Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

Sistemas Elípticos No Lineales y Aplicaciones en Dinámica de Poblaciones.

Por

José Luis Gámez Ruiz.

Granada, 1.993

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. Antonio Cañada Villar, Profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. José Luis Gámez Ruiz el día 23 de septiembre de 1.993, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Miguel de Guzmán Ozámiz (Presidente), D. Antonio Ambrosetti, D. Pavel Drábek, D. Angel Rodríguez Palacios (Vocales) y D. David Arcoya Alvarez (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto *"cum laude"* por unanimidad.

A Paqui
A mis padres

CONTENIDO.

NOTACIÓN.

$\emptyset$ – conjunto vacío.

$\mathbb{N}$ – conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$ – conjunto de los números reales.

$\cdot$ – producto escalar usual de $\mathbb{R}^N$.

$|x|$ – norma euclídea del vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Ω – dominio (conjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^N$.

$\mathcal{BR}$ – conjunto de todos los dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular.

∂A – frontera de A, subconjunto de un cierto espacio topológico.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ – gradiente de $u : \Omega \to \mathbb{R}$, diferenciable.

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$ – laplaciano de $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dos veces diferenciable.

$B(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ – bola abierta de centro x_0 y radio r, en el espacio métrico (X, d).

$\|u\|_E$ – norma de u, como elemento del espacio normado E.

$C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ – espacios usuales de funciones valuadas en $\mathbb{R}^m$, continuas y diferenciables con continuidad hasta el orden k en Ω, y extensiones continuas a $\overline{\Omega}$. En el caso particular $m = 1$, notaremos simplemente $C^k(\overline{\Omega})$. En estos espacios, consideraremos la norma usual.

$C_0^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : u(x) = 0,\ \forall x \in \partial\Omega\}$. Consideraremos la norma inducida por $C^k(\overline{\Omega})$.

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ – espacios usuales de funciones diferenciables, con todas sus derivadas, hasta el orden k, α-hölderianas. En ellos, consideraremos la norma usual.

$\mathcal{L}(\overline{\Omega})$ – espacio de funciones lipschitzianas reales, definidas en $\overline{\Omega}$. Consideraremos la norma:

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \|u\|_{C^0} + \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}, \ \forall u \in \mathcal{L}(\overline{\Omega}).$$

$L^p(\Omega)$ – espacios de Lebesgue usuales ($1 \leq p \leq \infty$), dotados de su norma natural.

$W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$, $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ – espacios de Sobolev usuales, con la norma usual.

INTRODUCCIÓN.

Son muchos los problemas de ecuaciones diferenciales originados por el estudio de determinadas cuestiones planteadas en Física, Química, Biología, Economía, etc., lo cual los hace a su vez doblemente interesantes, tanto por su condición de problemas matemáticos a resolver, como por las posibles interpretaciones que admiten los resultados obtenidos. Aunque el trabajo que aquí se presenta pertenece, esencialmente, al Análisis Matemático y no pretende siquiera ser una aproximación a las ciencias aplicadas, hemos de reconocer que los ejemplos más interesantes y motivadores que aquí aparecen provienen, principalmente, de la Biología y la Química, aunque no es necesario ningún conocimiento especial de tales materias para el matemático que quiera seguir los desarrollos que aquí exponemos. Intentaremos, eso sí, ofrecer, en la medida de nuestras posibilidades, la mayor variedad de interpretaciones de los resultados obtenidos, aunque de partida se haga necesario advertir que nuestro objetivo no es, ni mucho menos, presentar respuestas satisfactorias a cuestiones biológicas, químicas, etc., sino facilitar la comprensión de los resultados teóricos que aparecerán.

Una cuestión interesante en Biología es el estudio de la evolución en el tiempo de dos (o más) especies que coexisten en un dominio común. De hecho, también resulta interesante desde el punto de vista biológico encontrar situaciones de equilibrio, que son aquellas en las que el número y la distribución de los individuos de cada una de las especies se estabiliza, y resulta independiente del tiempo. Es lo que podríamos llamar un *"equilibrio ecológico"*. Desde el trabajo original de Lotka (1924) y Volterra (1926), han sido diversos los modelos que se han elaborado para el estudio de la anterior cuestión (ver [39], [70], [71]). Uno de los modelos más significativos, en el primer caso (evolución en el tiempo), es el sistema de ecuaciones de tipo parabólico de la forma:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u\,(a(x,t) - b(x,t)u + c(x,t)v), && (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty),\\ v_t - \Delta v &= v\,(e(x,t) - f(x,t)v + g(x,t)u), && (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty),\\ u(x,t) &= v(x,t) = 0, && (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty),\\ u(x,0) = u_0(x),&\ v(x,0) = v_0(x), && x \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

donde Ω representa un dominio (conjunto abierto y conexo) acotado del espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, con frontera regular, Δ representa el operador laplaciano, dado por $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$, y a, b, c, e, f, g son funciones reales definidas en $\overline{\Omega} \times [0, +\infty)$. Las funciones *"incógnitas"* u y v representan las respectivas densidades, en distintos puntos de Ω, y en distintos momentos de tiempo, de dos especies que coexisten en el dominio Ω. La condición de que u y v deban anularse sobre $\partial\Omega \times [0, +\infty)$, viene a representar que las especies a estudiar no se aglomeran en el borde del dominio, lo cual resulta fácilmente interpretable si, por ejemplo, $\partial\Omega$ es un río, o bien Ω es un lago. La condición de que en el instante de tiempo $t = 0$, las funciones u y v estén predeterminadas, indica que partimos de una situación inicial conocida. La presencia del operador laplaciano pone de manifiesto que hay *"difusión"* de las especies u y v, es decir, desplazamiento de los individuos por el dominio Ω. Las funciones a y e representan, respectivamente, la *"razón de natalidad"* (birth-rate) de nuevos individuos de las especies u y v con respecto a los ya existentes, y las funciones b y f (positivas) vienen a representar el *"control de natalidad"* que las propias especies se imponen, evitando así un crecimiento exponencial. Hasta aquí, el modelo se ajusta a los mismos criterios que si considerásemos una única especie que subsiste en el dominio Ω.

Son las funciones c y g las que marcan el tipo de *"interacción"* que hay entre las dos especies consideradas. Cuando ambas funciones, c y g, sean positivas, entenderemos que el modelo es de tipo *"cooperativo"*, es decir, la presencia de individuos de cada una de las especies resulta beneficiosa para el desarrollo de la otra especie. Este modelo representa los casos de especies biológicas en estado de simbiosis. Si c y g son funciones negativas, entenderemos que el modelo es del tipo *"competición"*, es decir, la presencia de individuos de cualquiera de las dos especies resulta perjudicial para el desarrollo de los individuos de la otra especie. En Biología, esta situación aparece, por ejemplo, cuando las dos especies consumen un mismo alimento. Por último, si una de estas dos funciones es negativa (digamos $c < 0$) y la otra es positiva ($g > 0$), entenderemos que nuestro modelo es del tipo *"presa-depredador"*, es decir, la presencia de la especie u resulta beneficiosa para la especie v, mientras que la presencia de la especie v perjudica al crecimiento de u. En Biología, esta situación representa a dos especies, una de las cuales se alimenta de la otra.

En el segundo caso (situaciones de equilibrio), es natural suponer que las funciones a, b, c, e, f, g son independientes del tiempo. El modelo que resulta ahora es de tipo elíptico:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\ (a(x) - b(x)u(x) + c(x)v(x)), & x &\in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\ (e(x) - f(x)v(x) + g(x)u(x)), & x &\in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x &\in \partial\Omega. \end{aligned}$$

El estudio de las soluciones de este sistema elíptico (soluciones de equilibrio) resulta interesante si buscamos una situación estable en el tiempo, o bien si intentamos descubrir qué ocurre con las soluciones del sistema parabólico cuando el tiempo t tiende a infinito (comportamiento asintótico).

Por todas estas consideraciones, estaremos interesados en la búsqueda de soluciones (u, v) de este último sistema, cuyas componentes sean ambas no negativas y no triviales.

El modelo anterior es del tipo Lotka-Volterra, con difusión lineal. Desde el punto de vista matemático, tenemos un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales, de tipo elíptico, y con condición de Dirichlet en la frontera del dominio Ω. Son muy numerosos los trabajos que se han realizado sobre este tipo de problemas, entre los cuales, y como más importantes, podríamos citar [2], [9], [12], [13], [15], [16], [17], [18], [31], [32], [34], [42], [52], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [72], [78]. En la mayoría de estos trabajos se suelen considerar los modelos clásicos (competición, presa-depredador y cooperativo) por separado, y podemos encontrar resultados independientes acerca de cada uno de tales modelos, relativos generalmente al estudio de existencia de estados de coexistencia (soluciones (u, v), con ambas componentes no negativas y no triviales), unicidad o multiplicidad de estados de coexistencia, propiedades cualitativas de las soluciones, etc. Para la obtención de dichos resultados, suele usarse una gran variedad de técnicas, como son la teoría del grado topológico en conos (índice de puntos fijos), teoría de bifurcación, métodos iterativos, etc. (ver, por ejemplo, [36], [48]).

Tanto desde el punto de vista de la Biología, como desde el punto de vista matemático, tiene sentido plantear situaciones de interacción que no sean estrictamente ninguna de las que hemos mencionado anteriormente (competición, presa-depredador y cooperativo). Así, puede ocurrir que el tipo de interacción dependa de las distintas *"zonas"* del dominio Ω que consideremos, lo cual podría ponerse de manifiesto en que las funciones c ó g cambien de signo en Ω. Del mismo modo, puede ocurrir que el tamaño de las poblaciones influya en el tipo de interacción (biológicamente hablando, las presas podrían convertirse, por ejemplo, en competidores si aumentan mucho en número de individuos), con lo que obtendríamos un modelo que no se ajusta al anteriormente expuesto, pero que consideramos de interés. También creemos que, con el objetivo de representar aquellas situaciones biológicas en las que la *"habitabilidad"* o la forma de interacción sufren cambios *"bruscos"* con respecto a las distintas zonas del dominio Ω, se debe intentar rebajar en lo posible las hipótesis de regularidad de las no-linealidades del sistema. Entendemos, por tanto, que es interesante estudiar modelos que generalicen los casos *"estándar"*, y que contengan como casos particulares estas posibles interacciones de tipo *"mixto"* o *"no regular"*.

Motivados por el origen del problema, así como por las consideraciones anteriores, estaremos interesados en el estudio de sistemas elípticos del tipo

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\ h(x,u(x),v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\ k(x,u(x),v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Habida cuenta de que en la mayoría de los trabajos mencionados se considera un dominio fijo Ω, y se buscan condiciones sobre las no-linealidades para obtener estados de coexistencia, hemos estimado interesante plantear también un estudio desde otro punto de vista; denotando por $\mathcal{BR}$ al conjunto de todos los dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, consideramos muy interesante el estudio de la siguiente cuestión:

> *Dadas las funciones* $h, k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(es decir, conocido el modo de interacción de las especies* u *y* v*), tratemos de buscar dominios* $\Omega \in \mathcal{BR}$*, para los cuales el sistema* (0.1) *admite un estado de coexistencia. Estos dominios serán llamados* "Dominios de coexistencia" *del problema* (0.1).

Esta cuestión, además de tener una *"evidente"* justificación biológica (se trata de buscar el hábitat apropiado para las especies dadas, lo cual parece más lógico que buscar las especies apropiadas para un cierto hábitat), está motivada para nosotros por un resultado que aparecía ya en el trabajo de L. Li [61], donde para un modelo del tipo Lotka-Volterra con difusión, con interacción de tipo presa-depredador, y en el caso en que la razón de crecimiento de los depredadores (la constante e) es menor o igual que cero, el autor prueba el siguiente resultado:

> *"... Si* $\Omega_1 \in \mathcal{BR}$ *es un dominio de coexistencia para dicho sistema, entonces también será dominio de coexistencia cualquier dominio* $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$ *conteniendo a* Ω_1 *..."*

El estudio de afirmaciones como ésta de Li, y otras que plantearemos en el desarrollo de esta Memoria, será útil en la búsqueda de dominios de coexistencia para problemas del tipo (0.1).

Surgiendo también del estudio de Dinámica de Poblaciones, en aquellos modelos en los que la difusión se hace *"lenta"* en función del número de individuos de cada una de las especies, aparecen los que son dados en llamar *"modelos degenerados"*, tanto en el caso escalar

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(U(x)) &= U(x)\,k(x,U(x)), & x\in\Omega, \\ U(x) &= 0, & x\in\partial\Omega, \end{aligned}$$

siendo los casos más interesantes aquellos en que $\psi(s) = s^m$, con $m \geq 1$, como en el caso de sistemas

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(U(x)) &= U(x)\,H(x,U(x),V(x)), & x\in\Omega, \\ -\Delta\varphi(V(x)) &= V(x)\,K(x,U(x),V(x)), & x\in\Omega, \\ U(x) = V(x) &= 0, & x\in\partial\Omega \end{aligned}$$

(ver, por ejemplo, [7], [47], [58], [69], [72], [73]). Dichos modelos, en términos matemáticos, son conocidos como *"modelos con difusión no lineal"*. La técnica más comúnmente usada en el tratamiento de estos modelos es la de llevar a cabo un cambio de variable del tipo $u = \psi(U)$, $v = \varphi(V)$, convirtiendo el problema (o sistema) degenerado en un nuevo problema (o sistema) elíptico no degenerado que, normalmente, se resuelve, o bien aplicando métodos de sub-soluciones y súper-soluciones, o bien analizando el comportamiento asintótico de las soluciones del problema parabólico asociado. El principal problema que se presenta al intentar aplicar estas técnicas reside en la pérdida de regularidad que conlleva el cambio de variable, que hace que los métodos clásicos no puedan siempre aplicarse.

Con el objetivo de buscar respuestas satisfactorias a las cuestiones planteadas, hemos estructurado el contenido de esta Memoria como sigue:

El Capítulo I lo dedicamos a expresar los resultados conocidos más importantes que se utilizan en el resto de la Memoria. La mayoría de ellos no presentan novedad, salvo en la presentación que se hace, adaptada a nuestros propósitos. Se comienza con un repaso de ciertos problemas de valores propios, destacando las propiedades más importantes del *"valor propio principal"*, y de *"la función propia asociada"*. Seguidamente, resumimos los hechos más significativos del método de sub-soluciones y súper-soluciones para el problema de Dirichlet en ecuaciones elípticas escalares y en sistemas. Tratamos también brevemente la unicidad de soluciones. La ecuación elíptica logística es estudiada con detalle, y terminamos el capítulo enunciando y comentando un resultado clásico abstracto de bifurcación global, de Rabinowitz.

El principal objetivo del Capítulo II de la Memoria es demostrar los teoremas y resultados generales que hemos desarrollado con el objeto de aplicarlos después a los modelos de la Biología que serán tratados en los siguientes capítulos. El hecho de tratar estos resultados en un capítulo aparte se debe a que, en general, cubren un abanico de posibilidades más amplio que las meras aplicaciones que mostraremos aquí, y pueden ser usados en el estudio de otros tipos de modelos y problemas.

El primer resultado de este segundo capítulo es una versión modificada de algunos teoremas aparecidos en [49] y en [74], motivados por el tipo de problemas que se presentarán en el Capítulo III, donde aparecerá una ecuación escalar proveniente de un *"desacoplamiento"* del par de ecuaciones de un sistema elíptico que incluye algunos sistemas que aparecen en la Biología. La principal diferencia del Teorema 2.1 con respecto a los de los trabajos citados, es que el operador N que aquí aparece es de tipo *"no local"*, es decir el valor de $N(v)(x)$ depende, no sólo de x y del valor de $v(x)$, sino *"globalmente"* de la función v. En definitiva, probaremos un Teorema de Bifurcación, basándonos en el Teorema abstracto de Rabinowitz, pero enunciado ahora en términos de ecuaciones elípticas, con el objeto de que sea más fácilmente aplicable en la práctica.

El siguiente resultado que aparece en el Capítulo II es nuestra aportación al método de sub-soluciones y súper-soluciones de Amann [3], donde rebajamos las hipótesis que imponía Amann a la(s) no-linealidad(es) de una ecuación escalar (o sistema) con condición de Dirichlet en la frontera. Concretamente, donde Amann impone a las no-linealidades ser localmente lipschitzianas, nosotros imponemos una condición de *"variación acotada"* de la no-linealidad respecto de la variable incógnita, y acotación respecto de la variable espacial. Esto hace que la técnica de sub-soluciones y súper-soluciones pueda aplicarse ahora ampliamente a los problemas que aparecen tras el oportuno cambio de variable sobre problemas con difusión no lineal, mientras que el método clásico no es aplicable debido a la pérdida de regularidad que conlleva el mencionado cambio de variable.

En el tercer Capítulo, fijaremos nuestra atención en el estudio de sistemas provenientes de la Biología del tipo (0.1), en los que la difusión es lineal, es decir, modelos no degenerados. Para ello, serán de vital importancia los resultados demostrados en el Capítulo II, ya que gran parte de lo que aquí aparecerá serán aplicaciones de tales resultados a modelos concretos. Para comenzar, es ineludible un estudio en profundidad de la *"ecuación logística generalizada"*, que modela el caso particular en el que sólo hay una especie a considerar. Mostramos una condición necesaria y suficiente para que dicha ecuación admita al menos una solución no negativa y no trivial (solución que resulta ser única), y estudiamos propiedades de dicha solución, como la dependencia monótona y continua respecto de la no-linealidad del problema.

Imponiendo hipótesis bastante simples a las funciones h y k, obtendremos uno de los resultados centrales de esta Memoria (Teorema 3.6), que da condiciones suficientes (que en algunos casos son también necesarias) para la existencia de estados de coexistencia para este tipo de sistemas. La mayor novedad con respecto a otros trabajos anteriores reside en que no impondremos ningún tipo de monotonía de h respecto de v, ni de k respecto de u. Además, las funciones h y k admiten dependencia espacial, quedando así contenidos en este modelo, no sólo los sistemas de tipo cooperativo, presa-depredador y competición, sino también algunos otros de tipo *"mixto"* que hemos comentado. En este sentido, nuestro resultado unifica también gran variedad de resultados dispersos relativos a los modelos clásicos. Además, en nuestro resultado hemos impuesto condiciones de regularidad más débiles que las usuales a las funciones h y k, intentando representar así aquellas situaciones biológicas en las que la *"habitabilidad"* o la forma de interacción sufren cambios *"bruscos"* (pero controlados) con respecto a las distintas zonas del dominio Ω. Dicha condición suficiente se expresa en términos de los estados de existencia de cada una de las especies en ausencia de la otra, así como de ciertas propiedades espectrales del dominio Ω, manifestadas en los valores propios principales de ciertos problemas de valores propios. Seguidamente (es obligado), mostramos las aplicaciones que admite nuestro resultado en los modelos clásicos de la Biología, (competición, presa-depredador y cooperativo), así como en modelos cuya interacción no responde a ninguno de los casos anteriores. Es en estas aplicaciones donde se adivina la potencia del resultado general, ya que hay casos, como lo es el de la interacción de tipo presa-depredador, en el que nuestra condición suficiente resulta también ser necesaria para la existencia de estados de coexistencia. Esto hace que nuestro resultado sea (salvo equivalencia) el *"mejor posible"* para un sistema tan general como (0.1).

La tercera sección de este Capítulo III está motivada por la cuestión anteriormente expuesta de búsqueda de dominios de coexistencia, conocido el modo de interacción. No olvidemos que en el modelo de Lotka-Volterra con interacción de tipo presa-depredador, la condición de nuestro Teorema 3.6 es necesaria y suficiente para obtener estados de coexistencia. Por tanto, la afirmación de Li podría enunciarse de este otro modo:

Si la condición del Teorema 3.6 se verifica para un cierto dominio $\Omega_1 \in \mathcal{BR}$, entonces dicha condición se verifica también para cualquier dominio $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$, conteniendo a Ω_1.

Tras demostrar que, sorprendentemente, esta segunda afirmación no es siempre cierta, ni siquiera en el caso general de interacción de tipo presa-depredador (no olvidemos que para L. Li, el coeficiente e debe ser negativo), nos ha parecido interesante el estudio de la validez de dicha afirmación, incluso en los casos en que la condición de nuestro Teorema es sólo suficiente y no necesaria. Dedicaremos esta tercera Sección del Capítulo III al estudio de la validez de esta afirmación y otras similares, y a la búsqueda de dominios de coexistencia para modelos concretos. Como veremos, esta cuestión no es en absoluto simple, ni aún en los casos más sencillos, en los que buscamos dominios de coexistencia que sean bolas euclídeas centradas en el origen. Los resultados de este Capítulo muestran claramente que, a la hora de estudiar sistemas del tipo (0.1), tan importante es proponerse la generalización y unificación de resultados dispersos, como la especialización de resultados generales en modelos concretos.

En el Capítulo IV mostramos las aplicaciones de nuestro método de sub-soluciones y súper-soluciones sobre problemas con difusión no lineal, que son los que realmente han motivado para nosotros el desarrollo de dicho método. Como consecuencia, y aunque no se trate más que de una aplicación de dicho método general, enunciaremos en este capítulo un método de sub-soluciones y súper-soluciones para el problema de Dirichlet en ecuaciones elípticas escalares degeneradas (o con difusión no lineal), y para sistemas de ecuaciones degeneradas. Ilustraremos su utilidad obteniendo condiciones suficientes de coexistencia para problemas y sistemas degenerados provenientes de la Biología. Obtenemos así mejoras sustanciales con respecto a los resultados que conocemos relativos a existencia de solución para este tipo de problemas (mejoras en cuanto a que, al imponer hipótesis más débiles que las de otros autores, sin perjuicio de los resultados obtenidos, quedan contemplados mayor variedad de modelos, que antes no podían ser estudiados). Además, nuestras condiciones suficientes de existencia de soluciones positivas (o estados de coexistencia) son fácilmente comprobables en la práctica, ya que se expresan directamente en términos de los valores que toman las no-linealidades de los problemas considerados.

Para terminar, hemos incluido unas Notas Finales, en las que exponemos brevemente aquellas cuestiones que quedan sin resolver a lo largo de la Memoria, así como las posibles líneas de continuación de nuestra investigación.

Algunos de los resultados de esta Memoria han sido expuestos en diferentes congresos, y aceptados para publicación en diversas revistas y series especializadas internacionales (ver [20], [21], [22], [23], [24], [25], [19]).

AGRADECIMIENTOS.

Antes de concluir esta introducción quisiera expresar mi más profundo agradecimiento al que ha sido director de este trabajo, Prof. Antonio Cañada Villar, quien ha hecho posible, con su constante apoyo, enseñanzas, y diestra dirección, la realización de esta Memoria. De su disponibilidad, paciencia e ilusión, han resultado innumerables sesiones de trabajo que, a buen seguro, han marcado mi formación matemática y mi fascinación por la investigación.

Quisiera también expresar mi sincera gratitud al Prof. Lige Li, de la Universidad de Kansas, Manhattan, por el interés que ha mostrado en conocer nuestros resultados, y por sus sugerencias e intercambio de trabajos, algunos de los cuales nos han sido de gran ayuda.

Al Prof. James R. Ward, por su amable hospitalidad e interés manifiesto hacia nuestro trabajo, y con quien tuve el gusto de compartir impresiones sobre nuestros primeros resultados en los días que estuve invitado en la Universidad de Alabama (Birmingham, U.S.A.).

Al Prof. Julián López-Gómez, de la Universidad Complutense de Madrid, que, sin duda, con sus sabios comentarios y experiencia en esta disciplina, fue el detonante de nuestros primeros resultados en sistemas de la Biología.

Al Prof. Jesús Hernández, de la Universidad Autónoma de Madrid, que en sus visitas a Granada nos ofreció sus valiosos comentarios e indicaciones que han sido de gran ayuda en la elaboración de nuestros resultados.

Al Prof. Antonio Ambrosetti, de la Scuola Normale Superiore de Pisa (Italia), que desde mis comienzos en la investigación mostró un gran interés por mi trayectoria profesional.

Al Prof. Pavel Drábek, de la Universidad de Bohemia-Oeste, Pilsen, República Checa, por sus interesantes y alentadoras observaciones manifestadas en los días previos a la defensa de esta tesis, así como por su colaboración en problemas relacionados con los que aquí aparecen.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático, que me han facilitado la labor, y me han apoyado y estimulado en todo momento.

José Luis Gámez Ruiz.

Capítulo I:

Resultados preliminares.

Dedicaremos este Capítulo, a modo de iniciación, y para facilitar la lectura de lo que sigue, a desarrollar los resultados conocidos más importantes que se utilizarán en el resto de esta Memoria. La mayoría de ellos no presentan novedad, salvo en la presentación que se hace adaptada a nuestros propósitos. En particular, centraremos nuestra atención en los métodos monótonos y en los métodos topológicos, tanto para la resolución de ecuaciones elípticas escalares, como para sistemas de ecuaciones elípticas. Comencemos recordando un poco de teoría lineal, cuyo lenguaje necesitaremos más adelante.

I.1 PROBLEMAS DE VALORES PROPIOS

En la mayoría de los métodos que se utilizan para el estudio de ecuaciones elípticas no lineales es muy importante tener realizado un estudio detallado del problema lineal de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + q(x)u(x) &= \lambda u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y $q \in L^\infty(\Omega)$ (es un hecho frecuente en el Análisis No-Lineal utilizar problemas lineales *"adecuados"* para el estudio del correspondiente problema no lineal). El estudio de dicho problema lineal consiste en determinar los valores reales del parámetro λ para los cuales el problema (1.1) admite solución débil no trivial. Tales valores se llamarán *"valores propios"* del problema (1.1), y las soluciones asociadas a los valores propios, se llamarán *"funciones propias"* del problema.

Es bien conocido que los valores propios del problema (1.1) se pueden ordenar en una sucesión creciente de la forma

$$\lambda_1(\Omega, q) < \lambda_2(\Omega, q) \le \ldots \le \lambda_n(\Omega, q) \le \ldots,$$

cada uno de ellos, repetido tantas veces como indica su multiplicidad algebraica (que sabemos que es finita).

El primero de tales valores propios, $\lambda_1(\Omega, q)$, viene determinado por la expresión variacional

$$\lambda_1(\Omega, q) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + qu^2)}{\displaystyle\int_\Omega u^2},$$

donde $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual. Dicha expresión resulta a menudo muy útil para obtener estimaciones de $\lambda_1(\Omega, q)$. De lo anterior, se deduce también que $\lambda_1(\Omega, q)$ es el mayor número real verificando la desigualdad variacional

$$\lambda_1(\Omega, q) \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + qu^2\right), \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Igualmente, es sabido que $\lambda_1(\Omega, q)$ tiene multiplicidad geométrica y algebraica igual a 1, y como generador del subespacio propio asociado (en cada uno de cuyos puntos se alcanza el mínimo anterior) podemos tomar $\phi_1(\Omega, q) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$, que se puede escoger en el interior del cono P de las funciones no negativas del espacio $C_0^1(\overline{\Omega})$, con $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \phi_1(\Omega, q)(x) = 1$. De hecho, $\lambda_1(\Omega, q)$ es el único valor propio del problema (1.1) cuyas funciones propias asociadas no cambian de signo en Ω.

En el caso particular en que $q \equiv 0$, notaremos simplemente $\lambda_1(\Omega)$, y $\phi_1(\Omega)$.

Resumamos las propiedades principales de $\lambda_1(\Omega, q)$ en el siguiente

LEMA 1.1. (Principales propiedades de $\lambda_1(\Omega, q)$).

i) *Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios acotados de $\mathbb{R}^N$, ambos con frontera regular, con $\Omega_1 \subset \Omega_2$, y sea $q \in L^\infty(\Omega_2)$. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega_2, q) \leq \lambda_1(\Omega_1, q).$$

Más aún, en el caso en que $\Omega_1 \neq \Omega_2$, dicha desigualdad es estricta.

ii) *Sean $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, con $q_1 \leq q_2$ c.p.d. en Ω. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega, q_1) \leq \lambda_1(\Omega, q_2).$$

Más aún, si $q_1 < q_2$ en un conjunto de medida positiva, dicha desigualdad es estricta.

iii) *Sean $M \in \mathbb{R}$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega, q + M) = \lambda_1(\Omega, q) + M.$$

iv) *Sean $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $t \in [0,1]$. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega, tq_1 + (1-t)q_2) \geq t\lambda_1(\Omega, q_1) + (1-t)\lambda_1(\Omega, q_2).$$

v) *Sean $q_n, q \in L^\infty(\Omega)$, con $\{q_n\} \to q$ en $L^\infty(\Omega)$. Entonces*

$$\{\lambda_1(\Omega, q_n)\} \to \lambda_1(\Omega, q).$$

Demostración.

i) Sea $\overline{u} \in H_0^1(\Omega_2)$ definida como la extensión por cero de la función $\phi_1(\Omega_1, q)$. Claramente

$$\lambda_1(\Omega_2, q) \leq \frac{\displaystyle\int_{\Omega_2} (|\nabla \overline{u}|^2 + q\overline{u}^2)}{\displaystyle\int_{\Omega_2} \overline{u}^2} = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_1} (|\nabla \overline{u}|^2 + q\overline{u}^2)}{\displaystyle\int_{\Omega_1} \overline{u}^2} = \lambda_1(\Omega_1, q).$$

Además, si $\Omega_1 \neq \Omega_2$, entonces $\overline{u}$ no es estrictamente positiva en Ω_2, por lo que $\overline{u}$ no es una función propia asociada a $\lambda_1(\Omega_2, q)$, con lo que la desigualdad anterior será estricta.

ii) El crecimiento de $\lambda_1(\Omega, q)$ respecto de q resulta obvio a partir de la expresión variacional de $\lambda_1(\Omega, q)$.

iii)

$$\lambda_1(\Omega, q+M) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + (q+M)u^2)}{\displaystyle\int_\Omega u^2} =$$

$$= \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ M + \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + qu^2)}{\displaystyle\int_\Omega u^2} \right\} = \lambda_1(\Omega, q) + M.$$

iv)

$$\lambda_1(\Omega, tq_1 + (1-t)q_2) =$$

$$= \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + (tq_1 + (1-t)q_2)\, u^2\right)}{\displaystyle\int_\Omega u^2} =$$

$$= \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \left\{ \frac{t \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q_1 u^2)}{\displaystyle\int_\Omega u^2} + \frac{(1-t) \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + q_2 u^2)}{\displaystyle\int_\Omega u^2} \right\} \geq$$

$$\geq t\lambda_1(\Omega, q_1) + (1-t)\lambda_1(\Omega, q_2).$$

v) Llamando $\varphi = \dfrac{\phi_1(\Omega,q)}{\|\phi_1(\Omega,q)\|_{L^2}}$, y $\varphi_n = \dfrac{\phi_1(\Omega,q_n)}{\|\phi_1(\Omega,q_n)\|_{L^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lambda_1(\Omega,q) = \int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + q\varphi^2\right); \quad \lambda_1(\Omega,q_n) = \int_\Omega \left(|\nabla\varphi_n|^2 + q_n\varphi_n^2\right).$$

Obsérvese que

$$\lambda_1(\Omega,q) + \int_\Omega [q_n - q]\varphi^2 = \int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + q_n\varphi^2\right) \geq$$

$$\geq \lambda_1(\Omega,q_n) =$$

$$= \int_\Omega \left(|\nabla\varphi_n|^2 + q\varphi_n^2 + [q_n - q]\varphi_n^2\right) \geq \lambda_1(\Omega,q) + \int_\Omega [q_n - q]\varphi_n^2.$$

Usando que $\|q_n - q\|_{L^\infty} \to 0$, y que $\|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtenemos que el primer y el último miembros de la anterior desigualdad convergen ambos a $\lambda_1(\Omega,q)$, con lo que se concluye la demostración de este apartado, y del Lema 1.1. ∎

NOTAS.

