Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias

Continuidad de Derivaciones Aleatorias.

Tesis Doctoral

María Victoria Velasco Collado.

Universidad de Granada
1993

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor D. Armando Reyes Villena Muñoz, Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, defendida por Dña. María Victoria Velasco Collado el día 25 de Octubre de 1.993, ante el Tribunal formado por los siguientes Profesores: Dr. D. Angel Rodríguez Palacios (Presidente), Dr. D. Pere Ara Beltrán, Dr. D. Antonio Fernández López, Dr. D. José Esteban Galé Gimeno (Vocales) y el Dr. D. José Javier Pérez González (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto *"cum laude"* por unanimidad.

A Gabriel,
a mi madre,
y a la memoria de mi padre.

CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN

Protagoniza nuestra Memoria un problema surgido de la exótica unión de dos dispares disciplinas: la *Continuidad Automática* y los *Operadores Aleatorios*. La investigación acerca de esta insólita cuestión establece el inicio de la acción, enmarcada en un inusual paraje modelado por la intervención de los dos agentes antes mencionados. Fruto de esta acción conjunta aparecerán resultados de belleza singular.

A pesar de su reciente origen, ambas disciplinas son ya reconocidas como clásicas y de incuestionable interés.

Se ocupa la Continuidad Automática principalmente de dos tipos de operadores, los homomorfismos y las derivaciones, ambos actuando sobre álgebras de Banach, aunque paulatinamente está apareciendo un sorprendente interés por los mismos en estructuras no asociativas.

Su problema básico consiste en investigar perfecciones algebraicas (como la de semisimplicidad o semiprimidad) que al acaecer sobre un álgebra de Banach transmitan al correspondiente homomorfismo o derivación, sobre ella definido, una propiedad de naturaleza radicalmente distinta: la *continuidad*. Justamente en esa disparidad entre la naturaleza de la hipótesis (púramente algebraica) y la de la tesis (púramente analítica) reside, en nuestra opinión, la magia y la belleza de esta teoría. Posiblemente en el teorema de unicidad de la topología de la norma de Johnson [19] encontremos el reflejo más notorio de este hecho. En un álgebra de Banach coexisten pacíficamente dos estructuras, una algebraica y otra topológica, ligadas por un requerimiento en apariencia totalmente inocuo: la continuidad de las operaciones. El teorema de Johnson asegura, sin embargo, que en presencia de la semisimplicidad del álgebra existe una profunda conexión entre ambas estructuras, que se manifiesta en la existencia de una única topología procedente de una norma de álgebra completa.

Si A es un álgebra de Banach, una *derivación* sobre A es un operador lineal, D, del álgebra A en sí misma, verificando la identidad

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \ \forall a, b \in A.$$

El análisis de la continuidad de tales operadores es uno de los problemas fundamentales en Continuidad Automática. Aunque ya en 1953 Kaplansky [22] conjeturó, y en 1960 Sakai [32] probó, que *las derivaciones de una C^*-álgebra son automáticamente continuas*, parece haber sido el trabajo de Singer y Wermer [36], en 1955, el principal origen de la investigación en este tipo de cuestiones. En dicho estudio los autores probaron que *la imagen de cualquier derivación continua definida sobre un álgebra de Banach conmutativa está contenida en el radical de ésta.* Conjeturaron también que la hipótesis de continuidad era innecesaria, proporcionando a la comunidad matemática, de esta manera tan inocente, un problema que la mantuvo ocupada hasta el año 1987, en el que fue positivamente resuelta por Thomas [39]. Obviamente el mayor obstaculo es encontrado en la posible discontinuidad de la derivación, convirtiéndose la continuidad de las derivaciones en un álgebra de Banach en una cuestión de crucial interés. Así fue entendido por ejemplo por Curtis [9] y Johnson [20], hasta que Johnson y Sinclair [21] asestaron el golpe definitivo al problema estableciendo la *continuidad de las derivaciones de un álgebra de Banach semisimple.* Es posiblemente dicho resultado el más relevante en este terreno y a estos autores se debe el establecimiento de los principios fundamentales que trazan las lineas maestras de lo que hoy día es conocido como *"Teoría de la Continuidad Automática"*.

Por otra parte, el incesante protagonismo de los operadores en las diversas ramas de la ciencia está exigiendo de manera cada vez más imperativa la consideración de los denominados *Operadores Aleatorios.*

Sin duda alguna, es en la Teoría de Ecuaciones Estocásticas donde reside una fuente inagotable de operadores de este tipo. El origen de ésta se puede situar en el trabajo de Ito [17] en 1951, debiéndose su nacimiento a la deficiente aproximación lograda por medio de las ecuaciones ordinarias a gran parte de las situaciones reales.

Encuentran por tanto los operadores aleatorios su ambiente ideal en aquellos modelos que continuamente encontramos en campos como el de la Física o la Ingeniería, que resultan difíciles de idealizar a causa del origen totalmente experimental, y en consecuencia azaroso, que poseen la mayor parte de los parámetros involucrados en ellos. Por ejemplo, en ciencias como la Biología, los operadores aleatorios resultan ser de especial utilidad en determinados aspectos como el de la Dinámica de Poblaciones en el que el comportamiento díscolo de algunas especies, como es el caso de las levaduras, impide que los modelos *"deterministas"* se ajusten razonablemente al desarrollo observado en éstas.

Además, la distinción entre la aproximación determinista y probabilista repercute, a veces de manera decisiva, en la naturaleza de la interpretación de los resultados. Por poner otro sencillo ejemplo, si consideramos un proceso de nacimiento y muerte en el que la tasa de natalidad supere a la de mortalidad, se obtendría según la teoría determinista, que la población siempre crece, admitiendo por el contrario el tratamiento estocástico la posibilidad de que la población se extinga puesto que la probabilidad de que esto ocurra, aunque es pequeña, no es cero.

Intuitivamente ligados a este tipo de problemas aparecen los operadores aleatorios que, con dominio en un espacio de Banach X, tienen la peculiaridad de no tomar directamente valores en otro espacio de Banach Y, sino valores aleatorios sobre éste. Son pues, los operadores aleatorios, operadores de X en el espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ de todas las variables aleatorias de un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ en el espacio de Banach Y.

Fueron muchos los matemáticos que comprendieron que el óptimo desarrollo de la Teoría de las Ecuaciones Estocásticas sólo podía llegar a través de un profundo conocimiento de este tipo de operadores. Entre estos autores cabe mencionar a Skorohod y Barucha-Reid de cuya extensa obra destacamos [37] y [6], respectivamente.

Conviene tener presente, sin embargo, que los operadores aleatorios han adquirido ya entidad propia y la investigación acerca de ellos ha discurrido por las áreas más diversas. Por hacer alguna alusión, destaquemos el trabajo de Pastur [27] sobre el espectro de operadores aleatorios.

Nos pareció una tentación irresistible introducir la Continuidad Automática en el seno de la teoría de los Operadores Aleatorios y entre los variados problemas que cabría considerar hemos elegido el de las derivaciones.

Definimos para ello una *derivación estocástica* sobre un álgebra de Banach A como un operador aleatorio D, de A en A, verificando las condiciones

$$\mathbb{P}[D(\alpha a + \beta b) = \alpha D(a) + \beta D(b)] = 1,$$

(*linealidad* del operador aleatorio) y

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] = 1, \ \forall a, b \in A.$$

para cualesquiera elementos a, b de A y escalares α, β.

Como el lector intuirá, nuestro objetivo es investigar la continuidad de un tal operador. Para dar sentido al problema obviamente necesitamos introducir una topología en el espacio de las variables aleatorias valuadas en un espacio de Banach y a ello, entre otras cosas, dedicamos el primer capítulo de la presente Memoria. Presentamos allí la topología de la convergencia en probabilidad como la manera más razonable y exitosa de dotar de una topología a dicho espacio.

La propiedad de la derivabilidad estocástica invita de inmediato a la clasificación de los operadores aleatorios lineales conforme al grado de derivabilidad estocástica que ellos posean o que nosotros conozcamos de ellos, lo que ponemos de manifiesto con la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Una *derivación probable* sobre un álgebra de Banach A es un operador aleatorio lineal, D, de A en A para el que existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] \geq \delta, \ \forall a, b \in A.$$

Asociado a cada derivación probable D consideramos el valor

$$\delta(D) := \inf\{\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] : \ a, b \in A\},$$

que es entendido como la *probabilidad de que D derive.*

Toda derivación estocástica es una derivación probable, de manera trivial. De otra parte, ejemplos naturales de derivaciones probables son los operadores aleatorios lineales, D, que se comportan como derivaciones estocásticas sobre un subconjunto medible. Nos referimos concretamente a los operadores aleatorios lineales D, sobre un álgebra de Banach A, tales que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \ (c.p.d.) \ \textit{sobre} \ \Omega_0$$

siendo Ω_0 cierto conjunto medible de probabilidad $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$.

En el intento de hacer una mejor formulación de estos últimos operadores observemos que el espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ induce de manera natural sobre cada conjunto de medida positiva Ω_0 un espacio de probabilidad que denotamos por $(\Omega_0, \Sigma_0, \mathbb{P}_{\Omega_0})$ (donde $\mathbb{P}_{\Omega_0}$ es la probabilidad condicional dado el suceso Ω_0). Ello permite definir para cada operador aleatorio, $T : X \to \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, el operador aleatorio restricción, $T_{\Omega_0} \to \mathcal{L}_0(\mathbb{P}_{\Omega_0}, Y)$, como

$$T_{\Omega_0}(x) = T(x)/\Omega_0, \ \forall x \in X.$$

al que llamamos *operador condicional.*

De esta manera lo que acabamos de ver es que *los operadores aleatorios, D, que tienen algún operador condicional, D_{Ω_0}, que es una derivación estocástica son ejemplos de derivaciones probables.*

Sin embargo, en principio no se vislumbra que toda derivación probable, D, tenga que ser un operador de este tipo pues la condición

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] \geq \delta,$$

presupone, para cada par de elementos a, b de A, únicamente la existencia de un conjunto medible $\Omega_{a,b}$, con $\mathbb{P}[\Omega_{a,b}] \geq \delta$, tal que

$$D_{\Omega_{a,b}}(ab) = D_{\Omega_{a,b}}(a)b + aD_{\Omega_{a,b}}(b) \ c.p.d.$$

pero en absoluto exige la existencia de un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$, común a todas las parejas de elementos a, b de A, como sucede cuando el operador condicional D_{Ω_0} es una derivación estocástica.

Curiosamente, el Principio de Aleatorización Uniforme Multilineal (Teorema 3.2) nos muestra como un tal conjunto Ω_0 puede conseguirse.

COROLARIO 3.3. *Un operador aleatorio lineal D es una derivación probable si, y sólo si, existe un subconjunto medible Ω_0, cuya probabilidad es la misma con la que D deriva, tal que el operador condicional D_{Ω_0} es una derivación estocástica.*

Llegamos de este modo a la conclusión de que el estudio de la continuidad automática de las derivaciones probables se reduce básicamente al de la continuidad automática de las derivaciones estocásticas.

Iniciamos así nuestra andadura hacia la continuidad automática de las derivaciones estocásticas emprendiendo la ruta marcada por Johnson y Sinclair para el caso clásico, en la que se distinguían dos fases: una en la que se trabajaba con los ideales primitivos de codimensión infinita del álgebra y otra en la que se trataba con los correspondientes ideales de codimensión finita.

Desde el primer momento se cruzaron en nuestro camino, de una manera totalmente natural, unos operadores aleatorios que si bien no eran continuos, en algún sentido parecieran comportarse como tales. En un principio conseguimos burlarlos, gracias al Lema 3.5, y obtener la información que esperábamos de los ideales primitivos de codimensión infinita pero, en una segunda etapa, cuando trabajábamos con los ideales primitivos de codimensión finita dichos operadores irrumpieron nuevamente de manera ineludible y tal, que pronto comprendimos que en lo sucesivo seríamos compañeros de viaje.

Conscientes de que sólo a partir de un conocimiento exhaustivo de la estructura y comportamiento de este nuevo tipo de operadores podríamos atacar decisivamente el problema de la continuidad de las derivaciones estocásticas, nos vimos irremisiblemente abocados a la investigación acerca de éstos. Dándoles el nombre de *operadores probablemente continuos*, procedimos en, el segundo capítulo de la Memoria, a su estudio sistemático considerando para ellos resultados de corte clásico como el de la Gráfica Cerrada o el de Banach-Steinhaus. Fue este estudio el que nos permitió concluir de manera exitosa el problema planteado.

DEFINICIÓN. La continuidad natural de un operador aleatorio T de un espacio de Banach X en otro Y recibe el nombre especial de *continuidad estocástica* y se dirá que el operador aleatorio T es *probablemente continuo* si posee un operador condicional estocásticamente continuo. Asociado a cada operador probablemente continuo definimos la cantidad

$$\beta(T) := \sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] : T_{\Omega_0} \text{ es estocásticamente continuo}\},$$

que es considerada como la ***probabilidad de que T sea continuo.***

Como quiera que el subespacio separador es una herramienta indispensable en Continuidad Automática, estimamos necesario el estudio de éste para el caso de los operadores probablemente continuos.

Si T es un operador aleatorio lineal T de X en Y, el subespacio *separador* de T es el definido como

$$\mathcal{S}(T) = \{\mathbf{y} : \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \text{ con } \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbf{y}, \text{ en probabilidad}\}.$$

Una lectura estocástica del Teorema de la Gráfica Cerrada nos dice que:

Teorema de la Gráfica Cerrada. *Un operador aleatorio lineal T, entre espacios de Banach, es estocásticamente continuo si, y sólo si, su gráfica es cerrada esto es,*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] = 1, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

Esto nos invita a cuantificar el tamaño estocástico del separador de cada operador aleatorio lineal, T, definiendo la cantidad

$$\alpha(T) := \inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] : \ \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T)\}.$$

De este modo, la propiedad de que la gráfica de T sea cerrada se escribe así

$$\alpha(T) = 1.$$

Es obvio que los operadores aleatorios probablemente continuos verifican que

$$\alpha(T) \geq \mathbb{P}[\Omega_0],$$

para cualquier conjunto medible cuyo operador condicional asociado, T_{Ω_0}, sea estocásticamente continuo, por lo que en particular ha de ser

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

Pronto averiguaríamos que esta última propiedad caracteriza a los operadores probablemente continuos, como se prueba en el siguiente resultado.

COROLARIO 2.22. *Un operador aleatorio lineal, T, es probablemente continuo si, y sólo si,*

$$\mathbb{P}[\mathrm{y} = 0] > 0, \ \forall \mathrm{y} \in \mathcal{S}(T).$$

Posteriormente los operadores probablemente continuos quedaron perfectamente caracterizados con arreglo a su grado de continuidad mediante el *Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada* (Teorema 2.21), cuyo precedente es el *Principio de Aleatorización Uniforme* (Teorema 2.12). Lo primero que se obtiene es que los valores $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son de hecho mínimo y máximo respectivamente. De esta manera parece justo reconocer a $\alpha(T)$ como la *probabilidad de que T tenga gráfica cerrada* y a $\beta(T)$ como la *probabilidad de que T sea continuo.* Finalmente se concluye el siguiente teorema que obviamente mejora el correspondiente resultado clásico.

TEOREMA ALEATORIO DE LA GRÁFICA CERRADA. *La probabilidad de que un operador aleatorio lineal entre espacios de Banach, T, sea continuo coincide con la probabilidad de que, T, tenga gráfica cerrada.*

Disponemos ya de la clave con la que conseguimos revelar toda la geometría que la estructura de los operadores probablemente continuos encierra, recogida en el siguiente resultado, de crucial importancia en nuestro tratamiento del problema de la continuidad de las derivaciones estocásticas.

COROLARIO 2.25. *Sea T un operador aleatorio lineal, de un espacio de Banach X en otro Y, y δ un real positivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T tiene un operador condicional T_{Ω_0} estocásticamente continuo, siendo $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$.

(ii) T es probablemente acotado: Para cada $0 < \delta' < \delta$, $\exists M_{\delta'} > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X.$$

(iii) $\varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M] \geq \delta$, *para todo* $M > 0$.

(iv) La gráfica de T *es probablemente cerrada:*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta, \text{ para todo } \mathbf{y} \text{ en } \mathcal{S}(T).$$

De hecho:

$$\alpha(T) = \sup\{\delta > 0 : \exists M > 0 \text{ con } \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M\|x\|] \geq \delta\ \forall x \in X\} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon].$$

Seguidamente se procede a investigar, en la Memoria, las perfecciones que sobre la continuidad de un operador aleatorio, de un espacio de Banach X en otro Y, acarrea la existencia de momentos de orden r, esto es la valoración del operador aleatorio en el espacio $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, Y)$ de todas las variables aleatorias $\mathbf{x}$, valuadas en Y, tales que

$$\int \|\mathbf{x}\|^r d\mathbb{P} < \infty.$$

Merece destacar a este respecto que tras un sencillo límite se esconde toda la información concerniente a la continuidad de un operador aleatorio, T, pues el mero cálculo de este límite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon],$$

nos proporcionará el más grande tamaño de un subconjunto medible Ω_0 sobre el que T tenga que comportarse como un operador estocásticamente continuo y, más aún, como un operador continuo en media r-ésima, si es que ha lugar a ello.

Una vez analizada la continuidad de los operadores probablemente continuos presentamos las lecturas estocásticas de las clásicas reformulaciones del Principio de la Gráfica Cerrada, a saber el Teorema de los Isomorfismos de Banach y el Teorema de la Aplicación abierta que serán mejoradas (como hiciéramos con el Teorema de la Gráfica Cerrada) estableciéndolas para los operadores probablemente continuos. Convenimos en llamar a los resultados así obtenidos *Teorema Aleatorio de los Isomorfismos de Banach* (Teorema 2.27) y *Teorema Aleatorio de la Aplicación Abierta* (Teorema 2.29), respectivamente.

Procedemos ahora a investigar cómo se transmite la propiedad de la continuidad estocástica por paso al límite. Trasladamos para ello a nuestro ambiente la definición de equicontinuidad y la de acotación puntual obteniendo lo que llamamos ***equicontinuidad estocástica*** y ***acotación puntual estocástica*** de una familia de operadores aleatorios. En tales términos se formula el enunciado proveniente del Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 2.31), que posteriormente generalizamos en lo que llamamos *Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus* (Teorema 2.37). Vemos además como las hipótesis de este último teorema son totalmente independientes, lo que permite concluir (corolarios 2.38 y 2.39) que:

> *El* "grado" *de equicontinuidad de una familia de operadores aleatorios lineales probablemente continuos depende por un lado de cuán continuos sean los operadores aleatorios de esta familia y por otro de cuán fuerte sea la acotación puntual de la misma.*

DEFINICIÓN. Se dice que un operador aleatorio lineal T, de un espacio de Banach X en otro Y, es el ***límite puntual estocástico*** de una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores aleatorios lineales, de X en Y, si, para cada x de X, la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x)$ en probabilidad.

Demostraremos que el límite puntual estocástico de una sucesión de operadores es tan probablemente continuo como lo sean los términos de la sucesión en el siguiente sentido:

COROLARIO 2.41. *Si T es límite puntual estocástico de una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores aleatorios lineales probablemente con-*

tinuos entonces

$$\alpha(T) \geq \underline{lim}\,\alpha(T_n).$$

A continuación, para no perder a costumbre, consideramos la graduación estocástica de la propiedad de la convergencia puntual estocástica, obteniendo la siguiente noción:

DEFINICIÓN. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores aleatorios y sea $0 < \delta < 1$. Decimos que un operador aleatorio, T, es un *δ-límite* de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, para todo x en X, se verifica que

$$\underline{lim}\,\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] \geq \delta, \ \forall \tau > 0.$$

A pesar de la vagedad de esta convergencia que ni tan siquiera entraña la unicidad de un tal límite; para valores de δ suficientemente grandes, comprobamos que *cualquier δ-límite de una sucesión de operadores aleatorios lineales recibe buena parte de la continuidad estocástica de los elementos de la sucesión; transferencia que será tanto más generosa cuanto mayor sea el valor de δ.*

COROLARIO 2.43. *Para cualquier operador aleatorio lineal T que sea δ-límite de una sucesión de operadores aleatorios estocásticamente continuos se verifica que*

$$\alpha(T) \geq 3\delta - 2.$$

y en consecuencia T es probablemente continuo, si $\delta > \frac{2}{3}$.

Como caso particular del corolario anterior volvemos a obtener la continuidad estocástica del límite puntual estocástico de una sucesión de operadores estocásticamente continuos.

Repleta la "caja de herramientas" emprendimos nuestro viaje, que se desarrolla en el Capítulo III de la Memoria, hacia el puerto de la Continuidad Automática.

El caso clásico del problema que nos ocupa, la continuidad estocástica de las derivaciones aleatorias, fue resuelto por Johnson y Sinclair ideando una maquinaria, que nos fue legada en [21], cuya puesta en marcha se producía cada vez que se le proporcionaba una sucesión. Haciendo funcionar dicho artefacto dos veces, tras suministrarle sendas sucesiones de naturaleza éstas totalmente distinta, (una vez trabajando con los ideales primitivos de codimensión infinita y otra con los de codimensión finita), dichos autores consiguieron obtener su famoso teorema de continuidad automática.

Motivados por ello hicimos algunos reajustes que, si bien permitieron que dicho artilugio funcionase en nuestro ambiente, lo volvieron extremadamente delicado de modo que ahora sólamente funcionaría con "combustible" (es decir con sucesiones) de calidad excepcional.

Para el caso de los ideales primitivos de codimensión finita, de un álgebra de Banach A sobre la que consideramos definida una derivación estocástica D, conseguimos depurar la sucesión correspondiente obtenida por Johnson y Sinclair, hasta obtener una que fuese aceptada por nuestra delicada máquina. Ello se logró relacionando los infinitos términos de la sucesión conseguida por el método clásico con un único elemento, pudiendo eludirse de esta manera los graves problemas desencadenados por la infinitud del conjunto de tales términos. Dejamos constancia del modo de hacerlo en el siguiente lema que por consiguiente supone una mejora del Lema 2.1 de [21].

LEMA 3.5. *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional tal que A puede ser representada de manera irreducible sobre X. Sea $\mathcal{D}$ el centralizador de A en X. Si los vectores $x_0, x_1, \cdots \in X$ son linealmente independientes sobre $\mathcal{D}$ entonces, dado un elemento y de $X \setminus \{0\}$, existe un elemento a en A verificando que*

$$ax_0 = 0,$$

$$ax_1 = y$$

y

$$ax_1, ax_2, \cdots \text{ son } \mathcal{D}-\text{independientes.}$$

Pudimos con ello aislar el comportamiento de los ideales primitivos de codimensión infinita con respecto a los elementos del separador de la derivación estocástica, lo que queda plasmado en el siguiente resultado.

TEOREMA 3.7. *Para todo elemento* b *perteneciente a* $\mathcal{S}(D)$ *se verifica que*

$$\mathbb{P}[\mathrm{b} \in \bigcap_{i \in I_1} P_i] = 1,$$

donde $\{P_i\}_{i \in I_1}$ *denota la familia de todos los ideales primitivos de codimensión infinita.*

A continuación, guiados por el patrón clásico, nos dispusimos a obtener análoga información para los ideales primitivos de codimensión finita. Consideramos la sucesión proporcionada por Johnson y Sinclair para este caso e intentamos, con ella, poner en marcha de nuevo la maquinaria estocástica pero, como antes ocurriera, la sucesión no resultó ser del agrado de ésta. Sin embargo, en esta ocasión, remedios antiguos (como el obtenido en el Lema 3.5) quedaban ahora fuera de contexto.

Así pues no pudimos protegernos (como ocurriese en el caso de la codimensión infinita) del diluvio provocado por la infinitud del conjunto de los distintos términos de la sucesión "clásica", lo que nos tuvo a la deriva durante algún tiempo.

Pronto entenderíamos que lo que había que hacer era rectificar rumbo y así vislumbramos cual sería nuestro auténtico objetivo, que desgraciadamente no era tan ambicioso como el dictado desde el modelo clásico.

Gracias al siguiente lema pudimos escudriñar la información disponible para el caso de los ideales primitivos de codimensión finita.

LEMA 3.9. *Sea* $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de ideales de* A *tal que*

(i) Q_n *tiene codimensión finita,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) A/Q_n *tiene unidad,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

(iii) $Q_n + Q_m = A$, *para todo* $n \neq m$.

Entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* A *verificando que, para cada* k *en* $\mathbb{N}$,

(i) $a_k + Q_n = 0$, $n = 1, \cdots, k-1$,

(ii) $a_k + Q_n$ *es inversible,* $\forall n \geq k$,

(iii) $\|a_k\| \leq 1$.

El comportamiento de los elementos del separador de una derivación estocástica, respecto de los ideales primitivos de codimensión finita del álgebra sobre la que se define, queda recogido en el siguiente resultado. Previamente denotamos por $\{P_i\}_{i\in I_2}$ al conjunto de tales ideales primitivos.

TEOREMA 3.10. *Sea* $\mathbf{b}$ *un elemento de* $\mathcal{S}(D)$. *Entonces, para cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existe un subconjunto finito* F_ε, *de* I_2, *tal que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_2\setminus F_\varepsilon} P_i] \geq \varepsilon.$$

Tras una armoniosa conjunción de los dos teoremas anteriores llegamos por fin al final del trayecto (Teorema 3.11):

TEOREMA ALEATORIO DE JOHNSON-SINCLAIR. *Toda derivación estocástica definida sobre un álgebra de Banach semisimple es estocásticamente continua.*

Dado que las derivaciones en el sentido clásico son casos particulares de las derivaciones estocásticas obtenemos así una mejora del Teorema de Johnson y Sinclair.

Si ahora debilitamos el concepto de derivación estocástica, atendiendo al de derivación probable, la vinculación obtenida, casi al principio, de las derivaciones probables a las estocásticas permite enunciar el próximo teorema que formalmente mejora al anterior.

Corolario 3.12. *Toda derivación probable, D, definida sobre un álgebra de Banach semisimple es probablemente continua. Además la probabilidad de que D sea continua es al menos la probabilidad de que D derive.*

Llegados a buen puerto inspeccionamos un poco sus proximidades, terminando este trabajo planteándonos otro problema clásico en el marco de la continuidad automática de las derivaciones sobre un álgebra de Banach: el caso de las *derivaciones de Jordan.*

De manera análoga a como se procedió con las derivaciones estocásticas, consideramos en este momento operadores aleatorios lineales, D, definidos sobre un álgebra de Banach, A, verificando la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a] = 1, \ \forall a \in A,$$

o equivalentemente esta otra

$$\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] = 1, \ \forall a, b \in A,$$

(donde como es usual $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$); operadores aleatorios que, como es de esperar, recibirán el nombre de *derivaciones de Jordan estocásticas.* Se trata naturalmente de mostrar la continuidad estocástica de tales operadores en presencia de la semisimplicidad del álgebra.

También, en buena lógica, parece oportuno investigar el comportamiento de los operadores aleatorios lineales, D, definidos sobre el álgebra de Banach A satisfaciendo que, para cierto $0 < \delta < 1$, es

$$\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a] \geq \delta, \ \forall a \in A.$$

Mediante un nuevo "principio de aleatorización", el Teorema 3.15, se puede comprobar, de manera en absoluto trivial, que la propiedad anterior es equivalente a esta otra

$$\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] \geq \delta, \ \forall a, b \in A,$$

lo que permite considerar, asociada a cada derivación de Jordan probable D, la cantidad dada por la igualdad

$$\delta_J(D) := \inf\{\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a], \ a \in A\} =$$

$$\inf\{\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] : \ a, b \in A\}.$$

que es entendida como *la probabilidad de que D sea derivación de Jordan.*

Obviamente:

> *Una derivación de Jordan probable, D, será una derivación de Jordan estocástica si, y sólo si,*
>
> $$\delta_J(D) = 1.$$

Con con el mencionado "principio de aleatorización" también se accede al siguiente teorema.

TEOREMA 3.17. *Un operador aleatorio lineal, D, definido sobre un álgebra de Banach, A, es una derivación de Jordan probable si, y sólo si, existe un subconjunto medible Ω_0, con probabilidad mayor o igual a la probabilidad con la que D deriva, tal que el operador condicional D_{Ω_0} es una derivación de Jordan estocástica.*

El enunciado anterior pone de manifiesto que *no hay más derivaciones de Jordan probables que aquellas que se comportan como derivaciones de Jordan estocásticas sobre ciertos subconjuntos medibles, cuya probabilidad puede cuantificarse*, por lo que, análogamente a lo que antes sucediese, el estudio de la continuidad estocástica de las derivaciones de Jordan probables queda reducido al de las derivaciones estocásticas de Jordan.

