] Pontriaguin, L. S.; Boltiansky, V. G.; Gramkrelidze, R. V. y Mishenko, E. F.; The mathematical theory of optimal processes. Interscience, John Wiley, New York 1962.

[60] Protter, M. H. y Weinberger, H.; Maximun Principles in Differential Equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1967.

[61] Renardy, M. y Rogers, R.C.; An Introduction to Partial Differential Equations. Texts in Applied Mathematics vol. 13. Springer-Verlag Berlin 1993.

[62] Sattinger, D.H. ; *Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems*, Indiana Uni. Math. J. 21 no. 11 (1972), 979-1000.

[63] Smoller, J.; Shock waves and reaction-diffusion equations . Springer, New York 1.983.

[64] Stojanovic, S.; *Optimal damping control and nonlinear elliptic systems.* SIAM J. Control Optim., 29, (1991), 594-608.