- Las propiedades *i)* y *ii)* expresan, respectivamente, la monotonía de $\lambda_1(\Omega,q)$ respecto de Ω y respecto de q. *iii)* expresa el comportamiento de $\lambda_1(\Omega,q)$ frente a las traslaciones, y puede reducir el estudio de $\lambda_1(\Omega,q)$, con q acotada, a $\lambda_1(\Omega,q')$, con $q' \geq 0$. *iv)* es claramente una propiedad de concavidad. Por su parte, es claro que *v)* pone de manifiesto la continuidad de $\lambda_1(\Omega,q)$ respecto de q.
- Usando estas propiedades podremos obtener estimaciones más o menos finas del valor de $\lambda_1(\Omega,q)$ en los casos que nos ocuparán en el resto de esta Memoria. Un perfecto conocimiento de $\lambda_1(\Omega,q)$ sólo es posible en casos muy particulares, cuando el dominio Ω es extremadamente simple, o la función q es *"apropiada"*. Cálculos aproximados de $\lambda_1(\Omega,0)$, para dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ concretos, pueden encontrarse en [55].

I.2 El método de sub-soluciones y súper-soluciones para el problema de Dirichlet en ecuaciones elípticas escalares

Aunque la idea que aquí desarrollaremos se remonta a los trabajos de Cohen y Keller [27], [28], [50], [51], la formulación que vamos a presentar en esta

Sección aparece por vez primera en los trabajos de Amann [3] y Sattinger [76]. Con posterioridad se han realizado muchas variantes y generalizaciones del método. En particular, una versión abstracta puede verse en [4].

Consideremos la ecuación escalar de tipo elíptico, con condición de Dirichlet homogénea en la frontera

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y f es localmente lipschitziana en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Observemos que si u es una solución clásica del problema (1.2), entonces u satisface las desigualdades

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &\leq f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &\leq 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} -\Delta u(x) &\geq f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &\geq 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

a la vista de lo cual cabría plantearse la siguiente cuestión:

> *Si existen dos funciones $\underline{u}$ y $\overline{u}$ que satisfacen, respectivamente las desigualdades anteriores, ¿existirá necesariamente una solución de* (1.2)*?*.

Esta idea se desarrolla a continuación.

DEFINICIÓN 1.2. *Llamaremos* **sub-solución** *(o solución inferior) del problema* (1.2) *a toda función $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifique*

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}(x) &\leq f(x, \underline{u}(x)), & x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) &\leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Del mismo modo, una **súper-solución** *(o solución superior) del problema* (1.2) *es toda aquella función $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ verificando*

$$\begin{aligned} -\Delta \overline{u}(x) &\geq f(x, \overline{u}(x)), & x \in \Omega, \\ \overline{u}(x) &\geq 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

TEOREMA 1.3. ([3], [76]). *Si $\underline{u}, \overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ son, respectivamente, sub-solución, y súper-solución, del problema* (1.2), *con $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, entonces existen u_* y u^*, respectivamente, solución minimal y maximal (clásicas) del problema* (1.2) *en el* "intervalo"

$$[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x),\ \forall x \in \Omega\}.$$

Entenderemos la minimalidad y la maximalidad de dichas funciones en el sentido que si $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ es una solución clásica de (1.2), *entonces se tiene $u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.*

Demostración. Por ser f localmente lipschitziana en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, es posible obtener una constante $M > 0$ tal que la función $f(x,u) + Mu$ es creciente con respecto a u, en el compacto $\overline{\Omega} \times \left[\min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x)\right]$.

Observemos que $[\underline{u}, \overline{u}]$ es un conjunto convexo, cerrado y acotado en el espacio de Banach $L^{\infty}(\Omega)$.

Consideremos el operador $T : [\underline{u}, \overline{u}] \to L^{\infty}(\Omega)$, donde, para cada función $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, Tv es (ver [44]) la única solución débil del problema

$$\begin{aligned} -\Delta Tv(x) + M\ Tv(x) &= f(x, v(x)) + Mv(x), \quad && x \in \Omega, \\ Tv(x) &= 0, && x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Observemos que si $v, w \in [\underline{u}, \overline{u}]$, con $v(x) \leq w(x)$, c.p.d. en Ω, las siguientes desigualdades tienen sentido en teoría débil de ecuaciones elípticas (ver [44])

$$\begin{aligned} &-\Delta(Tw - Tv) + M(Tw - Tv) = \\ &\qquad = f(x,w) + Mw - f(x,v) - Mv \geq 0, \quad && \text{en } \Omega, \\ &Tw - Tv \geq 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De donde, por el Principio del Máximo en versión débil (ver [44]), se deduce que $Tw(x) \geq Tv(x)$, c.p.d. en Ω, es decir, el operador T es monótono creciente. Más aún,

$$\begin{aligned} &-\Delta(T\underline{u} - \underline{u}) + M(T\underline{u} - \underline{u}) \geq \\ &\qquad \geq f(x,\underline{u}) + M\underline{u} - f(x,\underline{u}) - M\underline{u} = 0, \quad && \text{en } \Omega, \\ &T\underline{u} - \underline{u} = -\underline{u} \geq 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De donde resulta $T\underline{u}(x) \geq \underline{u}(x)$, c.p.d. en Ω. Del mismo modo,

$$\begin{aligned} &-\Delta(\overline{u} - T\overline{u}) + M(\overline{u} - T\overline{u}) \geq \\ &\qquad \geq f(x,\overline{u}) + M\overline{u} - f(x,\overline{u}) - M\overline{u} = 0, \quad && \text{en } \Omega, \\ &\overline{u} - T\overline{u} = \overline{u} \geq 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De donde $T\overline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, c.p.d. en Ω. Así, con estas desigualdades, y la monotonía del operador T, deducimos que

$$T([\underline{u}, \overline{u}]) \subset [\underline{u}, \overline{u}].$$

Construyamos las sucesiones recurrentes $\{u_n\}$ y $\{u^n\}$ mediante

$$u_0 = \underline{u}, \quad u_{n+1} = Tu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$u^0 = \overline{u}, \quad u^{n+1} = Tu^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por lo expuesto arriba, y por un simple argumento de inducción, obtenemos

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u^n \leq \ldots \leq u^1 \leq u^0 \text{ c.p.d. en } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{u^n\}$ son ambas, monótonas y acotadas. De ello se deduce que ambas sucesiones convergen c.p.d. en Ω a unas ciertas funciones u_* y u^*. Se tratará ahora de probar que estas funciones son regulares, y son soluciones del problema (1.2).

Usando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, obtenemos que la sucesión $\{f(\cdot, u_n(\cdot)) + Mu_n(\cdot)\}$ es una sucesión convergente (y por tanto de Cauchy) en $L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty)$. Utilizando la *"teoría L^p"* de ecuaciones elípticas lineales (ver [1], [44]),

$$\|u_{k+1} - u_{q+1}\|_{W^{2,p}} \leq c\|f(x, u_k) + Mu_k - f(x, u_q) - Mu_q\|_{L^p},$$

de donde se obtiene que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en el espacio de Banach $W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty)$. Usando que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $p > N$ ($\alpha = 1 - \frac{N}{p}$) (ver [10]), concluimos que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en el espacio de Banach $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, y en consecuencia, $u_* \in C^1(\overline{\Omega})$. Teniendo en cuenta que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega (\nabla u_{n+1} \cdot \nabla \phi + Mu_{n+1}\phi) = \int_\Omega (f(x, u_n)\phi + Mu_n\phi)$$

y aplicando de nuevo el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se obtiene que $\forall \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega (\nabla u_* \cdot \nabla \phi + Mu_*\phi) = \int_\Omega (f(x, u_*)\phi + Mu_*\phi)$$

es decir,

$$\int_\Omega \nabla u_* \cdot \nabla \phi = \int_\Omega f(x, u_*)\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}),$$

o lo que es igual, u_* es solución débil del problema (1.2). Teniendo en cuenta que, en este caso, el miembro de la derecha de la ecuación (1.2) es una función lipschitziana, se prueba que $u_* \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, $\forall \beta \in (0, 1)$ (ver [10], [44]), y en consecuencia, es solución clásica del problema (1.2). Análogo argumento para la sucesión $\{u^n\}$ demuestra la regularidad de u^*.

Además, si $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ es solución de (1.2), entonces, claramente, $u = Tu$, de donde, por la monotonía del operador T, y por la regularidad de Tu, razonando como anteriormente, se prueba

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u \leq u^n \leq \ldots \leq u^1 \leq u^0, \text{ en } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y tomando límites, obtenemos

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x), \ \forall x \in \Omega,$$

lo cual concluye la demostración. ∎

NOTAS.

- Puede ocurrir que $u_* = u^*$ (de hecho, éste debe ser el caso si (1.2) admite solución única). No parece fácil (y sería interesante) encontrar condiciones suficientes simples que garanticen que $u_* \neq u^*$, para un problema general del tipo (1.2).

- El teorema anterior proporciona, no sólo la existencia de una solución de (1.2), sino que dicha solución pertenece al intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$. Esto es importante, por ejemplo, cuando se buscan soluciones no negativas y no triviales de (1.2), así como para probar resultados de multiplicidad de soluciones.

- Nótese que en la demostración del Teorema 1.3 no se ha usado explícitamente que el operador T es compacto (continuo, y lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos). Una demostración alternativa de dicho teorema se podría hacer aplicando el Teorema del Punto Fijo de Schauder (ver, por ejemplo, [37]), al operador compacto $T : [\underline{u}, \overline{u}] \rightarrow [\underline{u}, \overline{u}]$, lo cual nos proporciona un punto fijo de T, es decir, una solución del problema (1.2) en el intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$. El argumento es bastante más simple que el que se ha desarrollado, pero la conclusión es menos satisfactoria, puesto que el Teorema de Schauder nada dice acerca de la maximalidad o minimalidad de las soluciones, ni proporciona un esquema iterativo mediante el cual puedan obtenerse aproximaciones de la solución.

- En Amann [3] puede verse que la conclusión del Teorema 1.3 es válida imponiendo que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, en lugar de localmente lipschitziana. Asímismo, puede verse que el método expuesto se aplica también a problemas distintos del problema de Dirichlet (1.2).

- Ni siquiera la regularidad $C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ impuesta por Amann es satisfecha por ciertos problemas que se presentarán en esta Memoria, lo que hará que, en el Capítulo II, volvamos sobre los métodos monótonos aplicados a ecuaciones escalares, donde rebajaremos de modo significativo las hipótesis de regularidad sobre la función f, con el fin de poder aplicar el método a un tipo de problemas que antes no podían ser resueltos con esta técnica.

– En ciertas situaciones particulares, la condición $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, puede eliminarse en el Teorema anterior (Ver [5]).

En la Sección 5 de este Capítulo obtendremos un resultado de existencia de solución, aplicando el método de sub-soluciones y súper-soluciones a una ecuación concreta, muy importante en el desarrollo de capítulos posteriores.

I.3 El método de sub-súper-soluciones para el problema de Dirichlet en sistemas elípticos

Aunque ya Sattinger [76] apuntó la posibilidad de extender los métodos de sub-soluciones y súper-soluciones a sistemas de ecuaciones elípticas no lineales, la extensión que él propuso requería ciertas hipótesis de monotonía sobre las no-linealidades de cada una de las ecuaciones, lo cual hacía que el método sólo fuese aplicable a ciertos tipos de sistemas, llamados casi-monótonos. De hecho, en esos casos es posible obtener, como en el caso escalar, sucesiones monótonas convergentes a la (posible) solución minimal o maximal del problema. El resultado de Sattinger pasó a ser un caso particular de algunos resultados posteriores, en los que, para demostrar existencia de solución, en lugar de aparecer sucesiones monótonas, aparece simplemente un operador compacto al que aplicar el Teorema del Punto Fijo de Schauder. Esta idea ha sido aplicada, entre otros, por J. Hernández [45], [46], en sistemas de ecuaciones elípticas, y es la que desarrollamos a continuación.

Consideremos el sistema de ecuaciones de tipo elíptico, con condición de Dirichlet homogénea en la frontera

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= h(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= k(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y h, k son funciones localmente lipschitzianas en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definición 1.4. *Sean $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in C^2(\overline{\Omega})$. Diremos que tales funciones forman un* **sistema de sub-súper-soluciones** *para el sistema* (1.3) *cuando se verifique*

a)
$$\begin{cases} \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), & \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x), & \forall x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) \leq 0 \leq \overline{u}(x), & \underline{v}(x) \leq 0 \leq \overline{v}(x), & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

b)

$$\forall v \in [\underline{v}, \overline{v}], \begin{cases} -\Delta\overline{u}(x) \geq h(x, \overline{u}(x), v(x)), & \forall x \in \Omega, \\ -\Delta\underline{u}(x) \leq h(x, \underline{u}(x), v(x)), & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

$$\forall u \in [\underline{u}, \overline{u}], \begin{cases} -\Delta\overline{v}(x) \geq k(x, u(x), \overline{v}(x)), & \forall x \in \Omega, \\ -\Delta\underline{v}(x) \leq k(x, u(x), \underline{v}(x)), & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

TEOREMA 1.5. ([46]). *Supongamos que* $\exists \underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in C^2(\overline{\Omega})$, *un sistema de sub-súper-soluciones para* (1.3). *Entonces existe al menos una solución clásica de* (1.3), $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

Demostración. Por ser h, k localmente lipschitzianas en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es posible obtener una constante $M > 0$ tal que las funciones $u \mapsto h(x, u, v) + Mu$, y $v \mapsto k(x, u, v) + Mv$, son crecientes en el compacto

$$\overline{\Omega} \times \left[\min_{x \in \overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x)\right] \times \left[\min_{x \in \overline{\Omega}} \underline{v}(x), \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{v}(x)\right],$$

Definiremos $D = [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, que es un conjunto convexo, cerrado y acotado en el espacio de Banach $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$.

Consideremos el operador $T : D \to L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, donde, para cada par $(u, v) \in D$, $T(u, v) = (R(u, v), S(u, v))$ viene dado por las expresiones

$$\begin{aligned} -\Delta R(u,v)(x) + M\, R(u,v)(x) &= h(x, u(x), v(x)) + Mu(x), & x \in \Omega, \\ R(u,v)(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta S(u,v)(x) + M\, S(u,v)(x) &= k(x, u(x), v(x)) + Mv(x), & x \in \Omega, \\ S(u,v)(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es bien sabido [44] que los operadores R y S son continuos y, teniendo en cuenta que los miembros de la derecha de estas expresiones son funciones en $L^\infty(\Omega)$, deducimos que, tanto $R(u, v)$ como $S(u, v)$, pertenecen y están acotadas en el espacio $C_0^1(\overline{\Omega})$, compactamente contenido en $L^\infty(\Omega)$ (ver, por ejemplo, [10] o [41]), por lo que el operador T resulta ser un operador compacto. Más aún, si $(u, v) \in D$,

$$\begin{aligned} &-\Delta(R(u,v) - \underline{u}) + M\,(R(u,v) - \underline{u}) \geq \\ &\qquad \geq h(x, u, v) + Mu - h(x, \underline{u}, v) - M\underline{u} \geq 0, && \text{en } \Omega, \\ &R(u,v) - \underline{u} = -\underline{u} \geq 0, && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De donde, por el Principio del Máximo en versión débil (ver [44]), se obtiene que $\underline{u}(x) \leq R(u,v)(x)$ c.p.d. en Ω. Razonando del mismo modo, obtenemos, $\forall(u,v) \in D$,

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) \leq R(u,v)(x) \leq \overline{u}(x), &\quad \text{c.p.d. en } \Omega, \\ \underline{v}(x) \leq S(u,v)(x) \leq \overline{v}(x), &\quad \text{c.p.d. en } \Omega, \end{aligned}$$

es decir, $T(D) \subset D$. Estamos, por tanto, en las condiciones de aplicar el Teorema del Punto Fijo de Schauder, y concluir que

$$\exists(u,v) \in D : T(u,v) = (u,v).$$

Veamos que, de hecho, esto significa que el par (u,v) es solución clásica del sistema (1.3). En efecto, el hecho de que (u,v) sea un punto fijo de T obliga a que $(u,v) \in \operatorname{Im} T \subset C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$, por lo que los miembros de la derecha en (1.3) son funciones lipschitzianas. Así pues, obtenemos que $u,v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, $\forall\beta \in (0,1)$ (ver [44]), y en consecuencia son una solución clásica para (1.3). ∎

NOTAS.

- Al igual que en el caso escalar, una de las ventajas del método de sub-súper-soluciones reside en que la solución encontrada pertenece a $[\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$. De nuevo, esto será importante, por ejemplo, cuando se busquen soluciones de (1.3), con ambas componentes no negativas y no triviales.

- Sobre el método de sub-súper-soluciones aplicado a sistemas de ecuaciones elípticas, volveremos en el Capítulo II de la presente Memoria, donde rebajaremos de modo significativo las hipótesis de regularidad sobre h y k, con el fin de poder aplicar el método a un tipo de problemas que antes no podían ser resueltos con esta técnica.

I.4 Unicidad para el problema de Dirichlet

No podríamos omitir en estos preliminares sobre la teoría de ecuaciones elípticas algunos resultados relativos a la unicidad de solución. En el primero de ellos, el Teorema 1.6, usaremos las ideas que aparecen en la demostración del Principio del Máximo en versión débil (ver [44]). El segundo, Teorema 1.7, apareció por primera vez en 1970, en un trabajo de D.S. Cohen y T.W. Laetsch [29], con una hipótesis adicional de existencia de una solución maximal estrictamente positiva en Ω. Brézis y Oswald, en [11] suprimen dicha hipótesis, y de su trabajo extraemos la demostración que aquí aparece del Teorema 1.7.

Consideremos la ecuación escalar

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x,u(x)), & x &\in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y además, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

TEOREMA 1.6. *Si la función f es decreciente con respecto a la segunda variable, entonces el problema (1.4) admite, a lo sumo, una solución débil.*

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos soluciones débiles del problema (1.4). Tomando $(u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(\Omega)$, como función test en las ecuaciones satisfechas por u_1 y u_2,

$$\int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla(u_1 - u_2)^+(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_1(x))(u_1 - u_2)^+(x)\, dx,$$

$$\int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla(u_1 - u_2)^+(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_2(x))(u_1 - u_2)^+(x)\, dx,$$

de donde

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)^+(x)|^2\, dx = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)(x) \cdot \nabla(u_1 - u_2)^+(x)\, dx =$$

$$= \int_\Omega (u_1 - u_2)^+(x)[f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x))]\, dx \leq 0.$$

Por tanto, obtenemos que $\|(u_1 - u_2)^+\|_{H_0^1} = 0$, es decir $(u_1 - u_2)^+ = 0$ c.p.d. en Ω, lo cual significa que $u_1 \leq u_2$ c.p.d. en Ω. Razonando de idéntico modo, podemos obtener la desigualdad inversa, y concluir que $u_1(x) = u_2(x)$, c.p.d. en Ω. ∎

TEOREMA 1.7. ([11]). *Supongamos que la función $u \mapsto f(x,u)$ es continua en $[0, +\infty)$, para casi todo $x \in \Omega$, y que la función $x \mapsto f(x,u)$ pertenece a $L^\infty(\Omega)$, $\forall u \geq 0$. Si, además, la función $u \mapsto \dfrac{f(x,u)}{u}$ es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$, para casi todo $x \in \Omega$, entonces el problema (1.4) admite a lo sumo, una solución débil acotada no negativa y no trivial, u, que en caso de existir, verifica $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, y $\dfrac{\partial u}{\partial n_e} < 0$, $\forall x \in \partial\Omega$.*

Demostración.

a) En primer lugar, probaremos que *toda solución acotada no negativa y no trivial de* (1.4) *es estrictamente positiva en* Ω, *y además* $\frac{\partial u}{\partial n_e} < 0$ *en* $\partial\Omega$, *donde* n_e *denota el normal exterior en* $\partial\Omega$.

Debido a que la función $u \mapsto \frac{f(x,u)}{u}$ es estrictamente decreciente para $u \in (0, +\infty)$, deducimos que $-\infty < \lim_{u \to 0^+} \frac{f(x,u)}{u} \leq +\infty$, y por tanto, $f(x,0) \geq 0$ c.p.d. en Ω. Además, si $u \in L^\infty(\Omega)$ (no negativa y no trivial), y tomamos $x \in \Omega$ tal que $u(x) \neq 0$, entonces

$$\frac{f(x,u(x))}{u(x)} \geq \frac{f(x, \|u\|_{L^\infty})}{\|u\|_{L^\infty}} \in L^\infty(\Omega).$$

Por tanto $\exists M > 0$ tal que $f(x,u(x)) \geq -Mu(x)$ c.p.d. en Ω. Luego, en sentido débil, $-\Delta u + Mu \geq 0$ en Ω. Aplicando el Principio del Máximo Fuerte (ver [40], [44]) se concluye este apartado.

b) Unicidad de solución acotada, no negativa y no trivial.

Sean $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, soluciones acotadas, no negativas y no triviales de (1.4). Usando lo hecho en el apartado anterior, sabemos que $\frac{\partial u_1}{\partial n_e} < 0$ y $\frac{\partial u_2}{\partial n_e} < 0$, es posible probar que $\frac{u_1}{u_2}$ y $\frac{u_2}{u_1}$ pertenecen a $L^\infty(\Omega)$, y consecuentemente $\frac{u_1^2}{u_2}$ y $\frac{u_2^2}{u_1}$ pertenecen a $H_0^1(\Omega)$, con

$$\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) = 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2, \quad \text{y} \quad \nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) = 2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1.$$

Por ser u_1 y u_2 soluciones débiles de (1.4), y usando el estricto decrecimiento de $\frac{f(x,u)}{u}$ respecto de u, obtenemos que, si $u_1 \not\equiv u_2$ en Ω, entonces

$$0 > \int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right)(u_1^2 - u_2^2) =$$

$$= \int_\Omega \left(f(x,u_1)\left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1}\right) + f(x,u_2)\left(u_2 - \frac{u_1^2}{u_2}\right)\right) =$$

$$= \int_\Omega \left(\nabla u_1 \cdot \nabla \left(u_1 - \frac{u_2^2}{u_1} \right) + \nabla u_2 \cdot \nabla \left(u_2 - \frac{u_1^2}{u_2} \right) \right) =$$

$$= \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^2 - \nabla u_1 \cdot \nabla \frac{u_2^2}{u_1} + |\nabla u_2|^2 - \nabla u_2 \cdot \nabla \frac{u_1^2}{u_2} \right) =$$

$$= \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^2 - 2\frac{u_1}{u_2} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \frac{u_1^2}{u_2^2} |\nabla u_2|^2 \right) +$$

$$+ \int_\Omega \left(|\nabla u_2|^2 - 2\frac{u_2}{u_1} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \frac{u_2^2}{u_1^2} |\nabla u_1|^2 \right) =$$

$$= \int_\Omega \left| \nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2} \nabla u_2 \right|^2 + \int_\Omega \left| \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1} \nabla u_1 \right|^2 \geq 0,$$

Lo cual es una contradicción. Por tanto, $u_1 \equiv u_2$, y queda probado el teorema. ∎

NOTAS.

- Observemos que los Teoremas 1.6 y 1.7 son independientes, tanto en las hipótesis exigidas como en los resultados obtenidos. Así, mientras que el Teorema 1.6 es un resultado de unicidad global, el Teorema 1.7 garantiza solamente la unicidad de solución positiva, pudiendo haber además otras soluciones, bien sean negativas, o bien soluciones que cambien de signo en Ω.
- En la próxima Sección, así como en otros modelos que aparecerán en los Capítulos siguientes, mostraremos problemas en los que obtenemos la unicidad de solución aplicando el Teorema 1.7.

I.5 LA ECUACIÓN ELÍPTICA LOGÍSTICA

Motivados por los modelos de tipo Lotka-Volterra con difusión, de los cuales trataremos extensamente en capítulos posteriores de esta Memoria, y con el fin de mostrar un primer resultado al respecto, haremos un estudio detallado de la ecuación escalar

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\,(\lambda - u(x)), \quad && x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y λ es una constante real. La ecuación (1.5) se conoce como *"ecuación logística"*, y surge en el estudio de genética de poblaciones, y dinámica de poblaciones, en el caso particular en que u representa la densidad en distintos puntos de Ω de individuos de una sola especie, en estado de equilibrio. Por ello estaremos interesados en encontrar soluciones de (1.5) que sean no negativas en Ω, y no triviales (obsérvese que (1.5) admite siempre la solución trivial $u \equiv 0$). Este modelo fue propuesto ya por Fisher en 1937, y ha sido objeto de una atención constante por parte de prestigiosos matemáticos, como Kolmogorov, Rothe, Fife, Peletier, y Dancer entre otros muchos. El resultado que demostraremos a continuación, Lema 1.8, es clásico, y puede encontrarse, por ejemplo, en el trabajo de Berestycki [8], o Amann [4]. Dicho resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para que el problema (1.5) admita una solución no negativa y no trivial.

LEMA 1.8. *El problema* (1.5) *admite solución débil no negativa y no trivial si, y sólo si $\lambda > \lambda_1(\Omega)$. En tal caso, dicha solución, a la que notaremos θ_λ*(1)*, es clásica, con $0 < \theta_\lambda(x) \leq \lambda$ en Ω, y es la única solución no negativa y no trivial de* (1.5).

Demostración. Efectivamente, si (1.5) admite alguna solución θ_λ no negativa y no trivial, entonces, sabiendo que $\int_\Omega |\nabla\theta_\lambda|^2 = \int_\Omega \lambda\theta_\lambda^2 - \int_\Omega \theta_\lambda^3$,

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla\theta_\lambda|^2}{\int_\Omega \theta_\lambda^2} = \frac{\int_\Omega \lambda\theta_\lambda^2 - \int_\Omega \theta_\lambda^3}{\int_\Omega \theta_\lambda^2} < \lambda.$$

Recíprocamente, si $\lambda > \lambda_1(\Omega)$, entonces teniendo en cuenta que la aplicación $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,u) = u(\lambda - u)$ es localmente lipschitziana, estamos en las condiciones del problema (1.2), para aplicar el Teorema 1.3. Obsérvese que, trivialmente, la constante $\overline{u} \equiv \lambda$ es una súper-solución para el problema (1.5). Si encontramos una sub-solución no negativa y no trivial para el problema (1.5), menor que $\overline{u}$, estará probada la existencia de solución no negativa y no trivial.

Sea $\delta = \lambda - \lambda_1(\Omega)$. Llamaremos $\underline{u} = \delta\phi_1(\Omega)$. Probemos que $\underline{u}$ es subsolución del problema (1.5):

$$\begin{aligned} -\Delta\underline{u}(x) = \lambda_1(\Omega)\underline{u} = (\lambda - \delta)\underline{u} \leq \underline{u}(\lambda - \underline{u}), &\quad \text{en } \Omega, \\ \underline{u} = 0(\leq 0), &\quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(1)En el caso de que $\lambda \leq \lambda_1(\Omega)$, entenderemos $\theta_\lambda \equiv 0$. Cuando se considere oportuno, o no esté suficientemente explícito en el contexto, notaremos $\theta_{\Omega,\lambda}$ en lugar de θ_λ.

Como además, claramente, $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall x \in \Omega$, queda probado que la condición $\lambda > \lambda_1$ es también suficiente para la existencia de solución no negativa y no trivial. De hecho, como la sub-solución encontrada es estrictamente positiva, la solución (clásica) obtenida debe ser también estrictamente positiva en Ω (la estricta positividad de la solución también es consecuencia inmediata del Teorema 1.7).

Para probar la unicidad, observemos que el Teorema 1.7 garantiza la unicidad de solución débil acotada, no negativa y no trivial. Bastará por tanto probar que todas las soluciones débiles de (1.5) son acotadas. Efectivamente, la súper-solución que hemos tomado, $\overline{u} \equiv \lambda$, es una cota a priori sobre las soluciones débiles de (1.5). Para probarlo, consideremos una solución débil arbitraria de dicho problema, u, y observemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (u-\lambda)^+ = \int_\Omega u(\lambda - u)(u-\lambda)^+,$$

o, equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla (u-\lambda)^+|^2 = -\int_\Omega u(u-\lambda)^{+2} \leq 0,$$

de donde $\|(u-\lambda)^+\|_{H_0^1} = 0$, es decir, $(u-\lambda)^+ = 0$ c.p.d. en Ω, y por tanto, toda solución no negativa de (1.5), verifica que $\|u\|_{L^\infty} \leq \lambda$, y así concluye la demostración de la unicidad, y del Lema 1.8. ∎

NOTAS.

- Aunque el Lema 1.8 proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución no negativa y no trivial de (1.5), no por ello podemos afirmar que queda concluido el estudio de dicho problema. De hecho, el valor de $\lambda_1(\Omega)$ no es conocido en general, para cualquier dominio Ω, y, salvo en casos extremadamente simples (ver [55]), una estimación fina de $\lambda_1(\Omega)$ puede resultar difícil. Asímismo, el estudio de las propiedades cualitativas de la solución θ_λ, será desarrollado con más detalle en capítulos posteriores, ya que esa información resultará extremadamente útil en el estudio de los sistemas de tipo Lotka-Volterra con difusión, en los que aparecerán dos especies que interactúan entre sí.

- Especialmente interesante puede resultar la búsqueda de dominios Ω en los que la ecuación (1.5) admita solución no negativa y no trivial, para un determinado $\lambda > 0$, fijo. La interpretación biológica de esta cuestión es bastante simple e intuitiva: dada una especie concreta, se tratará de buscar un hábitat apropiado donde dicha especie pueda sobrevivir. Es bien conocido que, cuando Ω contiene bolas euclídeas con radio suficientemente grande, entonces $\lambda_1(\Omega)$ se hace pequeño. Así pues, dado cualquier $\lambda > 0$ fijo, siempre será posible encontrar dominios Ω de subsistencia para la ecuación (1.5). Bastará para ello, tomar dominios que contengan bolas euclídeas suficientemente grandes. Esta cuestión también resultará interesante plantearla en el caso de sistemas, y trataremos detenidamente de ello en el Capítulo III de esta Memoria.