Inspirados una vez más en lo acaecido en el terreno clásico probamos el siguiente resultado más general.

TEOREMA 3.23. *Sea A un álgebra de Banach semiprima. Entonces un operador aleatorio D de A en A es una derivación de Jordan estocástica si, y sólo si, es una derivación estocástica.*

A partir de la caracterización anterior clarificamos lo que sucede con las derivaciones de Jordan probables, en el caso semiprimo.

COROLARIO 3.24. *Un operador aleatorio D definido sobre un álgebra de Banach semiprima es una derivación de Jordan probable si, y sólo si, es una derivación probable, en cuyo caso la probabilidad de que D sea derivación de Jordan y la de que D sea derivación es la misma.*

La conjunción del Teorema 3.23 con el Teorema Aleatorio de Johnson-Sinclair proporciona el siguiente teorema de continuidad automática para derivaciones de Jordan estocásticas, que mejora al correspondiente resultado clásico.

COROLARIO 3.25. *Las derivaciones de Jordan estocásticas definidas sobre álgebras de Banach semisimples son estocásticamente continuas.*

En consecuencia encontramos la propiedad de continuidad satisfecha por las las derivaciones de Jordan probables.

COROLARIO 3.26. *Toda derivación de Jordan probable, definida sobre un álgebra de Banach semisimple, es probablemente continua. Además la probabilidad de que sea continua es al menos la probabilidad de que sea derivación de Jordan.*

De esta manera la famosa conjetura de Sinclair queda ahora demostrada en un ambiente más general.

No me permitiría la conciencia dejar pasar esta ocasión sin manifestar mi más profundo agradecimiento al Prof. Dr. D. Armando Reyes Villena Muñoz, quien ha hecho posible la realización de esta Memoria con la abnegada y constante guía ejercida sobre mi labor. La cantidad y calidad de su saber ha cultivado una inmensa admiración en mí y su magistral dirección ha convertido esta ardua tarea en algo realmente entrañable, fascinante y divertido.

No me resta más que expresar aquí, públicamente, mi enorme gratitud por el gran apoyo científico y sobre todo humano que este Departamento me ha prestado en todo momento.

Una inmensa carga de ilusión acrecentada por el especial estímulo recibido por parte de muchos de nuestros compañeros ha fructificado en la realidad de esta Memoria.

Granada, 1993.

Capítulo I

Operadores Aleatorios

Dedicamos este capítulo a presentar las nociones básicas de medibilidad e integrabilidad de funciones valuadas en un espacio de Banach, así como al estudio de los espacios que proporcionan estas nociones.

I.1 Funciones Medibles

En lo sucesivo, (Ω, Σ, μ) denotará un espacio de medida (positiva) y X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). El conjunto de las funciones sobre Ω con valores en el espacio de Banach X desempeñará un papel preponderante a lo largo de la presente Memoria y para las funciones de este conjunto establecemos la siguiente noción de medibilidad.

Definición 1.1. Una aplicación f de Ω en X es una *función simple* si es de la forma

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{\Omega_k},$$

donde, para cada k, los x_k son vectores de X y los Ω_k son conjuntos medibles tales que $\mu(\Omega_k) < +\infty$, siendo χ_{Ω_k} la función indicadora del conjunto Ω_k, $(1 \leq k \leq n)$.

Una *función medible* es cualquier aplicación de Ω en el espacio de Banach X que sea el límite casi por doquier[1] de una sucesión de funciones simples.

Cuando una función medible está definida sobre un espacio de probabilidad recibe el nombre especial de *variable aleatoria.*

El conjunto de todas las funciones medibles de Ω en X es denotado por $\mathcal{L}_0(\mu, X)$. Sobre este conjunto hay definidas operaciones naturales de suma y producto por escalares (las puntuales) que resultan ser leyes de composición interna y dotan a $\mathcal{L}_0(\mu, X)$ de estructura de espacio vectorial.

La noción de medibilidad que acabamos de introducir, que no es más que la extensión natural de la definición *"constructiva"* de función medible en el sentido clásico (esto es valuada en un espacio euclídeo finito dimensional), frecuentemente viene referida en los textos como *"medibilidad fuerte"* o *"de Bochner"*. De hecho, la definición que damos de variable aleatoria en el caso real valuado es simplemente la noción tradicional de variable aleatoria (hablaremos de *"variables aleatorias ordinarias"* para referirnos a este caso particular).

Quizás haya sido la definición *"descriptiva"* de función medible la que en algunas ocasiones nos haya hecho descubrir y demostrar de manera más fácil muchas de las propiedades generales de las funciones medibles en el caso clásico. Recordamos que dicha definición establecía que una función de un espacio de medida en un espacio euclídeo era medible cuando la imagen inversa de cualquier abierto del euclídeo era medible, y frecuentemente se aludía a las funciones que satisfacían tal propiedad diciendo que eran *"Borel medibles"*, en honor al autor de dicho concepto. En el caso euclídeo valuado ambas definiciones clásicas de función medible, constructiva y descriptiva, son equivalentes ([25], Teorema 5.3.A) y dan lugar a una teoría to-

[1] Como es costumbre, convenimos escribir de forma abreviada *c.p.d.* para indicar que una afirmación es cierta *casi por doquier* es decir, salvo para los elementos de un conjunto de medida nula.

talmente satisfactoria.

Sin embargo, aunque la definición de función Borel medible tiene perfecto significado cuando el espacio de Banach X no es finito dimensional, hemos de hacer notar que en este caso las funciones Borel medibles no son en general el límite puntual casi por doquier de una sucesión de funciones simples y que para colmo su comportamiento algebraico es desastroso pues, en ausencia de finitud, la clase de las variables aleatorias de Borel no es necesariamente cerrada para la suma ([6], Section 1.3.D). Queda pues justificado haber optado por el carácter constructivo en la definición de función medible.

Acordamos que, a partir de ahora, las medidas se considerarán *completas*, esto es *cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible (y en consecuencia también tiene medida cero)*. Esta asunción no es demasiado restrictiva puesto que *toda medida no completa puede completarse de manera obvia.*

Propiedades básicas de las funciones medibles, de fácil demostración, son las siguientes:

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea $f : \Omega \to X$ una función medible. Entonces:*

(i) $\|f\|$ *es medible.*

(ii) f *se anula fuera de un conjunto de medida σ-finita.*

(iii) f *es Borel medible.*

(iv) $x' \circ f$ *es medible para cada elemento x' del dual topológico, X', de X.*

En la literatura, las funciones f que verifican la propiedad *(iv)* anterior reciben el nombre de *"débilmente medibles"* o bien *"Pettis medibles."* Que las funciones medibles sean Borel medibles es una sencilla consecuencia del hecho de que las funciones simples sean medibles en el sentido de Borel, de que el límite casi por doquier de una sucesión de funciones Borel medibles de Ω en X sea una función del mismo tipo ([26], Proposition 2.1.12) y de que la medida sea completa (pues en virtud de ello las funciones que coinciden casi por doquier con una función Borel medible son Borel medibles). De otra parte, ya que al componer una función simple con una función continua se obtiene una función simple, es inmediato comprobar que:

Las funciones Borel medibles (y por tanto las medibles) son débilmente medibles.

Cuando la dimensión de X es finita también es cierto que la medibilidad débil fuerza la medibilidad, siendo pues equivalentes estos tres conceptos de funciones medibles. Por desgracia, esto no es lo que ocurre cuando la dimensión de X no es finita y fue Pettis quien consiguió caracterizar la medibilidad, desvelando la condición crucial que satisfacen todas las funciones medibles que añadida a la medibilidad débil permite obtener la medibilidad. Dicha condición es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.3. Se dice que una función, f, definida sobre un espacio de medida (Ω, Σ, μ), con valores en un espacio de Banach X, tiene *rango esencialemente separable* si toma casi todos sus valores en un subconjunto separable de X, esto es: existe un conjunto de medida nula, Ω_0, tal que $f(\Omega \setminus \Omega_0)$ es separable (es decir contiene un subconjunto numerable denso). Aunque esta es la definición que suele aparecer en los textos, nosotros utilizaremos la siguiente formulación equivalente: *f tiene rango esencialmente separable si, y sólo si, existe un subespacio cerrado separable X_0 de X tal que f toma valores en X_0 casi por doquier.*

TEOREMA 1.4. *([28], Theorem 1.1). Una aplicación es medible si, y sólo si, es débilmente medible y tiene rango esencialmente separable.*

Puesto que las funciones Borel medibles son débilmente medibles, un resultado análogo es cierto para las funciones Borel medibles.

De otra parte, no todas las funciones débilmente medibles tienen rango esencialmente separable, como mostramos seguidamente.

EJEMPLO 1.5. Consideremos el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{R})$ de las familias de números complejos con índices en $\mathbb{R}$ de cuadrado sumable y sea $\{e_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ la base ortonormal usual de $l_2(\mathbb{R})$. La aplicación

$$f : \mathbb{R} \to l_2(\mathbb{R})$$

definida por

$$f(t) = e_t$$

es débilmente medible, pues para cada x en $l_2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$(f(t) \mid x) = 0 \text{ para casi todo real } t,$$

mientras que la aplicación f no puede ser medible ya que la dimensión hilbertiana de $f(A)$ coincide con el cardinal de A, para cualquier subconjunto medible A de $\mathbb{R}$, lo que prueba que f no puede tener rango esencialmente separable.

Del Teorema de Pettis también se deduce que para funciones valuadas en un espacio de Banach separable vuelve a presentarse la agradable situación que teníamos en el caso clásico:

COROLARIO 1.6. *Sea f una función de un espacio de medida en un espacio de Banach separable. Entonces:*

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow f \text{ Borel medible} \Leftrightarrow f \text{ Pettis medible.}$$

Aprovechamos la ocasión para hacer notar que si bien al tratar con una única función medible, $f : \Omega \to X$, no es restrictivo considerar que X es separable (¡identifíquese X con el espacio de Banach generado por la imagen de f!), no hemos de dejarnos llevar por la euforia y afirmar que "a la hora de estudiar el conjunto de las funciones medibles de Ω en X no se pierde generalidad si se supone que

X es separable". ¡Nada más lejos de la realidad que creer en la posible identificación de cada subespacio de Banach separable que sea imagen de alguna función medible de Ω en X, con un único espacio separable X (imagen común de todas estas funciones medibles)!. La mayoría de los autores, al estudiar las funciones medibles, prefieren restringirse al caso separable por las muchas ventajas que en él se obtienen (todos los conceptos de medibilidad coinciden) pero quizás no quede suficientemente claro en algunos textos que ello se hace a costa de no estudiar el caso no separable (ver por ejemplo [24]). Nosotros vamos a trabajar en este último ambiente más general y, en el capítulo III, nos será imprescindible, para obtener los resultados estelares de este trabajo, sintetizar la esencia de esta realidad expuesta acerca de la separabilidad de la imagen de las funciones medibles. Esto lo conseguimos en el Lema 3.4 y confesamos que no sin esfuerzo.

Ahora nos disponemos a presentar el concepto de integral de una función medible con valores en un espacio de Banach. La noción, debida a Bochner, es una simple traslación de la definición de la integral Lebesgue a este nuevo ambiente.

DEFINICIÓN 1.7. Sea $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{\Omega_k}$ una función simple. Se define la *integral* de f (relativa a la medida μ) como

$$\int f d\mu := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(\Omega_k).$$

Observemos que esta definición no depende de la elección efectuada entre las posibles particiones de Ω que dieran lugar a la función f.

Se dice que una función f de Ω en X es *integrable* (respecto de la medida μ) si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de Ω en X, que sea convergente casi por doquier a f, y de manera que

$$\int \|f_n - f_m\| d\mu \to 0, \textit{ cuando } n, m \to \infty,$$

o equivalentemente tal que

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0, \ \textit{cuando}\ n \to \infty.$$

Se comprueba entonces que la sucesión $\{\int f_n d\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier otra sucesión de funciones simples verificando las condiciones anteriores, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Este valor, se conoce como *integral (de Bochner)* de f (respecto de la medida μ) y se denota por

$$\int f d\mu.$$

El conjunto de las funciones integrables de Ω en X es denotado por $\mathcal{L}_1(\mu, X)$.

Si Ω_0 es un subconjunto medible, diremos que la aplicación f de Ω en X es *integrable en* Ω_0 si $\chi_{\Omega_0} f$ es integrable definiendo, si este es el caso, el valor de la *integral de* f *en* Ω_0 como

$$\int_{\Omega_0} f d\mu := \int \chi_{\Omega_0} f d\mu.$$

Es sabido ([26], Proposition 2.3.6) que:

Cualquier función integrable es integrable en cualquier subconjunto medible.

En la siguiente proposición reccgemos las propiedades más conocidas de las funciones integrables, que no son más que una herencia de las correspondientes propiedades de la integral de las funciones simples ([26], Proposition 2.3.7).

Proposición 1.8.

(i) *$\mathcal{L}_1(\mu, X)$ es un espacio vectorial. Además si f y g son funciones de este espacio y α y β son escalares arbitrarios, se verifica que $\alpha f + \beta g$ es integrable siendo*

$$\int(\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

(ii) *$\|f\|$ es integrable y $\|\int f d\mu\| \leq \int \|f\| d\mu$.*

(iii) *Si T es un operador lineal y continuo de X en otro espacio de Banach Y entonces $T \circ f$ es un elemento de $\mathcal{L}_1(\mu, Y)$ y*

$$\int T \circ f d\mu = T\left(\int f d\mu\right).$$

(iv) *Si f es integrable entonces, $\forall M > 0$, el conjunto*

$$\Omega_M := \{\omega \in \Omega : \ \|f(\omega)\| \geq M\}$$

es de la forma $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son conjuntos medibles tales que $\mu(\Omega_1) < +\infty$ y $\mu(\Omega_2) = 0$.

El espacio vectorial de todas las funciones integrables puede dotarse de la topología vectorial dada por la seminorma

$$\|f\|_1 = \int \|f\| d\mu.$$

Proposición 1.9. *([26], Corollaire 2.3.11). Una aplicación f de Ω en X es cero casi por doquier si, y sólo si, es integrable y $\|f\|_1 = 0$.*

En particular se obtiene que:

> *Si f es una función integrable y g es otra función que coincide con f casi por doquier entonces g es integrable y $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

El siguiente teorema ([26], Théorème 2.4.7) que constituye uno de los más grandes logros de la Teoría de Integración, es un famoso resultado de Lebesgue con el que se garantiza la igualdad

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

bajo condiciones muy generales.

TEOREMA 1.10. *(de la Convergencia Dominada). Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones (de* Ω *en* X*) integrables convergente casi por doquier a una función* f*. Supongamos que existe una función integrable* g*, definida sobre* Ω*, real valuada y no negativa tal que*

$$\|f_n\| \leq g, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces f *es integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - f_n\| d\mu = 0,$$

lo que implica en particular que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu.$$

Una primera consecuencia del teorema anterior es la siguiente caracterización de función integrable que nos proporciona la definición de integrabilidad que se suele dar en muchos textos (ver por ejemplo [16]).

TEOREMA 1.11. *Una función* $f : \Omega \to X$ *es integrable si, y sólo si, es medible y* $\|f\|$ *es integrable.*

Otra consecuencia fundamental del Teorema de la Convergencia Dominada es el siguiente resultado, de Fischer y Riesz, que proporciona la complitud del espacio de las funciones integrables.

TEOREMA 1.12. *(Fisher-Riesz). Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables que sea de Cauchy en media, esto es*

$$\int \|f_n - f_m\| d\mu \to 0, \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Existe entonces una función integrable f tal que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en media a f, esto es

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

I.2 Espacios de Variables Aleatorias

En el espacio vectorial $\mathcal{L}_0(\mu, X)$ de las funciones medibles existe una importante noción de convergencia que, como su mismo nombre indica, es propia de este espacio:

DEFINICIÓN 1.13. Una sucesión de funciones medibles de Ω en X *converge en medida* a otra función medible f de Ω en X si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mu[w : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| > \varepsilon] = 0.$$

Cuando la medida es finita, la aplicación

$$\|f\|_0 = \int_\Omega \frac{\|f(\omega)\|}{1 + \|f(\omega)\|} d\mu(\omega), \ \forall f \in \mathcal{L}_0(\mu, X)$$

define una paranorma en $\mathcal{L}_0(\mu, X)$, como se comprueba de manera elemental. Igual de fácil resulta demostrar que la convergencia asociada a dicha paranorma es precisamente la convergencia en medida antes definida. De esta manera ([11], Section II.I.3):

La convergencia en medida es la asociada a una topología vectorial en la que los conjuntos de la forma

$$U_{\varepsilon,\varepsilon} := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu, X) : \mu[\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| > \varepsilon] < \varepsilon\}, \ 0 < \varepsilon < 1,$$

constituyen un sistema fundamental de entornos de cero.

Sin embargo ([26], Exercice 4.9.7):

Cuando la medida no es finita, la convergencia en medida no es compatible con la estructura vectorial de $\mathcal{L}_0(\mu, X)$.

Ni tan siquiera cuando la medida es σ-finita y el espacio X es tan particular como $\mathbb{R}$, el producto por escalares de $\mathcal{L}_0(\mu, X)$ ha de ser continuo, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.14. Sea λ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y denotemos por $\mathbf{i}$ a la función identidad de $\mathbb{R}$. Ya que

$$\lambda(\{x : |\frac{\mathbf{i}(x)}{n}| > \varepsilon\}) = \lambda(]-\infty, n\varepsilon[\cup]n\varepsilon, \infty[) = +\infty,$$

es obvio que la sucesión $\{\frac{\mathbf{i}}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede converger a cero en medida.

Desde este instante trabajaremos sólo con medidas finitas, por lo que no resultará nada restrictivo suponer que éstas son de hecho probabilidades. De esta manera, en lo sucesivo, los espacios de medida que utilizaremos serán de la forma $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ donde $\mathbb{P}$ *denotará una medida de probabilidad* y, en concordancia con la terminología adoptada, hablaremos de *"variables aleatorias"* en lugar de *"funciones medibles"*.

Consideremos pues el espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ de todas las variables aleatorias del espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ en el espacio de Banach X. Asociada a dicho espacio tenemos la paranorma

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \int_\Omega \frac{\|\mathbf{x}(\omega)\|}{1 + \|\mathbf{x}(\omega)\|} d\mathbb{P}(\omega), \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X),$$

que no es total (dicho de otro modo $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ no es separado). De hecho

$$\|\mathbf{x}\|_0 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \textit{ casi seguramente},$$

por lo que el espacio vectorial cociente de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ por la relación de equivalencia

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} \textit{ casi seguramente},$$

se convierte, de manera natural, en un espacio vectorial topológico metrizable que denotaremos por $L_0(\mathbb{P}, X)$.

La complitud de $L_0(\mathbb{P}, X)$ se deduce de la complitud de X ([24], Section 2.1, o bien [11], Section 2.3.1) y de esta manera, adoptando como es habitual el calificativo de *F-espacio* para designar a los espacios vectoriales topológicos metrizables y completos, la estructura de $L_0(\mathbb{P}, X)$ queda codificada en el siguiente enunciado.

TEOREMA 1.15. *$L_0(\mathbb{P}, X)$ tiene estructura de F-espacio.*

Sin embargo hemos de decir que a pesar de la proximidad existente entre la estructura de F-espacio y la de espacio de Banach (los F-espacios gozan de la mayoría de las propiedades importantes que tienen los espacios de Banach) no siempre se puede asegurar que la topología de $L_0(\mathbb{P}, X)$ proviene de una norma pues, como se deduce del siguiente resultado (ver [5], Theorem 15.8), cuando $\mathbb{P}$ toma valores arbitrariamente pequeños $L_0(\mathbb{P}, X)$ no es localmente acotado, luego tampoco puede ser normable.

TEOREMA 1.16. *Si $\mathbb{P}$ toma valores arbitrariamente pequeños y V es cualquier entorno de cero en $L_0(\mathbb{P}, X)$ entonces existe un vector no nulo, u, tal que*

$$\{\alpha u : \alpha \in \mathbb{K}\} \subset V.$$

Además, podemos imponer condiciones sobre $\mathbb{P}$ que conviertan al espacio $L_0(\mathbb{P}, X)$ en un ejemplo de F-espacio que no es localmente convexo, como muestra el siguiente teorema donde se consigue provocar en $L_0(\mathbb{P}, X)$ una patología que nunca se presentaría si dicho espacio fuese localmente convexo (adáptese [5], Theorem 15.10 y Corollary 33.13).

TEOREMA 1.17. *Si para cada ε positivo se verifica que cada conjunto medible es expresable como unión finita de conjuntos de probabilidad menor que ε, entonces el único funcional lineal continuo de $L_0(\mathbb{P}, X)$ es el constantemente igual a cero.*

EJEMPLO 1.18. Espacios de medida que satisfagan las hipótesis de los teoremas anteriores pueden ser tan familiares como $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ donde, como siempre, λ denota la medida de Lebesgue.

Obviamente, los resultados anteriores son trasladables a $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ concluyéndose que este último espacio no tiene por qué ser seminormable ni localmente convexo. Las peculiaridades de $L_0(\mathbb{P}, X)$ anteriormente expuestas junto con otras de tipo algebraico que se obtendrán, en la siguiente sección, al sustituir el espacio de Banach X por un álgebra de Banach, dan al espacio $L_0(\mathbb{P}, X)$ merecida fama de ser un útil contraejemplo, por las muchas propiedades que no posee, a la vez que $L_0(\mathbb{P}, X)$ resulta ser uno de los más preciados ejemplos en los que los hechos clásicos de la Teoría de la medida encajan perfectamente en el marco algebraico topológico del espacio.

Cada espacio de Banach X puede verse, de manera natural, como un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$, mediante la identificación de cada elemento x de X con la variable aleatoria definida como

$$\mathbf{x}(\omega) = x, \ \forall \omega \in \Omega,$$

de ahí que el espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ responda a la idea intuitiva de *"aleatorización"* del espacio de Banach X. (Hemos denotado a las variables aleatorias de la misma manera que a los elementos del espacio de Banach donde toman sus valores, con la salvedad de que las variables aleatorias se escriben en negrita, para disponer de una notación que evidencie la identificación anterior).

Al hablar de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ es obligado hacer mención a sus subespacios más importantes dado que aún en el caso más trivial, $X = \mathbb{R}$, constituyen un instrumento muy interesante para la investigación tanto de problemas propios de la Teoría de Probabilidad como del Análisis. Claro está que, para cada real positivo r, nos referimos al el espacio $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$ de todas las variables aleatorias de Ω en X que tienen *momento r-ésimo* finito, esto es

$$\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X) : \int_\Omega \|\mathbf{x}\|^r d\mathbb{P} < \infty\}.$$

Los espacios $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$ disponen, aparte de la topología que heredan de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$, de su propia e innata topología que es la asociada a la paranorma dada por

$$\|\mathbf{x}\|_r = \int_\Omega \|\mathbf{x}\|^r d\mathbb{P}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X),$$

cuando $0 < r < 1$, mientras que si $r \geq 1$ es la asociada a la paranorma definida por

$$\|\mathbf{x}\|_r = \left(\int_\Omega \|\mathbf{x}\|^r d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{r}}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X),$$

([11], Section II.2.2).

Cuando una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$ converge a una variable aleatoria $\mathbf{x}$ en la topología propia de este espacio (esto es $\{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_r\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$) se dice que $\mathbf{x}_n$ *converge* a $\mathbf{x}$ en *media r-ésima.*

Análogamente a lo que sucede en el caso real-valuado, existe un caso extremo, denotado por $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, X)$, que es el espacio de las variables aleatorias $\mathbf{x}$ *esencialmente acotadas*, es decir tales que

$$\inf\{M \in \overline{\mathbb{R}} : \|\mathbf{x}\| \leq M \ c.p.d.\} < \infty.$$

La topología propia del espacio $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, X)$ viene dada por la seminorma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \inf\{M \in \overline{\mathbb{R}} : \|\mathbf{x}\| \leq M \ c.p.d.\}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{P}, X).$$

Es fácil comprobar que dado $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se verifica que $\|\mathbf{x}\|_r = 0$ *si, y sólo si,* $\mathbf{x}$ *se anula salvo en un conjunto de medida nula.* Sea pues

$$N(\mathbb{P}) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X) : \ \mathbf{x} = 0 \ c.p.d.\}.$$

Trivialmente $N(\mathbb{P})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$ y el espacio cociente $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)/N(\mathbb{P})$ es lo que, a partir de ahora, denominaremos $L_r(\mathbb{P}, X)$.

Si denotamos por $[\mathbf{x}]$ a la clase de equivalencia del elemento $\mathbf{x}$ de $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$, se comprueba de manera inmediata que la norma cociente de $[\mathbf{x}]$ es precisamente $\|\mathbf{x}\|_r$. Aplicando el conocido *"Teorema de Fisher y Riesz"* [26], Théorème 4.2.5, tenemos asegurada la complitud de $\|\cdot\|_r$, por lo que se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.19 . *$L_r(\mathbb{P}, X)$ tiene estructura de F-espacio cuando $0 \leq r < 1$ y de espacio de Banach si $r \geq 1$ ó $r = \infty$.*

En la mente de todos está considerar a los elementos de $L_r(\mathbb{P}, X)$ como si de variables aleatorias se tratase (en lugar de "clases " de variables aleatorias), pero eso sí, con la identificación de las que coinciden casi por doquier.

La relación conjuntista que hay entre todos estos espacios la codificamos así:

$$L_0(\mathbb{P}, X) \supset L_r(\mathbb{P}, X) \supset L_s(\mathbb{P}, X) \supset L_\infty(\mathbb{P}, X), \ \forall 0 < r < s < \infty.$$

Tales inclusiones pueden ser estrictas pues, por ejemplo, la clase de la variable aleatoria

$$\mathbf{x}_\alpha(\omega) = \frac{1}{\omega^\alpha}, \ \forall \omega \in (0,1),$$

donde α es un real positivo, pertenece al clásico espacio de Lebesgue de las variables aleatorias sobre el intervalo $(0,1)$, comúnmente denotado por $L_0(0,1)$, y si $0 < r < s \leq \infty$ y $r < \frac{1}{\alpha} < s$ entonces la clase de $\mathbf{x}$ pertenece a $L_r(0,1)$ y no pertenece a $L_s(0,1)$.

Ahora procedemos a relacionar todos los tipos de convergencias de variables aleatorias que han aparecido a lo largo de esta Memoria, entendiendo que cuando comparamos dos convergencias tratamos con sucesiones cuyos términos pertenecen a determinado subespacio sobre el que están definidas todas las convergencias consideradas.

El siguiente resultado es una sencilla consecuencia de la Desigualdad de Hölder (ver [25], Proposition 4.5.7).

PROPOSICIÓN 1.20. *La convergencia en media s-ésima fuerza la convergencia en media r-ésima para* $0 < r < s$.

Como enunciamos a continuación, el caso degenerado de la proposición anterior también es cierto (ver [26], Proposition 4.5.7).

PROPOSICIÓN 1.21. *La convergencia en la norma* $\|\cdot\|_\infty$ *implica la convergencia en media r-ésima.*

PROPOSICIÓN 1.22. *([4], Theorem 7.1.5). La convergencia en media r-ésima es más fuerte que la convergencia en probabilidad.*

PROPOSICIÓN 1.23. *([16], Theorem 3.5.1). La convergencia casi por doquier fuerza la convergencia en probabilidad.*

Por último observamos que:

PROPOSICIÓN 1.24. *La convergencia en la norma* $\|\cdot\|_\infty$ *implica la convergencia casi por doquier.*

Los resultados anteriores permiten confeccionar el siguiente diagrama que seguramente clarifica la situación:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{converg. en } \|\cdot\|_\infty} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{converg. c.p.d.}} \arrow[dd, Rightarrow] \\
\boxed{\text{converg. } \|\cdot\|_s} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{converg. } \|\cdot\|_r,\ 0 < r < s} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{converg. en prob.}}
\end{tikzcd}$$

Tomemos la sucesión formada por las clases de las variables aleatorias ordinarias dadas por

$$\mathbf{x}_n(\omega) = \begin{cases} n^\alpha & \text{si} \quad 0 \leq \omega < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

Esta sucesión converge casi por doquier a cero y no converge en media r-ésima, si tomamos $\alpha > \frac{1}{r}$. Además, dados $0 < r < s$, eligiendo en el ejemplo anterior $r < \frac{1}{\alpha} < s$ podemos concluir que la convergencia en media r-ésima no fuerza la convergencia en media s-ésima.

