UNIVERSIDAD DE GRANADA

TEORÍA DE ESTRUCTURA DE COÁLGEBRAS

Juan Francisco Ruiz Ruiz

TESIS DE DOCTORADO

Facultad de Ciencias
Departamento de Álgebra

Director: Dr. Luis M. Merino González.

2003

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Juan Francisco Ruiz Ruiz
D.L.: Gr. 43- 2007
ISBN: 978-84-3384221-3

TEORÍA DE ESTRUCTURA DE COÁLGEBRAS

Juan Francisco Ruiz Ruiz
Departamento de Algebra
Universidad de Granada
Septiembre 2003

Teoría de Estructura de Coálgebras

por

Juan Francisco Ruiz Ruiz

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Dr. D. Luis Miguel Merino González, para alcanzar el grado de doctor.

V B
El director.

El aspirante al grado.

A mi madre.

Me gustaría agradecer a todos los miembros del Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada su trato amable, agradable y cortés. Quiero mostrar mi más profundo y sincero agradecimiento y la mayor consideración a los profesores, D. Pascual Jara Martínez y a mi director D. Luis Merino González, no sólo por ayudarme en el plano profesional, estar siempre disponibles y animarme a realizar este trabajo, el cual sin su ayuda no hubiese sido posible, sino también por su amistad y cariño.

También quiero recordar a todos aquellos que en el día a día me han apoyado incondicionalmente, y principalmente a Carmen, mi futura mujer; a Alfredo e Isabel, mi hermano y su esposa; y a María Ángeles, mi tía. También quiero mencionar, aunque ya no se encuentran entre nosotros, a Francisco, mi padre; y muy especialmente a Genoveva, mi madre, que fue quien más deseó la realización de este trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una coálgebra es un K-espacio vectorial C junto con dos aplicaciones lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\epsilon : C \to K$ verificando $(I \otimes \Delta)\Delta(x) = (\Delta \otimes I)\Delta(x)$ y $(I \otimes \epsilon)\Delta(x) = (\epsilon \otimes I)\Delta(x) = x$ para cada $x \in C$. Y un C-comódulo a derecha es un par (M, ω_M) con M un K-espacio vectorial y $\omega_M : M \to M \otimes C$ una aplicación lineal llamada aplicación estructura verificando, $(\omega_M \otimes I)\omega_M(x) = (I \otimes \Delta)\omega_M(x)$ y $(I \otimes \epsilon)\omega_M(x) = x$ para cada $x \in M$, la categoría la denotaremos $\mathcal{M}^C$. Análogamente se define ${}^C\mathcal{M}$.

En una coálgebra C podemos definir el producto Wedge de dos subcoálgebras $A, B \subseteq C$ como

$$\begin{aligned} A \wedge^C B &= Ker(C \to^{\Delta} C \otimes C \to C/A \otimes C/B) \\ &= \Delta^{-1}(C \otimes B + A \otimes C) \\ &= (A^{\perp}B^{\perp})^{\perp} \end{aligned}$$

Una subcoálgebra P de C se dice que es coprima si para dos subcoálgebras A y B de C tales que $P \subseteq A \wedge B$ entonces $P \subseteq A$ o $P \subseteq B$. Las subcoálgebras simples son coprimas y las subcoálgebras coprimas de dimensión finita son las subcoálgebras simples, entonces podemos entender que las subcoálgebras coprimas son la generalización infinito dimensional de las subcoálgebras simples. Por otra parte existe una relación biyectiva entre el conjunto de todas las subcoálgebras de C coprimas $Spec(C)$ y el conjunto de todos los ideales primos cerrados de C^*. Entonces en 2.4 se define por analogía la topología de Zariski en $Spec(C)$, siendo la topología inducida en el conjunto de todas las subcoálgebras simples $Simp(C)$, la topología discreta. Observamos en 2.5 que un morfismo de coálgebras coconmutativas $f : C \to D$ da lugar a una aplicación continua $F : Spec(C) \to Spec(D)$ porque $f(P) \in Spec(D)$ para cada subcoálgebra coprima de C, por desgracia no ocurre lo mismo cuando las subcoálgebras son no coconmutativas. Relacionamos los espacios topológicos $Spec(C)$ y $Spec(C^*)$, la aplicación $G : Spec(C) \to Spec(C^*)$ definida por $G(P) = P^{\perp}$ es continua y abierta; entonces si consideramos la topología inducida en el subconjunto $\overline{Spec}(C^*)$ de $Spec(C^*)$, de los ideales primos y cerrados de C^*; los espacios topológicos $Spec(C)$ y $\overline{Spec}(C^*)$ son homeomorfos (véase 2.6). Por otra parte si consideramos la topología cociente en $Spec(C^*)/R$ para la relación de equivalencia: $PRQ \Leftrightarrow P^{\perp\perp} = Q^{\perp\perp}$; podemos considerar una aplicación continua y biyectiva $\alpha : Spec(C) \to Spec(C^*)/R$, definida por $\alpha(P) = [P^{\perp}]$, pero por desgracia no es abierta, mientras que su inversa es una aplicación abierta pero no continua, $\beta : Spec(C^*)/R \to Spec(C)$, definida por $\beta([P]) = P^{\perp}$. (Véase 2.7).

Una subcategoría densa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ es localizante si el funtor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ tiene un adjunto a derecha $S : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$. En particular para una categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$, una subcategoría plena $\mathcal{C}$ cerrada para subobjetos, sumas directas, cocientes y extensiones es una subcategoría localizante.

En [9], [12], [13] y [20] se estudian las subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ desde distintos enfoques. Nosotros desde [9] desarrollamos otro punto de vista que se sospecha en [20]. Las subcategorías localizantes pueden describirse con comódulos inyectivos, en realidad y salvo equivalencia (entendiendo que dos C-comódulos a derecha inyectivos, son equivalentes, si cada uno de ellos se embebe en un producto directo de copias del otro) en 3.2 se establece una relación biyectiva entre las clase de equivalencia de comódulos a derecha inyectivos y las subcategorías localizantes:

$$\mathcal{T} \longmapsto S(D)\ ; \qquad E \longmapsto \mathcal{T}_E = \{M \in \mathcal{M}^C \mid Hom_{-C}(M,E) = 0\}$$

En cada clase de equivalencia podemos elegir como representante un comódulo inyectivo y quasi-finito $X = \bigoplus_{\beta\in\overline{B}} E(S_\beta)$, donde $\Lambda = \{S_\beta\}_{\beta\in B}$ es un conjunto de representantes de cada una de las clases de isomorfía de comódulos a derecha simples y $\overline{B} \subseteq B$. Y así tenemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las subcategorías localizantes y $\mathcal{P}(\Lambda)$ (véase 3.6):

$$\mathcal{T}_X \longmapsto \{S_\beta\}_{\beta\in\overline{B}}; \qquad \Gamma \in \mathcal{P}(\Lambda) \longmapsto \mathcal{T}_{\bigoplus_{S\in\Gamma} E(S)}$$

Además,

$$\mathcal{T}_X = \{M \in \mathcal{M}^C \mid \text{ los factores de composición de } M \text{ son torsión}\}.$$

Y asociado a X podemos considerar el contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D, C, X, Y, f, g) donde $D = Coend_{-C}(X)$ e $Y = Cohom_{-C}(X, C)$; entonces los funtores $T = -\,\Box_C\, Y$ y $S = -\,\Box_D\, X$ constituyen una localización de $\mathcal{M}^C$ respecto de la subcategoría localizante $\mathcal{T}_X$ y el funtor localización sería $Q = ST$. Y los bicomódulos localizantes (U, ψ), formados por un C-bicomódulo y $\psi : C \to U$ un morfismo de C-bicomódulos, que se estudian en [19], en 3.3 los obtenemos desde el contexto Morita-Takeuchi, siendo $(Y \Box_D X, g)$ un bicomódulo localizante.

Una subcategoría densa es localizante si el funtor T tiene un adjunto a derecha, se dirá que es colocalizante si dicho funtor tiene un adjunto a izquierda, estas subcategorías se estudian en [12], siendo todas ellas también localizantes. Utilizando el contexto Morita-Takeuchi asociado, en 3.4 comprobamos que las subcategorías colocalizantes son fácilmente caracterizables, resultando además que si una subcategoría colocalizante es perfecta (esto es, el funtor adjunto es exacto) entonces $(Y \,\Box_D\, X, g)$ es una localización perfecta a izquierda.

En [9] se establece una relación biunívoca que se concreta en [13] y en 3.5 desarrollamos con detalle, entre subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ y subcoálgebras coidempotentes de C:

$$\mathcal{T} \longmapsto \sum_{M\in\mathcal{T}} cf(M); \qquad A \longmapsto \mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid cf(M) \subseteq A\}$$

Del mismo modo en [20] y más detalladamente en [4] se establece a su vez una correspondencia biyectiva con clases de semejanza de elementos idempotentes de C^*. (Véase 3.9).

Para X un C-comódulo a derecha quasi-finito e inyectivo, $X^C \cong C \leftharpoonup e$ para algún idempotente e y definiendo el contexto Morita-Takeuchi $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e, C, C \leftharpoonup e, e \rightharpoonup C, f, g)$ con $f : e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \cong C \leftharpoonup e \,\Box_C\, e \rightharpoonup C$ y $g : C \rightarrow e \rightharpoonup C \,\Box_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}\, C \leftharpoonup e$ definida por $g(x) = \sum_{(x)} e \rightharpoonup x_{(1)} \otimes x_{(2)} \leftharpoonup e$, enlazamos con las clases de semejanza de idempotentes y además $Ker(g)$ es la subcoálgebra coidempotente. En realidad estos conjuntos biyectivos de los que hablamos y en particular el conjunto de todas las teorías de torsión son retículos isomorfos y más concretamente son álgebras de Boole isomorfas (véase 3.11).

En [11] se tiene una descomposición para coálgebras como suma de componentes link-indescomponibles, usando [7] podemos caracterizar las localizaciones estables (véase 3.8) y en particular se caracterizan las localizaciones estables comprobando si $\sigma_{\mathcal{T}}(C^C)$ es inyectivo como C-comódulo a cualquier lado o suma de componentes link-indescomponibles. Además si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\sigma_e}$ para algún idempotente $e \in C^*$ entonces, $\mathcal{T}$ es estable si y sólo si e es central.

En el caso especial en que tomemos elementos idempotentes centrales, el problema de la localización se simplifica como podemos comprobar en 3.10; y en particular cuando la coálgebra es coconmutativa.

Dado un grafo orientado $\Gamma = (V, F)$ podemos considerar la estructura de coálgebra de caminos sobre el espacio vectorial con base formada por todos los caminos de longitud finita del grafo KQ,

$$\begin{array}{lll} \epsilon(x) = 1, & \Delta(x) = x \otimes x, & \text{si } x \in V \\ \epsilon(q) = 0, & \Delta(q) = \sum_{q=q_1q_2} q_1 \otimes q_2, & \text{si } q \in Q - V \end{array}$$

Una coálgebra de caminos es una coálgebra punteada, pues sus simples se corresponden con los espacios vectoriales 1-dimensionales generados por los vértices del grafo (elementos group-like), $V \cong Simp(KQ)$. Esta coálgebra puede interpretarse como la coálgebra tensorial y a su vez cualquier coálgebra punteada puede identificarse con una subcoálgebra de una de caminos.

En las coálgebras punteadas y en particular en las de caminos, todas las simples son 1-dimensionales, por tanto, es interesante buscar y estudiar como son las coálgebras de caminos coprimas, en particular las subcoálgebras coprimas de una de caminos y con éstas las coálgebras coprimas punteadas. Buscamos propiedades, reducciones para identificarlas y cuando sea posible las caracterizaremos.

El producto Wedge de dos subcoálgebras de una de caminos se estudia en 4.4 y tiene un comportamiento muy concreto, los simples o vértices de la subcoálgebra resultante del producto wedge se calculan como la unión de los vértices $V(A \wedge B) = V(A) \cup V(B)$, es cerrada para la concatenación de caminos de A con caminos de B pero sólo en ese orden, las flechas que comiencen en un vértice de A y terminen en uno de B también pertenecen a $A \wedge B$, y lo mismo podemos decir de la concatenación de un camino de A, una flecha que comience en A y termine en B y un camino de B. Análogamente ocurre para elementos (combinaciones lineales de caminos) que no sean necesariamente caminos.

Una subcoálgebra coidempotente, $A = A \wedge A$, es también coálgebra de caminos, de hecho si $V(A)$ es el conjunto de vértices de A, A es la mayor subcoálgebra de KQ cuyos vértices están en $V(A)$, y existe una correspondencia biunívoca entre subcoálgebras coidempotentes de KQ y subconjuntos de vértices, siendo A la coálgebra de caminos asociada al grafo $(V(A), \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A)\})$ (ver 183).

En 4.3 se comprueba que un grafo es conexo si y sólo si la coálgebra de caminos asociada es indescomponible. Las coálgebras de caminos coprimas son indescomponibles, su grafo en consecuencia es conexo, de hecho se pueden caracterizar en función del grafo por el teorema 189 como sigue: la coálgebra de caminos KQ es coprima si y sólo si Γ es un grafo fuertemente conexo; esto es, dados dos vértices cualesquiera $x, y \in V$ existen caminos orientados del grafo que parte de x y terminan en y, y viceversa. Así determinar si una coálgebra de caminos es coprima se reduce al estudio de su grafo en donde buscamos una propiedad que podemos comprobar de forma intuitiva.

Sin embargo el problema resulta más complicado cuando consideramos una subcoálgebra A de KQ cualquiera y en particular cuando ésta no tenga una base compuesta sólo por caminos. La dificultad reside en aquellos elementos de A que son combinaciones linealmente independientes de caminos con tramos iniciales y finales comunes, estos elementos presentan la particularidad de estar en la coálgebra sin que esto implique que los caminos p_i que aparecen en el elemento tengan que estar en la coálgebra. Por desgracia nos encontramos con algunas subcoálgebras coprimas de KQ en las condiciones expuestas (ver ejemplo 201). Esta dificultad impide encontrar una propiedad basada en caminos del estilo y tan sencilla como la que se encuentra para coálgebras de caminos. Encontramos fuertes propiedades necesarias para que la subcoálgebra sea coprima, (ver 188 y 4.10), también bajo ciertas condiciones, como ser cerrada para la concatenación, se puede caracterizar usando propiedades de caminos relativamente fáciles de manejar (ver 209).

En general podemos reducir el estudio de subcoálgebras coprimas de una de caminos, a aquellas que son subcoálgebras de una de caminos asociada a un grafo con sólo dos vértices (o coálgebras con dos simples), para ello utilizamos elementos idempotentes, que como estudiamos en otras secciones están muy vinculados a la localización y a subconjuntos de simples (vértices en coálgebras de caminos). En realidad al estudiar la localización en coálgebras de caminos observamos que los idempotentes salvo semejanza son de la forma $f_X : KQ \to K$, con $f_X(x) = 1$ para cada $x \in X$ y $f_X(p) = 0$ para cada $p \in Q - X$ donde $X \subseteq V$ es un subconjunto de vértices. Tenemos la biyección entre estos idempotentes, subconjuntos de vértices, subcoálgebras coidempotentes y las localizaciones. La localización de una coálgebra de caminos salvo equivalencia Morita son de la forma $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$ y las localizaciones también son coálgebras de caminos (ver 198), de hecho son simplificaciones de KQ que resultan de ir eliminando aquellos vértices que deseemos, sin perder los caminos que conectan los vértices que no simplifiquemos. Para el estudio de coprimas en concreto resulta especialmente útil, pues para un idempotente $e \in C^*$, si $P \subseteq C$ es coprima entonces $e \rightharpoonup P \leftharpoonup e$ es coprima en la localización $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ (ver 3.12).

Las subcategorías localizantes tanto en coálgebras de caminos como en coálgebras punteadas están en relación biyectiva con los subconjuntos de vértices y como podemos ver en 5.9, para comprobar si un KQ-comódulo es torsión bastará con estudiar $V(cf(M))$, esto es, los vértices o simples del comódulo. En definitiva, cualquier localización en la categoría $\mathcal{M}^{KQ}$ se reduce a observar los vértices que son torsión. Para un subconjunto de vértices $Y \subseteq Q_0$ tenemos el C-comódulo a derecha inyectivo $X = \bigoplus_{x \in Y} E(S_x)$ con S_x el espacio vectorial generado por el vértice x, tenemos el idempotente f_Y definido por $f_Y(x) = 1$ para cada $x \in Y$ y 0 en el resto de caminos, con $X = KQ \leftharpoonup f_Y \cong Cohom_{C-}(f_Y \rightharpoonup KQ, KQ) \cong K\{q \in Q \mid s(q) \in Y\}$, la coálgebra de caminos localización $f_Y \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_Y \cong Coend_{-C}(KQ \leftharpoonup f_Y)$, y la subcategoría localizante será

$$\mathcal{T}_Y = \{M \in \mathcal{M}^{KQ} \mid V(cf(M)) \cap Y = \emptyset\}.$$

y en conclusión, todo depende del subconjunto de vértices Y que elijamos.

1 Coálgebras y Comódulos.

En este primer capítulo recopilamos y recordamos todos los conceptos y propiedades preliminares sobre coálgebras y comódulos, también fijamos las notaciones. Incluimos resultados básicos de coálgebras y comódulos así como también algunos otros que serán necesarios en otros capítulos. (Para más detalle ver [17] y [1]).

1.1 Coálgebras.

Una **coálgebra sobre un cuerpo** K es una terna (C, Δ, ϵ), donde C es un K-espacio vectorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ es la aplicación lineal llamada **comultiplicación** y $\epsilon : C \to K$ es la aplicación lineal llamada **counidad**; verificando la propiedad coasociativa y de la counidad:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes I"] \\
C \otimes C \arrow[r, "I \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "I \otimes \epsilon"'] \arrow[dr, "\epsilon \otimes I"] & \\
C \otimes K & & K \otimes C \\
 & C \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Si escribimos $\Delta = \Delta^1$, podemos definir inductivamente $\Delta^{n+1} : C \to C^{n+2}$ como $\Delta^{n+1} = (\Delta \otimes I^n) \circ \Delta^n$. Cuando haya posibilidad de confusión denotaremos por $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ a la coálgebra.

Lema 1 *Sea* (C, Δ, ϵ) *una coálgebra, entonces*

$$C \otimes C = \Delta C \oplus Ker(I \otimes \epsilon) = \Delta C \oplus Ker(\epsilon \otimes I).$$

$\square$

Sigma Notación.

Sea (C, Δ, ϵ) una coálgebra. Sea $c \in C$, entonces $\Delta(c) = \sum_i c_{1i} \otimes c_{2i}$ con $c_{ji} \in C$. La sigma notación consistirá en escribir

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \Delta(c),$$

es decir, suprimir el índice i sin olvidar que los $c_{(1)}$ y $c_{(2)}$ representan los distintos c_{ji}. Análogamente, usando la coasociatividad,

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = (\Delta \otimes I)\Delta(c),$$

y generalizando la notación escribiremos:

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes ... \otimes c_{(n)} = \Delta^{(n-1)}(c).$$

Morfismos de coálgebras.

Dadas dos coálgebras C y D, una aplicación lineal $g : C \to D$, será un **morfismo de coálgebras** si los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"] & D \otimes D \\ C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "\Delta_D"'] \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

es decir si utilizamos la Sigma notación estos diagramas conmutativos son equivalentes a:

$$\Delta_D(g(c)) = \sum_{(c)} g(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)}),$$

y

$$\epsilon_D(g(c)) = \epsilon_C(c)$$

con $c \in C$.

Lema 2 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces*

$$Ker(f \otimes f) = C \otimes Ker(f) + Ker(f) \otimes C.$$

□

Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces $Ker(f \otimes f) \subseteq C \otimes C$, y utilizando el resultado anterior tenemos:

Corolario 3 $Ker(f \otimes f) = [Ker(f \otimes f) \cap \Delta C] \oplus [Ker(f \otimes f) \cap Ker(I \otimes \epsilon)]$.

□

Coconmutatividad.

Una coálgebra (C, Δ, ϵ) se dice que es **coconmutativa** si el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dd, "T"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\ & C \otimes C \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir,

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum_{(c)} c_{(2)} \otimes c_{(1)}.$$

1.2 Subcoálgebras y coideales.

Dada una coálgebra (C, Δ, ϵ), se dice que un subespacio vectorial V de C es una **subcoálgebra** si $\Delta(V) \subseteq V \otimes V$, y en tal caso $(V, \Delta\mid_V, \epsilon\mid_V)$ es una coálgebra. Además, la aplicación inclusión $i : V \to C$ es un morfismo de coálgebras. Y si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras, entonces $Im(f)$ es una subcoálgebra de D.

Por otra parte se dice que:

1. V es **coideal** si verifica:
   (a) $\Delta(V) \subseteq V \otimes C + C \otimes V$.
   (b) $\epsilon(V) = 0$.

2. V es un **coideal a derecha** si $\Delta(V) \subseteq V \otimes C$.
3. V es un **coideal a izquierda** si $\Delta(V) \subseteq C \otimes V$.

Si V es un coideal, éste no tiene que ser coideal a derecha o coideal a izquierda. Un coideal a izquierda y derecha es una subcoálgebra y no un coideal, salvo que $V = \{0\}$, porque $(V \otimes C) \cap (C \otimes V) = V \otimes V$.

Proposición 4 *[17] Sea C una coálgebra, V un coideal y $\pi : C \to E = C/V$ la aplicación lineal sobreyectiva natural. Entonces:*

1. *E tiene una única estructura de coálgebra tal que π es un morfismo de coálgebras.*
2. *Si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras, entonces $Ker(f)$ es un coideal de C.*
3. *Si $V \subseteq Ker(f)$ entonces existe un único morfismo de coálgebras que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D \\ & E \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

□

1.3 Dualidad entre álgebras y coálgebras.

Si V es un espacio vectorial y $V^* = Hom_K(V, K)$, para $f \in V^*$, $v \in V$, denotaremos indistintamente $< f, v >= f(v)$. Recordemos que $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ definida por $< \rho(f \otimes g), v \otimes w >=< f, v >< g, w >$ es una aplicación lineal inyectiva.

El álgebra dual de una coálgebra.

Dada una coálgebra (C, Δ, ϵ) entonces (C^*, m, u) con producto $m : C^* \otimes C^* \to C^*$ definido por

$$m(a \otimes b) = (a \otimes b)\Delta = (a \otimes b) \circ \Delta$$

para cada $a, b \in C^*$ o equivalentemente

$$m = \Delta^* \circ \rho$$

aunque generalmente denotaremos $m(a \otimes b) = ab$ y cuya unidad es $u = \epsilon^*$, es un álgebra.

Sea V es un espacio vectorial y sea S es un subespacio vectorial de V. Por $S^{\perp} \subseteq V^*$ entenderemos $\{x^* \in V^* \mid < x^*, S >= 0\}$ y lo llamaremos **ortogonal de** S.

Sea $T \subseteq V^*$, $T^{\perp} \subseteq V$ será el conjunto $\{v \in V \mid < T, v >= 0\}$ y lo llamaremos **ortogonal de** T.

Diremos que un ideal, subálgebra o subespacio $T \subseteq C^*$, es **cerrado**, si $T^{\perp\perp} = T$.

Proposición 5 *[17] Sea C una coálgebra,*

1. *Si $D \subseteq C$ es una subcoálgebra, entonces $D^{\perp} \subseteq C^*$ es un ideal de C^*.*
2. *Si $I \subseteq C^*$ es un ideal , entonces $I^{\perp} \subseteq C$ es una subcoálgebra.*
3. *$D \subseteq C$ es una subcoálgebra si y sólo si $D^{\perp} \subseteq C^*$ es un ideal de C^*. En esta situación $C^*/D^{\perp} \cong D^*$ como álgebras.*

$\square$

Proposición 6 *[17] Sea C una coálgebra,*

1. *Si $J \subseteq C$ coideal a derecha (izquierda), entonces $J^{\perp}$ es un ideal a derecha (izquierda) de C^*.*
2. *Si $I \subseteq C^*$ ideal a derecha (izquierda) entonces $I^{\perp}$ es coideal a derecha (izquierda) de C.*
3. *$V \subseteq C$ es coideal a derecha (izquierda) si y sólo si $V^{\perp}$ es ideal a derecha (izquierda) de C^*.*

$\square$

Proposición 7 *[17] Sea C una coálgebra,*

1. *Si $J \subseteq C$ es un coideal entonces $J^{\perp}$ es una subálgebra de C^*.*
2. *Si I es una subálgebra de C^*, entonces $I^{\perp}$ es un coideal en C.*
3. *$V \subseteq C$ es un coideal si y sólo si $V^{\perp}$ es una subálgebra de C^*.*

$\square$

Proposición 8 *Sea C una coálgebra, entonces C es coconmutativa si y sólo si C^* es conmutativa.*

□

Si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras, $f^* : D^* \to C^*$ es un morfismo de álgebras. Al revés sólo podemos asegurar que ocurre si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras con A y B finito dimensionales.

La coálgebra dual de un álgebra

Dada una K-álgebra A, en general su dual no es una coálgebra, sólo podemos asegurar que A^* es una coálgebra si (A, m, u) es finita dimensional, en cuyo caso (A^*, Δ, ϵ) es un coálgebra donde $\Delta = \rho^{-1} \circ m^*$ y $\epsilon = u^*$, siendo $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ el isomorfismo natural.

Si A no es finita dimensional, entonces podemos considerar A_m el semigrupo subyacente al álgebra A con su multiplicación, KA_m es una coálgebra (véase 5.3) y $(KA_m)^*$ es su álgebra dual que denotaremos $M_K(A_m)$. $f \in M_K(A_m)$ diremos que es una **función representativa de** A_m si $dim(KA_m f) < \infty$. A la subálgebra de $M_K(A_m)$ formada por todas las funciones representativas de A_m la denotaremos por $R_K(A_m)$. $R_K(A_m) \cap A^*$ tiene estructura de coálgebra. (Veáse [1])

Sea A una K-álgebra, definiremos la **K-coálgebra dual de** A por:

$$A^\circ = R_K(A_m) \cap A^*.$$

Si A es finita dimensional, entonces $A^* = A^\circ$.

Proposición 9 *[1] Sea A un álgebra y A° su coálgebra dual, entonces:*

1. *Si I es un ideal de A, entonces $I^\perp \cap A^\circ$ es una subcoálgebra de A°.*

2. *Si D es una subcoálgebra de A°, entonces $D^\perp$ es un ideal de A.*

□

Proposición 10 *[1] Sea A un álgebra y A° su coálgebra dual, entonces:*

1. *Si B es una subálgebra de A, entonces $B^\perp \cap A^\circ$ es un coideal de A°.*

2. *Si D es un coideal de A°, entonces $D^\perp$ es una subálgebra de A.*

□

1.4 Acción de C^*-módulo sobre C.

Sea C una coálgebra. Denotaremos por $\rightharpoonup$ (resp. $\leftharpoonup$) a la acción de C^*-módulo a izquierda (resp. a derecha) sobre C. Para $c \in C$ y $f \in C^*$, si $\Delta c = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, la acción vendrá dada por:

$$f \rightharpoonup c = \sum_{(c)} f(c_{(2)})c_{(1)},$$

$$c \leftharpoonup f = \sum_{(c)} f(c_{(1)})c_{(2)}.$$

Proposición 11 *Sea C una coálgebra, $f, g \in C^*$ y $x \in C$ entonces:*

1. $\Delta_C(f \rightharpoonup x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes (f \rightharpoonup x_{(2)})$.
2. $\Delta_C(x \leftharpoonup g) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup g) \otimes x_{(2)}$.
3. $\Delta_C(f \rightharpoonup x \leftharpoonup g) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup g) \otimes (f \rightharpoonup x_{(2)})$.

Demostración.

1. En efecto,

$$\Delta_C(f \rightharpoonup x) = \Delta_C(\sum_{(x)} f(x_{(2)})x_{(1)}) = \sum_{(x)} f(x_{(2)})(\sum_{(x_{(1)})} x_{(11)} \otimes x_{(12)})$$

pero por la coasociatividad de la comultiplicación en C sabemos que $(I \otimes \Delta_C)\Delta_C = (\Delta_C \otimes I)\Delta_C$, y como

$$(I \otimes I \otimes f)((\Delta_C \otimes I)\Delta_C(x) = \Delta_C(f \rightharpoonup x)$$

entonces

$$\Delta_C(f \rightharpoonup x) = (I \otimes I \otimes f)((I \otimes \Delta_C)\Delta_C)(x) =$$

$$= \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes (\sum_{(x_{(2)})} x_{(21)} f(x_{(22)})) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes (f \rightharpoonup x_{(2)}).$$

2. Análogo al caso anterior utilizando la coasociatividad.

3. Utilizando los dos apartados anteriores,

$$\Delta_C(f \rightharpoonup x \leftharpoonup g) = \Delta_C((f \rightharpoonup x) \leftharpoonup g) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup g) \otimes (f \rightharpoonup x_{(2)}).$$

$\square$

Lema 12 *Sea $f : C \to D$ un morfismo entre coálgebras, y sea $A \subseteq C$ una subcoálgebra. Para $g \in D^*$, si $g(f(A)) = 0$ entonces $g(D^* \rightharpoonup f(A)) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in D^* f(A)$, $x = \sum_i (\sigma_i f(a_i))$ con $\sigma_i \in D^*$ y $a_i \in A$, si $\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \in A \otimes A$, como f es un morfismo de coálgebras, $\Delta(f(a)) = \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \otimes f(a_{(2)})$, luego $\sigma \rightharpoonup f(a) = \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \sigma(f(a_{(2)}))$. Pero

$$g(\sigma \rightharpoonup f(a)) = g(\sum_{(a)} f(a_{(1)}) \sigma f(a_{(2)})) = \sum_{(a)} g(f(a_{(1)})) \sigma(f(a_{(2)})),$$

luego como $g(f(A)) = 0$ entonces $g(\sigma \rightharpoonup f(a)) = 0$ para cada $\sigma \in D^*$ y $a \in A$, por tanto $g(x) = 0$. □

Proposición 13 *Sean $x \in C$, $e^2 = e \in C^*$ y $\alpha, \beta \in C^*$, entonces:*

1. $(\alpha\beta)(x) = ((\alpha \otimes \beta) \circ \Delta)(x) = \alpha(\beta \rightharpoonup x) = \beta(x \leftharpoonup \alpha)$.
2. $e(e \rightharpoonup x) = e(x)$.
3. $\alpha(x) = \epsilon(\alpha \rightharpoonup x) = \epsilon(x \leftharpoonup \alpha)$.

DEMOSTRACIÓN.

1. En efecto, si $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$,

$$(\alpha\beta)(x) = \sum_{(x)} \alpha(x_{(1)}) \beta(x_{(2)}) = \alpha(\sum_{(x)} x_{(1)} \beta(x_{(2)})) = \alpha(\beta \rightharpoonup x)$$

y análogamente

$$(\alpha\beta)(x) = \sum_{(x)} \alpha(x_{(1)}) \beta(x_{(2)}) = \beta(\sum_{(x)} \alpha(x_{(1)}) x_{(2)}) = \beta(x \leftharpoonup \alpha).$$

2. Evidente.

3. En efecto, si $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$,

$$\alpha(x) = \alpha(\sum_{(x)} x_{(1)} \epsilon(x_{(2)})) = \sum_{(x)} \alpha(x_{(1)}) \epsilon(x_{(2)})) = \epsilon \sum_{(x)} \alpha(x_{(1)}) x_{(2)}) = \epsilon(x \leftharpoonup \alpha)$$

análogamente sabiendo que $x = \sum_{(x)} \epsilon(x_{(1)}) x_{(2)}$ se obtiene la otra expresión.