I.6 Un resultado de bifurcación global

En multitud de ocasiones ocurre que al estudiar una ecuación funcional no lineal encontramos (o introducimos) en dicha ecuación un parámetro real, λ, de manera que la ecuación puede expresarse en la forma

$$\Phi(\lambda, u) = 0, \tag{1.6}$$

con $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$, siendo E un conveniente espacio de funciones. Parece lógico preguntarse en este momento por la estructura global del conjunto de soluciones (λ, u) de dicha ecuación. Especialmente frecuente es el caso en que el par $(\lambda, 0)$ es solución de (1.6) para cualquier valor real del parámetro λ, es decir, $\Phi(\lambda, 0) = 0$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$. En este caso, resulta interesante buscar puntos del eje $\mathbb{R} \times \{0\}$, desde los cuales se *"genera"* una nueva familia de soluciones (en este caso no triviales) de (1.6). Son los llamados *"puntos de bifurcación"* de (1.6). Los objetivos de la Teoría de Bifurcación son, principalmente, la determinación de los puntos de bifurcación, así como el estudio de la estructura local y global de la familia de soluciones que *"bifurcan"* desde tales puntos. Una buena referencia para iniciarse en la Teoría de Bifurcación podría ser [6]. Un caso realmente interesante en las aplicaciones es aquel en que se consideran *"perturbaciones compactas no lineales"* de operadores lineales y compactos. Más concretamente, podemos considerar $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, y $G : \mathbb{R}\times E \to E$ un operador de la forma

$$G(\lambda, u) = \lambda L u + H(\lambda, u),$$

donde $L : E \to E$ es un operador lineal compacto, y $H : \mathbb{R} \times E \to E$ es un operador compacto, con

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{H(\lambda, u)}{\|u\|} = 0, \text{ uniformemente, para } \lambda \text{ acotado.}$$

Consideraremos problemas del tipo (1.6), con $\Phi(\lambda,u) = u - G(\lambda,u)$, es decir, buscaremos soluciones del problema

$$u = G(\lambda, u). \tag{1.7}$$

Para ello, consideremos $r(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} \; : \; \lambda^{-1} \in \sigma(L) \text{ (el espectro de } L)\}$, y llamaremos S al cierre en $\mathbb{R} \times E$ del conjunto de soluciones, (λ, u), no triviales del problema (1.7) (entendiendo por solución trivial a todo par de la forma $(\lambda, 0)$, ya que dichos pares son siempre soluciones, debido a que $H(\lambda, 0) = 0$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$).

El siguiente Teorema 1.9 puede considerarse un resultado clásico en Teoría de Bifurcación, y ofrece respuesta a dos de las principales cuestiones que se plantean en esta teoría: ***determinar los puntos de bifurcación*** y ***describir la estructura del conjunto de soluciones.*** La primera de estas cuestiones (determinación de los puntos de bifurcación) fue tratada por Krasnoselski [53], como parte de la *"Teoría Local de Bifurcación"*. La segunda cuestión (estructura global del conjunto de soluciones) es tratada por Rabinowitz [74], [75]. En esencia, las técnicas usadas para demostrar estos resultados están basadas en el grado de Leray-Schauder [56]. Combinando los resultados de Krasnoselski y Rabinowitz, obtenemos el siguiente

TEOREMA 1.9. ([74], [75]). *Si $\mu_0 \in r(L)$ es de multiplicidad algebraica impar, entonces S tiene una componente conexa C conteniendo al punto $(\mu_0, 0)$. Más aún, C es, o bien no acotada en $\mathbb{R} \times E$, o bien contiene a otro punto de la forma $(\widetilde{\mu}, 0)$, con $\mu_0 \neq \widetilde{\mu} \in r(L)$.*

NOTAS.

- La aplicación de este resultado a ecuaciones consiste, claro está, en transformar los problemas de ecuaciones en problemas del tipo (1.7), para un conveniente espacio de Banach E, y un operador apropiado, G. Por tanto, su aplicación no consistirá en una simple receta para tratar las ecuaciones, sino que pasa por la oportuna transformación de un problema en otro, lo que no siempre es automático.

- La descripción del conjunto de soluciones no triviales que ofrece el teorema anterior puede considerarse, desde un punto de vista puramente topológico, bastante satisfactoria, pero en principio no resuelve cuestiones tan simples como: *"¿Para qué valores del parámetro λ existe una solución no trivial de* (1.7)*?"*. No bastará por tanto con usar solamente el Teorema 1.9 para obtener respuesta a dicha pregunta, y será necesario continuar estudiando la *"forma"* de la componente C, usando la naturaleza del problema concreto a resolver en cada caso.

Si, por ejemplo, somos capaces de probar que C es no acotada, y además, obtener cotas a priori para las soluciones u en función de λ, es decir $\Phi(\lambda, u) = 0 \Rightarrow \|u\|_E \leq f(\lambda)$, ($f$ continua), entonces podremos concluir que la *"no acotación"* de C será gracias a la no acotación de su proyección real $\Pi(C) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists u \in E, \text{ con } (\lambda, u) \in C\}$.

- Todas estas consideraciones serán puestas en práctica en el desarrollo del resultado de bifurcación que aparece en el Capítulo II de esta Memoria, motivado por el estudio de una ecuación elíptica proveniente de un *"desacoplamiento"* de las ecuaciones de un sistema que aparece en la Biología.

Capítulo II:

Resultados de interés general en problemas elípticos.

Dedicaremos este segundo Capítulo de la Memoria a demostrar los teoremas y resultados generales que hemos desarrollado con el objeto de aplicarlos después a los modelos de la Biología que serán tratados en los siguientes capítulos. El hecho de tratar estos resultados en un capítulo aparte se debe a que, en general, cubren un abanico de posibilidades más amplio que las meras aplicaciones que mostraremos aquí, y pueden ser usados en el estudio de otros tipos de modelos y problemas. En cualquier caso, es necesario reconocer que el proceso de elaboración ha sido el inverso, es decir, son las aplicaciones que hacemos las que han motivado la aparición de estos resultados teóricos que más tarde han adquirido una *"entidad"* propia.

II.1 BIFURCACIÓN GLOBAL PARA UN OPERADOR NO LOCAL

En esta Sección probaremos una versión modificada de algunos teoremas aparecidos en [49] y en [74], motivados por el tipo de problemas que se presentarán en la Sección 2 del Capítulo III, donde estudiaremos una ecuación escalar proveniente de un *"desacoplamiento"* del par de ecuaciones de un sistema elíptico que incluye algunos sistemas que surgen de la Biología. La principal diferencia del Teorema 2.1 con respecto a los de los trabajos que hemos mencionado, es que el operador N que aquí aparece es de tipo *"no local"*, es decir el valor de $N(v)(x)$ depende, no sólo de x y del valor de $v(x)$, sino *"globalmente"* de la función v. En definitiva, probaremos un Teorema de Bifurcación, basándonos en el Teorema abstracto 1.9, pero enunciado ahora en términos de ecuaciones elípticas, con el objeto de que sea más fácilmente aplicable en la práctica.

Consideremos una ecuación del tipo

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) + q(x)v(x) &= \lambda v(x) + v(x)N(v)(x), & x &\in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $q \in L^\infty(\Omega)$, λ es un parámetro real, y $N : C_0^1(\overline{\Omega}) \to L^\infty(\Omega)$ es un operador verificando:

i) N es continuo, con $N(0) = 0$, y aplica conjuntos acotados de $C_0^1(\overline{\Omega})$ en conjuntos acotados de $L^\infty(\Omega)$.

ii) N es simétrico, es decir, $N(-v) = N(v)$, $\forall v \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Observemos que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, el par $(\lambda, 0)$ es una solución (trivial) del problema (2.1). En tales condiciones, podemos establecer el siguiente Teorema, que nos da una buena información sobre el conjunto de soluciones no triviales y positivas de (2.1) que *"bifurcan"* desde la solución trivial $(\lambda_1(\Omega, q), 0)$.

TEOREMA 2.1. *El conjunto S, cierre del conjunto de soluciones débiles no triviales $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ del problema (2.1), contiene un conexo C^+ que, a su vez, contiene al punto $(\lambda_1(\Omega, q), 0)$. Además, C^+ es no acotado y tal que $C^+ \setminus (\lambda_1(\Omega, q), 0) \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{P}$, donde P es el cono de las funciones de $C_0^1(\overline{\Omega})$ no negativas en Ω.*

Demostración. Sea $M \geq 0$ tal que $q(x) + M \geq 0$, c.p.d. en Ω. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) + (q(x) + M)v(x) &= \mu v(x) + v(x)N(v)(x), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Es trivial que

$$(\lambda, v) \text{ es solución de (2.1)} \Longleftrightarrow (\mu, v) = (\lambda + M, v) \text{ es solución de (2.2).}$$

Para $f \in L^\infty(\Omega)$, sea $Kf \in C_0^1(\overline{\Omega})$, la única solución débil del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + (q(x) + M)u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es sabido (ver [44]) que el operador $K : L^\infty(\Omega) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ es compacto. Además, resulta inmediato que $(\mu, v) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ es solución débil de (2.2) si, y sólo si

$$v = \mu K v + K(vN(v)) \tag{2.3}$$

Observemos que

$$\lim_{\|v\|_{C^1} \to 0} \frac{\|vN(v)\|_{L^\infty}}{\|v\|_{C^1}} \leq \lim_{\|v\|_{C^1} \to 0} \frac{\|v\|_{L^\infty} \|N(v)\|_{L^\infty}}{\|v\|_{C^1}}$$

$$\leq \lim_{\|v\|_{C^1} \to 0} \|N(v)\|_{L^\infty} = 0,$$

y, por la continuidad de K,

$$\lim_{\|v\|_{C^1} \to 0} \frac{K(vN(v))}{\|v\|_{C^1}} = 0.$$

Por tanto, el problema (2.3) está en las hipótesis del Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz 1.9. Así, teniendo en cuenta que $\lambda_1(\Omega, q + M) \in r(K)$, y tiene multiplicidad geométrica y algebraica igual a 1 (impar), obtenemos que S_1, el cierre del conjunto

$$\{(\mu, v), \text{ soluciones de (2.2) con } v \not\equiv 0\},$$

tiene una componente conexa C_1, que contiene al punto $(\lambda_1(\Omega, q+M), 0)$, y, además, o bien C_1 es no acotada, o bien contiene otro punto de la forma $(\tilde{\mu}, 0)$, con $\lambda_1(\Omega, q+M) \neq \tilde{\mu} \in r(K)$ (obsérvese que $\lambda_1(\Omega, q+M) = \lambda_1(\Omega, q) + M$, y que $(\lambda, v) \in S \Leftrightarrow (\lambda + M, v) \in S_1$).

Consideremos $P = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) : v(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega\}$.

Notando $Q = P \cup (-P)$ y $\widetilde{C_1} = C_1 \setminus (\lambda_1(\Omega, q+M), 0)$, probemos que

$$\widetilde{C_1} \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{Q}\,.$$

Para ello, iremos enunciando previamente cada uno de los pasos que nos dispongamos a dar.

a) *La componente* C_1 "comienza" *en el interior de* Q.

De hecho, probaremos que existe U, entorno de $(\lambda_1(\Omega, q+M), 0)$ en $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$, tal que

$$U \cap \widetilde{C_1} \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{Q}\,.$$

Efectivamente, si no fuese cierto, existiría una sucesión de puntos de $\widetilde{C_1}$, $\{(\mu_n, v_n)\} \to (\lambda_1(\Omega, q+M), 0)$ tal que $v_n \notin \overset{\circ}{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Llamando $\tilde{v}_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{C^1}}$, entonces sabemos que $\tilde{v}_n \notin \overset{\circ}{Q}$, y además

$$\tilde{v}_n = \mu_n K \tilde{v}_n + \frac{K(v_n N(v_n))}{\|v_n\|_{C^1}},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Por ser K compacta, existe una parcial $\{\tilde{v}_{n_k}\}$, convergente en $C_0^1(\overline{\Omega})$ a una función no trivial $\omega \in C_0^1(\overline{\Omega})$, con $\|\omega\|_{C^1} = 1$ y $\omega \notin \overset{\circ}{Q}$. Tomando límites en (2.4), obtenemos que ω debe ser solución no trivial del problema

$$\omega = \lambda_1(\Omega, q+M)\ K\omega,$$

luego ω es una función propia no trivial asociada al valor propio $\lambda_1(\Omega, q+M) \in r(K)$ (de multiplicidad geométrica y algebraica igual a 1). Por tanto, $\exists \delta \neq 0$, tal que $\omega = \delta\phi_1(\Omega, q+M) \in \overset{\circ}{Q}$, lo cual es una contradicción.

b) $\widetilde{C_1} \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{Q}$.

De nuevo razonaremos por reducción al absurdo, y supondremos que existe una sucesión $\{(\mu_n, v_n)\}$ en $\widetilde{C_1}$, con $v_n \in \overset{\circ}{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\{(\mu_n, v_n)\} \to (\tilde{\mu}, v) \in \widetilde{C_1} \cap (\mathbb{R} \times \partial Q).$$

Puede ocurrir una de las dos siguientes opciones:

- Si $v = 0$, entonces $\tilde{\mu} \neq \lambda_1(\Omega, q + M)$. Sea $\tilde{v}_n = \dfrac{v_n}{\|v_n\|_{C^1}} \in \overset{\circ}{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Obtenemos

$$\tilde{v}_n = \mu_n K \tilde{v}_n + \frac{K(v_n N(v_n))}{\|v_n\|_{C^1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por un argumento análogo al que se hizo más arriba, debe existir una parcial $\{\tilde{v}_{n_k}\}$ convergente en $C_0^1(\overline{\Omega})$, a un función no trivial $\omega \in \overline{Q}$, que satisface

$$\omega = \tilde{\mu}\ K\omega,$$

de donde se obtiene que $\tilde{\mu} \in r(K)$, $\tilde{\mu} \neq \lambda_1(\Omega, q + M)$. Luego ω es una función propia no trivial asociada a un valor propio $\tilde{\mu} \neq \lambda_1(\Omega, q + M)$, y es conocido que, en tal caso, $\omega \notin \overline{Q}$, lo cual es una contradicción.

- Si $v \neq 0$, entonces $v \in \partial Q \setminus \{0\}$. Sea M' una constante real positiva tal que $\mu + N(v)(x) + M' \geq 0$, c.p.d. en Ω. Entonces

$$\begin{aligned} -\Delta v + (q + M + M')v &= (\mu + N(v) + M')v, & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Principio del Máximo Fuerte (ver [44]), se obtiene que $v \in \overset{\circ}{Q}$, lo cual es una contradicción.

En cualquier caso, queda probado que $\widetilde{C_1} \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{Q}$.

Obsérvese que, siempre que una función, v, sea solución del problema (2.2) para un cierto $\mu \in \mathbb{R}$, entonces la función opuesta, $-v$, es también solución de dicho problema para el mismo valor de μ. Podemos definir entonces la *"reflexión"* $\Gamma : S_1 \to S_1$ como $\Gamma(\mu, v) = (\mu, -v)$. Es claro que Γ es un homeomorfismo de S_1 en S_1 (de hecho es una isometría), y por tanto debe llevar componentes conexas de S_1 en componentes conexas de S_1. Por tanto, $\Gamma(C_1)$ es una componente conexa de S_1 que, además contiene al punto $\Gamma(\lambda_1(\Omega, q + M), 0) = (\lambda_1(\Omega, q + M), 0)$. Así pues, $\Gamma(C_1) = C_1$, y por tanto C_1 es simétrica, es decir, $(\mu, v) \in C_1 \Leftrightarrow (\mu, -v) \in C_1$.

Deducimos entonces que $\widetilde{C_1}$ tiene una *"mitad"* en $\mathbb{R} \times \overset{\circ}{P}$ y otra *"mitad"* en $\mathbb{R} \times (-\overset{\circ}{P})$. Por lo tanto, si estamos interesados en soluciones no negativas del problema (2.1), podemos tomar el conexo

$$C^+ = \{(\lambda, v) : (\lambda + M, v) \in C_1 \cap (\mathbb{R} \times P)\}.$$

Por otra parte, aquí se ha probado que la componente conexa C_1 no contiene a ningún otro $(\tilde{\mu}, 0)$, con $\lambda_1(\Omega, q + M) \neq \tilde{\mu} \in r(K)$, por lo que la alternativa del Teorema de Rabinowitz nos asegura que C^+ es no acotada en el espacio $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$. ∎

NOTAS.

- En las aplicaciones del Teorema 2.1 (ver Sección 2 del Capítulo III), será interesante estudiar aquellos valores de λ para los cuales existe solución positiva, v, del problema (2.1), es decir, interesará conocer el conjunto $\Pi(C^+) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists v \in \overset{\circ}{P}, \text{ con } (\lambda, v) \in C^+\}$.

- Observemos que el Teorema 2.1 es aplicable a multitud de problemas elípticos con condición de Dirichlet homogénea en la frontera, como por ejemplo, el problema (1.5), aunque al no proporcionar propiedades cualitativas de la solución, el resultado que se obtiene mediante el Teorema 2.1 resulta, en este caso particular, menos satisfactorio que el Lema 1.8, en el que se usó el método de sub-soluciones y súper-soluciones.

- Los resultados de Rabinowitz [74] y de Hess y Kato [49] no son aplicables directamente a ciertas situaciones que surgirán en el Capítulo III de esta Memoria. Ello es debido a que en dicho Capítulo, reduciremos el estudio de ciertos sistemas al estudio de una ecuación escalar, mediante la técnica de *"desacoplamiento"*. En este caso, la ecuación escalar que aparecerá es del tipo (2.1), con un operador *"no local"*, N, y este tipo de operadores no están contemplados en los trabajos de Rabinowitz y de Hess y Kato.

II.2 Nuevas aportaciones al método de sub-soluciones y súper-soluciones para el problema de Dirichlet: el caso escalar y el caso de sistemas

Motivados por el estudio de ciertos problemas biológicos en los que aparece difusión no lineal (modelos degenerados), ofrecemos aquí una generalización de los Teoremas 1.3 y 1.5, donde rebajaremos de modo significativo algunas de las hipótesis sobre las no-linealidades de las ecuaciones. Además, llevaremos a cabo un tratamiento desde el punto de vista de la teoría débil de ecuaciones en derivadas parciales.

– CASO ESCALAR

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(v(x)) = k(x, v(x)), \quad & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, \quad & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, estrictamente creciente, con $\psi(0) = 0$, y k es una función real definida en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Este tipo de problemas aparece en dinámica de poblaciones, así como en genética (ver [14], [46] y [73]). Especialmente interesantes son los casos en los que $\psi(v) = v^m$ $(m \geq 1)$ para $v \geq 0$ (en el caso $m = 1$ diremos que (2.5) es de tipo no degenerado, y en el caso $m > 1$, (2.5) es de tipo degenerado). Estaremos también interesados en aquellos casos en los que k no es continua respecto de x, ya que, además de aportar generalidad a nuestro resultado, esta es la forma en que se pueden modelar en la Biología los *"cambios bruscos"* de las condiciones de habitabilidad en un dominio Ω.

Observemos que el problema (2.5) se puede transformar de modo muy simple en otro problema no degenerado, haciendo el cambio de variable $u = \psi(v)$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) = h(x, u(x)), \quad & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $h(x,u) = k(x, \psi^{-1}(u))$, $\forall (x,u) \in \overline{\Omega} \times \psi(\mathbb{R})$. Si intentamos aplicar el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones al problema (2.6) (ver Teorema 1.3), nos encontramos con que, en general, la función h no satisface las hipótesis de tal método, bien porque, al no ser k regular respecto de x, tampoco lo sea h, o bien porque el cambio de variable conlleve una pérdida de regularidad respecto de u. Leung y Fan, en [58], aplican el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones al problema (2.6), por lo que se ven obligados a imponer condiciones de crecimiento muy restrictivas a la no-linealidad, k, en (2.5).

Todas estas consideraciones han motivado el desarrollo de un nuevo método iterativo para problemas del tipo (2.6). Uno de los resultados más relacionados con nuestro trabajo podría verse en [77], aunque nuestra demostración es bastante más simple, y en algunos casos, el tipo de no-linealidad es más general. Otros resultados relacionados se pueden ver en [35], [58] y [73].

Consideremos el problema (2.6), donde la función h verifica las siguientes hipótesis:

(H1) *$h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua con respecto a la segunda variable, y además, $h(\cdot, u(\cdot)) \in L^\infty(\Omega)$, $\forall u \in L^\infty(\Omega)$.*

(H2) *$\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua, estrictamente creciente, tal que $s \mapsto h(x,s) + g(s)$ es creciente para casi todo $x \in \Omega$.*

Observemos que la hipótesis (H1) permite a la función h ser discontinua con respecto de x, pero con una discontinuidad *"controlada"*. Asímismo, la hipótesis (H2) puede entenderse como una condición de variación acotada de h respecto de u *"uniformemente en x"* (de hecho, si h no dependiese de x, dicha hipótesis sería exactamente la condición de variación acotada de h).

DEFINICIÓN 2.2. *Una función $\underline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ se dice que es una* **sub-solución** *(o solución inferior) del problema* (2.6) *cuando verifica*

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi \leq \int_\Omega h(x, \underline{u})\phi, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \ \phi \geq 0 \ \text{y además,} \ \underline{u} \leq 0 \ \text{en} \ \partial\Omega^{(1)}.$$

Del mismo modo, una función $\overline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ se dice que es una **súper-solución** *(o solución superior) del problema* (2.6) *cuando verifica*

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi \geq \int_\Omega h(x, \overline{u})\phi, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \ \phi \geq 0 \ \text{y además,} \ \overline{u} \geq 0 \ \text{en} \ \partial\Omega.$$

TEOREMA 2.3. *Si $\underline{u}, \overline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ son, respectivamente, sub-solución y súper-solución del problema* (2.6), *con $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, c.p.d. en Ω, entonces existen u_* y u^*, respectivamente solución minimal y maximal (débiles) del problema* (2.6) *en el* "intervalo"

$$[\underline{u}, \overline{u}] = \{u \in L^\infty(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \ c.p.d. \ en \ \Omega\}.$$

Es decir, si $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ es solución débil del problema (2.6), *entonces se tiene $u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x)$, c.p.d. en Ω. Además, $u_*, u^* \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

Antes de comenzar la demostración del Teorema 2.3, establezcamos algunos resultados previos que habrán de usarse más tarde.

(1) Una función $v \in H^1(\Omega)$ se dice menor o igual que $w \in H^1(\Omega)$ en $\partial\Omega$ cuando $\max\{0, v - w\} \in H_0^1(\Omega)$.

LEMA 2.4. (Principio del Máximo). *Sean $u_1, u_2 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tales que $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,*

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla \phi + \int_\Omega g(u_2)\phi \leq \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla \phi + \int_\Omega g(u_1)\phi,$$

y, además, $u_2 \leq u_1$ en $\partial\Omega$.

Entonces $u_2(x) \leq u_1(x)$ c.p.d. en Ω[2].

Demostración del Lema 2.4. Escribamos la hipótesis de este Lema, tomando $\phi = (u_2 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega)$, $(\phi \geq 0)$.

$$\int_\Omega \nabla(u_2 - u_1) \cdot \nabla(u_2 - u_1)^+ \leq \int_\Omega [g(u_1) - g(u_2)](u_2 - u_1)^+$$

y por tanto

$$\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)^+|^2 \leq \int_\Omega [g(u_1) - g(u_2)](u_2 - u_1)^+ \leq 0,$$

lo que demuestra que $\|(u_2 - u_1)^+\|_{H_0^1} = 0$, es decir $(u_2 - u_1)^+ = 0$ c.p.d. en Ω, de donde concluimos que $u_2 \leq u_1$ c.p.d. en Ω. ∎

La demostración de nuestro Teorema utiliza también otro resultado, cuyo enunciado incluimos por claridad en la exposición, pero cuya demostración no desarrollaremos aquí.

LEMA 2.5.([38]). *Sea $p > N$. Entonces, para cada función $f \in L^p(\Omega)$, el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + g(u(x)) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

admite una única solución débil acotada, que notaremos $u_f \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $(0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p})$, y el operador $T : L^p(\Omega) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, definido como $Tf = u_f$, es compacto y creciente (es decir, T es continuo, lleva conjuntos acotados de $L^p(\Omega)$ en conjuntos relativamente compactos de $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, y si $f, g \in L^p(\Omega)$ con $f(x) \leq g(x)$ c.p.d. en Ω, entonces $(Tf)(x) \leq (Tg)(x)$, $\forall x \in \Omega$).

---

[2] Convendría dar en este momento una interpretación de este Lema, que pueda ser entendida en sentido de funciones regulares. En este caso, el Lema se escribiría:
Sean $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ tales que:

$$-\Delta u_2(x) + g(u_2(x)) \leq -\Delta u_1(x) + g(u_1(x)), \ \forall x \in \Omega, \quad y \ u_2(x) \leq u_1(x), \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Entonces $u_2(x) \leq u_1(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Demostración del Teorema 2.3. Consideremos el conjunto $[\underline{u}, \overline{u}]$, que es un convexo, cerrado y acotado en $L^\infty(\Omega)$. Sea $p > N$ fijo; es claro a partir de (H1-H2) que el operador $S : [\underline{u}, \overline{u}] \to L^p(\Omega)$ definido como

$$Sv = h(\cdot, v(\cdot)) + g(v(\cdot)) \in L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega), \ \forall v \in [\underline{u}, \overline{u}],$$

es creciente, y por tanto, sabemos que $S([\underline{u}, \overline{u}])$ es acotado en $L^p(\Omega)$. Veamos también que el operador S es continuo. Sean $v_n, v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, con $\{v_n\} \to v$ en el espacio $L^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\|Sv_n - Sv\|_{L^p}^p = \int_\Omega \left| h(x, v_n) + g(v_n) - h(x, v) - g(v) \right|^p .$$

El integrando converge puntualmente a cero, y por ser $S([\underline{u}, \overline{u}])$ acotado, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, con lo que $\|Sv_n - Sv\|_{L^p} \to 0$, y se concluye que el operador S es continuo.

Componiendo S con el operador T (introducido en el Lema 2.5), obtenemos un nuevo operador compacto y creciente, $F : [\underline{u}, \overline{u}] \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $F = T \circ S$, es decir, para cada función $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, Fv es la única solución débil acotada del problema de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + g(u(x)) &= h(x, v(x)) + g(v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el crecimiento de F, y que $\underline{u}$ y $\overline{u}$ son, respectivamente, sub-solución y súper-solución del problema (2.6), obtenemos que, llamando $u_1 = F\underline{u}$, y $u^1 = F\overline{u}$, entonces $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla \phi + g(u_1)\phi) = \int_\Omega (h(x, \underline{u})\phi + g(\underline{u})\phi) \geq \int_\Omega (\nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi + g(\underline{u})\phi),$$

y también

$$\int_\Omega (\nabla u^1 \cdot \nabla \phi + g(u^1)\phi) = \int_\Omega (h(x, \overline{u})\phi + g(\overline{u})\phi) \leq \int_\Omega (\nabla \overline{u} \cdot \nabla \phi + g(\overline{u})\phi),$$

y aplicando el Lema 2.4,

$$\underline{u} \leq F(\underline{u}) \leq F(u) \leq F(\overline{u}) \leq \overline{u}, \text{ en } \Omega, \ \forall u \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Teniendo en cuenta que $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ (inclusión continua), podemos entonces decir que $F([\underline{u}, \overline{u}]) \subset [\underline{u}, \overline{u}]$.

Construyamos las sucesiones recurrentes $\{u_n\}$ y $\{u^n\}$ mediante

$$u_0 = \underline{u}, \quad u_{n+1} = Fu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$u^0 = \overline{u}, \quad u^{n+1} = Fu^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por lo dicho anteriormente, y por un simple argumento de inducción, obtenemos

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u^n \leq \ldots \leq u^1 \leq u^0 \text{ en } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{u^n\}$ son ambas, puntualmente, monótonas y acotadas, y por tanto puntualmente convergentes, respectivamente, a $u_*, u^* \in [\underline{u}, \overline{u}]$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue a las sucesiones $\{Su_n\}$ y $\{Su^n\}$, deducimos que

$$\{Su_n\} \to Su_* \ \text{ y } \ \{Su^n\} \to Su^* \ \text{ en } \ L^p(\Omega).$$

Por tanto,

$$\{T(Su_n)\} \to T(Su_*) \ \text{ y } \ \{T(Su^n)\} \to T(Su^*) \ \text{ en } \ C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

de donde se deduce que $u_*, u^* \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, con $u_* = Fu_*$, y $u^* = Fu^*$, o lo que es igual, u_* y u^* son soluciones débiles acotadas del problema (2.6).

Además, si $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ es solución débil de (2.6), entonces $u = Fu$. Por la monotonía del operador F, razonando como anteriormente, se prueba

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq u \leq u^n \leq \ldots \leq u^1 \leq u^0 \text{ en } \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y tomando límites obtenemos

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x), \ \forall x \in \Omega,$$

lo cual concluye la demostración del Teorema 2.3. ∎

NOTAS.

- El Teorema 2.3 generaliza el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones expuesto en el Capítulo I (Teorema 1.3), ya que si h fuese regular (bastaría con h α-hölderiana, con $\alpha \in (0,1]$), entonces, usando el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver [10]), las soluciones minimal y maximal obtenidas serían clásicas.

- Obsérvese que para poder demostrar el Teorema 2.3, h solamente necesita estar definida en

$$\overline{\Omega} \times \left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} \underline{u}(x), \operatorname{ess\,sup}_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) \right],$$

y la función $s \mapsto g(s) + h(x,s)$ sólo necesita ser creciente mientras $s \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$.

- La hipótesis (H2) de existencia de la función g, hace aquí el papel de la constante positiva M en el método clásico, pero con la siguiente ventaja:

  Dada una función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua, estrictamente creciente, y* $k : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *podemos construir* $h : \overline{\Omega}\times\psi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *definida como* $h(x,u) = k(x, \psi^{-1}(u))$, $\forall(x,u) \in \overline{\Omega}\times\psi(\mathbb{R})$. *Entonces* k *verifica* (H2) *si, y sólo si* h *verifica* (H2).

  Esta *"ventaja"*, jugará un papel importante a la hora de aplicar el nuevo método de sub-soluciones y súper-soluciones a los problemas que proceden, mediante el cambio de variable apropiado, de problemas degenerados (Véase Capítulo IV).

- En el trabajo de Stuart [77], la función h debe depender separadamente de x y de u, imponiendo la condición de variación acotada respecto de u. Nuestra demostración, además de no necesitar ese tipo de dependencia, resulta bastante más simple. En el trabajo de Leung y Fan [58], simplemente se aplica el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones a los problemas que resultan tras hacer el cambio de variable oportuno a problemas degenerados. Dado que dicho cambio de variable conlleva una considerable pérdida de regularidad en las no-linealidades, los autores se ven forzados a imponer condiciones de crecimiento muy restrictivas, que hacen que su método no pueda ser aplicado en numerosas situaciones que surgen de la Biología. En el trabajo de Pozio y Tesei [73], los autores imponen una mayor regularidad a la no-linealidad, y demuestran el resultado mediante técnicas de problemas parabólicos.

– Caso de sistemas

Al igual que en el caso escalar, también en las aplicaciones surgen sistemas elípticos con difusión no lineal. Un trabajo relacionado con el método de sub-súper-soluciones en sistemas degenerados podría ser el de Leung y Fan [58], donde, al igual que en el caso escalar, los autores obtienen un resultado aplicable a algunos sistemas degenerados, pero con hipótesis muy restrictivas, que hacen que el método sea una simple aplicación del método clásico en sistemas (Teorema 1.5), y dejando sin cubrir un amplio abanico de modelos que surgen de la Biología. Asímismo, Dal Passo y de Mottoni [30] ofrecen también métodos monótonos para sistemas de tipo degenerado, pero imponiendo hipótesis de regularidad más fuertes que las nuestras a los términos de difusión, así como a las no-linealidades.