Consideremos ahora los subconjuntos de $\Omega = [0,1]$ obtenidos de la siguiente manera: expresamos cada natural n de la forma

$$n = 2^{k-1} + j, \; k \in \mathbb{N}, \; 0 \leq j < 2^{k-1},$$

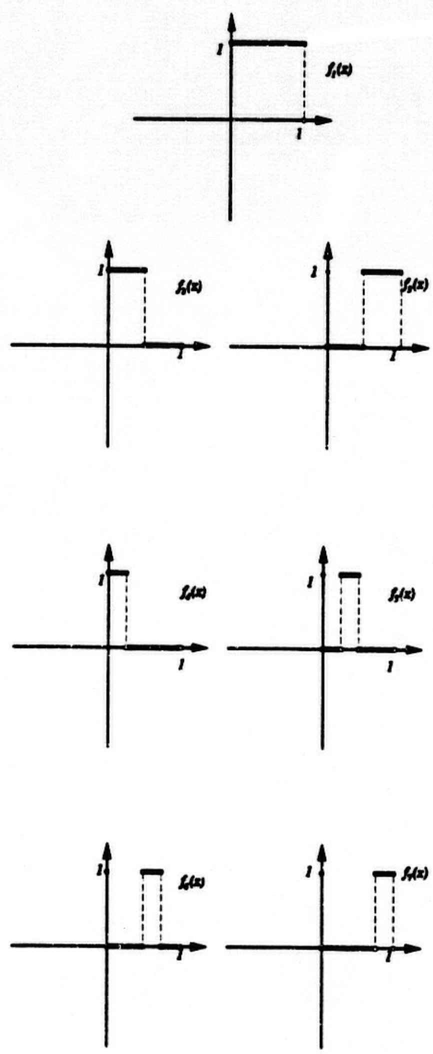
y definimos

$$\Omega_n = [\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}].$$

La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de término general

$$f_n = \chi_{\Omega_n},$$

esto es la sucesión de funciones cuyas gráficas presentamos a continuación



converge a cero en media r-ésima y no converge casi por doquier a cero (concretamente no converge a cero para ningún elemento del intervalo $[0,1]$).

Estos contraejemplos son todos los que se necesitan para poder afirmar que:

> *No hay más relaciones entre las nociones de convergencia de sucesiones de variables aleatorias Banach valuadas del diagrama anterior que las que allí aparecen.*

Aunque se ha dado un contraejemplo que prueba que la convergencia casi por doquier no fuerza la convergencia en media, es conveniente recordar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.25. *([26], Proposition 2.3.10). De toda sucesión de funciones de $\mathcal{L}_1(\mu, X)$ convergente en la norma $\|\cdot\|_1$, puede extraerse una sucesión parcial convergente casi por doquier hacia el mismo límite.*

Por último comentamos que *cada subespacio $L_s(\mathbb{P}, X)$ es denso en $L_r(\mathbb{P}, X)$*, para cada r y s en la situación $0 \leq r < s \leq \infty$. Esto se debe a que *el subespacio de las clases de las variables aleatorias simples es un subespacio denso en $L_r(\mathbb{P}, X)$ respecto de la paranorma $\|\cdot\|_r$* ([11], pág. 111).

Pero, a pesar de ello, los subespacios $L_r(\mathbb{P}, X)$ pudieran ser muy pequeños dentro de $L_0(\mathbb{P}, X)$, puesto que el conjunto $\bigcup_{r>0} L_r(\mathbb{P}, X)$ puede ser de primera categoría en $L_0(\mathbb{P}, X)$, y ello ha de tenerse en cuenta si alguna vez nos restringimos a ellos con la intención de obtener alguna ventaja adicional (como la de disponer de una norma, si $r \geq 1$).

Por citar algún ejemplo que corrobore la afirmación anterior, presentamos la siguiente proposición donde, como es habitual, λ denota la medida de Lebesgue.

Proposición 1.26. *El espacio* $\bigcup_{r>0} L_r(\lambda, \mathbb{K})$ *es de primera categoría en* $L_0(\lambda, \mathbb{K})$.

Demostración. Sea $r > 0$. Dado que $L_r(\lambda, \mathbb{K})$ está estrictamente contenido en $L_0(\lambda, \mathbb{K})$, es obvio que la inyección de $L_r(\lambda, \mathbb{K})$ en $L_0(\lambda, \mathbb{K})$ es una aplicación lineal y continua que no puede ser sobreyectiva luego, por el Teorema de la Aplicación Abierta ([31], Teorema 2.11), $L_r(\lambda, \mathbb{K})$ no puede ser de segunda categoría en $L_0(\lambda, \mathbb{K})$. Esto prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{\frac{1}{n}}(\lambda, \mathbb{K})$ es de primera categoría en $L_0(\lambda, \mathbb{K})$ (por ser unión numerable de conjuntos que lo son) pero, trivialmente,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_{\frac{1}{n}}(\lambda, \mathbb{K}) = \bigcup_{r>0} L_r(\lambda, \mathbb{K}).$$

∎

Para terminar la sección recordamos que si $\mathbf{x}$ es una variable aleatoria integrable, el valor de su integral es lo que comúnmente se denomina *esperanza* de la variable aleatoria $\mathbf{x}$ y, como es usual, se denota por $\mathbb{E}(\mathbf{x})$, esto es

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \mathbf{x}\, d\mathbb{P}.$$

La terminología que acabamos de introducir permitirá redefinir, para cada real positivo r, el espacio $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$ como el conjunto de las variables aleatorias $\mathbf{x}$ tales que $\mathbb{E}(\|\mathbf{x}\|^r) < \infty$.

De particular interés es el momento de segundo orden de una variable aleatoria $\mathbf{x}$ respecto de su esperanza, que es la conocida *varianza* de $\mathbf{x}$,

$$Var(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})\|^2).$$

Las variables aleatorias con varianzas finitas se llaman *variables aleatorias de segundo orden.* Obviamente, tales variables no son más que los elementos de $\mathcal{L}_2(\mathbb{P}, X)$.

I.3 Algebras de Variables Aleatorias

El estudio de las variables aleatorias valuadas en álgebras de Banach es de gran importancia en la Teoría de Ecuaciones Aleatorias ([6], [37]). Por esta razón han sido consideradas extensivamente y en diversos ambientes, como el de las C^*-álgebras o el de las H^*-álgebras asociativas ([6], [13], [14], [33], [37]).

A lo largo de la presente sección A será un álgebra de Banach y $L_0(\mathbb{P}, A)$ el F-espacio de las clases de equivalencia de las variables aleatorias del espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ en A, mediante la relación que identifica a las variables aleatorias que coinciden casi por doquier. Dadas dos variables aleatorias $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ sabemos que, por definición, han de existir sendas sucesiones de variables aleatorias simples $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathbf{b}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes casi por doquier a los elementos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente. Puesto que $\{\mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi por doquier al producto $\mathbf{ab}$, tratándose de una sucesión de variables aleatorias obviamente simples, se deduce que *el producto puntual de variables aleatorias es una ley de composición interna en* $L_0(\mathbb{P}, A)$, que afortunadamente convivirá en perfecta armonía con la topología ya existente; coexistencia que resultará aún más familiar en el caso particular de que el álgebra A sea $\mathbb{R}$ [5], Theorem 15.7.

Proposición 1.27. *El producto de variables aleatorias es una aplicación continua de* $L_0(\mathbb{P}, A) \times L_0(\mathbb{P}, A)$ *en* $L_0(\mathbb{P}, A)$.

Demostración. Dado que $L_0(\mathbb{P}, A)$ es un F-espacio, por la bilinealidad del producto de variables aleatorias, bastará demostrar la continuidad separada de éste [31], Teorema 2.17. Para ello, sea $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias convergente a cero en probabilidad, sea $\mathbf{b}$ otra variable aleatoria y ε un real positivo. Para cada $r > 0$ se tiene que[(2)]

$$\mathbb{P}[\|\mathbf{a}_n\mathbf{b}\| > \varepsilon] \leq \mathbb{P}[\|\mathbf{a}_n\|\|\mathbf{b}\| > \varepsilon] =$$

[(2)] Como es habitual $\mathbb{P}[\Omega_0, \Omega_1]$ denota la probabilidad del conjunto medible $\Omega_0 \cap \Omega_1$.

$$\mathbb{P}[\|\mathbf{a_n}\|\|\mathbf{b}\| > \varepsilon, \|\mathbf{b}\| \leq r] + \mathbb{P}[\|\mathbf{a_n}\|\|\mathbf{b}\| > \varepsilon, \|\mathbf{b}\| > r] \leq$$
$$\mathbb{P}[\|\mathbf{a_n}\| > \frac{\varepsilon}{r}] + \mathbb{P}[\|\mathbf{b}\| > r],$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbf{a_n b}\| > \varepsilon] \leq$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbf{a_n}\| > \frac{\varepsilon}{r}] + \mathbb{P}[\|\mathbf{b}\| > r] =$$
$$\mathbb{P}[\|\mathbf{b}\| > r].$$

Como quiera que

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbf{b}\| > r] = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbf{a_n b}\| > \varepsilon] = 0,$$

esto es, la convergencia en probabilidad a cero de la sucesión $\{\mathbf{a_n b}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto, la continuidad respecto de la primera variable.

Análogamente se comprueba la continuidad respecto de la segunda variable. ∎

$L_0(\mathbb{P}, A)$ es pues un buen ejemplo de lo que se conoce con el nombre de *álgebra topológica*, más concretamente una *F-álgebra* en la tradición de la escuela polaca.

El álgebra A puede verse como una subálgebra de $L_0(\mathbb{P}, A)$ mediante la identificación que conocemos de vectores con variables aleatorias ($\mathbf{a}(\omega) = a$, $\forall\omega \in \Omega$). Sin embargo, la estructura algebraica de $L_0(\mathbb{P}, A)$ hace aún más patente el caracter anárquico de este espacio en lo que a sus propiedades analíticas respecta y a título de ejemplo establecemos la siguiente proposición que resulta de una adaptación de [5], Proposition 15.11. Para ello, supóngase que el álgebra A tiene unidad. Trivialmente dicha unidad, vista como variable aleatoria, constituye una unidad en el espacio $L_0(\mathbb{P}, A)$ obteniéndose la consiguiente definición de *variable aleatoria inversible*.

PROPOSICIÓN 1.28. *Si* $\mathbb{P}$ *toma valores arbitrariamente pequeños entonces el grupo de los elementos inversibles de* $L_0(\mathbb{P}, A)$ *no es abierto (dicho de otro modo,* $L_0(\mathbb{P}, A)$ *no es una Q-álgebra).*

De esta manera a partir de la estructura algebraica de $L_0(\mathbb{P}, A)$ obtenemos una prueba alternativa (ver Teorema 1.16) del hecho de que este espacio no siempre es normable, puesto que sabemos que la topología de $L_0(\mathbb{P}, A)$ es completa y la tesis de la proposición anterior no podría darse si dicha álgebra fuese de Banach ([5], Corollary 50.5).

No se necesita saber más sobre el álgebra $L_0(\mathbb{P}, A)$ para poder seguir esta Memoria, salvo cuestiones relativas a la semiprimidad de dicha álgebra (en el caso de que A tenga tal propiedad) que abordaremos cuando dispongamos de las herramientas necesarias.

I.4 OPERADORES ALEATORIOS

Históricamente, por operador aleatorio se entendió *cualquier variable aleatoria valuada en una colección de operadores.* Concretamente, si X e Y son dos espacios de Banach y denotamos por $BL(X,Y)$ el espacio de Banach de todos los operadores lineales y continuos de X en Y, los operadores aleatorios eran concebidos como variables aleatorias con valores en $BL(X,Y)$. Sin embargo diversas aplicaciones de la teoría requirieron un concepto más amplio de operador aleatorio de manera que el estudio de éstos no se reduzca en general al de las variables aleatorias valuadas en un espacio de Banach ([6], Chapter 2). Surge así la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.29. Sean X e Y dos espacios de Banach y $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se llama *operador aleatorio* de X en Y a cualquier operador de X en $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$.

También resulta familiar la formulación de los operadores aleatorios como aplicaciones de la forma

$$T : \Omega \times X \to Y$$

tales que sus *"trazas"* son medibles, esto es las aplicaciones T_x dadas por $T_x(\omega) = T(x,\omega)$ son elementos de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, para todo x de X.

En el Análisis Aleatorio cabe hablar de dos tipos de propiedades: las denominadas *"muestrales"* y las llamadas *"estocásticas"*. Las primeras son aquellas que hacen referencia a las *"muestras"* del operador, es decir a los operadores resultantes de fijar los distintos elementos ω de Ω. En contraposición, las propiedades estocásticas son de naturaleza intrínsecamente aleatoria, por dejar libre a la componente ω, recayendo ahora el énfasis sobre la variable x.

Es justo advertir que en general las propiedades estocásticas son más débiles que las correspondientes muestrales. Nuestro interés radicará siempre en las propiedades estocásticas y es aquí donde empiezan a surgir dificultades con la aplicación la teoría clásica del Análisis Funcional pero pronto veremos que es posible recapturar (con las limitaciones propias del caso) algunos resultados importantes de dicha teoría, en este ambiente más general.

Es obvio que todo operador aleatorio de X en Y puede verse, de manera natural, como un operador de X en $L_0(\mathbb{P}, Y)$, siendo frecuentemente más cómoda esta concepción que la propia definición. En lo sucesivo esta consideración será llevada a cabo siempre que interese y sin mención previa alguna.

DEFINICIÓN 1.30. Se dirá que un operador aleatorio T de X en Y es *lineal* si se satisface que

$$\mathbb{P}[T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)] = 1,$$

para cualesquiera vectores x, y de X y cualesquiera escalares α, β; esto es la linealidad de T visto como operador $L_0(\mathbb{P}, Y)$-valuado.

Como quiera que la suma y el producto por escalares, obviamente definidos, de operadores aleatorios entre los espacios de Banach X e Y resultan ser nuevos operadores aleatorios de X en Y, el conjunto de éstos está provisto de una estructura natural de *espacio vectorial.*

EJEMPLOS 1.31.

(i) *Operadores deterministas.* Todo operador definido de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y puede concebirse, trivialmente, como un operador aleatorio considerando para ello la probabilidad trivial.

(ii) *Operadores clásicos.* Cada variable aleatoria

$$\mathbf{T} : \Omega \to BL(X, Y)$$

da lugar obviamente a un operador aleatorio T de X en Y mediante la redefinición

$$T(x)(\omega) = \mathbf{T}(\omega)(x), \ \forall x \in X, \ \omega \in \Omega.$$

La linealidad que se obtiene para un operador aleatorio de este tipo es muestral en el sentido de que, para casi todo ω de Ω, el correspondiente operador muestra, $\mathbf{T}_\omega$, es lineal. La diferencia de esta linealidad clásica con la linealidad estocástica de nuestros operadores aleatorios es muy sutil. La linealidad para un operador aleatorio T, de X en Y, significa la existencia, para cada par de vectores x, y de X y cada par de escalares α y β, de un subconjunto medible $\Omega_{x,y,\alpha,\beta}$, de probabilidad uno, tal que, para cada ω de $\Omega_{x,y,\alpha,\beta}$, se verifica la identidad

$$T(\omega, \alpha x + \beta y) = \alpha T(\omega, x) + \beta T(\omega, y).$$

Pero, obviamente, no tiene por qué existir, como ocurre en el caso clásico, un subconjunto medible Ω_0 que unifique a todos los $\Omega_{x,y,\alpha,\beta}$. Buena prueba de ello la proporciona el siguiente ejemplo donde se consigue un operador aleatorio que no puede verse como variable aleatoria (pues la igualdad anterior no se satisface para ningún ω de Ω). En este momento la expresion *"casi seguramente"* adquiere toda su relevancia y en lineas generales es aquí donde reside cierta parte de la problemática de trabajar con los operadores aleatorios, propiamente dichos.

(iii) Consideremos la medida de Lebesque definida sobre el intervalo $[0,1]$, y el espacio de Banach X de todas las funciones absolutamente continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ (dotado con la norma de la variación (ver [38]). Dados x en X y ω en $[0,1]$ definimos un operador aleatorio T, de X en $\mathbb{R}$, como

$$T(x)(\omega) = \begin{cases} x'(\omega) & \textit{si } x \textit{ es diferenciable en } \omega \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

(iv) *Operadores de integración estocástica.* Tales operadores son los que aparecen en las ecuaciones estocásticas (ver [6], Chaps. 4-7; [37], pág.1,) y proporcionan una amplia gama de ejemplos de operadores aleatorios lineales (y también no lineales) que en muchos casos son probabilísticamente análogos, en algún sentido, a los correspondientes operadores de integración clásicos. Dentro de ellos merecen especial mención, por sus múltiples aplicaciones, los *operadores aleatorios de integración respecto de un proceso de Wiener* que sin duda fueron unos de los primeros ejemplos en poner de manifiesto que el concepto de operador aleatorio clásico era insuficiente, no siendo pues reducible el estudio de los operadores aleatorios al de las variables aleatorias. Por tanto estamos ante un ejemplo de operador aleatorio que no es clásico, como puede verse detalladamente en [37][(3)].

(v) *Operadores diferencia aleatorios.* Un operador diferencia aleatorio, T, es un operador aleatorio de l_2 en sí mismo definido como sigue

$$T[x_k](\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\omega)\tau^i[x_k],$$

donde τ^i denota el operador traslación

$$\tau^i[x_k] = x_{k+1}, \; i = 0, 1, \cdots, n,$$

(3) No entramos aquí en pormenores a este respecto pensando que la dificultad que entraña la integración estocástica nos haría perder el hilo conductor de la Memoria, sin que ello sirviera de aportación alguna al caso.

y los coeficientes $a_i(\omega)$ son variables aleatorias reales.

Los operadores diferencia aleatorios aparecen en el estudio de diversos procesos estocásticos con parámetros discretos, útiles en Ingeniería. También se usan en el estudio de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales aleatorias.

(vi) *Operadores diferenciales ordinarios aleatorios.* Sea $C^{(n)}[a,b]$ el espacio de todas las funciones de variable real, definidas en el intervalo $[a,b]$, que son de clase n. Los operadores diferenciales ordinarios aleatorios son los operadores aleatorios T de $C^{(n)}[a,b]$ en $C[a,b]$ definidos de la siguiente manera,

$$T[x(t)](\omega) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\omega) d^k x/dt^k,\ t \in [a,b],$$

donde los coeficientes $a_k(\omega)$ son variables aleatorias ordinarias. En algunas aplicaciones también se consideran los coeficientes $a_k(\omega)$ como variables aleatorias $C[a,b]$-valuadas.

(vii) *Operadores en derivadas parciales aleatorios.* Un ejemplo de tales operadores es el operador aleatorio de *Helmholtz* que aparece en el estudio de la propagación de ondas en medios aleatorios:

$$(\Delta + k_0^2 n^2(r,\omega))[\Psi(r)]$$

[12], donde $n^2(r,\omega)$ es el índice de refracción que usualmente es una función aleatoria isotrópica y homogénea. Los operadores en derivadas parciales aleatorios también aparecen en sistemas de mecánica cuántica con hamiltoniano aleatorio así como en problemas de conducción ó difusión del calor con parámetros aleatorios.

(viii) También la composición proporciona nuevos ejemplos de operadores aleatorios: Sea T un operador aleatorio del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y y sea R cualquier operador lineal y continuo definido en Y, con valores en un espacio de Banach Z. Es prácticamente obvio que la composición $R \circ y$ del operador R con cualquier función simple y valuada en Y, ha de ser otra función simple, pero Z-valuada. La continuidad de R permite asegurar ahora que si $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples, Y-valuadas, convergente casi por doquier a una función $\mathbf{y}$ entonces la sucesión de funciones simples $\{R\circ\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, valuadas en Z, converge casi por doquier a la función $R\circ\mathbf{y}$ (de hecho convergerá en todo punto donde $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo haga). Esto demuestra que

$$R\circ\mathbf{y}\in\mathcal{L}_0(\mathbb{P},Z),\ \forall\mathbf{y}\in\mathcal{L}_0(\mathbb{P},Y),$$

lo que nos permite obtener, a partir de los operadores T y R, un nuevo operador aleatorio de X en Z que denotamos por RT y que definimos mediante la igualdad

$$(RT)(x)=R\circ(T(x)).$$

Si L es ahora un operador lineal y continuo de Z en X, otro operador aleatorio denotado por TL puede ser definido, en esta ocasión de Z en Y, como

$$(TL)(z)=T(L(z)).$$

(ix) *Operadores condicionales.* Nos encontramos ante una de las nociones fundamentales de este trabajo que nace sencillamente de la consideración de los operadores actuando sólo sobre ciertos subconjuntos medibles, de medida positiva. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ y un conjunto medible Ω_0, la σ-álgebra Σ induce de manera trivial una σ-álgebra sobre Ω_0 que denotamos por Σ_{Ω_0} y recordamos que, si $\mathbb{P}(\Omega_0)>0$, la relación

$$\mathbb{P}(\Omega_0)\mathbb{P}_{\Omega_0}(A)=\mathbb{P}(A\cap\Omega_0),\ \ A\in\Sigma$$

define la *probabilidad condicional*, $\mathbb{P}_{\Omega_0}$, de A dado Ω_0; noción que corresponde a la idea intuitiva de calcular la probabilidad con que sucede A supuesto que ha ocurrido Ω_0. Puesto que $\mathbb{P}_{\Omega_0}$ es una probabilidad sobre Σ_{Ω_0}, aparece de este modo la terna $(\Omega_0,\Sigma_{\Omega_0},\mathbb{P}_{\Omega_0})$ que es llamada *espacio de probabilidad condicional* de $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ dado Ω_0 y que da pie al siguiente concepto:

Dado un operador aleatorio $T : X \to \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ de un espacio de Banach X en otro Y, y un conjunto medible Ω_0 con $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$, definimos el *operador aleatorio condicional* de T dado Ω_0, que denotamos por T_{Ω_0}, como el operador de X en $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}_{\Omega_0}, Y)$ dado por

$$T_{\Omega_0}(x) = T(x)/\Omega_0, \ \forall x \in X.$$

Pronto veremos cómo esta noción dará mucho juego en los capítulos venideros ya que debilitaciones estocásticas de las propiedades básicas de los operadores aleatorios (como la de ser estocásticamente continuo o estocásticamente derivativo) podrán hacerse de manera que los operadores aleatorios condicionales (asociados a sucesos de probabilidad cuantificable que será mayor cuanto más pequeña sea la debilitación efectuada) no sufran tal debilitación.

DEFINICIÓN 1.32. Se dice que un operador aleatorio T entre dos espacios de Banach X e Y posee *momento de orden* r si la traza T_x de cada elemento x de X es una variable aleatoria que posee dicho momento, o lo que es lo mismo el operador T está de hecho valuado en el espacio $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, Y)$.

Un interés especial merecen los operadores aleatorios con momento de primer orden en cuyo caso puede ser definido un operador de X en Y, que denotaremos por $\mathbb{E}(\mathrm{T})$ y llamaremos *esperanza* de T, como sigue:

$$\mathbb{E}(T)(x) = \mathbb{E}(T(x)) = \int_\Omega T(x)d\mu.$$

Ahora ha llegado el momento de abordar las propiedades analíticas elementales de los operadores aleatorios (como la de la continuidad y la acotación) desde el punto de vista estocástico y precisamente a ello vamos a dedicar la siguiente sección.

CAPÍTULO II

CONTINUIDAD DE LOS OPERADORES ALEATORIOS

II.1 CONTINUIDAD ESTOCÁSTICA DE LOS OPERADORES ALEATORIOS

Iniciamos nuestra andadura por la senda de la continuidad de los operadores aleatorios entre espacios de Banach formulando, en los términos que consideramos adecuados, las nociones de continuidad y acotación de un tal operador, a la vez que recopilamos una valiosa información acerca de éstos.

Es obvio que un operador aleatorio T del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y es continuo en un punto x_0 de X si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X que converja a x_0 se satisface que $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x_0)$ en probabilidad, esto es dado cualquier real positivo ε se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon] = 0.$$

Siguiendo la tradición convenida en la Sección I.4 diremos, en esta situación, que el operador aleatorio T es *estocásticamente continuo* *en el punto* x_0. Así mismo se dirá que el operador aleatorio T es *estocásticamente continuo* si lo es en cada punto de X.

EJEMPLOS 2.1.

(i) Los tradicionales operadores aleatorios $\mathbf{T} : \Omega \to BL(X,Y)$ son muestralmente continuos y en consecuencia, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto x_0 de X, la sucesión de variables aleatorias $\{\mathbf{T}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergerá casi por doquier a $\mathbf{T}(x_0)$ y en particular convergerá en probabilidad. Por tanto $\mathbf{T}$ es estocásticamente continuo.

(ii) El operador de integración estocástica respecto de un proceso de Wiener (ver Ejemplo 1.31.(iv)) es estocásticamente continuo y sin embargo no se encuentra en la situación descrita en el apartado anterior, como de nuevo puede verse detalladamente expuesto en [37].

(iii) Sean X, Y y Z espacios de Banach. Sea T un operador aleatorio estocásticamente continuo de X en Y. Consideremos un elemento L del espacio $BL(Z,X)$ y otro R de $BL(Y,Z)$. Los operadores aleatorios TL y RT definidos por composición (ver Ejemplo 1.31.(viii)) son estocásticamente continuos.

En efecto: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X convergente a un vector x_0. Dado que

$$\|R(y)\| \leq \|R\|\|y\|, \ \forall y \in Y,$$

se verifica que

$$\|((RT)(x_n) - (RT)(x_0))(\omega)\| \leq \|R\|\|(T(x_n) - T(x_0))(\omega)\|, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Luego

$$\mathbb{P}[\|(RT)(x_n) - (RT)(x_0)\| > \varepsilon] \leq$$
$$\mathbb{P}[\|R\|\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon],$$

de donde, si $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|R\|}$, ha de ser, por la continuidad estocástica de T,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|(RT)(x_n) - (RT)(x_0)\| > \varepsilon] \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon'] = 0,$$

lo que prueba la continuidad estocástica de RT. La de TL es obvia. ∎

Ahora podemos afirmar que:

El espacio vectorial de todos los operadores aleatorios estocásticamente continuos entre dos espacios de Banach X e Y está dotado de estructura de $BL(X)$-módulo por la derecha y de $BL(Y)$-módulo por la izquierda.

(iv) Cualquier operador condicional T_{Ω_0} de un operador aleatorio estocásticamente continuo, T, es también estocásticamente continuo.

En efecto: Si T es un operador aleatorio, de X en Y, estocásticamente continuo y x_0 es un vector de X entonces dado un real positivo ε y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X convergente a x_0 ha de ser, por definición,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon] = 0.$$

Por tanto, para cualquier subconjunto medible Ω_0 de medida positiva, ha de verificarse que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon, \Omega_0] = 0,$$

y más aún,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon, \Omega_0]}{\mathbb{P}[\Omega_0]} = 0,$$

igualdad, esta última, que puede escribirse en los siguientes términos, donde $\mathbb{P}_{\Omega_0}$ denota la probabilidad condicional de $\mathbb{P}$ dado Ω_0,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\Omega_0}[\|T(x_n) - T(x_0)\| > \varepsilon] = 0.$$

Esto prueba la continuidad estocástica del operador condicional T_{Ω_0}. ∎

Recordamos ahora que un subconjunto A de un espacio vectorial topológico es *acotado* si, para cada entorno V de cero, existe un escalar λ tal que $A \subset \lambda V$.

La acotación propia del espacio vectorial topológico $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ recibirá el nombre de *acotación estocástica*, por coherencia con la nomenclatura adoptada, y la materializaremos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.2. *([11], Section II.1.3, Proposition 1.2). Sea Y un espacio de Banach e $\mathbf{Y}_0$ un subconjunto de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{Y}_0$ *es un subconjunto acotado del espacio vectorial topológico* $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$.

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $r > 0$ *tal que* $\|r\mathbf{y}\|_0 < \varepsilon$, *para todo* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbf{Y}_0$.