□

Corolario 14 *Sea $A \leq C$ una subcoálgebra, entonces $A^{\perp} = Ann({}_{C^*}A)$.*

Demostración. Sea $\beta \in Ann({}_{C^*}A)$, entonces para cada $x \in A$, $\beta(x) = \epsilon(\beta \rightharpoonup x) = \epsilon(0) = 0$ y por tanto $\beta \in A^{\perp}$.

Sea $\alpha \in A^{\perp}$, entonces para $\gamma \in C^*$,

$$\gamma(\alpha \rightharpoonup x) = (\gamma\alpha)(x) = \alpha(x \leftharpoonup \gamma) = 0$$

luego $\alpha \rightharpoonup x = 0$ y por tanto $\alpha \in Ann({}_{C^*}A)$.

O bien se puede demostrar aplicando directamente que $A^{\perp}$ es un ideal bilátero. □

Corolario 15 *$Ann({}_{C^*}A) = A^{\perp} = Ann(A_{C^*})$.*

□

1.5 Indescomponibles, simples e irreducibles.

Una coálgebra C diremos que es **indescomponible** si no existen $A, B \subseteq C$ subcoálgebras tales que $C = A \oplus B$; C se dice que es **irreducible** si cualesquiera dos subcoálgebras no nulas suyas tienen intersección no nula; C se dice que es **simple** si no tiene subcoálgebras propias no nulas; y C se dice que es **punteada** si todas las subcoálgebras simples de C son 1-dimensionales.

Denotamos por $Simp(C)$, al conjunto de todas las subcoálgebras simples de C. Y para $S \subseteq C$ una subcoálgebra simple, denotaremos C_S a la mayor subcoálgebra de C tal que $Simp(C_S) = \{S\}$, C_S es irreducible. Análogamente para $\Gamma \subseteq Simp(C)$ denotaremos por C_Γ a la mayor subcoálgebra de C tal que $Simp(C_\Gamma) = \Gamma$.

Un elemento $c \in C$ se dice que es un elemento **group-like** si $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\epsilon(c) = 1$. Al conjunto de todos los elementos group-like de C lo denotaremos por $G(C)$.

Proposición 16 *[17] Sea C una coálgebra.*

1. *C es irreducible si y sólo si todas sus subcoálgebras no nulas son irreducibles.*
2. *Sean $D, E \subseteq C$ subcoálgebras simples, entonces $D \cap E = \{0\}$ o $D = E$.*
3. *Cualquier subcoálgebra simple es finita dimensional.*
4. *Cualquier subcoálgebra contiene una subcoálgebra simple.*
5. *Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces cualquier subcoálgebra coconmutativa es punteada.*

6. *C es irreducible si y sólo si C contiene una única subcoálgebra simple S. Además S está dentro de cualquier subcoálgebra de C.*

7. *$G(C)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de todas las subcoálgebras de C 1-dimensionales.*

8. *Una coálgebra punteada es irreducible si y sólo si $G(C)$ tiene exactamente un elemento.*

□

Proposición 17 *[1][17]*
Sea $C = \sum C_\alpha$ con C_α subcoálgebra. Entonces:

1. *Cualquier subcoálgebra simple de C está contenida en uno de los C_α.*

2. *C es irreducible si sólo si cada C_α es irreducible y $\cap C_\alpha \neq 0$.*

3. *C es punteada si sólo si cada C_α es punteada.*

□

Una subcoálgebra D de C es una **componente irreducible** si es una subcoálgebra máximal irreducible. D se dice que es **componente irreducible punteada** si es una componente irreducible cuyas únicas subcoálgebras simples son 1-dimensionales. (Es decir, D es punteada).

Teorema 18 *[1][17]*
Sea C una coálgebra.

1. *Cualquier subcoálgebra E de C contiene una componente irreducible.*

2. *Una suma de componentes irreducibles distintas es directa.*

3. *Si C es coconmutativa, entonces*

   (a) *C es la suma directa de sus componentes irreducibles.*

   (b) *Si $\Gamma \subseteq Simp(C)$, entonces*
$$C_\Gamma = \bigoplus_{S \in \Gamma} C_S.$$

□

Corolario 19 *[1][17] Sea C una coálgebra,*

1. *La suma de subcoálgebras simples distintas es directa.*

2. *C es irreducible (resp. irreducible punteada) si y sólo si cualquier elemento de C está contenido en una subcoálgebra irreducible (resp. irreducible punteada).*

$\square$

Corolario 20 *[17]*

Una coálgebra coconmutativa punteada es la suma directa de sus componentes irreducibles punteadas.

$\square$

Veamos la relación con los morfismos de coálgebras.

Teorema 21 *[1][17]*

Sea C una coálgebra irreducible con S su única subcoálgebra simple y sea $f : C \rightarrow E$ un morfismo sobreyectivo de coálgebras.

1. *Si F es una subcoálgebra no nula de E, entonces $F \cap f(S) \neq 0$.*
2. *$f(S)$ contiene todas las subcoálgebras simples de E.*
3. *E es irreducible si y sólo si $f(S)$ es irreducible.*
4. *Si S es coconmutativo entonces E es irreducible y $f(S)$ es su única subcoálgebra simple.*

$\square$

Corolario 22 *[17]*

La imagen por un morfismo de una coálgebra irreducible punteada es irreducible punteada.

$\square$

Analizamos a continuación el comportamiento del producto tensor con irreducibles y simples.

Teorema 23 *[1][17]*

Sean C y E dos coálgebras irreducibles, y sean S y R sus respectivas únicas subcoálgebras simples.

1. *Si X es subcoálgebra no nula de $C \otimes E$ entonces $X \cap (S \otimes R) \neq 0$.*
2. *$S \otimes R$ contiene a cualquier subcoálgebra simple de $C \otimes E$.*
3. *Si R es 1-dimensional (es decir, punteada) entonces $C \otimes E$ es irreducible y su única subcoálgebra simple es $S \otimes R$.*

$\square$

Corolario 24 *[17]*

Si S^* es una K-álgebra simple y central, entonces $C \otimes E$ es irreducible y su única subcoálgebra simple es $S \otimes R$.

$\square$

Lema 25 *S es una coálgebra simple si y sólo si S^* es un álgebra simple.*

$\square$

1.6 Comódulos y bicomódulos.

Sea C una coálgebra sobre un cuerpo K, definimos un C-comódulo a derecha dualizando el concepto de A-módulo a derecha para un álgebra A. Un C**-comódulo a derecha** (M, ω_M), es un espacio vectorial M, junto con una **aplicación estructura**:

$$\omega_M : M \to M \otimes C$$

tal que, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\omega_M"] \arrow[d, "\omega_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "I \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\omega_M \otimes I"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\omega_M"] \arrow[dr] & M \otimes C \arrow[d, "I \otimes \epsilon"] \\ & M \otimes K \end{tikzcd}$$

Análogamente podemos definir C**-comódulo a izquierda** (M, ω_M), es un espacio vectorial M, junto con una **aplicación estructura**:

$$\omega_M : M \to C \otimes M.$$

Dadas C y D dos coálgebras un (C, D)**-bicomódulo**, será un espacio vectorial que es simultáneamente un C-comódulo a izquierda y un D-comódulo a derecha, verificando:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\omega_C"] \arrow[d, "\omega_D"'] & C \otimes M \arrow[d, "I \otimes \omega_D"] \\ M \otimes D \arrow[r, "\omega_C \otimes I"'] & C \otimes M \otimes D \end{tikzcd}$$

donde ω_C y ω_D son las respectivas aplicaciones estructura. Es decir,

$$(I \otimes \omega_D) \circ \omega_C = (\omega_C \otimes I) \circ \omega_D$$

esto es, ω_C es morfismo de D-comódulos a derecha y ω_D es morfismo de C-comódulos a izquierda. A un (C, C)-bicomódulo lo llamaremos simplemente C-bicomódulo.

Sigma notación.

Podemos extender la notación que se utiliza para coálgebras, y para un comódulo (M, ω_M) y un elemento $m \in M$, escribiremos:

$$\omega_M(m) = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C$$

donde $m_{(0)} \in M$ y $m_{(1)} \in C$. Con esta notación las propiedades de la aplicación estructura se expresarían:

1. $$(\omega_M \otimes I)\omega_M(m) = (I \otimes \Delta)\omega_M(m) = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}.$$

2. $$m = \sum_{(m)} m_{(0)} \epsilon(m_{(1)}).$$

Análogamente se define la Sigma notación para un C-comódulo a izquierda:

$$\omega_M(m) = \sum_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M$$

donde $m_{(0)} \in M$ y $m_{(-1)} \in C$.

Subcomódulos.

Dado un C-comódulo a derecha (M, ω_M), cuando un K-subespacio vectorial suyo $N \subseteq M$ satisface la condición

$$\omega_M(N) \subset N \otimes C$$

entonces el par (N, ω_N) vuelve a ser un C-comódulo a derecha cuya aplicación estructura ω_N, es la restricción de ω_M a N y se llama **C-subcomódulo a derecha de** M. En particular obsérvese que los subcomódulos a derecha de C son los coideales a derecha.

Morfismos de comódulos.

Sean M y N dos C-comódulos a derecha, una aplicación lineal $f : M \to N$ es un **morfismo de C-comódulos a derecha** si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega_M"'] & N \arrow[d, "\omega_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes I"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Si $f : M \to N$ es un morfismo de C-comódulos a derecha, entonces $Ker(f)$ y $Im(f)$ son C-subcomódulos a derecha de M y N respectivamente. Si $N \subseteq M$ es un C-subcomódulo a derecha, M/N tiene una única estructura de C-comódulo a derecha que hace a la proyección un morfismo de C-comódulos a derecha.

La categoría consistente en los C-comódulos a derecha y sus morfismos se llama **categoría de C-comódulos a derecha** y la denotaremos por $\mathcal{M}^C$. Análogamente podemos definir la categoría de C-comódulos a izquierda y se denotará ${}^C\mathcal{M}$. Dados $M, N \in \mathcal{M}^C$, denotaremos por $Hom_{-C}(M, N)$ al conjunto de todos los morfismos de C-comódulos a derecha de M en N. Análogamente para $M, N \in {}^C\mathcal{M}$ escribiremos $Hom_{C-}(M, N)$.

Dadas C y D dos coálgebras y $f : C \to D$ un morfimo de coálgebras, entonces cualquier C-comódulo a derecha M, puede ser visto como D-comódulo a derecha con la aplicación estructura:

$$(I \otimes f) \circ \omega_M : M \to M \otimes C \to M \otimes D$$

al cual se le denota por M_f.

También se puede definir el funtor $(-)_f : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D$.

Estructura de C^*-módulo a izquierda de $M \in \mathcal{M}^C$.

Obsérvese que si M es un C-comódulo a derecha entonces tiene también estructura de C^*-módulo a izquierda, esto es, si $f \in C^*$ y $m \in M$, entonces:

$$f \rightharpoonup m = \sum_{(m)} f(m_{(1)})m_{(0)}.$$

De hecho dos C-comódulos a derecha son isomorfos si lo sólo si lo son como C^*-módulos a izquierda.

Análogamente dado un C-comódulo a izquierda se define una estructura de C^*-módulo a derecha y al producto lo denotaremos por $\leftharpoonup$.

Dados $M, N \in \mathcal{M}^C$ entonces

$$Hom_{-C}(M,N) = Hom_{C^*}(M,N).$$

Módulos racionales.

Sea C una coálgebra y M un C^*-módulo a izquierda, definimos

$$\begin{array}{llll} \rho: & M \longrightarrow Hom(C^*, M) & & \\ & m \longmapsto \rho(m): & C^* \longrightarrow M & \\ & & c^* \longmapsto c^* \rightharpoonup m & \end{array}$$

Observamos los siguientes embebimientos:

$$\begin{array}{llll} M \otimes C \longrightarrow M \otimes C^{**} \xrightarrow{f} Hom(C^*, M) & & & \\ m \otimes c \longmapsto m \otimes c^{**} \longmapsto f_{m \otimes c^{**}}: & C^* \longrightarrow M & & \\ & c^* \longmapsto f_{m\otimes c^{**}}(c^*) = < c^{**}, c^* > m & & \end{array}$$

Diremos que M es **racional** si $\rho(M) \subseteq M \otimes C$.

Proposición 26 *[17] Sea M un C^*-módulo a izquierda racional, entonces (M, ρ) es un C-comódulo a derecha.*

$\square$

En particular, existe una relación biyectiva entre C-comódulos a derecha y C^*-módulos a izquierda racionales.

Proposición 27 *Sea C una coálgebra,*

1. *C es un C^*-módulo a izquierda (resp. a derecha) racional bajo $\rightharpoonup$ (resp. $\leftharpoonup$).*
2. *$\epsilon \rightharpoonup x = x \leftharpoonup \epsilon = x$ para cada $x \in C$.*

3. *$C^* \rightharpoonup c$ (resp. $c \leftharpoonup C^*$) es el submódulo a izquierda (resp. a derecha) racional y finito dimensional generado por $c \in C$.*

4. *$f \rightharpoonup C$ (resp. $C \leftharpoonup f$) es un coideal a izquierda (resp. a derecha) de C para cada $f \in C^*$.*

$\square$

1.7 Subcomódulo generado por un conjunto de elementos.

Sean X e Y dos K-espacios vectoriales, sean $\{\xi_i\}_{i\in I}$ y $\{\eta_j\}_{j\in J}$ bases respectivas de X e Y. Entonces cualquier elemento $u \in X \otimes Y$ se puede escribir:

$$u = \sum_{j\in J} x_j \otimes \eta_j = \sum_{i\in I} \xi_i \otimes y_i,$$

y los elementos $x_j \in X$, $y_i \in Y$ están únicamente determinados por u. Si ahora consideramos X', Y' dos subespacios vectoriales de X e Y respectivamente, de forma que $u \in X' \otimes Y'$, entonces todos los x_j deben de pertenecer a X' y todos los y_i a Y'.

Sea $U = \{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un subconjunto cualquiera de $X \otimes Y$, con subíndices en el conjunto de índices Λ. Para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$u_\lambda = \sum_{j\in J} x_{\lambda j} \otimes \eta_j = \sum_{i\in I} \xi_i \otimes y_{\lambda i},$$

con $x_{\lambda j} \in X$ y $y_{\lambda i} \in Y$. Definimos **la expansión a izquierda de** U, y escribiremos $\mathcal{L}(U)$, como el subespacio vectorial de X generado por todos los $x_{\lambda j}$; análogamente definimos **la expansión a derecha de** U, y escribiremos $\mathcal{R}(U)$, como el subespacio vectorial generado por todos los $y_{\lambda i}$. De donde se sigue:

$$\mathcal{L}(U) = \bigcap_{X'\leq X} \{X' \mid U \subseteq X' \otimes Y\}, \qquad \mathcal{R}(U) = \bigcap_{Y'\leq Y} \{Y' \mid U \subseteq X \otimes Y'\}.$$

$\mathcal{L}(U)$ y $\mathcal{R}(U)$ son independientes de las bases de X e Y elegidas y además,

$$U \leq \mathcal{L}(U) \otimes \mathcal{R}(U).$$

Proposición 28 *[9] En las mismas condiciones del apartado anterior, si $U = \{u\}$ tiene un único elemento y*

$$u = \sum_{h=1}^{n} x_h \otimes y_h,$$

con $x_i \in X$ y $y_i \in Y$, entonces si n es longitud minimal entre todas las expresiones posibles de u, $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base de $\mathcal{L}(U)$ y $\{y_1, ..., y_n\}$ es base de $\mathcal{R}(U)$ y por tanto $dim(\mathcal{L}(U)) = dim(\mathcal{R}(U)) = n$.

Sea M un C-comódulo a derecha y sea $S \subseteq M$ un subconjunto de M, entonces el menor subcomódulo de M que contiene a S es el **subcomódulo de M generado por S.**

Lema 29 *[9] Sea M un C-comódulo a derecha, entonces:*

1. *Si N es un subcomódulo a derecha de M, $\mathcal{L}(\omega_M(N)) = N$.*
2. *Si S es un subconjunto de M, entonces $\mathcal{L}(\omega_M(S))$ es el subcomódulo de M generado por S. En particular para un elemento $m \in M$, $\mathcal{L}(\omega_M(m))$ es el subcomódulo de M generado por m.*

□

Sea M un C-comódulo a derecha, entonces M es localmente finito, para cualquier $m \in M$, el subcomódulo generado por m, es de dimensión finita.

Corolario 30 *Sea C una coálgebra, sea $x \in C$, entonces la subcoálgebra generada por x, C_x es de dimensión finita.*

□

Corolario 31 *Sea S una coálgebra simple, entonces S es finito dimensional.*

Demostración. Sea $c \in S$, $c \neq 0$, entonces la subcoálgebra de S generada por c es finita dimensional y debe de ser S. □

Coálgebras finitas.

Vamos a analizar en esta sección el caso finito, consideraremos C una coálgebra de dimensión finita con $B = \{x_1, ..., x_n\}$ una K-base de C de forma que $\epsilon(x_1) = 1$ y $\epsilon(x_2) = ... = \epsilon(x_n) = 0$, si no es así tomamos combinaciones lineales para que ocurra. Una K-base de $C \otimes C$ será $\{x_i \otimes x_j \mid i, j = 1, 2, ..., n\}$, entonces escribiremos

$$\Delta(x_k) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{k} x_i \otimes x_j,$$

y por tanto,

$$x_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^{n} x_i \epsilon(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}^{k} x_i,$$

de donde $a^k_{i,1} = 0$ para cada $i \neq k$ y $a^k_{k,1} = 1$. De igual forma $x_k = \sum_{j=1}^n a^k_{1,j} x_j$, en consecuencia $a^k_{1,j} = 0$ para cada $j \neq k$ y $a^k_{1,k} = 1$. Definiremos las matrices $A^k = (a^k_{i,j})$, es claro que la estructura de C queda determinada por completo por estas n matrices: $A^1, ..., A^n$. La primera fila y la primera columna de cada A^k es de la forma $(0, ..., 1, ..., 0)$ todo ceros excepto un 1 en la posición k-ésima. Además C es coconmutativa si y sólo si $A^1, ..., A^n$ son simétricas.

Sea un elemento $c \in C$, de coordenadas respecto de la base B,

$$c = (c_1, ..., c_n)_B, \qquad c = \sum_{k=1}^n c_k x_k$$

entonces

$$\Delta(c) = \sum_{k=1}^n c_k \Delta(x_k) = \sum_{k=1}^n c_k (\sum_{i,j=1}^n a^k_{i,j} x_i \otimes x_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i,k=1}^n a^k_{i,j} c_k x_i) \otimes x_j = \sum_{j=1}^n d_j \otimes x_j$$

donde

$$d_j = \sum_{i,k=1}^n a^k_{i,j} c_k x_i = (d_{j_1}, ..., d_{j_n})_B$$

con $d_{j_i} = \sum_{k=1}^n a^k_{i,j} c_k$, es decir si consideramos la matriz $A_{-,j} = (A^k_{i,j})$, entonces:

$$\begin{pmatrix} d_{j_1} \\ d_{j_2} \\ \vdots \\ d_{j_n} \end{pmatrix} = A_{-,j} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Análogamente podríamos definir las matrices $A_{i,-} = (a^k_{i,j})$ y entonces tendríamos la situación simétrica:

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i$$

donde

$$e_i = \sum_{j,k=1}^n a^k_{i,j} c_k x_j = (e_{i_1}, ..., e_{i_n})_B$$

con $e_{i_j} = \sum_{k=1}^n a^k_{i,j} c_k$ y entonces

$$\begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} = A_{i,-} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Observación 32 *Sea $c \in C$ y $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de C en las mismas condiciones de antes, entonces*

$$\Delta(c) = \sum_{j=1}^{n} d_j \otimes x_j$$

y

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i$$

donde $d_j = A_{-,j}c$ para cada j y $e_i = A_{i,-}c$ para cada i.

□

1.8 El espacio de coeficientes.

Sea M un C-comódulo a derecha, definimos el **espacio de coeficientes de** M, $cf(M)$, por

$$cf(M) = \mathcal{R}(\omega_M(M)).$$

Es claro que $cf(M)$ es un subespacio de C, y tenemos que

$$\omega_M(M) \leq M \otimes cf(M).$$

Lema 33 *Sea C una coálgebra y $M \in \mathcal{M}^C$ un C-comódulo a derecha, $cf(M)$ es la menor subcoálgebra de C tal que $\omega_M(M) \subseteq M \otimes cf(M)$.*

□

Lema 34 *[9] Sean $M, M' \in \mathcal{M}^C$, entonces*

1. *Si $f : M \to M'$ es un morfismo de C-comódulos a derecha, entonces $cf(f(M)) \leq cf(M)$. Si M y M' son isomorfos, $cf(M) = cf(M')$.*

2. *Sea $N \leq M$ un subcomódulo, entonces $cf(N) \leq cf(M)$ y $cf(M/N) \leq cf(M)$.*

3. *Si $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subcomódulos de M, entonces $cf(\sum_\lambda N_\lambda) = \sum_\lambda cf(N_\lambda)$.*

□

Lema 35 *Sean M,N y W tres C-comódulos a derecha tales que la sucesión*

$$0 \to N \to M \to W$$

es exacta corta. Entonces $cf(M) \subseteq cf(N) + cf(W)$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro porque $cf(M) \subseteq cf(N + W) = cf(N) + cf(W)$. □

Proposición 36 *[9] $cf(M)$ es una subcoálgebra de C.*

□

Por tanto, $cf(M)$ puede verse como un C-comódulo a derecha.

Proposición 37 *[9] Sea I un coideal a derecha de C, entonces $I \leq cf(I)$. Si I es una subcoálgebra de C, entonces $I = cf(I)$.*

□

Sea X un K-espacio vectorial cualquiera, entonces $(X \otimes M, I_X \otimes \omega_M)$ es un C-comódulo a derecha que denotaremos $(X) \otimes M$. Obsérvese que si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de X, entonces $(X) \otimes M$ puede verse como la suma directa de todos los subcomódulos $x_i \otimes M$, cada uno de los cuales es isomorfo a M.

Proposición 38 *[9] Sea M un C-comódulo a derecha y veamos $cf(M)$ como otro C-comódulo a derecha.*

1. *ω_M, induce un monomorfismo de C-comódulos a derecha:*

$$\omega_M : M \to (M) \otimes cf(M).$$

2. *Sea $\{m_i\}_{i\in I}$ una base de M, y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de elementos de M^* tales que $f_i(m_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in I)$. Sea M_0^* el subespacio generado por $\{f_i\}_{i\in I}$. Entonces existe un epimorfismo de C-comódulos a derecha*

$$\phi : (M_0^*) \otimes M \to C$$

definido por $\phi(f \otimes m) = (f \otimes I)\omega_M(m)$ para cada $m \in M$ y $f \in M_0^*$

□

Corolario 39 *[9] Si la dimensión de M es finita, entonces $M_0^* = M^*$, $M^* \otimes_E M$ es un C-bicomódulo, y la aplicación ϕ induce un epimorfismo de C-bicomódulos, $\overline{\phi} : M^* \otimes_E M \to C$. $(E = End_C(M))$.*

□

La matriz invariante de un C-comódulo.

Sea M un C-comódulo a derecha, y sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una K-base de M, entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\omega_M(x_j) = \sum_{i\in I} x_i \otimes t_{ij},$$

donde cada $t_{ij} \in C$, la matriz $T = (t_{ij})$ se llama **matriz invariante de M para C sobre la base $\{x_i\}_{i\in I}$**. Obsérvese que $\Delta(T) = T \otimes T$ y $\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker.

Proposición 40 *[9] $cf(M)$ es el K-subespacio generado por los coeficientes t_{ij}.*

□

Sea (M, ω_M) un C-comódulo a derecha finito dimensional como espacio vectorial, supongamos que $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de M como espacio vectorial, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$, con $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ es una base del dual M^*, por ser de dimensión finita.

M^* es un C^*-módulo a izquierda, pero por ser de dimensión finita también es un C-comódulo a izquierda con aplicación estructura definida sobre la base $\{f_i\}_{i\in I}$,

$$\omega_M^*(f_j) = \sum_{i\in I} t_{ji} \otimes f_i$$

donde (t_{ij}) es la matriz invariante.

1.9 Comódulos simples.

Sea C una coálgebra y sea M un C-comódulo a derecha, diremos que M es **simple** si $M \neq 0$ y M no tiene subcomódulos, excepto M y 0. Al conjunto de todos los C-subcomódulos a derecha simples de M, lo denotaremos $Simp^C(M)$.

Sea C^* el álgebra dual de C, consideremos un conjunto

$$\{S_\beta\}_{\beta\in B} = \Lambda,$$

de representantes de las clases de isomorfía de C-comódulos a derecha simples y denotemos por $m_\beta = dim_K(S_\beta)$.

Proposición 41 *[9] Sea S un C-comódulo a izquierda simple entonces,*

1. *$dim(S)$ es finita, $D = End_C(S)$ es un álgebra de división y el (C, C)-epimorfismo $\overline{\phi}$: $S^* \otimes_D S \to cf(S)$ es un isomorfismo.*
2. *Sea $n = dim_D(S)$, entonces $cf(S)$ es isomorfo, como C-comódulo a izquierda a una suma directa de n copias de S. Además cualquier C-subcomódulo de C isomorfo a S está contenido en $cf(S)$.*

3. *S^* es simple como C-comódulo a derecha y $cf(S^*) = cf(S)$ es isomorfo como C-comódulo a derecha a una suma de n copias de S^*. Y además cuálquier subcomódulo a derecha de C isomorfo a S^* está contenido en $cf(S)$.*

4. *$cf(S)$ es un C-bicomódulo simple. Cada C-subbicomódulo simple de C es igual a $cf(S)$ para algún C-comódulo a izquierda simple S.*

□

Observemos que el conjunto Λ tiene tantos elementos como subcoálgebras simples tiene C, de hecho podríamos elegir como conjunto de representantes $\{cf(S_\beta)\}_{\beta \in B}$ que sería el conjunto de todas las subcoálgebras simples de C. Además es claro que $dim_K(cf(S_\beta)) = m_\beta^2$.

Corolario 42 *Sea C una coálgebra, entonces existe una relación biyectiva entre C-comódulos simples a derecha y C-comódulos simples a izquierda.*

□

Proposición 43 *Sea $D \leq C$ una subcoálgebra, entonces $Simp^C(D) = Simp^D(D)$.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. □

Proposición 44 *[11] Sea C una coálgebra, entonces existe una biyección entre el conjunto de las clases de isomorfía de C-comódulos a derecha simples y el conjunto de las subcoálgebras simples de C.*

□

Zócalo y Semisimples.

Sea C una coálgebras y sea M un C-comódulo a derecha, definimos el **zócalo de** M, $soc(M)$, como la suma de todos los subcomódulos simples de M. Diremos que M es **semisimple** si $soc(M) = M$.

Proposición 45 *[9] Sea M un C-comódulo a derecha, entonces M es semisimple si y sólo si $cf(M) \subseteq soc(C)$.*

□

Factores de composición.

Sea M un C-comódulo a derecha, $M \neq 0$, una cadena finita de $n+1$ subcomódulos de M

$$M = M_0 > M_1 > .... > M_n = 0$$

se dice que es una **serie de composición de longitud** n **de** M si M_{i-1}/M_i es simple $(i = 1, 2, ..., n)$, es decir, cada término de la cadena es maximal en su predecesor. M se dirá que es de **longitud finita** si tiene una serie de composición de longitud finita.

Sea M un C-comódulo a derecha de longitud finita y sea $N \leq M$ un subcomódulo, si N es un término de una serie de composición de M, es decir, si N tiene un subcomódulo maximal N', al comódulo simple N/N' se le llama **factor de composición de** M. En general, para un C-comódulo a derecha cualquiera M, llamaremos factores de composición de M a los factores de composición de los subcomódulos a derecha de longitud finita de M.

1.10 Producto cotensor.

Sea C una coálgebra, M un C-comódulo a derecha y N un C-comódulo a izquierda. Definimos el **producto cotensor de** M **y** N, $M \square_C N$ como el núcleo de la aplicación:

$$\omega_M \otimes I - I \otimes \omega_N : M \otimes N \to M \otimes C \otimes N$$

Algunas propiedades del producto cotensor son:

1. Si C=K entonces $M \square_C N = M \otimes_C N$.
2. Si C es finito dimensional, M es un C-comódulo a derecha finito dimensional y N es un C-comódulo a izquierda finito dimensional; entonces
$$(M \square_C N)^* \cong M^* \otimes_{C^*} N^*.$$
3. El producto cotensor es asociativo.
4. Los funtores $M \square_C -$ y $- \square_D N$ son exactos a izquierda y preservan sumas directas.
5. Si M es un (C, D)-bicomódulo y N es un (D, E)-bicomódulo para C, D, E coálgebras, entonces $M \square_D N$ es un (C, E)-bicomódulo.
6. Si X es un C-comódulo a izquierda finito dimensional y M un C-comódulo a derecha entonces
$$M \square_C X \cong Hom_{-C}(X^*, M)$$
donde X^* es el espacio dual que es C-comódulo a derecha con la aplicación estructura: $X^* \to Hom(X, C) \cong X^* \otimes C$, definida por $x^* \mapsto (I \otimes x^*)\omega_X$.

7. El funtor $M \,\square_C -$ es exacto si y sólo si M es un C-comódulo a derecha inyectivo.

Lema 46 *Sea C una coálgebra, $f \in C^*$ y $W \in \mathcal{M}^C$, entonces:*

1. $Ker(I \otimes \epsilon_C) \cap (M \,\square_C\, C) = 0$.
2. $W \cong W \,\square_C\, C$ *($W \cong C \,\square_C\, W$ para $W \in {}^C\mathcal{M}$).*
3. $\omega_W(f \rightharpoonup x) \in W \otimes (f \rightharpoonup C)$ *para cada* $x \in W$.
4. $W \,\square_C\, (f \rightharpoonup C) \supseteq f \rightharpoonup (W \,\square_C\, C) \cong (f \rightharpoonup W)$.
5. *Si $e \in C^*$ es idempotente entonces*
$$W \,\square_C\, (e \rightharpoonup C) = e \rightharpoonup (W \,\square_C\, C) \cong (e \rightharpoonup W).$$
6. *Si D es una subcoálgebra de C entonces $W \,\square_C\, D$ es un D-comódulo a derecha.*
7. *Si $f \in C^*$ es central entonces $W \,\square_C\, (f \rightharpoonup C)$ es un $(f \rightharpoonup C)$-comódulo a derecha.*
8. *Sean $A \in \mathcal{M}^C$ y $B \in {}^C\mathcal{M}$ tales que $A \subseteq C$ como C-comódulo a derecha y $B \subseteq C$ como C-comódulo a izquierda, entonces $A \,\square_C\, B \subseteq \Delta C$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea
$$\sum_i x_i \otimes y_i \in Ker(I \otimes \epsilon) \cap W \,\square_C\, C$$
entonces sabemos que
$$(I \otimes \Delta)(\sum_i x_i \otimes y_i) = (\omega_W \otimes I)(\sum_i x_i \otimes y_i),$$
$$(I \otimes \epsilon)(\sum_i x_i \otimes y_i) = 0$$
es decir,
$$\sum_i x_i \otimes \Delta_C(y_i) = \sum_i \omega_W(x_i) \otimes y_i,$$
$$\sum_i x_i \epsilon(y_i) = 0$$
aplicando Δ_C y ω_W,
$$\sum_i x_i \otimes (\sum_{(y_i)} (y_i)_{(1)} \otimes (y_i)_{(2)}) = \sum_i (\sum_{(x_i)} (x_i)_{(1)} \otimes (x_i)_{(2)}) \otimes y_i$$

y sabemos que

$$\begin{aligned}(I\otimes I\otimes\epsilon_C)(\sum_i(\sum_{(x_i)}(x_i)_{(1)}\otimes(x_i)_{(2)})\otimes y_i) &= (\sum_i(\sum_{(x_i)}(x_i)_{(1)}\otimes(x_i)_{(2)})\otimes\epsilon_C(y_i))\\ &= \sum_i\omega_w(x_i)\epsilon_C(y_i)=\omega_W(\sum_i x_i\epsilon(y_i))\\ &= \omega_w(0)=0.\end{aligned}$$

Luego

$$(I\otimes I\otimes\epsilon_C)(\sum_i x_i\otimes(\sum_{(y_i)}(y_i)_{(1)}\otimes(y_i)_{(2)}))=0$$

o lo que es lo mismo $\sum_i x_i\otimes y_i=0$ como queríamos demostrar.