Inspirados en los resultados expuestos en la Sección anterior, para ecuaciones elípticas escalares, estableceremos un método de sub-súper-soluciones aplicable a una gran variedad de sistemas elípticos (degenerados o no) y que generaliza el Teorema 1.5.

Consideremos el sistema elíptico

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= h(x,u(x),v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= k(x,u(x),v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y las funciones $h, k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifican

(HK1) *h y k son continuas con respecto a (u,v), y además, $\forall u, v \in L^\infty(\Omega)$, las funciones $h(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$ y $k(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))$, pertenecen a $L^\infty(\Omega)$.*

(HK2) *$\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, estrictamente creciente, tal que $\forall u, v \in L^\infty(\Omega)$, las funciones $s \mapsto h(x,s,v(x)) + g(s)$, y $t \mapsto k(x,u(x),t) + g(t)$, son crecientes para casi todo $x \in \Omega$.*

DEFINICIÓN 2.6. *Sean $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Diremos que tales funciones forman un* **sistema de sub-súper-soluciones** *para el sistema* (2.7) *cuando se verifique*

a)

$$\begin{cases} \underline{u}(x) \le \overline{u}(x), \quad \underline{v}(x) \le \overline{v}(x), & c.p.d. \text{ en } \Omega, \\ \underline{u} \le 0 \le \overline{u}, \quad \underline{v} \le 0 \le \overline{v}, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

b) y además, $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \ge 0$,

$$\forall v \in [\underline{v}, \overline{v}], \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\phi \ge \int_\Omega h(x,\overline{u},v)\phi, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla\phi \le \int_\Omega h(x,\underline{u},v)\phi, \end{cases}$$

$$\forall u \in [\underline{u}, \overline{u}], \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla \overline{v} \cdot \nabla \phi \geq \int_\Omega k(x, u, \overline{v})\phi, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla \underline{v} \cdot \nabla \phi \leq \int_\Omega k(x, u, \underline{v})\phi. \end{cases}$$

TEOREMA 2.7. *Supongamos que* $\exists \underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *un sistema de sub-súper-soluciones para* (2.7). *Entonces existe al menos una solución débil de* (2.7), $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. *Además,* $(u, v) \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Definiremos $D = [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, que es un conjunto convexo, cerrado y acotado en el espacio de Banach $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$.

Consideremos el operador $T : D \to L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$, donde, para cada par $(u, v) \in D$, $T(u, v) = (R(u, v), S(u, v))$ viene dado por las expresiones

$$\begin{aligned} -\Delta R(u, v)(x) + g(R(u, v)(x)) &= h(x, u(x), v(x)) + g(u(x)), & x \in \Omega, \\ R(u, v)(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta S(u, v)(x) + g(S(u, v)(x)) &= k(x, u(x), v(x)) + g(v(x)), & x \in \Omega, \\ S(u, v)(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

En virtud del Lema 2.5, sabemos que los operadores R y S son compactos, por lo que el operador T resulta ser compacto. Más aún, si $(u, v) \in D$, entonces $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla R(u, v) \cdot \nabla \phi + \int_\Omega g(R(u, v))\phi = \int_\Omega [h(x, u, v) + g(u)]\, \phi \geq$$

$$\geq \int_\Omega [h(x, \underline{u}, v) + g(\underline{u})]\, \phi \geq \int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \phi + \int_\Omega g(\underline{u})\phi,$$

y además, $R(u, v) \geq \underline{u}$ en $\partial\Omega$.

Por lo tanto, aplicando el Lema 2.4, se obtiene que $\underline{u}(x) \leq R(u, v)(x)$ c.p.d. en Ω. Razonando del mismo modo, podemos obtener, $\forall (u, v) \in D$,

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) \leq R(u, v)(x) \leq \overline{u}(x), &\quad \text{c.p.d. en } \Omega, \\ \underline{v}(x) \leq S(u, v)(x) \leq \overline{v}(x), &\quad \text{c.p.d. en } \Omega, \end{aligned}$$

es decir, $T(D) \subset D$. Estamos, por tanto, en las condiciones de aplicar el Teorema del Punto Fijo de Schauder, y concluir que

$$\exists (u, v) \in D : T(u, v) = (u, v),$$

es decir, (u, v) es solución de (2.7). Además, teniendo en cuenta el Lema 2.5 sabemos que $T(D) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por tanto, cualquier punto fijo de T debe ser un par de funciones en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. ∎

NOTAS.

- El Teorema 2.7 generaliza el método clásico de sub-súper-soluciones en sistemas elípticos expuesto en el Capítulo I (Teorema 1.5), ya que si h y k fuesen regulares (bastaría h y k α-hölderianas, con $\alpha \in (0,1]$), entonces el par (u, v) de soluciones obtenido sería solución clásica del problema (2.7).

- De nuevo, para poder demostrar el Teorema 2.7 bastaría con haber exigido que h y k estuviesen definidas en

$$\overline{\Omega} \times \left[\text{ess}\inf_{x\in\overline{\Omega}} \underline{u}(x), \text{ess}\sup_{x\in\overline{\Omega}} \overline{u}(x)\right] \times \left[\text{ess}\inf_{x\in\overline{\Omega}} \underline{v}(x), \text{ess}\sup_{x\in\overline{\Omega}} \overline{v}(x)\right],$$

  y la monotonía de $s \mapsto h(x, s, v) + g(s)$ y de $t \mapsto k(x, u, t) + g(t)$, sólo es necesaria cuando $s \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$ y $t \in [\underline{v}(x), \overline{v}(x)]$.

- Del mismo modo que ocurría con las hipótesis (H1-H2) para el caso escalar, las nuevas hipótesis (HK1-HK2) siguen verificándose tras un cambio de variables del tipo

$$\tilde{h}(x, u, v) = h(x, \psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)),$$
$$\tilde{k}(x, u, v) = k(x, \psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)),$$

  para convenientes funciones $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas y estrictamente crecientes. Ello nos llevará a desarrollar un método de sub-súper-soluciones para sistemas elípticos degenerados, como haremos en el Capítulo IV de esta Memoria.

- Con respecto a la unicidad, en el trabajo de Dal Passo y de Mottoni [30], aparece una condición que garantiza unicidad en el modelo de tipo cooperativo (h creciente respecto de v, y k creciente respecto de u).

CAPÍTULO III:

MODELOS BIOLÓGICOS CON DIFUSIÓN LINEAL.

En este tercer Capítulo, fijaremos nuestra atención en el estudio de sistemas provenientes de la Biología, en los que la difusión es lineal, es decir, modelos no degenerados. Para ello, serán de vital importancia los resultados que se han demostrado en el Capítulo II, ya que gran parte de lo que aquí aparecerá serán aplicaciones de tales resultados a los modelos concretos. También dedicaremos parte de este Capítulo a la búsqueda de dominios adecuados en los sea posible encontrar soluciones no triviales de tales sistemas.

III.1 LA ECUACIÓN LOGÍSTICA GENERALIZADA

Con el objetivo de estudiar los sistemas elípticos de tipo Lotka-Volterra con difusión, haremos primero un tratamiento en profundidad del caso particular en el que hay sólo una especie a considerar, es decir, aparece sólo una ecuación (caso escalar). De hecho, este estudio resulta imprescindible si queremos tratar con éxito el caso de sistemas. El modelo con el que vamos a trabajar es una generalización de la ecuación (1.5), que a su vez contiene otros tipos de modelos que aparecen en la Biología. Los resultados de esta sección se pueden encontrar básicamente en los trabajos de Blatt y Brown [9] y Li [61]; sin embargo, no aparecen con la generalidad con que aquí se enuncian. También algunas de las demostraciones que realizamos son diferentes de las que aparecen en los trabajos de los autores citados.

Consideremos la ecuación escalar

$$\begin{array}{ll} -\Delta u(x) = u(x)h(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y la función $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface

(H) *h es localmente lipschitziana, estrictamente decreciente respecto de u, y tal que $\exists \alpha > 0$ con $h(x, \alpha) \leq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.*

La hipótesis (H) es una hipótesis de autolimitación del crecimiento de la especie u, y se verifica con bastante generalidad, y por motivos obvios, en el tipo de modelos que surgen de la Biología. Desde un punto de vista matemático, dicha hipótesis permite obtener, como veremos más adelante, *"cotas a priori"* sobre las soluciones del problema (3.1).

TEOREMA 3.1. *El problema* (3.1) *admite solución débil no negativa y no trivial si, y sólo si $\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0)) < 0$. En tal caso dicha solución, a la que* *denotaremos* u_h[1], *es clásica, con* $0 < u_h(x) \leq \alpha$, $\forall x \in \Omega$, *y es la única solución débil no negativa y no trivial de* (3.1).

Demostración. Si (3.1) admite alguna solución débil, u_h, no negativa y no trivial, entonces, sabiendo que $\int_\Omega |\nabla u_h(x)|^2\,dx = \int_\Omega u_h^2 h(x, u_h(x))\,dx$,

$$\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0)) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 - h(\cdot,0)u^2)}{\int_\Omega u^2} \leq$$

$$\leq \frac{\int_\Omega (|\nabla u_h|^2 - h(\cdot,0)u_h^2)}{\int_\Omega u_h^2} = \frac{\int_\Omega u_h^2[h(\cdot, u_h) - h(\cdot, 0)]}{\int_\Omega u_h^2} < 0.$$

Recíprocamente, si $\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0)) < 0$ entonces, teniendo en cuenta que la aplicación $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, u) = u\,h(x, u)$ es localmente lipschitziana, estamos en las condiciones del problema (1.2), para aplicar el Teorema 1.3. Obsérvese que, trivialmente, la constante $\overline{u} \equiv \alpha$ es una súper-solución para el problema (3.1). Si encontramos una sub-solución no negativa y no trivial para el problema (3.1), menor o igual que $\overline{u}$, obtendremos existencia de solución clásica (y por tanto, débil) no negativa y no trivial para dicho problema.

Sea L una constante de Lipschitz para h en el compacto $\overline{\Omega} \times [0, \alpha]$. Consideremos $\delta_0 = \frac{-\lambda_1(\Omega, -h(\cdot,0))}{L} > 0$, y sea $\underline{u} = \delta_0 \phi_1(\Omega, -h(\cdot, 0))$. Probemos que $\underline{u}$ es sub-solución del problema (3.1). Obsérvese que $\forall \delta \in [0, \delta_0]$, se tiene que $h(x, 0) - h(x, \delta) \leq L\delta_0 = -\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0))$, y por lo tanto $h(x, 0) + \lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0)) \leq h(x, \delta)$, $\forall \delta \in [0, \delta_0]$. Así,

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u}(x) = \underline{u}(x)[h(x,0) + \lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0))] \leq \underline{u}(x)\,h(x, \underline{u}(x)), &\quad x \in \Omega, \\ \underline{u}(x) = 0 (\leq 0), &\quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

es decir, $\underline{u}$ es sub-solución del problema (3.1).

Fácilmente se prueba que esa elección particular de δ_0 garantiza que $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$[2]. Queda así probada la existencia de solución no negativa y no trivial para (3.1). Además, como la sub-solución encontrada es estrictamente positiva en Ω, necesariamente la solución (clásica) obtenida ha de ser también estrictamente positiva en Ω.

[1] En el caso de que $\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0)) \geq 0$, entenderemos $u_h \equiv 0$. Cuando se considere oportuno, o no esté suficientemente explícito en el contexto, notaremos $u_{\Omega,h}$ en lugar de u_h.

[2] El hecho de que la sub-solución y la súper-solución estén convenientemente ordenadas, como ha ocurrido en este caso, no es siempre automático. Pero en casos como este, si no se hubiese obtenido directamente dicha ordenación, hubiera bastado cambiar el valor de δ_0 por otro valor positivo suficientemente pequeño para obtener dicha desigualdad (obsérvese que para $\delta \in (0, \delta_0]$, la función $u_\delta = \delta\phi_1(\Omega, -h(\cdot, 0))$ es también subsolución para el problema (3.1)).

Para probar la unicidad, observemos que el Teorema 1.7 garantiza la unicidad de solución débil acotada, no negativa y no trivial. Bastará por tanto probar que todas las soluciones débiles de (3.1) son acotadas. Efectivamente, la súper-solución que hemos tomado, $\overline{u} \equiv \alpha$, es una cota a priori sobre las soluciones débiles de (3.1). Para probarlo, consideremos una solución débil arbitraria de dicho problema, u, y observemos que

$$\int_\Omega |\nabla(u-\alpha)^+|^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-\alpha)^+ = \int_\Omega uh(x,u)(u-\alpha)^+ \leq 0,$$

de donde $\|(u-\alpha)^+\|_{H_0^1} = 0$, es decir, $(u-\alpha)^+ = 0$ c.p.d. en Ω, y por tanto, toda solución no negativa de (1.5), verifica que $\|u\|_{L^\infty} \leq \alpha$, y así concluye la demostración de la unicidad, y del Teorema 3.1. ∎

NOTAS.

- Observemos que el problema (3.1) es una generalización de (1.5), y por tanto el Lema 1.8 pasa a ser un caso particular del Teorema 3.1 (no olvidemos que, según el Lema 1.1, $\lambda_1(\Omega, -\lambda) = \lambda_1(\Omega, 0) - \lambda$).
- De nuevo, el hecho de disponer de una condición necesaria y suficiente de existencia de solución para un problema como (3.1), no cierra el estudio de dicho problema, ya que, como se dijo en las notas siguientes al Lema 1.1, la estimación de $\lambda_1(\Omega, q)$ no es en absoluto una cuestión simple (ver también las notas siguientes al Lema 1.8).

En los siguientes resultados (Teoremas 3.2 y 3.3) pondremos de manifiesto el tipo de dependencia de $u_{\Omega,h}$ con respecto de h y con respecto a Ω, en lo que respecta a continuidad o monotonía.

TEOREMA 3.2. (Continuidad de u_h respecto de h).
Sean $h_n, h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$), funciones satisfaciendo la hipótesis (H), *para convenientes α_n, α_0, respectivamente, con $\{h_n\} \to h$ uniformemente en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Entonces $\{u_{h_n}\} \to u_h$ en $C^1(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Por el decrecimiento estricto de h_n y h respecto de u, y por la convergencia uniforme, podemos deducir

$$\exists \alpha > 0, n_0 \in \mathbb{N} : h_n(x,\alpha) \leq 0,\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall n \geq n_0 \text{ (entenderemos } \forall n \in \mathbb{N}).$$

a) Consideremos en primer lugar el caso en que $u_h \neq 0$. En virtud del Teorema 3.1, deducimos que $\lambda_1(\Omega, -h(\cdot,0)) < 0$, y por el apartado *v)* del lema 1.1, al ser $\{\lambda_1(\Omega, -h_n(\cdot,0))\} \to \lambda_1(\Omega, -h(\cdot,0))$, se obtiene que $\lambda_1(\Omega, -h_n(\cdot,0)) < 0$ para n suficientemente grande (entenderemos

$\forall n \in \mathbb{N}$), de donde $u_{h_n} \not\equiv 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la convergencia uniforme de h_n a h, se deduce:

$$\exists \delta_0 > 0 \ : \ h_n(\cdot, s) \geq h_n(\cdot, 0) + \lambda_1(\Omega, -h_n(\cdot, 0)) \ \forall s \in [0, \delta_0], \ \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se concluye (ver la demostración del teorema anterior) que $u_{h_n} \geq \delta_0 \phi_1(\Omega, -h_n(\cdot, 0))$, y por tanto $\delta_0 \leq \|u_{h_n}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego:

- Ninguna parcial de $\{u_{h_n}\}$ puede converger a cero en $C^1(\overline{\Omega})$.
- $\{\|u_{h_n}\|_{L^\infty}\}$ acotada, luego $\exists K > 0 : \|u_{h_n} h_n(\cdot, u_{h_n})\|_{L^\infty} \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $\forall p > N$, $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$,

  $$\|u_{h_n}\|_{C^{1,\alpha}} \leq c_1 \|u_{h_n}\|_{W^{2,p}} \leq c_2 \|u_{h_n} h_n(\cdot, u_{h_n})\|_{L^p} \leq c_2 K |\Omega|^{1/p},$$

  y por tanto, $\{\|u_{h_n}\|_{C^{1,\alpha}}\}$ es acotada.

Razonemos por reducción al absurdo, y supongamos que $\{u_{h_n}\}$ no converge a u_h en el espacio $C^1(\overline{\Omega})$. Obtendríamos así una parcial (a la que seguiremos notando $\{u_{h_n}\}$) que está fuera de un cierto C^1-entorno de u_h. Pero, por ser $\{u_{h_n}\}$ acotada en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, que está compactamente contenido en $C^1(\overline{\Omega})$, se obtiene una nueva parcial $\{u_{h_{n_k}}\}$ convergente en $C^1(\overline{\Omega})$. Además, su límite debe ser una función $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$, $\omega \not\equiv 0$, $\omega \not\equiv u_h$. Tomando límites en los problemas del tipo (3.1) correspondientes a h_{n_k}, obtenemos que ω es una solución no negativa y no trivial del problema (3.1), distinta de u_h, lo cual es una contradicción.

b) Consideremos ahora el caso $u_h = 0$, es decir el problema (3.1) sólo admite como solución no negativa la $u \equiv 0$. Razonemos de nuevo por reducción al absurdo, y supongamos que $\{u_{h_n}\}$ no converge a cero en $C^1(\overline{\Omega})$. Obtendríamos así una parcial (a la que seguiremos notando $\{u_{h_n}\}$) que está fuera de un cierto C^1-entorno de 0. Pero, por ser $\{u_{h_n}\}$ acotada en $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, que está compactamente contenido en $C^1(\overline{\Omega})$, se obtiene una nueva parcial $\{u_{h_{n_k}}\}$ convergente en $C^1(\overline{\Omega})$. Además, su límite debe ser una función $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$, $\omega \not\equiv 0$. Tomando límites en los problemas del tipo (3.1) correspondientes a h_{n_k}, obtenemos que ω es una solución no negativa y no trivial del problema (3.1), lo cual es una contradicción. ∎

TEOREMA 3.3. (Propiedades de monotonía de $u_{\Omega,h}$).

a) Sean $h_1, h_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando (H), *respectivamente para las constantes α_1, α_2, con $h_1 \leq h_2$ en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Entonces $u_{h_1} \leq u_{h_2}$.*

b) Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios acotados de $\mathbb{R}^N$, ambos con frontera regular, y con $\Omega_1 \subset \Omega_2$, y $h : \overline{\Omega_2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando (H). *Entonces* $u_{\Omega_1,h} \leq u_{\Omega_2,h}|_{\Omega_1}$.

Demostración.

a) Observemos que, por la ordenación de las funciones h_1 y h_2, y por el estricto decrecimiento de ambas funciones respecto de u, se tiene que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Además, veamos que u_{h_1} es sub-solución del problema correspondiente a u_{h_2}. En efecto,

$$\begin{array}{ll} -\Delta u_{h_1}(x) = u_{h_1}(x)h_1(x, u_{h_1}(x)) \leq u_{h_1}(x)h_2(x, u_{h_1}(x)), & x \in \Omega, \\ \qquad u_{h_1}(x)(=0) \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}$$

Por tanto, como α_2 es una súper-solución para dicho problema, con $u_{h_1} \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$, necesariamente la única solución positiva de ese problema, u_{h_2} debe verificar que $u_{h_1} \leq u_{h_2} \leq \alpha_2$ en Ω.

b) Observemos que $u_{\Omega_2,h}|_{\Omega_1}$ es una súper-solución para el problema (3.1) planteado en Ω_1. Efectivamente,

$$\begin{array}{ll} -\Delta u_{\Omega_2,h}(x) = u_{\Omega_2,h}(x)\, h(x, u_{\Omega_2,h}(x)), & x \in \Omega_1, \\ \qquad u_{\Omega_2,h}(x) \geq 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{array}$$

Teniendo en cuenta que, para δ_0 suficientemente pequeño, la función

$$\underline{u} = \delta_0 \phi_1(\Omega_1, -h(\cdot, 0))$$

es sub-solución para dicho problema, y $\underline{u} \leq u_{\Omega_2,h}$ en Ω_1, se deduce por la unicidad de $u_{\Omega_1,h}$, que $u_{\Omega_1,h} \leq u_{\Omega_2,h}$ en Ω_1. ∎

III.2 Resultado general sobre coexistencia. Aplicación a diversos modelos de la Biología

Desde los trabajos de Dancer [31], [32], sobre los modelos biológicos del tipo Lotka-Volterra con difusión, han sido muchos los autores que han aportado resultados aplicables a uno u otro tipo de modelos: cooperativo, de competición, o presa-depredador. Directamente relacionados con nuestro trabajo, cabría mencionar los trabajos de L. Li [59], [61], donde el autor estudia los modelos del tipo presa-depredador, L. Li y R. Logan [64], que estudian modelos de tipo competición, L. Li y A. Ghoreishi [62], donde se estudian los modelos de tipo cooperativo, ofreciendo en algunos casos particulares condiciones necesarias y suficientes de coexistencia. También debe reseñarse el trabajo de J. López-Gómez [65], donde se estudian los tres modelos por separado. Presentamos aquí un resultado de una gran generalidad, aplicable a los tres modelos clásicos, y a algunos otros modelos no correspondientes a ninguno de esos tres, bien sea porque el tipo de interacción depende de las distintas *"zonas"* del dominio, bien porque dicha interacción varíe en función del número de individuos de cada una de las especies (ver [26]). Estas ideas serán tratadas con más detalle en el desarrollo de esta Sección.

Considérese el sistema elíptico, con condición de Dirichlet homogénea en la frontera

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\, h(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\, k(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y las funciones $h, k : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ son localmente lipschitzianas (esta hipótesis se supondrá en lo que sigue, salvo que explícitamente se indique lo contrario). Estaremos interesados en encontrar **estados de coexistencia** para (3.2), es decir, soluciones (u, v), con ambas componentes no negativas y no triviales. Para ello, impondremos a nuestras funciones h y k las siguientes hipótesis:

(S1) *h es estrictamente decreciente respecto de u, y*
k es estrictamente decreciente respecto de v.

(S2) *Existen dos constantes reales $\alpha, \beta > 0$, tales que*
$h(x, \alpha, s) \leq 0$, $k(x, s, \beta) \leq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\forall s \geq 0$.

La hipótesis (S1) se verifica con bastante generalidad en el tipo de modelos que surgen de la Biología (intuitivamente, es una hipótesis de **autolimitación del crecimiento de las especies u y v**). La hipótesis (S2), que también es verificable, como veremos, en los modelos más usados, permite obtener *"cotas a priori"* sobre los estados de coexistencia del problema (3.2).

DEFINICIÓN 3.4. *Para cada función v, lipschitziana en $\overline{\Omega}$, fija, sea u_v la solución maximal del problema*

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\, h(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Del mismo modo, para cada función u lipschitziana en $\overline{\Omega}$, fija, v_u será la solución maximal del problema

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= v(x)\,k(x,u(x),v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

NOTAS.

- Observemos que los problemas de contorno planteados en la definición anterior están en las hipótesis del problema (3.1), y podemos por tanto aplicarle el Teorema 3.1, por el cual sabemos que u_v y v_u verifican

$$\begin{cases} u_v \equiv 0, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -h(\cdot,0,v(\cdot))) \geq 0, \\ 0 < u_v(x) \leq \alpha \ \text{ en } \Omega, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -h(\cdot,0,v(\cdot))) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_u \equiv 0, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -k(\cdot,u(\cdot),0)) \geq 0, \\ 0 < v_u(x) \leq \beta \ \text{ en } \Omega, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -k(\cdot,u(\cdot),0)) < 0. \end{cases}$$

La siguiente proposición pone de manifiesto, respectivamente, la *"buena dependencia"* de u_v respecto de v, y de v_u respecto de u.

PROPOSICIÓN 3.5. *Los operadores $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{L}(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definidos por $\Phi_1(v) = u_v$, $\Phi_2(u) = v_u$, son compactos.*

Demostración. La continuidad de los operadores Φ_1, Φ_2 es consecuencia inmediata del Teorema 3.2. Por el Teorema 3.1, sabemos que $u_v \in C^2(\overline{\Omega})$, con $\|u_v\|_{C^2} \leq f(\|v\|_{\mathcal{L}})$ (f continua)[(3)], de modo que, usando que $C^2(\overline{\Omega})$ está compactamente contenido en $C^1(\overline{\Omega})$ (ver [41]), obtenemos la compacidad de Φ_1. Idéntico razonamiento prueba la compacidad de Φ_2. ∎

Pasemos ya a enunciar el resultado general de sistemas, en el que damos una condición suficiente para que el problema (3.2) admita al menos un estado de coexistencia. Para un sistema tan general como es (3.2), la condición del teorema siguiente es bastante satisfactoria, ya que hay casos particulares (como la interacción de tipo presa-depredador) en los que nuestra condición suficiente es también necesaria para la existencia de estados de coexistencia de (3.2).

Daremos dos demostraciones alternativas para este teorema, ya que ambas son bastante ilustrativas, y posiblemente aplicables a sistemas con otro

(3) Observemos que, de hecho, por el Teorema 3.2 obtenemos $\|u_v\|_{C^2} \leq \tilde{f}(\|v\|_{L^\infty})$, con $\tilde{f} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, continua.

tipo de no-linealidades. La primera de ellas, en la que se usa el método de *"desacoplamiento"*, está inspirada en un resultado de Blatt y Brown [9] y reduce el estudio del sistema (3.2) al estudio de una ecuación escalar, a la que aplicar el Teorema 2.1. La segunda de las demostraciones utiliza el Teorema del Punto Fijo, de Schauder, destacando su relevancia, por la generalidad del resultado que demuestra, y por la multitud de aplicaciones que de él se derivan. Además, al contrario que con el método de desacoplamiento, este segundo argumento puede usarse en el tratamiento de sistemas con más de dos ecuaciones.

TEOREMA 3.6. *Supongamos que las funciones h y k satisfacen* (S1-S2). *Una condición suficiente para que el problema* (3.2) *admita al menos un estado de coexistencia es:*

$$\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0, v_0)) < 0 \quad y \quad \lambda_1(\Omega, -k(\cdot, u_0, 0)) < 0.$$

Demostración 1. Esta primera demostración consta de dos pasos principales que iremos enumerando y enunciando a medida que vayan a ser tratados.

i) El sistema (3.2) *admite un estado de coexistencia si, y sólo si existe solución no negativa y no trivial de la ecuación escalar*

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= v(x)\, k(x, u_{|v|}(x), |v(x)|), \quad & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En efecto, si (u, v) es un estado de coexistencia para (3.2), entonces $u = u_v = u_{|v|}$, y por tanto v es una solución no negativa y no trivial de (3.3). Recíprocamente, si v es solución no negativa y no trivial de la ecuación escalar (3.3), entonces el par (u_v, v) es solución de (3.2), y para que sea un estado de coexistencia sólo hay que comprobar que $u_v \not\equiv 0$. Supongamos que fuera $u_v \equiv 0$. Entonces, v ha de ser la única solución no negativa y no trivial del problema

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= v(x)\, k(x, 0, v(x)), \quad & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

es decir, $v = v_0$, y por tanto hemos obtenido que $u_{v_0} \equiv 0$, que es equivalente (ver la Definición 3.4) a que $\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0, v_0)) \geq 0$, lo cual entra en contradicción con la hipótesis de este teorema.

ii) El problema (3.3) *admite una solución no negativa y no trivial.*

Consideremos la familia de problemas dada por

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= \lambda v(x) + v(x)\, k(x, u_{|v|}(x), |v(x)|), \quad & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Obsérvese que (3.3) es el caso particular de (3.4), para $\lambda = 0$. Llamando

$$q(x) = -k(x, u_0(x), 0), \text{ y}$$

$$N(v)(x) = k(x, u_{|v|}(x), |v(x)|) - k(x, u_0(x), 0),$$

el problema (3.4) resulta ser de la forma (2.1), y podemos por tanto aplicarle el Teorema 2.1 para obtener que el cierre del conjunto de soluciones no triviales $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ del problema (3.4) contiene un conexo C^+ que, a su vez, contiene al punto $(\lambda_1(\Omega, q), 0)$, no acotado y tal que $C^+ \setminus (\lambda_1(\Omega, q), 0) \subset \mathbb{R} \times \overset{\circ}{P}$, donde P es el cono de las funciones de $C_0^1(\overline{\Omega})$ no negativas en Ω (observemos que, por hipótesis, $\lambda_1(\Omega, q) < 0$).

Más aún, si definimos $\Pi : C^+ \to \mathbb{R}$ como $\Pi(\lambda, v) = \lambda$, $\forall (\lambda, v) \in C^+$, entonces probaremos que $0 \in \Pi(C^+)$.

Para ello, primero demostraremos que $\Pi(C^+)$ está acotado inferiormente por $-K_1$, donde $K_1 = \max k(\overline{\Omega} \times [0, \alpha] \times [0, \beta])$. En efecto, si $(\lambda, v) \in C^+$ con $\lambda < -K_1$, obtenemos

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= r(x), \quad && x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $r = v\, k(\cdot, u_v, v) + \lambda v < v\, k(\cdot, u_v, 0) - K_1 v \leq 0$. Por tanto, aplicando el Principio del Máximo, obtendríamos que $v \leq 0$, que resulta ser una contradicción.

Una vez probado que $\Pi(C^+)$ está acotado inferiormente, demostraremos que $\Pi(C^+)$ no está acotado superiormente por cero. Razonemos por reducción al absurdo, y supongamos que $\forall (\lambda, v) \in C^+$ se tiene $\lambda \leq 0$. Entonces si llamamos $\Omega_1 = \{x \in \Omega : v(x) > \beta\}$, veremos que dicho conjunto debe ser vacío. En efecto, si no lo fuera, entonces

$$-\Delta v = v[k(\cdot, u_v, v) + \lambda] \leq v[k(\cdot, u_v, \beta) + \lambda] \leq 0 \text{ en } \Omega_1.$$

Aplicando el Principio del Máximo, $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}_1} v(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega_1} v(x) = \beta$, lo cual es una contradicción. Así, Ω_1 es vacío y por tanto $\|v\|_{L^\infty} \leq \beta$. Por lo tanto, v es solución de

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= p(x), \quad && x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $p = v[k(\cdot, u_v, v) + \lambda]$, y $\|p\|_{L^\infty} \leq \beta(K_1 + |\lambda|) \leq 2\beta K_1$. Por tanto, $v \in W_0^{2,q}(\Omega)$, compactamente contenido en $C_0^1(\overline{\Omega})$ para $q > N$, con $\|v\|_{C_0^1} \leq 2c\beta K_1$ (cota independiente de v). De ahí concluimos que el conexo C^+ es acotado en $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$, y eso es una contradicción.