(iii) Para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $M_\varepsilon > 0$ *tal que* $\mathbb{P}[\|\mathbf{y}\| > M_\varepsilon] < \varepsilon$, *para todo* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbf{Y}_0$.

Como se sabe, las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales topológicos que transforman conjuntos acotados en conjuntos acotados se denominan aplicaciones *acotadas*.

En el caso particular de que tales aplicaciones sean operadores aleatorios lineales diremos que son operadores *estocásticamente acotados*.

En el siguiente teorema (ver [44], teoremas 4.4.3 y 4.5.9) recopilamos la más que conocida caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales topológicos.

TEOREMA 2.3 . *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces cada una de las propiedades que se enuncian a continuación implica la siguiente:*

(i) Existe un entorno de cero en X cuya imagen por T es un conjunto acotado de Y.

(ii) T es continua.

(iii) T es secuencialmente continua.

(iv) La imagen por T de cualquier conjunto acotado de X es un conjunto acotado de Y.

Si además el espacio X posee un entorno de cero acotado, entonces todas las afirmaciones anteriores son equivalentes.

Aunque el espacio de llegada de un operador aleatorio, $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, es terriblemente patológico, como se mostró en la sección anterior, el espacio de partida, X, posee la cualidad suficiente para hacer equivalentes todas las afirmaciones anteriores. De esta manera podemos enunciar la siguiente sugestiva caracterización de la continuidad estocástica de un operador aleatorio entre espacios de Banach.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea T un operador aleatorio lineal del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T es estocásticamente continuo.

(ii) T es estocásticamente acotado.

(iii) Para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon \|x\|] > \varepsilon,$$

para cada x de X.

(iv) $\lim_{x \to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M] = 1$, *para cada $M > 0$.*

Demostración. La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ es consecuencia inmediata del resultado anterior.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Obsérvese que, de manera obvia, la continuidad estocástica del operador T puede escribirse así:

Para cada $0 < \varepsilon < 1$ *existe* $M_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon] > \varepsilon, \ \forall x \in X, \ \|x\| \leq 1,$$

luego sustituyendo en la definición anterior x por $\frac{x}{\|x\|}$ obtenemos la afirmación deseada.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Consideremos ahora un real positivo M. Dado $0 < \varepsilon < 1$ podemos encontrar, según (iii), una constante positiva, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon \|x\|] > \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Por consiguiente, definiendo $\delta_{M,\varepsilon} := \frac{M}{M_\varepsilon}$, es claro que si $\|x\| \leq \delta_{M,\varepsilon}$ entonces

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M] > \varepsilon,$$

lo que pone de manifiesto que (iv) se verifica.

$(iv) \Rightarrow (i)$. En virtud de la linealidad de T, la afirmación *(iv)* asegura la continuidad estocástica de T, de manera trivial. ∎

Como consecuencia de la proposición anterior obtenemos la siguiente caracterización de la *no* continuidad aleatoria.

COROLARIO 2.5. *Sea T un operador aleatorio lineal de X en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T no es estocásticamente continuo.

(ii) Existe $\delta \in]0,1[$ [1] *tal que, para cada variable aleatoria ordinaria y positiva $\mathbf{z}$, se puede encontrar un elemento $x_{\delta,\mathbf{z}}$, que puede ser elegido con norma arbitrariamente pequeña, verificando que*

$$\mathbb{P}[\|T(x_{\delta,\mathbf{z}})\| \leq \mathbf{z}] \leq \delta.$$

[1] Incluso se sabe que esta propiedad se verifica para todo δ perteneciente a un subintervalo de la forma $]0, 1 - \alpha(T)[$ siendo $\alpha(T)$ un valor que cada operador aleatorio tiene asociado y que se definirá en la Sección II.3.

Demostración. *(i)* ⇒ *(ii)*. Que el operador T no sea estocásticamente continuo significa, por negación del apartado *(iii)* de la proposición anterior, que existe $\delta \in]0,1[$ tal que, para cada real positivo M, puede encontrarse un vector x_M satisfaciendo que

$$\mathbb{P}[\|T(x_M)\| \leq M\|x_M\|] \leq \delta.$$

Definiendo $x := \frac{x_M}{\|x_M\|}$ tenemos que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| > M] < 1 - \delta.$$

Sustituyendo M por Mn, podría encontrarse un vector x en X verificando la desigualdad anterior, pero siendo $\|x\| = \frac{1}{n}$, de ahí que satisfagan tal desigualdad vectores de norma arbitrariamente pequeña.

Dada la variable aleatoria real $\mathbf{z}$, sea k un número natural. Se sabe entonces que ha de existir conveniente constante M_k tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{z} \leq M_k] \geq 1 - \frac{1}{k},$$

y asociado a dicha constante, por la primera parte de la prueba, existirá un vector x, de norma arbitrariamente pequeña, de manera que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| > M_k] < 1 - \delta.$$

Por tanto,

$$\begin{gathered}\mathbb{P}[\|T(x)\| > \mathbf{z}] \geq \\ \mathbb{P}[\|T(x)\| > M_k, M_k \geq \mathbf{z}] \geq \\ \mathbb{P}[\|T(x)\| > M_k] + \mathbb{P}[M_k \geq \mathbf{z}] - 1 \geq \\ 1 - \delta - \frac{1}{k}.\end{gathered}$$

Luego haciendo $k \to \infty$, y llamando $x_{\delta,\mathbf{z}}$ al elemento x, se obtiene que

$$\mathbb{P}[\|T(x_{\delta,\mathbf{z}})\| > \mathbf{z}] \geq 1 - \delta,$$

o equivalentemente que

$$\mathbb{P}[\|T(x_{\delta,\mathbf{z}})\| \leq \mathbf{z}] \leq \delta.$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Si se considera la variable aleatoria $\mathbf{z}$ constante, es obvio que la condición *(iv)* del teorema anterior no puede darse, lo que prueba que T no puede ser estocásticamente continuo. ∎

Uno de los teoremas más fructíferos del Análisis Funcional, herramienta indispensable en cualquier problema de continuidad automática, es sin duda el siguiente resultado.

TEOREMA 2.6. *(Teorema de la Gráfica Cerrada). Una condición necesaria y suficiente para que un operador lineal definido entre dos F-espacios sea continuo es que su gráfica sea cerrada.*

La forma más cómoda de comprobar que la gráfica de un tal operador es cerrada consiste en verificar que el *"subespacio separador"* de dicho operador es cero.

DEFINICIÓN 2.7. Dado un operador aleatorio lineal T de X en Y, definimos el *separador* de T como el subespacio de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ dado por

$$\mathcal{S}(T) := \{\mathbf{y} : \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \text{ con } \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbf{y}, \text{ en probabilidad}\}.$$

El subespacio separador $\mathcal{S}(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$.

Una lectura estocástica del Teorema de la Gráfica Cerrada nos proporciona la siguiente caracterización de la continuidad estocástica de un operador aleatorio lineal.

TEOREMA 2.8. *Un operador aleatorio lineal T, de X en Y, es estocásticamente continuo si, y sólo si,*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] = 1, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

Veremos cómo el teorema anterior puede generalizarse como consecuencia del resultado que da título a la siguiente sección.

Seguidamente comprobamos la repercusión de los momentos de un operador aleatorio sobre la continuidad del mismo. Observemos, en primer lugar, que para un operador aleatorio con momento r-ésimo puede ser considerada otra noción de continuidad aparte de la estocástica.

DEFINICIÓN 2.9. Sea T un operador aleatorio de X en Y con momento r-ésimo. Se dice que T es continuo en *media r-ésima* si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X convergente a un vector x_0 de X se verifica que

$$\{\|T(x_n) - T(x_0)\|_r\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

La relación entre ambos tipos de continuidad queda clarificada inmediatamente.

TEOREMA 2.10. *Sea T un operador aleatorio lineal, entre los espacios de Banach X e Y, que posee momento de orden r. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T es estocásticamente continuo.

(ii) T es continuo en media r-ésima.

Demostración. $(ii) \Rightarrow (i)$ se deduce del hecho de que la convergencia en media r-ésima es más fuerte que la convergencia en probabilidad como se estableció en la Proposición 1.22.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X convergente a cero tal que la sucesión $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en media r-ésima a la variable aleatoria $\mathbf{y}$. Entonces, por la Proposición 1.22, la sucesión $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de converger a $\mathbf{y}$ en probabilidad. Por tanto la continuidad estocástica de T garantiza que $\mathbf{y} = 0$, lo que demuestra, gracias al Teorema de la Gráfica Cerrada (Teorema 2.6), la continuidad en media r-ésima del operador aleatorio T. ∎

COROLARIO 2.11. *Sea T un operador aleatorio lineal, entre dos espacios de Banach X e Y, que es estocásticamente continuo y tiene esperanza. El operador $\mathbb{E}(T)$ es entonces un operador lineal y continuo de X en Y.*

Demostración. La linealidad de la esperanza es obvia. Sea ahora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de elementos de X, convergente a cero. Según el teorema anterior, la sucesión $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha de converger a cero en la norma $\|\cdot\|_1$. Puesto que

$$\|\mathbb{E}(T)x_n\| = \|\int_\Omega T(x_n)d\mathbb{P}\| \leq \int_\Omega \|T(x_n)\|d\mathbb{P} = \|T(x_n)\|_1,$$

(Proposición 1.8, *(ii)*) se concluye que

$$\{\mathbb{E}(T(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

∎

II.2 PRINCIPIO DE ALEATORIZACIÓN UNIFORME

En el estudio de la continuidad automática de cierto tipo de operadores aleatorios, surgen de manera natural operadores aleatorios que sin ser estocásticamente continuos se comportan, sin embargo, como éstos en un sentido que más adelante se precisará [40], [43]. Aparecen de hecho operadores aleatorios que poseen subespacio separador estocásticamente pequeño.

Nos proponemos, por ello, hacer ahora un estudio de la continuidad estocástica de los operadores aleatorios lineales T, de X en Y, que tienen subespacio separador estocásticamente pequeño, siendo esta propiedad entendida en el siguiente sentido:

Existe conveniente real positivo δ tal que

$$\mathbb{P}[\mathrm{y} = 0] \geq \delta, \ \forall \mathrm{y} \in \mathcal{S}(T). \tag{2.1}$$

Demostración. Definamos

$$\alpha := \inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] : \mathbf{y} \in \mathcal{M}\},$$

La esencia de la prueba radica en demostrar que para cualesquiera $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n$ de $\mathcal{M}$ se verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = 0, ..., \mathbf{y}_n = 0] \geq \alpha. \tag{2.2}$$

Si $n = 1$ el resultado es obvio. Supongamos ahora que la desigualdad anterior es cierta para toda n-upla de elementos de $\mathcal{M}$. Si disponemos de $n+1$ elementos, $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n+1}$, de $\mathcal{M}$, entonces para cualquier real positivo k se verifica, por hipótesis de inducción, que

$$\alpha \leq \mathbb{P}[\mathbf{y}_1 - k\mathbf{y}_2 = 0, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0].$$

De otra parte,

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = k\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = k\mathbf{y}_2 = 0, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0]+$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = k\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \neq 0, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = 0, \mathbf{y}_2 = 0, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0]+$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = k\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \neq 0, \mathbf{y}_3 = 0, ..., \mathbf{y}_{n+1} = 0].$$

Como quiera que

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\mathbf{y}_1 = k\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \neq 0] \leq$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbf{y}_1\| = k\|\mathbf{y}_2\|, \|\mathbf{y}_2\| \neq 0] \leq$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\frac{\|\mathbf{y}_1\|}{\|\mathbf{y}_2\|} \geq k, \|\mathbf{y}_2\| \neq 0] =$$

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{y}_1\|}{\|\mathbf{y}_2\|} \geq k, \|\mathbf{y}_2\| \neq 0\right] =$$

$$\mathbb{P}[\frac{\|y_1\|}{\|y_2\|} = \infty, \|y_2\| \neq 0] = 0,$$

obtenemos que

$$\alpha \leq \mathbb{P}[y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, ..., y_{n+1} = 0],$$

lo que prueba (2.2) por inducción.

Elijamos ahora una sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{M}$ tal que

$$\alpha \leq \mathbb{P}[y_n = 0] < \alpha + \frac{1}{n}$$

y consideremos el conjunto medible

$$\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} [y_1 = 0, ..., y_n = 0],$$

cuya probabilidad determinamos fácilmente:

$$\mathbb{P}[\Omega_0] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} [y_1 = 0, ..., y_n = 0]\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[y_1 = 0, ..., y_n = 0] = \alpha \geq \delta.$$

Para cada elemento y de $\mathcal{M}$ ha de satisfacerse que

$$y = 0 \ \textit{(c.p.d.) sobre} \ \Omega_0,$$

ya que si negamos tal afirmación entonces

$$\mathbb{P}[y = 0, \Omega_0] < \mathbb{P}[\Omega_0] = \alpha,$$

y puesto que

$$\Omega_0 \bigcap [y = 0] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [y = 0, y_1 = 0, ..., y_n = 0]$$

ha de existir cierto natural n tal que

$$\mathbb{P}[y = 0, y_1 = 0, ..., y_n = 0] < \alpha,$$

lo que contradice (2.2).

Esto prueba que, si definimos

$$\beta := \sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] : \Omega_0 \textit{ medible, con } \mathbf{y} = 0 \textit{ (c.p.d.) en } \Omega_0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}\},$$

entonces

$$\alpha \leq \beta,$$

pero la desigualdad contraria es obvia.

Por último, de la misma materialización del conjunto Ω_0 se deduce que α es de hecho un mínimo y β un máximo. ∎

El siguiente resultado viene a mostrar lo que advertíamos anteriormente acerca de que si $\mathcal{M}$ es un subespacio vectorial cerrado de variables aleatorias entonces es esencialmente lo mismo suponer que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}$$

que considerar que para conveniente positivo δ se satisface que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M},$$

pues entre ambas propiedades no existirá más diferencia que la de saber precisar o no el valor del parámetro δ.

TEOREMA 2.13. *Dado un espacio de Banach Y, sea $\mathcal{M}$ un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, Y)$, $(r \geq 0)$, y supongamos que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}.$$

Existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}$$

y, en consecuencia, existe un subconjunto medible Ω_0 con

$$\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta,$$

tal que

$$\mathbf{y} = 0 \textit{ (c.p.d.) en } \Omega_0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}.$$

Demostración. Obviamente la hipótesis garantiza que

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{y} \in \mathcal{M} : \mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \frac{1}{n}\}.$$

Además el conjunto $C_m := \{\mathbf{y} \in \mathcal{M} : \mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \frac{1}{m}\}$ es cerrado, para cada natural m.

En efecto:

Sea $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de C_m convergente en media r-ésima a una variable aleatoria $\mathbf{y}$. Entonces, Proposición 1.22, la sucesión $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{y}$ en probabilidad, es decir:

$$\int_\Omega \frac{\|\mathbf{y}_n\|}{1+\|\mathbf{y}_n\|} d\mathbb{P} \to \int_\Omega \frac{\|\mathbf{y}\|}{1+\|\mathbf{y}\|} d\mathbb{P}.$$

Sea $\Omega_n := \{\omega \in \Omega : \mathbf{y}_n(\omega) \neq 0\}$. Observemos que

$$\int_\Omega \frac{\|\mathbf{y}_n\|}{1+\|\mathbf{y}_n\|} d\mathbb{P} = \int_{\Omega_n} \frac{\|\mathbf{y}_n\|}{1+\|\mathbf{y}_n\|} d\mathbb{P} \leq \mathbb{P}[\Omega_n],$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{y}_n$ es un elemento de C_m, para cada natural n, y que en consecuencia es $\mathbb{P}[\Omega_n] \leq 1 - \frac{1}{m}$, se deduce que

$$\int_\Omega \frac{\|\mathbf{y}\|}{1+\|\mathbf{y}\|} d\mathbb{P} \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

Como quiera que, para cualquier natural k, los términos de la sucesión $\{k\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también pertenecen a C_m, siendo su límite $k\mathbf{y}$, en virtud de lo anteriormente mostrado se tendrá que

$$\int_\Omega \frac{\|k\mathbf{y}\|}{1+\|k\mathbf{y}\|} d\mathbb{P} \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

Luego definiendo $\Omega_{\mathbf{y}} := \{\omega \in \Omega : \mathbf{y}_n(\omega) \neq 0\}$, se deduce de la desigualdad anterior, haciendo que k diverja positivamente, que

$$\mathbb{P}[\Omega_{\mathbf{y}}] \leq 1 - \frac{1}{m},$$

lo que prueba que $\mathbf{y}$ pertenece a C_m, y por tanto que C_m es cerrado.

Acabamos de ver que el Teorema de Baire es suceptible de ser aplicado a la proyección natural de $\mathcal{M}$ sobre $L_r(\mathbb{P}, X)$, lo que nos muestra la existencia de un natural n_0 tal que el conjunto

$$\{\mathbf{y} \in \mathcal{M} : \ \mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \frac{1}{n_0}\}$$

tiene interior no vacío. Sea $\mathbf{y}_0$ un punto de dicho interior y observemos que para $\mathbf{y}$ en $\mathcal{M}$ y cualquier escalar λ, tal que $\mid \lambda \mid$ sea suficientemente pequeño, la variable aleatoria $\mathbf{y}_0 + \lambda \mathbf{y}$ verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_0 + \lambda \mathbf{y} = 0] \geq \frac{1}{n_0}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{1}{n_0} \leq \mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = -\lambda \mathbf{y}] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = -\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 = 0] + \mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = -\lambda \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \neq 0] \leq$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} = 0] + \mathbb{P}[\|\mathbf{y}_0\| = \mid \lambda \mid \|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{y}_0\| \neq 0] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} = 0] + \mathbb{P}\left[\frac{1}{\mid \lambda \mid} = \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_0\|}, \|\mathbf{y}_0\| \neq 0\right],$$

de donde, haciendo $\lambda \to 0$, obtenemos que

$$\frac{1}{n_0} \leq \mathbb{P}[\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} = 0]$$

y en particular,

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \frac{1}{n_0}, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{M}.$$

∎

Dado que el subespacio separador de un operador aleatorio lineal es un subgrupo aditivo de variables aleatorias, como consecuencia inmediata del Principio de Aleatorización Uniforme, se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 2.14. *Si T es un operador aleatorio lineal verificando que para algún δ en $]0,1[$ es*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}=0] \geq \delta, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T),$$

entonces existe un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$, tal que

$$\mathbf{y} = 0 \ (c.p.d.) \text{ sobre } \Omega_0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

En contraposición, del Teorema 2.13 se deduce este otro resultado.

COROLARIO 2.15. *Si T es un operador aleatorio lineal satisfaciendo que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y}=0] > 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T),$$

entonces existe un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] > 0$, tal que

$$\mathbf{y} = 0 \ (c.p.d.) \text{ en } \Omega_0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

En la siguiente sección emplearemos el Principio de Aleatorización Uniforme (concretamente el Corolario 2.14) para desvelar el *"grado"* de continuidad que poseen los operadores aleatorios cuyo subespacio separador es estocásticamente pequeño.

II.3 Teorema aleatorio de la Gráfica Cerrada

Comenzamos la sección dando nombre a aquellos operadores que habían aparecido como ejemplos naturales de operadores aleatorios con subespacio separador estocásticamente pequeño.

DEFINICIÓN 2.16. Un operador aleatorio lineal T se denominará *probablemente continuo* si tiene algún operador condicional que sea estocásticamente continuo.

Asociado a cada operador aleatorio probablemente continuo, T, consideraremos el valor definido como

$$\beta(T) := \sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] : T_{\Omega_0} \text{ es estocásticamente continuo}\},$$

mientras que a los operadores aleatorios T que no son probablemente continuos les asignaremos el valor

$$\beta(T) = 0.$$

Se comprobará que $\beta(T)$ *es de hecho un máximo*, por lo que resulta evidente el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.17. *Un operador aleatorio T es estocásticamente continuo si, y sólo si, es probablemente continuo y $\beta(T) = 1$.*

Las consideraciones anteriores permiten, en algún sentido, pensar en $\beta(T)$ como *"la probabilidad de que T sea continuo"*. De otra parte, asociado a cada operador aleatorio lineal T, definimos la cantidad

$$\alpha(T) := \inf\{\mathbb{P}[\mathrm{y} = 0] : \mathrm{y} \in \mathcal{S}(T)\}$$

que, en virtud de Principio de Aleatorización Uniforme, es realmente un mínimo y puede ser concebida como *"la probabilidad de que T tenga gráfica cerrada."*

Nuestra intención es probar que la probabilidad de que un operador aleatorio lineal sea continuo coincide con la probabilidad de que tenga gráfica cerrada, obteniendo de este modo un teorema que denominaremos *"Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada."* Comenzamos, para ello, mostrando la validez en el terreno aleatorio de algunos resultados relativos al subespacio separador, que son de uso común en el ámbito de los espacios de Banach. El texto de Sinclair [35] es referencia obligada en este tipo de cuestiones.

TEOREMA 2.18. *Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal entre dos F-espacios X e Y. Sea Z otro F-espacio y $R : Y \to Z$ una aplicación lineal y continua. Se verifica entonces que*

$$\mathcal{S}(R \circ T) = \overline{R(\mathcal{S}(T))},$$

y en particular, la aplicación $R \circ T$ es continua si, y sólo si,

$$\mathcal{S}(T) \subset Ker(R).$$

Demostración. Sea y un elemento de $\mathcal{S}(T)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a cero tal que

$$\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to y.$$

Por la continuidad de R se tiene que

$$\{R(T(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}} \to R(y),$$

lo que muestra que

$$R(y) \in \mathcal{S}(R \circ T).$$

Por tanto

$$R(\mathcal{S}(T)) \subset \mathcal{S}(R \circ T)$$

y, ya que el subespacio separador es cerrado, concluimos que

$$\overline{R(\mathcal{S}(T))} \subset \mathcal{S}(R \circ T).$$

Para demostrar la inclusión contraria consideramos la proyección canónica Q de Z en $Z/\overline{R(\mathcal{S}(T))}$. Se trata de demostrar que

$$Q(\mathcal{S}(R \circ T)) = 0.$$

Tomemos pues un elemento z de $\mathcal{S}(R \circ T)$ y comprobemos que

$$Q(z) = 0.$$

En efecto: si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X convergente a cero y tal que

$$\{(R \circ T)(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to z,$$

la continuidad de Q garantiza que

$$Q(z) = \lim_{n\to\infty} (Q \circ R \circ T)(x_n),$$

y dada la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & Y \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Q'"'] & Z \arrow[d, "Q"] \\
& Y/\mathcal{S}(T) \arrow[r, "R'"] & Z/\overline{R(\mathcal{S}(T))}
\end{tikzcd}
$$

donde las aplicaciones Q' y R' vienen dadas como sigue

$$Q'(y) = y + \mathcal{S}(T), \ \forall y \in Y,$$

$$R'(y + \mathcal{S}(T)) = R(y) + \overline{R(\mathcal{S}(T))}, \ \forall y \in Y,$$

se deduce que

$$Q(z) = \lim_{n\to\infty} \{(R' \circ Q' \circ T)(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dado que la aplicación R' es continua y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero, vamos a obtener que $Q(z) = 0$ tras probar que la aplicación $Q' \circ T$ es continua, para lo cual aplicaremos el Teorema de la Gráfica Cerrada.

Sea $y + \mathcal{S}(T)$ un elemento de $Y/\mathcal{S}(T)$ y $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a cero tal que

$$\{(Q' \circ T)(x'_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to y + \mathcal{S}(T).$$

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{S}(T)$ tal que

$$\{(T(x'_n) - y) - y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

Puesto que y_n es un elemento de $\mathcal{S}(T)$, para cada natural n, se puede encontrar una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de X, convergente a cero y tal que

$$\{T(w_n) - y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

En consecuencia se ha conseguido una sucesión $\{x'_n - w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de X, convergente a cero tal que

$$\{T(x'_n - w_n) - y\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

Esto prueba que

$$y \in \mathcal{S}(T),$$

por lo que

$$\mathcal{S}(Q' \circ T) = 0,$$

lo que conluye la demostración. ∎

El siguiente corolario del teorema anterior tendrá consecuencias muy interesantes en el campo aleatorio.

COROLARIO 2.19. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y. Supongamos que Z es otro espacio de Banach y que R es un operador lineal y continuo de Y en Z. Entonces, el operador aleatorio RT es estocásticamente continuo si, y sólo si, todo elemento en el subespacio separador de T está casi seguramente valuado en el núcleo de R.*

Demostración. Como comentábamos en el Ejemplo 1.31.(viii), si $\mathbf{y}$ es una variable aleatoria valuada en Y entonces la función $R \circ \mathbf{y}$ es una variable aleatoria con valores en Z y en consecuencia, el operador R induce un operador, obviamente lineal, de $L_0(\mathbb{P}, Y)$ en $L_0(\mathbb{P}, Z)$ que, por comodidad, seguiremos denotando por R. Es inmediato comprobar además que este nuevo operador es también continuo.

Basta ahora aplicar el teorema anterior a los operadores R y T para obtener la conclusión deseada. ∎

COROLARIO 2.20. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y. Si Ω_0 es un subconjunto medible entonces el operador condicional T_{Ω_0} es estocásticamente continuo si, y sólo si,*

$$y = 0 \ (c.p.d.) \text{ sobre } \Omega_0, \ \forall y \in \mathcal{S}(T).$$

Demostración. Se obtiene de aplicar el teorema anterior al operador lineal

$$T : X \to L_0(\mathbb{P}, Y)$$

y al operador continuo de restricción

$$R : L_0(\mathbb{P}, Y) \to L_0(\mathbb{P}_{\Omega_0}, Y)$$

dado por

$$R(\mathbf{y}) = \mathbf{y}/\Omega_0.$$

∎

TEOREMA 2.21. *(Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada). Si T es un operador aleatorio lineal entonces $\alpha(T)$ es un mínimo, $\beta(T)$ un máximo y además,*

$$\alpha(T) = \beta(T).$$

De manera más sugestiva: La probabilidad de que T sea continuo coincide con la probabilidad de que T tenga gráfica cerrada.

Demostración. La restricción $\mathbf{y}/\Omega_0$ de cualquier elemento $\mathbf{y}$ del espacio separador, $\mathcal{S}(T)$, del operador T a un subconjunto de medida positiva, Ω_0, ha de pertenecer obviamente al subespacio separador, $\mathcal{S}(T_{\Omega_0})$, del operador condicional T_{Ω_0} por lo que

$$1 = \mathbb{P}_{\Omega_0}[\mathbf{y}/\Omega_0 = 0] = \frac{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0, \Omega_0]}{\mathbb{P}[\Omega_0]} \leq \frac{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0]}{\mathbb{P}[\Omega_0]}.$$

En consecuencia se obtiene que

$$\mathbb{P}[\Omega_0] \leq \alpha(T),$$

lo que muestra que

$$\beta(T) \leq \alpha(T).$$

De esta manera, si $\alpha(T)$ es igual a cero, el resultado está probado. En otro caso, sabemos que existe un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] = \alpha(T)$, para el cual se verifica que

$$\mathbf{y} = 0 \text{ (c.p.d.) sobre } \Omega_0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T).$$

Aplicando el Corolario 2.20 concluimos que T_{Ω_0} es estocásticamente continuo. Por tanto se satisface que

$$\alpha(T) = \mathbb{P}[\Omega_0] \leq \beta(T)$$

y en consecuencia es

$$\alpha(T) = \beta(T) = \mathbb{P}[\Omega_0].$$

∎

Corolario 2.22. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y. Son entonces equivalentes:*

(i) T es probablemente continuo.

(ii) $\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T)$.

Demostración. Observando que $\mathcal{S}(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de variables aleatorias, la condición *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* se obtiene como consecuencia del Corolario 2.15 y del Corolario 2.20. La condición *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* es obvia. ∎

Como cabría esperar, si el operador aleatorio posee momento de cierto orden entonces el Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada proporciona una información adicional que seguidamente codificamos.