2. Recordemos que la aplicación estructura de W es $\omega_W : W\to W\otimes C$, definida por $\omega_W(x)=\sum_{(x)}x_{(1)}\otimes x_{(2)}$. Observemos que $Im(\omega_W)\subseteq W\,\square_C\,C$ porque

$$((I\otimes\Delta_C)\circ\omega_W)(x)=((\omega_W\otimes I)\circ\omega_W)(x)$$

y la aplicación estructura de C como C-comódulo es Δ_C, entonces y salvo identificación consideramos

$$\omega_W : W\to W\,\square_C\,C$$

que es monomorfismo porque $(I\otimes\epsilon)\circ\omega_W=I_W$ salvo el isomorfismo $W\otimes K\cong W$ por ser W un C-comódulo a derecha. Para terminar bastaría con ver que ω_W salvo la identificación es sobreyectiva y por tanto isomorfismo. En efecto, sea $\sum_i x_i\otimes y_i\in W\,\square_C\,C$ y llamemos $z=(I\otimes\epsilon)(\sum_i x_i\otimes y_i)\in W$, entonces

$$(\sum_i x_i\otimes y_i)-\omega_W(z)=0$$

porque

$$(\sum_i x_i\otimes y_i)-\omega_w(z))\in Ker(I\otimes\epsilon)\cap M\,\square_C\,C=0$$

y $(\sum_i x_i\otimes y_i)=\omega_w(z)$, y en consecuencia sobreyectiva. Obsérvese que $(I\otimes\epsilon)\mid_{M\square_C C}$ es la inversa de ω_W salvo la identificación que hemos hecho antes, en realidad tendríamos que $Im(\omega_W)=M\,\square_C\,C$.

3. En efecto,

$$\omega_W(f\rightharpoonup x)=\sum_{(x)}f(x_{(1)})\omega_W(x_{(0)})=\sum_{(x)}f(x_{(1)})(x_{(00)}\otimes x_{(01)})=\sum_{(x)}x_{(00)}\otimes f(x_{(1)})x_{(01)},$$

y como

$$((\omega_W\otimes I)\circ\omega_W)(x)=((I\otimes\Delta_C)\circ\omega_W)(x)$$

esto es,

$$\sum_{(x)}x_{(00)}\otimes x_{(01)}\otimes x_{(1)}=\sum_{(x)}x_{(0)}\otimes x_{(11)}\otimes x_{(12)}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{(x)} x_{(00)} \otimes f(x_{(1)})x_{(01)} &= (I \otimes I \otimes f)(\sum_{(x)} x_{(00)} \otimes x_{(01)} \otimes x_{(1)}) \\ &= (I \otimes I \otimes f)(\sum_{(x)} x_{(0)} \otimes x_{(11)} \otimes x_{(12)}) \\ &= \sum_{(x)} x_{(0)} \otimes f(x_{(12)})x_{(11)} \\ &= \sum_{(x)} x_{(0)} \otimes (f \rightharpoonup x_{(1)}) \in W \otimes (f \rightharpoonup C).\end{aligned}$$

4. Es evidente que $f \rightharpoonup W \cong f \rightharpoonup (W \,\square_C\, C)$, y el isomorfismo viene dado por

$$\omega_W \mid_{(f \rightharpoonup W)} : (f \rightharpoonup W) \longrightarrow f \rightharpoonup (W \,\square_C\, C)$$

usando

$$f \rightharpoonup (\omega_W(x)) = \omega_W(f \rightharpoonup x),$$

y el apartado 2.

Salvo el isomorfismo anterior pasamos a demostrar la inclusión:

Sea $f \rightharpoonup x \in f \rightharpoonup W$ entonces $f\omega_W(x) = \omega_W(f \rightharpoonup x) \in W \otimes f \rightharpoonup C$, recordemos que la estructura de C-comódulo a izquierda de $f \rightharpoonup C$ viene dada por $\omega_{f \rightharpoonup C} = \Delta_C$ restringida a elementos de $f \rightharpoonup C$, entonces es evidente por ser W un C-comódulo a derecha que

$$((\omega_W \otimes I) - (I \otimes \Delta_C))(\omega_W(f \rightharpoonup x)) = 0$$

y en consecuencia $\omega_W(f \rightharpoonup x) \in W \,\square_C\, (f \rightharpoonup C)$ para cualquier $f \rightharpoonup x \in f \rightharpoonup W$.

5. Si e es idempotente entonces

$$W \,\square_C\, (e \rightharpoonup C) = e \rightharpoonup (W \,\square_C\, (e \rightharpoonup C)) \subseteq e \rightharpoonup (W \,\square_C\, C) \cong e \rightharpoonup W$$

y por tanto tenemos la igualdad.

6. Si $D \subseteq C$ es subcoálgebra, entonces es D-bicomódulo y por tanto es evidente.

7. Evidente.

8. Se demuestra de manera análoga.

$\square$

Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, si vemos a C como un (D, C)-bicomódulo, donde la estructura de D-comódulo a izquierda de C es la que resulta del cambio de coálgebras por el morfismo, esto es, la dada por la aplicación estructura $(f \otimes I) \circ \Delta$. Entonces para cada D-comódulo a derecha M, construimos el C-comódulo a derecha

$$M^f = M \,\square_D\, C$$

que se llamará **comódulo inducido**.

Lema 47 *(2.1 de [18] y 3.6 de [19]) Sea C una coálgebra y sea $\mathcal{C}$ una categoría K-abeliana. Si $F : {}^{C}\mathcal{M} \to \mathcal{C}$ (resp. $F : \mathcal{M}^{C} \to \mathcal{C}$) es un funtor exacto a izquierda que preserva sumas directas, entonces existe un único (salvo isomorfismos) C-comódulo a derecha (resp. a izquierda) M que es un objeto de la categoría $\mathcal{C}$ tal que F es isomorfo al funtor cotensor $M \square_C -$ (resp. $- \square_C M$). En particular, si $\mathcal{C} = {}^{D}\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^{D}$) para alguna coálgebra D, entonces M es un (D, C)-bicomódulo (resp. (C, D)-bicomódulo).*

□

1.11 Comódulos quasi-finitos.

Un C-comódulo a derecha M es **quasi-finito** si $Hom_{-C}(N, M)$ es de dimensión finita para cualquier C-comódulo a derecha N de dimensión finita. Un C-comódulo a derecha es **finitamente cogenerado** si es isomorfo a un subcomódulo de $V \otimes C$ para algún K-espacio V finito dimensional. Un comódulo finitamente cogenerado es quasi-finito.

Lema 48 *Sea M un (D, C)-bicomódulo. Entonces M es quasi-finito como C-comódulo a derecha si y sólo si el funtor $- \square_D M : \mathcal{M}^{D} \to \mathcal{M}^{C}$ tiene un funtor adjunto a izquierda que denotaremos $Cohom_{-C}(M, -)$. Esto es, para N un C-comódulo a derecha y P un D-comódulo a derecha,*

$$Hom_{-D}(Cohom_{-C}((M, N), P) \cong Hom_{-C}(N, P \square_D M).$$

□

El funtor $Cohom_{-C}(M, -)$ se describe por,

$$Cohom_{-C}(M, N) = \varinjlim Hom_{-D}(N_i, X)^* = \varinjlim (M \square_C N_I^*)^*$$

donde $\{N_i\}$ es la familia de todos los subcomódulos finito dimensionales de N.

Denotamos $\theta : N \to Cohom_{-C}(M, N) \square_D M$ al morfismo de C-comódulos a derecha imagen del morfismo identidad $Cohom_{-C}(M, N) \to Cohom_{-C}(M, N)$.

Sea M un (D, C)-bicomódulo, supongamos que M es quasi-finito como C-comódulo a derecha, entonces $Coend_{-C}(M) = Cohom_{-C}(M, M)$ es una coálgebra cuya comultiplicación es la correspondiente por la adjunción a $(I \otimes \theta) \circ \theta : M \to Coend_{-C}(M) \otimes Coend_{-C}(M) \otimes M$ con $C = K$, $M = N$ y cuya counidad es la correspondiente a I_M; la llamamos **coálgebra de coendomorfismos de** M. Es claro que M es un $(Coend_{-C}(M), C)$-bicomódulo, con $\omega_{Coend_{-C}(M)} = \theta$ para $N = M$.

Sea M un (D,C)-bicomódulo con M quasi-finito como C-comódulo a derecha, entonces existe un morfismo de coálgebras $\lambda : Coend_{-C}(M) \to D$ tal que $\omega_D = (\lambda \otimes I)\theta$. Recíprocamente un morfismo de coálgebras $\lambda : Coend_{-C}(M) \to D$ convierte a M en un (D,C)-bicomódulo.

1.12 Comódulos inyectivos.

Diremos que un C-comódulo a derecha I es **inyectivo** o **C-inyectivo**, si dados U, V dos C-comódulos a derecha con $U \leq V$, cualquier morfismo de C-comódulos a derecha $f : U \to I$ se puede extender a $\overline{f} : V \to I$. Algunas propiedades son:

1. Cualquier sumando directo de un comódulo inyectivo es inyectivo, y si $I \leq M$ un subcomódulo e I es inyectivo, entonces I es un sumando directo de M.
2. Un C-comódulo a derecha M es inyectivo si y sólo si el funtor $Cohom_{-C}(-, M)$ es exacto.
3. [5] $Cohom_{-C}(-, M)$ es exacto si y sólo si $- \square_C M$ es exacto
4. [5] Sea L un C-comódulo a derecha y M un (C, D)-bicomódulo. Si L es C-inyectivo y M es D-inyectivo entonces $L \square_C M$ es D-inyectivo.
5. [5] Cualquier comódulo libre es inyectivo.
6. [5] Si M es C-comódulo a derecha finito dimensional, entonces M es C-inyectivo si y sólo si es inyectivo como C^*-módulo a izquierda.
7. [9] La suma directa de C-comódulos a derecha (resp. a izquierda) inyectivos es inyectiva.

Para $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, por 1.10 podemos considerar el funtor

$$(-)^f = - \square_D C : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$$

Proposición 49 *[5] Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces son equivalentes:*

1. $(-)^f = - \square_D C$ *es exacto.*
2. *C es inyectiva como D-comódulo a izquierda.*
3. *Cualquier C-comódulo a izquierda inyectivo es inyectivo como D-comódulo a izquierda.*

$\square$

Proposición 50 *[9] Sea C una coálgebra y sean M, N dos C-comódulos a izquierda inyectivos, entonces:*

1. *Cualquier morfismo de C-comódulos de M en N que induce un isomorfismo de $soc(M)$ en $soc(N)$, es un isomorfismo.*

2. *$M \cong N$ si y sólo si $soc(M) \cong soc(N)$.*

$\square$

Un morfismo de C-comódulos a izquierda $\phi : M \to I$ se dirá que es un **embebimiento inyectivo minimal de** M si I es inyectivo y ϕ induce un isomomorfismo $soc(M) \to soc(I)$, cuando existe ϕ diremos que I es **la envolvente inyectiva de** M, y denotaremos $I = E({}^{C}M)$.

Proposición 51 *[9] Sea M un C-comódulo a izquierda, entonces:*

1. *Si existen dos embebimientos inyectivos minimales, $\phi : M \to I$ y $\phi' : M \to I'$ entonces I e I' son isomorfos.*

2. *Existe al menos un embebimiento inyectivo minimal de M y por tanto su envolvente inyectiva.*

$\square$

Comódulos coplanos.

Un C-comódulo a derecha M, se dirá que es **coplano** si el funtor $M \square_C -$ es exacto, por tanto equivalen,

1. M es coplano.

2. $Cohom_{-C}(-, M)$ es exacto.

3. M es C-inyectivo.

Dado un morfismo de coálgebras $f : C \to D$ se dirá que es un **morfismo coplano a izquierda** si C es coplano (o inyectivo) como D-comódulo a izquierda.

1.13 Contextos Morita-Takeuchi.

Un **Contexto Morita-Takeuchi** consiste en (D, C, M, N, f, g) donde D y C son coálgebras; M es un (D, C)-bicomódulo, N un (C, D)-bicomódulo; $f : D \to M \square_C N$ y $g : C \to N \square_D M$

son morfismos de bicomódulos verificando:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & M \square_C C \arrow[d, "I \square g"] \\ D \square_D M \arrow[r, "f \square I"'] & M \square_C N \square_D M \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & N \square_D D \arrow[d, "I \square f"] \\ C \square_C N \arrow[r, "g \square I"'] & N \square_D M \square_C N \end{tikzcd}$$

Si $S = - \square_C N$ y $T = - \square_D M$ entonces los morfismo f y g pueden ser identificados con las transformaciones naturales, $f : I \to ST$ y $g : I \to TS$, y los diagramas anteriores son conmutativos si y sólo si

$$Tf = gT : T \longrightarrow TST \qquad \text{y} \qquad fS = Sg : S \to STS.$$

Si f es un isomorfismo entonces el par $(f^{-1} : ST \to I, g : I \to TS)$ nos da una adjunción $S \dashv T$.

Entonces si f y g son isomorfismos se dirá que D y C son **equivalentes** M-T y en tal caso denotaremos $D \sim_{M-T} C$.

Proposición 52 *Sea (D, C, M, N, f, g) un contexto Morita-Takeuchi, entonces f es inyectiva si y sólo si M es inyectivo.*

□

Se dirá que un contexto Morita-Takeuchi (D, C, M, N, f, g) es **inyectivo** si f es inyectiva (o M es inyectivo).

Proposición 53 *Sea (D, C, M, N, f, g) un contexto Morita-Takeuchi inyectivo, entonces:*

1. *f es un isomorfismo.*
2. *Los comódulos M_C, ${}_C N$ son quasi-finitos e inyectivos.*
3. *Los comódulos ${}_D M$, N_D son cogeneradores.*
4. *$Cohom_{-C}(M, C) \cong N$, $Cohom_{C-}(N, C) \cong M$.*
5. *$Coend_{-C}(M) \cong D$, $Coend_{C-}(N) \cong D$.*

□

Observación 54 *[18] Sea M un C-comódulo a derecha quasi-finito, si $D = Coend_{-C}(M)$, entonces M es un (D,C)-bicomódulo. Consideramos $N = Cohom_{-C}(M,C)$ que es un (C,D)-bicomódulo. Sea*

$$g = \theta : C \to N \,\square_D\, M$$

(véase 1.11) y sea

$$f : D \cong Cohom_{-C}(M, M \,\square_C\, C) \longrightarrow M \,\square_C\, Cohom_{-C}(M,C) = M \,\square_C\, N$$

entonces (D,C,M,N,f,g) un contexto Morita-Takeuchi; donde f es inyectiva si y sólo si M es inyectivo como C-comódulo a derecha; y g es inyectiva si y sólo si M es un cogenerador como C-comódulo a derecha.

Si M es quasifinito e inyectivo entonces resulta un contexto Morita-Takeuchi inyectivo.

$\square$

2 Coálgebras coprimas

Las coálgebras coprimas son una generalización de las coálgebras simples en el caso infinito dimensional. Una subcoálgebra coprima finita dimensional es simple. Existen coálgebras como las punteadas, en concreto las álgebras de Lie, donde las subcoálgebras simples aportan poca información, en este capítulo describimos las subcoálgebras coprimas y sus propiedades. También describimos la topología de Zariski para coprimas. En capítulos posteriores describiremos como son las subcoálgebras coprimas de las coálgebras de caminos y en particular de las coálgebras punteadas.

2.1 El producto Wedge.

Sea C una coálgebra y X e Y dos subespacios vectoriales de C. Se define $X \wedge Y$ y se le llama **producto Wedge**, al núcleo de la composición:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \longrightarrow C/X \otimes C/Y.$$

También lo podemos describir como:

$$X \wedge Y = \Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C),$$

o por

$$X \wedge Y = (X^{\perp} Y^{\perp})^{\perp}.$$

Siempre que pueda existir duda escribiremos $X \wedge^C Y$ para denotar el producto Wedge en C.

Observación 55 *Atendiendo a las definiciones anteriores nótese que si $x \in X \wedge Y$ y $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ entonces se puede escribir de forma que $x_{(1)} \in X$ o $x_{(2)} \in Y$.*

$\square$

Proposición 56

1. *El producto Wedge es asociativo:*

$$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z) = Ker(C \to C^3 \to C/X \otimes C/Y \otimes C/Z)$$

2. *Si* $X \subset Y$ *y* $Z \subset W$ *entonces* $X \wedge Z \subset Y \wedge W$.

3. *El* $Ker(\epsilon)$ *es un elemento neutro para el producto Wedge:*

$$X \wedge Ker(\epsilon) = Ker(\epsilon) \wedge X = X$$

4. *Si* $Y \subset Ker(\epsilon)$, *entonces* $X \wedge Y \subset X$ *e* $Y \wedge X \subset X$.

□

Proposición 57

1. *Si* X *es un coideal a izquierda (derecha) entonces* $X \wedge Y$ $(Y \wedge X)$ *es coideal a izquierda (derecha) y* $X \subset Y \wedge X$ $(X \subset X \wedge Y)$.

2. *Si* X *es un coideal a izquierda e* Y *es un coideal a derecha entonces* $X \wedge Y$ *es una subcoálgebra.*

3. *Si* X *e* Y *son subcoálgebras entonces* $X \wedge Y$ *es una subcoálgebra y*

$$X \wedge Y \supset X + Y$$

4. *Si* $X \subset Ker(\epsilon)$ *entonces* $\bigcap_n \bigwedge^n X$ *es un coideal.*

□

Una subcoálgebra $D \subseteq C$ se dice que es **coidempotente** si $D \wedge^C D = D$.

Proposición 58 *Sea* $D \subseteq C$ *una subcoálgebra y sean* X *e* Y *subcoálgebras de* D, *entonces:*

1. $X \wedge^D Y = (X \wedge^C Y) \cap D$.

2. *Si además* D *es coidempotente,* $X \wedge^C Y = X \wedge^D Y$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Consideremos $K_1 = Ker(\Delta_1) = X \wedge^D Y$ y $K_2 = Ker(\Delta_2) = X \wedge^C Y$, donde Δ_1 es la composición

$$D \xrightarrow{\Delta_D} D \otimes D \longrightarrow D/X \otimes D/Y$$

y Δ_2 es

$$C \xrightarrow{\Delta_C} C \otimes C \longrightarrow C/X \otimes C/Y$$

entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "\Delta_D"] \arrow[d, "i"] & D \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & D/X \otimes D/Y \arrow[d, "g"] \\ K_2 \arrow[r] & C \arrow[r, "\Delta_C"'] & C \otimes C \arrow[r] & C/X \otimes C/Y \end{tikzcd}$$

por tanto,

$$(X \wedge^C Y) \cap D = Ker(\Delta_2) \cap D = Ker(\Delta_2 i) = Ker(g\Delta_1)$$

y como g es monomorfismo,

$$Ker(g\Delta_1) = Ker(\Delta_1);$$

luego $(X \wedge^C Y) \cap D = Ker(\Delta_1) = X \wedge^D Y$.

2. Tenemos que $X \wedge^C Y \subseteq D \wedge^C D = D$, luego $X \wedge^D Y = (X \wedge^C Y) \cap D = X \wedge^C Y$.

□

Proposición 59 *Sean $X, Y, D \subseteq C$ subcoálgebras, entonces $(X \wedge^C Y) \cap D \subseteq (X \cap D) \wedge^D (Y \cap D)$.*

Demostración. Bastaría con demostrar $(X \wedge^C Y) \cap D \subseteq (X \cap D) \wedge^C (Y \cap D)$. Veámoslo,

$$(X \wedge Y) \cap D = (X^\perp Y^\perp)^\perp \cap D = (X^\perp Y^\perp)^\perp \cap D^{\perp\perp} = ((X^\perp Y^\perp) + D^\perp)^\perp \subseteq$$

$$\subseteq ((X^\perp + D^\perp)(Y^\perp + D^\perp))^\perp = ((X \cap D)^\perp (Y \cap D)^\perp)^\perp = (X \cap D) \wedge^C (Y \cap D).$$

□

Proposición 60 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, para cualesquiera dos subespacios X e Y de C, se verifica:*

$$f(X \wedge Y) \subseteq f(X) \wedge f(Y).$$

Demostración. Sea $x \in X \wedge Y$, $f(x) \in f(X \wedge Y)$, $\Delta f(x) = (f \otimes f)\Delta x$ porque f es morfismo de coálgebras. Consideremos $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes y_i$ con $x_i \in X$ o $y_i \in Y$, $\Delta f(x) = \sum_i f(x_i) \otimes f(y_i)$ con $f(x_i) \in f(X)$ o $f(y_i) \in Y$, y en consecuencia $f(x) \in f(X) \wedge f(Y)$. □

Proposición 61 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, sean $A, B \subseteq D$ dos subespacios vectoriales, entonces:*

1. *$f^{-1}(A \wedge B) \supseteq f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B)$.*

2. *Si f es sobreyectiva entonces $f^{-1}(A \wedge B) = f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B)$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Si $x \in f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B)$, podemos escribir $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ con $x_{(1)} \in f^{-1}(A)$ o $x_{(2)} \in f^{-1}(B)$, entonces $\Delta(f(x)) = \sum_{(x)} f(x_{(1)}) \otimes f(x_{(2)})$ con $f(x_{(1)}) \in A$ o $f(x_{(2)}) \in B$ y por tanto $f(x) \in A \wedge B$.

2. Consideremos $x \in f^{-1}(A \wedge B)$ con $\Delta x = \sum_i x_i \otimes y_i$, es decir, tal que $f(x) \in A \wedge B$ y por tanto $\Delta f(x) \in A \otimes D + D \otimes B$, entoces $\Delta f(x)$ será de la forma

$$\Delta f(x) = \sum_i a_i \otimes d_i + \sum_j d_j \otimes b_j;$$

por otro lado $\Delta f(x) = (f \otimes f)\Delta x$ por ser f un morfismo de coálgebras, en consecuencia como f es sobreyectiva:

$$\sum_i a_i \otimes d_i + \sum_i d_j \otimes b_j = \sum_i f(r_i) \otimes f(c_i) + \sum_j f(c_j) \otimes f(s_j);$$

donde $r_i = f^{-1}(A)$ y $s_j \in f^{-1}(B)$.

Entonces

$$z = \sum_i x_i \otimes y_i - \sum_i r_i \otimes c_i - \sum_j c_j \otimes s_j \in Ker(f \otimes f)$$

y por el lema 2

$$Ker(f \otimes f) = Ker(f) \otimes C + C \otimes Ker(f) \subseteq f^{-1}(A) \otimes C + C \otimes f^{-1}(B)$$

podemos decir que

$$\Delta x = \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i r_i \otimes c_i + \sum_j c_j \otimes s_j + z$$

con $\sum_i r_i \otimes c_i \in f^{-1}(A) \otimes C$, $\sum_j c_j \otimes s_j \in C \otimes f^{-1}(B)$ y $z \in f^{-1}(A) \otimes C + C \otimes f^{-1}(B)$, por tanto

$$\Delta x \in f^{-1}(A) \otimes C + C \otimes f^{-1}(B)$$

y $x \in f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B)$.

□

Proposición 62 *Sea C una coálgebra coconmutativa, entonces el producto Wedge es conmutativo, para $X, Y \subseteq C$ dos K-subespacios, $X \wedge Y = Y \wedge X$.*

□

Corolario 63 *Sea C una coálgebra coconmutativa, sean $X, Y \subseteq C$ dos subcoálgebras, si $X \cap Y = \{0\}$ entonces $X \wedge Y = X \oplus Y$.*

□

Subcoálgebras y coideales cogenerados por un espacio vectorial.

Sea C una coálgebra y $X \subseteq C$ un subespacio vectorial de C, definiremos **la subcoálgebra de** C **cogenerada por** X como la mayor subcoálgebra de C que está contenida en X. Y la denotaremos por $< X >$. Análogamente definimos el coideal a derecha (a izquierda) cogenerado por X como el mayor coideal a derecha (a izquierda) contenido en X.

Proposición 64 *Dada una coálgebra C y un subespacio suyo X, entonces:*

1. *$X \wedge 0$ (resp. $0 \wedge X$) es el coideal a derecha (a izquierda) cogenerado por X.*

2. *Si C es coconmutativa entonces $X \wedge 0$ es la subcoálgebra cogenerada por X.*

Demostración.

1. Como 0 es un coideal a derecha (resp. izquierda), entonces $X \wedge 0$ $(0 \wedge X)$ es un coideal a derecha (izquierda). $0 \subseteq ker(\epsilon)$, entonces $X \wedge 0 \subseteq X$ $(0 \wedge X \subseteq X)$. Por otra parte si Y es un coideal a derecha (izquierda) con $Y \subseteq X$ entonces $Y \wedge 0 \subseteq X \wedge 0$ $(0 \wedge Y \subseteq 0 \wedge X)$.

2. Bastaría con demostrar que es subcoálgebra, pero $X \wedge 0 = 0 \wedge X$, por tanto es coideal a derecha y coideal a izquierda, y en consecuencia es subcoálgebra.

□

Lema 65 *Sea $f : C \to D$ un morfismo entre coálgebras coconmutativas, sea $B \subseteq D$ una subcoálgebra y sea $A =< f^{-1}(B) >$, entonces $C^* f^*(B^\perp) \subseteq A^\perp$.*

Demostración. Bastará con demostrar que $f^*(B^\perp) \subseteq A^\perp$ porque $A^\perp$ es una álgebra, sabemos que

$$A =< f^{-1}(B) >= f^{-1}(B) \wedge 0 = (f^{-1}(B)^\perp C^*)^\perp.$$

Y además

$$f^*(B^\perp) = \{\alpha \in C^* \mid \alpha = f^*(h), h \in B^\perp\},$$

sea $\alpha \in f^*(B^\perp)$, entonces $\alpha = f^*(h) = hf$ y $\alpha(c) = 0$ si $f(c) \in B$, porque $\alpha(c) = hf(c) = 0$, por tanto

$$\alpha \in f^{-1}(B)^\perp \subseteq f^{-1}(B)^\perp C^* \subseteq (f^{-1}(B)^\perp C^*)^{\perp\perp} = A^\perp$$

luego $f^*(B^\perp) \subseteq A^\perp$. □

2.2 Coálgebras coprimas.

Diremos que una subcoálgebra $D \subset C$ ($D \neq C$) es **coprima** si $D \subseteq A \wedge B$ con A y B subcoálgebras de C implica $D \subseteq A$ o $D \subseteq B$. Análogamente diremos que C es coprima si $C = A \wedge B$ implica $C = A$ o $C = B$.

Una subcoálgebra $D \subseteq C$ diremos que es **semicoprima** si $D \subseteq \bigwedge^n A$ implica $D \subseteq A$.

Un ideal $H \subseteq C^*$ es c-**primo** si para cualesquiera ideales cerrados $I, J \subseteq C^*$ tales que $IJ \subset H$, tenemos que $I \subseteq H$ o $J \subseteq H$.

Proposición 66

1. *Si D es una subcoálgebra coprima de C entonces $D^\perp$ es un ideal c-primo y cerrado de C^*.*

2. *Sea C un coálgebra, y sean $I, J \leq C^*$ dos ideales, entonces*
$$I^\perp \wedge J^\perp = (IJ)^\perp.$$

3. *Si D es una subcoálgebra coprima de C entonces $D^\perp$ es un ideal primo y cerrado de C^*.*

4. *P es un ideal primo y cerrado de C^* entonces $P^\perp$ es una subcoálgebra coprima de C.*

5. *Existe una biyección entre las subcoálgebras coprimas de C y los ideales primos cerrados de C^*.*

DEMOSTRACIÓN.

1. $D^\perp$ es cerrado, en efecto, sean $I, J \in C^*$ ideales cerrados tales que $IJ \subseteq D^\perp$, entonces $D \subseteq D^{\perp\perp} \subseteq (IJ)^\perp$, como I y J son cerrados, por la definición de producto wedge, tendremos
$$D \subseteq (IJ)^\perp = (I^{\perp\perp} J^{\perp\perp})^\perp = I^\perp \wedge J^\perp$$
por tanto $D \subseteq I^\perp$ o $D \subseteq J^\perp$ porque es coprima, es decir, $I \subseteq D^\perp$ o $J \subseteq D^\perp$.

2. Por definición, $I^\perp \wedge J^\perp = (I^{\perp\perp} J^{\perp\perp})^\perp$ y como $I^{\perp\perp} J^{\perp\perp} \supseteq IJ$ entonces $(I^{\perp\perp} J^{\perp\perp})^\perp \subseteq (IJ)^\perp$, sólo nos quedaría por demostrar la otra inclusión.

   Sea $x \in (IJ)^\perp$, calculamos $\Delta(x)$ y lo escribimos de la siguiente forma:
$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i + \sum_s c_s \otimes d_s$$
   con $\{a_1 + I^\perp, a_2 + I^\perp, \ldots, a_n + I^\perp\}$ linealmente independientes en $C/I^\perp$, y $\sum_s c_s \otimes d_s \in I^\perp \otimes C$. Por [1, 2.2.2], sabemos que para cada j existe $f_j \in I$ tal que $f_j(a_i) = \delta_{ij}$; sea

$g \in J$, entonces $f_j g \in IJ$, por tanto como $x \in (IJ)^\perp$,

$$0 = (f_j g)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_j(a_i)g(b_i) + \sum_s f_j(c_s)g(d_s)$$

pero $f_j(c_s) = 0$ para cada s porque $c_s \in I^\perp$, entonces

$$(f_j g)(x) = g(b_j) = 0$$

luego $b_j \in J^\perp$ para cada j, y concluimos que $\Delta(x) \in C \otimes J^\perp + I^\perp \otimes C$, y $x \in I^\perp \wedge J^\perp$ como queríamos demostrar.

3. $D^\perp$ es cerrado. Sean $I, J \in C^*$ ideales tales que $IJ \subseteq D^\perp$, entonces $D \subseteq D^{\perp\perp} \subseteq (IJ)^\perp$, y según hemos visto $(IJ)^\perp = I^\perp \wedge J^\perp$, por tanto $D \subseteq I^\perp \wedge J^\perp$, luego $D \subseteq I^\perp$ o $D \subseteq J^\perp$, y se concluye que $I \subseteq I^{\perp\perp} \subseteq D^\perp$ o $J \subseteq J^{\perp\perp} \subseteq D^\perp$.