Así, hemos probado que $\Pi(C^+)$ es un conexo en $\mathbb{R}$ (un intervalo), conteniendo a $\lambda_1(\Omega, q) < 0$, y no acotado superiormente por cero. Luego $0 \in \Pi(C^+)$, o lo que es igual, el problema (3.4) admite solución positiva para $\lambda = 0$, es decir, (3.3) admite solución no negativa y no trivial, v. Por el apartado *i)*, deducimos que el par (u_v, v) es un estado de coexistencia para (3.2). ∎

Demostración 2. Teniendo en cuenta la nota al pie de la página 47, sabemos que existen $R_1, R_2 > 0$ tales que tomando $u, v \in \mathcal{L}(\overline{\Omega})$, con $0 \leq u(x) \leq \alpha$, $0 \leq v(x) \leq \beta$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, entonces $\|u_v\|_{\mathcal{L}} \leq R_1$, y $\|v_u\|_{\mathcal{L}} \leq R_2$. Observemos que el conjunto

$$D = ([0,\alpha]_{\mathcal{L}} \times [0,\beta]_{\mathcal{L}}) \cap (B_{\mathcal{L}}(0; R_1) \times B_{\mathcal{L}}(0; R_2))$$

es convexo, cerrado y acotado en el espacio de Banach $\mathcal{L}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{L}(\overline{\Omega})$. Consideremos el operador $T : D \longrightarrow D$, dado por

$$T(u,v) = (u_v, v_u).$$

En virtud de la Definición 3.4 sabemos que T está bien definido, y por la Proposición 3.5 sabemos que T es compacto. Así pues, estamos en las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Schauder, por el cual sabemos que T tiene un punto fijo en D, es decir

$$\exists (u,v) \in D : T(u,v) = (u,v),$$

o lo que es igual, $(u,v) = (u_v, v_u)$, que significa que el par (u,v) es solución no negativa del problema (3.2). Lo que resta por probar es que dicha solución es un estado de coexistencia. Si alguna de las componentes fuese cero (digamos, por ejemplo, $u \equiv 0$), entonces $v = v_u = v_0$, y por tanto $0 = u = u_v = u_{v_0}$, lo cual, a la vista de la Definición 3.4, equivale a

$$\lambda_1(\Omega, -h(\cdot, 0, v_0)) \geq 0,$$

que entra en contradicción con la hipótesis de este teorema. Idéntico razonamiento prueba que $v \not\equiv 0$. Obtenemos así que, efectivamente, el par (u,v) (punto fijo del operador T) es un estado de coexistencia para (3 2). ∎

NOTAS.

- El estado de coexistencia obtenido en el Teorema anterior, aunque se entiende en sentido débil, resulta ser clásico, debido a las hipótesis de regularidad impuestas a las funciones h y k.

- El Teorema 3.6 goza de bastante generalidad; de hecho, como se verá en lo que sigue, la condición suficiente dada en dicho Teorema para tener estados de coexistencia de (3.2) engloba otras dadas por diversos autores separadamente para los tres modelos estándar (competición, presa-depredador y cooperativo). También permite estudiar otros modelos que no se corresponden con ninguno de los modelos anteriores. Así pues, creemos que dicho Teorema es una contribución significativa desde el punto de vista de la unificación de muchos resultados dispersos. No obstante, resulta difícil de aplicar en la práctica, ya que, como se ha puntualizado anteriormente, no disponemos de expresiones explícitas ni de buenas aproximaciones de las funciones u_0 y v_0. Además, aunque fuesen conocidas dichas funciones, sabemos que tampoco es fácil la estimación de $\lambda_1(\Omega, q)$. Por ello, a menudo será interesante encontrar condiciones más simples que garanticen el cumplimiento de la condición del Teorema. Esto es lo que haremos, entre otros resultados, en la Sección 3 de este Capítulo.

- Una cuestión interesante, tanto desde el punto de vista matemático, como biológico, será estudiar cómo varía la condición suficiente del Teorema 3.6 al cambiar el dominio Ω. En la Sección 3 haremos también un estudio detallado de esta cuestión para los modelos de la Biología, y en especial para la interacción de tipo presa-depredador.

- Debe recalcarse el hecho de que en Teorema 3.6 no se ha impuesto ningún tipo de monotonía de h respecto de v, ni de k respecto de u. Esto hace que, en principio, el Teorema pueda aplicarse indistintamente a cualquier tipo de modelo clásico (competición, presa-depredador y cooperativo), así como a modelos que no obedezcan a ninguno de esos tres casos. A continuación veremos con detenimiento distintas aplicaciones del Teorema 3.6, entre las cuales se encuentra el estudio de los tres modelos clásicos en la Biología, así como otros tipos de interacción que están contenidos en el modelo (3.2).

Antes de comenzar a desarrollar las aplicaciones que admite el Teorema 3.6 sobre los diversos modelos de la Biología, y dado que intentaremos tratar dichos modelos con la mayor generalidad posible, se hace necesario presentar en este momento el modelo *"estándar"* de tipo Lotka-Volterra con difusión, donde se recogen los tres tipos de interacción *"clásicos"* que puede haber entre dos especies que coexisten en un dominio Ω. Dicho modelo, al que aludiremos como *"modelo lineal"*, es básicamente el siguiente:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\,(a - bu(x) + cv(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\,(e - fv(x) + gu(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.5}$$

con Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{R}$, con $b, f > 0$. El signo de las constantes c y g será el que determine el tipo de interacción a considerar entre las especies u y v. Así, si c y g son ambas negativas, diremos que el modelo es de tipo competición (ello ocurre en la **Biología**, por ejemplo, cuando las dos especies consumen un mismo alimento). Si tienen distinto signo (por ejemplo $c < 0 < g$), diremos que el modelo es de tipo presa-depredador, donde la especie u sería la de las presas, y v la de los depredadores. En la **Biología**, este modelo representa a dos especies, una de las cuales se alimenta de la otra. Por último, si ambas constantes, c y g, son positivas, el modelo recibe el nombre de cooperativo (en la **Biología**, se suele denotar como un modelo *"simbiótico"*).

A continuación, aplicaremos el Teorema 3.6 a modelos que generalizan las situaciones anteriores, así como a otros modelos en los cuales la interacción no responde a ninguno de esos tres casos.

– Modelos de tipo competición

El modelo de competición es una situación particular del problema (3.2), donde, además de verificarse las hipótesis (S1-S2) de la página 46, la función h es decreciente con respecto a v, y la función k es decreciente con respecto a u. El Teorema 3.6 es directamente aplicable a este tipo de sistemas, ya que lo único que hacemos es considerar nuevas hipótesis adicionales sobre el problema (3.2). Obtendremos por tanto una condición suficiente para que dicho problema admita al menos un estado de coexistencia. Este tipo de problemas ha sido estudiado por Li y Logan [64], para un tipo concreto de funciones h y k que, entre otras particularidades, no dependen de la variable espacial, x.

– Modelos de tipo presa-depredador

Un sistema del tipo presa-depredador es un problema del tipo

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\,f(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\,g(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y las funciones $f, g : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son localmente lipschitzianas, tales que f es estrictamente decreciente respecto de u, y decreciente con respecto de v, y g es estrictamente decreciente con respecto de v, y creciente con respecto de u. Además, supondremos que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$f(x, \alpha, 0) \leq 0 \;\; \text{y} \;\; g(x, \alpha, \beta) \leq 0.$$

(Obsérvese que en el modelo lineal, con $c < 0 < g$, podemos tomar α cualquier constante positiva mayor o igual que $\frac{a}{b}$, y β cualquier constante positiva mayor o igual que $\frac{e + g\alpha}{f}$).

En principio, el problema (3.6) no parece ajustarse a las hipótesis (S1-S2) impuestas al sistema (3.2). Por tanto, el Teorema 3.6 no será directamente aplicable al problema (3.6). No obstante, bastará hacer un útil *"truncamiento"* de las funciones f y g para que todo vaya bien. Esta idea de truncar las funciones adecuadamente para que a dichos modelos pueda aplicársele el Teorema 3.6 parece nueva en el contexto de los modelos biológicos.

Al igual que en el caso del sistema (3.2), dada una función real v, lipschitziana en $\overline{\Omega}$, llamaremos u_v a la solución maximal del problema en u

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x) f(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

y, para $u \in \mathcal{L}(\overline{\Omega})$, con $u(x) \leq \alpha$, $\forall x \in \Omega$, v_u será la solución maximal del problema en v

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= v(x) g(x, u(x), v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Observemos que, también en este caso,

$$\begin{cases} u_v \equiv 0, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -f(\cdot, 0, v(\cdot))) \geq 0, \\ 0 < u_v(x) \leq \alpha \;\text{ en } \Omega, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -f(\cdot, 0, v(\cdot))) < 0, \end{cases}$$

e igualmente

$$\begin{cases} v_u \equiv 0, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -g(\cdot, u(\cdot), 0)) \geq 0, \\ 0 < v_u(x) \;\text{ en } \Omega, & \text{si } \lambda_1(\Omega, -g(\cdot, u(\cdot), 0)) < 0. \end{cases}$$

TEOREMA 3.7. *Una condición* **necesaria y suficiente** *para que el sistema* (3.6) *admita al menos un estado de coexistencia es*

$$\lambda_1(\Omega, -f(\cdot, 0, v_0(\cdot))) < 0 \quad y \quad \lambda_1(\Omega, -g(\cdot, u_0(\cdot), 0)) < 0.$$

Demostración. Para probar que la condición del Teorema es necesaria, supongamos que el sistema (3.6) admite un estado de coexistencia, $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Observemos que, en este caso, el operador $\Phi_1 : \mathcal{L}(\overline{\Omega}) \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definido por $\Phi_1(v) = u_v$, es decreciente (véase el Teorema 3.3 teniendo en cuenta la monotonía de f), y por un argumento similar, obtenemos que el operador $\Phi_2 : \{u \in \mathcal{L}(\overline{\Omega}) : u(x) \leq \alpha,\ \forall x \in \Omega\} \to C_0^1(\overline{\Omega})$ definido por $\Phi_2(u) = v_u$, es creciente. Por tanto, teniendo en cuenta que $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u_{\tilde{v}}, v_{\tilde{u}})$, obtenemos que $\tilde{u} = u_{\tilde{v}} \leq u_0$, y por lo tanto

$$v_{u_0} \geq v_{\tilde{u}} = \tilde{v} > 0, \quad \text{es decir,} \quad v_{u_0} > 0,$$

que es equivalente a que $\lambda_1(\Omega, -g(\cdot, u_0(\cdot), 0)) < 0$. Del mismo modo, podemos observar que $\tilde{v} = v_{\tilde{u}} \geq v_0$, y por lo tanto

$$u_{v_0} \geq u_{\tilde{v}} = \tilde{u} > 0, \quad \text{es decir,} \quad u_{v_0} > 0,$$

que es equivalente a que $\lambda_1(\Omega, -f(\cdot, 0, v_0(\cdot))) < 0$. Queda así probado que la condición del Teorema es necesaria.

Probemos ya que dicha condición es también suficiente para que (3.6) admita al menos un estado de coexistencia. Consideremos las nuevas funciones $h, k : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas como

$$h \equiv f, \quad k(x, u, v) = \begin{cases} g(x, u, v) & \text{si } u \leq \alpha, \\ g(x, \alpha, v) & \text{si } u > \alpha. \end{cases}$$

Entonces, trivialmente las funciones h y k satisfacen las hipótesis (S1-S2) impuestas al sistema (3.2), y podemos aplicar ahora el Teorema 3.6 (observemos que no hay conflicto en la definición de v_u, siempre que tomemos $0 \leq u(x) \leq \alpha$ en Ω; más aún, ahora sí es posible definir v_u para cualquier $u \in \mathcal{L}(\overline{\Omega})$). Aplicando dicho Teorema, obtendremos que el problema (3.2) admite un estado de coexistencia, $(\tilde{u}, \tilde{v})$, satisfaciendo (ver la segunda demostración del Teorema 3.6) $0 < \tilde{u}(x) \leq \alpha$ en Ω. En particular, se deduce que $(\tilde{u}, \tilde{v})$ es también un estado de coexistencia para (3.6), quedando así probado el Teorema 3.7. ∎

NOTAS.

- Observemos que u_0 y v_0 son las soluciones maximales respectivas de los problemas

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u\, f(x,u,0), && \text{en } \Omega, \\ u &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} -\Delta v &= v\, g(x,0,v), && \text{en } \Omega, \\ v &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

  es decir, la solución maximal obtenida para la especie u en ausencia de depredadores, y la solución maximal obtenida para la especie v en ausencia de presas. Estas soluciones, el tipo de interacción dado por f y g, así como ciertas propiedades espectrales del dominio Ω, son las que determinan la existencia de estados de coexistencia para (3.6).

- Este tipo de modelos, en los que la interacción es del tipo presa-depredador, ha sido estudiado, entre otros, por Li [59], donde el autor considera un caso particular del sistema (3.6), en el que no se permite a las funciones f y g depender de la variable espacial, x, y con hipótesis adicionales sobre la regularidad de dichas funciones, así como del tipo de dependencia de g con respecto a u y a v.

- Observemos que en el Teorema 3.7, hemos caracterizado la existencia de estados de coexistencia mediante las condiciones que aparecían ya en el Teorema general 3.6. El hecho de que en este modelo particular dichas condiciones sean, no sólo suficientes, sino también necesarias, hace que éstas sean las *"mejores posibles"* (salvo equivalencia) en ciertos casos particulares.

- En la demostración del Teorema 3.7 hay un detalle importante que conviene tener en cuenta antes de continuar con las demostraciones de los próximos resultados. Observemos que la hipótesis de existencia de las constantes α y β podría no ser fácilmente comprobable en la práctica (aunque sí lo será en los modelos concretos que trataremos posteriormente), pero una vez encontradas dichas constantes (que suelen ser, además, cotas a priori para los estados de coexistencia), entonces, aunque el sistema de partida no satisfaga la hipótesis (S2) de la página 46, bastará *"truncar"* convenientemente las funciones de partida para obtener un nuevo sistema del tipo (3.2) que sí satisface la hipótesis (S2), precisamente para las constantes α y β de partida. Aplicando entonces el Teorema 3.6, obtenemos una condición suficiente para que (3.2) admita un estado de coexistencia, cuyas componentes, u y v, resultarán estar acotadas, respectivamente, por α y β. Esto hace que, al no afectar los truncamientos a las funciones de partida en el compacto

$\overline{\Omega} \times [0, \alpha] \times [0, \beta]$, dicho estado de coexistencia sirva también para el sistema original. En adelante, usaremos esta *"estrategia"* a menudo, para tratar sistemas que *"aparentemente"* no satisfacen la hipótesis (S2) impuesta al sistema general (3.2).

– MODELOS DE TIPO COOPERATIVO

Los modelos de tipo cooperativo son aquellos similares al problema (3.2), en los que, además de (S1), se impone que h sea creciente con respecto de v, y que k sea creciente con respecto de u. En general, no es posible encontrar cotas a priori para las soluciones (u, v) de dicho problema, lo cual hace más difícil aplicar una técnica de *"truncamiento"* de las funciones de partida, como se hacía en el caso presa-depredador. Por esta razón, nos reduciremos a un caso particular en el que sí será posible obtener cotas a priori sobre las soluciones, resultando para este caso, y de nuevo a través del Teorema 3.6, una condición suficiente para la existencia de estados de coexistencia.

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)\,(a(x) - b(x)u(x) + c(x)v(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)\,(e(x) - f(x)v(x) + g(x)u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.7}$$

con Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $a, b, c, e, f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, con $b(x), f(x) > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, y $c(x), g(x) \geq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Para cada función $r \in C(\overline{\Omega})$, denotaremos

$$\overline{r} = \max\{r(x) : x \in \overline{\Omega}\}\ , \quad \underline{r} = \min\{r(x) : x \in \overline{\Omega}\}\ .$$

TEOREMA 3.8. *Supongamos que* $\underline{b}\,\underline{f} - \overline{c}\,\overline{g} > 0$. *En tal caso, una condición suficiente para que el sistema* (3.7) *admita al menos un estado de coexistencia es*

$$\lambda_1(\Omega, -a(\cdot) - c(\cdot)v_0(\cdot)) < 0 \quad y \quad \lambda_1(\Omega, -e(\cdot) - g(\cdot)u_0(\cdot)) < 0.$$

Demostración. Comprobaremos en primer lugar que si (u, v) es un estado de coexistencia (en sentido clásico) para (3.7), entonces $u(x) \leq \alpha$ y $v(x) \leq \beta$ en $\overline{\Omega}$, donde

$$\alpha = \frac{\overline{a}\,\underline{f} + \overline{c}\,\overline{e}}{\underline{b}\,\underline{f} - \overline{c}\,\overline{g}}\ , \quad \beta = \frac{\overline{e}\,\underline{b} + \overline{g}\,\overline{a}}{\underline{b}\,\underline{f} - \overline{c}\,\overline{g}}$$

(a partir de las hipótesis de este Teorema, se prueba fácilmente que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$). Efectivamente, sabiendo que (u, v) es solución de (3.7), y siguiendo la notación antes indicada, se tiene

$$-\Delta u(x) = u(x)\,(a(x) - b(x)u(x) + c(x)v(x)) \leq u(x)\,(\overline{a} - \underline{b}\,u(x) + \overline{c}\,\overline{v}).$$

Así, llamando $\Omega_1 = \left\{x \in \Omega : u(x) > \dfrac{\overline{a} + \overline{c}\,\overline{v}}{\underline{b}}\right\}$, obtenemos que si Ω_1 fuese no vacío, entonces $\forall x \in \Omega_1$,

$$-\Delta u(x) \leq u(x)\left(\overline{a} - \underline{b}\frac{\overline{a} + \overline{c}\,\overline{v}}{\underline{b}} + \overline{c}\,\overline{v}\right) = 0.$$

Luego, aplicando el Principio del Máximo, $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}_1} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega_1} u(x)$, lo cual es una contradicción. Así pues, $\overline{u} \leq \dfrac{\overline{a} + \overline{c}\,\overline{v}}{\underline{b}}$. Razonando del mismo modo sobre la segunda ecuación de (3.7), se obtiene $\overline{v} \leq \dfrac{\overline{e} + \overline{g}\,\overline{u}}{\underline{f}}$. Combinando ambas desigualdades, obtenemos

$$\overline{u} \leq \frac{\overline{a} + \overline{c}\,\overline{v}}{\underline{b}} \leq \frac{\overline{a} + \overline{c}\frac{\overline{e} + \overline{g}\,\overline{u}}{\underline{f}}}{\underline{b}} = \frac{\overline{a}\,\underline{f} + \overline{c}\,\overline{e} + \overline{c}\,\overline{g}\,\overline{u}}{\underline{b}\,\underline{f}}$$

de donde

$$\underline{b}\,\underline{f}\,\overline{u} \leq \overline{a}\,\underline{f} + \overline{c}\,\overline{e} + \overline{c}\,\overline{g}\,\overline{u},$$

luego

$$\overline{u} \leq \frac{\overline{a}\,\underline{f} + \overline{c}\,\overline{e}}{\underline{b}\,\underline{f} - \overline{c}\,\overline{g}} = \alpha.$$

Razonando de idéntico modo obtenemos que $\overline{v} \leq \beta$.

Una vez comprobado que las constantes α y β son cotas a priori para los estados de coexistencia de (3.7), tomemos $h, k : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(x, u, v) \equiv \begin{cases} a(x) - b(x)u + c(x)v, & \text{si } v \leq \beta, \\ a(x) - b(x)u + c(x)\beta, & \text{si } v > \beta, \end{cases}$$

$$k(x, u, v) \equiv \begin{cases} e(x) - f(x)v + g(x)u, & \text{si } u \leq \alpha, \\ e(x) - f(x)v + g(x)\alpha, & \text{si } u > \alpha, \end{cases}$$

En este caso, se verifican las hipótesis (S1-S2) para el problema (3.2). Así, podemos aplicar el Teorema 3.6 y obtener que una condición suficiente para que (3.2) admita un estado de coexistencia es

$$\lambda_1(\Omega, -a(\cdot) - c(\cdot)v_0(\cdot)) < 0 \;\text{ y }\; \lambda_1(\Omega, -e(\cdot) - g(\cdot)u_0(\cdot)) < 0,$$

que coincide exactamente con la hipótesis de este Teorema. Además, sabemos que dicho estado de coexistencia (u, v) verifica (ver segunda demostración del Teorema 3.6) $0 < u(x) \leq \alpha$, $0 < v(x) \leq \beta$, en Ω, y por tanto el par (u, v) es un estado de coexistencia para (3.7). ∎

NOTAS.

- Este tipo de sistemas ha sido considerado también por López-Gómez [65], obteniendo las mismas conclusiones, pero usando teoría del grado topológico en conos (índice de punto fijo). Asímismo, en el trabajo de Li y Ghoreishi [62], podemos encontrar un modelo particular de tipo cooperativo, en el que la no-linealidad no admite dependencia espacial. En dicho trabajo, los autores dan, para ciertos casos muy particulares, condiciones necesarias y suficientes de coexistencia, así como algunas consideraciones sobre la unicidad de solución.

– Otros modelos de la Biología

Una de las mayores ventajas del Teorema 3.6 es que en su enunciado no aparecen hipótesis de monotonía de h respecto de v, ni de k respecto de u, lo cual lo hace aplicable, no sólo a los tres tipos de modelos que aparecen clásicamente en la Biología, como acabamos de ver, sino también a otros modelos que no se ajustan a ninguno de esos tres casos (ver [26], [18]), y sobre los cuales no conocemos que se hayan dado (con anterioridad a los que aquí vamos a exponer) condiciones para que admitan coexistencia. A continuación se presentan dos ejemplos de tales modelos, que indican las grandes posibilidades de aplicación de Teorema 3.6

1. Influencia de la dependencia espacial en el tipo de interacción.

Estudiaremos en primer lugar un sistema en el que la dependencia espacial hace que el tipo de interacción cambie en distintas zonas del dominio Ω. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)(a - bu(x) - cv(x)), && x \in B, \\ -\Delta v(x) &= v(x)(e - fv(x) + g(x)u(x)), && x \in B, \\ u(x) &= v(x) = 0, && x \in \partial B, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde B es la bola euclídea en $\mathbb{R}^N$, de radio 1 y centrada en el origen, $a, b, c, e, f \in \mathbb{R}$, con $b, c, f > 0$, y $g : \overline{B} \to \mathbb{R}$ viene dada por $g(x) = x_1$, $\forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in \overline{B}$ (observemos que la función g cambia de signo en B).

TEOREMA 3.9. *Supongamos que* $e \geq \lambda_1(B,0)$ *es dado. Si* $a > \lambda_1(B, cv_0)$, *entonces el problema* (3.8) *admite un estado de coexistencia.*

Demostración. Tomemos $\alpha = \dfrac{a}{b}$ y $\beta = \dfrac{be+a}{bf}$. De una forma análoga a como se hizo en la demostración del Teorema 3.8, podemos probar que cualquier estado de coexistencia (u,v) para el problema (3.8) verifica que $u(x) \leq \alpha$ y $v(x) \leq \beta$ en $\overline{\Omega}$. Sean $h, k : \overline{B} \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(x,u,v) = a - bu - cv$$

$$k(x,u,v) = \begin{cases} e - fv + g(x)u, & \text{si } u \leq \alpha, \\ e - fv + g(x)\alpha, & \text{si } u > \alpha. \end{cases}$$

Las funciones h y k satisfacen trivialmente las hipótesis (S1-S2) impuestas al sistema (3.2), y podemos por tanto aplicar el Teorema 3.6, obteniendo así que una condición suficiente para que (3.8) admita un estado de coexistencia es

$$\lambda_1(B, -a + cv_0(\cdot)) < 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1(B, -e - g(\cdot)u_0(\cdot)) < 0$$

o, equivalentemente (ver Lema 1.1)

$$a > \lambda_1(B, cv_0(\cdot)) \quad \text{y} \quad e > \lambda_1(B, -g(\cdot)u_0(\cdot)).$$

La primera desigualdad se verifica por hipótesis. Probemos que también se cumple la segunda desigualdad:

$$\lambda_1(B, -g(\cdot)u_0(\cdot)) = \min_{u \in H_0^1(B)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_B (|\nabla u|^2 - g u_0 u^2)}{\displaystyle\int_B u^2} <$$

$$< \frac{\displaystyle\int_B (|\nabla \phi_1(B,0)|^2 - g u_0 \phi_1(B,0)^2)}{\displaystyle\int_B \phi_1(B,0)^2} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_B |\nabla \phi_1(B,0)|^2}{\displaystyle\int_B \phi_1(B,0)^2} = \lambda_1(B,0) \leq e$$

ya que, al ser $\phi_1(B,0)$ y u_0 radialmente simétricas (ver [43]), se tiene que $\displaystyle\int_B g(x)u_0(x)\phi_1(B,0)^2(x)\,dx = 0$.

En definitiva, hemos obtenido la existencia de un estado de coexistencia (u,v) para el sistema (3.2), verificando $u(x) \leq \alpha$ y $v(x) \leq \beta$ en $\overline{\Omega}$. Así pues, (u,v) resulta ser un estado de coexistencia para (3.8). Esto concluye la demostración del Teorema 3.9. ∎

NOTAS.

- Obsérvese que el sistema (3.8) es de tipo competición en B^-, y de tipo presa-depredador en B^+, donde

$$B^- = \{x \in B : x_1 < 0\}, \quad B^+ = \{x \in B : x_1 > 0\}.$$

  Es decir, ha sido la dependencia con respecto de la variable espacial, la que ha marcado el cambio en el tipo de interacción.

2. Influencia del tamaño de la población en el tipo de interacción.

En segundo lugar, consideraremos un sistema en el que el tipo de interacción entre las dos especies cambia en función del número de individuos. Dicho sistema es el siguiente

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)(a - bu(x) + cv(x)), & x \in \Omega,\\ -\Delta v(x) &= v(x)(e - fv(x) + gu(x) - hu^2(x)), & x \in \Omega,\\ u(x) &= v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.9}$$

con Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $a,b,c,e,f,g,h \in \mathbb{R}$, con $b,c,f,g,h > 0$.

TEOREMA 3.10. *Si* $a = \lambda_1(\Omega,0)$ *y* $e > \lambda_1(\Omega,0)$, *entonces el sistema* (3.9) *admite al menos un estado de coexistencia.*

Demostración. Tomemos

$$\alpha = \frac{4ahf + 4hce + cg^2}{4hbf}, \quad \beta = \frac{4he + g^2}{4hf}.$$

De nuevo se prueba que cualquier estado de coexistencia (u,v) para el problema (3.9) verifica $u(x) \leq \alpha$ y $v(x) \leq \beta$ en $\overline{\Omega}$. Consideremos las funciones $h,k : \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(x,u,v) = \begin{cases} a - bu + cv, & \text{si } v \leq \beta,\\ a - bu + c\beta, & \text{si } v > \beta. \end{cases}$$

$$k(x,u,v) = e - fv + gu - hu^2$$

Las funciones h y k satisfacen las hipótesis (S1-S2) impuestas al sistema (3.2), luego una condición suficiente (Teorema 3.6) para que (3.2) admita un estado de coexistencia será

$$\lambda_1(\Omega, -a - cv_0(\cdot)) < 0 \ \text{ y } \ \lambda_1(\Omega, -e - gu_0(\cdot) + hu_0^2(\cdot)) < 0$$

o, equivalentemente, (ver Lema 1.1)

$$a > \lambda_1(\Omega, -cv_0(\cdot)) \ \text{ y } \ e > \lambda_1(\Omega, -gu_0(\cdot) + hu_0^2(\cdot)).$$

Veamos que las hipótesis del Teorema que estamos probando obligan a que estas condiciones se verifiquen. Efectivamente, en virtud del Teorema 3.1 sabemos que, al ser $e > \lambda_1(\Omega, 0)$, se tiene $v_0 > 0$ en Ω, luego $\lambda_1(\Omega, -cv_0(\cdot)) < \lambda_1(\Omega, 0) = a$. Del mismo modo, por ser $a = \lambda_1(\Omega, 0)$, sabemos que $u_0 \equiv 0$ en Ω, y por tanto $\lambda_1(\Omega, -gu_0(\cdot) + hu_0^2(\cdot)) = \lambda_1(\Omega, 0) < e$. Así, las condiciones suficientes se verifican, lo cual nos garantiza que (3.2) admite un estado de coexistencia, (u, v), verificando $u(x) \le \alpha$ y $v(x) \le \beta$ en $\overline{\Omega}$. Por lo tanto, (u, v) es un estado de coexistencia para (3.9). ∎

NOTAS.

- Obsérvese que el sistema (3.9) es de tipo cooperativo si $0 \le u(x) \le \dfrac{g}{h}$, y de tipo presa-depredador para $u(x) > \dfrac{g}{h}$. A continuación veremos que, de hecho, es posible escoger los coeficientes g y h apropiados para que cualquier estado de coexistencia (u, v) de (3.9) verifique que los conjuntos

  $$\Omega_1 = \left\{x \in \Omega : u(x) < \frac{g}{h}\right\} \ \text{ y } \ \Omega_2 = \left\{x \in \Omega : u(x) > \frac{g}{h}\right\}$$

  sean ambos no vacíos.

PROPOSICIÓN 3.11. *Si tomamos g y h tales que $\dfrac{g}{h} < \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u_{v_0}(x)$,*[4] *entonces, para cualquier estado de coexistencia (u, v) de (3.9), los conjuntos Ω_1 y Ω_2 antes definidos, son ambos no vacíos.*

[4] Nótese que v_0 no depende de g y h, y por tanto tampoco u_{v_0} dependerá de ellas, sino exclusivamente de a, b, c, e, f. Además, como $a = \lambda_1(\Omega, 0) > \lambda_1(\Omega, -cv_0(\cdot))$, sabemos que $u_{v_0} > 0$ en Ω.

Demostración. En efecto, el conjunto Ω_1 debe ser no vacío debido a la condición homogénea de Dirichlet en la frontera de Ω. Resta probar que Ω_2 es no vacío. Razonemos por reducción al absurdo, y supongamos que $u(x) \leq \frac{g}{h}$, $\forall x \in \Omega$. En tal caso, teniendo en cuenta que $gu(x) - hu^2(x) \geq 0$ en Ω, y usando el Teorema 3.3, obtenemos que $v_0 \leq v_u = v$ en Ω, y por tanto $u_{v_0} \leq u_v = u$ en Ω, lo cual es una contradicción con la hipótesis de esta proposición. ∎

III.3 Coexistencia y expansión de dominios

Debido a las aplicaciones de los anteriores resultados a problemas procedentes de la Biología, a menudo la cuestión interesante no será la de buscar las funciones h y k apropiadas para obtener coexistencia en un dominio dado Ω. Por ello, denotando por $\mathcal{BR}$ al conjunto de todos los dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, consideramos muy interesante el tratamiento de la siguiente cuestión:

> *Dadas las funciones $h, k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir, conocido el modo de interacción de las especies u y v), tratemos de buscar dominios $\Omega \in \mathcal{BR}$, para los cuales el sistema* (3.2) *admite un estado de coexistencia. Estos dominios serán llamados* "**Dominios de coexistencia**" *del sistema* (3.2).

En este sentido, el primer trabajo en el que hemos encontrado algunos resultados al respecto es el de Li [61], donde para un modelo de tipo Lotka-Volterra con difusión, con interacción del tipo presa-depredador, de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)(a - bu(x) - cv(x)), && x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)(e - fv(x) + gu(x)), && x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.10}$$

con $a, b, c, f, g > 0$, el autor prueba el siguiente resultado:

> *Supongamos que $e \leq 0$. Si $\Omega_1 \in \mathcal{BR}$ es un dominio de coexistencia para* (3.10), *entonces cualquier dominio $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$, conteniendo a Ω_1, es también un dominio de coexistencia para* (3.10).