Previamente, con el fin de facilitar la escritura de los enunciados, introducimos, para un operador aleatorio lineal T con momento de orden r, la siguiente nomenclatura[(2)]:

$$\mathcal{S}_{\mathbb{P}}(T) := \{\mathbf{y} :\ \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0,\ \textit{con}\ \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbf{y},\ \textit{en probabilidad}\}$$

[(2)]Cuando no haya lugar a confusión seguiremos denotando el conjunto $\mathcal{S}_{\mathbb{P}}(T)$ como $\mathcal{S}(T)$ al igual que se ha venido haciendo hasta ahora.

y

$$\mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T) := \{\mathbf{y} :\ \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0,\ \mathit{con}\ \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to \mathbf{y},\ \mathit{en}\ \|\cdot\|_r\}.$$

COROLARIO 2.23. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y con momento de orden r. Equivalen entonces las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\mathbb{P}}(T)$.

(ii) T posee un operador condicional T_{Ω_0} estocásticamente continuo siendo

$$\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta.$$

(iii) T tiene un operador condicional T_{Ω_0} continuo en media r-ésima con

$$\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta.$$

(iv) $\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T)$.

De hecho

$$\begin{gathered}\inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] :\ \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\mathbb{P}}(T)\} = \\ \sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] :\ T_{\Omega_0}\ \mathit{es\ estocásticamente\ continuo}\} \\ \sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] :\ T_{\Omega_0}\ \mathit{es}\ \|\cdot\|_r\text{-}\mathit{continuo}\} = \\ \inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] :\ \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T)\}.\end{gathered}$$

Demostración. *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*, en virtud del Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada.

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)*, según el Teorema 2.10.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*, de manera obvia.

(iv) $\Rightarrow$ *(iii)*. Por el Principio de Aleatorización Uniforme (Teorema 2.12) aplicado al subgrupo de variables aleatorias $\mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T)$ obtenemos la existencia de un conjunto medible Ω_0 con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$ tal que

$$\mathbf{y} = 0,\ \text{sobre}\ \Omega_0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T),$$

o de manera equivalente tal que

$$\mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T) \subset Ker(R),$$

donde $R : L_r(\mathbb{P}, Y) \to L_r(\mathbb{P}_{\Omega_0}, Y)$ denota la aplicación restricción dada por

$$R(\mathbf{y}) = \mathbf{y}/\Omega_0,$$

la cual es obviamente continua. Por el Teorema 2.18 obtenemos que el operador aleatorio RT es continuo en media r-ésima. Ahora basta observar sólo que

$$RT = T_{\Omega_0}.$$

∎

Corolario 2.24. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y con momento de orden r. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\mathbb{P}}(T)$.

(ii) T posee un operador condicional estocásticamente continuo.

(iii) T tiene un operador condicional continuo en media r-ésima.

(iv) $\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] > 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T)$.

Demostración. *(i)* ⇔ *(ii)*, por el Corolario 2.22.

(ii) ⇔ *(iii)*, según el Teorema 2.10.

(iii) ⇒ *(iv)*, de manera obvia.

(iv) ⇒ *(iii)*. Aplicando el Teorema 2.13 al subespacio vectorial cerrado $\mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T)$, del espacio $\mathcal{L}_r(\mathbb{P}, X)$, obtenemos que para conveniente $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] \geq \delta, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\|\cdot\|_r}(T).$$

Ahora la implicación *(iv)* ⇒ *(iii)* del enunciado anterior concluye la prueba. ∎

El Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada, que obviamente generaliza al Teorema 2.8, nos va a permitir, entre otras muchas cosas, caracterizar la continuidad probable en términos análogos a las distintas formulaciones equivalentes del concepto de continuidad estocástica que establecimos (Proposición 2.4), como pone de manifiesto el siguiente resultado.

Para ello previamente recordaremos que dado un espacio de Banach X:

Se define el *límite inferior* de una función, $f : X \to \mathbb{R}$, en el punto x_0 de X como la cantidad

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{f(x) : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

COROLARIO 2.25. *Sea T un operador aleatorio lineal y δ un real positivo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T tiene un operador condicional T_{Ω_0} estocásticamente continuo, siendo $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$.

(ii) T es probablemente acotado: Para cada $0 < \delta' < \delta$, $\exists M_{\delta'} > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X.$$

(iii) $\underline{\lim}_{x \to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M] \geq \delta$, para todo $M > 0$.

(iv) La gráfica de T es probablemente cerrada:

$$\mathbb{P}[\mathrm{y} = 0] \geq \delta, \ \textit{para todo } \mathrm{y} \textit{ en } \mathcal{S}(T).$$

De hecho:

$$\alpha(T) = \sup\{\delta > 0 : \exists M > 0 \textit{ siendo } \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M\|x\|] \geq \delta \ \forall x \in X\} =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \underline{\lim}_{x \to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon].$$

Demostración. *(i) ⇒ (ii)*. Para cada $0 < \varepsilon < 1$, según la Proposición 2.4, ha de existir una constante positiva M_ε tal que

$$\frac{\mathbb{P}[\|T_{\Omega_0}(x)\| \leq M_\varepsilon \|x\|, \Omega_0]}{\mathbb{P}[\Omega_0]} > \varepsilon, \ \forall x \in X,$$

luego si $0 < \delta' < \delta$, basta considerar $M_{\delta'} = M_\varepsilon$ siendo $\varepsilon = \frac{\delta'}{\mathbb{P}[\Omega_0]}$ y aplicar la desigualdad anterior para obtener que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X.$$

(ii) ⇒ (iii). Sean $M > 0$ y $0 < \delta' < \delta$. Existe entonces $M_{\delta'} > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X.$$

Entonces, si $\|x\| < \frac{M}{M_{\delta'}}$,

$$\delta' \leq \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \leq \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M],$$

por lo que

$$\inf\{\mathbb{P}[\|T(x)\| : \|x\| < \frac{M}{M_{\delta'}}\} \geq \delta',$$

lo que demuestra que

$$\varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M] \geq \delta, \ \text{para todo } M > 0.$$

(iii) ⇒ (iv). Sea $\mathbf{y}$ un elemento de $\mathcal{S}(T)$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de elementos de X, convergente a cero, tal que $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{y}$ en probabilidad. Para cada positivo M se tiene que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} < M] \geq \mathbb{P}[\|\mathbf{y} - T(x_n)\| < \frac{M}{2}, \|T(x_n)\| < \frac{M}{2}] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|\mathbf{y} - T(x_n)\| < \frac{M}{2}] + \mathbb{P}[\|T(x_n)\| < \frac{M}{2}] - 1.$$

Tomando límites en la expresión anterior, y teniendo en cuenta que $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{y}$ en probabilidad, obtenemos que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} < M] \geq \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| < \frac{M}{2}] \geq \delta,$$

de donde

$$\delta \leq \lim_{M\to 0} \mathbb{P}[\mathbf{y} < M] = \mathbb{P}[\mathbf{y} = 0].$$

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* es el Corolario 2.14.

Por último, detengámonos un momento para observar que hemos llegado a probar que

$$\begin{aligned} &\sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] : T_{\Omega_0} \textit{ es estocásticamente continuo}\} \leq \\ &\sup\{\delta : \exists M > 0 \textit{ siendo } \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M\|x\|] \geq \delta,\ \forall x \in X\} \leq \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon] \leq \\ &\inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] : \mathbf{y} \in \mathcal{S}(T)\}, \end{aligned}$$

y que todas estas desigualdades son de hecho igualdades dado que, por el Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada, el primer y el último miembro de la cadena coinciden. ∎

COROLARIO 2.26. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador aleatorio lineal de X en Y con momento de orden r. Se verifica entonces que*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon] = \\ &\sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] : T_{\Omega_0} \textit{ es continuo en media } r\textit{-ésima}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Es una consecuencia directa del resultado anterior y del Corolario 2.23. ∎

De los resultados anteriores se desprende que no es necesario comprobar el comportamiento de un operador aleatorio lineal T en cada subconjunto medible para asegurar la existencia de un subconjunto medible sobre el cual T se comporte como un operador estocásticamente continuo, e incluso continuo en media r-ésima. Basta y sobra calcular el siguiente límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{x\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \varepsilon]$$

para adivinar el más grande *"tamaño"* que puede tener conveniente subconjunto medible sobre el cual T se comporte como un operador estocásticamente continuo y, más aún, como un operador continuo en media r-ésima si ha lugar a ello. De este modo la bondad de un operador aleatorio lineal respecto de la propiedad de continuidad (ya sea ésta entendida como continuidad estocástica así como en media r-ésima) queda condicionada al valor de un único número que se obtiene del cálculo de un sencillo límite.

II.4 Teorema Aleatorio de los Isomorfismos de Banach

Dedicamos la presente sección a estudiar la continuidad estocástica de los operadores aleatorios T definidos entre dos aleatorizaciones, esto es $T : \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X) \to \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, siendo X e Y convenientes espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Se preguntará el lector que con qué derecho hablamos de operadores aleatorios T definidos sobre espacios $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X)$ que no tienen por qué ser espacios de Banach. La razón radica en que se puede generalizar la definición que hemos dado de *operador aleatorio*, considerando como operadores aleatorios a todas *aquellas aplicaciones definidas de un F-espacio X en $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ (la "aleatorización" de un espacio de Banach*[3] *Y).* Pues bien, a este conjunto más general de operadores aleatorios son trasladables literalmente todas las definiciones básicas dadas hasta ahora (continuidad estocástica, continuidad probable, etc.) al igual que los resultados más importantes acerca de ellas (Principio de aleatorización Uniforme, Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada, etc.). Sin embargo no ocurre así con los resultados que dependen de la equivalencia entre las afirmaciones contenidas en el Teorema 2.3, como es el caso de la Proposición 2.4 ó del Corolario

[3] Además, si se quiere, incluso puede suponerse que Y es un F-espacio y todo lo que digamos seguirá siendo igualmente válido pues ya hemos visto como de las propiedades propias de la norma de Y no "pasan" a $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ más que las relativas a la estructura de F-espacio que Y posee.

2.25. Aunque hasta aquí podría haber sido factible trabajar en el ámbito de los F-espacios, con las pertinentes particularizaciones al caso de los espacios de Banach, tampoco hubiésemos podido mantener este ambiente en lo sucesivo pues, sin ir más lejos, el capítulo estelar de este trabajo (el tercero) requiere el marco de los espacios de Banach. Haber planteado en principio la teoría en términos de F-espacios, dispersando la atención del lector en pro de una generalidad que sólo resulta ser esencial en contadas ocasiones, nos hubiera obligado a hacer continuas alusiones al caso particular de los espacios de Banach por ser aquí, como seguiremos verificando, donde la teoría gana toda su riqueza. No obstante el lector interesado, puede consultar [41] donde se recogen todos los resultados expuestos hasta ahora siendo el ambiente subyacente el de los F-espacios (esfuerzo que mereció la pena sólo porque en aquella ocasión tales resultados constituían un fin en sí mismo).

El siguiente teorema muestra cómo un operador aleatorio biyectivo y lineal definido entre dos aleatorizaciones tiene la misma probabilidad de ser estocásticamente continuo que su operador aleatorio inverso. En particular, cuando la probabilidad sea degenerada, se obtendrá el conocido Teorema de los Isomorfismos de Banach.

TEOREMA 2.27. *(Teorema Aleatorio de los Isomorfismos de Banach). Si un operador aleatorio lineal $T : \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, X) \to \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ es biyectivo y probablemente continuo entonces T^{-1} es probablemente continuo con*

$$\alpha(T^{-1}) = \alpha(T).$$

Demostración. Para cada elemento $\mathbf{y}$ del separador, $S(T)$, y cada real positivo k se verifica que

$$\mathbb{P}[T^{-1}(\mathbf{y}) = 0] = \mathbb{P}[\|T^{-1}(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{y}\| = 0] \geq$$
$$\mathbb{P}[\|T^{-1}(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{y}\|] + \mathbb{P}[\|\mathbf{y}\| = 0] - 1 \geq$$
$$\mathbb{P}\left[\frac{\|T^{-1}(\mathbf{y})\|}{k} \leq \|\mathbf{y}\|\right] + \alpha(T) - 1,$$

por lo que, haciendo $k \to \infty$, se obtiene que

$$\mathbb{P}[T^{-1}(\mathbf{y}) = 0] \geq \alpha(T), \ \forall \mathbf{y} \in S(T).$$

Dado que

$$\mathbf{x} \in S(T^{-1}) \Leftrightarrow (0, \mathbf{x}) \in \overline{GrT^{-1}} \Leftrightarrow (\mathbf{x}, 0) \in \overline{GrT} \Leftrightarrow T(\mathbf{x}) \in S(T)$$

se verifica que

$$S(T^{-1}) = T^{-1}(S(T)),$$

y en consecuencia

$$\alpha(T^{-1}) \geq \alpha(T).$$

Intercambiando T y T^{-1} obtenemos que

$$\alpha(T) \geq \alpha(T^{-1})$$

y así

$$\alpha(T^{-1}) = \alpha(T).$$

∎

II.5 Teorema Aleatorio de la Aplicación Abierta

La apertura de un operador aleatorio T de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y, como se sabe, significa que el operador T transforma los abiertos del espacio X en abiertos del espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$ y cuando ello ocurra diremos. como viene siendo habitual, que el operador aleatorio T es *estocásticamente abierto.*

Observemos que si el operador aleatorio T es estocásticamente continuo, sobreyectivo y lineal entonces la apertura estocástica puede caracterizarse mediante la siguiente condición:

Para cada ε perteneciente al intervalo $]0,1[$ *existe un positivo* M_ε *verificando que, dada una variable aleatoria* $\mathbf{y}$ *de* $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, *puede encontrarse un elemento* x *en* X *tal que* $T(x) = \mathbf{y}$, *siendo*

$$\mathbb{P}[\|x\| \leq M_\varepsilon \|\mathbf{y}\|]$$

DEFINICIÓN 2.28. Se dirá que un operador aleatorio es *probablemente abierto* cuando alguno de sus operadores condicionales sea abierto.

TEOREMA 2.29. *(Teorema Aleatorio de la Aplicación Abierta). Un operador aleatorio lineal y sobreyectivo* T, *de* X *en* Y, *probablemente continuo es probablemente abierto. De hecho, el conjunto*

$$\{\mathbb{P}[\Omega_0] : T_{\Omega_0} \text{ es estocásticamente abierto y continuo}\}$$

tiene máximo, siendo éste igual a $\alpha(T)$.

Demostración. El Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada asegura la existencia de un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] = \alpha(T)$, tal que el operador condicional T_{Ω_0} es estocásticamente continuo. Dado que T_{Ω_0} es trivialmente sobreyectivo, según el Teorema clásico de la Aplicación abierta, ha de ser también abierto, lo que demuestra el resultado. ∎

Dado que todo espacio de Banach Y puede verse como una aleatorización trivial de sí mismo, el clásico Teorema de la Aplicación Abierta resulta ser un caso particular del correspondiente teorema aleatorio.

El siguiente resultado es una mera traducción al lenguaje estocástico del resultado anterior.

COROLARIO 2.30. *Si un operador aleatorio lineal, T, de X en Y es probablemente continuo entonces para cada ε perteneciente al intervalo $]0, \alpha(T)[$ existe un positivo M_ε tal que, dada una variable aleatoria* y *de $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, Y)$, ha de poder encontrarse un elemento x en X verificando que $\mathbb{P}[\|x\| \leq M_\varepsilon \|\mathrm{y}\|] \geq \varepsilon$, siendo $\mathbb{P}[T(x) = \mathrm{y}] \geq \alpha(T)$.*

II.6 Teorema de Banach-Steinhaus Aleatorio

En esta sección pretendemos obtener una versión aleatoria del conocido Teorema de Banach-Steinhaus, que será fruto de la misma filosofía con la que conseguimos *"aleatorizar"* el Teorema de la Gráfica Cerrada. Con ello, el Teorema aleatorio de Banach-Steinhaus será clave en la teoría emergente de continuidad automática de los operadores aleatorios, hecho que puede ser ilustrado con la lectura de [43]. Nosotros intentaremos recoger aquí toda la luz que dicho teorema arroja en el ambiente general en el que nos venimos desenvolviendo, codificando por ejemplo la información obtenida acerca de los operadores aleatorios que son límite puntual en probabilidad de una sucesión de operadores aleatorios probablemente continuos.

A lo largo de esta sección $\{T_i\}_{i \in I}$ denotará una familia de operadores aleatorios lineales del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y. La equicontinuidad de esta familia de operadores con respecto a la uniformidad de X y a la de $L_0(\mathbb{P}, Y)$, se expresa obviamente de la siguiente forma:

Para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante positiva, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_\varepsilon \|x\|] \geq \varepsilon, \forall x \in X, \text{ para todo } i \text{ en } I.$$

Si éste es el caso, se dirá que la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ es *estocásticamente equicontinua* (cumpliendo una vez más con nuestra tradición).

Procediendo de igual modo, diremos que la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ está *puntualmente estocásticamente acotada* si para cada x en X se satisface la siguiente condición:

Dado $0 < \varepsilon < 1$ *existe una constante,* $M_{x,\varepsilon}$, *tal que*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_{x,\varepsilon}] \geq \varepsilon, \forall i \in I.$$

Uno de los principios fundamentales del Análisis Funcional es el Teorema de Banach-Steinhaus ([31], Theorem 2.6); resultado de incuestionable interés que es perfectamente trasladable a nuestro ambiente estableciendo que:

> *Toda familia de operadores aleatorios lineales estocásticamente continuos que esté puntualmente estocásticamente acotada ha de ser estocásticamente equicontinua.*

Concretamente se tiene el siguiente enunciado:

TEOREMA 2.31 . *(Lectura estocástica del Teorema de Banach-Steinhaus). Sea* $\{T_i\}_{i\in I}$ *una familia de operadores aleatorios lineales estocásticamente continuos de un espacio de Banach* X *en un espacio de Banach* Y*. Supongamos que para cada* x *en* X *y* $0 < \varepsilon < 1$ *existe una constante* $M_{x,\varepsilon}$ *tal que*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_{x,\varepsilon}] \geq \varepsilon, \forall i \in I.$$

Para cada $0 < \varepsilon < 1$, *existe entonces una constante* M_ε *tal que*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_\varepsilon \|x\|] \geq \varepsilon, \forall x \in X, \text{ para todo } i \text{ en } I.$$

Con arreglo a la filosofía mantenida a lo largo de este trabajo ha llegado el momento de debilitar el concepto de familia estocásticamente equicontinua y el de familia puntualmente estocásticamente acotada. Hasta la presente, estas debilitaciones se han hecho de dos maneras distintas que a la postre han resultado ser equivalentes: La primera de ellas aparentemente más débil consistía en considerar que cierta propiedad se verifica con cierta probabilidad. La segunda forma, que podría ser calificada de *"uniforme"*, consiste en suponer la existencia un subconjunto medible, Ω_0, en el que la propiedad se satisface estocásticamente. Sin embargo a diferencia de lo ocurrido con la continuidad estocástica, cuando las propiedades consideradas son las dos que nos ocupan en este momento, desgraciadamente no se pueden idear *"principios de aleatorización uniforme"* que permitan poner en equivalencia las dos maneras de efectuar dichas debilitaciones. Puesto que ahora las debilitaciones aparentemente débiles lo son realmente, nos vemos obligados a optar por las dos definiciones siguientes.

DEFINICIÓN 2.32. Se dice que la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ es *probablemente equicontinua* si podemos encontrar $0 < \delta < 1$ tal que para cada $0 < \delta' < \delta$ exista un positivo $M_{\delta'} > 0$ verificando que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X, \ \textit{para cada } i \textit{ en } I.$$

EJEMPLO 2.33. Consideremos es espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ y la familia de operadores aleatorios $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por:

$$T_n(x)(\omega) = \begin{cases} nx\chi_{[0,\frac{1}{2}]} & \text{si } n \text{ es par} \\ nx\chi_{[\frac{1}{2},1]} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La familia $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es probablemente equicontinua y no puede encontrarse un conjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] > 0$, tal que la familia de operadores condicionales $\{T_{n\Omega_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea estocásticamente equicontinua.

DEFINICIÓN 2.34. Se dice que la familia $\{T_i\}_{i\in I}$ es *puntualmente probablemente acotada* si existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo x en X existe una constante, M_x, satisfaciendo que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_x] \geq \delta, \forall i \in I.$$

EJEMPLO 2.35. Consideremos otra vez el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ y la familia de operadores aleatorios reales, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$T_n(x) = x\mathbf{y}_n, \text{ para cada } x \text{ en } \mathbb{R}, \text{ y todo } n \text{ en } \mathbb{N},$$

donde $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de variables aleatorias ordinarias definida como sigue:

$$\mathbf{y}_{2n-1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \in [0, \frac{1}{3}] \\ n & \text{if } \omega \in]\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

$$\mathbf{y}_{2n}(\omega) = \begin{cases} n & \text{if } \omega \in [0, \frac{2}{3}] \\ 0 & \text{if } \omega \in]\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Esta familia es puntualmente estocásticamente acotada pues dado un positivo, M, se verifica que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M] \geq \frac{1}{3}, \forall x \in X,$$

pero es imposible encontrar un subconjunto medible Ω_0, de medida positiva, tal que $\{T_{n\Omega_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea puntualmente estocásticamente acotada.

En el siguiente resultado se recoge buena parte de la enjundia de lo que convendremos en llamar *"Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus"*.

LEMA 2.36. *Si T es un operador aleatorio lineal de X en Y que es probablemente continuo y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de X convergente a un elemento x de X entonces, para todo $\tau > 0$, se verifica que*

$$\left| \underline{lim} \mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] - \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \tau] \right| \leq 1 - \alpha(T).$$

Demostración. Para demostrar que

$$\underline{lim} \mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] - \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \tau] \leq 1 - \alpha(T),$$

supongamos que, por el contrario, existe $\tau > 0$ tal que

$$\underline{lim} \mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] > \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \tau] + 1 - \alpha(T),$$

para alguna sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x. Entonces, para conveniente real γ suficientemente pequeño y para cada natural n suficientemente grande, ha de satisfacerse que

$$\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] + \mathbb{P}[\|T(x)\| > \tau] > 2 - \alpha(T) + 2\gamma. \tag{6.1}$$

Dado que

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| \geq \tau + \alpha] = \mathbb{P}[\|T(x)\| > \tau],$$

ha de existir $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \geq \tau + \alpha_0] \geq \mathbb{P}[\|T(x)\| > \tau] - \gamma,$$

y por (6.1) ha de ser

$$\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] + \mathbb{P}[\|T(x)\| \geq \tau + \alpha_0] > 2 - \alpha(T) + \gamma.$$

De esta manera

$$\mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x)\| \geq \alpha_0] \geq$$
$$\mathbb{P}[\left| \|T(x_n)\| - \|T(x)\| \right| \geq \alpha_0] \geq$$
$$\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau, \|T(x)\| \geq \tau + \alpha_0] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] + \mathbb{P}[\|T(x)\| \geq \tau + \alpha_0] - 1 >$$
$$1 - \alpha(T) + \gamma.$$

Así es

$$\mathbb{P}[\|T(x_n) - T(x)\| < \alpha_0] < \alpha(T) - \gamma,$$

de donde

$$\underline{lim}\mathbb{P}[\|T(x_n - x)\| < \alpha_0] \leq \alpha(T) - \gamma < \alpha(T),$$

en contradicción con el Corolario 2.25 que asegura que

$$\alpha(T) \geq \underline{\lim}_{x \to 0} \mathbb{P}[\|T(x)\| < \varepsilon], \text{ para cada } \varepsilon > 0.$$

Esto demuestra que

$$\underline{lim}\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] - \mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \tau] \leq 1 - \alpha(T).$$

Mediante un argumento análogo se prueba que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq \tau] - \underline{lim}\mathbb{P}[\|T(x_n)\| \leq \tau] \leq 1 - \alpha(T).$$

∎

TEOREMA 2.37. *(Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus). Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de operadores aleatorios lineales probablemente continuos. Supongamos que para cierto real positivo δ se verifica la siguiente propiedad: para cada x en X existe una constante positiva, M_x, tal que*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_x] \geq \delta, \ \forall i \in I.$$

Entonces existe $M > 0$ tal que, para cada x en X,

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M\|x\|] \geq (2\delta - 1) - (1 - \alpha(T_i)), \ \forall i \in I.$$

Demostración. Definamos para cada natural n el conjunto

$$C_n = \{x \in X : \mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq n] \geq \delta, \ \forall i \in I\}.$$

Puesto que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n},$$

el Teorema de Baire asegura que algún $\overline{C_m}$ tiene interior no vacío, lo que hace posible encontrar en tal conjunto determinada bola, que denotamos por $B(x_0, 2r)$, siendo $r < 1$. De esta manera, para todo x de X con $\|x\| = 1$, se tiene que

$$x_0 + rx \in \overline{C_m},$$

gracias a lo cual existe una sucesión $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de C_m, convergente a $x_0 + rx$. Aplicando el lema anterior obtenemos que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x_0 + rx)\| \leq m] \geq$$

$$\underline{lim}\mathbb{P}[\|T_i(x_k)\| \leq m] - (1 - \alpha(T_i)) \geq$$

$$\delta - (1 - \alpha(T_i)),$$

y en consecuencia,

$$\mathbb{P}[\|T_i(rx)\| \leq m + \|T_i(x_0)\|] \geq \delta - (1 - \alpha(T_i)).$$

Observando que

$$\mathbb{P}[\|T_i(rx)\| \leq 2m] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|T_i(rx)\| \leq m + \|T_i(x_0)\|, \|T_i(x_0)\| \leq m] \geq$$

$$\delta - (1 - \alpha(T_i)) + \delta - 1,$$

y tomando $M = \frac{2m}{r}$ podemos concluir que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M\|x\|] \geq (2\delta - 1) - (1 - \alpha(T_i)), \ \forall x \in X.$$

∎

Si en el resultado anterior hacemos δ tender a uno observamos que el Teorema de Banach-Steinhaus es un caso particular del correspondiente resultado aleatorio.

Hemos visto que el *"grado"* de equicontinuidad de una familia de operadores aleatorios lineales probablemente continuos depende por un lado de cuán estocásticamente continuos sean los operadores aleatorios de esta familia y por otro de cuán fuerte sea la acotación puntual estocástica de la familia. Los dos siguientes corolarios insisten en poner de manifiesto que las dos hipótesis anteriores repercuten de manera totalmente independinente sobre la equicontinuidad probable.

COROLARIO 2.38. *Supongamos que una familia de operadores aleatorios lineales probablemente continuos, $\{T_i\}_{i\in I}$, es puntualmente estocásticamente acotada. Entonces, para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe una constante, M_ε, tal que*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \varepsilon - (1 - \alpha(T_i)), \ \forall i \in I, \ \forall x \in X.$$

Demostración. Si asociado a cada ε del $]0,1[$ consideramos $\delta = \frac{\varepsilon+1}{2}$, una aplicación directa del teorema anterior prueba este corolario. ∎

Todos los resultados relevantes que han aparecido hasta ahora en esta Memoria comparten la misma filosofía que es la siguiente: si un operador aleatorio satisface determinada hipótesis *"probablemente"* entonces ha de verificar la tesis que se obtenga del caso clásico con la misma probabilidad con que se satisface la hipótesis; y ha sido precisamente el Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus la excepción que confirma la regla, en el sentido de que si el *"grado"* de acotación puntual estocástica es δ, entonces el *"grado"* de continuidad estocástica que obtenemos para cada operador T_i de la familia es $(2\delta - 1) - (1 - \alpha(T_i))$, cuando lo deseable hubiese sido obtener $\delta - (1 - \alpha(T_i))$ en lugar de la cantidad anterior. Esa merma, de valor $(1 - \delta)$, es imputable sólo a la propiedad de la acotación puntual estocástica. De hecho, si no nos resignamos a sufrir pérdida alguna basta que supongamos que la acotación puntual estocástica es algo mejor, como probamos a continuación.