4. Sean $X, Y \subseteq C$ subcoálgebras tales que $P^\perp \subseteq X \wedge Y$, entonces $P^\perp \subseteq (X^\perp Y^\perp)^\perp$ y $P = P^{\perp\perp} \supseteq (X^\perp Y^\perp)^{\perp\perp} \supseteq X^\perp Y^\perp$. De donde $X^\perp \subseteq P$ o $Y^\perp \subseteq P^\perp$ y entonces $P^\perp \subseteq X$ o $P^\perp \subseteq Y$.

5. Evidente.

□

Proposición 67 *Toda subcoálgebra simple es coprima.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S simple y supongamos que $S \subseteq X \wedge Y$. Si $S \not\subseteq Y$, entonces $S \cap Y = 0$ y existe $f \in C^*$ tal que $f\mid_S = \epsilon_S$ y $f\mid_Y = 0$. Por tanto para cada $s \in S$, si $\Delta s = \sum_{(s)} s_{(1)} \otimes s_{(2)}$, se tiene (ver 1.4):

$$f \rightharpoonup s = \sum_{(s)} s_{(1)} f(s_{(2)}) = \sum_{(s)} s_{(1)}\epsilon_S(s_{(2)}) = s.$$

Pero, $S \subseteq X \wedge Y$, y $\Delta(S) \subseteq X \otimes C + C \otimes Y$, luego para $s \in S$, $\Delta s = \sum_i a_i \otimes c_i + \sum_j d_j \otimes b_j$ y entonces:

$$s = f \rightharpoonup s = \sum_i a_i f(c_i) + \sum_j d_j f(b_j) = \sum_i a_i f(c_i) \in X.$$

□

Proposición 68 *Sean $D \subseteq E \subseteq C$ subcoálgebras. D es subcoálgebra coprima de E si y sólo si D es subcoálgebra coprima de C.*

DEMOSTRACIÓN. Si $D \subseteq X \wedge^C Y$, entonces

$$D \subseteq (X \wedge^C Y) \cap E \subseteq (X \cap E) \wedge^E (Y \cap E)$$

por tanto $D \subseteq X \cap E$ o $D \subseteq Y \cap E$, y en consecuencia $D \subseteq X$ o $D \subseteq Y$. La otra implicación es evidente. □

Corolario 69 *Sea $D \subseteq C$ una subcoálgebra, entonces equivalen:*

1. *D es una subcoálgebra coprima de C.*
2. *Para cada X, $Y \subseteq D$, si $D \subseteq X \wedge^C Y$ entonces $X = D$ o $Y = D$.*
3. *Para cada X, $Y \subseteq D$, si $D = X \wedge^D Y$ entonces $X = D$ o $Y = D$; esto es, D es una coálgebra coprima.*

□

Corolario 70 *Toda coálgebra coprima es indescomponible.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $D = X \oplus Y$ con $X, Y \subseteq D$ subcoálgebras, entonces $D = X + Y \subseteq X \wedge Y$, y por tanto $D = X$ o $D = Y$. □

Corolario 71 *Toda coálgebra coconmutativa y coprima es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si C es coconmutativa, entonces es la suma directa de sus componentes irreducibles $\bigoplus_i C_i$ con C_i componente irreducible, como $\sum_i C_i \subseteq \wedge_i C_i$ y C es coprima concluimos que también es irreducible. □

2.3 Extensión y contracción.

Sean C y D dos coálgebras y $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras. Para $A \subseteq C$ una subcoálgebra definimos el **extendido de** A por $A^e = f(A)$, y para B una subcoálgebra de D definimos el **contraído de** B por $B^c = 0 \wedge f^{-1}(B) \wedge 0$. Obsérvese que el contraído de B es la subcoálgebra cogenerada por $f^{-1}(B)$, es decir, $< f^{-1}(B) >$.

La siguiente proposición resume las propiedades que verifican las extensiones y las contracciones.

Proposición 72 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces:*

1. *Si B es una subcoálgebra de D entonces $B^{ce} \subseteq B$.*
2. *Si A es una subcoálgebra de C entonces $A \subseteq A^{ec}$.*
3. *Si B es una subcoálgebra de D entonces $B^{cec} = B^c$.*
4. *Si A es una subcoálgebra de C entonces $A^e = A^{ece}$.*
5. *Si A y B son dos subcoálgebras de C entonces*
   (a) $(A + B)^e = A^e + B^e$,

(b) $(A \cap B)^e \subseteq A^e \cap B^e$,

(c) $(A \wedge B)^e \subseteq A^e \wedge B^e$.

6. Si A y B son dos subcoálgebras de D entonces

(a) $(A + B)^c \supseteq A^c + B^c$,

(b) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$,

(c) $(A \wedge B)^c \supseteq A^c \wedge B^c$.

Demostración.

1. Se sigue de la proposición 60,

$$B^{ce} = f(0 \wedge f^{-1}(B) \wedge 0) \subseteq 0 \wedge ff^{-1}(B) \wedge 0 \subseteq 0 \wedge B \wedge 0 = B.$$

2. Es claro por

$$A^{ec} = 0 \wedge f^{-1}f(A) \wedge 0 \supseteq 0 \wedge A \wedge 0 = A.$$

3. Por (1) y (2) es evidente.

4. Por (1) y (2) es evidente.

5.

   (a) Es evidente:

   $$(A + B)^e = f(A + B) = f(A) + f(B) = A^e + B^e.$$

   (b) Inmediato por $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

   (c) Es conocido que para dos subespacios cualesquiera de C que $f(X \wedge Y) \subseteq f(X) \wedge f(Y)$, en particular ocurre para A y B.

6.

   (a) Como $(f^{-1}(A) + f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(A + B)$ entonces

   $$0 \wedge (f^{-1}(A) + f^{-1}(B)) \wedge 0 \subseteq 0 \wedge f^{-1}(A + B) \wedge 0 = (A + B)^c$$

   pero $0 \wedge (f^{-1}(A) + f^{-1}(B)) \wedge 0$ es la mayor subcoálgebra de C contenida en $f^{-1}(A) + f^{-1}(B)$.
   Por otra parte $A^c + B^c = (0 \wedge f^{-1}(A) \wedge 0) + (0 \wedge f^{-1}(B) \wedge 0)$ es otra subcoálgebra contenida en $f^{-1}(A) + f^{-1}(B)$, por tanto $A^c + B^c \subseteq (A + B)^c$.

(b) ($\supseteq$) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, entonces

$$0 \wedge f^{-1}(A \cap B) \wedge 0 = 0 \wedge (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \wedge 0.$$

Por otra parte $A^c \cap B^c = (0 \wedge f^{-1}(A) \wedge 0) \cap (0 \wedge f^{-1}(B) \wedge 0)$ es una subcoálgebra contenida en $f^{-1}(A \cap B)$, por tanto

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cap B)^c.$$

($\subseteq$) Como $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(A \cap B)$, entonces $(A \cap B)^c \subseteq A^c$ y $(A \cap B)^c \subseteq B^c$, luego $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$.

(c) ($\supseteq$) Aplicando a $A = X^c$, $B = Y^c$ el apartado 5:

$$(X^c \wedge Y^c)^e \subseteq X^{ce} \wedge Y^{ce} \subseteq X \wedge Y$$

de donde

$$X^c \wedge Y^c \subseteq (X^c \wedge Y^c)^{ec} \subseteq (X \wedge Y)^c$$

□

Extensión y contracción para coálgebras coconmutativas.

Recordemos que si una coálgebra (C, Δ, ϵ) es coconmutativa, para cualesquiera dos subespacios A y B de C tenemos:

$$A \wedge B = B \wedge A.$$

Sean C y D dos coálgebras coconmutativas y $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras. Entonces para B una subcoálgebra de D, el contraído de B es $B^c = 0 \wedge f^{-1}(B) \wedge 0 = f^{-1}(B) \wedge 0 = 0 \wedge f^{-1}(B) =< f^{-1}(B) >$.

Proposición 73 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras coconmutativas sobreyectivo, entonces:*

$$(A \wedge B)^c = A^c \wedge B^c.$$

DEMOSTRACIÓN. Si f es sobreyectiva entonces por la proposición 61, $f^{-1}(A \wedge B) = f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B)$ y por tanto

$$(A \wedge B)^c = 0 \wedge f^{-1}(A \wedge B) \wedge 0 = 0 \wedge f^{-1}(A) \wedge f^{-1}(B) \wedge 0 = A^c \wedge B^c$$

□

Corolario 74 *Dado un morfismo sobreyectivo $f : C \to D$ de coálgebras coconmutativas. Si C es coprima entonces D es coprima.*

Demostración. Supogamos dos subcoálgebras A y B de D tales que $A \wedge B = D$ entonces

$$A^c \wedge B^c = (A \wedge B)^c = D^c = C$$

luego como C es coprima, $A^c = C$ o $B^c = C$, si $A^c = C$ entonces $A^{ce} = C^e = D$ y como $A^{ce} \subseteq A$, $A = D$; y si $B^c = C$ de manera análoga podemos decir que $B = D$. □

Corolario 75 *Dado un morfismo de coálgebras conmutativas $f : C \to E$, si $D \subseteq C$ es coprima entonces $f(D)$ es coprima.*

Demostración. Consideramos $f\mid_D : D \to f(D)$ y es claro. □

2.4 Topología de Zariski para coprimas.

Sea C una coálgebra y $A \subseteq C$ una subcoálgebra suya. Definimos los conjuntos:

$$X_C(A) = \{D \in Spec(C) \mid D \nsubseteq A\},$$

$$V_C(A) = \{D \in Spec(C) \mid D \subseteq A\}.$$

Salvo que exista duda denotaremos $X(A) = X_C(A)$ y $V(A) = V_C(A)$.

Lema 76 *Dadas $A \subseteq B \subseteq C$ dos subcoálgebras, entonces $V(A) \subseteq V(B)$ y $X(A) \supseteq X(B)$.*

□

Proposición 77

1. *$V(C) = X(0) = Spec(C)$ y $V(0) = X(C) = \emptyset$.*
2. *Si $A, B \subseteq C$ son dos subcoálgebras entonces, $V(A \wedge B) = V(A) \cup V(B)$ y $X(A \wedge B) = X(A) \cap X(B)$.*
3. *Si $\{A_\alpha\}_\alpha$ es una familia de subcoálgebras de C entonces $V(\cap_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha V(A_\alpha)$ y $X(\cap_\alpha A_\alpha) = \cup_\alpha X(A_\alpha)$.*

Demostración.

1. Inmediata.
2. $V(A \wedge B) = \{D \in Spec(C) \mid D \subseteq A \wedge B\} \subseteq \{D \in Spec(C) \mid D \subseteq A \text{ o } D \subseteq B\} = V(A) \cup V(B)$. Por otra parte (véase [17]) sabemos que $A, B \subseteq A + B \subseteq A \wedge B$ y en consecuencia $V(A) \cup V(B) \subseteq V(A \wedge B)$. La otra demostración es análoga.
3. Por una parte, si $Q \in V(\cap_\alpha A_\alpha)$, $Q \subseteq \cap_\alpha A_\alpha$ y por tanto $Q \subseteq A_\alpha$ para cada α, y $Q \in V(A_\alpha)$ para cada α. Por otro lado si $Q \in \cap_\alpha A_\alpha$, entonces $Q \subseteq A_\alpha$ para cada α y por tanto $Q \in V(\cap_\alpha A_\alpha)$. La otra demostración es análoga.

$\square$

Corolario 78 *Si $A, B \subseteq C$ son dos subcoálgebras entonces, $X(A+B) = X(A \wedge B) = X(A) \cap X(B)$ y $V(A+B) = V(A \wedge B) = V(A) \cup V(B)$.*

$\square$

Corolario 79 *$\{X(A) \mid A \subseteq C$ subcoálgebra$\}$ es una familia de abiertos y $\{V(A) \mid A \subseteq C$ subcoálgebra$\}$ es una familia de cerrados.*

$\square$

A la topología que define la familia de abiertos o la familia de cerrados se le llama **Topología de Zariski**. En lo que sigue consideraremos el espacio topológico $Spec(C)$ con esta topología. Obsérvese que la clausura o cierre de $Q \in Spec(C)$ es $\overline{Q} = \bigcap_\alpha \{V(A_\alpha) \mid Q \in V(A_\alpha)\} = V(Q)$ y para $H \subseteq Spec(C)$, $\overline{H} = \bigcap_\alpha \{V(A_\alpha) \mid H \subseteq V(A_\alpha)\}$. Mientras que un entorno de $P \in Spec(C)$ sería $X(A_P)$ con $A_P \subseteq C$ una subcoálgebra cualquiera de C tal que $P \nsubseteq A_P$, y un entorno de $H \subseteq Spec(C)$ sería $\bigcup_{P \in H} X(A_P)$.

Componentes irreducibles de una coálgebra coconmutativa.

Las componentes irreducibles de una coálgebra coconmutativa contienen una única subcoálgebra simple, además cada coprima contiene también una única simple, por tanto los conjuntos de subcoálgebras coprimas de componentes irreducibles distintas son disjuntos y se caracterizan por contener la simple de esa componente irreducible.

Proposición 80 *Sea C una coálgebra coconmutativa, con $C = \bigoplus_i C_i$ suma de sus componentes irreducibles, entonces*

$$X(C_i) = \{P \mid S_i \nsubseteq P\}$$

$$V(C_i) = \{P \mid S_i \subseteq P\}$$

donde S_i es el único simple de cada componente irreducible. Además $X(C_i)$ es abierto y cerrado a la vez.

$\square$

Base topológica de la topología de Zariski.

Lema 81 *Sea C una coálgebra, $f \in C$ y sea $\Sigma_f = \{A \subset C \mid f \notin A\}$, entonces existe un elemento maximal en Σ_f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{A_\alpha\}$ una cadena de elementos de Σ_f, esto es, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ o $A_\beta \subseteq A_\alpha$ para cada α y β. Sea $A = \bigcup A_\alpha$, si $x \in A$, entonces existe α tal que $x \in A_\alpha$, luego $\Delta(x) \in A_\alpha \otimes A_\alpha \subseteq A \otimes A$ y por tanto A es una subcoálgebra de C. Además si $f \in A$ entonces existe α tal que $f \in A_\alpha$ y $A_\alpha \notin \Sigma_f$ lo cual es absurdo, por tanto $A \in \Sigma_f$. Luego A es una cota superior de la cadena y por el lema de Zorn, existe un elemento maximal en Σ_f. □

Lema 82 *Sea C una coálgebra, $f \in C$ y $A \subseteq C$ una subcoálgebra tal que $f \notin C$, entonces $\Sigma_f^A = \{B \subseteq C \mid A \subseteq B$ y $f \notin B\}$ tiene un elemento maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Análoga al lema anterior. □

Corolario 83 *Si $D \in \Sigma_f^A$ es maximal, entonces D es maximal en Σ_f.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $B \in \Sigma$ tal que $D \subsetneq B$, entonces como $A \subseteq D \subseteq B$, $B \in \Sigma^A$ y $D \subsetneq B$ lo cual es absurdo. □

Llamemos Γ_f al conjunto de todas las subcoálgebras maximales en Σ_f y Γ_f^A al conjunto de todas las subcoálgebras maximales en Σ_A^f. Consideremos el conjunto de abiertos

$$\{X(A) \mid A \in \bigcup_{f \in C} \Gamma_f\}$$

Proposición 84 $\{X(A) \mid A \in \bigcup_{f \in C} \Gamma_f\}$ *es base topológica.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $P \in Spec(C)$, entonces para cada $f \in P$ y para cada $A \in \Gamma_f$, $P \in X(A)$.
2. Sean $X(A)$ y $X(B)$ dos abiertos cualesquiera de nuestro conjunto con $P \in X(A) \cap X(B)$ con $A \in \Gamma_f$ y $B \in \Gamma_g$, entonces como $X(A) \cap X(B) = X(A \wedge B)$, $P \nsubseteq A \wedge B$ y existe $h \in P$ tal que $h \notin A \wedge B$. Consideremos $\Sigma_h^{A \wedge B}$, y por los lemas anteriores tiene un elemento maximal y además $\Sigma_h^{A \wedge B} \subseteq \Sigma_h$, luego existe A_h maximal en Σ_h con $A \wedge B \subseteq A_h$. Entonces

$$P \in X(A_h) \subseteq X(A \wedge B) = X(A) \cap X(B).$$

□

Corolario 85 *Para cada A subcoálgebra de C,*

$$X(A) = \bigcup_{f \in C} \{X(A_f) \mid A_f \in \Gamma_f^A\}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $P \in X(A)$ entonces $P \not\subseteq A$, luego existe $f \in P - A$ y por tanto $P \in X(A_f)$ para cada $A_f \in \Gamma_f^A$. Por otro lado, $A \subseteq A_f$ para cada f y para cada $A_f \in \Gamma_f^A$ entonces $X(A_f) \subseteq X(A)$ y $\bigcup_{f\in C}\{X(A_f) \mid A_f \in \Gamma_f^A\} \subseteq X(A)$. □

Obsérvese que para cada $f \in C$ y para cada $A_f \in \Gamma_f$ se tiene:

$$X(A_f) \supseteq \{P \mid f \in P\}$$

por tanto es un entorno abierto de $\{P \mid f \in P\}$ y

$$V(A_f) \subseteq \{P \mid f \notin P\}$$

Topología de Zariski para simples.

Consideramos C una coálgebra y $Simp(C)$ el conjunto de todas las subcoálgebras simples de C. Es evidente que $Simp(C) \subseteq Spec(C)$. Consideremos la topología inducida en $Simp(C)$, para cada subcoálgebra $D \subseteq C$,

$$X(D) = \{S \in Simp(C) \mid S \not\subseteq D\}$$

$$V(D) = \{S \in Simp(C) \mid S \subseteq D\}$$

Entonces, $\{X(D) \mid D \subseteq C \text{ subcoálgebra}\}$ y $\{V(D) \mid D \subseteq C \text{ subcoálgebra}\}$ definen la **Topología de Zariski** para simples inducida por la de $Spec(C)$.

Proposición 86 *Sea C una coálgebra, entonces la topología de Zariski en $Simp(C)$ es la topología discreta.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\Gamma \subseteq Simp(C)$ consideramos la subcoálgebra $\bigoplus_{S\in\Gamma} S$, es claro que $\Gamma \subseteq V(\bigoplus_{S\in\Gamma} S)$. Por otra parte, si $S_0 \in V(\bigoplus_{S\in\Gamma} S)$ entonces $S_0 \subseteq \bigoplus_{S\in\Gamma} S$, y como S_0 es finito dimensional estará en una suma finita de simples de Γ, por tanto será uno de esos simples y $S_0 \in \Gamma$.

Entonces cualquier subconjunto de simples es cerrado y por tanto también abierto, luego es la topología discreta.

□

2.5 Continuidad.

Dado un morfismo de coálgebras coconmutativas, $f : C \to D$ sabemos que si $P \in Spec(C)$ entonces $f(P) \in Spec(D)$, por tanto podemos definir una aplicación entre los espacios topológico,

$$F : Spec(C) \to Spec(D)$$

por

$$F(P) = f(P),$$

ahora nos interesará saber cómo es esta aplicación, y en particular es natural preguntarse si es continua.

Lema 87 *Sea C una coálgebra coconmutativa y sea $X \subseteq C$ un subespacio vectorial suyo. Si $A \subseteq C$ es una subcoálgebra tal que $A \not\subseteq < X >$ entonces $A \not\subseteq X$.*

Demostración. Supongamos que $A \subseteq X$, entonces $A^\perp \supseteq X^\perp$, pero como $A^\perp$ es un ideal, $A^\perp \supseteq X^\perp C^*$, luego

$$A \subseteq (X^\perp C^*)^\perp = X \wedge 0 =< X > .$$

$\square$

Proposición 88 *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras coconmutativas, entonces $F : Spec(C) \to Spec(D)$ definida por $F(P) = f(P)$ para cada $P \in Spec(C)$, es una aplicación continua.*

Demostración. Ya se comprobó que $f(P) \in Spec(D)$, por tanto está bien definida. Para demostrar que es un aplicación continua, consideraremos $X(B) \subseteq Spec(D)$ un abierto cualquiera de $Spec(D)$, con $B \subseteq D$ una subcoálgebra y veamos que $F^{-1}(X(B))$ es un abierto de $Spec(C)$, bastará con demostrar que

$$F^{-1}(X(B)) = X(< f^{-1}(B) >) = X(B^c).$$

Nótese que

$$F^{-1}(X(B)) = \{P \in Spec(C) \mid f(P) \in X(B)\} = \{P \in Spec(C) \mid f(P) \not\subseteq B\}.$$

Demostramos por doble inclusión:

1. ($\subseteq$) Sea $P \in F^{-1}(X(B))$, es decir, $f(P) \not\subseteq B$. Supongamos que $P \notin X(< f^{-1}(B) >)$, entonces
$$P \subseteq < f^{-1}(B) >= f^{-1}(B) \wedge 0 \subseteq f^{-1}(B)$$
y
$$f(P) \subseteq ff^{-1}(b) \subseteq B,$$
que es absurdo.
2. ($\supseteq$) Sea $P \in X(< f^{-1}(B)) >)$, es decir, $P \not\subseteq < f^{-1}(B) >$, entonces $P \not\subseteq f^{-1}(B)$, y por tanto $f(P) \not\subseteq B$, en efecto, si $f(P) \subseteq B$, tenemos que $P \subseteq f^{-1}f(P) \subseteq f^{-1}(B)$. Luego es claro que $P \in F^{-1}(X(B))$.

$\square$

2.6 Relación entre los espacios topológicos $Spec(C)$ y $Spec(C^*)$. Topología inducida.

Podemos considerar el espacio topológico $Spec(C^*)$ con la topología de Zariski, es decir, para $P \in Spec(C^*)$ e I un ideal de C^*, definimos:

$$X(I) = \{P \in Spec(C^*) \mid I \not\subseteq P\}; \qquad V(I) = \{P \in Spec(C^*) \mid I \subseteq P\}$$

y como $X(C^*) = Spec(C^*)$, $X(0) = \emptyset$, $X(IJ) = X(I) \cap X(J)$ y $X(\cap_\alpha I_\alpha) = \cup_\alpha X(I_\alpha)$, entonces $\{X(I) \mid I \leq C^*\}$ es un familia de abiertos que define la topología de Zariski.

Proposición 89 *La aplicación $G : Spec(C) \to Spec(C^*)$, definida por $G(P) = P^\perp$, es continua.*

Demostración. En primer lugar nótese que está bien definida puesto que $P^\perp$ es un ideal primo y cerrado. Consideramos $Spec(C)$ y $Spec(C^*)$ con las topologías de Zariski respectivas y vamos a demostrar que es continua. En efecto,

$$G^{-1}(X_{C^*}(I)) = \{P \in Spec(C) \mid I \not\subseteq P^\perp\} = X_C(I^\perp)$$

y por tanto es continua. □

Sea

$$\overline{Spec}(C^*) = \{P \in Spec(C^*) \mid P = P^{\perp\perp}\} \subseteq Spec(C^*)$$

el conjunto de todos los ideales primos cerrados, y consideremos la topología de Zariski inducida.

Corolario 90 *$Spec(C)$ y $\overline{Spec}(C^*)$ son espacios topológicos homeomorfos.*

Demostración. G es abierta y por tanto $Spec(C)$ y $\overline{Spec}(C^*)$ son homeomorfos. En efecto, sea $X_C(A)$ un abierto cualquiera de $Spec(C)$, entonces

$$G(X_C(A)) = \{G(D) \mid D \not\subseteq A\} = \{D^\perp \mid D \not\subseteq A\} = \{D^\perp \mid A^\perp \not\subseteq D^\perp\}$$

y este es el abierto asociado a $A^\perp$ para la topología inducida de $\overline{Spec}(C^*)$. □

2.7 Relación entre los espacios topológicos $Spec(C)$ y $Spec(C^*)$. Topología cociente.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $Spec(C^*)$, dados $P, Q \in Spec(C^*)$,

$$PRQ \Leftrightarrow P^{\perp\perp} = Q^{\perp\perp},$$

consideramos $Spec(C^*)/R$ el conjunto cociente con la topología cociente, es decir, dada la proyección:

$$\pi : Spec(C^*) \to Spec(C^*)/R, \ \ \pi(P) = [P];$$

$X \subseteq Spec(C^*)/R$ será una abierto si y sólo si $\pi^{-1}(X)$ es un abierto de $Spec(C^*)$. O lo que es lo mismo, $\pi^{-1}(X)$ es abierto si existe algún ideal $I \leq C^*$ tal que $\pi^{-1}(X) = X(I)$, es decir, $X = \pi(X(I)$. Por tanto, para cada abierto X de $Spec(C^*)$, existe un ideal I de C^* tal que,

$$X = \{[P] \mid I \nsubseteq P\}.$$

Dado una abierto $X(I)$ de $Spec(C^*)$, $\pi(X(I))$ es abierto en $Spec(C^*)/R$ con la topología cociente si $X(I)$ es saturado, es decir, si $X(I)$ es una unión de clases de equivalencia del cociente, en nuestro caso:

Lema 91 *Sea I un ideal de C^* tal que si $I \subseteq P^{\perp\perp}$ entonces $I \subseteq P$ (o si $I \nsubseteq P$ entonces $I \nsubseteq P^{\perp\perp}$), en tal caso $\pi(X(I))$ es abierto en $Spec(C^*)/R$.*

Demostración. En efecto, $X(I) = \pi^{-1}\pi(X(I))$ y por tanto es abierto. $X(I) \subseteq \pi^{-1}\pi(X(I))$, faltaría comprobar la otra inclusión,

$$\pi^{-1}\pi(X(I)) = \{\pi^{-1}([P]) \mid I \nsubseteq P\}$$

sea $[P] \in \pi(X(I))$, y demostremos que $\pi^{-1}([P]) \subseteq X(I)$, sea $Q \in [P]$, sabemos que QRP y por tanto $P^{\perp\perp} = Q^{\perp\perp}$, como $I \nsubseteq P$ entonces $I \nsubseteq P^{\perp\perp} = Q^{\perp\perp}$, y por hipótesis entonces $I \nsubseteq Q$, luego $Q \in X(I)$, $[P] \subseteq X(I)$ como queríamos demostrar. □

Lema 92 *Todos los abiertos de $Spec(C^*)/R$ son de la forma $\pi(X(I))$ con I tal que si $I \subseteq P^{\perp\perp}$ entonces $I \subseteq P$ (o si $I \nsubseteq P$ entonces $I \nsubseteq P^{\perp\perp}$).*

Demostración. Sea X un abierto de $Spec(C^*)/R$, entonces $\pi^{-1}(X) = X(J)$ para algún ideal J de C^* y $\pi(X(J)) = X$ como ya sabemos. Si $J \nsubseteq P$, $P \in X(J)$, pero $X(J)$ es la imagen inversa por π de un abierto del cociente, luego es saturado y $[P] \subseteq X(J)$, por tanto $J \nsubseteq P^{\perp\perp}$.
□

Corolario 93 *Sea I un ideal de C^*, y sea $X(I)$ el abierto asociado de $Spec(C^*)$. Equivalen:*

1. *$X(I)$ es un abierto saturado de $Spec(C^*)$ relativo a la topología cociente de $Spec(C^*)/R$.*
2. *Si $I \subseteq P^{\perp\perp}$ entonces $I \subseteq P$.*
3. *$\pi^{-1}\pi(X(I)) = X(I)$.*
4. *$\pi(X(I))$ es abierto en la topología cociente.*

DEMOSTRACIÓN. (1) y (3) son claramente equivalentes. Que (2) implica (3) y (2) implica (4) está hecho. (4) implica (2) es evidente por el lema anterior. Faltaría demostrar que (3) implica (2), en efecto, si $I \not\subseteq P$ entonces para cada $Q \in \pi^{-1}([P])$ se tiene que $I \not\subseteq Q$, en particular $I \not\subseteq P^{\perp\perp}$. □

Ahora definimos las aplicaciones,

$$\alpha : Spec(C) \to Spec(C^*)/R, \ \ \alpha(D) = [D^{\perp}],$$

y

$$\beta : Spec(C^*)/R \to Spec(C), \ \ \beta([P]) = P^{\perp}.$$

Nótese que:

1. β está bien definida, en efecto, si $[P] = [Q]$ si y sólo si $P^{\perp\perp} = Q^{\perp\perp}$, y entonces
$$\beta([P]) = P^{\perp} = P^{\perp\perp\perp} = Q^{\perp\perp\perp} = Q^{\perp}.$$

2. α y β son la inversa la una de la otra, y por tanto biyectivas, en efecto:
$$(\alpha \circ \beta)([P]) = \alpha(P^{\perp}) = [P^{\perp\perp}] = [P],$$
y
$$(\beta \circ \alpha)(D) = \beta([D^{\perp}]) = D^{\perp\perp} = D.$$

3. β es abierta, en efecto, sea $X \subseteq Spec(C^*)/R$ un abierto, entonces existe un ideal I de C^* tal que por el corolario anterior,
$$\beta(X) = \{P^{\perp} \mid I \not\subseteq P\} = \{P^{\perp} \mid I \not\subseteq P^{\perp\perp}\} = \{P^{\perp} \mid P^{\perp} \not\subseteq I^{\perp}\}) = X(I^{\perp}).$$

4. α no es abierta, en efecto, puesto que para $X(A) \subseteq Spec(C)$ un abierto,
$$\alpha(X(A)) = \{\alpha(D) \mid D \not\subseteq A, \ \ D \in Spec(C)\} = \{[D^{\perp}] \mid D \not\subseteq A \ \ D \in Spec(C)\} =$$
$$= \{[D^{\perp}] \mid A^{\perp} \not\subseteq D^{\perp}, \ D \in Spec(C)\} = \{[P] \mid A^{\perp} \not\subseteq P\} = \pi(X(A^{\perp})).$$
Para que α fuese abierta, $\pi(X(A^{\perp}))$ debería ser un abierto de $Spec(C^*)/R$, y sabemos por el corolario anterior, que esto sólamente ocurre cuando $X(I)$ es saturado relativo a la topología cociente.

Proposición 94 *α es continua.*

□

2.8 Coradical de una coálgebra y el Producto Wedge infinito.

Dada una coálgebra C, se define el **coradical de** C como la suma de todas las subcoálgebras simples de C y lo denotaremos $Corad(C)$.

Sea D una subcoálgebra de C, denotaremos por $D_n = \bigwedge^{n+1} D$, y por $D^\infty = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$, diremos que D es **conilpotente** si $D^\infty = C$. Para indicar que el producto Wedge es en C denotaremos $D^{\infty(C)}$.

Lema 95 *[1] Sea $D \subseteq C$ una subcoálgebra, entonces si D es irreducible, D^∞ es irreducible y además es la componente irreducible de C que contiene a D.*

□

Lema 96 *[1]*

Sea D una subcoálgebra de C conilpotente, entonces $D^\perp \subset Rad(C^*)$.