Obsérvese que el sistema (3.10) verifica las hipótesis impuestas al sistema (3.6), donde $\alpha = \frac{a}{b}$, y β es cualquier constante real positiva mayor o igual que $\frac{be + ga}{bf}$.

El resultado de Li pasará a ser un caso particular del Teorema 3.12, que demostraremos más adelante. Observemos que en este caso, al ser la interacción del tipo presa-depredador, los dominios de coexistencia Ω vienen caracterizados por la condición (en este caso necesaria y suficiente) del Teorema 3.6. Así, el resultado de Li podría expresarse como:

Si la condición del Teorema 3.6 se verifica para un cierto dominio $\Omega_1 \in \mathcal{BR}$, entonces dicha condición se verifica también para cualquier dominio $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$, conteniendo a Ω_1.

Qué duda cabe que el estudio de la validez de esta afirmación puede resultar bastante interesante (aun en los casos en los que la condición del Teorema 3.6 sea sólo suficiente y no necesaria), para la búsqueda de dominios de coexistencia. Del estudio de este tipo de cuestiones trataremos en esta sección.

– CASO GENERAL

Consideraremos el sistema (3.2) con $h, k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, verificando las hipótesis (S1-S2), y estudiaremos la validez de la siguiente afirmación

(A) *Si la condición suficiente del Teorema 3.6 se verifica para un dominio $\Omega_1 \in \mathcal{BR}$, entonces dicha condición se verifica también en cualquier dominio $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$, conteniendo a Ω_1.*

Mostraremos en primer lugar dos casos en los que (A) es cierta, y más tarde, en el Teorema 3.14 veremos que (A) no es cierta en general, ni siquiera en el caso en que la interacción es del tipo presa-depredador. El problema de conocer la situación más general posible donde (A) sea cierta permanece abierto por el momento.

TEOREMA 3.12. *Sean $h, k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, verificando las hipótesis (S1-S2) de la página 46.*

i) Si $k(x, 0, 0) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, y $k(x, u, 0)$ es creciente con respecto de u, entonces la afirmación (A) es cierta.

ii) Si $h(x, 0, v)$ es creciente con respecto de v y $k(x, u, 0)$ es creciente con respecto de u, entonces la afirmación (A) es cierta.

Demostración.

i) Al ser $k(x,0,0) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, se tiene

$$\lambda_1(\Omega, -k(\cdot,0,0)) \geq \lambda_1(\Omega, 0) > 0, \ \forall \Omega \in \mathcal{BR}.$$

Luego $v_{\Omega,0} \equiv 0$, $\forall \Omega \in \mathcal{BR}$. Por lo tanto, si $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{BR}$, con $\Omega_1 \subset \Omega_2$, y la condición del Teorema 3.6 se cumple en Ω_1, usando el Lema 1.1 se tiene

$$\lambda_1(\Omega_2, -h(\cdot, 0, v_{\Omega_2,0}(\cdot)) = \lambda_1(\Omega_2, -h(\cdot,0,0)) \leq$$
$$\leq \lambda_1(\Omega_1, -h(\cdot,0,0)) < 0.$$

Respecto a la segunda desigualdad del Teorema 3.6, teniendo en cuenta el Teorema 3.3,

$$u_{\Omega_2,0}(x) \geq u_{\Omega_1,0}(x), \ \forall x \in \Omega_1,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_1(\Omega_2, -k(\cdot, u_{\Omega_2,0}(\cdot), 0)) \leq \lambda_1(\Omega_1, -k(\cdot, u_{\Omega_2,0}(\cdot), 0)) \leq$$
$$\leq \lambda_1(\Omega_1, -k(\cdot, u_{\Omega_1,0}(\cdot), 0)) < 0.$$

ii) De nuevo, tomemos $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{BR}$, con $\Omega_1 \subset \Omega_2$, tales que la condición del Teorema 3.6 se cumple en Ω_1. De nuevo, por el Teorema 3.3 sabemos que

$$u_{\Omega_2,0}(x) \geq u_{\Omega_1,0}(x), \ \forall x \in \Omega_1,$$
$$v_{\Omega_2,0}(x) \geq v_{\Omega_1,0}(x), \ \forall x \in \Omega_1,$$

y, usando otra vez el Lema 1.1 se tiene

$$\lambda_1(\Omega_2, -h(\cdot, 0, v_{\Omega_2,0}(\cdot))) \leq \lambda_1(\Omega_1, -h(\cdot, 0, v_{\Omega_2,0}(\cdot))) \leq$$
$$\leq \lambda_1(\Omega_1, -h(\cdot, 0, v_{\Omega_1,0}(\cdot))) < 0,$$

$$\lambda_1(\Omega_2, -k(\cdot, u_{\Omega_2,0}(\cdot), 0)) \leq \lambda_1(\Omega_1, -k(\cdot, u_{\Omega_2,0}(\cdot), 0)) \leq$$
$$\leq \lambda_1(\Omega_1, -k(\cdot, u_{\Omega_1,0}(\cdot), 0)) < 0.$$

Queda así probado el Teorema 3.12. ∎

NOTAS.

- Obsérvese que en el apartado *i)* del Teorema 3.12 queda contenido el resultado de Li, mencionado anteriormente. Una posible **interpretación biológica** de dicho apartado *i)* podría ser la siguiente:

  > *"Si la especie v no puede subsistir en ausencia de la especie u en ningún dominio, y resulta además beneficiada por la presencia de dicha especie u, entonces la afirmación* (A) *es cierta."*

- En el apartado *ii)* del Teorema 3.12 queda también contenido cualquier sistema en el que la interacción sea de tipo cooperativo, por lo que, en particular, y con la intención de dar una **interpretación biológica** para dicho apartado, podemos afirmar que

  > *"En un sistema de tipo cooperativo o simbiótico, la afirmación* (A) *resulta ser cierta."*

- Observemos que, a la vista del Teorema anterior, hemos encontrado dos situaciones en las que la afirmación (A) es cierta. Claramente, dichas situaciones no se asemejan en absoluto (observemos que, incluso, la primera de ellas solamente hace mención a una de las dos no-linealidades del sistema, mientras que la segunda situación alude a ambas no-linealidades). Parece por tanto bastante complicada (aunque no por ello menos interesante) la búsqueda de condiciones o situaciones más generales que garanticen que (A) es cierta, así como condiciones no sólo suficientes, sino también necesarias. Con la intención de tratar más profundamente estos problemas, hemos optado por considerar el modelo lineal, claramente menos general que (3.2), pero en el que resulta posible afinar más en los resultados. Dado que en el caso cooperativo hemos concluido que la afirmación (A) es siempre cierta, hemos tenido que elegir entre el modelo lineal de competición o el modelo lineal de tipo presa-depredador. Nos hemos quedado con este último, ya que en este caso las condiciones del Teorema 3.6 no sólo son suficientes, sino también necesarias para obtener coexistencia, lo cual hace aún más atractivo el estudio de la afirmación (A).

– Sistemas de Lotka-Volterra con difusión, con interacción del tipo presa-depredador

En lo que resta de capítulo, dedicaremos nuestra atención al estudio de la validez de la afirmación (A), así como a otras cuestiones relativas a la búsqueda de dominios de coexistencia, para un sistema del tipo presa-depredador de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)(a - bu(x) - cv(x)), && x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)(e - fv(x) + gu(x)), && x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

con Ω dominio de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, y con $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{R}$, siendo $b, c, f, g > 0$. El motivo para considerar este sistema puede ser doble: por una parte, en este caso la condición suficiente dada en el Teorema 3.6 para tener coexistencia es también necesaria; por otra, la simplicidad respecto de los modelos generales presa-depredador como (3.6) permitirá obtener resultados a veces muy precisos. Sin embargo, como vamos a tener oportunidad de ver, parece muy difícil extender algunos resultados que se obtendrán para este sistema particular, al caso general (3.6).

En el sistema anterior, haciendo un conveniente cambio de escala del tipo $\tilde{u} = \lambda u$, $\tilde{v} = \mu v$, podemos conseguir normalizar los coeficientes b y f, de modo que, sin pérdida de generalidad, supondremos $b = f = 1$. Así, el sistema a considerar será

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= u(x)(a - u(x) - cv(x)), && x \in \Omega, \\ -\Delta v(x) &= v(x)(e - v(x) + gu(x)), && x \in \Omega, \\ u(x) &= v(x) = 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.11}$$

con $a, c, e, g, \in \mathbb{R}$, $c, g > 0$. Siguiendo la notación introducida en el Lema 1.8, podemos escribir $u_0 = \theta_{\Omega,a}$, $v_0 = \theta_{\Omega,e}$, de modo que la condición necesaria y suficiente (ver Teorema 3.7) para que el sistema (3.11) admita un estado de coexistencia en Ω resulta ahora:

$$\textbf{(C1):}\ a > \lambda_1(\Omega, c\theta_{\Omega,e}), \quad \text{y} \quad \textbf{(C2):}\ e > \lambda_1(\Omega, -g\theta_{\Omega,a}).$$

En el desarrollo de los próximos resultados será necesario utilizar las propiedades de $\lambda_1(\Omega, q)$ que se demostraron en el Lema 1.1, así como las propiedades de la función $\theta_{\Omega,\lambda}$, que desarrollamos a continuación.

Lema 3.13. (Principales propiedades de $\theta_{\Omega,\lambda}$).

i) Dado $\Omega \in \mathcal{BR}$, $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales convergente a un cierto número real, λ. Entonces, $\{\theta_{\Omega,\lambda_n}\} \to \theta_{\Omega,\lambda}$ en $C^1(\overline{\Omega})$.

ii) Dado $\Omega \in \mathcal{BR}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, con $\lambda \leq \mu$, entonces $\theta_{\Omega,\lambda} \leq \theta_{\Omega,\mu}$, en Ω.

iii) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{BR}$, dos dominios tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, entonces $\theta_{\Omega_1,\lambda} \leq \theta_{\Omega_2,\lambda}|_{\Omega_1}$.

iv) Dado $\Omega \in \mathcal{BR}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(\Omega, \theta_{\Omega,\lambda}) = \begin{cases} \lambda_1(\Omega, 0) & \text{si } \lambda \leq \lambda_1(\Omega, 0) \\ \lambda & \text{si } \lambda > \lambda_1(\Omega, 0). \end{cases}$$

v) Dado $\Omega \in \mathcal{BR}$, la aplicación $\lambda \mapsto \dfrac{\theta_{\Omega,\lambda}}{\lambda}$ es creciente en $(0, +\infty)$, y mayorada por 1.

vi) Dado $\Omega \in \mathcal{BR}$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\theta_{\Omega,\lambda}}{\lambda} = 1$, uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$.

vii) Si $\lambda > \lambda_1(\Omega, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda_1(\Omega, \mu\theta_{\Omega,\lambda}) \leq \lambda + (\mu - 1)\lambda \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\theta_{\Omega,\lambda}}{\lambda}\right)^3}{\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\theta_{\Omega,\lambda}}{\lambda}\right)^2}.$$

Demostración. El apartado *i)* es consecuencia inmediata del Teorema 3.2, mientras que los apartados *ii)* y *iii)* se deducen directamente del Teorema 3.3.

iv) Según el Lema 1.8, sabemos que si $\lambda \leq \lambda_1(\Omega, 0)$, se tiene $\theta_\lambda \equiv 0$. Por tanto, en ese caso obtenemos $\lambda_1(\Omega, \theta_\lambda) = \lambda_1(\Omega, 0)$. En el caso $\lambda > \lambda_1(\Omega, 0)$, sabemos por el mismo Lema que $\theta_\lambda > 0$ en Ω. Además, sabemos que de todos los valores propios del problema de valores propios

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \theta_\lambda(x)u(x) &= \mu\, u(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

es $\lambda_1(\Omega, \theta_\lambda)$ el único cuya función propia asociada es estrictamente positiva en Ω. Basta entonces observar que λ es un valor propio de dicho problema, con función propia asociada θ_λ, ya que

$$\begin{aligned} -\Delta\theta_\lambda(x) + \theta_\lambda^2(x) &= \lambda\,\theta_\lambda(x), & x \in \Omega, \\ \theta_\lambda(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

v) El hecho de que $\frac{\theta_\lambda}{\lambda} \le 1$ se debe (ver Lema 1.8) a que $\theta_\lambda(x) \le \lambda$ en Ω. Probemos que si $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, $\lambda \le \mu$, entonces $\frac{\theta_\lambda}{\lambda} \le \frac{\theta_\mu}{\mu}$. Para ello, bastará probar que $\mu\frac{\theta_\lambda}{\lambda}$ es sub-solución de la ecuación *"μ-logística"*. En efecto, llamando

$$\underline{u} = \mu\frac{\theta_\lambda}{\lambda} \le \mu = \overline{u},$$

tenemos que

$$-\Delta\underline{u} = -\frac{\mu}{\lambda}\Delta\theta_\lambda = \frac{\mu}{\lambda}\theta_\lambda(\lambda - \theta_\lambda) = \underline{u}\left(\lambda - \frac{\lambda}{\mu}\underline{u}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\underline{u}(\mu - \underline{u}) \le \underline{u}(\mu - \underline{u}), \qquad \text{en } \Omega$$

$$\underline{u}(= 0) \le 0, \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

Así, por el Teorema 1.3, y por la unicidad de θ_μ, obtenemos

$$\mu\frac{\theta_\lambda}{\lambda} = \underline{u} \le \theta_\mu \le \overline{u} = \mu, \quad \text{en } \Omega.$$

vi) Sea $K \subset \Omega$ un compacto, y sea $\varepsilon \in (0,1)$ arbitrario. Consideraremos un abierto regular W, tal que $K \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$, y una función regular, $\varphi_{K,\varepsilon} \in C^2(\overline{\Omega})$, verificando

$$\varphi_{K,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & \text{si } x \in K, \\ \frac{1}{2}\phi_1(\Omega)(x), & \text{si } x \in \overline{\Omega} \setminus W, \\ 0 < \delta \le \varphi_{K,\varepsilon}(x) \le 1 - \varepsilon, & \text{si } x \in W \setminus K, \end{cases}$$

donde δ es una constante positiva, suficientemente pequeña. Probemos que para λ suficientemente grande, la función $\lambda\varphi_{K,\varepsilon}$ es una sub-solución de la ecuación *"λ-logística"*. Para ello, habremos de conseguir que

$$-\Delta(\lambda\varphi_{K,\varepsilon}) \le \lambda\varphi_{K,\varepsilon}(\lambda - \lambda\varphi_{K,\varepsilon}) \quad \text{en } \Omega.$$

o, equivalentemente,

$$-\Delta\varphi_{K,\varepsilon} \le \lambda\varphi_{K,\varepsilon}(1 - \varphi_{K,\varepsilon}) \quad \text{en } \Omega.$$

Esta desigualdad es trivialmente cierta en K, y lo será en $W \setminus K$, si tomamos $\lambda \geq \lambda_0$, con λ_0 suficientemente grande. Falta por probar que se verifica también en $\Omega \setminus W$. Sabiendo que, en $\Omega \setminus W$ se tiene

$$-\Delta\varphi_{K,\varepsilon} = -\frac{1}{2}\Delta\phi_1(\Omega) = \frac{1}{2}\lambda_1(\Omega)\phi_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega)\varphi_{K,\varepsilon},$$

simplemente habrá que probar

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda(1-\varphi_{K,\varepsilon}),$$

lo cual se consigue, por ejemplo, tomando $\lambda \geq 2\lambda_1(\Omega)$. En definitiva, si tomamos

$$\lambda \geq \max\{\lambda_0, 2\lambda_1(\Omega)\},$$

sabemos que $\lambda\varphi_{K,\varepsilon}$ es sub-solución de la ecuación *"λ-logística"*, y como $\lambda\varphi_{K,\varepsilon} \leq \lambda$ (con λ súper-solución), por el Teorema 1.3, y por la unicidad de θ_λ obtenemos que $\lambda\varphi_{K,\varepsilon} \leq \theta_\lambda \leq \lambda$. Por tanto, tomando λ suficientemente grande, hemos probado que $1-\varepsilon \leq \dfrac{\theta_\lambda(x)}{\lambda}$, $\forall x \in K$.

vii) Por ser $\lambda > \lambda_1(\Omega)$, sabemos que $\theta_\lambda > 0$ en Ω. Por tanto,

$$\lambda_1(\Omega, \mu\theta_\lambda) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu\int_\Omega \theta_\lambda u^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} \leq$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\theta_\lambda|^2 + \mu\int_\Omega \theta_\lambda^3}{\displaystyle\int_\Omega \theta_\lambda^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\theta_\lambda|^2 + \int_\Omega \theta_\lambda^3}{\displaystyle\int_\Omega \theta_\lambda^2} + (\mu-1)\frac{\displaystyle\int_\Omega \theta_\lambda^3}{\displaystyle\int_\Omega \theta_\lambda^2} =$$

$$= \lambda + (\mu-1)\lambda\frac{\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\theta_\lambda}{\lambda}\right)^3}{\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\theta_\lambda}{\lambda}\right)^2}.$$

Queda así probado el Lema 3.13. ∎

NOTAS.

- La demostración del apartado *vi)*, y la subsolución particular que hemos tomado, está inspirada en el trabajo de Li [61].

A continuación, tal y como se anunció, mostraremos una situación de un sistema del tipo (3.11), en la que la afirmación (A) no es cierta.

TEOREMA 3.14. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{BR}$, tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$. Entonces existen coeficientes $a, c, e, g \in \mathbb{R}$ tales que Ω_1 es un dominio de coexistencia para* (3.11), *y Ω_2 no lo es.*

Demostración. Fijemos $c > 1$, $g > 0$, $e = \lambda_1(\Omega_1, 0)$. Sólo queda por decidir el valor del coeficiente a. Iremos enunciando cada uno de los apartados que nos dispongamos a probar.

i) *Ω_1 es un dominio de coexistencia para* (3.11) $\Longleftrightarrow a > \lambda_1(\Omega_1, 0)$.

Efectivamente, sabemos (ver Lema 1.8) que, por ser $e = \lambda_1(\Omega_1, 0)$, se tiene que $\theta_{\Omega_1,e} \equiv 0$. Por tanto, si Ω_1 es un dominio de coexistencia, entonces en el dominio Ω_1 se verifica la condición (C1) que ahora se escribe $a > \lambda_1(\Omega_1, 0)$.

Recíprocamente, si $a > \lambda_1(\Omega_1, 0)$, sólo falta comprobar la condición (C2) para que (3.11) admita un estado de coexistencia. Sabiendo (Lema 1.8) que $\theta_{\Omega_1,a} > 0$ en Ω_1,

$$\lambda_1(\Omega, -g\theta_{\Omega_1,a}) < \lambda_1(\Omega, 0) = e.$$

Queda así probada la afirmación *i)*.

ii) *Ω_2 es un dominio de coexistencia para* (3.11) $\Longleftrightarrow a > \lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_2,e})$.

Si Ω_2 es un dominio de coexistencia, entonces por (C1) sabemos que $a > \lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_1,e})$.

Recíprocamente, si $a > \lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_1,e})$, falta solamente comprobar que se verifica (C2) en el dominio Ω_2. Así,

$$\lambda_1(\Omega_2, -g\theta_{\Omega_2,a}) \leq \lambda_1(\Omega_2, 0) < \lambda_1(\Omega_1, 0) = e.$$

Luego la afirmación *ii)* es cierta.

iii) De los apartados anteriores, tenemos que

Ω_1 es un dominio de coexistencia si, y sólo si $a > a_1 = \lambda_1(\Omega_1, 0)$.

Ω_2 es un dominio de coexistencia si, y sólo si $a > a_2 = \lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_2,e})$.

¿Qué relación guardan entre sí los números a_1 y a_2?.

Por ser $e = \lambda_1(\Omega_1, 0) > \lambda_1(\Omega_2, 0)$, sabemos que $\theta_{\Omega_2,e} > 0$ en Ω_2. Por tanto, al ser $c > 1$, y usando los Lemas 1.1 y 3.13,

$$a_2 = \lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_2,e}) > \lambda_1(\Omega_2, \theta_{\Omega_2,e}) = e = a_1.$$

Tomando $a \in (a_1, a_2]$, el Teorema 3.14 está probado. ∎

NOTAS.

- Observemos que, en el Teorema anterior, para obtener coexistencia en el dominio Ω_1, es necesario que la razón de crecimiento (*"birth-rate"*) de las presas, a, sea mayor que una cierta constante a_1, y para obtener coexistencia en Ω_2, a debe ser mayor que otra constante, $a_2 > a_1$. Por ello, podemos obtener la siguiente **interpretación biológica** del resultado:

  "Para obtener coexistencia, la razón de crecimiento de las presas debe crecer si el dominio crece. Por tanto, si dicha razón de crecimiento no crece "lo suficiente", *es decir, si $a \in (a_1, a_2]$, obtenemos coexistencia en Ω_1 y no en Ω_2. Además, es interesante observar que la especie de los depredadores, v, no puede subsistir sin presas en el dominio Ω_1, mientras que sí puede hacerlo en Ω_2 (existe una solución* "semitrivial" *de la forma $(0, \theta_{\Omega_2,e})$, con $\theta_{\Omega_2,e}$ estrictamente positiva en Ω_2)."*

- Obviamente, en el Teorema anterior ha sido necesario tomar la constante e positiva, ya que si hubiera sido $e \leq 0$, la afirmación (A) sería cierta, gracias al resultado de Li, mencionado al comienzo de esta sección. Pero el caso en que $e \leq 0$ no es el único en que se verifica la afirmación (A). El siguiente Teorema ofrece una condición suficiente para que la afirmación (A) sea cierta, que también generaliza el resultado de Li.

TEOREMA 3.15. *Consideremos el sistema* (3.11).

$$Si\ a > e \max\{c, 1\} \Longrightarrow (A)\ es\ cierta.$$

Demostración. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{BR}$, tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Supongamos que las condiciones (C1-C2) se verifican en Ω_1. En tal caso, por el Lema 3.13, sabemos que $\theta_{\Omega_1,a}(x) \leq \theta_{\Omega_2,a}(x)$, $\forall x \in \Omega_1$. Usando las propiedades de monotonía de $\lambda_1(\Omega,\cdot)$ (Lema 1.1), obtenemos

$$\lambda_1(\Omega_2, -g\theta_{\Omega_2,a}) \leq \lambda_1(\Omega_1, -g\theta_{\Omega_2,a}) \leq \lambda_1(\Omega_1, -g\theta_{\Omega_1,a}) < e,$$

que es la condición (C2) para el dominio Ω_2. Respecto a la condición (C1), en Ω_2, distinguiremos dos casos:

a) Si $e \leq \lambda_1(\Omega_2, 0)$.
 En tal caso, $\theta_{\Omega_1,e} = \theta_{\Omega_2,e} \equiv 0$, y por tanto,

$$\lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_2,e}) = \lambda_1(\Omega_2, 0) \leq \lambda_1(\Omega_1, 0) < a,$$

 que es la condición (C1) en Ω_2.

b) Si $e > \lambda_1(\Omega_2, 0)$.
 En este caso, usando el Lema 3.13,

$$\lambda_1(\Omega_2, c\theta_{\Omega_2,e}) \leq e + (c-1)e\frac{\displaystyle\int_{\Omega_2}\left(\frac{\theta_{\Omega_2,e}}{e}\right)^3}{\displaystyle\int_{\Omega_2}\left(\frac{\theta_{\Omega_2,e}}{e}\right)^2} \leq e\max\{c,1\} < a,$$

 que es la condición (C1) en Ω_2.

En cualquier caso, queda demostrado que las condiciones (C1-C2) también se verifican en el dominio Ω_2. ∎

NOTAS.

- Una posible **interpretación biológica** del Teorema 3.15 (no olvidemos que el modelo está normalizado), podría ser la siguiente: *"Si la razón de crecimiento (birth-rate) de las presas, a, es suficientemente grande, o bien la razón de crecimiento de los depredadores, e, es suficientemente pequeña, entonces la afirmación* (A) *es verdadera".*

- En la introducción al anterior Teorema 3.15 hemos comentado que dicho resultado generaliza el resultado de Li antes mencionado. Es posible que esto no quede suficientemente claro a la vista del Teorema, así que vamos a intentar justificar esa afirmación.

Otra forma de leer la hipótesis del Teorema 3.15 sería

$$e < \frac{a}{\max\{c, 1\}}.$$

Observemos que si el coeficiente a fuese menor o igual que cero, entonces el sistema (3.11) no admitiría ningún dominio de coexistencia, ya que la condición (C1) (necesaria para coexistencia en un dominio Ω) obliga a que $a > 0$. Por tanto, en el caso $a \leq 0$, además de carecer de interés el estudio del sistema (3.11), resulta ser trivialmente cierta la afirmación (A). Por otra parte, en el caso realmente interesante, es decir, cuando $a > 0$, al verla escrita así, nuestra hipótesis generaliza claramente la condición de Li.

- La importancia del resultado anterior reside en su aplicación para detectar dominios de coexistencia en la práctica. Más concretamente, si se dan las hipótesis del Teorema 3.15, y somos capaces de determinar dominios de coexistencia *"simples"*, tal y como pueden ser bolas o rectángulos, entonces cualquier dominio $\Omega \in \mathcal{BR}$ conteniendo a tales dominios *"simples"*, será un dominio de coexistencia para (3.11). A la búsqueda de tales dominios nos dedicaremos en la próxima sección.

- Es un problema abierto en la actualidad conocer la situación más general donde (para el sistema (3.11)) la afirmación (A) sea cierta.

– Coexistencia en bolas

En la sección anterior ha quedado claro que la posible relación existente entre la coexistencia para el sistema (3.11) y la inclusión de dominios puede ser un tanto complicada (al menos en el caso $e > 0$). Con la intención de clarificar, en la medida de lo posible, esa relación, nos disponemos a considerar dominios *"simples"* en los que estudiar coexistencia. En particular, centraremos nuestra atención en buscar bolas euclídeas que sirvan como dominios de coexistencia para el sistema (3.11). Para ello, dado $R \in (0, +\infty)$, denotaremos

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}.$$

Por comodidad, entenderemos $B = B_1$.

Teniendo en cuenta que las condiciones (C1-C2) son necesarias y suficientes para que el sistema (3.11) admita un estado de coexistencia, habremos de considerar esas condiciones en el dominio particular $\Omega = B_R$. Dichas condiciones se escribirán, por tanto,

$$a > \lambda_1(B_R, c\theta_{B_R,e}) \quad \text{y} \quad e > \lambda_1(B_R, -g\theta_{B_R,a})$$

(en particular, $a > 0$, por lo que así lo asumiremos en adelante).

Si llamamos $F, G : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ a las funciones definidas como

$$F(R) = \lambda_1(B_R, c\theta_{B_R,e}), \; G(R) = \lambda_1(B_R, -g\theta_{B_R,a}),$$

la cuestión a estudiar ahora será: *"¿para qué valores de R se cumple que $F(R) < a$ y que $G(R) < e$?"* (observemos que, en realidad, F es una función de R, c y e, y que G es una función de R, g y a).

PROPOSICIÓN 3.16.

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2}, \; G(R) = \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R^2a})}{R^2}, \; \forall R > 0.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces, $\forall x \in B$,

$$\theta_{B_R,\lambda}(Rx) = \frac{\theta_{B,R^2\lambda}(x)}{R^2}.$$

Además, dada $u : B_R \longrightarrow \mathbb{R}$, llamaremos $\tilde{u} : B \longrightarrow \mathbb{R}$, a la función definida como $\tilde{u}(x) = u(Rx)$, $\forall x \in B$. Entonces

$$u \in H_0^1(B_R) \iff \tilde{u} \in H_0^1(B),$$

lo cual establece una biyección obvia entre $H_0^1(B_R)$ y $H_0^1(B)$. Más aún, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se tiene que para $u \in H_0^1(B_R) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 + \mu \int_{B_R} \theta_{B_R,\lambda} u^2}{\displaystyle\int_{B_R} u^2} = \frac{\displaystyle\int_B |\nabla \tilde{u}|^2 + \mu \int_B \theta_{B,R^2\lambda} \tilde{u}^2}{\displaystyle R^2 \int_B \tilde{u}^2},$$

y por tanto, minimizando estas expresiones, obtenemos que

$$\lambda_1(B_R, \mu\theta_{B_R,\lambda}) = \frac{1}{R^2} \lambda_1(B, \mu\theta_{B,R^2\lambda}).$$

Aplicando lo obtenido a las expresiones que definen a las funciones F y G, concluye la demostración. ∎

NOTAS.

- Un resultado similar al de la Proposición 3.16 podría obtenerse si, en lugar de considerar los dominios B, B_R, considerásemos los dominios $\Omega, R\Omega$, para un $\Omega \in \mathcal{BR}$ dado (entendiendo por $R\Omega = \{Rx : x \in \Omega\}$). La elección de bolas euclídeas no es más que por simplicidad.

- La Proposición 3.16 nos ofrece la ventaja de expresar los valores de las funciones F y G en términos de un dominio fijo $\Omega \equiv B$. De hecho, esta ventaja nos facilitará el estudio de las propiedades de dichas funciones, tal y como veremos a continuación.

TEOREMA 3.17. *La función $G : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua, estrictamente decreciente, y tal que*

$$G(R) = \frac{\lambda_1(B,0)}{R^2} \quad para \quad R \leq \sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{a}}, \quad y \quad \lim_{R\to+\infty} G(R) = -ga.$$

Demostración. La continuidad de la función G, vista como en la Proposición 3.16, es consecuencia de los Lemas 1.1 y 3.13. Claramente, por las propiedades de monotonía de $\theta_{\Omega,\lambda}$ y de $\lambda_1(\Omega, q)$, que también se expusieron en dichos Lemas, obtenemos que si $R_1, R_2 \in (0, +\infty)$, con $R_1 < R_2$, entonces $\theta_{B,R_1^2 a} \leq \theta_{B,R_2^2 a}$ en B, y por tanto,

$$G(R_1) = \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R_1^2 a})}{R_1^2} \geq \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R_2^2 a})}{R_1^2} >$$

$$> \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R_2^2 a})}{R_2^2} = G(R_2).$$

Más aún, si $0 < R \leq \sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{a}}$, entonces $R^2 a \leq \lambda_1(B, 0)$, y por lo tanto $\theta_{B,R^2a} \equiv 0$, con lo que

$$G(R) = \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R^2a})}{R^2} = \frac{\lambda_1(B,0)}{R^2}.$$

Por otro lado, tomando $R > \sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{a}}$, entonces $R^2 a > \lambda_1(B, 0)$. Así, podemos aplicar el apartado *vii)* del Lema 3.13, y obtener

$$G(R) = \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R^2a})}{R^2} \leq a + (-g-1)a \frac{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2a}}{R^2 a}\right)^3}{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2a}}{R^2 a}\right)^2}.$$

También,

$$G(R) = \frac{\lambda_1(B, -g\theta_{B,R^2a})}{R^2} \geq \frac{\lambda_1(B, -gR^2 a)}{R^2} = -ga + \frac{\lambda_1(B,0)}{R^2}.$$

Usando el apartado *vi)* del Lema 3.13, obtenemos que

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_B\left(\frac{\theta_{B,R^2a}}{R^2a}\right)^3}{\displaystyle\int_B\left(\frac{\theta_{B,R^2a}}{R^2a}\right)^2}=1,$$

y por tanto, tomando límites en las dos estimaciones anteriores, se deduce que $\lim\limits_{R\to+\infty} G(R)=-ga$. ∎

El estudio de la función F resulta más complicado que el de G, debido fundamentalmente a la presencia del término $c\theta_{B_R,e}$, en lugar del término $-g\theta_{B_R,a}$ (obsérvese el cambio de signo).