COROLARIO 2.39 . *Sea* $\{T_i\}_{i\in I}$ *una familia de operadores aleatorios lineales probablemente continuos. Si existe un subconjunto medible* Ω_0*, con* $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$*, tal que* $\{T_{i\Omega_0}\}_{i\in I}$ *es puntualmente estocásticamente acotada entonces, para cada* $0 < \delta' < \delta$*, existe un positivo* $M_{\delta'}$ *tal que, para cada* x *en* X*, es*

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta' - (1 - \alpha(T_i)), \ \forall i \in I.$$

Demostración. Como es usual, denotemos por $\mathbb{P}_{\Omega_0}$ la probabilidad condicional relativa al subconjunto medible Ω_0. Aplicando el corolario anterior a la familia $\{T_{i\Omega_0}\}_{i\in I}$ obtenemos que, para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe una constante, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}_{\Omega_0}[\|T_{i\Omega_0}(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \varepsilon - (1 - \alpha(T_{i\Omega_0})), \forall x \in X, \ \forall i \in I,$$

de ahí que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \mathbb{P}(\Omega_0)(\varepsilon - (1 - \alpha(T_{i\Omega_0})), \ \forall x \in X, \ \forall i \in I. \tag{6.2}$$

De otra parte, por el Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada (Teorema 2.21), para cada i de I existe un conjunto medible Ω_i tal que T_{Ω_i} es estocásticamente continuo y $\mathbb{P}[\Omega_i] = \alpha(T_i)$. Además,

$$\alpha(T_{i\Omega_0}) \geq \mathbb{P}_{\Omega_0}[\Omega_i \cap \Omega_0] \geq \frac{\alpha(T_i) + \mathbb{P}[\Omega_0] - 1}{\mathbb{P}[\Omega_0]},$$

es decir

$$\mathbb{P}[\Omega_0](1 - \alpha(T_{i\Omega_0})) \leq 1 - \alpha(T_i), \ \forall i \in I.$$

De esta manera, a partir de (6.2), podemos establecer que para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una constante, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}[\|T_i(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \delta\varepsilon - (1 - \alpha(T_i)), \ \forall x \in X; \ \forall i \in I.$$

Luego, dado $0 < \delta' < \delta$, basta tomar $\varepsilon = \frac{\delta'}{\delta}$ en la desigualdad anterior para probar el resultado. ∎

Análogamente a lo que ocurre en el caso clásico, el Teorema aleatorio de Banach-Steinhaus nos permitirá estudiar la continuidad estocástica del límite puntual estocástico de una sucesión de operadores aleatorios lineales.

DEFINICIÓN 2.40. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores aleatorios lineales de X en Y. Se dirá que un operador aleatorio lineal T, de X en Y, es el *límite puntual estocástico* de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, para cada x en X, la sucesión $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x)$ en probabilidad.

El siguiente corolario nos muestra cómo el límite puntual estocástico de una sucesión de operadores probablemente continuos es tan probablemente continuo como lo sean los términos de la sucesión, en el siguiente sentido:

COROLARIO 2.41. *Si T es límite puntual estocástico de una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores aleatorios lineales probablemente continuos entonces*

$$\alpha(T) \geq \underline{lim}\,\alpha(T_n).$$

Demostración. Si $\alpha(T) < \underline{lim}\,\alpha(T_n)$, podemos encontrar un real β tal que

$$\alpha(T) < \beta < \underline{lim}\,\alpha(T_n)$$

por lo que, considerando una parcial convergente si fuese necesario, no es restrictivo suponer que

$$\alpha(T_n) > \beta, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De otra parte, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente acotada estocásticamente y por el Corolario 2.38, dado $0 < \varepsilon < 1$, ha de existir una constante, M_ε, tal que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \varepsilon-(1-\alpha(T_n)) \geq \varepsilon-(1-\beta),\ \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esta manera, si $\tau > 0$, se tiene que

$$\begin{gathered}\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\| + \tau] \geq \\ \mathbb{P}[|\ \|(T_n - T)(x)\| - \|T_n(x)\|\ | \leq M_\varepsilon\|x\| + \tau] \geq \\ \mathbb{P}[\|(T_n - T)(x)\| < \tau, \|T_n(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \\ \mathbb{P}[\|(T_n - T)(x)\| < \tau] + \mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] - 1 \geq \\ \mathbb{P}[\|(T_n - T)(x)\| < \tau] + \varepsilon - (1-\beta) - 1,\end{gathered}$$

luego, si $n \to \infty$, concluimos que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\| + \tau] \geq \beta - (1-\varepsilon),\ \forall x \in X.$$

Si ahora $\tau \to 0$,

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_\varepsilon\|x\|] \geq \beta - (1-\varepsilon),\ \forall x \in X,$$

por lo que

$$\alpha(T) \geq \beta,$$

lo cual es imposible. ∎

El siguiente concepto responde a la consideración de una convergencia muy pobre y uifusa que en absotuto debe asociarse a la noción de límite. Sin embargo veremos que, a pesar de ello, dicha noción será transmisora de la propiedad de continuidad de los términos de la sucesión involucrada.

DEFINICIÓN 2.42. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores aleatorios y sea $0 < \delta < 1$. Decimos que un operador aleatorio, T, es un *δ-límite* de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si para todo x en X se verifica que

$$\underline{lim}\,\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] \geq \delta,\ \forall \tau > 0.$$

Obviamente:

T es el límite puntual estocástico de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, y sólo si, T es δ-límite de $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para todo δ en $]0,1[$.

Como consecuencia del Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus probaremos que a pesar de que una sucesión de operadores aleatorios lineales $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede tener un número infinito de δ-límites diferentes:

Cuando δ es suficientemente grande ($\delta > \frac{2}{3}$) y los operadores aleatorios T_n son estocásticamente continuos, entonces todos y cada uno de los δ-límites, T, de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ han de ser probablemente continuos. Además, cuanto más grande sea δ, más grande será el grado de continuidad estocástica ($\alpha(T)$) del operador T. En particular si T es el límite puntual estocástico de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces T es estocásticamente continuo (esto es, cuando δ vale uno, $\alpha(T)$ también es uno).

La afirmación anterior no es más que una interpretación del siguiente resultado que se obtiene a partir del Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada y del Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus.

COROLARIO 2.43. *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores aleatorios lineales estocásticamente continuos y sea T un operador aleatorio lineal tal que existe $\delta > \frac{2}{3}$ satisfaciendo que, para cada x en X,*

$$\underline{lim}\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] \geq \delta, \ \forall \tau > 0,$$

entonces T es probablemente continuo y

$$\alpha(T) \geq 3\delta - 2.$$

Demostración. Sea $0 < \delta' < 3\delta - 2$. Ya que $\frac{2+\delta'-\delta}{2} < \delta$, ha de verificarse por hipótesis que, para cada x en X, existe un natural m que depende de x y es tal que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq 1] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \geq m,$$

lo que demuestra que, para conveniente constante N_x, ha de ser

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq N_x] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \geq m.$$

En consecuencia, para todo x en X, ha de existir una constante $M_x > 0$ satisfaciendo que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_x] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que permite, en virtud del Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus, obtener una constante $M_{\delta'}$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq (1+\delta'-\delta) - (1-\alpha(T_n)), \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que, para cada natural n, el operador T_n es estocásticamente continuo, el Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada (Teorema 2.21) nos asegura que

$$\alpha(T_n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y de este modo,

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq (1+\delta'-\delta), \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

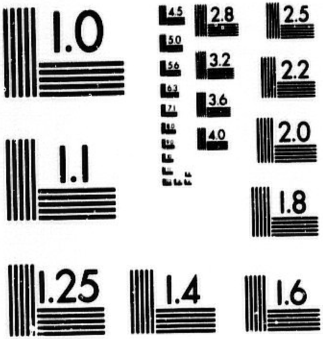
Si ahora argumentamos como en el corolario anterior entonces, para $\tau > 0$, se verifica que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\| + \tau] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] + \mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] - 1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\| + \tau] \geq$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

Demostración. Sea $0 < \delta' < 3\delta - 2$. Ya que $\frac{2+\delta'-\delta}{2} < \delta$, ha de verificarse por hipótesis que, para cada x en X, existe un natural m que depende de x y es tal que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq 1] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \geq m,$$

lo que demuestra que, para conveniente constante N_x, ha de ser

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq N_x] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \geq m.$$

En consecuencia, para todo x en X, ha de existir una constante $M_x > 0$ satisfaciendo que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_x] > \frac{2+\delta'-\delta}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que permite, en virtud del Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus, obtener una constante $M_{\delta'}$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq (1+\delta'-\delta) - (1-\alpha(T_n)), \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que, para cada natural n, el operador T_n es estocásticamente continuo, el Teorema Aleatorio de la Gráfica Cerrada (Teorema 2.21) nos asegura que

$$\alpha(T_n) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y de este modo,

$$\mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq (1+\delta'-\delta), \ \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si ahora argumentamos como en el corolario anterior entonces, para $\tau > 0$, se verifica que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\| + \tau] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] + \mathbb{P}[\|T_n(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] - 1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\| + \tau] \geq$$

$$\underline{lim}\mathbb{P}[\|T_n(x) - T(x)\| \leq \tau] + (1 + \delta' - \delta) - 1 \geq \delta'.$$

Luego, haciendo $\tau \to 0$, concluimos que

$$\mathbb{P}[\|T(x)\| \leq M_{\delta'}\|x\|] \geq \delta', \ \forall x \in X.$$

∎

Por último veremos cómo la información obtenida en el Teorema de Banach-Steinhaus Aleatorio repercute en el estudio de la continuidad de un operador aleatorio bilineal.

Consideremos tres espacios de Banach, X, Y, Z. Como puede adivinarse, se dirá que un operador aleatorio de $X \times Y$ en Z es *bilineal* cuando sea lineal en cada una de sus variables.

COROLARIO 2.44. *Sea T un operador aleatorio bilineal de $X \times Y$ en Z y supongamos que el operador $T_y(x) := T(x,y)$, definido de X en Z, es probablemente continuo para cada y de Y mientras que el operador $T_x(y) := T(x,y)$, definido de Y en Z, es probablemente continuo parc cada x de X. Entonces T is probablemente juntamente continuo. De hecho*

$$\alpha(T) \geq max\{\alpha_X - 2(1 - \alpha_Y), \alpha_Y - 2(1 - \alpha_X)\}$$

siendo

$$\alpha_X = \inf\{\alpha(T_x) : \|x\| \leq 1\} \ y \ \alpha_Y = \inf\{\alpha(T_y) : \|y\| \leq 1\}.$$

Demostración. Consideremos $0 < \delta < \alpha_Y$. Dado que, para todo y en Y, el operador T_y es probablemente continuo, ha de existir una constante $M_y > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[\|T_y(x)\| \leq M_y] \geq \delta, \ \forall x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1.$$

Como quiera que $T_x(y) = T_y(x)$, esto demuestra que la familia $\{T_x : \|x\| \leq 1\}$ es puntualmente probablemente acotada y, gracias al Teorema Aleatorio de Banach-Steinhaus ha de existir $M_\delta > 0$ tal que, si $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, se verifica que

$$\mathbb{P}[\|T(x,y)\| \leq M_\delta] \geq (2\delta - 1) - (1 - \alpha_X).$$

De esta manera,

$$\alpha(T) \geq (2\alpha_Y - 1) - (1 - \alpha_X).$$

Un argumento análogo nos permite demostrar que para cada $0 < \delta' < \alpha_X$ existe $M_{\delta'} > 0$ tal que, siendo $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, ha de satisfacerse que

$$\mathbb{P}[\|T(x,y)\| \leq M_{\delta'}] \geq (2\delta' - 1) - (1 - \alpha_Y).$$

De ese modo

$$\alpha(T) \geq (2\alpha_X - 1) - (1 - \alpha_Y),$$

y el resultado está probado. ∎

COROLARIO 2.45. *Si un operador aleatorio bilineal es separadamente estocásticamente continuo entonces ha de ser juntamente estocásticamente continuo.*

Capítulo III

Continuidad de las derivaciones aleatorias

III.1 Derivaciones en Álgebras de Banach

Tras el asentamiento básico de la Teoría de las Algebras de Banach, una serie de disciplinas se han gestado en su seno, entre las que destaca la conocida con el nombre de *"Continuidad Automática"*. Uno de los principales problemas en los que se centra esta materia consiste en la investigación de la continuidad de las derivaciones sobre álgebras de Banach sobre las que acontece una situación de mayor o menor privilegio algebraico, tal como la semisimplicidad o la semiprimidad.

Aunque en 1953 Kaplansky [22] conjeturaba, y en 1960 Sakai [32] probaba, que las *derivaciones de una C^*-álgebra debían ser continuas*, posiblemente fuese el trabajo de Singer y Wermer [36], en 1955, el que marcó el inicio de la investigación en este tipo de cuestiones. En este trabajo los autores probaron que *la imagen de cualquier derivación continua sobre un álgebra de Banach conmutativa está contenida en el radical de ésta.* Conjeturaron así mismo que la continuidad era una condición superflua, suministrando a los Banach algebristas un problema que los mantuvo ocupados hasta el año 1987 en que Thomas lo resolvió positivamente [39]. Es justamente la posible discontinuidad de la derivación la causa del problema convirtiéndose de este modo la continuidad de las derivaciones en un álgebra de Banach en una cuestión de crucial interés. Así fue entendido por matemáticos como Curtis [9] o Johnson [20].

Fue seguramente el trabajo de Johnson y Sinclair [21] el más relevante al respecto. Debemos precisamente a estos dos autores el establecimiento de una serie de principios fundamentales que han modelado la sugestiva disciplina conocida hoy como Continuidad Automática.

En lo sucesivo A será un álgebra de Banach real o compleja, para la que hipótesis alguna de conmutatividad o presencia de unidad es supuesta. Como es sabido, en ella existe un ideal destacado, llamado *radical de Jacobson* o simplemente *radical*, que es el definido por la intersección de los núcleos de todas sus representaciones irreducibles, los cuales son denominados ideales *primitivos*. Como es usual, cuando el radical se reduzca a cero diremos que el álgebra A es *semisimple*.

Recordamos que una *derivación* sobre A es un operador lineal del álgebra A en sí misma verificando la identidad

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \ \forall a, b \in A.$$

El clásico Teorema de Johnson-Sinclair establece la siguiente conexión íntima entre la semisimplicidad y la continuidad.

TEOREMA 3.1. *(Johnson-Sinclair). Toda derivación sobre un álgebra de Banach semisimple es automáticamente continua.*

Otro problema clásico en este ámbito es el de la continuidad de las derivaciones módulo-valuadas. Como es perfectamente intuible, una *derivación de A en un A-módulo bilátero, X*, es un operador lineal $D : A \to X$ verificando la famosa condición

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \ \forall a, b \in A.$$

Ringrose [30], en 1972, prueba que *toda derivación módulo-valuada de una C^*-álgebra es continua* y posteriormente Badé y Curtis ([2], [3]) investigan condiciones sobre un álgebra de Banach A que fuerzen que toda derivación de A en un A-módulo de Banach bilátero sea continua.

El propósito del presente capítulo es presentar una extensión del Teorema de Johnson-Sinclair, justamente en este original marco que hemos elegido del *"Análisis Funcional Aleatorio"*. Nuestros resultados pueden ser también considerados como una contribución a la teoría de las derivaciones módulo valuadas, como tendremos ocasión de comprobar.

III.2 DERIVACIONES ALEATORIAS EN ÁLGEBRAS DE BANACH

Planteamos ahora una curiosa cuestión en este clásico terreno de la continuidad de las derivaciones en álgebras de Banach. El problema se enmarca en una "exótica" mezcla entre el "Análisis Aleatorio" desarrollado en el capítulo precedente y la teoría de la Continuidad Automática. Una vez delatado el contexto, la cuestión podría ya vislumbrarse.

Supongamos que para un álgebra de Banach A disponemos de un operador aleatorio lineal, D, de A en A del cual, aunque no se conoce si satisface o no la propiedad de derivación, se sabe en cambio que *"deriva"* con cierta probablilidad, esto es existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] \geq \delta, \ \forall a, b \in A.$$

¿Posee D en esta situación alguna propiedad de continuidad?.

Naturalmente, un operador aleatorio lineal, D, sobre A verificando que

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] = 1, \ \forall a, b \in A.$$

recibirá el nombre de *derivación estocástica.*

Si no se puede aspirar a tanto y la propiedad satisfecha por el operador aleatorio lineal D es tan sólo esta otra:

$$\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)] \geq \delta, \ \forall a, b \in A.$$

(para conveniente $0 < \delta < 1$) se dirá entonces que D es una *derivación probable.*

Asociamos a cada derivación probable el más grande valor de δ que satisface la propiedad anterior:

$$\delta(D) := \inf\{\mathbb{P}[D(ab) = D(a)b + aD(b)], \ a, b \in A\}$$

que es entendido como la *probabilidad de que D derive.* Obviamente:

> *Una derivación probable, D, es una derivación estocástica si, y sólo si, $\delta(D) = 1$.*

Observemos que considerando el operador aleatorio D como un operador $L_0(\mathbb{P}, A)$-valuado, toda derivación estocástica D puede ser vista como una derivación módulo-valuada en el sentido tradicional, aunque a diferencia con las clásicamente estudiadas la nuestra no toma sus valores en un espacio de Banach sino en uno de Fréchet. Téngase en cuenta esta consideración a la hora de comparar nuestros resultados con los de Badé y Curtis [2]. Démonos cuenta, por otra parte, de que la probabilidad trivial en nuestro modelo nos proporciona las clásicas derivaciones de A en A.

Lógicamente la cuestión planteada al comienzo de la sección puede reformularse en los siguientes términos:

> *1. ¿Es estocásticamente continua toda derivación estocástica de un álgebra de Banach semisimple?.*

De manera más ambiciosa:

> *2. ¿Es probablemente continua toda derivación probable de un álgebra de Banach semisimple?. ¿Existe además alguna relación entre los números $\delta(D)$ y $\alpha(D)$?.*

Dedicamos la siguiente sección justamente a dar respuesta a estas cuestiones. Previamente vamos a comprobar que en esencia el problema se reduce a la resolución de la primera cuestión.

Los operadores aleatorios, D, que disponen de algún operador condicional, D_{Ω_0}, que es una derivación estocástica son ejemplos naturales de derivaciones probables. Pero aparentemente es más fuerte la condición de tener un operador aleatorio condicional que sea una derivación estocástica que la de ser derivación probable, puesto que, si D_{Ω_0} es una derivación estocástica, entonces dados cualesquiera dos elementos a, b en A, se sabe que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \ (c.p.d.) \text{ sobre } \Omega_0,$$

mientras que si en general D es una derivación probable entonces, dados a y b en A, se sabe que existe un conjunto medible $\Omega_{a,b}$, que depende de a y de b, con $\mathbb{P}[\Omega_{a,b}] \geq \delta(D)$, tal que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \ (c.p.d.) \text{ sobre } \Omega_{a,b};$$

pero dado otro par de elementos c, d de A, no sabríamos decir qué relación existe entre $\Omega_{a,b}$ y $\Omega_{c,d}$, a diferencia de lo que ocurre en el primer caso.

El resultado principal de esta sección, muestra explícitamente cómo podemos conseguir para cada derivación probable D un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] = \delta(D)$, tal que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \ (c.p.d.) \text{ sobre } \Omega_0, \ \forall a, b \in A.$$

El resultado anterior será una consecuencia inmediata del siguiente teorema.

TEOREMA 3.2. *(Principio de Aleatorización Uniforme Multilineal). Sean $X_1, \cdots, X_n, Y$ espacios de Banach y T un operador aleatorio multilineal de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y. Las siguientes afirmaciones se verifican:*

(i) Si existe $0 < \delta < 1$ *tal que*

$$\mathbb{P}[T(x_1, \cdots, x_n) = 0] \geq \delta, \ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n,$$

entonces existe un subconjunto medible Ω_0*, con* $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$*, tal que* $T_{\Omega_0} \equiv \mathbf{0}$.

(ii) El conjunto

$$\{\mathbb{P}[\Omega'] : \ \Omega' \textit{ es medible y } T_{\Omega'} \equiv \mathbf{0}\}$$

tiene máximo, el conjunto

$$\{\mathbb{P}[T(x_1, \cdots x_n) = 0] : (x_1, \cdots x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n\}$$

tiene mínimo y ambos valores coinciden.

Demostración. Supongamos, por simplicidad, que T es bilineal y consideremos el número

$$\delta := \inf\{\mathbb{P}[T(x, y) = 0] : x \in X_1, \ y \in X_2\}.$$

Vamos a probar, por inducción, que

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_n) = 0] \geq \delta,$$

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in X_1, \ \forall y_1, \cdots, y_n \in X_2. \tag{4.1}$$

En efecto: Para $n = 1$ el resultado es cierto. Supongamos ahora que la igualdad anterior se satisface para cierto natural n. Entonces, dados ahora $(n + 1)$ elementos $x_1, \cdots, x_{n+1}$ de X_1 y otros tantos elementos $y_1, \cdots, y_{n+1}$ de X_2, tenemos por hipótesis de inducción que para cualesquiera reales positivos λ, β, ha de ser

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_{n-1}, y_{n-1}) = 0,$$

$$T(x_n - \beta x_{n+1}, y_n - \lambda y_{n+1}) = 0] =$$

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots,$$

$$T(x_n - \beta x_{n+1}, y_n) = T(x_n - \beta x_{n+1}, y_{n+1}) = 0]+$$

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n - \beta x_{n+1}, y_n) = \lambda T(x_n - \beta x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$T(x_n - \beta x_{n+1}, y_{n+1}) \neq 0],$$

por lo que, si $\lambda \to \infty$, obtenemos que

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n - \beta x_{n+1}, y_n) = 0,$$

$$T(x_n - \beta x_{n+1}, y_{n+1}) = 0].$$

Pero

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n - \beta x_{n+1}, y_n) = 0,$$

$$T(x_n - \beta x_{n+1}, y_{n+1}) = 0] \leq$$

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_n) = T(x_{n+1}, y_n) = 0,$$

$$T(x_n, y_{n+1}) = T(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0]+$$

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_n) = \beta T(x_{n+1}, y_n),$$

$$T(x_{n+1}, y_n) \neq 0]+$$

$$\mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_{n+1}) = \beta T(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$T(x_{n+1}, y_{n+1}) \neq 0],$$

por lo que, si $\beta \to \infty$, tenemos que

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_n) = 0,$$

$$T(x_{n+1}, y_n) = 0, T(x_n, y_{n+1}) = 0, T(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0],$$

y en particular se verifica que

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(x_1, y_1) = 0, \cdots, T(x_n, y_n) = 0, T(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0].$$

Ahora, sea $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $X_1 \times X_2$ tal que

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(u_n, v_n) = 0] < \delta + \frac{1}{n}, \tag{4.2}$$

Definimos el conjunto medibie

$$\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} [T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0]$$

y observamos que, en virtud de (4.1),

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0],$$

y, por (4.2),

$$\mathbb{P}[T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0] < \delta + \frac{1}{n},$$

por lo que,

$$\mathbb{P}[\Omega_0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0] = \delta.$$

Finalmente, si la igualdad $T_{\Omega_0}(x, y) = 0$ *(c.p.d.)* no fuese cierta para algún (x, y) de $X_1 \times X_2$, se tendría entonces que

$$\mathbb{P}[T(x, y) = 0, \Omega_0] < \mathbb{P}[\Omega_0] = \delta.$$

Pero,

$$\mathbb{P}[T(x, y) = 0, \Omega_0] =$$

$$\mathbb{P} \bigcap_{n=1}^{\infty} [T(x, y) = 0, T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[T(x, y) = 0, T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0],$$

por lo que, para algún natural n, ha de ser

$$\mathbb{P}[T(x, y) = 0, T(u_1, v_1) = 0, \cdots, T(u_n, v_n) = 0] < \delta,$$

lo que contradice (4.1). De esta forma,

$$\inf\{\mathbb{P}[T(x, y) = 0] : x \in X_1,\ y \in X_2\} =$$

$$\sup\{\mathbb{P}[\Omega_0] :\ T/\Omega_0 = 0 \ (c.p.d.)\} =$$

$$\mathbb{P}[\Omega_0],$$

y el resultado está probado. ∎

Si D es una derivación probable el Principio de Aleatorización Uniforme Multilineal aplicado al operador aleatorio bilineal

$$T(a,b) := D(ab) - D(a)b - aD(b),$$

permite obtener el siguiente resultado que tendrá serias repercusiones en el estudio de la continuidad de D como veremos en la próxima sección.

COROLARIO 3.3. *Un operador aleatorio lineal, D, es una derivación probable si, y sólo si, existe un subconjunto medible, Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] = \delta(D)$, tal que el operador condicional D_{Ω_0} es una derivación estocástica.*

Queda ahora perfectamente justificado el haber calificado a la cantidad $\delta(D)$, que según vemos es un máximo, como la *probabilidad con la que D deriva.*

III.3 CONTINUIDAD DE LAS DERIVACIONES ALEATORIAS

Dedicamos esta sección a probar la siguiente generalización en el sentido estocástico del conocido Teorema de Johnson-Sinclair [21]:

Toda derivación estocástica definida sobre un álgebra de Banach semisimple ha de ser estocásticamente continua.

Para ello, al igual que se hizo en el caso clásico, vamos a trabajar, por un lado, con los ideales primitivos de codimensión infinita del álgebra sobre la que se define el operador aleatorio y, por otro, con los correspondientes ideales de codimendión finita, por lo que esta sección quedará dividida en tres partes: una encaminada a estudiar el comportamiento de los ideales primitivos de codimensión infinita con respecto a los elementos del separador de la derivación estocástica, otra cuyo objetivo es análogo pero ahora para los ideales de codimensión finita y una tercera en la que se obtiene finalmente la continuidad de la derivación estocástica a partir de nuestra investigación anterior.

Las subsecciones de las que consta este apartado van precedidas de un lema que será esencial para la conclusión de los resultados básicos de cualesquiera de ellas. Como decíamos en la Sección 1.1, en dicho lema codificamos el hecho de que las variables aleatorias que consideramos tienen rango esencialmente separable (Teorema 1.4) y lo traducimos al lenguaje de los conjuntos, en este caso cerrados, obteniendo como fruto de esta sintetización un resultado extremadamente útil y a la vez fácil de aplicar.

Dado un conjunto J denotamos por $\mathcal{F}(J)$ a la familia de todas las partes finitas de J.

LEMA 3.4. *Sea $\{Q_j : j \in J\}$ una familia de subconjuntos cerrados de un espacio de Banach Y. Entonces, para cada* $\mathbf{y}$ *de $\mathcal{L}_0(\Omega, Y)$, se verifica que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j] = \inf_{F\in\mathcal{F}(J)} \{\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in F} Q_j]\}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{y}$ un elemento de $\mathcal{L}_0(\Omega, Y)$. En virtud del Teorema 1.4, asociado a dicho elemento $\mathbf{y}$, existirá un subespacio cerrado y separable de Y, que denotaremos por Y_0, en el cual $\mathbf{y}$ tomará sus valores casi seguramente, por lo que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j] = \mathbb{P}[\mathbf{y} \in (\bigcap_{j\in J} Q_j) \cap Y_0].$$

La separabilidad de Y_0 garantiza, gracias al Teorema 13.13 de [23], la existencia de una sucesión $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de J, tal que

$$Y_0 \setminus \bigcap_{j\in J} Q_j = \bigcup_{j\in J}(Y_0 \setminus Q_j) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y_0 \setminus Q_{j_n}) = Y_0 \setminus (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_{j_n}).$$

y de esta manera,

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in (\bigcap_{j\in J} Q_j) \cap Y_0] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_{j_n}) \cap Y_0] =$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_{j_n}] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{k=1}^{k=n} Q_{j_k}],$$

lo que prueba que $\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j]$ es límite de una sucesión de elementos del conjunto

$$\{\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in F} Q_j] : \ F \in \mathcal{F}(J)\}.$$

Pero además también se verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j] \leq \mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in F} Q_j], \forall F \in \mathcal{F}(J),$$

esto es $\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{j\in J} Q_j]$ es cota inferior del conjunto anterior, lo que concluye la prueba. ∎

A lo largo de toda esta sección D designará una derivación estocástica definida sobre un álgebra de Banach A.

Dado el papel primordial que a partir de ahora desempeñarán los ideales primitivos del álgebra de Banach A convendrá recordar que *un tal ideal es siempre cerrado y puede ser obtenido como el núcleo de una representación irreducible y continua sobre un espacio de Banach* ([7], Proposition 24.12, Theorem 25.7).

2.1. *Trabajando con los ideales primitivos de codimensión infinita.*

A semejanza con la argumentación de Johnson y Sinclair, encaminamos nuestros primeros pasos a conseguir una sucesión apropiada para abordar nuestro problema de continuidad automática, lo que nos conduce al siguiente refinamiento del Lema 2.1 de [21].