□

Teorema 97 *[1] Sea C una coálgebra, entonces:*

1. *$Rad(C^*) = (Corad(C))^\perp$.*
2. *Si D es una subcoálgebra de C conilpotente, entonces $Corad(C) \subset D$.*

□

Corolario 98 *[1] $\bigwedge^{n+1}(Corad(C)) = (Rad(C^*)^{n+1})^\perp$.*

□

Proposición 99 *[17] Sea D una subcoálgebra de C entonces $Corad(D) = D \cap Corad(C)$.*

□

Lema 100 *Sean $A \leq D \leq C$ subcoálgebras, entonces $A^{\infty(C)} \supseteq A^{\infty(D)}$.*

Demostración. Evidente, como $A^{\infty(D)}$ es la componente irreducible de D que contiene a A es evidente que está dentro de la componente irreducible de C que contiene a A porque $D \subseteq C$. □

Proposición 101 *Sea $D \leq C$ una subcoálgebra y $R = Corad(D)$, entonces $R^{\infty(C)} = D^{\infty(C)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. □

Observación 102 *Para D una subcoálgebra conilpotente de C, $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración de C. En particular para $D = Corad(C)$ se tiene una filtración que llamaremos* **filtración corradical de** *C.*

□

Corolario 103 *Sea $D \leq C$ una subcoálgebra y $R = Corad(D)$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *D es coidempotente.*
2. *$D = R^{\infty(C)}$.*

□

Corolario 104 *Sea $D \leq C$ una subcoálgebra, $R = Corad(D)$ y $T = T_D = \sum\{A \mid A \leq D$, es coprima$\}$. Entonces $D^\infty = T^\infty = R^\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $Corad(D) \subseteq T_D$, entonces $R^\infty \subseteq T_D^\infty \subseteq D^\infty$ y como ya hemos visto $D^\infty = R^\infty$. □

Lema 105 *Sea $D \leq C$ una subcoálgebra simple (esto es, coprima finito dimensional), entonces para cualquier subcoálgebra $A \leq C$ tenemos que $D \leq A^\infty$ si y sólo si $D \leq A$.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Inmediata, por ser finito dimensional existe algún n tal que $D \subseteq \bigwedge^{n+1} A$ y por ser coprima $D \subseteq A$. ($\Leftarrow$) Evidente. □

Corolario 106 *Sea $A, B \leq C$ dos subcoálgebras. Si $X(A) = X(B)$ entonces $A^\infty = B^\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Evidente. □

Proposición 107 *Sea $P \subseteq C$ una subcoálgebra coprima y finita dimensional, entonces P es simple.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = Corad(P)$, $P = R^{\infty(P)} = \wedge^n R$ por ser finita dimensional, entonces $P \subseteq R = S_1 \oplus .... \oplus S_m = S_1 \wedge ... \wedge S_m$, también un número finito de simples por ser finita dimensional, entonces $P \subseteq S_1$ y es simple o $P \subseteq S_2 \wedge ... \wedge S_m$ y reiterando el proceso P es simple. $\square$

Corolario 108 *Sea C una coálgebra coconmutativa, sea $P \subseteq C$ una subcoálgebra coprima, entonces P contiene una única subcoálgebra simple.*

$\square$

Observación 109 *Si A y D son subcoálgebras con D coprima y A conilpotente entonces $D \subset A$. Por tanto es evidente que si definimos*

$$Conil(C) = \bigcap_{A \subseteq C \ conilpotente} A$$

entonces

$$\sum_{P \in Spec(C)} P \subseteq Conil(C)$$

$\square$

3 Localización en categorías de comódulos

La localización en la categoría de comódulos es estudiada desde distintas perspectivas. En [9] y más directamente en [13] se establece una relación biunívoca con subcoálgebras coidempotentes. Y en [20] se establece a su vez con subconjuntos de comódulos simples y elementos idempotentes del álgebra dual, esta última estudiada con mucho más detalle en [4].

A la vista de éstas y a partir de [9], desarrollamos y estudiamos otro punto de vista que se vislumbra en [20], que clarifica la situación relacionando todos los enfoques anteriores de manera explícita, y que además hace más manejable la localización, evidenciando el papel que juegan los contextos Morita-Takeuchi y describiendo el funtor localización y la categoría cociente.

Para ello se clasifican las subcategorías localizantes en términos de comódulos inyectivos quasi-finitos y en particular en términos de comódulos simples.

3.1 Subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, una subcategoría plena $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ se dice que es **densa** si para cada sucesión exacta en $\mathcal{C}$:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

se verifica que $X \in \mathcal{C}$ si y sólo si $X', X'' \in \mathcal{C}$.

Entonces, en esta situación, existe una categoría abeliana que denotaremos $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ y un funtor exacto $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ únicos salvo equivalencia, de forma que $T(X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{C}$ y es universal en el sentido de que dado $H : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ exacto verificando $H(X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{C}$, existe $\overline{H} : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}'$ tal que $H = \overline{H}T$. A $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ se le llama la **categoría cociente** de $\mathcal{A}$ relativa a $\mathcal{C}$.

Se dice que una subcategoría densa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ es **localizante** si el funtor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ tiene un adjunto a derecha $S : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que se llama **funtor sección**.

Recíprocamente, si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es un funtor covariante exacto entre categorías abelianas y $S : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ es un adjunto a derecha pleno y fiel, entonces $Ker(T) = \{X \in \mathcal{A} \mid T(X) = 0\}$ es una subcategoría localizante de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ es equivalente a $\mathcal{A}/Ker(T)$. (Ver [15]).

Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría de Grothendieck y $\mathcal{C}$ es una subcategoría densa de $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ es localizante si y sólo si es cerrada para sumas directas, o equivalentemente, si cada objeto $X \in \mathcal{A}$ contiene un subobjeto maximal entre los subobjetos de X, que está en $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría de Grothendieck y sea $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{C}$ es **cerrada** o bien que es una **pseudovariedad**, si $\mathcal{C}$ es cerrada para subobjetos, objetos cocientes y sumas directas, es claro que si además $\mathcal{C}$ es cerrada para extensiones, entonces es una subcategoría localizante de $\mathcal{A}$.

Para $\mathcal{A}$ una categoría de Grothendieck, M un objeto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ una subcategoría cerrada de $\mathcal{A}$, denotaremos $\sigma_{\mathcal{C}}(M)$ como la suma de todos los subobjetos de M en $\mathcal{C}$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{C}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

define un funtor exacto a izquierda, subfuntor de la identidad en $\mathcal{A}$. Este funtor es llamado **funtor prerradical** asociado a $\mathcal{C}$; para M un objeto de $\mathcal{A}$, si $M = \sigma_{\mathcal{C}}(M)$ se dice que M es **$\mathcal{C}$-torsión**, y si $0 = \sigma_{\mathcal{C}}(M)$ se dice que es **libre de $\mathcal{C}$-torsión**. Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría localizante de $\mathcal{A}$ entonces, $\sigma_{\mathcal{C}}(M/\sigma_{\mathcal{C}}(M)) = 0$ y en tal caso $\sigma_{\mathcal{C}}$ es un radical.

$\mathcal{M}^C$ y ${}^C\mathcal{M}$ son categorías de Grothendieck.

Dadas dos coálgebras C y D, sean $\mathcal{M}^C$ y $\mathcal{M}^D$ las categorías de comódulos asociadas, diremos que D es una **localización** de C si $\mathcal{M}^D$ es equivalente a $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$ para alguna subcategoría localizante $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}^C$.

3.2 Comódulos inyectivos.

En primer lugar veamos que para cada C-comódulo a derecha inyectivo podemos definir una subcategoría localizante.

Lema 110 *Sea E un C-comódulo a derecha inyectivo, entonces*

$$\mathcal{T}_E = \{M \in \mathcal{M}^C \mid Hom_{-C}(M, E) = 0\}$$

es una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$.

DEMOSTRACIÓN. Tendremos que demostrar que $\mathcal{T}_E$ es una subcategoría cerrada y densa. E_C es inyectivo, luego el funtor $Hom_{-C}(-, E)$ es exacto y dada una sucesión exacta:

$$0 \to U \to M \to W \to 0$$

obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to Hom_{-C}(U, E) \to Hom_{-C}(M, E) \to Hom_{-C}(W, E) \to 0$$

donde $Hom_{-C}(M, E)$ es cero, esto es, $M \in \mathcal{T}_E$ si y sólo si los términos laterales lo son ($U, W \in \mathcal{T}_E$). Por otra parte para demostrar que es una subcategoría cerrada bastará con demostrar que es cerrada para sumas directas, sea $\{M_i\}$ una familia de C-comódulos a derecha, entonces

$$Hom_{-C}(\bigoplus M_i, E) \cong \prod Hom_{-C}(M_i, E)$$

y en consecuencia $\bigoplus M_i$ está en $\mathcal{T}_E$ si cada M_i lo está. $\square$

Proposición 111 *Una subcategoría localizante cualquiera de $\mathcal{M}^C$ es de la forma $\mathcal{T}_E$ para algún C-comódulo a derecha inyectivo E.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría localizante cualquiera de $\mathcal{M}^C$, consideremos la categoría cociente $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$ y los funtores $T : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^C/\mathcal{T}$ y $S : \mathcal{M}^C/\mathcal{T} \to \mathcal{M}^C$ tales que $T \dashv S$. $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$ es una categoría abeliana de tipo finito y usando [18, Th. 5.1] es equivalente a una categoría de comódulos, en particular $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$ posee un cogenerador inyectivo que llamaremos D. Puesto que el funtor sección preserva inyectivos [15, 4.4.7], obtenemos que $E = S(D)$ es un C-comódulo a derecha inyectivo. Además para un C-comódulo a derecha M, se tiene:

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathcal{T} & \Leftrightarrow & Hom_{-C}\mathcal{M}^C/\mathcal{T}(TM, D) = 0 & \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & Hom_{-C}(M, SD) = 0 & \Leftrightarrow M \in \mathcal{T}_E \end{array}$$

$\square$

Dados dos C-comódulos a derecha inyectivos E_1 y E_2, diremos que son **equivalentes** y escribiremos $E_1 \sim E_2$ si cada uno de ellos se embebe en un producto directo de copias del otro.

Lema 112 *Dos C-comódulos a derecha inyectivos son equivalentes si y sólo si en su descomposición en inyectivos indescomponibles aparecen los mismos, posiblemente con distinta multiplicidad.*

$\square$

Proposición 113 *Sean E_1 y E_2 dos C-comódulos a derecha inyectivos, entonces $\mathcal{T}_{E_1} = \mathcal{T}_{E_2}$ si y sólo si $E_1 \sim E_2$.*

Demostración. Si E_1 y E_2 son equivalentes es claro que entonces las subcategorías localizantes son iguales. Para demostrar la otra implicación, consideremos $Z = Hom_{-C}(E_1, E_2)$. Definimos un morfismo $f : E_1 \to E_2^Z$ por $f(x) = \{\alpha(x)\}_{\alpha \in Z}$. Denotemos $K = Ker(f) \subseteq E_1$, entonces $Hom_{-C}(K, E_2) = 0$, ya que por inyectividad, cada morfismo de K en E_2, puede extenderse a uno de E_1 a E_2. Ahora, puesto que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, entonces $Hom_{-C}(K, E_1) = 0$ y como K es un subcomódulo de E_1, entonces $K = 0$, con lo cual f es un embebimiento de E_1 en un producto directo de copias de E_2. Análogamente y por simetría se obtiene otro embebimiento de E_2 en un producto directo de copias de E_1. $\square$

Como hemos visto cada clase de equivalencia de C-comódulos a derecha está determinada por un conjunto de inyectivos indescomponibles.

Consideremos un conjunto $\{S_\beta\}_{\beta \in B} = \Lambda$ de representantes de clases de isomorfía de C-comódulos a derecha simples como en 1.9.

Lema 114 *Cualquier C-comódulo a derecha inyectivo E es equivalente a uno de la forma $X = \bigoplus_{\beta \in \overline{B}} E(S_\beta)$ para un subconjunto $\overline{B}$ de B. Además un tal X es quasi-finito.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es evidente por lo visto anteriormente y para la segunda, basta con tener en cuenta que cada subcomódulo a derecha de C es finitamente cogenerado y en consecuencia quasi-finito [18, 2.1]. $\square$

Entonces para cualquier subcategoría localizante $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}^C$ existe un C-comódulo a derecha inyectivo y quasi-finito X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$. Además asociado a X podemos construir el contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D, C, X, Y, f, g) en donde $D = Coend_{-C}(X)$ e $Y = Cohom_{-C}(X, C)$.

En el siguiente resultado analizamos el importante papel que este contexto tiene en la localización respecto a $\mathcal{T}$.

Teorema 115 *Sea X un C-comódulo a derecha inyectivo y quasi-finito, entonces los funtores,*

$$T = - \square_C Y : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D; \qquad S = - \square_D X : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$$

constituyen una localización de $\mathcal{M}^C$, respecto de la subcategoría localizante $\mathcal{T}_X$.

DEMOSTRACIÓN. Como X es quasi-finito, entonces el funtor $S = - \square_D X$ tiene un adjunto a izquierda $Cohom_{-C}(X, -)$. Además por ser X_C inyectivo el funtor $Cohom_{-C}(X, -)$ es exacto y por [18, 2.1], tenemos que para cada $W \in \mathcal{M}^C$, $Cohom_{-C}(X, W) \cong W \square_C Cohom_{-C}(X, C) = W \square_C Y$, es decir $Cohom_{-C}(X, -)$ es naturalmente isomorfo a $T = - \square_C Y$. Para terminar comprobamos que $Ker(T) = \mathcal{T}_X$. Para ello observemos que si $X \cong SD$ se tiene por la adjunción que para cada $M \in \mathcal{M}^C$,

$$Hom_{-C}(M, X) \leftrightarrow Hom_{-D}(TV, D)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{T}_X \quad &\Leftrightarrow \quad Hom_{-C}(M, X) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad Hom_{-D}(TM, D) = 0 \quad \Leftrightarrow TM = 0 \Leftrightarrow M \in Ker(T) \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 116 *Sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ una subcategoría localizante con X un C-comódulo a derecha quasi-finito e inyectivo. Denotemos $U = Y \square_D X$, entonces el funtor localización $Q = ST : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^C$ es salvo equivalencia $Q = - \square_C U$. En particular, el funtor localización es exacto si y sólo si ${}^C U$ es inyectivo.*

$\square$

Y finalmente por 111, 113 y 115 obtenemos de forma inmediata:

Corolario 117 *Existe una biyección entre subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ y clases de equivalencia de C-comódulos a derecha inyectivos, dada por:*

$$E \longmapsto \mathcal{T}_E; \qquad \mathcal{T} \longmapsto S(D)$$

donde S es el funtor sección asociado a $\mathcal{T}$ y D es un cogenerador inyectivo de $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}$.

$\square$

3.3 Bicomódulos localizantes.

Recordemos de [19] que para una coálgebra C, un **bicomódulo localizante** es un par (U, ψ) formado por un C-bicomódulo y $\psi : C \to U$ un morfismo de C-bicomódulos tales que $U \square_C \psi$ y $\psi \square_C U$ son isomorfismos. Un bicomódulo (U, ψ) se dice que es una **localización perfecta** a derecha si U es quasi-finito e inyectivo como C-comódulo a izquierda.

Dos bicomódulos localización (U, ψ) y (U', ψ') se dice que son **equivalentes** si existe $\mu : U \to U'$ un isomorfismo de C-bicomódulos tal que $\psi = \psi' \circ \mu$.

Y en [19] se establece una correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismos de monomorfismos coplanos a izquierda $\phi : D \to C$ y clases de equivalencia de localizaciones perfectas a izquierda (U, ψ).

Proposición 118 *Sea X un C-comódulo a derecha inyectivo y quasi-finito, consideremos el contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D, C, X, Y, f, g), entonces $(Y \square_D X, g)$ es un bicomódulo localizante.*

Demostración. Puesto que $f : D \cong X \square_C Y$ y los diagramas,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & X \square_C C \arrow[d, "I \square g"] \\ D \square_D X \arrow[r, "f \square I"'] & X \square_C Y \square_D X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & Y \square_D D \arrow[d, "I \square f"] \\ C \square_C X \arrow[r, "g \square I"'] & Y \square_D X \square_C Y \end{tikzcd}$$

son conmmutativos, entonces $g \square I_Y$ es isomorfismo por serlo $Y_I \square f$ y $I_X \square g$ lo es por serlo $f \square I_X$. Si denotamos $U = Y \square_D X$ tendremos que $g \square I_U = g \square I_Y \square Y_X$ y $I_U \square g = I_y \square I_X \square g$ también son isomorfismos. $\square$

3.4 Colocalizaciones.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ densa, consideramos la categoría cociente $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ y el funtor exacto $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$, recordemos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría localizante si T tiene un adjunto a derecha, entonces se dice que $\mathcal{C}$ es una **subcategoría colocalizante** si T tiene un adjunto a izquierda $H : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Estas subcategorías son estudiadas en [12] donde se prueba que si $\mathcal{A}$ es una categoría de Grothendieck entonces cada subcategoría colocalizante es también localizante.

Una subcategoría $\mathcal{T}$ colocalizante de $\mathcal{M}^C$ se dice que es **perfecta** si el funtor adjunto a izquierda H es exacto. Usando el teorema 115 obtenemos:

Proposición 119 *Sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$ y sea (D, C, X, Y, f, g) el contexto Morita-Takeuchi asociado. Entonces:*

1. *$\mathcal{T}$ es colocalizante si y sólo si Y^D es quasi-finito.*
2. *$\mathcal{T}$ es colocalizante perfecta si y sólo si Y^D es quasi-finito e inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Puesto que por el teorema 115 salvo equivalencia $T = - \square_C Y : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D$; se obtiene del lema 48.
2. El adjunto a izquierda de $T = - \square_C Y$ es $H = Cohom_{-D}(Y, -)$, que siempre es exacto a derecha y lo es a izquierda si y sólo si Y^D es inyectivo.

$\square$

Teorema 120 *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría de $\mathcal{M}^C$, si $\mathcal{T}$ es una colocalización perfecta entonces $(Y \square_D X, g)$ es una localización perfecta a izquierda. Donde $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ y (D, C, X, Y, f, g) es el contexto Morita-Takeuchi asociado. Además la coálgebra cociente $E = HT(C)$ es isomorfa a $Coend_{-C}(Y \square_D X)$.*

DEMOSTRACIÓN. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ es una colocalización perfecta si y sólo si Y^D es quasi-finito e inyectivo, por la proposición 118, denotando $U = Y \square_D X$, (U, g) es un bicomódulo localizante. Ahora como Y^D es quasi-finito, también los es $U^C = S(Y^D)$ ya que el funtor preserva quasi-finitud (ver [19, 2.3]). Y siendo X^C e Y^D inyectivos, los funtores $Y \square_D -$ y $X \square_C -$ son exactos y también lo será su composición,

$$(Y \square_D -) \circ (X \square_C -) = U \square_C -$$

con lo cual U^C es también inyectivo.

Puesto que U^C es quasi-finito e inyectivo, asociado habrá un contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D', C, U, D', f', g') con $D' = Coend_{-C}(U)$. Como la localización es perfecta a izquierda consideramos $\phi : D' \to C$ el morfismo coplano asociado, entonces $T = -\square_C D' = (-)^\phi$ y puesto que $(-)_\phi \dashv (-)^\phi$, ha de ser $H \cong (-)_\phi$, y por tanto $HT(C) \cong (C \square_C D')^\phi \cong D'$. $\square$

3.5 Espacio de coeficientes y coálgebras coidempotentes.

Podemos describir las teorías de torsión en comódulos directamente a partir del espacio de coeficientes, recordemos que para un C-comódulo a derecha, $cf(M)$ es la menor subcoálgebra de C tal que,

$$\omega_M(M) \subseteq M \otimes cf(M)$$

por tanto, es natural preguntarse si podemos relacionar las subcategorías localizantes con el espacio de coeficientes.

Proposición 121 *Sea $\mathcal{T}_\sigma$ una subcategoría localizante o clase de torsión en $\mathcal{M}^C$, $M \in \mathcal{M}^C$, equivalen:*

1. $M \in \mathcal{T}_\sigma$.
2. $cf(M) \subseteq \sigma(C^C)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2) Denotemos por D a $cf(M)$ visto como un C-comódulo a derecha. $M \in \mathcal{T}_\sigma$ y D es como comódulo, el cociente de una suma directa de copias de M, luego $D \in \mathcal{T}_\sigma$ y por tanto $D \subseteq \sigma(C^C)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si $D \subseteq \sigma(C^C)$, entonces $D \in \mathcal{T}_\sigma$, y M también es el cociente de una suma directa de copias de D, por tanto $M \in \mathcal{T}_\sigma$. $\square$

Corolario 122 *Sea $\mathcal{T}_\sigma$ una subcategoría localizante en $\mathcal{M}^C$, entonces*

$$\mathcal{T}_\sigma = \{M \in \mathcal{M}^C \mid cf(M) \subseteq \sigma(C^C)\}.$$

$\square$

Corolario 123 *Sea C una coálgebra y $\mathcal{T}_\sigma$ una subcategoría localizante, entonces*

$$\sigma(C) = \sum_{M \in \mathcal{T}_\sigma} cf(M).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \in \mathcal{T}_\sigma$ entonces

$$cf(M) \subseteq \sigma(C^C),$$

por tanto es evidente que $\sum_{M \in \mathcal{T}_\sigma} cf(M) \subseteq \sigma(C^C)$. Por otro lado, $\sigma(C^C) \subseteq cf(\sigma(C^C))$ porque es un coideal a derecha, entonces $\sigma(C^C) \subseteq \sum_{M \in \mathcal{T}_\sigma} cf(M)$. □

Proposición 124 *Sea C una coálgebra, sea $\mathcal{T}_\sigma$ una subcategoría localizante, entonces:*

1. *$\sigma(C^C)$ es una subcoálgebra de C.*
2. *$\sigma(C^C)$ es una subcoálgebra coidempotente.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Evidente a partir de lo anterior.
2. Para que $A = \sigma(C^C)$ sea coidempotente bastará con probar que $A \wedge A$ es torsión, como A es torsión y σ es un radical, es cerrado para extensiones, basta con ver que $(A \wedge A)/A$ es torsión, en efecto, si

$$\omega : (A \wedge A)/A \to ((A \wedge A)/A) \otimes C$$

es la aplicación estructura de $(A \wedge A)/A$ visto como C-comódulo a derecha. Si $x \in A \wedge A$ entonces podemos escribir $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ con $x_{(1)} \in A$ o $x_{(2)} \in A$, por tanto

$$\omega(x + A) = \sum_{(x)} (x_{(1)} + A) \otimes x_{(2)}$$

con $x_{(2)} \in A$ porque $x \in A \wedge A$; en consecuencia

$$\omega_M((A \wedge A)/A) \subseteq ((A \wedge A)/A) \otimes A$$

y $A \wedge A$ es σ-torsión.

□

Proposición 125 *Sea $A \leq C$ una subcoálgebra coidempotente, entonces*

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}^C \mid cf(M) \subseteq A\}$$

define una subcategoría localizante.

DEMOSTRACIÓN. $\mathcal{C}_A$ es cerrada para subcomódulos, cocientes y sumas directas por 34, y también es cerrada para extensiones por 35. □

Como conclusión obtenemos una biyección entre las subcategorías localizantes (clases de torsión) de $\mathcal{M}^C$ y las subcoálgebras coidempotentes de C como ya sabíamos por [13].

Corolario 126 *[13] Existe una biyección entre las subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ y las subcoálgebras coidempotentes de C.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A una subcoálgebra coidempotente de C, definimos la aplicación $A \mapsto \mathcal{C}_A$ y su inversa será $T_\sigma \mapsto \sigma(C^C)$, en efecto, $\mathcal{C}_A$ es una teoría de torsión por el resultado anterior, sea σ_A el radical asociado a $\mathcal{C}_A$, entonces $\sigma_A(C) = A$ porque $cf(A) = A$. Por otra parte si $\mathcal{T}_\sigma$ es una teoría de torsión, sea $A = \sigma(C^C)$ entonces es claro que $\mathcal{C}_A = \mathcal{T}_\sigma$. □

Por otra parte, si $(M, \omega_M) \in \mathcal{M}^C$, entonces $M \cong M \square_C C$, también sabemos que $cf(M)$ es la menor subcoálgebra de C tal que $\omega_M(M) \subseteq M \otimes cf(M)$. Sea $c = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in M \square_C C$, entonces $(\omega_M \otimes I)(c) = (I \otimes \Delta_C)(c)$ y

$$(I \otimes I \otimes \epsilon_C)(\omega_M \otimes I)(c) = (I \otimes I \otimes \epsilon_C)(I \otimes \Delta)(c) = c$$

luego $c \in M \otimes cf(M)$ y por tanto podemos asegurar que

$$M \square_C C = M \square_C cf(M)$$

En particular tenemos el siguiente lema,

Lema 127 *Sea $A \subseteq C$ una subcoálgebra y $M \in \mathcal{M}^C$, equivalen:*

1. $cf(M) \subseteq A$.
2. $M \square_C A \cong M$.

DEMOSTRACIÓN. (1)⇒(2), es claro,

$$M \cong M \square_C C = M \square_C cf(M) = M \square_C A.$$

(2)⇒(1), por (2) $\omega_M(M) \subseteq M \otimes A$, entonces por minimalidad de $cf(M)$, tendremos $cf(M) \subseteq A$.
□

Y tendremos una nueva descripción de $\mathcal{C}_A$,

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}^C \mid M \square_C A \cong M\}.$$

Proposición 128 *Sea X un C-comódulo a derecha inyectivo y quasi-finito, consideremos el contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D, C, X, Y, f, g), entonces:*

1. *La torsión de C es $\sigma_X(C) = Ker(g)$ una subcoálgebra coidempotente de C.*
2. $\mathcal{T}_X = \mathcal{C}_{Ker(g)}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. $T = -\square_C Y$ y $Tg = g\square_C I_Y$ es un isomorfismo, luego $Ker(g) \in \mathcal{T}_X$ y por tanto $Ker(g) \subseteq \sigma_X(C)$. Para demostrar la otra inclusión recordemos que $\sigma_X(C) = \sum_{M\in\mathcal{T}_X} cf(M)$, por tanto bastará con demostrar que para cada $M \in \mathcal{T}_X$ se verifica $cf(M) \subseteq Ker(g)$. Puesto que $M \square_C -$ es un funtor exacto a izquierda entonces tenemos la sucesión exacta,

$$0 \to M \square_C Ker(g) \to M \square_C C \to M \square_C Y \square_D X$$

y como $M \square_C C \cong M$, $M \square_C Y \square_D X = 0$, tendremos que $M \square_C Ker(g) \cong M$ y por tanto usando el lema 127, $cf(M) \subseteq Ker(g)$.

2. Hemos visto que si $M \in \mathcal{T}_X$ entonces $cf(M) \subseteq Ker(g)$, esto es, $M \in \mathcal{C}_{Ker(g)}$. Recíprocamente si $M \in \mathcal{C}_{Ker(g)}$, entonces $M \square_C Y = M \square_A A \square_C Y = 0$ porque A es $\mathcal{T}_X$-torsión, y así $M \in \mathcal{T}_X$.

□

Esta descripción de las subcategorías localizantes que aparece a partir del espacio de coeficientes desde [9], en [13] se detalla equivalentemente como sigue:

Observación 129 *[13] Para $A \subseteq C$ una subcoálgebra coidempotente, un C-comódulo a derecha $M \in \mathcal{M}^C$ será $\mathcal{C}_A$-torsión si $M \in \mathcal{C}_A$, es decir, si $\omega_M(M) \subseteq M \otimes A$, por tanto la clase de $\mathcal{C}_A$-torsión es:*

$$\mathcal{C}_A = \mathcal{T}_{\sigma_A} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid M \in \mathcal{C}_A\} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid A^{\perp}M = 0\}.$$

Recíprocamente si $\mathcal{T}_\sigma$ es una subcategoría cerrada, A es una subcoálgebra que se obtiene a partir del prerradical:

$$A = \sigma(C^C).$$

Análogamente ocurre para las subcategorías localizantes y en este caso σ es un radical y A es una subcoálgebra coidempotente.

Y en [19] se establece a su vez una correspondencia biyectiva entre las subcategorías localizantes $\mathcal{C}_A$ que son colocalizaciones y el conjunto de aquellas subcoálgebras coidempotentes tales que C/A es un C-comódulo a derecha quasi-finito.

3.6 Factores de composición.

Lema 130 *Sea X un C-comódulo a derecha quasi-finito e inyectivo, sea (D, C, X, Y, f, g) el contexto Morita-Takeuchi inyectivo asociado. Para S un C-comódulo a derecha simple son equivalentes:*

1. S es X-torsión.

2. $Hom_{-C}(S, X) = 0$.

3. $Cohom_{-C}(X, S) = 0$.

4. $S \,\square_C\, Y = 0$.

5. $X \,\square_C\, S^* = 0$.

6. $Hom_{C-}(S^*, Y) = 0$.

7. $Cohom_{C-}(Y, S^*) = 0$.

Demostración. La equivalencia entre las cuatro primeras condiciones son consecuencia inmediata de 115. Para la (5), bastará con tener en cuenta que X_C es quasi-finito, entonces $Hom_{-C}(S, X)$ es de dimensión finita, y por tanto $Hom_{-C}(S, X)^* \cong X \,\square_C\, S^*$. Por simetría obtenemos las equivalencias (6) y (7). $\square$

Lema 131 *Sea $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$. Entonces si $M \in \mathcal{M}^C$ equivalen:*

1. M es $\mathcal{T}_X$-torsión.

2. Los factores de composión de M son $\mathcal{T}_X$-torsión.

Demostración. En $\mathcal{M}^C$ cada objeto es unión de sus subobjetos de longitud finita y como $\mathcal{T}$ es una subcategoría localizante, es cerrada para límites inductivos, por tanto M es torsión si y sólo si lo son cada uno de sus subcomódulos de longitud finita y podemos por tanto suponer sin pérdida de generalidad que M es de longitud finita. Supongamos que $M \in \mathcal{M}^C$ de longitud finita, y demostremos que, $M \in \mathcal{T}_X$ si y sólo si cada factor de composición de M es torsión. Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n = W$ una serie de composición de longitud n de M, entonces demostremos que

$$M \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow M_i/M_{i-1} \in \mathcal{T}_X,\ \forall i = 1, ..., n$$

($\Rightarrow$) Evidente porque $\mathcal{T}_X$ es cerrada para subobjetos y cocientes.

($\Leftarrow$) $M_1 \in \mathcal{T}_X$ y $M_2/M_1 \in \mathcal{T}_X$ entonces $M_2 \in \mathcal{T}_X$, por tanto como $M_2/M_3 \in \mathcal{T}_X$, $M_3 \in \mathcal{T}_X$ y reiterando el proceso $M = M_n \in \mathcal{T}_X$. $\square$

Observación 132 *Sea $M \in \mathcal{M}^C$, entonces existe $B_M \subseteq B$ de forma que $\{S_\beta\}_{\beta \in B_M}$ es un conjunto de representantes de clases de isomorfía de comódulos simples que son factores de composición de M. Entonces podemos rescribir el resultado anterior como sigue:*

Sea $X = \bigoplus_{\beta \in \overline{B}} E(S_\beta)$, entonces $M \in \mathcal{M}^C$ es $\mathcal{T}_X$-torsión si y sólo si $B_M \cap \overline{B} = \emptyset$.