TEOREMA 3.18. *La función* $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *es continua, y tal que*

i) Si $e\leq 0$, *entonces* $F(R)=\dfrac{\lambda_1(B,0)}{R^2}$, $\forall R>0$.

ii) Si $e>0$, *entonces* $F(R)=\dfrac{\lambda_1(B,0)}{R^2}$, $\forall R\leq\sqrt{\dfrac{\lambda_1(B,0)}{e}}$. *Más aún, en este caso,*

ii-a) Si $c<1$, *entonces*

$$ce<F(R)<e,\ \forall R>\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}},\quad y\quad \lim_{R\to+\infty}F(R)=ce.$$

ii-b) Si $c=1$, *entonces*

$$F(R)=e,\ \forall R>\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}.$$

ii-c) Si $c>1$, *entonces*

$$e<F(R)<ce,\ \forall R>\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}.$$

Demostración. La continuidad de la función F, vista como en la Proposición 3.16, es consecuencia de los Lemas 1.1 y 3.13.

i) Si $e\leq 0$, entonces sabemos que $\theta_{B,R^2e}\equiv 0$, $\forall R>0$. Por tanto,

$$F(R)=\frac{\lambda_1(B,c\theta_{B,R^2e})}{R^2}=\frac{\lambda_1(B,0)}{R^2},\ \forall R>0.$$

ii) Si $e > 0$, y $R \leq \sqrt{\dfrac{\lambda_1(B,0)}{e}}$, entonces, al ser $R^2 e \leq \lambda_1(B,0)$, de nuevo $\theta_{B,R^2e} \equiv 0$, y por tanto, al igual que antes,

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B,0)}{R^2}, \ \forall R \leq \sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}.$$

ii-a) $c < 1$. Si $R > \sqrt{\dfrac{\lambda_1(B,0)}{e}}$, entonces $R^2 e > \lambda_1(B,0)$. Así, por la monotonía de $\lambda_1(\Omega, q)$, y por el apartado *iv)* del Lema 3.13,

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2} < \frac{\lambda_1(B, \theta_{B,R^2e})}{R^2} = e.$$

Del mismo modo, por ser $c < 1$, aplicando el Lema 1.1,

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2} = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e} + (1-c)0)}{R^2} \geq$$

$$\geq \frac{c\lambda_1(B, \theta_{B,R^2e}) + (1-c)\lambda_1(B,0)}{R^2} =$$

$$= ce + \frac{(1-c)\lambda_1(B,0)}{R^2} > ce.$$

Teniendo en cuenta también que

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2} \leq e + (c-1)e \frac{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^3}{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^2}.$$

y que, por el apartado *vi)* del Lema 3.13,

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^3}{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^2} = 1,$$

resulta entonces $\lim\limits_{R\to+\infty} F(R) = ce$.

ii-b) Es trivial, a partir del apartado *iv)* del Lema 3.13.

ii-c) $c > 1$. Tomando $R > \sqrt{\dfrac{\lambda_1(B,0)}{e}}$, sabemos que $R^2 e > \lambda_1(B,0)$. Así, por la monotonía de $\lambda_1(\Omega, q)$, y por el apartado *iv)* del Lema 3.13,

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2} > \frac{\lambda_1(B, \theta_{B,R^2e})}{R^2} = e.$$

Por otro lado,

$$F(R) = \frac{\lambda_1(B, c\theta_{B,R^2e})}{R^2} \leq e + (c-1)e \frac{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^3}{\displaystyle\int_B \left(\frac{\theta_{B,R^2e}}{R^2e}\right)^2} \leq$$

$$\leq e + (c-1)e = ce.$$

Queda así probado el Teorema 3.18. ∎

NOTAS.

- Observemos que, al contrario de lo que ocurría con la función G, en este caso no se ha mencionado nada acerca de la monotonía de F en el intervalo $\left(\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}, +\infty\right)$, y también queda abierto el problema de estudiar si existe el $\lim\limits_{R\to\infty} F(R)$, en el caso $c > 1$.

La importancia de los Teoremas 3.17 y 3.18 reside en su aplicación para la búsqueda de bolas euclídeas que sirvan como dominios de coexistencia para (3.11). De hecho, estos resultados nos permitirán estudiar la validez de la siguiente afirmación:

(B) *Existe un $R_0 > 0$ tal que el sistema (3.11) admite un estado de coexistencia en B_R, $\forall R \geq R_0$.*

Consideramos ciertamente importante el estudio de esta afirmación, ya que, en aquellos casos en que sea cierta también la afirmación (A), podremos concluir que un dominio $\Omega \in \mathcal{BR}$ es dominio de coexistencia si contiene bolas euclídeas suficientemente grandes.

TEOREMA 3.19.

i) Si $e \leq 0$, entonces

$$(\text{B}) \textit{ es cierta} \iff e > -ga.$$

ii) Si $e > 0$ *y* $c \leq 1$, *entonces*

$$\text{(B) } \textit{es cierta} \iff a > ce.$$

iii) Si $e > 0$ *y* $c > 1$, *entonces*

$$a \geq ce \implies \text{(B) } \textit{es cierta}.$$

Demostración.

i) $e \leq 0$. Si (B) es cierta, como sabemos que $a > F(R)$ y $e > G(R)$, $\forall R \geq R_0$, se tendrá que, al ser G estrictamente decreciente, entonces $e > \lim_{R \to +\infty} G(R) = -ga$.

Recíprocamente, si $e > -ga = \lim_{R \to +\infty} G(R)$, debe existir un $R_1 > 0$ tal que $e > G(R)$, $\forall R \geq R_1$. Del mismo modo, como sabemos que $a > 0 = \lim_{R \to +\infty} F(R)$, debe existir un $R_2 > 0$ tal que $a > F(R)$, $\forall R \geq R_2$. Tomando $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, concluimos la demostración de este apartado.

ii) $e > 0$, $c \leq 1$. Si (B) es cierta, entonces $\forall R \geq R_0$, $e > G(R)$ y $a > F(R) > ce$.

Recíprocamente, si $a > ce = \lim_{R \to +\infty} F(R)$, debe existir un $R_1 > 0$ tal que $a > F(R)$, $\forall R \geq R_1$. Del mismo modo, como sabemos que $e \geq 0 > -ga = \lim_{R \to +\infty} G(R)$, debe existir un $R_2 > 0$ tal que $e > G(R)$, $\forall R \geq R_2$. Tomando $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, concluimos la demostración de este segundo apartado.

iii) $e > 0$, $c > 1$. Sabemos que $a \geq ce > F(R)$, $\forall R \geq R_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda_1(B,0)}{e}}$. Por otro lado, como $e \geq 0 > -ga = \lim_{R \to +\infty} G(R)$, debe existir un $R_2 > 0$ tal que $e > G(R)$, $\forall R \geq R_2$. Tomando $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, concluye la demostración del último apartado, y del Teorema. ∎

NOTAS.

- El Teorema 3.19 muestra la gran influencia que ejerce el signo del coeficiente e para obtener coexistencia en el sistema (3.11). Obsérvese que si $e \leq 0$, no interviene para nada el parámetro c para obtener (B), mientras que si $e > 0$, el valor de c es ciertamente importante. Esto pone de manifiesto que cuando estudiamos problemas del tipo general presa-depredador (3.6) (o incluso del tipo más general aún (3.2)), tan importante es la generalización y unificación de resultados (en la línea del Teorema 3.6) como la especialización (Teorema anterior). Obviamente, ello dependerá del problema concreto que estemos estudiando.

- Para obtener el resultado recíproco en el apartado *iii)*, sería necesario conocer $\lim_{R \to +\infty} F(R)$. Este es un problema abierto en la actualidad, por lo que no sabemos si dicho recíproco es cierto, o no.

- Otro problema que, como hemos visto, no ha sido cerrado, es la monotonía de la función F. Si dicho problema tuviese una respuesta positiva, ello nos podría ayudar, tanto a mejorar el apartado *iii)* del Teorema anterior, como a intentar buscar el menor R_0 para el cual se cumple la afirmación (B).

Capítulo IV:

Modelos biológicos con difusión no lineal.

IV.1 El problema de Dirichlet en ecuaciones elípticas degeneradas

Han sido los problemas elípticos degenerados (o con difusión no lineal) los que han motivado para nosotros el desarrollo del método de sub-soluciones y súper-soluciones expuesto en el Teorema 2.3. Como consecuencia, y aunque no se trate más que de una aplicación de dicho Teorema, enunciaremos ahora un método de sub-soluciones y súper-soluciones para el problema de Dirichlet en ecuaciones elípticas escalares degeneradas, e ilustraremos su utilidad obteniendo condiciones suficientes de coexistencia para problemas degenerados provenientes de la Biología.

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(v(x)) &= k(x,v(x)), & x\in\Omega,\\ v(x) &= 0, & x\in\partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua, estrictamente creciente, con $\psi(0)=0$, y k es una función real definida en $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, satisfaciendo las hipótesis (H1-H2) de la página 31 (supondremos estas hipótesis en lo que sigue, salvo que se especifique lo contrario). En los casos en que ψ sea derivable en cero por la derecha ($\exists \lim_{s\to 0^+}\frac{\psi(s)}{s}$), cuando dicho límite valga cero, diremos que nuestro problema es *"degenerado"* o también *"con difusión no lineal"* (por ejemplo, ello ocurre cuando $\psi(s)=s^m$, con $m>1$), y cuando dicho límite sea mayor que cero, diremos que el problema es *"no-degenerado"*, o con *"difusión lineal"* (por ejemplo, $\psi(s)=cs$, con $c>0$).

Definición 4.1. *Entenderemos por* **solución** *débil del problema* (4.1) *a toda función* $v:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, *tal que* $\psi(v)\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, *satisfaciendo*

$$\int_\Omega \nabla\psi(v)\cdot\nabla\phi=\int_\Omega k(x,v)\phi,\ \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

Una **sub-solución** *(o solución inferior) del problema* (4.1) *es una función* $\underline{v}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, *tal que* $\psi(\underline{v})\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, *satisfaciendo*

$$\int_\Omega \nabla\psi(\underline{v})\cdot\nabla\phi\le\int_\Omega k(x,\underline{v})\phi,\ \forall\phi\in H_0^1(\Omega),\ \phi\ge 0,\ \text{con } \psi(\underline{v})\le 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Del mismo modo, una función $\overline{v}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, *se dice que es una* **súper-solución** *(o solución superior) cuando* $\psi(\overline{v})\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, *satisfaciendo*

$$\int_\Omega \nabla\psi(\overline{v})\cdot\nabla\phi\ge\int_\Omega k(x,\overline{v})\phi,\ \forall\phi\in H_0^1(\Omega),\ \phi\ge 0,\ \text{con } \psi(\overline{v})\ge 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

TEOREMA 4.2. *Si $\underline{v}, \overline{v}$ son, respectivamente, sub-solución y súper-solución del problema* (4.1), *con $\underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$, c.p.d. en Ω, entonces existen v_* y v^*, respectivamente solución minimal y maximal (débiles) del problema* (4.1) *en el* "intervalo" $[\underline{v}, \overline{v}]$, *es decir, si $v \in [\underline{v}, \overline{v}]$ es solución débil del problema* (4.1), *entonces $v_*(x) \leq v(x) \leq v^*(x)$, c.p.d. en Ω. Además, se tiene que $v_*, v^* \in C(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Definiendo $h(x, u) = k(x, \psi^{-1}(u))$, $\forall (x, u) \in \overline{\Omega} \times \psi(\mathbb{R})$, obtenemos un nuevo problema elíptico del tipo de (2.6), de manera que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es solución de (2.6) si, y sólo si $\psi^{-1}(u)$ es solución de (4.1). Es claro, por la definición anterior, que $\underline{u} = \psi(\underline{v})$ y $\overline{u} = \psi(\overline{v})$ son, respectivamente, sub-solución y súper-solución del problema (2.6), y la nueva función h satisface también las hipótesis (H1-H2) (para comprobarlo, considérese $\tilde{g} : \psi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $\tilde{g}(s) = g(\psi^{-1}(s))$, $\forall s \in \psi(\mathbb{R})$). Podemos por tanto aplicar el Teorema 2.3 para obtener u_* y u^*, respectivamente, solución minimal y maximal del problema (2.6) en el intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$. La demostración concluye, tomando $v_* = \psi^{-1}(u_*)$ y $v^* = \psi^{-1}(u^*)$. ∎

NOTAS.

- El Teorema 4.2 generaliza claramente los resultados aparecidos en el trabajo de Leung y Fan [58], en el que los autores imponen la hipótesis de existencia de una constante positiva, M, verificando que la aplicación $s \mapsto k(x, s) + M\psi(s)$ es creciente en $[0, +\infty)$. Dicha hipótesis es claramente más restrictiva que la que nosotros suponemos, (H2), y de hecho exiten modelos biológicos degenerados (casi los únicos interesantes) en los que la hipótesis de Leung y Fan no se verifica. El motivo por el que estos autores imponen estas condiciones es por aplicar, una vez hecho el cambio de variable $u = \psi(v)$, el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones, en lugar de aplicar el Teorema 2.3, que es más general.
- Observemos que en la demostración del Teorema 4.2, la función ψ sólo necesita estar definida en el intervalo $\left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} \underline{v}(x), \operatorname{ess\,sup}_{x \in \overline{\Omega}} \overline{v}(x)\right]$.

A continuación, aunque no se trate más que de una simple aplicación del Teorema 1.7 (previo cambio de variable $u = \psi(v)$), por complitud en el desarrollo de este Capítulo, mencionaremos un resultado de unicidad, cuya demostración omitiremos por su simplicidad, así como por poder encontrarse en multitud de trabajos como [58], [73] (en cualquier caso, la demostración que figura en los trabajos mencionados usa el Teorema de Cohen y Laetsch, en los que se supone la hipótesis (innecesaria) de existencia de una solución maximal).

TEOREMA 4.3. *Si la función* $v \mapsto \dfrac{k(x,v)}{\psi(v)}$ *es estrictamente decreciente en* $(0,+\infty)$, *para casi todo* $x \in \Omega$, *entonces el problema* (4.1) *admite a lo sumo, una solución débil acotada no negativa y no trivial,* v, *que en caso de existir, verifica* $v(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$.

NOTAS.

- Es necesario destacar que, aunque el Teorema anterior es tremendamente útil e interesante en general para modelos con difusión no lineal (e incluso en algunos modelos biológicos), resulta frecuente encontrar en dinámica de poblaciones problemas en los que no se verifica la hipótesis de dicho Teorema (ver [73]). Con el objetivo de cubrir un mayor abanico de casos en el tratamiento de modelos degenerados, nosotros no vamos a imponer que la hipótesis del Teorema anterior se verifique, por lo que perderemos las ventajas de la unicidad de solución no negativa y no trivial, que tan útil ha resultado ser en otros desarrollos de esta Memoria.

– APLICACIONES

A continuación, veamos las aplicaciones que admite el Teorema 4.2 en varios modelos biológicos que surgen del estudio de dinámica de poblaciones, y genética de poblaciones (ver, por ejemplo, [14], [58] y [73]).

Estaremos interesados en la existencia de soluciones no negativas y no triviales del problema elíptico

$$\begin{aligned} -\Delta v^m(x) &= v(x)k(x,v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $m \geq 1$ y la función k satisface las hipótesis (H1-H2). Observemos que el problema (4.2) es no-degenerado si $m = 1$, y degenerado cuando $m > 1$.

TEOREMA 4.4. *Supongamos que* $\exists c > 0$ *tal que* $k(x,c) \leq 0$, *c.p.d. en* $\overline{\Omega}$. *Entonces, una condición suficiente para que* (4.2) *admita una solución no negativa y no trivial es:*

i) $\lambda_1(\Omega, -k(\cdot,0)) < 0$, *si* $m = 1$ *(caso no-degenerado).*

ii) $\exists x_0 \in \Omega$, $\exists r, \varepsilon, \delta > 0$ *tales que* $k(x,s) \geq \varepsilon$, *c.p.d. en* $B(x_0;r) \subset \Omega$, $\forall s \in (0,\delta]$, *si* $m > 1$ *(caso degenerado).*

Demostración.

i) $m = 1$. El caso no degenerado ha sido tratado en el Teorema 3.1 cuando k es localmente lipschitziana. La misma demostración de entonces es válida ahora, tomando $\overline{u} \equiv c > 0$ y $\underline{u} = \gamma\phi_1(\Omega, -k(\cdot, 0))$, con γ suficientemente pequeño, y aplicar el método de sub-soluciones y súper-soluciones desarrollado en el Teorema 2.3 en lugar del Teorema 1.3.

ii) $m > 1$. Por simplicidad, notaremos $B_r = B(x_0; r) \subset \Omega$, a lo largo de la presente demostración.

Claramente el miembro de la derecha de la ecuación (4.2) verifica las hipótesis (H1-H2), y por tanto sólo tenemos que encontrar una sub-solución no negativa y no trivial, y una súper-solución mayor o igual que ella. Trivialmente, $\overline{u} \equiv c > 0$ resulta ser una súper-solución para el problema (4.2).

Observemos también que, por la condición *ii)*, $\exists \gamma \in (0, \delta]$ tal que $\forall s \in (0, \gamma]$ se tiene $\lambda_1(B_r)s^m \leq sk(x, s)$, $\forall x \in B_r$.

Tomando

$$\underline{v}(x) = \begin{cases} \gamma\left[\phi_1(B_r)(x)\right]^{1/m} & \text{para } x \in B_r, \\ 0 & \text{para } x \in \overline{\Omega} \setminus B_r, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $0 \leq \underline{v}(x) \leq \gamma$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, obtenemos

$$\lambda_1(B_r)\underline{v}(x)^m \leq \underline{v}(x)k(x, \underline{v}(x)), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

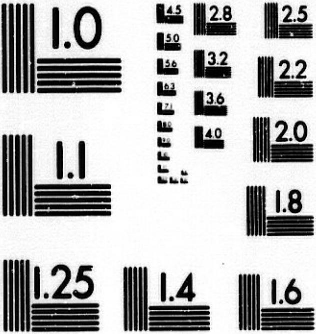
Por tanto, $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla\underline{v}^m \cdot \nabla\phi = \gamma^m \int_{B_r} \nabla\phi_1(B_r) \cdot \nabla\phi =$$

$$= \gamma^m \left[\lambda_1(B_r) \int_{B_r} \phi_1(B_r)\phi + \int_{\partial B_r} \frac{\partial\phi_1(B_r)}{\partial n_e}\phi\right] \leq$$

$$\leq \gamma^m \lambda_1(B_r) \int_{B_r} \phi_1(B_r)\phi \ = \ \lambda_1(B_r) \int_{B_r} \underline{v}^m \phi \leq$$

$$\leq \int_{B_r} \underline{v}k(x, \underline{v})\phi \ = \ \int_\Omega \underline{v}k(x, \underline{v})\phi.$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

Demostración.

i) $m = 1$. El caso no degenerado ha sido tratado en el Teorema 3.1 cuando k es localmente lipschitziana. La misma demostración de entonces es válida ahora, tomando $\overline{u} \equiv c > 0$ y $\underline{u} = \gamma\phi_1(\Omega, -k(\cdot, 0))$, con γ suficientemente pequeño, y aplicar el método de sub-soluciones y súper-soluciones desarrollado en el Teorema 2.3 en lugar del Teorema 1.3.

ii) $m > 1$. Por simplicidad, notaremos $B_r = B(x_0; r) \subset \Omega$, a lo largo de la presente demostración.

Claramente el miembro de la derecha de la ecuación (4.2) verifica las hipótesis (H1-H2), y por tanto sólo tenemos que encontrar una sub-solución no negativa y no trivial, y una súper-solución mayor o igual que ella. Trivialmente, $\overline{u} \equiv c > 0$ resulta ser una súper-solución para el problema (4.2).

Observemos también que, por la condición *ii)*, $\exists\gamma \in (0, \delta]$ tal que $\forall s \in (0, \gamma]$ se tiene $\lambda_1(B_r)s^m \leq sk(x, s)$, $\forall x \in B_r$.

Tomando

$$\underline{v}(x) = \begin{cases} \gamma\left[\phi_1(B_r)(x)\right]^{1/m} & \text{para } x \in B_r, \\ 0 & \text{para } x \in \overline{\Omega} \setminus B_r, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $0 \leq \underline{v}(x) \leq \gamma$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, obtenemos

$$\lambda_1(B_r)\underline{v}(x)^m \leq \underline{v}(x)k(x, \underline{v}(x)), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por tanto, $\forall\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla\underline{v}^m \cdot \nabla\phi = \gamma^m \int_{B_r} \nabla\phi_1(B_r) \cdot \nabla\phi =$$

$$= \gamma^m \left[\lambda_1(B_r) \int_{B_r} \phi_1(B_r)\phi + \int_{\partial B_r} \frac{\partial\phi_1(B_r)}{\partial n_e}\phi\right] \leq$$

$$\leq \gamma^m \lambda_1(B_r) \int_{B_r} \phi_1(B_r)\phi \ = \ \lambda_1(B_r) \int_{B_r} \underline{v}^m \phi \leq$$

$$\leq \int_{B_r} \underline{v}k(x, \underline{v})\phi \ = \ \int_\Omega \underline{v}k(x, \underline{v})\phi.$$

Luego, $\underline{v}$ es una sub-solución no negativa y no trivial para el problema (4.2). Como $0 \leq \underline{v}(x) \leq \gamma \leq c \equiv \overline{v}(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, podemos concluir esta demostración aplicando el Teorema 4.2. ∎

NOTAS.

- Dado que la sub-solución tomada tiene su soporte estrictamente contenido en Ω, y que el Principio del Máximo enunciado en el Lema 2.4 **no es fuerte**[(1)], puede ocurrir (y de hecho ocurre en algunas ocasiones, como podemos ver en [73]) que la solución encontrada para (4.2) no sea estrictamente positiva en todo Ω. Como vimos en el desarrollo de los capítulos anteriores, esto no ocurre en los casos no degenerados.
- Si la función k es continua, entonces la condición *ii)* del Teorema anterior es más general que la *i)* (obsérvese que en tal caso, *ii)* es equivalente a la existencia de $x_0 \in \Omega$ tal que $k(x_0, 0) > 0$). Sin embargo, no es posible mejorar estas condiciones para un problema tan general como (4.2). De hecho, si k es, además, decreciente con respecto a v, las hipótesis *i)* y *ii)* no sólo son suficientes, sino también necesarias para obtener existencia de solución no negativa y no trivial de (4.2), para los casos $m = 1$ y $m > 1$, respectivamente[(2)].
- Trivialmente, en el modelo degenerado ($m > 1$), el resultado que se obtiene es el mismo cambiando v^m por $\psi(v)$, donde $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua, estrictamente creciente, y derivable en cero, con $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.
- Este modelo degenerado ha sido tratado con anterioridad por Pozio y Tesei en [73], donde los autores imponen que la función k sea Hölder continua respecto de x, y que la aplicación $v \mapsto vk(x, v)$ sea localmente lipschitziana en $[0, +\infty)$, uniformemente en $x \in \Omega$. Además, para obtener un resultado similar al apartado *ii)* de nuestro Teorema, hacen un estudio detenido del problema parabólico asociado, analizando el comportamiento asintótico de las soluciones. Claramente, nuestro resultado puede aplicarse en situaciones más generales.

---

(1) Un principio del máximo se dice *"fuerte"* cuando en su conclusión, además de garantizar $u_2 \leq u_1$, garantiza que, o bien se da la igualdad en todo Ω, o bien la desigualdad estricta en todo Ω.

(2) En el caso en que k es estrictamente decreciente con respecto a v, se probó que la condición *i)* es necesaria en la demostración del Teorema 3.1. En el caso degenerado, observemos que si fuese $k(x, 0) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, entonces sería $k(x, s) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \geq 0$, por lo que aplicando el Principio del Máximo al operador Laplaciano, obtendríamos que el problema 4.2 no admitiría soluciones no negativas y no triviales.

- La existencia de soluciones positivas para el problema (4.2), ha sido también estudiada por Leung y Fan [58] para el caso particular en que $m = 1$ y $k(x, v) = a(x) - bv$, con $b > 0$ y $a \in L^\infty(\Omega)$ (observemos que, por la nota al pie (2), en este caso nuestra condición *i)* es necesaria y suficiente). En dicho trabajo, los autores dan la siguiente condición suficiente para obtener una solución no negativa y no trivial:

  i') Existe un subdominio regular $\Omega_s \subset \Omega$, tal que $a(x) > \lambda_1(\Omega_s)$, para casi todo $x \in \Omega_s$.

  Claramente, por las propiedades de $\lambda_1(\Omega, q)$ vistas en el Lema 1.1, se tiene que *i')*$\Rightarrow$*i)*. Para probar que *i)*$\not\Rightarrow$*i')*, consideremos el siguiente ejemplo: tómese un subdominio regular $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_1 \neq \Omega$, y sea

$$a(x) = \begin{cases} \lambda_1(\Omega_1) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ -1 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

  Entonces se verifica *i)*, y no *i')*.

  En el mismo trabajo, los autores estudian también los modelos degenerados, pero imponiendo hipótesis que les permitan usar el método clásico de sub-soluciones y súper-soluciones. Ello hace que no puedan considerar problemas en los que, por ejemplo $k(x, 0)$ cambie de signo en Ω, que sí pueden ser estudiados ahora aplicando el Teorema 4.4.

- En [14], Brown y Hess tratan, además de otros problemas diferentes de (4.2), el caso no degenerado, cuando la función k es de la forma particular $k(x, v) = g(x)f(v)$, con g y f continuas, $f(0) > 0$, $f(c) = 0$ para un cierto $c > 0$, y g cambia de signo en $\overline{\Omega}$. Usando teoría de índice de punto fijo, los autores obtienen la misma condición suficiente para el caso *i)* del Teorema 4.4. En dicho trabajo no se trata el caso degenerado, en el que podemos observar que la condición *ii)* se expresa como

  ii') Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $g(x_0) > 0$.

IV.2 El problema de Dirichlet en sistemas elípticos degenerados

Al igual que ocurría con el caso de ecuaciones elípticas escalares, han sido los sistemas elípticos degenerados (o con difusión no lineal) los que han motivado el desarrollo del método de sub-súper-soluciones para sistemas que se ha expuesto en el Teorema 2.7. Como consecuencia de dicho Teorema, podemos ahora enunciar un método de sub-súper-soluciones para el problema de Dirichlet en sistemas elípticos degenerados.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(U(x)) &= H(x, U(x), V(x)), & x \in \Omega, \\ -\Delta\varphi(V(x)) &= K(x, U(x), V(x)), & x \in \Omega, \\ U(x) = V(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, las funciones $H, K : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacen las hipótesis (HK1-HK2) de la página 36, y $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, estrictamente crecientes, con $\psi(0) = \varphi(0) = 0$.

DEFINICIÓN 4.5. *Entenderemos por* **solución** *débil del sistema* (4.3) *a un par de funciones reales* (U, V) *tal que* $\psi(U), \varphi(V) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *verificando,* $\forall\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla\psi(U) \cdot \nabla\phi = \int_\Omega H(x, U, V)\phi,$$

$$\int_\Omega \nabla\varphi(V) \cdot \nabla\phi = \int_\Omega K(x, U, V)\phi.$$

Consideremos cuatro funciones reales, $\underline{U}, \overline{U}, \underline{V}, \overline{V}$, *definidas en* $\overline{\Omega}$. *Diremos que tales funciones forman un* **sistema de sub-súper-soluciones** *para el sistema* (4.3) *cuando se verifique*

a) $\psi(\underline{U}), \psi(\overline{U}), \varphi(\underline{V}), \varphi(\overline{V}) \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

b)

$$\begin{cases} \underline{U}(x) \le \overline{U}(x), & \underline{V}(x) \le \overline{V}(x), & c.p.d.\ en\ \Omega, \\ \psi(\underline{U}) \le 0 \le \psi(\overline{U}), & \varphi(\underline{V}) \le 0 \le \varphi(\overline{V}), & en\ \partial\Omega. \end{cases}$$

c) $\forall\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \ge 0$,

$$\forall V \in [\underline{V}, \overline{V}], \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\psi(\overline{U}) \cdot \nabla\phi \ge \int_\Omega H(x, \overline{U}, V)\phi, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\psi(\underline{U}) \cdot \nabla\phi \le \int_\Omega H(x, \underline{U}, V)\phi, \end{cases}$$

$$\forall U \in [\underline{U}, \overline{U}], \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi(\overline{V}) \cdot \nabla\phi \geq \int_\Omega K(x, U, \overline{V})\phi, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi(\underline{V}) \cdot \nabla\phi \leq \int_\Omega K(x, U, \underline{V})\phi. \end{cases}$$

TEOREMA 4.6. *Supongamos que* $\exists \underline{U}, \overline{U}, \underline{V}, \overline{V}$, *un sistema de sub-súper-soluciones para* (4.3). *Entonces existe al menos una solución débil de* (4.3), $(U, V) \in [\underline{U}, \overline{U}] \times [\underline{V}, \overline{V}]$. *Además,* $(U, V) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$.

Demostración. Al igual que en el caso escalar, haremos un cambio de variables para transformar el sistema (4.3) en otro sistema del tipo (2.7). Efectivamente, $\forall (x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \psi(\mathbb{R}) \times \varphi(\mathbb{R})$, definamos

$$h(x, u, v) = H(x, \psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)),$$
$$k(x, u, v) = K(x, \psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)).$$

Obtenemos así un nuevo sistema del tipo (2.7), de manera que dado un par de funciones $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$(u, v) \text{ es solución de } (2.7) \iff (\psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \text{ es solución de } (4.3).$$

Por la definición anterior es claro que las funciones $\underline{u} = \psi(\underline{U})$, $\overline{u} = \psi(\overline{U})$, $\underline{v} = \varphi(\underline{V})$, $\overline{v} = \varphi(\overline{V})$ forman un sistema de sub-súper-soluciones para el sistema (2.7). Además, las nuevas funciones h y k satisfacen también las hipótesis (HK1-HK2). Por tanto, podemos aplicar el Teorema 2.7 al sistema (2.7), y obtener así una solución (u, v) para dicho sistema. Para finalizar, tomemos $(U, V) = (\psi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v))$. ∎

NOTAS.