LEMA 3.5 . *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional tal que A puede ser representada de manera irreducible sobre X. Sea $\mathcal{D}$ el centralizador de A en X. Si los vectores $x_0, x_1, \cdots \in X$ son linealmente independientes sobre $\mathcal{D}$ entonces, dado un elemento y de $X \setminus \{0\}$, existe un elemento a en A verificando que*

$$ax_0 = 0,$$

$$ax_1 = y$$

y

$$ax_1, ax_2, \cdots \text{ son } \mathcal{D} - \text{independientes.}$$

Demostración. Por el Teorema de Densidad de Jacobson ([7], Theorem 24.10) existe b_1 en A tal que

$$b_1 x_0 = 0$$

y

$$b_1 x_1 = y.$$

Puesto que X es infinito dimensional sobre $\mathcal{D}$, siendo $\mathcal{D}$ finito dimensional ([29], Lemma 2.4.4), podemos encontrar un vector y_2, en X, que no sea combinación lineal (sobre $\mathcal{D}$) de los vectores b_1x_1, b_1x_2. De nuevo por el Teorema de Densidad de Jacobson existe un elemento c_2 en A tal que

$$c_2x_1 = c_2x_0 = 0$$

y

$$c_2x_2 = y_2,$$

por lo que, multiplicando c_2 por conveniente constante, obtenemos un elemento b_2 de A satisfaciendo las tres condiciones siguientes:

$$\|b_2\| \leq \frac{1}{2},$$

$$b_2x_1 = b_2x_0 = 0,$$

y

b_2x_2 no es combinación lineal (sobre $\mathcal{D}$) de b_1x_1, y b_1x_2.

Mediante un razonamiento análogo se prueba que, para todo $n \geq 2$, existe un elemento b_n, en A, tal que

$$\|b_n\| \leq \frac{1}{2^n},$$

$$b_nx_{n-1} = \cdots = b_nx_0 = 0,$$

y

b_nx_n no es combinación lineal (sobre $\mathcal{D}$) de

$$(\sum_{i=1}^{n-1} b_i)x_1, \cdots, (\sum_{i=1}^{n-1} b_i)x_n.$$

De este modo, definiendo

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

tenemos que $ax_0 = 0$ y que $ax_1 = y$, obviamente. Además, si $m < n$,

$$ax_n = b_n x_n + (\sum_{i=1}^{n-1} b_i)x_n \text{ y } ax_m = (\sum_{i=1}^{n-1} b_i)x_m \text{ son } \mathcal{D}\text{-independientes.}$$

∎

Dado un A-módulo de Banach, X, y un elemento suyo, x, denotamos por D_x el operador aleatorio lineal de A en X definido por

$$D_x(a) = D(a)x, \ \forall a \in A$$

(donde $(D(a)x)(\omega) = D(a)(\omega)x$, $\forall \omega \in \Omega$).

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 2.2 de [21].

LEMA 3.6. *Si X es un A-modulo de Banach infinito dimensional e irreducible entonces, para todo x en X, el operador aleatorio*

$$D_x : a \rightarrow D(a)x$$

es estocásticamente continuo.

Demostración. Supongamos que existe un vector y in X tal que el operador aleatorio D_y no es estocásticamente continuo y deduzcamos una contradicción a partir de este hecho.

Denotemos por $\mathcal{D}$ el centralizador de A en X. Puesto que $\mathcal{D}$ es finito dimensional ([29], Lemma 2.4.4) ha de ser X infinito dimensional sobre $\mathcal{D}$ por lo que será posible encontrar un conjunto numerable $\{x_0, x_1, \cdots\}$ de vectores $\mathcal{D}$-independientes de X tales que $\|x_n\| = 1$. Aplicando inductivamente el lema anterior obtenemos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A satisfaciendo que, para cada natural n,

$$a_n \cdots a_1 x_{n-1} = 0, \tag{1.1}$$

$$a_n \cdots a_1 x_n = y, \tag{1.2}$$

y

$$\{a_n \cdots a_1 x_j,\ j \geq n\} \text{ son } \mathcal{D}\text{-independientes.}$$

Además, podemos suponer que

$$\|a_n\| \leq \frac{1}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

sin más que sustituir (1.2) por

$$a_n \cdots a_1 x_n = \tau_n y \tag{1.4}$$

donde τ_n es conveniente constante positiva.

Dado que el operador aleatorio D_y no es estocásticamente continuo, encontramos un positivo, $0 < \delta < 1$, verificando la condición obtenida en el segundo apartado del Corolario 2.5. Ello hace posible construir inductivamente vectores b_n verificando las tres condiciones siguientes:

$$\|b_{n+1}\| \leq \|b_n\| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{P}[\|b_n\| \leq (1 + \|D(a_j \cdots a_1)\|)^{-1}] \geq 1 - \frac{1}{n},\ 1 \leq j \leq n, \tag{1.6}$$

y

$$\mathbb{P}[\|D(b_n)\tau_n y\| \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\|] \geq \delta,\ \forall n \geq 2. \tag{1.7}$$

Definamos ahora los elementos

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} b_j a_j \cdots a_1$$

y

$$c_n = b_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} b_j a_j \cdots a_{n+2}$$

(dados por series que son absolutamente convergentes).

Ya que

$$D(c) = \sum_{j=1}^{n-1} D(b_j a_j \cdots a_1) + D(b_n) a_n \cdots a_1 + b_n D(a_n \cdots a_1) +$$

$$D(c_n)a_{n+1}\cdots a_1 + c_n D(a_{n+1}\cdots a_1), \quad (c.p.d.),$$

se tiene, por (1.1) y (1.4), que

$$D(c)x_n = \sum_{j=1}^{n-1} D(b_j a_j \cdots a_1)x_n + D(b_n)\tau_n y +$$

$$b_n D(a_n \cdots a_1)x_n + c_n D(a_{n+1}\cdots a_1)x_n \quad (c.p.d.).$$

De esta manera

$$\|D(c)x_n\| \geq \|D(b_n)\tau_n y\| - \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\| -$$

$$\|b_n\|\|D(a_n\cdots a_1)\| - \|c_n\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \quad (c.p.d.).$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}[\|D(c)\| \geq n-3] \geq \mathbb{P}[\|D(c)x_n\| \geq n-3] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|D(b_n)\tau_n y\| \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\|, \|b_n\|\|D(a_n\cdots a_1)\| \leq 1,$$

$$\|c_n\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \leq 2] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|D(b_n)\tau_n y\| \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\|] +$$

$$\mathbb{P}[\|b_n\|\|D(a_n\cdots a_1)\| \leq 1] + \mathbb{P}[\|c_n\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \leq 2] - 2. \quad (1.8)$$

Pero observemos que

$$\mathbb{P}[\|b_n\|\|D(a_n\cdots a_1)\| \leq 1] \geq \mathbb{P}[\|b_n\| \leq (1 + \|D(a_n\cdots a_1)\|)^{-1}],$$

por lo que, en virtud de (1.6),

$$\mathbb{P}[\|b_n\|\|D(a_n\cdots a_1)\| \leq 1] \geq 1 - \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

De otra parte, por (1.3) y (1.5), se tiene que

$$\|c_n\| \leq 2\|b_{n+1}\|$$

de donde,

$$\mathbb{P}[\|c_n\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \leq 2] \geq \mathbb{P}[\|b_{n+1}\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \leq 1]$$

y, por (1.9),

$$\mathbb{P}[\|D(c_n)\|\|D(a_{n+1}\cdots a_1)\| \leq 2] \geq (1 - \frac{1}{n+1}) \geq (1 - \frac{1}{n}). \quad (1.10)$$

Por consiguiente, a partir de (1.8), y aplicando (1.7), (1.9) y (1.10), concluimos que,

$$\mathbb{P}[\|D(c)\| \geq n - 3] \geq \delta + (1 - \frac{1}{n}) + (1 - \frac{1}{n}) - 2 = \delta - \frac{2}{n}.$$

Haciendo que n diverja positivamente obtenemos una contradicción que prueba el resultado. ∎

Usaremos ahora la propiedad de continuidad encontrada en el lema anterior para demostrar que *si P es un ideal primitivo de codimensión infinita entonces ha de ser*

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in P] = 1, \ \forall \mathbf{b} \in \mathcal{S}(D).$$

Para ello, dado un A-módulo de Banach X, definamos para cada x de X el conjunto

$$\ker x := \{a \in A : \ ax = 0\}.$$

Recordamos que *si P es un ideal primitivo de A, entonces ha de existir un A-módulo de Banach irreducible X tal que P se exprese de la forma*

$$P = \bigcap_{x \in X} \ker x,$$

([7], Proposition 24.12). Obviamente la información que poseemos, a partir del lema anterior, es que para un tal X de dimensión infinita se verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \ker x] = 1, \ \forall \mathbf{b} \in \mathcal{S}(D), \ \forall x \in X.$$

Obsérvese ahora cómo se choca de plano con la infinito dimensionalidad del módulo X, responsable de que no podamos afirmar a partir de la igualdad anterior que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in P] = 1, \ \forall \mathbf{b} \in \mathcal{S}(D).$$

Sucede que la información conseguida, válida de manera elemental para intersecciones finitas de sucesos, "se nos va de las manos" al tener que considerar intersecciones infinitas. Como veremos a continuación, precisamente este es el momento en que entra en juego el Lema 3.4.

TEOREMA 3.7. *Para todo* $\mathbf{b}$ *en* $\mathcal{S}(D)$ *se satisface que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in P] = 1.$$

Demostración. Sea P un ideal primitivo de A de codimensión infinita. Sea X el A-módulo correspondiente a una representación irreducible de A cuyo núcleo es P. Puesto que la dimensión de X es infinita, estamos en las hipótesis del lema anterior por lo que el operador $D_x : a \to D(a)x$ es estocásticamente continuo, para todo x de X. Así, si $\mathbf{b}$ es un elemento de $\mathcal{S}(D)$, se satisface que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b}x = 0] = 1, \ \ \forall x \in X,$$

o lo que es lo mismo, según la notación introducida anteriormente,

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \ker x] = 1, \ \ \forall x \in X.$$

A partir de esta igualdad es inmediato deducir que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{x \in F} \ker x] = 1,$$

para todo subconjunto finito, F, de X.

Dado que $\{\ker x : \ x \in X\}$ es una familia de ideales cerrados de A, el Lema 3.4 muestra que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{x \in X} \ker x] = 1,$$

y en consecuencia
$$\mathbb{P}[\mathrm{b} \in P] = 1.$$
∎

Convenimos que, a partir de ahora, la familia de todos los ideales primitivos de A será designada por $\{P_i\}_{i\in I}$, distinguiéndose dos subfamilias de ésta: la de todos los ideales primitivos de A de codimensión infinita, que denotamos por $\{P_i\}_{i\in I_1}$, y la familia $\{P_i\}_{i\in I_2}$, constituida por aquellos que poseen codimensión finita.

Nuestro objetivo final en esta subsección es probar que
$$\mathbb{P}[\mathrm{b} \in \bigcap_{i\in I_1} P_i] = 1.$$

Ahora es la posible no finitud del conjunto de los ideales primitivos de codimensión infinita la que nos impide alcanzar nuestra meta pero otra vez el Lema 3.4 vendrá en nuestra ayuda y fulminará el problema.

TEOREMA 3.8. *Para todo* b *en* $S(D)$ *se satisface que*
$$\mathbb{P}[\mathrm{b} \in \bigcap_{i\in I_1} P_i] = 1.$$

Demostración. Basta aplicar, teniendo presente el teorema anterior, el Lema 3.4 a la familia $\{P_i : i \in I_1\}$, para concluir el resultado. ∎

2.2. *Trabajando con los ideales primitivos de codimensión finita.*

Llegaremos a plantear el resultado principal de esta subsección, contando brevemente su historia. La correspondiente parte del trabajo de Johnson y Sinclair culmina probando que:

Dada una derivación D sobre un álgebra de Banach A, la aplicación $a \rightarrow D(a) + P$ de A en A/P es continua para cada ideal primitivo P, de A, de codimensión finita salvo quizás para un número finito de ellos.

Tal resultado sería usado posteriormente para probar la continuidad de las derivaciones definidas sobre álgebras de Banach semisimples, de la siguiente forma más débil:

Si D es una derivación sobre un álgebra de Banach A entonces cada elemento b del separador de D pertenece a todos los ideales primitivos de A de codimensión finita salvo quizás a un número finito de ellos.

Esto nos llevó a pensar que en esta etapa nuestro objetivo sería probar que:

Si D es una derivación estocástica sobre un álgebra de Banach A entonces existe un subconjunto finito F de I_2 tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i \in I_2 \setminus F} P_i] = 1, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}(D),$$

donde, como ya se ha dicho,

$$I_2 := \{i \in I : \ P_i \textit{ tiene codimensión finita}\}.$$

Para probar tal enunciado no bastaría con hacer una mera traducción al lenguaje estocástico de la prueba del correspondiente resultado de Johnson y Sinclair pues su argumento era análogo al empleado al trabajar con los ideales primitivos de codimensión infinita; razonamiento que como hemos visto se pone en marcha a partir de la obtención de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que nosotros estuvimos obligados a elegir de manera más "fina" (Lema 3.5) en aquel otro caso. En esta nueva situación era impensable obtener un refinamiento del estilo al conseguido en el Lema 3.5 que nos proporcionara la deseada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puesto que el espíritu de dicho lema quedaba en este caso fuera de contexto.

Pronto descubriríamos que nuestro verdadero problema no sólo consistía en que el argumento de Johnson y Sinclair no era trasladable a nuestro ambiente sino que el primer planteamiento inadecuado era la tesis esperada.

Empezaremos, como hicimos entonces, por descubrir todo el misterio que la famosa sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ encierra. A ello dedicamos el siguiente lema cuyo enunciado, aunque no tiene nada que ver con el de los lemas 3.1 y 3.2 de [21], descodifica sin embargo toda la información oculta que subyace en ellos. Confesamos que en la elaboración de esta síntesis sirvieron de inspiración los lemas 2.2 , 2.3 y 2.6 de [42].

LEMA 3.9. *Sea $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ideales de A tal que*

(i) Q_n tiene codimensión finita, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) A/Q_n tiene unidad, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(iii) $Q_n + Q_m = A$, para todo $n \neq m$.

Entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A satisfaciendo que, para cada k en $\mathbb{N}$,

(i) $a_k + Q_n = 0$, $n = 1, \cdots, k-1$,

(ii) $a_k + Q_n$ es inversible, $\forall n \geq k$,

(iii) $\|a_k\| \leq 1$.

Demostración. Realizaremos la demostración en tres etapas.

En una *primera etapa* probamos que:

$$\textit{Para cada natural } n, \textit{ se verifica que } Q_m + \bigcap_{j=1}^{n} Q_j = A,$$

$\forall m > n$.

En efecto. Sea

$$n := \max\{k \in \{1, \cdots, m-1\} : Q_m + \bigcap_{j=1}^{k} Q_j = A\}.$$

Si $n < m - 1$ entonces, para cada elemento a de A, deben existir a_1 en Q_m y b_1 en $\bigcap_{j=1}^{n} Q_j$ tales que

$$a = a_1 + b_1.$$

Sea u una unidad modular de Q_m (que existe ya que A/Q_m posee unidad). Puesto que $A = Q_m + Q_{n+1}$, podemos encontrar a_2 en Q_m y b_2 en Q_{n+1} tales que $u = a_2 + b_2$, por lo que

$$au = (a_1(a_2 + b_2) + b_1 a_2) + b_1 b_2 \in Q_m + \bigcap_{j=1}^{n+1} Q_j.$$

De este modo,

$$a = (a - au) + au \in Q_m + \bigcap_{j=1}^{n+1} Q_j,$$

lo que contradice la definición de n.

Ahora, en una *segunda etapa* mostramos que:

El homomorfismo

$$a \to (a + Q_1, \cdots, a + Q_n),$$

de A *en* $\bigoplus_{j=1}^{n} A/Q_j$ *es sobreyectivo, para todo natural* n.

En efecto. Si $n = 1$ es obvio. Supongamos que el resultado es cierto para algún natural n y consideremos $(n+1)$ elementos, $a_1, \cdots, a_{n+1}$, del álgebra A. Por hipótesis de inducción existe b en A tal que

$$b + Q_k = a_k + Q_k, \ \forall k = 1, \cdots, n.$$

De otra parte, dado que en virtud de la etapa anterior es

$$Q_{n+1} + \bigcap_{k=1}^{n} Q_k = A,$$

han de existir b_1 en Q_{n+1} y b_2 en $\bigcap_{k=1}^{n} Q_k$ tales que

$$b - a_{n+1} = b_1 + b_2.$$

Definamos

$$a := b - b_2.$$

Se tiene entonces que

$$a - a_{n+1} = b - b_2 - a_{n+1} = b_1 \in Q_{n+1},$$

por lo que

$$a + Q_{n+1} = a_{n+1} + Q_{n+1}.$$

Además, por la forma de elegir b, se verifica que

$$a - a_k = (b - a_k) - b_2 \in Q_k, \ \forall k = 1, \cdots, n,$$

lo que muestra que

$$a + Q_k = a_k + Q_k, \ \forall k = 1, \cdots, n.$$

En consecuencia, la aplicación

$$a \to (a + Q_1, \cdots, a + Q_n)$$

es sobreyectiva.

Tercera etapa. Para cada $m = n, n+1, \cdots$, puede encontrarse, gracias a la etapa anterior, b_m en A verificando que

$$b_m + Q_k = 0, \ k = 1, \cdots, m-1,$$

y que, denotando por $u + Q_m$ la unidad de A/Q_m,

$$b_m + Q_m = u + Q_m.$$

Definamos ahora

$$a_n := \sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m b_m,$$

donde los λ_m son escalares, elegidos por inducción, satisfaciendo que

$$\|\lambda_m b_m\| \leq 2^{-m}$$

y además que

$$\sum_{k=n}^{m-1} \lambda_k(b_k + Q_m) + \lambda_m(u + Q_m) \in inv(A/Q_m)$$

lo cual es posible ya que A/Q_m es finito dimensional y en consecuencia el espectro de cada uno de sus elementos es finito ([7], Section 45).

Para concluir el resultado, obsérvese que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así obtenida verifica las propiedades deseadas. ∎

Llegados a este punto un ingenioso y concienzudo análisis de la situación nos permitió adivinar el comportamiento que cabría esperar de los ideales primitivos de codimensión finita con respecto a los elementos del separador. Queda éste recogido en el siguiente enunciado.

TEOREMA 3.10. *Sea* **b** *un elemento de* $S(D)$. *Entonces, para cada* $0 < \varepsilon < 1$, *existe un subconjunto finito* F_ε, *de* I_2, *tal que*

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_2\setminus F_\varepsilon} P_i] \geq \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que, por el contrario, existe $0 < \varepsilon_0 < 1$ tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_2\setminus F} P_i] < \varepsilon_0, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ de } I_2.$$

Ya que $\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_2} P_i] < \varepsilon_0$, el Lema 3.4 muestra que existe un subconjunto finito F_1 de I_2 tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_2} P_i] \leq \mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in F_1} P_i] < \varepsilon_0.$$

Obtenemos así inductivamente, aplicando el Lema 3.4, una sucesión de subconjuntos finitos de I_2, denotada por $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, satisfaciendo que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{I_2\setminus(F_1\cup\cdots\cup F_{n-1})} P_i] \leq \mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in F_n} P_i] < \varepsilon_0$$

y que

$$F_n \cap (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}) = \emptyset, \ \forall n > 1.$$

Ahora definimos

$$Q_n = \bigcap_{i\in F_n} P_i, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que A/Q_n es isomorfo a $\bigoplus_{i\in F_n}(A/P_i)$ (ver [21], Lemma 3.1) la codimensión de Q_n es finita. De otra parte A/P es un álgebra de Banach primitiva, para cada ideal primitivo P ([7], Proposition 26.9), por lo que ha de ser también semisimple ([7], Proposition 24.14). Si en adición la codimensión de P es finita entonces A/P tiene unidad ([1], Theorem 3.1) y por tanto el álgebra cociente A/Q_n también tendrá unidad.

Dado que $(P_n + P_m)/P_n$ y $(P_n + P_m)/P_m$ son ideales biláteros de las álgebras simples A/P_n y A/P_m, respectivamente, se tiene que

$$P_n + P_m = A, \ \forall n \neq m.$$

De esta manera, una lectura de la primera etapa del anterior resultado permite comprobar que si m no pertenece a F_n entonces,

$$P_k + Q_m = A, \forall k \in F_n,$$

y aplicando el mismo argumento otra vez deducimos que

$$Q_n + Q_m = A, \forall n \neq m.$$

En este momento acabamos de probar que estamos en las hipótesis del lema anterior por lo que existirá una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de A, verificando que

$$a_k + Q_n = 0, \ \forall n = 1, \cdots, k-1, \tag{2.1}$$

$$a_k + Q_n \text{ is invertible, } \forall n \geq k$$

y que

$$\|a_k\| \leq 1. \tag{2.2}$$

Ahora, consideremos un real δ en el intervalo $]0, 1 - \varepsilon_0[$. Puesto que, para cada natural n, el operador aleatorio lineal $\Pi_{Q_n} D$, de A en A/Q_n, dado por

$$a \to D(a) + Q_n,$$

satisface que

$$\alpha(\Pi_{Q_n} D) = \inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] : \mathbf{y} \in \mathcal{S}(\Pi_{Q_n} D)\} \leq$$

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in Q_n] < \varepsilon_0,$$

se tiene que es posible conseguir (véase Corolario 2.25), inductivamente, una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos de A, satisfaciendo las tres condiciones siguientes:

$$\|b_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{P}[\|b_n\| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\|)^{-1}] \geq 1 - \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

y, $\forall n \geq 2$,

$$\mathbb{P}[\|D(b_n) + Q_n\| \geq \prod_{j=1}^{n} \|(a_j + Q_n)^{-1}\| (n + \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\|)] > \delta. \tag{2.4}$$

Definimos ahora,

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} b_j a_j \cdots a_1.$$

Aplicando (2.1) se tiene que

$$D(c) + Q_n = \sum_{j=1}^{n-1} (D(b_j a_j \cdots a_1) + Q_n) +$$

$$(D(b_n)+Q_n)(a_n+Q_n)\cdots(a_1+Q_n)+$$

$$(b_n+Q_n)(D(a_n)+Q_n)\cdots(a_1+Q_n)+$$

$$\cdots+(b_n+Q_n)(a_n+Q_n)\cdots(D(a_1)+Q_n)+$$

$$(b_{n+1}+Q_n)(D(a_{n+1})+Q_n)(a_n+Q_n)\cdots(a_1+Q_n)\ (c.p.d.).$$

y dado que

$$\|D(b_n)+Q_n\| \leq$$

$$\|(D(b_n)+Q_n)(a_n+Q_n)\cdots(a_1+Q_n)\| \prod_{j=1}^{n} \|(a_j+Q_n)^{-1}\|$$

obtenemos a partir de (2.2) que

$$\|D(c)\| \geq \|D(c)+Q_n\| \geq$$

$$\|D(b_n)+Q_n\| \prod_{j=1}^{n} \|(a_j+Q_n)^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\| -$$

$$\|b_n\| \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\| - \|b_{n+1}\| \|D(a_{n+1})\|\ (c.p.d.),$$

y así,

$$\mathbb{P}[\|D(c)\| \geq n-2] \geq \mathbb{P}[\|D(c)+Q_n\| \geq n-2] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|D(b_n)+Q_n\| \prod_{j=1}^{n} \|(a_j+Q_n)^{-1}\|^{-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\| \geq n,$$

$$\|b_n\| \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\| \leq 1, \|b_{n+1}\| \|D(a_{n+1}\| \leq 1] \geq$$

$$\mathbb{P}[\|D(b_n) + Q_n\| \geq \prod_{j=1}^{n} \|(a_j + Q_n)^{-1}\| (n + \sum_{j=1}^{n-1} \|D(b_j a_j \cdots a_1)\|)] +$$

$$\mathbb{P}[\|b_n\| \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\| \leq 1] + \mathbb{P}[\|b_{n+1}\| \|D(a_{n+1})\| \leq 1] - 2. \qquad (2.5)$$

Puesto que

$$\mathbb{P}[\|b_n\| \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\| \leq 1] \geq \mathbb{P}[\|b_n\| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\|)^{-1}]$$

tenemos, en virtud de (2.3), que

$$\mathbb{P}[\|b_n\| \sum_{j=1}^{n} \|D(a_j)\| \leq 1] \geq 1 - \frac{1}{n}. \qquad (2.6)$$

Observemos además que,

$$\mathbb{P}[\|b_{n+1}\| \|D(a_{n+1})\| \leq 1] \geq \mathbb{P}[\|b_{n+1}\| \leq (1 + \sum_{j=1}^{n+1} \|D(a_j)\|)^{-1}],$$

por lo que según (2.3) se obtiene que

$$\mathbb{P}[\|b_{n+1}\| \|D(a_{n+1})\| \leq 1] \geq 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n}. \qquad (2.7)$$

Finalmente aplicando (2.6) y (2.7) deducimos como consecuencia de (2.5) que

$$\mathbb{P}[\|D(c)\| \geq n - 2] \geq \delta + 2(1 - \frac{1}{n}) - 2 = \delta - \frac{2}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual es imposible. ∎

2.3. *El resultado principal.*

Probamos en este apartado el resultado fundamental de esta sección a partir de los teoremas 3.8 y 3.10, obteniendo una extensión del resultado clásico correspondiente.

TEOREMA 3.11. *(Teorema Aleatorio de Johnson-Sinclair). Toda derivación estocástica definida sobre un álgebra de Banach semisimple es estocásticamente continua.*

Demostración. Sea D una tal derivación y sea $\mathbf{b}$ un elemento de $\mathcal{S}(D)$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, por el Teorema 3.10, existe un subconjunto finito, F_ε, de I_2 tal que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i \in I_2 \setminus F_\varepsilon} P_i] \geq \varepsilon$$

y, por el Teorema 3.8, ha de ser

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i \in I_1} P_i] = 1$$

por lo que, si el conjunto $(I_1 \cup I_2) \setminus F_\varepsilon = I \setminus F_\varepsilon$ es denotado por I_0, entonces se verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i \in I_0} P_i] \geq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Dado que A es semisimple, la aplicación

$$a \to \bigoplus_{i \in F_\varepsilon} (a + P_i),$$

de $\bigcap_{i \in I_0} P_i$ en $\bigoplus_{i \in F_\varepsilon} (A/P_i)$, es inyectiva. De esta manera $\bigcap_{i \in I_0} P_i$ es una subálgebra finito dimensional y semisimple de A; y en consecuencia ha de tener unidad ([1], Theorem 3.1.1), que denotaremos por e. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A convergente a cero y tal que

$\{D(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a b en probabilidad. Entonces $\{D(ea_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a eb en probabilidad por lo que el elemento eb ha de pertenecer al subespacio separador de la restricción de D a $\bigcap_{i\in I_0} P_i$. Pero dicha restricción es estocásticamente continua ya que $\bigcap_{i\in I_0} P_i$ es finito dimensional y de ahí que sea $e\mathbf{b} = 0$ *(c.p.d.)*. De esta manera se verifica que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} = 0] = \mathbb{P}[e\mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_0} P_i] = \mathbb{P}[\mathbf{b} \in \bigcap_{i\in I_0} P_i],$$

por lo que en virtud de (3.1) es

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} = 0] \geq \varepsilon.$$

Pero dado que ε es arbitrario concluimos que

$$\mathbb{P}[\mathbf{b} = 0] = 1.$$

esto es, el operador aleatorio D es estocásticamente continuo. ∎

Sea D una derivación probable. Como consecuencia del Principio de Aleatorización Uniforme Multilineal (en la versión del Corolario 3.3) ha de existir un operador condicional D_{Ω_0} (con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta(D)$) que sea una derivación estocástica de donde, en virtud del Teorema Aleatorio de Johnson-Sinclair, si el álgebra sobre la que se define D es semisimple entonces D_{Ω_0} ha de ser un operador estocásticamente continuo, obteniéndose el siguiente resultado:

COROLARIO 3.12 . *Toda derivación probable D definida sobre un álgebra de Banach semisimple es probablemente continua. De hecho, la probabilidad de que D sea continua es al menos la probabilidad de que D derive es decir,*

$$\alpha(D) \geq \delta(D).$$

Nótese que cuando $\delta(D) = 1$ (es decir cuando D es una derivación estocástica) se obtiene el Teorema Aleatorio de Johnson-Sinclair como caso particular del corolario anterior.