Obsérvese también que

$$R = Corad(\sigma_X(C^C)) = \sum_{\beta \in \overline{B}} cf(S_\beta)$$

y

$$R^{\infty(C)} = \sigma_X(C^C).$$

$\square$

3.7 Lateralidad.

De forma análoga cada subcategoría localizante de ${}^C\mathcal{M}$ será de la forma ${}_Y\mathcal{T}$ para ${}^CY$ un C-comódulo a izquierda quasi-finito e inyectivo. Y asociada a ella tenemos un contexto Morita-Takeuchi inyectivo (D, C, X, Y, f, g) donde $D = Coend_{C-}(Y)$ y $X = Cohom_{C-}(Y, C)$; siendo la localización asociada,

$${}^C\mathcal{M} \xrightarrow{X \,\square_C\, -} {}^D\mathcal{M}$$

Proposición 133 *Existe una biyección entre el conjunto de las subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ y el conjunto de las subcategorías localizantes de ${}^C\mathcal{M}$, que a cada $\mathcal{T}_X$ le asigna ${}_Y\mathcal{T}$ donde $Y = Cohom_{C-}(X, C)$. Además:*

1. $\mathcal{M}^C/\mathcal{T}_X \sim \mathcal{M}^D \Leftrightarrow^C \mathcal{M}/{}_Y\mathcal{T} \sim {}^D\mathcal{M}$.
2. *El bicomódulo localizante asociado a $\mathcal{T}_X$ y ${}_Y\mathcal{T}$ es el mismo.*
3. *Si $\mathcal{T}_X = \mathcal{C}_A$ entonces ${}_Y\mathcal{T} = {}_A\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. X_C es quasi-finito e inyectivo, consideremos (D, C, X, Y, f, g) el contexto Morita-Takeuchi inyectivo asociado, entonces sabemos por [18] que ${}_DY$ es quasi-finito e inyectivo y el contexto Morita-Takeuchi asociado es el mismo, luego es evidente la relación biyectiva. (1) es inmediato y para comprobar (2) basta con observar que el bicomódulo localizante asociado es $(Y \,\square_D\, X, g)$. Y por último también sabemos que $A = Ker(g)$, y así $\mathcal{T}_X = \mathcal{C}_A$ y ${}_Y\mathcal{T} = {}_A\mathcal{C}$.
$\square$

3.8 Localizaciones estables.

Sea C un coálgebra, una subcategoría localizante $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}^C$ es **estable** si es cerrada para envolventes inyectivas, esto es, si $M \in \mathcal{T}$ entonces $E(M^C) \in \mathcal{T}$. Recordemos que una subcategoría localizante $\mathcal{T} = \mathcal{C}_A$ es estable si y sólo si A es inyectivo como C-comódulo a derecha (véase [13, 4.6]).

En [11] se demuestra un teorema de descomposición para coálgebras, para ello asociada a una coálgebra C se define un grafo orientado $\Gamma_C = (V, F)$ cuyos vértices son las subcoálgebras simples de C ($V = Simp(C)$) y existirá una flecha entre dos vértices $S_1, S_2 \in Simp(C)$ si $S_2 \wedge S_1 \neq S_1 + S_2$.

Una **componente link-indescomponible** de C es una subcoálgebra D de C maximal respecto a ser conexo el grafo Γ_D. Se dirá que $S_1, S_2 \in Simp(C)$ están conectadas si están en la misma componente conexa de Γ_C.

Teorema 134 *[11] $C = \bigoplus C_\alpha$, donde C_α son las componentes link-indescomponibles de C.*

$\square$

Proposición 135 *[7] Sea S_1 y S_2 dos C-comódulos a derecha simples. Equivalen:*

1. *$Hom_{-C}(E(S_1), E(S_2)) \neq 0$.*
2. *$cf(S_1)$, $cf(S_2)$ están en la misma componente conexa de Γ_C.*

$\square$

Dada una subcoálgebra localizante $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}^C$, denotaremos por $k(\mathcal{T})$ al conjunto de las subcoálgebras simples T de C tales que T es libre de $\mathcal{T}$-torsión. Como hemos visto anteriormente podemos recuperar $\mathcal{T}$ desde $k(\mathcal{T})$ como sigue, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ con $X = \bigoplus_{T \in k(\mathcal{T})} E(T^C)$.

Teorema 136 *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$. Equivalen:*

1. *$\mathcal{T}$ es estable.*
2. *$k(\mathcal{T})$ es unión de componentes conexas de Γ_C.*
3. *$\sigma_{\mathcal{T}}(C)$ es la suma directa de las componentes link-indescomponibles de C.*
4. *$\sigma_{\mathcal{T}}(C)$ es inyectivo como C-comódulo a derecha.*
5. *$\sigma_{\mathcal{T}}(C)$ es inyectivo como C-comódulo a izquierda.*

DEMOSTRACIÓN. (1)$\Rightarrow$(2): Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ con $X = \bigoplus_{T \in k(\mathcal{T})} E(T^C)$.

Sea T una subcoálgebra simple de C que no pertenece a $k(\mathcal{T})$ bastará con demostrar que no puede estar en ninguna componente conexa que otra simple de $k(\mathcal{T})$. T será de la forma $cf(S_1)$ para algún S_1, C-comódulo a derecha simple $\mathcal{T}$-torsión. Como $\mathcal{T}$ es estable, entonces $E(S_1) \in \mathcal{T}$ y por tanto $Hom_{-C}(E(S_1), X) = 0$, luego $Hom_{-C}(E(S_1), E(S_2)) = 0$ para cada C-comódulo a derecha simple S_2 libre de torsión. Entonces por 135 obtenemos lo que queremos.

(2)⇒(3): Siendo $k(\mathcal{T})$ unión de componentes conexas de Γ_C, entonces X será una suma de componentes link-indescomponibles de C. Es decir,

$$C = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha; \qquad X = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda'} C_\alpha.$$

Entonces $\bigoplus_{\alpha\notin\Lambda'} C_\alpha$ será torsión y $(C/\bigoplus_{\alpha\notin\Lambda'} C_\alpha) \cong X$ libre de torsión, luego $\sigma_{\mathcal{T}}(X) = \bigoplus_{\alpha\notin\Lambda'} C_\alpha$ es suma de componentes link-indescomponibles de C.

(3)⇒(4): Evidente.
(4)⇒(1): Usando ([13], 4.6) y la proposición 128 es inmediato.
(2)⇔(5): Por simetría, ya que (2) no depende del lado que se considere.

□

Corolario 137 *Sea A una subcoálgebra coidempotente de C. Equivalen:*

1. *A es inyectivo como C-comódulo a derecha.*
2. *A es inyectivo como C-comódulo a izquierda.*
3. *A es una suma de componentes link-indescomponibles de C.*
4. *A es un sumando directo de C como coálgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el corolario 126 cada subcoálgebra coidempotente A de C es de la forma $\sigma_{\mathcal{T}}(C^C)$ para alguna subcategoría localizante $\mathcal{T}$. Y por el teorema anterior tenemos (1)⇔(2)⇔(3).
(3)⇒(4): Inmediato por el teorema 134.
(4)⇒(1): Evidente. □

3.9 Localización y elementos idempotentes.

Consideremos $\{S_\beta\}_{\beta\in B}\Lambda$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfía de C-comódulos a derecha simples.

Hemos visto que cualquier subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$ es de la forma $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E$ para algún C-comódulo a derecha inyectivo E. Además existe un C-comódulo a derecha quasi-finito e inyectivo de la forma $X = \bigoplus_{\beta\in\overline{B}} E(S_\beta)$ para algún subconjunto $\overline{B}$ de B, con $X \sim E$ y por tanto $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_X$.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de C-comódulos inyectivos a derecha.

Como C^C es inyectivo y S_β se embebe en C, X se embebe en C y entonces existe un idempotente $e \in C^*$ tal que $X_C \cong C \leftharpoonup e$.

Parece lógico que para dos elementos idempotentes $e, e' \in C^*$ se pueda definir una relación de equivalencia de manera que $C \leftharpoonup e$ y $C \leftharpoonup e'$ sean dos C-comódulos a derecha inyectivos equivalentes. En efecto, e y e' se dice que son **semejantes** si los comódulos inyectivos $C \leftharpoonup e$ y $C \leftharpoonup e'$ tienen los mismos factores de composición en su zócalo (salvo multiplicidades). Consideremos $\mathcal{I}$ el conjunto de las clases de semejanza de idempotentes en C^*. Entonces los conjuntos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{E}$ son biyectivos.

Es claro que además los conjuntos, partes de Λ e $\mathcal{I}$ también son biyectivos y dicha biyección para $e \in \mathcal{I}$, viene dada por $e \mapsto \{S \in \Lambda \mid e \rightharpoonup S = 0\}$ (véase [20]).

En resumen podemos decir que existe una biyección entre:

1. Subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$.
2. Clases equivalencia de C-comódulos a derecha inyectivos.
3. Subcoálgebras coidempotentes de C.
4. Subconjuntos de Λ (o de B).
5. Clases de semejanza de idempotentes en C^*.

Antes de continuar, en este apartado estudiamos y desarrollamos con detalle las estructuras y propiedades de $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$, $e \rightharpoonup C$, $C \leftharpoonup e$ y $e \rightharpoonup M$ para $e \in C^*$ idempotente. La mayor parte de lo expuesto en esta sección es conocido y puede verse en [4] o [20]

Estructura de coálgebra de $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$.

Sea C una coálgebra y $e \in C^*$ un elemento idempotente. Definimos

$$I = (1-e) \rightharpoonup C + C \leftharpoonup (1-e)$$

Obsérvese que este subespacio verifica que $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $e(I) = 0$, en efecto, si $x \in I$, entonces $x = (1-e) \rightharpoonup y + z \leftharpoonup (1-e)$ para algunos $y, z \in C$ y

$$\Delta x = \sum_{(y)} y_{(1)} \otimes (1-e) \rightharpoonup y_{(2)} + \sum_{(z)} z_{(1)} \leftharpoonup (1-e) \otimes z_{(2)} \in C \otimes I + I \otimes C.$$

$$e(x) = e((1-e) \rightharpoonup y) + e(z \leftharpoonup (1-e)) = 0.$$

Consideramos el espacio vectorial cociente C/I, este cociente tiene estructura de coálgebra, en efecto, si $x \in C$ y $\Delta_C(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, entonces

1. La comultiplicación es: $\Delta_{C/I}(x+I) = \sum_{(x)}(x_{(1)}+I)\otimes(x_{(2)}+I)$.
2. La counidad: $\epsilon_{C/I}(x+I) = e(x)$.

Obsérvese que C/I no es cociente como coálgebras sino como espacios vectoriales y que tiene estructura de coálgebra para la comultiplicación y counidad que hemos definido.

Proposición 138 *Sea C una coálgebra y $e^2 = e \in C^*$ un idempotente, entonces:*

1. *$e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ tiene una estructura de coálgebra.*
2. *Además $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ con la estructura de coálgebra del apartado anterior es isomorfa a la coálgebra C/I.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Definimos la comultiplicación y la counidad,

   (a) Si para $x \in C$, $\Delta_C(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, la comultiplicación será:

   $$\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \sum_{(x)}(e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e)\otimes(e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e).$$

   Está bien definida, sean $x, y \in C$ tales que $e \rightharpoonup x \leftharpoonup e = e \rightharpoonup y \leftharpoonup e$, llamamos $t = x - y \in I$, entonces $\Delta_C(t) = \sum_{(t)} t_{(1)} \otimes t_{(2)} \in I \otimes C + C \otimes I$, entonces $t_{(1)} \in I$ o $t_{(2)} \in I$, por tanto

   $$\Delta(e \rightharpoonup t \leftharpoonup e) = \sum_{(t)}(e \rightharpoonup t_{(1)} \leftharpoonup e)\otimes(e \rightharpoonup t_{(2)} \leftharpoonup e) = 0.$$

   La coasociatividad es evidente.

   (b) La counidad se define:

   $$\epsilon_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = e(x).$$

   Y en efecto verifica la propiedad de la counidad,

   $$(I \otimes \epsilon_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e})(\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)) = \sum_{(x)}(e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e)e(x_{(2)}) =$$

   $$= e \rightharpoonup (\sum_{(x)}(e(x_{(2)})x_{(1)}) \leftharpoonup e = e \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) \leftharpoonup e = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e.$$

2. Definimos las aplicaciones lineales,

   (a)

   $$\Phi : \quad C/I \longrightarrow e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$$

   definida por $\Phi(x+I) = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e$, que está bien definida puesto que si $x \in I$ entonces $e \rightharpoonup x \leftharpoonup e = 0$.

(b)

$$\pi : e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \longrightarrow C/I$$

definida por $\pi(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = (e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) + I$.

Ambas aplicaciones son morfismos de coálgebras, en efecto los diagramas:

$$\begin{tikzcd} C/I \arrow[r, shift left, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}"'] & e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \arrow[l, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}"] \\ C/I \otimes C/I \arrow[r, shift left, "\Phi\otimes\Phi"] & (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \arrow[l, shift left, "\pi\otimes\pi"] \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} C/I \arrow[rr, shift left, "\Phi"] \arrow[dr, "\epsilon_{C/I}"'] & & e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \arrow[ll, shift left, "\pi"] \arrow[dl, "\epsilon_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Y una es la inversa de la otra, en efecto, $\Phi(\pi(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)) = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e$ y $\pi(\Phi(x+I)) = x + I$ porque $(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) + I = x + I$ puesto que es claro que

$$C = (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) + ((1-e) \rightharpoonup C \leftharpoonup e) + (C \leftharpoonup (1-e))$$

porque $x = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e + (1-e) \rightharpoonup x \leftharpoonup e + x \leftharpoonup (1-e)$ para cualquier $x \in C$.

□

Obsérvese que utilizando 11 podríamos haber definido la comultiplicación de $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ directamente como

$$\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e} = (e_l \otimes e_r)\Delta_C$$

donde e_l y e_r son las aplicaciones, $e_l(x) = e \rightharpoonup x$ y $e_r(x) = x \leftharpoonup e$; en efecto, para un elemento cualquiera $(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) \in (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$:

$$(e_l \otimes e_r)\Delta_C(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = (e_l \otimes e_r)(\sum_{(x)}(x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \leftharpoonup x_{(2)})) = \Delta_{(e\rightharpoonup C\leftharpoonup e)}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e).$$

Proposición 139 *Sea C una coálgebra y $e^2 = e \in C^*$ un elemento idempotente. Entonces $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$ y eC^*e son álgebras isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\alpha \in (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$, podemos definir $\overline{\alpha} \in C^*$ como

$$\overline{\alpha}(x) = \alpha(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)$$

observémos que $\overline{\alpha}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \alpha(e^2 \rightharpoonup x \leftharpoonup e^2) = \alpha(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)$ y entonces para cualquier $x \in C$,

$$e\overline{\alpha}e(x) = \overline{\alpha}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \alpha(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \overline{\alpha}(x)$$

por tanto $\overline{\alpha} = e\overline{\alpha}e$.

Usando lo anterior podemos definir la aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^* & \xrightarrow{\Psi} & eC^*e \\ & & \\ \alpha & \longmapsto & \overline{\alpha} = e\overline{\alpha}e \end{array}$$

Ψ es un isomorfismo de álgebras, para demostrarlo comprobamos que sea biyectiva y morfismo de anillos.

En efecto, dado $\beta \in C^*$, $e\beta e \in eC^*e$,

$$(e\beta e)(x) = (e\beta e)(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \beta(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)$$

por tanto, observamos que $\beta : (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \longrightarrow K$, y $\beta(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = (e\beta e)(x)$, luego sería la preimagen de $e\beta e$ y Ψ es sobreyectiva.

Sea $\alpha \in Ker(\Psi)$, entonces $\overline{\alpha} = 0$, luego $\alpha(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = 0$ para cada $x \in C$, entonces $\alpha = 0$ y Ψ es inyectiva.

Observemos que

$$1_{(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \epsilon_{(e \leftharpoonup C \rightharpoonup e)^*}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = e(x)$$

y

$$1_{eC^*e} = e1_{C^*}e = e\epsilon e = e$$

entonces Ψ conserva el elemento 1,

$$\Psi(1_{(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*}) = \Psi(e) = e^3 = e$$

y por otra parte si $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$,

$$\Psi(\alpha\beta)(x) = (\alpha\beta)(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \sum_{(x)} \alpha(e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e) =$$

$$\sum_{(x)} \overline{\alpha}(x_{(1)})\overline{\beta}(x_{(2)}) = ((e\overline{\alpha}e)(e\overline{\beta}e))(x)$$

por tanto $\Psi(\alpha\beta) = \Psi(\alpha)\Psi(\beta)$, y Ψ es también morfismo de anillos. $\square$

De hecho podríamos razonar más directamente, si C es una coálgebra y $e^2 = e \in C^*$,

$$C = (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \oplus (e \rightharpoonup C \leftharpoonup (1-e)) \oplus ((1-e) \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \oplus ((1-e) \rightharpoonup C \leftharpoonup (1-e))$$

como $Hom_K(-, K)$ es inyectivo, entonces

$$C^* = (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^* \oplus (e \rightharpoonup C \leftharpoonup (1-e))^* \oplus ((1-e) \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^* \oplus ((1-e) \rightharpoonup C \leftharpoonup (1-e))^*$$

y es claro que

$$eC^*e = e(eC^*e)e = (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*.$$

El bicomódulo $e \rightharpoonup C$.

Sea C una coálgebra y $e \in C^*$ un idempotente, entonces el subespacio vectorial $e \rightharpoonup C$ tiene estructura de $(C, e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-bicomódulo, en efecto, las aplicaciones estructura son,

$$\Delta_{|e \rightharpoonup C} : (e \rightharpoonup C) \longrightarrow (C \otimes e \rightharpoonup C)$$

y

$$\rho : (e \rightharpoonup C) \longrightarrow ((e \rightharpoonup C) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e))$$

definida por $\rho(e \rightharpoonup x) = \sum_{(x)} e \rightharpoonup x_{(1)} \otimes e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e$ donde $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Como $\Delta_{|e \rightharpoonup C}$ es evidente que es aplicación estructura, demostramos que lo es ρ, por un lado,

$$(\rho \otimes I)(\rho(e \rightharpoonup x)) = \sum_{(x)} e \rightharpoonup x_{(11)} \otimes e \rightharpoonup x_{(12)} \leftharpoonup e \otimes e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e =$$

y por la coasociatividad de Δ,

$$= \sum_{(x)} e \rightharpoonup x_{(1)} \otimes e \rightharpoonup x_{(21)} \leftharpoonup e \otimes e \rightharpoonup x_{(22)} \leftharpoonup e = (I \otimes \Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e})(\rho(x))$$

y por otro lado

$$(I \otimes e)(\rho(x)) = \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(1)}) e(e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e) = \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(1)}) e(x_{(2)}) = e \rightharpoonup x$$

Faltaría comprobar la compatibilidad,

$$(I \otimes \rho)(\Delta_{|e \rightharpoonup C}(e \rightharpoonup x)) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes e \rightharpoonup x_{(21)} \otimes e \rightharpoonup x_{(22)} \leftharpoonup e =$$

por la coasociatividad de Δ_C,

$$= \sum_{(x)} x_{(11)} \otimes e \rightharpoonup x_{(12)} \otimes e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e = (\Delta_{|e \rightharpoonup C} \otimes I)(\rho(x))$$

con lo que queda demostrado.

Análogamente podemos comprobar que $C \leftharpoonup e$ es un $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e, C)$-bicomódulo.

Estructura de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha de $e \rightharpoonup M$.

Proposición 140 *Sea C una coálgebra, $e = e^2 \in C^*$ un idempotente y M un C-comódulo a derecha, entonces $e \rightharpoonup M$ es un $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha.*

DEMOSTRACIÓN. Supogamos que $\omega_M : M \longrightarrow M \otimes C$ es la aplicación estructura de M. Definimos $\omega : (e \rightharpoonup M) \to (e \rightharpoonup M) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$ por

$$\omega(e \rightharpoonup x) = \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(0)}) \otimes (e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e)$$

para $\omega_M(x) \sum_{(x)} x_{(0)} \otimes x_{(1)}$. ω le da a $e \leftharpoonup M$ estructura de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha, en efecto, se tienen los diagramas conmutativos,

1.

$$\begin{tikzcd}
e \rightharpoonup M \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, equal] & (e \rightharpoonup M) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \arrow[dl, "I \otimes \epsilon_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}"] \\
e \rightharpoonup M &
\end{tikzcd}$$

$$(I \otimes \epsilon_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e})(\omega(e \rightharpoonup x)) = \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(0)}) e(x_{(1)}) = e \rightharpoonup (\sum_{(x)} x_{(0)} e(x_{(1)}) = e(e \rightharpoonup x) = e \rightharpoonup x.$$

2.

$$\begin{tikzcd}
e \rightharpoonup M \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\omega"'] & (e \rightharpoonup M) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \arrow[d, "I \otimes \Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)}"] \\
(e \rightharpoonup M) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \arrow[r, "\omega \otimes I"'] & (e \rightharpoonup M) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)
\end{tikzcd}$$

□

De forma parecida a cuando describimos la estructura de coálgebra de $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$, podríamos haber definido la aplicación estructura de $e \rightharpoonup M$ como:

$$\omega_{e \rightharpoonup M} = (e_l \otimes e_r) \circ \omega_M.$$

y en tal caso tenemos el siguiente funtor.

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{M}^C \longrightarrow \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}$$

$$(M, \omega_M) \longmapsto (e \rightharpoonup M, (e_l \otimes e_r) \circ \omega_M)$$

Obsérvese que de forma análoga para M un C-comódulo a izquierda, $M \leftharpoonup e$ tiene estructura de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a izquierda, con aplicación estructura:

$$\omega_{M \leftharpoonup e} = (e_l \otimes e_r) \circ \omega_M.$$

Como ya hemos visto $eC^*e \cong (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$, además para $M \in \mathcal{M}^C$ sabemos que M es también un C^*-módulo a izquierda, y $e \rightharpoonup M$ es un $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha, entonces $e \rightharpoonup M$ también tendrá una estructura de eC^*e-módulo a izquierda que podemos conseguir de distintas formas:

1. Partiendo de la estructura de C^*-módulo a izquierda de M, $e \rightharpoonup M$ es un eC^*e-módulo a izquierda, en efecto, sea $e\beta e \in eC^*e$ y $e \rightharpoonup x \in e \rightharpoonup M$ entonces (propiedad pseudoasociativa de la acción 1.4)

$$(e\beta e) \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) = (e\beta e^2) \rightharpoonup x = e \rightharpoonup ((\beta e) \rightharpoonup x) \in e \rightharpoonup M.$$

2. Por restricción de escalares utilizando el isomorfirmo Ψ de 3.9. Sea $\alpha \in (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$ y $e \rightharpoonup x \in e \rightharpoonup M$, entonces

$$\alpha \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) = \Psi(\alpha) \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) = (e\overline{\alpha}e) \rightharpoonup x = e \rightharpoonup (\overline{\alpha}e \rightharpoonup x).$$

3. Partiendo de la estructura de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha de $(e \rightharpoonup M)$. $e \rightharpoonup M$ es $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulo a derecha y por tanto es $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$-módulo a izquierda, para $\alpha \in (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$ y $e \rightharpoonup x \in e \rightharpoonup M$, si $\omega_{e \rightharpoonup M}(x) = \sum_{(x)}(e \rightharpoonup x_{(0)}) \otimes (e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e)$ (por 140) tenemos

$$\alpha \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) = \sum_{(x)}(e \rightharpoonup x_{(0)})\alpha(e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e) =$$

$$= \sum_{(x)}(e \rightharpoonup x_{(0)})\overline{\alpha}(x_{(1)}) = e\overline{\alpha} \rightharpoonup x = (e\overline{\alpha}e) \rightharpoonup x$$

Obsérvese que la estructura de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)^*$-módulo a izquierda de $e \rightharpoonup M$ que obtenemos por cualquiera de los métodos anteriores siempre es la misma.

Localización.

Como ya hemos visto $e \rightharpoonup C \in {}^{C}\mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}$ y $C \leftharpoonup e \in {}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}\mathcal{M}^{C}$. Podemos definir el funtor,

$$F : \mathcal{M}^{C} \longrightarrow \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}, \qquad M \longmapsto e \rightharpoonup M$$

que es lineal, exacto a izquierda y preserva sumas directas, por [18, 2.1] es naturalmente isomorfo al funtor $- \square_C (e \rightharpoonup C)$. Por tanto, si $M \in \mathcal{M}^C$, entonces tenemos el isomorfismo de $(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$-comódulos a derecha

$$e \rightharpoonup M \cong M \square_C e \rightharpoonup C$$

y en particular $C \leftharpoonup e \square_C e \rightharpoonup C \cong e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$. (Ver lema 46).

Lema 141 *Sea $A \subseteq C$ una subcoálgebra y $e \in C^*$ un elemento idempotente entonces*

$$e \rightharpoonup A = 0 \Leftrightarrow A \leftharpoonup e = 0 \Leftrightarrow e(A) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in C$ y $e \in C^*$, si $\Delta_C(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, entonces $e \rightharpoonup x = \sum_{(x)} x_{(1)} e(x_{(2)})$ y

$$e(e \rightharpoonup x) = \sum_{(x)} e(x_{(1)})e(x_{(2)}) = e(x \leftharpoonup e)$$

y por otro lado,

$$\sum_{(x)} e(x_{(1)})e(x_{(2)}) = \sum_{(x)} e(x_{(1)})\epsilon(e \rightharpoonup x_{(2)}) = \epsilon(e \rightharpoonup x) = e(x)$$

luego $e(e \rightharpoonup x) = e(x \leftharpoonup e) = e(x)$ para cada $x \in C$ y $e \in C^*$.

Por tanto si $e \rightharpoonup A = 0$, entonces $e(A) = 0$, luego para $x \in A$, $x \leftharpoonup e = \sum_{(x)} e(x_{(1)}))x_{(2)}$ con $x_{(1)} \in A$ y en consecuencia $e(x_{(1)}) = 0$, asi que $x \leftharpoonup e = 0$ y $A \leftharpoonup e = 0$. Por simetría se obtiene la otra implicación. $\square$

Lema 142 *Sea C una coálgebra, $e \in C^*$ un idempotente, entonces existe un morfismo de C-bicomódulos,*

$$\psi : C \longrightarrow e \rightharpoonup C \square_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e} C \leftharpoonup e, \qquad x \longmapsto \sum_{(x)} e \rightharpoonup x_{(1)} \otimes x_{(2)} \leftharpoonup e.$$

Además $Ker(\psi)$ es la mayor subcoálgebra anulada por e.

DEMOSTRACIÓN. Demostrar que ψ es un morfismo de C-bicomódulos es fácil usando la coasociatividad de Δ_C. Para demostrar que $Ker(\psi)$ es la mayor subcoálgebra anulada por e, primero comprobamos que $e \rightharpoonup Ker(\psi) = 0$, en efecto, $(I \otimes \epsilon_C)\psi(x) = e \rightharpoonup x$ y por tanto $e \rightharpoonup Ker(\psi) = 0$, por otra parte si $e \rightharpoonup A = 0$ para alguna subcoálgebra $A \subseteq C$ entonces $A \leftharpoonup e = e(A) = 0$ y como $\Delta_C(A) \subseteq A \otimes A$, entonces $\psi(A) = 0$ y por tanto $A \subseteq Ker(\psi)$. $\square$

Proposición 143 *[4] Sea C una coálgebra y $e \in C^*$ un elemento idempotente, entonces*

$$(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e, C, C \leftharpoonup e, e \rightharpoonup C, f, g)$$

es un contexto Morita-Takeuchi inyectivo, donde $f : e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \cong C \leftharpoonup e \,\square_C\, e \rightharpoonup C$ y $g = \psi$.

$\square$

Entonces y por la proposición 128,

$$(e \rightharpoonup C \,\square_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}\, C \leftharpoonup e, \psi)$$

es un bicomódulo localizante, y

$$Ker(\psi) = \sigma_{C\leftharpoonup e}(C^C)$$

es una subcoálgebra coidempotente de C y además $\mathcal{T}_{C\leftharpoonup e} = \mathcal{C}_{Ker(\psi)}$.

Corolario 144

1. *$e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \cong Coend_{-C}(C \leftharpoonup e) \cong Coend_{C-}(e \rightharpoonup C)$.*
2. *$e \rightharpoonup C \cong Cohom_{-C}(C \leftharpoonup e, C)$.*
3. *$C \leftharpoonup e \cong Cohom_{C-}(e \rightharpoonup C, C)$.*
4. *${}_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}C \leftharpoonup e$ y $e \rightharpoonup C_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}$ son cogeneradores.*

$\square$

Supongamos que tenemos una subcategoría localizante cualquiera $\mathcal{T}_X$ con $X = \bigoplus_{\beta\in\overline{B}} E(S_\beta))$ un C-subcomódulo a derecha inyectivo y quasi-finito, entonces $X = C \leftharpoonup e$ para algún idempotente e, de hecho,

$$\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{C\leftharpoonup e} = \mathcal{T}_{\sigma_e} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid e \rightharpoonup M = 0\}$$

En efecto, supongamos $M \in \mathcal{M}^C$ tal que $e \rightharpoonup M = 0$, entonces $e \rightharpoonup M \cong M \,\square_C\, e \rightharpoonup C = 0$, para el funtor $T = - \,\square_C\, e \rightharpoonup C$, $TM = 0$ y por tanto $M \in \mathcal{T}_X$. Por otra parte si $M \in \mathcal{T}_X$, entonces $TM = M \,\square_C\, e \rightharpoonup C = e \rightharpoonup M = 0$ y por tanto $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{\sigma_e}$.

Corolario 145 *M es torsión si y sólo si $cf(M)$ lo es ($e \rightharpoonup M = 0$ si y sólo si $e \rightharpoonup cf(M) = 0$).*

Demostración. Si $e \rightharpoonup M = 0$, M es torsión y entonces $cf(M) \subseteq Ker(\psi)$ donde ψ es el morfismo de (C, C)-bicomódulos del lema 142, luego $e \rightharpoonup cf(M) = 0$ y $cf(M)$ es torsión. Si $e \rightharpoonup cf(M) =$, como $\omega_M(M) \subseteq M \otimes cf(M)$ entonces si $x = e \rightharpoonup x \in e \rightharpoonup M$, $x = (I \otimes \epsilon_C)\omega_M(x)$ y $\omega_M(e \rightharpoonup x) \in M \otimes e \rightharpoonup cf(M)$ luego $x = e \rightharpoonup x = 0$, $e \rightharpoonup M = 0$ y M es torsión. $\square$

Para $e = e^2 \in C^*$, o $e \mapsto \Gamma \subseteq \Lambda$, llamaremos **subcoálgebra localizante** $C^{(e)} = C^{\Gamma}$ a la mayor subcoálgebra de C con todos sus factores de composición en Γ, esto es, la mayor subcoálgebra anulada por e. Es evidente por lo que hemos visto que las subcoálgebras localizantes de C son exactamente las subcoálgebras coidempotentes de C.

Observamos que en efecto, $A = \sigma_e(C^C) = Ker(\psi)$ es la mayor subcoálgebra de C anulada por e, es decir, $A = C^{(e)}$.

Para $e \in C^*$ idempotente, $\mathcal{M}^{C^{(e)}}$ es una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$, $C^{(e)}$ es una subcoálgebra coidempotente y $\mathcal{M}^C/\mathcal{M}^{C^{(e)}}$ es equivalente a $\mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}$, es decir, $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ sería una localización de C. Y entonces la coálgebra D es una localización de la coálgebra C, si y sólo si, D es equivalente Morita a $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ para algún idempotente $e \in C^*$.