- Un resultado similar al anterior aparece en el trabajo de R. Dal Passo y P. de Mottoni [30], donde los autores imponen mayores hipótesis de regularidad, tanto sobre el dominio Ω, como sobre las funciones ψ y φ (deben ser, o ellas o sus inversas, localmente lipschitzianas), así como sobre las no-linealidades del sistema (H y K deben ser localmente lipschitzianas). En el mismo trabajo aparece además un resultado de unicidad para un modelo de tipo cooperativo, verificando ciertas condiciones de concavidad, similares a las dadas por Krasnoselskii [54].
- Leung y Fan, en [58], obtienen también un resultado similar al nuestro, pero imponiendo, al igual que en el caso escalar, una hipótesis sobre el crecimiento en las no-linealidades H y K, que permita el uso del

método clásico de sub-súper-soluciones en sistemas (Teorema 1.5), en lugar del Teorema 2.7, más general. Dejan así sin cubrir un importante abanico de modelos que surgen de dinámica de poblaciones.

– Al igual que ocurría con los sistemas no degenerados que aparecen en la Biología, podríamos pensar en resolver los sistemas degenerados mediante el argumento ya usado de definir, para una V dada, U_V como la solución maximal del problema

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(U(x)) &= H(x, U(x), V(x)), && x \in \Omega, \\ U(x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

y análoga definición para V_U. De este modo, podríamos buscar entonces puntos fijos del operador dado por $T(U,V) = (U_V, V_U)$. Haciendo uso de estas ideas, Pozio y Tesei, en [72] obtienen una condición suficiente de coexistencia para un modelo del tipo presa-depredador, en el que imponen, además, ciertas condiciones de regularidad sobre las funciones ψ y φ, así como sobre las no-linealidades H y K. El principal problema que presenta este argumento es que, debido a que no siempre hay unicidad de los problemas que sirven para definir U_V y V_U, no podremos esperar (salvo hipótesis adicionales) la continuidad del operador T, para las topologías adecuadas sobre los espacios convenientes de funciones. Por ello, en general no siempre es posible aplicar al operador T el Teorema del Punto Fijo, de Schauder, ni tampoco usar teoremas de bifurcación del tipo de 2.1, que requieren regularidad en los operadores a considerar.

– APLICACIONES

Pongamos de manifiesto la utilidad del Teorema 4.6 en la búsqueda de estados de coexistencia para el siguiente problema degenerado que aparece en dinámica de poblaciones:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi(u(x)) &= u(x)h(x, u(x), v(x)), && x \in \Omega, \\ -\Delta\varphi(v(x)) &= v(x)k(x, u(x), v(x)), && x \in \Omega, \\ u(x) = v(x) &= 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con frontera regular, las funciones $h, k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacen las hipótesis (HK1-HK2) de la página 36, y $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, estrictamente crecientes, y derivables en cero, con $\psi(0) = \varphi(0) = \psi'(0) = \varphi'(0) = 0$.

TEOREMA 4.7. *Una condición suficiente para que el sistema (4.4) admita un estado de coexistencia es*

i) $\exists \alpha, \beta > 0$ *tales que*

$$\begin{matrix} h(x,\alpha,t) \leq 0 \\ k(x,s,\beta) \leq 0 \end{matrix} \quad \forall x \in \Omega,\ \forall s \in [0,\alpha],\ \forall t \in [0,\beta].$$

ii) $\exists x_1, x_2 \in \Omega,\ \exists r_1, r_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ *tales que*

$$\forall s \in (0,\delta_1],\ h(x,s,t) \geq \varepsilon_1 \quad \forall x \in B(x_1;r_1) \subset \Omega,\ \forall t \in [0,\beta],$$

y también

$$\forall t \in (0,\delta_2],\ k(x,s,t) \geq \varepsilon_2 \quad \forall x \in B(x_2;r_2) \subset \Omega,\ \forall s \in [0,\alpha].$$

Demostración. Por simplicidad, notaremos $B_1 = B(x_1;r_1)$, $B_2 = B(x_2;r_2)$, a lo largo de esta demostración. Es inmediato comprobar que las nolinealidades del sistema (4.4) satisfacen (HK1-HK2), por lo que bastará encontrar un sistema de sub-súper-soluciones para dicho sistema, y aplicar el Teorema 4.6, para concluir esta demostración.

Sean $\overline{u} \equiv \alpha$, $\overline{v} \equiv \beta$,

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \psi^{-1}[\eta_1 \phi_1(B_1)(x)], & \text{si } x \in B_1, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus B_1, \end{cases}$$

$$\underline{v}(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}[\eta_2 \phi_1(B_2)(x)], & \text{si } x \in B_2, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus B_2, \end{cases}$$

para $\eta_1, \eta_2 > 0$ suficientemente pequeños.

Probemos que las funciones $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v}$ forman un sistema de sub-súper-soluciones para el sistema (4.4).

Teniendo en cuenta que $0 = \psi'(0) = \lim_{s \to 0} \dfrac{\psi(s)}{s}$, y usando la hipótesis *ii)*, obtenemos:

$$\exists \gamma_1 \in (0,\delta_1] : \forall s \in (0,\gamma_1],\ \frac{\psi(s)}{s} \leq \frac{h(x,s,t)}{\lambda_1(B_1)},\ \forall x \in B_1 \subset \Omega,\ \forall t \in [0,\beta].$$

Por tanto,

$$\lambda_1(B_1)\psi(s) \leq s h(x,s,t),\ \forall x \in \Omega,\ \forall s \in [0,\gamma_1],\ \forall t \in [0,\beta].$$

Tomando $\eta_1 = \psi(\gamma_1)$, obtenemos que $0 \leq \underline{u}(x) \leq \gamma_1$, $\forall x \in \Omega$. Por tanto,

$$\lambda_1(B_1)\eta_1\phi_1(B_1)(x) \leq \underline{u}(x)\, h(x,\underline{u}(x),t),\ \forall x \in \Omega, \forall t \in [0,\beta].$$

En consecuencia, $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$, y $\forall v \in [\underline{v}, \overline{v}]$,

$$\int_\Omega \nabla\psi(\underline{u}) \cdot \nabla\phi = \eta_1 \int_{B_1} \nabla\phi_1(B_1) \cdot \nabla\phi =$$

$$= \eta_1 \left[\lambda_1(B_1) \int_{B_1} \phi_1(B_1)\phi + \int_{\partial B_1} \frac{\partial\phi_1(B_1)}{\partial n_e}\phi \right] \leq$$

$$\leq \lambda_1(B_1)\eta_1 \int_{B_1} \phi_1(B_1)\phi \leq \int_\Omega \underline{u}\, h(x, \underline{u}, v)\phi.$$

y, usando la hipótesis *i)*, $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$, y $\forall v \in [\underline{v}, \overline{v}]$,

$$\int_\Omega \nabla\psi(\overline{u}) \cdot \nabla\phi \,(= 0) \geq \int_\Omega \overline{u}\, h(x, \overline{u}, v)\phi.$$

Del mismo modo se puede razonar con las funciones $\underline{v}$ y $\overline{v}$, quedando así demostrado que las funciones $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ forman un sistema de sub-súper-soluciones para el sistema (4.4), con lo cual se concluye la demostración. ∎

NOTAS.

- Observemos que si las funciones h y k fuesen ambas continuas conjuntamente con respecto a sus tres variables, la hipótesis *ii)* del Teorema anterior podría escribirse más fácilmente de la forma:

  ii') Existen $x_1, x_2 \in \Omega$ tales que

  $$h(x_1, 0, t) > 0, \;\; \forall t \in [0, \beta],$$
  $$k(x_2, s, 0) > 0, \;\; \forall s \in [0, \alpha].$$

- Al igual que ocurre en el caso escalar, al haber tomado $\underline{u}$ y $\underline{v}$ tales que sus respectivos soportes están contenidos estrictamente en Ω, podría ocurrir que las componentes de la solución encontrada (u, v), a pesar de ser no negativas y no triviales, pueden anularse en subconjuntos de Ω. Rigurosamente hablando, esta solución es un estado de coexistencia, pero desde el **punto de vista Biológico**, si ocurriese que $\mathrm{sop}\, u \cap \mathrm{sop}\, v = \emptyset$, entonces las especies u y v no *"coexisten"* (biológicamente hablando) en ninguna zona de Ω, por lo que la solución encontrada carece de interés. Una posible solución a este problema podría ser la de tomar $x_1 = x_2$ en la hipótesis *ii)* de nuestro Teorema, con lo que $\mathrm{sop}\underline{u} \cap \mathrm{sop}\underline{v} \neq \emptyset$, y por tanto $\mathrm{sop}\, u \cap \mathrm{sop}\, v \neq \emptyset$.

- A la vista del Teorema anterior, y en contraste con los resultados que conocemos, podemos observar que en las hipótesis no se ha impuesto a priori ningún tipo de monotonía de las funciones h y k respecto de ninguna de sus variables. Esta *"ventaja"* es debida al método concreto que usamos de sub-súper-soluciones, en sentido general, y es útil, tanto para el estudio de los tres modelos clásicos (competición, presa-depredador y cooperativo), como para el estudio de modelos biológicos en los que la interacción no corresponde a ningún caso de los estándar. No obstante, cuando en los modelos aparezcan monotonías, esto hará más fácil la búsqueda de posibles sub-súper-soluciones en cada caso.

A modo de ejemplo, veremos una aplicación del Teorema anterior a un modelo biológico degenerado, de tipo presa-depredador:

$$\begin{array}{rll} -\Delta u^m(x) = u(x)\,(a(x) - b(x)u(x) - c(x)v(x)), & x \in \Omega, & \\ -\Delta v^n(x) = v(x)\,(e(x) - f(x)v(x) + g(x)u(x)), & x \in \Omega, & (4.5) \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, & \end{array}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con frontera regular, $m, n > 1$, y $a, b, c, e, f, g \in C(\overline{\Omega})$, con $b(x), f(x) > 0$, $c(x), g(x) \geq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Usaremos la notación $\overline{r}$, $\underline{r}$ introducida en la página 56.

TEOREMA 4.8. *Una condición suficiente para que el sistema* (4.5) *admita un estado de coexistencia en* Ω *es*

$$\exists x_1 \in \Omega : a(x_1) - c(x_1)\frac{\overline{b}\,\overline{e} + \overline{g}\,\overline{a}}{\underline{b}\,\underline{f}} > 0$$

y además

$$\exists x_2 \in \Omega : e(x_2) > 0$$

Demostración. Teniendo en cuenta la primera nota del grupo anterior, reduciremos esta demostración a probar que ocurren *i)* y *ii')*. Para ello, consideraremos las funciones $h, k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas como

$$\left.\begin{array}{l} h(x,s,t) = a(x) - b(x)s - c(x)t, \\ \\ k(x,s,t) = e(x) + g(x)s - f(x)t, \end{array}\right. \quad \forall (x,s,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Sean $\alpha = \dfrac{\overline{a}}{\underline{b}} > 0$, y $\beta = \dfrac{\overline{b}\,\overline{e} + \overline{g}\,\overline{a}}{\underline{b}\,\underline{f}} > 0$.

Observemos que $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in [0, \alpha]$, $\forall t \in [0, \beta]$,

$$h(x, \alpha, t) = a(x) - b(x)\alpha - c(x)t \leq 0,$$

$$k(x, s, \beta) = e(x) + g(x)s - f(x)\beta \leq 0,$$

que es exactamente la condición *i)* del Teorema 4.7. Comprobaremos a continuación la condición *ii')*. En efecto,

$$\forall t \in [0,\beta], \; h(x_1,0,t) = a(x_1) - c(x_1)t \geq a(x_1) - c(x_1)\beta > 0,$$

$$\forall s \in [0,\alpha], \; k(x_2,s,0) = e(x_2) + g(x_2)s \geq e(x_2) > 0.$$

Queda así probado el Teorema 4.8. ▮

NOTAS.

- Al igual que en el caso escalar, Leung y Fan [58] estudian sistemas elípticos degenerados, pero imponiendo hipótesis que les permitan aplicar el método clásico de sub-súper-soluciones expuesto en el Teorema 1.5, en lugar del método desarrollado en el Teorema 2.7. Esto hace que, en dicho trabajo, no puedan considerarse problemas del tipo (4.5) en los que, por ejemplo, $a(x)$ cambie de signo en Ω, o bien m ó n sean mayores o iguales que 2.

NOTAS FINALES Y POSIBLES LÍNEAS DE CONTINUACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

Esta última parte de la Memoria estará dedicada a la exposición de algunos problemas que pueden plantearse tras una detenida lectura del contenido. Los interrogantes que surgen son numerosos; no obstante hemos procurado seleccionar sólo los más significativos desde nuestro punto de vista. Algunos de ellos se plantean simplemente como cuestiones abiertas (a las que hemos dedicado tiempo y esfuerzo sin conseguir tener, hasta el momento, una respuesta satisfactoria); otras son posibles líneas en las que puede vertebrarse el futuro de nuestra investigación.

- Debido al gran juego que ha proporcionado el Teorema 3.6 para sistemas de dos ecuaciones elípticas, modelando la interacción de dos especies biológicas, y teniendo en cuenta que, desde un **punto de vista Biológico**, en cualquier sistema biológico se suelen presentar más de dos especies a considerar, resulta atractivo intentar formular un Teorema similar que dé condiciones suficientes para que un sistema de n-ecuaciones elípticas ($n \in \mathbb{N}$) admita un estado de coexistencia. En esta línea podemos encontrar los trabajos de L. Li y Y. Liu [63], o P.N. Brown [16], aunque nos parece que, aplicando las ideas contenidas en la segunda demostración del Teorema 3.6, podrían obtenerse mejoras considerables con respecto a dichos trabajos.
- Es conocido que, para un sistema tan general como es (3.2), no cabe esperar resultados de unicidad, ya que se conocen casos particulares en los que hay unicidad de estado de coexistencia (ver, por ejemplo, [17], [30], [32], [33], [42]), y casos en los que no la hay (ver [62]). Un interesantísimo problema, tanto por la simplicidad de su enunciado, como por la escasez de respuestas existentes hasta el momento, es el de resolver si hay o no unicidad para un modelo del tipo de (3.5), cuando la interacción es de tipo presa-depredador ($c < 0 < g$).

Por supuesto, en la interacción de tipo presa-depredador para el caso general (3.6), la cuestión de la unicidad está también sin resolver. Respuestas parciales a esta cuestión pueden encontrarse en [34], [60], [67]. Asímismo, el estudio de propiedades cualitativas de los estados de coexistencia (dependencia respecto de los parámetros, *"tamaño"* de las poblaciones, etc.), es una cuestión que no hemos abordado aquí en profundidad.

- El hecho de haber obtenido en algunos casos, como en los de interacción presa-depredador, condiciones necesarias y suficientes para que exista al menos un estado de coexistencia, no es necesariamente un final satisfactorio del estudio de dichos problemas. La dificultad que existe en la práctica para comprobar si dichas condiciones se verifican o no, hace que, en algunos casos, resulte complicado decidir si existirá o no algún estado de coexistencia. Un ejemplo tan elemental como ilustrativo para estas consideraciones podría ser el sistema (3.11), si consideramos los coeficientes $a, c, e, g > 0$, con $e < a < ce$. ¿Existe algún dominio de coexistencia para dicho sistema?. Desafortunadamente, no tenemos la respuesta a esta pregunta, aunque un mejor conocimiento de la función F definida en la sección final del Capítulo III, nos proporcionaría una respuesta, al menos con dominios que sean bolas euclídeas.

- En la Sección 3 del tercer Capítulo nos hemos ocupado de una cuestión que presentábamos como *"muy interesante"* desde el **punto de vista de la Biología**. Esta cuestión es la búsqueda de dominios de coexistencia para dos especies cuya forma de interacción es conocida. En nuestro estudio hemos intentado buscar situaciones en las que fueran ciertas las afirmaciones (A) ó (B) (afirmaciones que nos han parecido interesantes), pero es claro que hay muchas otras cuestiones que pueden plantearse y cuya respuesta (afirmativa o negativa) puede ser de un gran interés en cada caso particular. Por ejemplo, la búsqueda de *"bandas de coexistencia"*, en las que el *"grosor"* de la banda no puede ser demasiado grande, así como otras posibles propiedades cualitativas a exigir a los dominios de coexistencia, en cuanto a su volumen, diámetro, forma, etc. No obstante, ni siquiera en el caso presa-depredador ha quedado totalmente concluido el estudio de la validez de la afirmación (A). Queda pendiente el reto de encontrar (si es posible) una situación más general que la expuesta en el Teorema 3.15 donde la afirmación (A) sea cierta. Asímismo, se puede intentar obtener resultados similares para los modelos de tipo *"lineal"*, cuya interacción es de tipo competición, así como los otros modelos concretos con interacción de tipo *"mixto"* que se han presentado en la Sección III.2.

En el conocimiento de que, en el modelo lineal de tipo presa-depredador, la afirmación (A) no es siempre cierta (ver Teorema 3.14), podemos plantear otra cuestión para la que no parece existir una fácil respuesta, ni siquiera en el caso en que solamente consideremos dominios que sean bolas euclídeas. Dicha cuestión es la de estudiar la validez de la siguiente afirmación:

(C) *Si* $\Omega_1, \Omega_3 \in \mathcal{BR}$ *son dominios de coexistencia para* (3.11), *entonces, cualquier dominio* $\Omega_2 \in \mathcal{BR}$, *con* $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3$, *es también un dominio de coexistencia para* (3.10).

Un estudio de la monotonía de F en el intervalo $[\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}, +\infty)$, ayudaría a clarificar esta cuestión, ya que si F siempre fuese monótona en dicho intervalo, un resultado al respecto (que en el caso de dominios que son bolas euclídeas centradas en el origen, sería entonces inmediato demostrar) podría ser el siguiente:

TEOREMA.

a) Si $e \leq 0$, *la afirmación* (A) *(y por tanto, la* (C)*) es cierta (este es el resultado de L. Li mencionado en el Capítulo III).*

b) Si $e > 0$, $c \leq 1$, *la afirmación* (A) *(y por tanto, la* (C)*) es cierta.*

c) Si $e > 0$, $c > 1$, *la afirmación* (C) *es cierta, y no lo es necesariamente la afirmación* (A).

Como vemos, el estudio detallado del comportamiento de la función F resolvería más de una cuestión abierta. En concreto, queda por decidir la monotonía de F cuando $e > 0$, y $c > 0$, $c \neq 1$. Asímismo, ha quedado sin resolver la existencia de $\lim_{R\to+\infty} F(R)$, en el caso $e > 0$, $c > 1$. A la vista de los resultados conocidos, creemos que F debe ser monótona en el intervalo $[\sqrt{\frac{\lambda_1(B,0)}{e}}, +\infty)$, y que en cualquier caso, cuando $e > 0$, debe ser $\lim_{R\to+\infty} F(R) = ce$, con lo cual, el recíproco del apartado *iii)* del Teorema 3.19 sería cierto, quedando caracterizada la afirmación (B), en términos de los coeficientes del sistema.

- Las nuevas aportaciones al método de sub-soluciones y súper-soluciones que aparecen en esta Memoria pueden resultar bastante útiles para aplicar en ciertos problemas elípticos no lineales que no se hayan podido estudiar por este método, debido, por ejemplo, a la falta de regularidad en la no-linealidad. Sería, por tanto, interesante buscar aplicaciones del nuevo método en variedad de problemas, lo cual podría proporcionar nuevos resultados de existencia de solución para problemas que hayan sido estudiados mediante otros métodos. Del mismo modo, habría que observar que aquí, para el estudio de problemas con difusión no lineal (o degenerados) sólo hemos usado los métodos de sub-soluciones y súper-soluciones, que han resultado ser bastante satisfactorios en algunos casos, como el escalar. Sin embargo, sería interesante emprender la búsqueda de otros métodos aplicables al estudio de tales problemas (no olvidemos que en el caso de sistemas con difusión lineal, los *"mejores"* resultados se han obtenido por técnicas distintas de las de sub-soluciones y súper-soluciones).

- Otra posibilidad en el futuro desarrollo de nuestro trabajo es la de estudiar las implicaciones que nuestros resultados puedan tener en el estudio del problema parabólico asociado, como por ejemplo, el comportamiento asintótico de las soluciones del problema parabólico, y su relación con las soluciones de equilibrio. También consideramos interesante cambiar el *"omnipresente"* operador Laplaciano, por otro operador elíptico más general, L. Incluso podemos considerar otros operadores en forma de divergencia, como puede ser el operador *"p-Laplaciano"* ($\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, con $p > 1$). Como adelanto de esta última posibilidad, hemos desarrollado un trabajo en cooperación con el Prof. P. Drábek, de la Universidad de Bohemia-Oeste, Pilsen, República Checa [19], donde se obtienen resultados de existencia que son también aplicables a modelos con difusión del tipo $-\Delta u^m$, para valores de $m < 1$.

BIBLIOGRAFÍA.

1. S. AGMON, A. DOUGLIS Y L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure. Appl. Math., 12 (1959), 623-727.

2. S. AHMAD Y A. LAZER, *Asymptotic behaviour of solutions of periodic competition diffusion sysmtem*, Nonl. Anal. T.M.A., 13 (1989), 263-284.

3. H. AMANN, *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971), 125-146.

4. H. AMANN, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach spaces*, SIAM Review, 18 (1976), 620-709.

5. H. AMANN, A. AMBROSETTI Y G. MANCINI, *Elliptic equations with noninvertible Fredholm linear part and bounded linearities*, Math. Z., 158 (1978), 179-194.

6. A. AMBROSETTI Y G. PRODI, *A primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1992.

7. C. BANDLE, M.A. POZIO Y A. TESEI, *The asymptotic behavior of the solutions of degenerate parabolic equations*, Trans. of the A.M.S., 303 (1987), 487-501.

8. H. BERESTYCKI, *Le nombre de solutions de certains problèmes semilinéaires elliptiques*, J. Funct. Anal., 40 (1981), 1-29.

9. J. BLAT Y K.J. BROWN, *Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburg, 97 (1984), 21-34.

10. H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle et applications*, Masson, París, 1983.

11. H. Brézis y L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonl. Anal. T.M.A., 10 (1986), 55-64.

12. K.J. Brown, *Spatially inhomogeneous steady state solutions for systems of equations describing interacting populations*, J. Math. Anal. and Appl., 95 (1983), 251-264.

13. K.J. Brown, *Nontrivial solutions of predator-prey systems with small diffusion*, Nonl. Anal. T.M.A., 11 (1987), 685-689.

14. K.J. Brown y P. Hess, *Stability and uniqueness of positive solutions for a semi-linear elliptic boundary value problem*, Diff. and Int. Eqns., 3 (1990), 201-207.

15. K.J. Brown y P. Hess, *Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion systems*, Nonl. Anal. T.M.A., 16 (1991), 1147-1158.

16. P.N. Brown, *Decay to uniform states in ecological interactions*, SIAM J. Appl. Math., 38 (1980), 22-37.

17. R.S. Cantrell y C. Cosner, *On the uniqueness and stability of positive solutions in the Lotka-Volterra competition model with diffusion*, Huston J. Math., 15 (1989), 341-361.

18. R.S. Cantrell, C. Cosner y V. Hutson, *Permanence in ecological systems with spatial heterogeneity*, Preprint.

19. A. Cañada, P. Drábek y J.L. Gámez, *Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion*, Sometido a publicación.

20. A. Cañada y J.L. Gámez, *Prey-predator systems over expanding regions*, Aceptado para publicación en los proceedings del "3rd International Conference on Mathematical Populations Dynamics", Pau (France), (1992).

21. A. Cañada y J.L. Gámez, *Some remarks about the existence of positive solutions for elliptic systems*, Aceptado para publicación en los proceedings del "First World Congress of Nonlinear Analysts", Tampa (U.S.A.), (1992).

22. A. Cañada y J.L. Gámez, *Positive solutions of nonlinear elliptic systems*, Aceptado para publicación en M^3AS, Math. Mod. & Meth. in Appl. Sc.

23. A. CAÑADA Y J.L. GÁMEZ, *Coexistence states for nonlinear elliptic problems arising from Biology*, Aceptado para publicación en Extracta Matematicae.

24. A. CAÑADA Y J.L. GÁMEZ, *Some new applications of the method of lower and upper solutions to elliptic problems*, Aceptado para publicación en Appl. Math. Letters.

25. A. CAÑADA Y J.L. GÁMEZ, *Existence of solutions for some semilinear degenerate elliptic systems with applications to Population Dynamics*, Sometido a publicación.

26. X. CAO, *Neurobiology*, Shangai Medical Univ. Press, 1989.

27. D.S. COHEN, *Positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems*, J. Math. Mech., 17 (1967), 209-216.

28. D.S. COHEN, *Positive solutions of non-linear eigenvalue problems: applications to non-linear reactor dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 26 (1967), 305-315.

29. D.S. COHEN Y T.W. LAETSCH, *Nonlinear boundary value problems suggested by chemical reactor theory*, J. Diff. Eqns., 7 (1970), 217-226.

30. R. DAL PASSO Y P. DE MOTTONI, *Some existence, uniqueness and stability results for a class of semilinear degenerate elliptic systems*, Bolletino U.M.I. Anal. Funzionale e Appl., VI (1984), 203-231.

31. E.N. DANCER, *On positive solutions of some pairs of differential equations*, Trans. of the A.M.S., 284 (1984), 729-743.

32. E.N. DANCER, *On positive solutions of some pairs of differential equations, II*, J. Diff. Eqns., 60 (1985), 236-258.

33. E.N. DANCER, *On the existence and uniqueness of positive solutions for competing species models with diffusions*, Research Report, Univ. of New England, Armidale, Australia, 1989.

34. E.N. DANCER, *On uniqueness and stability for solutions of singularly perturbed predator-prey type equations with diffusion*, J. Diff. Eqns., 102 (1993), 1-32.

35. E.N. DANCER Y G. SWEERS, *On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation*, Diff. and Int. Eqns., 2 (1989), 533-540.

36. D. DANERS Y P. KOCH MEDINA, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Preprint.

37. K. DEIMLING, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

38. J.I. DÍAZ, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, (Vol I) Elliptic equations*, London, Pitman, 1985.

39. P.C. FIFE, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, New York, Springer, Lecture Notes in Biomathematics, 28 (1979).

40. D.G. DE FIGUEIREDO, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Proc. of the first latin american school of differential equations, Lect. Notes in Mathematics 957 (1982), 34-87.

41. L.E. FRAENKEL, *On the embedding of $C^1(\overline{\Omega})$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$*, J. London Math. Soc., 2 (1982), 290-298.

42. J.E. FURTER Y J. LÓPEZ-GÓMEZ, *On the existence and uniqueness of coexistence states for the Lotka-Volterra competition model with diffusion and spatial dependent coefficients*, Preprint.

43. B. GIDAS, W.M. NI Y L. NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., 68 (1979), 209-243.

44. D. GILBARG Y N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlín, 1983.

45. J. HERNÁNDEZ, *Some existence and stability results for solutions of reaction-diffusion systems with nonlinear boundary conditions*, In Nonlinear Differential Equations: Invariance, Stability and Bifurcation, P. de Mottoni and L. Salvadori (eds.), New York, Academic Press, 1981, 161-173.

46. J. HERNÁNDEZ, *Qualitative methods for nonlinear diffusion equations*, In Nonlinear Diffusion Problems, A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Lect. Notes in Mathematics 1224 (1986), 47-118.

47. J. HERNÁNDEZ, *Some free boundary problems for predator-prey systems with nonlinear diffusion*, Proc. of Symp. in Pure Math., 45 (1986), 481-488.

48. P. HESS, *Periodic-parabolic boundary value problems and positivity*, Longman Group U.K. Limited 1991.

49. P. Hess y T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Part. Diff. Eqns., 5 (1980), 999-1030.

50. H.B. Keller, *Elliptic boundary value problems suggested by non-linear diffusion processes*, Arch. Rat. Mech. Anal., 35 (1969), 363-381.

51. H.B. Keller y D.S. Cohen, *Some positone problems suggested by non-linear heat generation*, J. Math. Mech., 16 (1967), 1361-1376.

52. P. Korman y A. Leung, *A general monotone scheme for elliptic systems with applications to ecological models*, Proc. Roy. Soc. of Edinburg, 102 (1986), 315-325.

53. M. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, London, Pergamon Press, 1964.

54. M. Krasnoselskii, *Positive solutions of operator equations*, P. Noordhoff, Groningen (1964).

55. J.R. Kuttler y V.G. Sigilito, *Eigenvalues of the laplacian in two dimensions*, SIAM Rev., 26 (1984), 163-193.

56. J. Leray y J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51 (1934), 45-78.

57. A. Leung, *Monotone schemes for semilinear elliptic systems related to ecology*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 4 (1982), 272-285.

58. A. Leung y G. Fan, *Existence of positive solutions for elliptic systems – degenerate and nondegenerate ecological models*, J. Math. Anal. and Appl., 151 (1990), 512-531.

59. L. Li, *Coexistence theorems of steady states for predator-prey interacting systems*, Trans. of the A.M.S., 305 (1988), 143-166.

60. L. Li, *On the uniqueness and ordering of steady states of predator-prey systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 110 (1988), 295-303.

61. L. Li, *Global positive coexistence of a nonlinear elliptic biological interacting model*, Math. Biosc., 97 (1989), 1-15.

62. L. Li y A. Ghoreishi, *On positive solutions of general nonlinear elliptic symbiotic interacting systems*, Appl. Anal., 40 (1991), 281-295.

63. L. Li y Y. Liu, *Spectral and nonlinear effects in certain elliptic systems of three variables*, SIAM J. Math. Anal., 24 (1993), 480-498.

64. L. Li y R. Logan, *Positive solutions to general elliptic competition models*, Diff. and Int. Eqns., 4 (1991), 817-834.

65. J. López-Gómez, *Positive periodic solutions of Lotka-Volterra reaction-diffusion systems*, Diff. and Int. Eqns., 5 (1992), 55-72.

66. J. López-Gómez y R. Pardo, *Coexistence regions in Lotka-Volterra models with diffusion*, Nonl. Anal. T.M.A., 19 (1992), 11-28.

67. J. López-Gómez y R. Pardo, *Existence and uniqueness of coexistence states for the predator-prey model with diffusion: the scalar case*, Preprint.

68. P. de Mottoni y F. Rothe, *Convergence to homogeneous equilibrium state for generalized Volterra-Lotka systems with diffusion*, SIAM J. Appl. Math., 37 (1979), 648-663.

69. P. de Mottoni, A. Schiaffino y A. Tesei, *Attractivity properties of nonnegative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems*, Ann. Mat. Pura Appl., 136 (1984), 35-48.

70. J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlín, 1989.

71. A. Okubo, *Diffusion and ecological problems: mathematical models*, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

72. M.A. Pozio y A. Tesei, *Degenerate parabolic problems in population dynamics*, Japan J. Appl. Math., 2 (1985), 351-380.

73. M.A. Pozio y A. Tesei, *Support Properties of solutions for a class of degenerate parabolic problems*, Comm. in Part. Diff. Eqns., 12 (1987), 47-75.

74. P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal., 7 (1971), 487-513.

75. P.H. Rabinowitz, *A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications*, In Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E.H. Zarantonello (ed,), New York, Academic Press, 1971, 11-36.

76. D.H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., 21 (1972), 979-1000.

77. C.A. Stuart, *Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous non-linearities*, Math. Zeitschrift, 163 (1978), 239-249.

78. R.L. VOLLER, *Solving Volterra-Lotka systems with diffusion by monotone iteraction*, J. Math. Biol., 29 (1990), 177-187.