COROLARIO 3.13. *Si D es una derivación estocástica con momento de orden r definida sobre un álgebra de Banach semisimple, entonces D es continua en media r-ésima.*

Demostración. El Teorema Aleatorio de Johnson y Sinclair (Teorema 3.11) nos permite obtener la continuidad estocástica de D y el Teorema 2.10 nos proporciona la continuidad estocástica en media r-ésima. ∎

III.4 DERIVACIONES DE JORDAN EN ÁLGEBRAS DE BANACH

Un tipo particular de derivación que podríamos calificar de *"no asociativa"* ocupó la atención de los investigadores en continuidad automática durante algún tiempo. Son éstas las *derivaciones de Jordan*; operadores lineales D de un álgebra de Banach A en sí misma que verifican la siguiente propiedad

$$D(a^2) = aD(a) + D(a)a, \ \forall a \in A,$$

o equivalentemente esta otra

$$D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b, \ \forall a, b \in A,$$

donde, como es habitual, de ahora en adelante "$\cdot$" denotará el "producto de Jordan" asociado al álgebra A, definido como se sabe de la siguiente manera:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Obviamente toda derivación es una derivación de Jordan. Si bien el recíproco no es cierto (en [10] se dan ejemplos de derivaciones de Jordan que no son derivaciones) en este sentido Sinclair [34] probó en 1970 que *toda derivación de Jordan continua definida sobre un álgebra de Banach semisimple es una derivación.* En ese mismo trabajo Sinclair planteó la cuestión de *si toda derivación de Jordan definida*

sobre un álgebra de Banach semisimple es necesariamente continua, y por tanto es de hecho una derivación.

Ya en 1957 Hernstein [15] demostró que ***toda derivación de Jordan en un anillo primo libre de 2-torsión ha de ser una derivación.*** Pero hubo que esperar hasta el año 1975 para poder disponer de la prueba de la conjetura de Sinclair, que llegó de manos de Cusak [10]. Extendió éste el resultado de Hernstein a anillos semiprimos libres de 2-torsión, ambiente en el que obviamente se emplazan las álgebras de Banach semisimples. De este modo el resultado de Cusak, redescubierto años más tarde por Brěsar [8], permite probar, como éste último observa, que ***toda derivación de Jordan en un álgebra de Banach semisimple es continua.***

III.5 Derivaciones de Jordan aleatorias

Igual que hicimos con las derivaciones en las secciones precedentes, es natural considerar en este momento aquellos operadores aleatorios definidos sobre un álgebra de Banach que poseen tan sólo "cierta probabilidad de derivar" en el sentido Jordan.

Definición 3.14. Por una ***derivación de Jordan estocástica*** sobre un álgebra de Banach A se entenderá un operador aleatorio lineal D, de A en A, verificando la siguiente condición

$$\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a] = 1, \ \forall a \in A,$$

o equivalentemente que

$$\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] = 1, \ \forall a, b \in A.$$

Si el operador aleatorio lineal D en lugar de verificar la propiedad anterior cumple esta otra: existe δ en $]0, 1[$ tal que

$$\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a] \geq \delta, \ \forall a \in A,$$

se dirá entonces que D es una ***derivación de Jordan probable.***

Curiosamente, ahora, la condición de ser derivación probable no se reconoce equivalente a la también natural propiedad

$$\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] \geq \delta, \ \forall a, b \in A.$$

Ello hará que nuestros primeros esfuerzos se dirijan precisamente a poner en equivalencia ambas condiciones.

Un operador aleatorio Q de un espacio de Banach X en otro Y se llamará *cuadrático* cuando exista un operador aleatorio bilineal y simétrico T, de $X \times X$ en Y, de manera que sea

$$Q(x) = T(x, x), \ \forall x \in X.$$

TEOREMA 3.15. *Sean X e Y espacios de Banach, T un operador aleatorio bilineal simétrico de $X \times X$ en Y y sea Q el operador aleatorio cuadrático a éste asociado. Las siguientes propiedades se verifican:*

(i) Si existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}[Q(x) = 0] \geq \delta, \ \forall x \in X,$$

entonces

$$\mathbb{P}[T(x, y) = 0] \geq \delta, \ \forall x, y \in X.$$

De hecho existe un conjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta$, tal que

$$T_{\Omega_0} \equiv \mathbf{0}.$$

(ii) El conjunto

$$\{\mathbb{P}[\Omega'] : \ \Omega' \text{ es medible y } T_{\Omega'} \equiv \mathbf{0}\}$$

tiene máximo, el conjunto

$$\{\mathbb{P}[Q(x) = 0] : \ x \in X\}$$

tiene mínimo y ambos valores coinciden con la cantidad

$$\max\{\mathbb{P}[\Omega'] : \ T_{\Omega'} \equiv \mathbf{0}\} = \min\{\mathbb{P}[T(x, y)] = 0 : \ x, y \in X\}.$$

Demostración. Dados un elemento x de X, otro elemento y de Y, y un real positivo λ, se tiene que

$$\delta \leq \mathbb{P}[Q(x+\lambda y) = 0] =$$

$$\mathbb{P}[Q(x) + \lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0] =$$

$$\mathbb{P}[Q(x) + \lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0, Q(x) = 0] +$$

$$\mathbb{P}[Q(x) + \lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0, Q(x) \neq 0].$$

De una parte observemos que

$$\mathbb{P}[Q(x) + \lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0, Q(x) = 0] \leq$$

$$\mathbb{P}[\lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0] =$$

$$\mathbb{P}[T(x,y) + \lambda Q(y) = 0] =$$

$$\mathbb{P}[T(x,y) = \lambda Q(y)] \leq$$

$$\mathbb{P}[\|T(x,y)\| = \lambda \|Q(y)\|].$$

De otra parte se tiene que

$$\mathbb{P}[Q(x) + \lambda T(x,y) + \lambda^2 Q(y) = 0, Q(x) \neq 0] =$$

$$\mathbb{P}[Q(x) = -\lambda T(x,y) - \lambda^2 Q(y), Q(x) \neq 0] \leq$$

$$\mathbb{P}[\|Q(x)\| \leq \lambda \|T(x,y)\| + \lambda^2 \|Q(y)\|, Q(x) \neq 0].$$

En consecuencia

$$\delta \leq \mathbb{P}[\|T(x,y)\| = \lambda \|Q(y)\|] +$$

$$\mathbb{P}[\|Q(x)\| \leq \lambda \|T(x,y)\| + \lambda^2 \|Q(y)\|, Q(x) \neq 0],$$

por lo que, haciendo $\lambda \to 0$, se obtiene que

$$\delta \leq \mathbb{P}[T(x,y) = 0], \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Llegados a este punto, la aplicación del Principio de Aleatorización Uniforme Multilineal (Teorema 3.2) concluye la prueba de este resultado. ∎

Si D es una derivación de Jordan aleatoria, es inmediato comprobar que el operador aleatorio

$$Q(a) = D(a^2) - D(a)a - aD(a)$$

es cuadrático, con operador bilineal asociado

$$\frac{1}{2}T(a,b) = D(a \cdot b) - D(a) \cdot b - a \cdot D(b).$$

La mera aplicación del resultado anterior a este operador bilineal proporcionará la equivalencia deseada entre las dos maneras razonables de definir la derivabilidad de Jordan probable (como quedará establecido en el siguiente corolario) así como la más íntima vinculación existente, esperada pero desconocida, entre las derivaciones de Jordan probables y las derivaciones de Jordan estocásticas, resultado que se establecerá en el último corolario de esta sección y que fructificará en la próxima sección cuando se aborde el estudio de la continuidad de las derivaciones de Jordan probables.

COROLARIO 3.16. *Sea D un operador aleatorio definido sobre un álgebra de Banach A y sea $0 < \delta < 1$. Son entonces equivalentes:*

(i) $\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a] \geq \delta, \ \forall a \in A,$

(ii) $\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] \geq \delta, \ \forall a, b \in A,$

Asociado a cada derivación de Jordan probable, D, definimos la cantidad

$$\delta_J(D) := \inf\{\mathbb{P}[D(a^2) = aD(a) + D(a)a], \ a \in A\} =$$

$$\inf\{\mathbb{P}[D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b] : \ a, b \in A\}$$

que es considerada como *la probabilidad de que D sea derivación de Jordan.*

Obviamente:

Una derivación de Jordan probable D será una derivación de Jordan estocástica si, y sólo si,

$$\delta_J(D) = 1.$$

COROLARIO 3.17. *Dada una derivación de Jordan probable D existe un subconjunto medible Ω_0, con $\mathbb{P}[\Omega_0] \geq \delta_J(D)$, tal que el operador condicional D_{Ω_0} es una derivación de Jordan estocástica.*

El resultado anterior pone de manifiesto que no hay más derivaciones de Jordan probables que aquellas que se comportan como derivaciones de Jordan estocásticas sobre ciertos subconjuntos medibles cuya probabilidad puede cuantificarse.

La investigación acerca de las derivaciones de Jordan probables se reduce así, al igual que ocurriera con las derivaciones probables, al estudio de las derivaciones de Jordan estocásticas.

III.6 Continuidad de las Derivaciones de Jordan Aleatorias

En el estudio de la continuidad automática de las derivaciones de Jordan aleatorias, razonablemente, nuestra línea de actuación seguirá las etapas históricamente establecidas. Probaremos en primer lugar que *toda derivación de Jordan estocástica definida sobre un álgebra de Banach semisimple es de hecho una derivación estocástica.* Los resultados de las secciones precedentes concluirán entonces la investigación.

Para cumplir nuestro primer objetivo comenzamos demostrando que la semiprimidad del álgebra A se transmite al álgebra $L_0(\mathbb{P}, A)$.

Recordamos que un álgebra de Banach A se llama *semiprima* cuando carece de ideales biláteros de cuadrado cero salvo, claro está, el propio cero.

Una conocida caracterización de la semiprimidad en términos de los elementos del álgebra es la siguiente.

PROPOSICIÓN 3.18. *Un álgebra asociativa A es semiprima si, y sólo si, para cada elemento, a, de A la siguiente condición se verifica:*

$$aAa = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Demostración. Supongamos que A es semiprima y consideremos un elemento a de A tal que $aAa = 0$. Puesto que AaA es un ideal bilátero de cuadrado cero, ha de ser $AaA = 0$. Denotemos por $\langle a \rangle$ al ideal principal generado por a. Ya que

$$\langle a \rangle^4 \subseteq AaA,$$

tenemos que

$$\langle a \rangle^2 = 0,$$

por lo que $\langle a \rangle = 0$. De esta manera,

$$a = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que para cada a en A,

$$aAa = 0 \Rightarrow a = 0,$$

y sea I un ideal bilátero de A tal que $I^2 = 0$. Si existe un elemento no nulo, b, en I entonces

$$bAb \neq 0,$$

lo que aseguraría poder encontrar a en A verificando que

$$0 \neq bab \in I^2.$$

Esta contradicción prueba el resultado. ∎

LEMA 3.19. *Sea A un álgebra de Banach semiprima y sea* $\mathbf{y}$ *una variable aleatoria A-valudada tal que*

$$\mathbf{y}\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A)\mathbf{y} = 0$$

entonces

$$\mathbf{y} = 0 \ (c.p.d.).$$

En particular el álgebra $L_0(\mathbb{P}, A)$ es semiprima.

Demostración. Sea $\mathbf{y}$ un elemento de $\mathcal{L}_0(\Omega, A)$ tal que

$$\mathbf{y}\mathcal{L}_0(\Omega, A)\mathbf{y} = 0 \quad (c.p.d.).$$

Puesto que A está trivialmente contenida en $\mathcal{L}_0(\Omega, A)$ se tiene que

$$\mathbf{y}a\mathbf{y} = 0 \quad (c.p.d.),\ \forall a \in A.$$

Definamos ahora, para cada elemento a de A, el conjunto

$$C_a = \{b \in A : \ bab = 0\}.$$

Por la semiprimidad de A tenemos que $\bigcap_{a\in A} C_a = 0$ de donde, en virtud del Lema 3.4,

$$\mathbb{P}[\mathbf{y} = 0] = \mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{a\in A} C_a] =$$

$$\inf\{\mathbb{P}[\mathbf{y} \in \bigcap_{a\in F} C_a] : \ F \subseteq I, F finito\} = 1.$$

∎

Para facilitar la escritura, en lo sucesivo, dada una derivación de Jordan estocástica D, definida sobre un álgebra de Banach A, denotaremos por T al operador bilineal dado por

$$T(a, b) = D(ab) - D(a)b - aD(b),\ \forall a, b \in A.$$

Obsérvese que D *será de hecho una derivación estocástica si, y sólo si,*

$$T(a,b) = 0 \ (c.p.d.), \ \forall a,b \in A.$$

Así mismo, como es usual, la diferencia $ab - ba$ será designada por $[a,b]$, para cualesquiera a, b, de A.

A continuación procedemos a establecer la validez en nuestro ambiente de la argumentación realizada en su día por Cusak [10].

El siguiente lema es de carácter meramente técnico.

LEMA 3.20. *Sea D una derivación de Jordan estocástica sobre A. Se verifican entonces las siguientes propiedades:*

(i) $D(ab+ba) = D(a)b + aD(b) + D(b)a + bD(a)$ $(c.p.d.)$, *ó lo que es lo mismo*

$$T(a,b) + T(b,a) = 0 \ (c.p.d.), \ \forall a,b \in A.$$

(ii) $D(aba) = D(a)ba + aD(b)a + abD(a)$ $(c.p.d.)$, $\forall a,b \in A$.

(iii) $D(abc+cba) = D(a)bc + aD(b)c + abD(c) + D(c)ba + cD(b)a + cbD(a)$ $(c.p.d.)$, $\forall a,b,c \in A$.

(iv) $T(a,b)\mathbf{x}[a,b] + [a,b]\mathbf{x}T(a,b) = 0$ $(c.p.d.)$, $\forall a,b \in A$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P},A)$.

Demostración. Las propiedades *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, se deducen de manera totalmente elemental, como ocurre en el caso clásico. Los cálculos pueden verse, por ejemplo, en [15] y se trata sólo de añadir a los mismos el calificativo "casi por doquier".

Otra comprobación directa (ver [8], Theorem 3) permite obtener *(iv)* a partir de *(ii)* y de *(iii)*. Otra vez hemos de tener la precaución de añadir el calificativo anterior a las igualdades que allí aparecen. ∎

El siguiente lema es el análogo al Lema 4 de [8].

LEMA 3.21. *Sea A un álgebra de Banach semiprima y supongamos que a, b, son dos elementos de A tales que*

$$a\mathbf{x}b + b\mathbf{x}a = 0 \ (c.p.d.), \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A).$$

Se verifica entonces que

$$a\mathbf{x}b = b\mathbf{x}a = 0 \ (c.p.d.), \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A).$$

Demostración. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A)$. Usando la igualdad anterior tres veces obtenemos que

$$(a(\mathbf{x})b)\mathbf{y}a\mathbf{x}b =$$

$$-(b(\mathbf{x}a\mathbf{y}a)\mathbf{x}b =$$

$$a\mathbf{x}(a(\mathbf{y})b)\mathbf{x}b =$$

$$-a\mathbf{x}b\mathbf{y}a\mathbf{x}b \ (c.p.d.).$$

De esta manera es

$$(a\mathbf{x}b)\mathbf{y}(a\mathbf{x}b) = 0 \ (c.p.d.),$$

de donde, en virtud del Lema 3.19, se concluye que

$$(a\mathbf{x}b) = 0 \ (c.p.d.), \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A),$$

lo que prueba el resultado. ▮

TEOREMA 3.22. *Las derivaciones de Jordan estocásticas definidas sobre un álgebra de Banach semiprima son derivaciones estocásticas.*

Demostración. Se trata de probar que

$$T(a,b) = 0 \ (c.p.d.), \ \forall a, b \in A.$$

Sean a, b, elementos de A. De la igualdad *(iv)* del Lema 3.20, gracias al lema anterior, se deduce que

$$T(a,b)\mathbf{x}[a,b] = 0 \ (c.p.d.), \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A). \tag{5.1}$$

Una linearización de esta igualdad respecto a b, teniendo presente el apartado *(i)* del Lema 3.20, nos conduce a esta otra:

$$T(a,b)\mathbf{x}[a,c] + T(a,c)\mathbf{x}[a,b] = 0 \ (c.p.d.),$$

a partir de la cual, aplicando (5.1), se obtiene que

$$(T(a,b)\mathbf{x}[a,c])\mathbf{y}(T(a,b)\mathbf{x}[a,c]) =$$

$$-T(a,b)\mathbf{x}[a,c]\mathbf{y}T(a,c)\mathbf{x}[a,b] = 0 \ (c.p.d.), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A).$$

Por consiguiente según el Lema 3.19 ha de ser, para cada c de A,

$$T(a,b)\mathbf{x}[a,c] = 0 \ (c.p.d.), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A). \tag{5.2}$$

Una linearización de la anterior igualdad nos lleva a que, para cada d perteneciente a A, ha de ser

$$T(a,b)\mathbf{x}[d,c] + T(d,b)\mathbf{x}[a,c] = 0 \ (c.p.d.),$$

y en consecuencia, en virtud de (5.2), se verifica que

$$T(a,b)\mathbf{x}[d,c] = 0 \ (c.p.d.). \tag{5.3}$$

En particular

$$[T(a,b),c]\mathbf{x}[T(a,b),c] =$$

$$(T(a,b)c - cT(a,b))\mathbf{x}[T(a,b),c] =$$

$$T(a,b)(c\mathbf{x})[T(a,b),c] - cT(a,b)(\mathbf{x})[T(a,b),c] = 0 \ (c.p.d.),$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A), \ \forall c \in A.$$

De nuevo por el Lema 3.19 se tiene que

$$[T(a,b),c] = 0 \ (c.p.d.), \ \forall c \in A, \tag{5.4}$$

y según (5.3),

$$(T(a,b)[d,c])\mathbf{x}(T(a,b)[d,c]) = 0 \ (c.p.d.),$$

por lo que

$$T(a,b)[d,c] = 0 \ (c.p.d.), \ \forall c,d \in A. \tag{5.5}$$

Ahora aplicamos el apartado *(ii)* del Lema 3.20 para concluir que

$$2T(a,b)^2 =$$

$$T(a,b)(T(a,b) - T(b,a)) =$$

$$T(a,b)((D(ab) - D(ba) + [D(b),a] + [b,D(a)]) \ (c.p.d.),$$

de donde, gracias a (5.5), se deduce que

$$T(a,b)[D(b),a] = 0 \ (c.p.d.),$$

y que

$$T(a,b)[b,D(a)] = 0 \ (c.p.d.).$$

Se deduce así esta relación:

$$2T(a,b)^2 = T(a,b)D([a,b]) \ (c.p.d.). \tag{5.6}$$

Aplicamos de nuevo la igualdad (5.5) y obtenemos que

$$T(a,b)[a,b] = 0 \ (c.p.d.),$$

pero, según (5.4), ha de ser

$$T(a,b)[a,b] + [a,b]T(a,b) = 0 \ (c.p.d.),$$

por lo que teniendo en cuenta el apartado *(i)* del Lema 3.20 deducimos que

$$D(T(a,b))[a,b] + T(a,b)D([a,b]) +$$

$$D([a,b])T(a,b) + [a,b]D(T(a,b)) = 0 \ (c.p.d.).$$

Comparando la igualdad anterior con (5.6) y usando (5.4) se concluye que

$$4T(a,b)^2 + D(T(a,b))[a,b] + [a,b]D(T(a,b)) = 0 \ (c.p.d.),$$

y multiplicando la igualdad anterior por T(a,b) obtenemos, gracias a (5.5), que

$$4T(a,b)^3 = 0 \ (c.p.d.),$$

o lo que es lo mismo

$$T(a,b)^3 = 0 \ (c.p.d.).$$

Basta recordar que el centro de un álgebra semiprima no contiene más elementos nilpotentes que el cero para concluir que la clase de $T(a,b)$ en $L_0(\mathbb{P},A)$ ha de ser cero ya que por la igualdad anterior dicha clase es nilpotente además, según (5.4), es un elemento del centro del álgebra $L_0(\mathbb{P},A)$ la cual, como se demostró en el Lema 3.19, es semiprima. Obtenemos pues que

$$T(a,b) = 0 \ (c.p.d.)$$

lo que prueba que D es una derivación estocástica. ∎

COROLARIO 3.23. *Sea A un álgebra de Banach semiprima. Entonces un operador aleatorio D de A en A es una derivación de Jordan estocástica si, y sólo si, es una derivación estocástica.*

Como consecuencia del teorema anterior y del Corolario 3.23 obtenemos la siguiente caracterización de las derivaciones de Jordan probables y una nueva mejora del correspondiente resultado clásico.

COROLARIO 3.24. *Un operador aleatorio D definido sobre un álgebra de Banach semiprima es una derivación de Jordan probable si, y sólo si, es una derivación probable, en cuyo caso la probabilidad de que D sea derivación de Jordan ($\delta_J(D)$) y la de que D sea derivación ($\delta(D)$) es la misma.*

Según el Teorema Aleatorio de Johnson-Sinclair en el caso particular de que A sea semisimple deducimos, a partir de lo anterior, este otro resultado aún más general que la conjetura de Sinclair.

COROLARIO 3.25. *Las derivaciones de Jordan estocásticas definidas sobre álgebras de Banach semisimples son estocásticamente continuas.*

El resultado anterior se mejora si aplicamos el Corolario 3.17, como vemos a continuación.

COROLARIO 3.26. *Toda derivación probable de Jordan definida sobre un álgebra de Banach semisimple es probablemente continua. Además la probabilidad de que sea continua es al menos la probabilidad de que sea derivación de Jordan.*

De esta manera la famosa conjetura de Sinclair ha quedado ahora demostrada en un ambiente más general.

Capítulo IV

Problemas Abiertos

En la presente sección anotamos una serie de cuestiones que surgen de manera natural al abordar toda la problemática que hemos presentado en esta Memoria y que podrían constituir posibles líneas de investigación futuras.

(i) *Teorema de Singer-Wermer Aleatorio.*

(a) El conocido Teorema de Singer-Wermer [36] establece que *la imagen de cualquier derivación continua definida sobre un álgebra de Banach conmutativa está contenida el radical de ésta.*

Nosotros conjeturamos que *la imagen de toda derivación estocástica definida sobre un álgebra de Banach conmutativa, que sea estocásticamente continua, ha de estar contenida en el radical de* $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A)$.

(b) Más ambiciosamente podemos considerar el Teorema de Singer-Wermer tal como se conoce hoy día gracias a Thomas [39], esto es el mismo enunciado pero sin suponer hipótesis de continuidad alguna.

¿Seríamos capaces de probar el problema anteriormente propuesto eludiendo la continuidad estocástica?.

(ii) *Teorema de Ringrose Aleatorio.* El famoso Teorema de Ringrose [30] afirma que *toda derivación de una C^*-álgebra, A, en un A-módulo de Banach, X, es continua.* Como comentamos en la Sección I de este trabajo, si bien el espacio $\mathcal{L}_0(\mathbb{P}, A)$ es un A-módulo, éste no tiene por qué ser un A-módulo de Banach. De este modo, cuando A es una C^*-álgebra, nuestra investigación aporta una información no contenida en el Teorema de Ringrose.

Proponemos aquí probar que *toda derivación estocástica módulo-valuada definida sobre una C^*-álgebra es estocásticamente continua.*

(iii) *Homomorfismos aleatorios.* Como se sabe [35], Corollary 6.12, *cualquier homomorfismo sobreyectivo definido sobre un álgebra de Banach y con valores en un álgebra de Banach semisimple ha de ser automáticamente continuo.* En particular *los caracteres de cualquier álgebra de Banach son continuos.*

¿Podríamos establecer enunciados análogos para operadores aleatorios "multiplicativos"?. Hemos de decir al respecto que ni siquiera para el caso de los caracteres aleatorios hemos sido capaces de avanzar un paso.

Bibliografía

1. A. Albert, *Structure of algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. $XXIV$, 1961.

2. W. G. Badé, P. C. Curtis, Jr., *The continuity of derivations of Banach algebras*, Journal of Functional Analysis 16 (1974), 372-387.

3. W. G. Badé, P. C. Curtis, Jr., *Prime ideals and automatic continuity problems for Banach algebras*, Journal of Functional Analysis 29 (1978), 88-103.

4. G. de Barra, *Measure Theory and Integration*, Ellis Horwood Ltd., New York 1981.

5. S.K. Berberian, *Lecture in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

6. A.T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, Academic Press, New York, 1972.

7. F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.

8. M. Brešar, *Jordan derivations on semisimple rings*, Proc. Amer. Math. Soc., vol 104, n. 4, 1988, 1003-1006.

9. P. C. Curtis, *Derivations of commutative Banach algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 271-273.

10. J. M. CUSAK, *Jordan derivations on rings*, Proc. Amer. Math. Soc., vol 53, n. 2, 1975, 321-324.

11. S.A. CHOBANYAN, V.I. TARIELADZE, N.N. VAKHANIA, *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

12. U. FRISCH, *Wave propagation in random media*, "Probabilistic Methods in Applied Mathematics" (A. T. Bharucha-Reid, ed.), Vol. 1, pp. 75-198. Academic Press, New York, 1968.

13. J. HAÏNIS, *Eléments aléatoires dans un H^*-algebra de Banach séparable*, Bull. Soc. Roy. Liège 33 (1964), 170-177.

14. J. HAÏNIS, *Random variables with values in Banach algebras and random transformations in Hilbert spaces*, Bull. Soc. Math. Grèce 7 (1966), 179-223.

15. I. N. HERSTEIN, *Jordan derivations on prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., vol 8, 1957, 1104-1110.

16. E. HILLE, R.S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhoda Island, 1957.

17. K. ITÔ, *On stochastic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951).

18. N. JACOBSON, C. E. RICKART, *Jordan homomorphisms of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 479-502.

19. B. E. JOHNSON, *The uniqueness of the (complete) norm topology*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 537-539.

20. B. E. JOHNSON, *Continuity of derivations on commutative algebras*, Amer. J. Math. 91 (1969), 1-10.

21. B. E. JOHNSON, A. M. SINCLAIR, *Continuity of derivations and a problem of Kaplansky*, Amer. J. Math. 90 (1968), 1067-1973.

22. I. KAPLANSKY, *Modules over operator algebras*, Amer. J. Math. 75 (1953), 839-858.

23. K. KURATOWSKI, *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología*, Traducción de R. Rodriguez Vidal. Vicens-Vives, 1966.

24. M. LEDOUX, M. TALAGRAND, *Probability in Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

25. M. LOÈVE, *Probability Theory*, Van Nostrand-Reinold, Princeton, 1963.

26. C.M. MARLE, *Measures et Probabilités*, Hermann, París, 1974.

27. L.A. PASTUR, *Spectra of random operators*, Uspekhi Math. Nauk (1) 28, (1973), 3-64.

28. B.J. PETTIS, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938), 277-304.

29. C.E. RICKART, *General Theory of Banach algebras*, Van Nostrand, New York, 1960.

30. J.R. RINGROSE, *Automatic continuity of derivations of operators algebras*, J. London Math. Soc. (2), 5 (1972), 432-438.

31. W. RUDIN, *Análisis Funcional*, Reverté, España, 1979.

32. S. SAKAI, *On a conjecture of Kaplansky*, Tohoku Math. J. 12 (1960), 31-33.

33. R. SEINIVASAN, *A remark on Gaussian random elements with values in a Banach algebra*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 7 (1962), 285-286.

34. A. M. SINCLAIR, *Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras.*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 24, 1970, 209-214.

35. A. M. Sinclair, *Automatic Continuity of Linear Operators*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 21. Cambridge Univ. Press, 1976.

36. I. M. Singer, J. Wermer, *Derivations on commutative normed algebras*, Math. Ann. 129 (1955), 260-264.

37. A.V. Skorohod, *Random Linear Operator*, D. Reidel Publishing Company, Holland, 1984.

38. K.R. Stromberg, *An introduction to classical real Analysis*, Wadsworth, California, 1981.

39. M. P. Thomas, *The image of a derivation is contained in the radical*, Annals of Math. 128 (1988), 435-460.

40. M. V. Velasco, A R. Villena, *Continuity of random derivations*, aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc..

41. M. V. Velasco, A R. Villena, *A random closed graph theorem*, sometido a publicación.

42. A. R. Villena, *Continuity of derivations on a complete normed alternative algebra*, Jour. Inst. Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.) vol. 3, nº 2 (1990) 99-106.

43. A. R. Villena, *Stochastic continuity of random derivations on H^*-algebras*, aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.

44. A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, New York, 1978.