En definitiva, si $\mathcal{T}$ es una subcategoría localizante y X es un comódulo inyectivo y quasi-finito tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ con $X = \bigoplus_{\beta \in \overline{B}} E(S_\beta) = C \leftharpoonup e$ y $A = Ker(\psi) = C^{(e)} = \sigma(C) = \sum_{M \in \mathcal{T}} cf(M) = C^{\overline{B}}$ es la subcoálgebra coidempotente asociada a $\mathcal{T}$, donde σ es el funtor radical asociado a $\mathcal{T}$. Entonces podemos describir $\mathcal{T}$ como sigue,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{M \in \mathcal{M}^C \mid e \rightharpoonup S = 0 \ \forall S \text{ factor de composición de } M\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid e \rightharpoonup cf(M) = 0\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid M \,\square_C\, Cohom_{-C}(X, C) = M \,\square_C\, e \rightharpoonup C = e \rightharpoonup M = 0\} = \mathcal{T}_{\sigma_e} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid A^{\perp} cf(M) = 0\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid cf(M) \subseteq A\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid M \,\square_C\, A \cong M\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid \omega_M(M) \subseteq M \otimes A\} \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid A^{\perp} M = 0\} = \mathcal{T}_{\sigma_A} = \mathcal{C}_A \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid Hom_{-C}(M, X) = 0\} = \mathcal{T}_X \\
&= \{M \in \mathcal{M}^C \mid B_M \cap \overline{B} = \emptyset\} = \mathcal{T}_{\overline{B}}
\end{aligned}
$$

Descripción de $C^{(e)}$.

Sea C una coálgebra. Recordemos que $C^{(e)}$ se define como la mayor subcoálgebra anulada por el idempotente $e \in C^*$.

Proposición 146 *La mayor subcoálgebra A de C tal que $e \leftharpoonup A = 0$ es $A = (C^*eC^*)^{\perp}$. ($C^{(e)} = (C^*eC^*)^{\perp}$).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = (C^*eC^*)^{\perp}$, veamos que $e \rightharpoonup A = 0$, sea $x \in A$, entonces para cualquier $f \in C^*$ tenemos

$$0 = (ef)(x) = f(e \rightharpoonup x)$$

por tanto $e \rightharpoonup x = 0$.

Veamos que es la mayor, esto es, si $X \subseteq C$ subcoálgebra tal que $e \rightharpoonup X = 0$ entonces $X \subseteq A$, en efecto, sea $x \in X$ y sea $f, g \in C^*$ cualesquiera, entonces

$$(feg)(x) = \sum_{(x)} f(x_{(1)})e(x_{(2)})g(x_{(3)}) = 0$$

porque $e(x_{(2)}) = \epsilon(e \rightharpoonup x_{(2)}) = 0$. Luego $C^*eC^* \subseteq X^\perp$ y por tanto $X \subseteq A$ como queríamos demostrar. □

Proposición 147 *Sea $e \in C^*$ un elemento idempotente, entonces:*

1. *$I = C^*eC^*$ es ideal idempotente de C^*.*
2. *$A = I^\perp$ es una subcoálgebra coidempotente de C.*
3. *$\sigma_e(C) = A$.*
4. *$\sigma_e = \sigma_A$.*

Demostración.

1. $I^2 \subseteq I$ siempre. Sea $feg \in C^*eC^*$, entonces
$$feg = fe1_{C^*}eg \in C^*eC^*eC^*.$$
2. $A \subseteq A \wedge A$ porque A es subcoálgebra y por otra parte,
$$A \wedge A = (A^\perp A^\perp)^\perp = (I^{\perp\perp}I^{\perp\perp})^\perp$$
y como $I \subseteq I^{\perp\perp}$, entonces $II \subseteq I^{\perp\perp}I^{\perp\perp}$, esto es, $(II)^\perp \supseteq (I^{\perp\perp}I^{\perp\perp})^\perp$, luego
$$(I^{\perp\perp}I^{\perp\perp})^\perp \subseteq (II)^\perp = I^\perp = A.$$
Luego $A = A \wedge A$ es coidempotente.
3. Evidente.
4. Evidente.

□

Y como era de esperar y anunciabamos anteriormente:

Corolario 148 *Sea C una coálgebra y $A \leq C$ una subcoálgebra coidempotente, entonces existe $e \in C^*$ idempotente tal que A es la mayor subcoálgebra de C anulada por e, es decir, $A = (C^*eC^*)^\perp = C^{(e)}$.*

□

3.10 Idempotentes centrales y localizacion.

Vamos a estudiar que ocurre cuando consideramos $e \in C^*$ un idempotente central.

Lema 149 *Sea C una coálgebra, C^* su álgebra dual y $h \in C^*$. Son equivalentes:*

1. *$h \in C^*$ es central ($fh = hf$ para cada $f \in C^*$).*
2. *$h \rightharpoonup x = x \leftharpoonup h$ para cada $x \in C$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que:

$$(fh)(x) = \sum_{(x)} f(x_{(1)})h(x_{(2)}) = f(h \rightharpoonup x)$$

y

$$(hf)(x) = \sum_{(x)} h(x_{(1)})f(x_{(2)}) = f(x \leftharpoonup h)$$

entonces:

(2)⇒(1): Si $h \rightharpoonup x = x \leftharpoonup h$ para cada $x \in C$, entonces

$$(fh)(x) = (hf)(x)$$

para cada $f \in C^*$ y $x \in C$, entonces $hf = fh$ para cada $f \in C^*$.

(1)⇒(2): $hf = fh$ para cada $f \in C^*$, entonces dado $x \in C$, $f(h \rightharpoonup x) = f(x \leftharpoonup h)$ para cada $f \in C^*$, por tanto $(h \rightharpoonup x) - (x \leftharpoonup h) \in \bigcap_{f \in C^*} Ker(f) = 0$, es decir, $h \rightharpoonup x = x \leftharpoonup h$. □

Proposición 150 *Sea C una coálgebra y $e \in C^*$ un idempotente, entonces equivalen:*

1. *e es normal ($eC^* = C^*e$).*
2. *e es central.*
3. *$e \rightharpoonup C = C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = 0$ es una subcoálgebra de C.*

DEMOSTRACIÓN. (1)⇔(2): Si e es normal, para cada $f \in C^*$, existe $g \in C^*$ tal que $ef = ge$ y existe $h \in C^*$ tal que $fe = eh$, entonces $efe = gee = ge = ef$ y por otro lado, $efe = eeh = eh = fe$, por tanto $efe = ef = fe$ para cada $f \in C^*$. La otra implicación es evidente.

(2)⇒(3): Si $e \in C^*$ es idempotente y central (o normal), entonces para $x \in C$ con $\Delta_C(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$:

$$e \rightharpoonup x = x \leftharpoonup e = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e,$$

así que,

$$\begin{array}{rlcl} & \Delta_C(e \rightharpoonup x) & = & \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes (e \rightharpoonup x_{(2)}) \\ = & \Delta_C(x \leftharpoonup e) & = & \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes x_{(2)} \\ = & \Delta_C(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) & = & \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup x_{(2)}) \\ & & = & \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e) = \Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) \end{array}$$

Luego es evidente que $e \rightharpoonup C = C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ tiene estructura de subcoálgebra de C, Obsérvese que $\epsilon \mid_{e \rightharpoonup C} = e \mid_{e \rightharpoonup C} = \epsilon_{e \rightharpoonup C}$.

(3)⇒(2). Evidentemente $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = (e \rightharpoonup C) \cap (C \leftharpoonup e)$, como

$$(e \rightharpoonup C \leftharpoonup e, \Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}, \epsilon_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e})$$

es una subcoálgebra de $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ entonces,

$$\Delta_C(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = \Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)$$

es decir,

$$\sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \leftharpoonup x_{(2)}) = \sum_{(x)} (e \rightharpoonup x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes (e \rightharpoonup x_{(2)} \leftharpoonup e)$$

Luego,

$$(I \otimes \epsilon_C)\Delta_C(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e) = (I \otimes \epsilon_C)\Delta_{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}(e \rightharpoonup x \leftharpoonup e)$$

y $x \leftharpoonup e = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e$, por tanto $C \leftharpoonup e \subseteq e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ y $C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C$ y e es central. $\square$

Si $e \in C^*$ es un idempotente central, entonces $e \rightharpoonup C$ es una subcoálgebra, por tanto existe un morfismo de $e \rightharpoonup C = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ en C y éste es el morfismo inclusión,

$$i : e \rightharpoonup C \longrightarrow C$$

para este morfismo construimos el funtor,

$$\begin{array}{rcl} F = (-)_i : \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e} & \longrightarrow & \mathcal{M}^C \\ (M, \omega_M) & \longmapsto & (M, (I \otimes i) \circ \omega_M) \end{array}$$

y el funtor,

$$\begin{array}{rcl} G = (-)^i : \mathcal{M}^C & \longrightarrow & \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e} \\ W & \longmapsto & W \,\square_C\, (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \end{array}$$

que es adjunto a derecha de F. (i es un monomorfismo, entonces por [13, 3.5], el morfismo funtorial $((-)^i \circ (-)_i) \to 1_{\mathcal{M}^C}$ es un isomorfismo).

$e \rightharpoonup C$ es un C-comódulo a izquierda inyectivo o coplano, entonces G es exacto.

Consideramos la subcategoría,

$$Ker(G) = \{W \in \mathcal{M}^C \mid W \,\square_C\, (e \rightharpoonup C) = 0\}$$

que como G es exacto, entonces $Ker(G)$ es una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$.

Corolario 151 *Para $e \in C^*$ un idempotente central, $Ker(G) = \mathcal{T}_{\sigma_e}$, la teoría de torsión asociada a e.*

□

Entonces,

$$\mathcal{M}^C/\mathcal{T}_{\sigma_e} \cong \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e}$$

y podemos considerar el funtor localización

$$Q_{\sigma_e}: \quad \mathcal{M}^C \xrightarrow{G} \mathcal{M}^{e \rightharpoonup C \leftharpoonup e} \xrightarrow{F} \mathcal{M}^C$$

$$M \longmapsto e \rightharpoonup M \longmapsto e \rightharpoonup M$$

y como $Q_{\sigma_e}(C) = C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C$ entonces

$$Q_{\sigma_e}(M) = e \rightharpoonup M \cong M \,\square_C\, (e \rightharpoonup C) = M \,\square_C\, Q_{\sigma_e}(C)$$

y la localización es perfecta.

Idempotentes centrales y estabilidad.

Lema 152 *Sea C una coálgebra y sean $e, f \in C^*$ elementos idempotentes tales que $ef = fe$, equivalen:*

1. $e \rightharpoonup C \subseteq f \rightharpoonup C$.
2. $ef = e$.

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $x \in C$, entonces:

$$(ef)(x) = (fe)(x) = \epsilon(f \rightharpoonup (e \rightharpoonup x))$$

como $e \rightharpoonup x \in (e \rightharpoonup C) \subseteq (f \rightharpoonup C)$ entonces $f \rightharpoonup (e \rightharpoonup x) = e \rightharpoonup x$ y

$$\epsilon(f \rightharpoonup (e \rightharpoonup x)) = \epsilon(e \rightharpoonup x) = e(x)$$

para cada $x \in C$, por tanto $ef = e$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Es evidente, sea $x \in C$ entonces,

$$e \rightharpoonup x = (f \rightharpoonup (e \rightharpoonup x)) \in (f \rightharpoonup C).$$

□

Corolario 153 *Sea C una coálgebra, sean $e, f \in C^*$ idempotentes tales que $ef = fe$, si $e \rightharpoonup C = f \rightharpoonup C$ entonces $e = f$.*

□

Lema 154 *Sea A una subcoálgebra inyectiva como C-comódulo a ambos lados, entonces $A = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ para algún elemento idempotente y central $e \in C^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Por un lado A es sumando directo de C^C y por tanto $A = C \leftharpoonup e$; análogamente, es sumando directo también de ${}^C C$ y $A = f \rightharpoonup C$ con $e, f \in C^*$ elementos idempotentes y centrales.

$A = C \leftharpoonup e$ es una subcoálgebra de C, por tanto

$$C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e \subseteq e \rightharpoonup C,$$

en efecto, consideremos $x \in C$ y $\Delta_C(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, entonces $\Delta_C(x \leftharpoonup e) = \sum_{(x)} (x_{(1)} \leftharpoonup e) \otimes x_{(2)} \in (C \leftharpoonup e) \otimes (C \leftharpoonup e)$ y entonces $x \leftharpoonup e = (I \otimes \epsilon_C)\Delta_C(x) = (\sum_{(x)} x_{(1)}\epsilon_C(x_{(2)})) \leftharpoonup e = (\sum_{(x)} x_{(1)} e(x_{(2)})) \leftharpoonup e = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e$. Análogamente $f \rightharpoonup C$ es subcoálgebra de C y entonces

$$f \rightharpoonup C = f \rightharpoonup C \leftharpoonup f \subseteq C \leftharpoonup f.$$

Luego $C \leftharpoonup e = A = f \rightharpoonup C \subseteq C \leftharpoonup f$, por tanto $ef = e$, por otra parte $f \rightharpoonup C = A = C \leftharpoonup e \subseteq e \rightharpoonup C$, $ef = f$ y en consecuencia $e = f$. Así que $A = e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = e \rightharpoonup C = C \leftharpoonup e$ y e es central. □

Teorema 155 *Sea $\mathcal{T}$ una subcategoría localizante de $\mathcal{M}^C$ con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\sigma_e}$ para algún idempotente $e \in C^*$, equivalen:*

1. *$\mathcal{T}$ es estable.*

2. *e es central.*

3. *$\sigma_e(C^C) = C^{(e)} = (1-e) \rightharpoonup C$.*

DEMOSTRACIÓN. (1)⇒(2): Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$ con $X = \bigoplus_{T \in k(\mathcal{T})} E(T^C)$, y como $\mathcal{T}$ es estable usando el teorema 136, entonces $X = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda'} C_\alpha$ es una suma de componentes link-indescomponibles siendo $C = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$ y X es una subcoálgebra de C inyectiva a ambos lados como C-comódulo, entonces $X = f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ y al ser subcoálgebra de C, f es central. Si llamamos $e = 1 - f$, entonces $\sigma_{\mathcal{T}_X}(C) = \bigoplus_{\alpha \notin \Lambda'} C_\alpha = f \rightharpoonup C = C^{(e)} = \sigma_e(C)$.

(2)⇒(3): Se deduce de lo anterior.

(3)⇒(1): $\sigma_e(C^C) = C^{(e)} = (1-e) \rightharpoonup C = C \leftharpoonup (1-e)$ es subcoálgebra inyectiva a ambos lados, y por el teorema 136, $\mathcal{T}_{\sigma_e} = \mathcal{T}$ es estable. □

Corolario 156 *Si $e, f \in C^*$ son elementos idempotentes centrales y semejantes, entonces $e = f$.*

DEMOSTRACIÓN. $(1-e) \rightharpoonup C = \sigma_e(C) = \sigma_f(C) = (1-f) \rightharpoonup C$, por tanto $1 - e = 1 - f$. □

Observación 157 *Si C es una coálgebra coconmutativa, entonces todo se simplifica, los elementos idempotentes semejantes son iguales porque son centrales, y además para un elemento idempotente $e \in C^*$, tenemos que $C^{(e)} = C \leftharpoonup (1-e) = \bigoplus_{S \in U} E(U)$ donde $U = \{S \in Simp(C) \mid e \leftharpoonup S = 0\}$. Y también tenemos una biyección entre elementos idempotentes de C^* y subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$.*

□

3.11 El retículo de las teorías de torsión en $\mathcal{M}^C$.

Sea C una coálgebra, denotaremos por $C - Tor$ al conjunto de todas las teorías de torsión sobre C, entonces dadas dos teorías de torsión $\sigma, \tau \in C - Tor$ diremos que $\sigma \leq \tau$ si y sólo si $\sigma(M) \subseteq \tau(M)$ para cada $M \in \mathcal{M}^C$; o equivalentemente $\mathcal{T}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_\tau$, $(\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma)$.(Véase [8]).

Entonces, existen biyecciones:

1. Entre $C - Tor$ y el conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de C, si a σ le corresponde la subcoálgebra coidempotente A la llamaremos $\sigma = \sigma_A$ y

$$\mathcal{T}_{\sigma_A} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid A^{\perp}M = 0\}$$

2. Entre $C - Tor$ y el conjunto de todas las clases de semejanza de elementos idempotentes de C^*, si a σ le corresponde la clase de semejanza de idempotentes $[e]$ la llamaremos $\sigma = \sigma_e$, y

$$\mathcal{T}_{\sigma_e} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid e \rightharpoonup M = 0\}$$

3. Entre $C - Tor$ y $\mathcal{P}(\Lambda)$ o E el conjunto de todas las clases de equivalencia de C-comódulos a derecha inyectivos, si a σ le corresponde $E \in \mathcal{M}^C$ inyectivo, la llamaremos $\sigma = \sigma_E$, o si $E \sim X$ con $X = \bigoplus_{\beta \in \overline{B}} E(S_\beta) \in \mathcal{M}^C$ inyectivo y quasi-finito, también escribiremos $\sigma = \sigma_{\overline{B}}$;

$$\mathcal{T}_X = \{M \in \mathcal{M}^C \mid Hom_{-C}(M, X) = 0\}$$
$$\mathcal{T}_{\sigma_{\overline{B}}} = \{M \in \mathcal{M}^C \mid B_M \cap \overline{B} = \emptyset\} = \mathcal{T}_\Gamma$$

donde $\Gamma \in \mathcal{P}(\Lambda)$, $\Gamma = \{S_\beta\}_{\beta \in \overline{B}}$.

Recordemos que $\mathcal{I}$ es el conjunto de todas las clases de elementos idempotentes semejantes de C^*, éste conjunto es un retículo, para dos clases cualesquiera $[e], [f] \in \mathcal{I}$, diremos que

$$[e] \leq [f] \Leftrightarrow [ef] = [e]$$

y el ínfimo y el supremo serán,

$$[e] \wedge [f] = [ef]$$
$$[e] \vee [f] = [e + f - ef]$$

Observemos que si $\sigma = \sigma_A = \sigma_e = \sigma_X$ y $\tau = \tau_B = \tau_f = \tau_{X'}$ con $A, B \subseteq C$ subcoálgebras coidempotentes, $[e], [f]$ clases de idempotentes semejantes y $X, X' \in \mathcal{E}$ con $X = \bigoplus_{S \in \Gamma} E(S)$ y $X' = \bigoplus_{S \in \Gamma'} E(S)$, entonces

$$\sigma \leq \tau \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow [e] \geq [f] \Leftrightarrow \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Como acabamos de ver $(C - Tor, \leq)$, $(\mathcal{I}, \leq)$ y $(\mathcal{P}(\Lambda), \subseteq)$ son retículos isomorfos, es evidente que $(\mathcal{P}(\Lambda), \cup, \cap)$ es una álgebra de Boole, por tanto todos ellos son álgebras de Boole isomorfas. Además podríamos definir fácilmente un orden en $\mathcal{E}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de C-comódulos inyectivos o en $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las subcoálgebras coidempotente de C para los cuales también serían álgebras de Boole.

Proposición 158 *Sea C una coálgebra entonces $(C - Tor, \leq)$, $(\mathcal{I}, \leq)$ y $(\mathcal{P}(\Lambda), \subseteq)$ son álgebras de Boole isomorfas.*

□

3.12 Elementos idempotentes y subcoálgebras coprimas.

Lema 159 *Sean C una subcoálgebra y $e \in C^*$ un elemento idempotente, entonces $\phi : C \longrightarrow (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e)$ definida por $\phi(x) = e \rightharpoonup x \leftharpoonup e$ para cada $x \in C$ es una aplicación lineal que verifica;*

$$\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(\phi(x)) = (\phi \otimes \phi)\Delta_C(X) \quad \textit{para cada } x \in C$$

Además también verifica:

1. *Si $A \subseteq C$ es una subcoálgebra, entonces $\phi(A) \subseteq e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ es una subcoálgebra.*
2. *Si $D \subseteq e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ es una subcoálgebra, entonces $\phi^{-1}(D) \subseteq C$ es una subcoálgebra.*
3. *Si $A, B \subseteq e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ son dos subcoálgebras, entonces*
$$\phi^{-1}(A \wedge B) \subseteq \phi^{-1}(A) \wedge \phi^{-1}(B).$$
4. *Si $A, B \subseteq C$ son dos subcoálgebras entonces $\phi(A \wedge B) \subseteq \phi(A) \wedge \phi(B)$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Para cada $x \in A$,
$$\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(\phi(x)) = (\phi \otimes \phi)\Delta_C(x) = \sum_{(x)} \phi(x_{(1)}) \otimes \phi(x_{(2)}) \in \phi(A) \otimes \phi(A).$$
2. Para cada $x \in \phi^{-1}(D)$ tenemos que $\phi(x) \in D$, entonces $(\phi\otimes\phi)\Delta_C(x) = \Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(\phi(x)) \in H \otimes H$, de donde, $\Delta_C(x) \in (\phi \otimes \phi)^{-1}(D \otimes D) = \phi^{-1}(D) \otimes \phi^{-1}(D)$.
3. Sea $x \in \phi^{-1}(A \wedge B)$ entonces $\phi(x) \in A \wedge B$, es decir, $\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(\phi(x)) \in A \otimes (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) + (e \rightharpoonup C \leftharpoonup e) \otimes B$, de donde $\Delta_C(x) \in \phi^{-1}(A) \otimes C + C \otimes \phi^{-1}(B)$.
4. Para $x \in A \wedge B$ tenemos que $\Delta_C(x) \in A \otimes C + C \otimes B$, y por tanto $\Delta_{e\rightharpoonup C\leftharpoonup e}(\phi(x)) = (\phi \otimes \phi)\Delta_C(x) \in \phi(A) \otimes \phi(C) + \phi(C) \otimes \phi(B)$.

□

Proposición 160 *Sea C una coálgebra y $P \subseteq C$ una subcoálgebra coprima, sea $e \in C^*$ un elemento idempotente, entonces $e \rightharpoonup P \leftharpoonup e$ es una subcoálgebra coprima de $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A, B \subseteq e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ dos subcoálgebras tales que $e \rightharpoonup D \leftharpoonup e \subseteq A \wedge B$, entonces $D \subseteq \phi^{-1}(e \rightharpoonup D \leftharpoonup e) \subseteq \phi^{-1}(A \wedge B) \subseteq \phi^{-1}(A) \wedge \phi^{-1}(B)$. Si D es coprima en C entonces $D \subseteq \phi^{-1}(A)$ o $D \subseteq \phi^{-1}(B)$, luego $e \rightharpoonup D \leftharpoonup e \subseteq A$ o $e \rightharpoonup D \leftharpoonup e \subseteq B$ y $e \rightharpoonup D \leftharpoonup e$ es coprima. □

4 Coálgebras de caminos

En este capítulo estudiamos un caso particular de coálgebras, las llamadas coálgebras de caminos, el estudio de las coálgebras de caminos, que también pueden interpretarse como coálgebras tensoriales, resulta especialmente útil para estudiar coálgebras punteadas y también para reconocer algunas propiedades de los grafos orientados. Hacemos un especial énfasis en el estudio de las coálgebras de caminos coprimas, generalización del concepto de coálgebra simple que estudiamos en el capítulo 2. En el caso de las coálgebras de caminos, las subcoálgebras simples se corresponden con los vértices (espacios vectoriales 1-dimensionales generados por un vértice) y las coálgebras de caminos coprimas resultan ser aquellas asociadas a grafos fuertemente conexos. También reducimos el estudio de subcoálgebras coprimas en general de una coálgebra de caminos al caso en que el grafo sólo tiene dos vértices, y con ellas también reducimos el estudio de coálgebras coprimas punteadas en general.

Utilizando la localización de coálgebras conseguimos simplificar los grafos y en consecuencia las coálgebras de caminos, eliminando vértices o simples sin perder información alguna sobre las conexiones entre los vértices restantes, o lo que es lo mismo, sobre los caminos que conectan los vértices que no deseemos simplificar. Analizamos también como se interpretan los resultados que hemos visto en capítulos anteriores en coálgebras de caminos.

4.1 Definición.

Sea $\Gamma = (V, F)$ un **grafo orientado** con V el conjunto de sus vértices (no necesariamente finito) y F el conjunto de sus flechas (no necesariamente finito). Para cada flecha $\alpha \in F$, denotaremos por $s(\alpha) \in V$ al vértice inicial y por $e(\alpha) \in V$ al final respectivos de la flecha. A las flechas con el mismo vértice como inicio y fin las llamaremos **lazos**.

Definimos el conjunto Q_n como el formado por todos los **caminos orientados**, a los que llamaremos simplemente **caminos**, de longitud n de Γ que denotaremos por $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ con $\alpha_i \in F$ para cada i y $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$ para cada $i = 1, 2, ..., n-1$, identificamos los caminos de longitud 0 con los vértices de Γ, esto es, $Q_0 = V$ y análogamente $Q_1 = F$, consideramos

$$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$$

es decir, el conjunto de todos los caminos de longitud finita de Γ. Es claro que Q no tiene que ser necesariamente finito. Para un camino $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$, definimos $l(p) = n$ como la longitud del camino p, obsérvese que la longitud de todos los caminos de Q, aunque sea finita, no necesariamente tiene que estar acotada. Un camino que pasa por cada vértice una sóla vez se dice que es **propio**. Denotaremos también $s(p) = s(\alpha_1)$ y $e(p) = e(\alpha_n)$. Si $s(p) = e(p)$ diremos que p es un **ciclo orientado**, aunque habitualmente lo llamemos simplemente **ciclo**. Un ciclo orientado $p = \alpha_1...\alpha_n$ tal que los vértices $\{s(\alpha_1), ..., s(\alpha_n)\}$ son todos distintos se dirá que es un **ciclo propio**.

Sea K un cuerpo, consideramos el espacio vectorial KQ donde cada camino es un vector básico. Los elementos de KQ son de la forma $q = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ con $p_i \in Q$, definiremos la longitud de q, como $l(q) = max\{l(p_i) \mid i = 1, 2, ..., k\}$. Entonces KQ es una coálgebra con coproducto y counidad, definido sobre cada $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$ por,

1. $$\Delta(p) = s(\alpha_1) \otimes p + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_1\alpha_2...\alpha_i \otimes \alpha_{i+1}...\alpha_n + p \otimes e(\alpha_n).$$

2. $$\epsilon(p) = \delta_{l(p),0}$$

   es decir, 1 si $l(p) = 0$ y 0 en otro caso.

La coálgebra (KQ, Δ, ϵ) es la **coálgebra de caminos** asociada al grafo Γ.

4.2 Subcoálgebras de (KQ, Δ, ϵ).

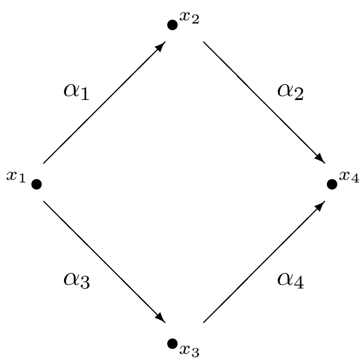
Sea (KQ, Δ, ϵ) la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sea $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$ un camino cualquiera, diremos que $q \in Q$ es un **subcamino** de p si q es un vértice de p o $q = \alpha_i\alpha_{i+1}...\alpha_j$ con $1 \leq i \leq j \leq n$, y denotaremos $q \preceq p$, y si $p \neq q$ entonces escribiremos $q \prec p$.

Proposición 161 *Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, si $p \in A \cap Q$ entonces todos los subcaminos de p pertenecen a A.*

Demostración. Sea $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in A \cap Q$, $\Delta(p) \subseteq A \otimes A$, entonces $\Delta(p) = s(\alpha_1) \otimes p + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_1\alpha_2...\alpha_i \otimes \alpha_{i+1}...\alpha_n + p \otimes e(\alpha_n)$, y puesto que $s(\alpha_1), \alpha_1, \alpha_1\alpha_2, ..., p$ son todos caminos distintos de Q, son linealmente independientes y por tanto $\alpha_2...\alpha_n, \alpha_3...\alpha_n, ..., \alpha_n, e(\alpha_n) \in A$, análogamente $s(\alpha_1), \alpha_1, \alpha_1\alpha_2, ..., \alpha_1...\alpha_{n-1} \in A$, esto es, todos los subcaminos de p que parten de $s(\alpha_1)$ o con fin en $e(\alpha_n)$ están en A. Si reiteramos el proceso sobre cada uno de los caminos anteriores concluimos que todos los subcaminos de p están en A. $\square$

Como acabamos de ver todos los subcamimos de un camino de una subcoálgebra también pertenecen a la subcoálgebra, sin embargo no todas las subcoálgebras de KQ están generadas por caminos, véanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo 162 *Consideramos el grafo,*



y sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo. Consideremos el elemento $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 \in KQ$, entonces

$$\Delta(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) = x_1 \otimes \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 \otimes x_4 + x_1 \otimes \alpha_3\alpha_4 + \alpha_3 \otimes \alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 \otimes x_4 =$$

$$= x_1 \otimes (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) + \alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_3 \otimes \alpha_4 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) \otimes x_4$$

y por tanto el espacio vectorial generado por $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4\}$ es subcoálgebra de KQ.

$\square$

Ejemplo 163 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, y sea $\alpha, \beta \in Q_1$ dos flechas que tiene el mismo origen y final, esto es, $s(\alpha) = s(\beta) = x$ y $e(\alpha) = e(\beta) = y$, entonces el espacio vectorial*

$$A = K\{x, y, \alpha + \beta\}$$

es una subcoálgebra donde $\alpha, \beta \notin A$.

De la misma forma que antes si existen α y β dos lazos de un vértice x, esto es,

$$s(\alpha) = s(\beta) = x = e(\alpha) = e(\beta) = y,$$

entonces el espacio vectorial

$$B = K\{x, \alpha + \beta\}$$

es una subcoálgebra y $\alpha, \beta \notin B$.

□

En los ejemplos anteriores se obtienen subcoálgebras donde no todos sus vectores básicos son caminos, obsérvese que estas subcoálgebras tienen como elementos, combinaciones lineales de caminos con tramos comunes en el inicio y en el fin, en particular en los ejemplos, tenemos dos caminos que conectan los mismos vértices, $\alpha_1\alpha_2$ y $\alpha_3\alpha_4$ en el primero, α y β en el segundo, esta propiedad del grafo es necesaria para que no todas las subcoálgebras de KQ como espacios vectoriales tengan una base formada por caminos.

Lema 164 *Sea Γ un grafo tal que dos vértices distintos cualesquiera no están conectados o lo están sólo por un único camino, esto es, el número de caminos que conectan dos vértices es menor o igual a 1 y cada vértice no tiene lazos o a lo sumo tiene un único lazo. Sea Q el conjunto de todos los caminos de longitud finita de Γ. Sea $D \subseteq KQ$ una subcoálgebra, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in D$ con $p_1, p_2, ..., p_k$ linealmente independientes, entonces $p_i \in D$ para cada i.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $p, q \in Q$ dos caminos cualesquiera, $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ y $q = \beta_1\beta_2...\beta_m$,

$$\Delta(\lambda p + \mu q) = \lambda(s(\alpha_1) \otimes p + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_1...\alpha_i \otimes \alpha_{i+1}...\alpha_n + p \otimes e(\alpha_n)) +$$

$$+\mu(s(\beta_1) \otimes q + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_1...\beta_j \otimes \beta_{j+1}...\beta_m + q \otimes e(\beta_m)).$$

Por hipótesis $s(\alpha_1) \neq s(\beta_1)$ o $e(\alpha_n) \neq e(\beta_m)$, supongamos que $s(\alpha_1) \neq s(\beta_1)$ (en el otro caso se haría igual), entonces $\lambda s(\alpha_1)$ y $\mu s(\beta_1)$ son linealmente independientes y por tanto $p, q \in D$. La demostración es idéntica para una combinación lineal finita de caminos linealmente independientes de la forma $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$. □

Corolario 165 *En las condiciones del lema anterior, cualquier subcoálgebra $D \subseteq KQ$ tiene una base como espacio vectorial compuesta sólo por caminos.*

□

Aunque como hemos visto no siempre podamos asegurar que dado un elemento $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ de una subcoálgebra de KQ, los caminos p_i y en consecuencia todos los subcaminos de p_i estén en la subcoálgebra, si que podemos asegurar que al menos todos los vértices de p_i están en la subcoálgebra. Para demostrar esto último, en primer lugar analizamos el comportamiento de los elementos que son combinaciones lineales de caminos con tramos iniciales y finales comunes en una subcoálgebra, para ello analizamos que subcaminos o combinaciones de subcaminos del elemento están obligados a estar por la estructura de la misma en la subcoálgebra.

Lema 166 *Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, sea $\lambda q_1 + \mu q_2 \in A$ con $q_1 = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ y $q_2 = \beta_1\beta_2...\beta_m$ $(n, m > 1)$ dos caminos distintos que conectan los mismos vértices y de forma que uno no es subcamino del otro, esto es, $s(\alpha_1) = s(\beta_1)$ y $e(\alpha_n) = e(\beta_m)$, $q_1 \not\preceq q_2$ y $q_2 \not\preceq q_1$, entonces,*

1. $$\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-k-1}, \alpha_{l+2}\alpha_{l+3}...\alpha_n \in A.$$

2. $$\beta_1\beta_2...\beta_{m-k-1}, \beta_{l+2}\beta_{l+3}...\beta_m \in A.$$

Donde

$$k = \begin{cases} 0 & si\ \alpha_n \neq \beta_m \\ max\{i \mid \alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+1}...\alpha_n = \beta_{m-i+1}\beta_{m-i+1}...\beta_m\} & si\ \alpha_n = \beta_n \end{cases}$$

y

$$l = \begin{cases} 0 & si\ \alpha_1 \neq \beta_1 \\ max\{i \mid \alpha_1\alpha_2...\alpha_i = \beta_1\beta_2...\beta_i\} & si\ \alpha_1 = \beta_1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Calculamos,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda q_1 + \mu q_2) = \ & s(\alpha_1) \otimes (\lambda q_1 + \mu q_2) + \\ & +\alpha_1 \otimes (\lambda\alpha_2...\alpha_n + \mu\beta_2...\beta_m) + \ldots + \alpha_1...\alpha_l \otimes (\lambda\alpha_{l+1}...\alpha_n + \mu\beta_{l+1}...\beta_m) + \\ & +\lambda(\alpha_1...\alpha_{l+1} \otimes \alpha_{l+2}...\alpha_n + \ldots + \alpha_1...\alpha_{n-k-1} \otimes \alpha_{n-k}...\alpha_n) + \\ & +\mu(\beta_1...\beta_{l+1} \otimes \beta_{l+2}...\beta_m + \ldots + \beta_1...\beta_{m-k-1} \otimes \beta_{m-k}...\beta_m) + \\ & +(\lambda\alpha_1...\alpha_{n-k} + \mu\beta_1...\beta_{m-k} \otimes \alpha_{n-k+1}...\alpha_n) + \ldots \\ & \qquad \ldots + (\lambda\alpha_1...\alpha_{n-1} + \mu\beta_1...\beta_{m-1}) \otimes \alpha_n + \\ & +(\lambda q_1 + \mu q_2) \otimes e(\alpha_n).\end{aligned}$$

De donde por independencia lineal,

$$s(\alpha_1) = s(\beta_1), \alpha_1 = \beta_1, \alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \ldots, \alpha_1...\alpha_l = \beta_1...\beta_l \in A$$

$$\alpha_1....\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_1...\alpha_{n-k-1}, \beta_1...\beta_{l+1}, \ldots, \beta_1...\beta_{m-k-1} \in A$$

$$(\lambda\alpha_1...\alpha_{n-k} + \mu\beta_1...\beta_{m-k}), \ldots, (\lambda\alpha_1....\alpha_{n-1} + \mu\beta_1...\beta_{m-1}) \in A$$

que podemos resumir diciendo que

$$\alpha_1...\alpha_{n-k-1}, \beta_1...\beta_{m-k-1} \in A.$$

Y por otra parte también por independencia lineal respecto de la otra coordenada,

$$e(\alpha_n) = e(\beta_m), \alpha_n = \beta_m, \alpha_{n-1}\alpha_n = \beta_{m-1}\beta_m, \ldots, \alpha_{n-k+1}...\alpha_n = \beta_{m-k+1}...\beta_m \in A$$

$$\alpha_{n-k}....\alpha_n, \ldots, \alpha_{l+2}...\alpha_n, \beta_{m-k}...\beta_m, \ldots, \beta_{l+2}, ..., \beta_m \in A$$

$$(\lambda\alpha_{l+1}...\alpha_n + \mu\beta_{l+1}...\beta_m), \ldots, (\lambda\alpha_2....\alpha_n + \mu\beta_2...\beta_m) \in A$$

que podemos resumir diciendo que

$$\alpha_{l+2}...\alpha_n, \beta_{l+2}...\beta_m \in A.$$

□

Observación 167 *El resultado anterior podría rescribirse para un elemento de la forma* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i \in A$ *con los* q_i *linealmente independientes,*

$$q_i = \alpha_1^i \alpha_2^i ... \alpha_{n_i}^i$$

y $s(\alpha_1^i) = s(\alpha_1^j)$, $e(\alpha_{n_i}^i) = e(\alpha_{n_j}^j)$ *para cada* i, j. *Llamemos* $\Lambda = \{1, 2, ..., k\}$ *y para mayor comodidad en la notación definimos los conjuntos*

$$\Lambda_t = \Lambda^t / R_t$$

para cada $1 \leq t \leq M = max\{l(q_i) \mid i \in \Lambda\}$, *donde*

$$\Lambda^t = \{i \in \Lambda \mid t \leq l(q_i)\}$$

y R_t *es la relación de equivalencia*

$$iR_t j \Leftrightarrow \alpha_1^i \alpha_2^i ... \alpha_t^i = \alpha_1^j \alpha_2^j ... \alpha_t^j$$

Entonces:

$$\Delta(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) = s(\alpha_1^1) \otimes (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) + (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) \otimes e(\alpha_{n_1}^1) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{M} (\sum_{[i]_t \in \Lambda_t} (\alpha_1^i \alpha_2^i ... \alpha_t^i \otimes (\sum_{j \in [i]_t} \lambda_j \alpha_{t+1}^j ... \alpha_{n_j}^j)))$$

donde en la primera coordenada todos son linealmente independientes porque todos son caminos distintos y entonces,

$$e(\alpha_{n_1}^1), \sum_{j \in [i]_t} \lambda_j \alpha_{t+1}^j ... \alpha_{n_j}^j \in A$$

para cada $[i]_t \in \Lambda_t$ *y para cada* t *(las clases* $[i]_t$ *pueden ser el conjunto vacío).*

Lo mismo podríamos hacer para la segunda coordenada,

$${}_t\Lambda = \Lambda^t / {}_tR$$

para cada $1 \leq t \leq M = max\{l(q_i) \mid i \in \Lambda\}$, *donde* $\Lambda^t = \{i \in \Lambda \mid t \leq l(q_i)\}$ *es el mismo de antes, y* ${}_tR$ *es la relación de equivalencia*

$$i_tRj \Leftrightarrow \alpha^i_{n_i-t+1}...\alpha^i_{n_i} = \alpha^j_{n_j-t+1}...\alpha^j_{n_j}$$

Entonces:

$$\Delta(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) = s(\alpha^1_1) \otimes (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) + (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i) \otimes e(\alpha^1_{n_1}) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{M} (\sum_{{}_t[i] \in {}_t\Lambda} ((\sum_{j \in {}_t[i]} \alpha^j_1 \alpha^j_2 ... \alpha^j_{n_j-t}) \otimes \lambda_n \alpha^i_{n_i-t+1}...\alpha^i_{n_i})))$$

donde en la segunda coordenada todos son linealmente independientes porque todos son caminos distintos y entonces,

$$e(\alpha^1_{n_1}), \sum_{j \in {}_t[i]} \lambda_j \alpha^j_1 ... \alpha^j_{n_j-t} \in A$$

para cada ${}_t[i] \in \Lambda_t$ *y para cada* t *(las clases* ${}_t[i]$ *pueden ser el conjunto vacio).*

□

Denotaremos para un camino cualquiera $p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$,

$$V(p) = \{s(\alpha_1), s(\alpha_2), ..., s(\alpha_n), e(\alpha_n)\}$$

para un elemento cualquiera $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$,

$$V(q) = \bigcup_{i=1}^{n} V(p_i)$$

y para una subcoálgebra $A \subseteq KQ$ denotaremos $V(A) = \bigcup_{q \in A} V(q)$.

Corolario 168 *Sea* $A \subseteq KQ$ *una subcoálgebra, sea* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ *un elemento cualquiera de* A, *entonces todos los vértices de cada* p_i *están en* A, *esto es,*

$$V(A) \subseteq A.$$

Demostración. Sólo existiría dificultad en el caso en que todos los caminos parten del mismo vértice y terminan en el mismo vértice y usando la observación anterior es evidente. □

Corolario 169 *Sea* KQ *una coálgebra de caminos, entonces las únicas subcoálgebras simples de* KQ, *son los espacios vectoriales 1-dimensionales generados por cada vértice.*

□

Para KQ la coálgebra de caminos asociada a una grafo Γ y una subcoálgebra $A \subseteq KQ$, podemos caracterizar el conjunto $V(A)$ como el conjunto de todos los vértices de A, esto es, $V(A) = A \cap Q_0$. Por lo visto anteriormente, todos los vértices que intervienen en elementos de A son también elementos de A, $V(A) \subseteq A$. Análogamente denotaremos por $F(A)$ al conjunto de flechas que intervienen en caminos que aparezcan en algún elemento de A, esto es, si $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in A$ es un elemento cualquiera de A,

$$F(q) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha \in Q_1 \mid \alpha \preceq p_i\}$$

$$F(A) = \bigcup_{q \in A} F(q)$$

Es obvio que $F(A)$ no necesariamente tiene que estar contenido en A. Aunque $F(A) \nsubseteq A$ si que podemos asegurar que cualquier flecha $\alpha \in F(A)$ forma parte de una combinación lineal de caminos linealmente independientes que empiezan y terminan donde α, esto es, existe un elemento de la forma $\alpha + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in A$ con $\{\alpha, p_1, p_2, ..., p_k\}$ linealmente independientes y con $s(\alpha) = s(p_i)$, $e(\alpha) = e(p_i)$ para cada $i = 1, 2, ..., n$.

En realidad para una subcoálgebra cualquiera $A \subseteq KQ$ podemos encontrar una base formada por combinaciones lineales de caminos que tienen el mismo comienzo y el mismo fin:

Proposición 170 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, entonces existe una base de A formada por combinaciones lineales de caminos que tienen el mismo comienzo y el mismo fin.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $q \in A$ un elemento cualquiera, consideramos la descomposición $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ donde los q_i son las combinaciones lineales de los caminos con igual inicio y fin, bastará con demostrar que $q_i \in A$ para cada i, en efecto, si consideramos la aplicación $f_{s(q_i)} \in KQ^*$, $f_{s(q_i)} : KQ \to K$ definida por $f_{s(q_i)}(s(q_i)) = 1$ y $f_{s(q_i)}(p) = 0$ para cualquier otro camino $p \in Q$, entonces

$$q \leftharpoonup f_{s(q_i)} = q_i + \text{ otro sumandos} \in A$$

y si análogamente hacemos $f_{e(q_i)} \rightharpoonup q \leftharpoonup f_{s(q_i)} = q_i \in A$ para cada i. □

4.3 Grafos conexos, subcoálgebras indescomponibles.

Dado Γ un grafo orientado, un **camino no orientado** de Γ de longitud n que une un vértice a con otro b es una sucesión de vértices $x_0, x_1, ..., x_n$ y otra de flechas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de forma que $a = x_0$, $b = x_n$ y $\{s(\alpha_i), e(\alpha_i)\} = \{x_{i-1}, x_i\}$. Diremos que dos vértices están **conectados** si existe un camino no orientado entre ellos. Llamaremos **componente conexa de un vértice** a en el grafo Γ al grafo cuyos vértices son todos aquellos que están conectados con a incluido a y cuyas flechas son todas aquellas cuyo origen y fin estén conectados con a o sean a. Diremos que un grafo es **conexo** si todos sus vértices están conectados entre si. Un grafo conexo es evidente que tiene una única componente conexa.

Proposición 171 *Sea KQ una coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, entonces KQ es indescomponible si y sólo si Γ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Si $\Gamma = (V, F)$ no es conexo, sean $x, y \in V$ tales que no estén conectados, llamemos $\Gamma' = (V', F')$ al grafo determinado por

$$V' = \{v \in V \mid v \text{ está conectado con } x\},$$

$$F' = \{\alpha \in F \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V'\}$$

esto es, Γ' es la componente conexa de x; y $\Gamma'' = (V - V', F - F')$ es la componente conexa de y. Llamemos Q' al conjunto de caminos de Γ' y Q'' al conjunto de caminos de Γ'' entonces

$$KQ = KQ' \oplus KQ''.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existen $A, B \subseteq KQ$ tales que $KQ = A \oplus B$, entonces consideremos $x \in V(A)$ e $y \in V(B)$ y sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ un camino no orientado que conecta x e y, entonces existe α_i tal que con un vértice en A y otro en B, esto es, $s(\alpha_i) \in A$ y $e(\alpha_i) \in B$ o $s(\alpha_i) \in B$ y $e(\alpha_i) \in A$, en cualquier caso, uno de los vértices de α_i no está en A y el otro no está en B, luego $\alpha_i \notin A \oplus B$, lo cual es imposible y por tanto KQ es indescomponible. □

4.4 El producto wedge.

En primer lugar analizamos los caminos que hay en el producto wedge de dos subcoálgebra y después lo hacemos para elementos en general.

Proposición 172 *Sea $A, B \subseteq KQ$ subcoálgebras, entonces:*

1. *$V(A \wedge B) = V(A) \cup V(B)$.*
2. *Sea $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) \in A$ y $e(\alpha) \in B$, entonces $\alpha \in A \wedge B$.*
3. *Si $p_1 \in A \cap Q$ y $p_2 \in B \cap Q$ con $e(p_1) = s(p_2)$, entonces $p_1 p_2 \in A \wedge B$ (la concatenación de p_1 y p_2).*
4. *Si $p_1 \in A \cap Q$, $p_2 \in B \cap Q$ y $\alpha \in Q_1$ con $e(p_1) = s(\alpha)$ y $e(\alpha) = s(p_2)$, entonces $p_1 \alpha p_2 \in A \wedge B$ (la concatenación de p_1, α y p_2).*

5. $F(A \wedge B) = F(A) \cup F(B) \cup \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in A \text{ y } e(\alpha) \in B\}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Evidente.
2. $\Delta(\alpha) = s(\alpha) \otimes \alpha + \alpha \otimes e(\alpha)$, como $s(\alpha) \in A$ y $e(\alpha) \in B$ entonces $\alpha \in A \wedge B$.
3. Evidente.
4. Evidente.
5. $(\supseteq)$ Es evidente que $F(A), F(B) \subseteq F(A \wedge B)$ porque $A, B \subseteq A \wedge B$ y usando el apartado (2) se termina la inclusión.

   $(\subseteq)$ Sea $\alpha \in F(A \wedge B)$, entonces existe $\sum_{i=1}^{k} \lambda_1 p_i \in A \wedge B$ tal que $\alpha \preceq p_i$ para algún i. Pero p_i será de la forma $p_i = p_1 p_2$ o $p_i = p_1 \alpha p_2$ como en (3) y (4) respectivamente con $p_1 \in A$ o formando parte como combinación lineal de caminos de un elemento de A, igual le ocurre a p_2 en B, entonces $\alpha \in F(A) \cup F(B)$ si $p_i = p_1 p_2$ o $\alpha \in \{\beta \in Q_1 \mid s(\beta) \in A \text{ y } e(\beta) \in B\}$. Por tanto se concluye la demostración.

□

Proposición 173 *Sea KQ una coálgebra de caminos y $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, entonces:*

1. Si $p_1, p_2, ..., p_n \in A$ son caminos de A tal que $s(p_{i+1}) = e(p_i)$ para cada $i = 1, ..., n-1$, entonces $p_1 p_2 ... p_n \in \wedge^n A$.

2. $\wedge^\infty A$ es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma' = (V', F')$, donde $V' = V(A)$ y $F' = \{\alpha \in Q \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A)\}$.

DEMOSTRACIÓN. Evidente. □

Corolario 174 *$A \subseteq KQ$ es una subcoálgebra coidempotente ($\wedge^2 A = A$) si y sólo si $F(A) = \{\alpha \in Q \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A)\}$; además A es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma' = (V(A), F(A))$.*

□

Proposición 175 *Sea KQ una coálgebra de caminos, entonces:*

1. $KQ_0 \wedge KQ_0 = K(Q_0 \cup Q_1) = KQ_0 \oplus KQ_1$,

2. $(KQ_0 \oplus KQ_1) \wedge (KQ_0 \oplus KQ_1) = K(Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3) = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus KQ_3$,

3. $\wedge^n KQ_0 = K(\bigcup_{i=0}^n Q_i)$,
4. $\wedge^2(\bigoplus_{i=0}^n KQ_i) = \bigoplus_{i=0}^{2n+1} KQ_i$
5. $\bigoplus_{i=0}^n KQ_i \wedge \bigoplus_{j=0}^m KQ_j = \bigoplus_{k=0}^{n+m+1} KQ_k$,
6. $\wedge^\infty Q_0 = KQ$.

Demostración. Evidente. □

Corolario 176 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, entonces existe una biyección entre $\mathcal{P}(Q_0)$ y el conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de KQ.*

□

Recordemos que las subcoálgebras simples eran los espacios vectoriales 1-dimensionales generados por los vértices, por tanto acabamos de ver que $\mathcal{P}(Simp(KQ))$ y el conjunto de las subcoálgebras coidempotentes son biyectivos, como ya sabíamos por el capítulo 3.

Sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras, definimos AB como el espacio vectorial generado por,

$$\{x \mid x = ab, \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Análogamente podemos definir para $\alpha \in Q_1$, con $s(\alpha) \in A$ y $e(\alpha) \in B$ el espacio vectorial $A\alpha B$ como aquel que está generado por:

$$\{x \mid x = a\alpha b, \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Lema 177 *Sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras, entonces:*

1. *$AB \subseteq A \wedge B$.*
2. *Para cada $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) \in A$ y $e(\alpha) \in B$, $A\alpha B \subseteq A \wedge B$.*

Demostración. Sea $x \in AB$ (resp. en $A\alpha B$) entonces $x = ab$ con $a \in A$ y $b \in B$ (resp. $x = a\alpha b$) si

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

con $\{a_{(2)}\}$ linealmente independientes y por tanto $a_{(1)} \in A$ y

$$\Delta(b) = \sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}$$

con $\{b_{(1)}\}$ linealmente independientes y por tanto $b_{(2)} \in B$. Entonces,

$$\Delta(x) = \Delta(ab) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}b + \sum ab_{(1)} \otimes b_{(2)} - a \otimes b$$

entonces $x \in A \wedge B$ porque $a_{(1)} \in A$ y $b_{(2)} \in B$ (resp. $\Delta(x) = \Delta(a\alpha b) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}\alpha b + \sum a\alpha b_{(1)} \otimes b_{(2)}$ y $x \in A \wedge B$). $\square$

Corolario 178 *Sean A y B dos subcoálgebras de KQ, entonces*

$$A + B + AB + \sum_{\alpha \in F'} A\alpha B \subseteq A \wedge B$$

donde $F' = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in A, e(\alpha) \in B\}$.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. $\square$

Lema 179 *Sea $x \in KQ$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i$, si $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ entonces*

1. $\sum_{(x)} x_{(1)}x_{(2)} = \sum_{i=1}^{k} (l(q_i) + 1)\lambda_i q_i$.
2. $x_{(1)}x_{(2)} = \sum_{i \in I} \mu_i q_i$ *donde* $I \subseteq \{1, 2, ..., k\}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. $\Delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Delta(q_i) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, entonces

$$\sum_{(x)} x_{(1)}x_{(2)} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \sum_{j=0}^{l(q_i)} q_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (l(q_i) + 1)q_i.$$

2. Evidente.

$\square$

Si $x \in KQ$ es de la forma $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i$ con los $q_i \in Q$ caminos distintos y por tanto linealmente independientes, denotaremos $n(x) = k$. Para una subcoálgebra $A \subseteq KQ$, también denotaremos

$$\Theta_A = \{x \in A \mid x = \sum_i a_i, a_i \in A, n(x) > n(a_i) \text{ para cada } i\}$$

Lema 180 *Sea $x \in A \subseteq KQ$, entonces*

$$x = \sum_{y \in \Theta' \subseteq \overline{\Theta_A}} y$$

para algún subconjunto $\Theta' \subseteq \overline{\Theta_A}$, esto es, $\overline{\Theta_A}$ es una base de A como espacio vectorial.

Demostración. Sea $x \in A$, si $x \in \overline{\Theta_A}$ entonces es evidente para $\Theta' = \{x\}$. Si $x \notin \overline{\Theta_A}$ entonces $x = \sum_{i_0} a_{i_0}$ con $n(x) > n(a_{i_0})$, si todos los $a_{i_0} \in \overline{\Theta_A}$ habríamos terminado, en caso contrario cada uno de los a_{i_0} que no estén en $\overline{\Theta_A}$, lo podemos poner escribir $a_{i_0} = \sum_{i_1} a_{i_1}$ con $n(x) > n(a_{i_0}) > n(a_{i_1})$ y así sucesivamente, como es una sucesión estrictamente decreciente de números naturales, al final logramos demostrar lo que buscamos. □

Lema 181 *Sea A y B dos subcoálgebras de KQ. Sea $x \in \overline{\Theta_{A\wedge B}}$ con $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes y_i$. Si $x_i \in A$ e $y_i \in B$ para algún i entonces la concatenación $x_i y_i = x \in AB$.*

Demostración. Si $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i$ con $q_i \in Q$, $\lambda_i \in K$; recordemos que $x_j y_j = \sum_{i\in I} \lambda_i q_i$ donde $I \subseteq \{1, 2, ..., k\}$, en particular si $x_j \in A$ e $y_j \in B$ entonces $x_j y_j \in AB \subseteq A \wedge B$, entonces si $x_j y_j = \sum_{i\in I} \mu_i q_i$ con $I = \{1, 2, ..., k_1\} \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ salvo reordenar los subíndices, si $k_1 < k$ tendremos que si

$$y = (\lambda_1 q_1 + \sum_{i=2}^{k_1}((\lambda_1 \mu_i)/\mu_1) q_i) \in P$$

entonces $x = y + (x - y)$ y $l(y) = k_1 < k$, $l(x - y) \leq (k - 1)$ con $y, x - y \in P$ y como $x \in \overline{\Theta_{A\wedge B}}$ concluimos que $x_j y_j = x$. □

4.5 Coálgebras asociadas a una subcoálgebra, las coálgebras KQ^A y KQ_A.

Para KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, un elemento $c \in KQ$ lo podemos escribir como $c = \sum_{q\in Q} c_q q$ con casi todos los $c_q \in K$ nulos, puesto que Q es base. Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra entonces denotaremos,

$$A_q = \{c \in KQ \mid c_q = 0\}$$

$$\overline{A_q} = \{c \in KQ \mid c_q \neq 0\}$$

es claro que A_q es un subespacio vectorial de A. Y denotaremos también,

$$Q^A = \{q \mid \overline{A_q} \neq \emptyset\} = \{q \in Q \mid A_q \neq A\}$$

es evidente que $Q^A \subseteq Q$.

Lema 182 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ y sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, entonces,*

1. *Q^A es cerrado para subcaminos.*
2. *$A \subseteq KQ^A$ es subcoálgebra de C.*

3. Equivalen:

(a) $A = KQ^A$.

(b) A tiene una base formada por caminos.

(c) Q^A *es base de A.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Si $q \in Q^A$ entonces $q+\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i = x \in A$ con $\{q, q_1, q_2, ..., q_k\}$ linealmente independientes, por tanto escribimos $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes y_i$ con $\{y_i\}$ linealmente independientes, entonces $x_i \in A$ para cada i, luego si $q = q_1 q_2$ entonces $q_1 \in Q^A$ porque q_1 aparece como sumando en algún x_i, análogamente se demuestra para q_2 y reiterando el proceso se consigue para cualquier subcamino de q. Otra forma más directa, si $q = q_1 q_2$, entonces sabemos que existe $q + R \in A$ donde R representa a otros sumandos linealmente independientes con q, de forma que $(q_1 + R_1)(q_2 + R_2) = q + R$ entonces si calculamos la expresión minimal de $\Delta(q + R)$ será de la forma
$$(q_1 + R_1) \otimes (q_2 + R_2) + \text{ otros términos}$$
por tanto $q_1 + R_1, q_2 + R_2 \in A$ y $q_1, q_2 \in Q^A$.

2. Evidente por (1).

3. Evidente.

□

Observemos que Q^A puede describirse de otra forma, si $q \in A$ es un elemento cualquiera de A entonces $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ es una combinación lineal única de caminos linealmente independientes de Q. Si llamamos $Q^q = \{p_i \in Q \mid i = 1, ..., n\}$ entonces entonces el subconjunto de Q que hemos definido anteriormente y hemos llamado Q^A es,
$$Q^A = \bigcup_{q\in A} Q^q$$
esto es,
$$Q^A = \{q \in Q \mid q \text{ es un camino que aparece no trivialmente en un elemento de } A\}$$

Es claro por las propiedades que hemos descrito de Q^A que $KQ^A \subseteq KQ$ es una subcoálgebra con base de caminos el conjunto Q^A, sin embargo esta coálgebra no es necesariamente de caminos y
$$A \subseteq KQ^A \subseteq KQ$$
también es claro que $F(A) = Q_1 \cap Q^A$.

Llamaremos **grafo asociado a** A al grafo $\Gamma_A = (V(A), F(A))$. Y a la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ_A la llamaremos KQ_A, entonces obsérvese que

$$A \subseteq KQ^A \subseteq KQ_A \subseteq KQ$$

Teorema 183 *Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra de caminos, entonces equivalen:*

1. *A es coidempotente.*
2. *A es la coálgebra de caminos KQ_A asociada al grafo $\Gamma_A = (V(A), F(A))$.*
3. *A es la coálgebra de caminos generada por todos los caminos $q \in Q$ tales que $V(q) \subseteq A$, esto es, la mayor subcoálgebra de KQ tal que contiene a $V(A)$.*

Demostración. (1)⇒(2): Si A es coidempotente entonces $F(A) \subseteq A$, llamemos KQ_A a la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ_A, es claro que $A \subseteq KQ_A$, bastará con demostrar que un camino cualquiera $p \in Q_A$ pertenece a A, en efecto, $p \in \wedge^{l(p)} A = A$ y son iguales.

(2)⇒(3): Evidente.

(3)⇒(1): Si A es una subcoálgebra de caminos, siempre tenemos que $A \subseteq A \wedge A$, supongamos un elemento $q \in A \wedge A$, q es una combinación lineal de caminos cuyos vértices están en A, entonces es una combinación lineal de caminos de A, luego $q \in A$. □

Ahora para $A, B \subseteq KQ$ estudiamos $Q^{A\wedge B}$:

Lema 184 *Sea KQ una coálgebra de caminos, $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras, sean $p_1 \in A$, $p_2 \in B$ y $c = \alpha_1 ... \alpha_n \in Q$ tal que $l(c) \geq 2$, $s(c) = e(p_1)$, $e(c) = s(p_2)$ y con $p_1\alpha_1 \notin A$, $\alpha_n p_2 \notin B$, entonces*

$$p_1 c p_2 \notin A \wedge B.$$

Demostración. Supongamos que $l(c) = 2$, $c = \alpha_1\alpha_2$, entonces

$$\Delta(p_1 c p_2) = p_1\alpha_1 \otimes \alpha_2 p_2 + \text{ otros términos que pertenecen a } A \otimes C + C \otimes B$$

entonces es evidente que $p_1\alpha_1 \otimes \alpha_2 p_2 \notin A \otimes C + C \otimes B$,y por tanto $p_1 c p_2 \notin A \wedge B$.

Si $l(c) = 3$, $c = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, entonces

$$\Delta(p_1 c p_2) = p_1\alpha_1 \otimes \alpha_2\alpha_3 p_2 + p_1\alpha_1\alpha_2 \otimes \alpha_3 p_2 + \text{ otros términos que pertenecen a } A \otimes C + C \otimes B$$

observemos que $A \wedge B \subseteq KQ_A \wedge KQ_B$ y que $p_1\alpha_1 \notin KQ_A$, $\alpha_3 p_2 \notin KQ_B$, Q_A es base de A, Q_B es base de B y $Q_A, Q_B \subseteq Q$ que es base de KQ, por otra parte $p_1\alpha_1, p_1\alpha_1\alpha_2 \notin KQ_A$ y son l.i., $\alpha_3 p_2, \alpha_2\alpha_3 p_2 \notin KQ_B$ y son l.i., entonces

$$p_1\alpha_1 \otimes \alpha_2\alpha_3 p_2 + p_1\alpha_1\alpha_2 \otimes \alpha_3 p_2 \notin A \otimes C + C \otimes B$$

y en consecuencia, $p_1cp_2 \notin A \wedge B$.

Inductivamente podemos demostrarlo para $l(c) = n > 1$.

□

Corolario 185 *Sean $A, B \subseteq KQ$ dos coálgebras, $p \in B$ (resp. en A), $c \in Q$ tal que $s(c) \notin A$ (resp. $e(c) \notin B$) entonces $cp \notin A \wedge B$ (resp. pc).*

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la del lema anterior. □

Para $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebra, definimos los conjuntos,

$$Q^A \wedge Q^B = \{q \in Q \mid q \in KQ^A \wedge KQ^B\}$$

$$Q^A Q^B = \{q \in Q \mid q = p_1 p_2,\ p_1 \in Q^A \text{ y } p_2 \in Q^B\}$$

y para cada $\alpha \in F' = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in A, e(\alpha) \in B\}$, definimos

$$Q^A \alpha Q^B = \{q \in Q \mid q = p_1 \alpha p_2,\ p_1 \in Q^A \text{ y } p_2 \in Q^B\}$$

Del mismo modo aunque AB y $A\alpha B$ no son subcoálgebras entenderemos que

$$Q^{AB} = \{q \in Q \mid q \text{ es un camino que aparece no trivialmente en un elemento de } AB\}$$

y análogamente para $Q^{A\alpha B}$ con $\alpha \in F'$.

Proposición 186 *Sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebra de una de caminos, entonces:*

1. *$Q^{A\wedge B} \supseteq Q^A \cup Q^B \cup Q^{AB} \cup (\bigcup_{\alpha \in F'} Q^{A\alpha B})$ donde $F' = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in A, e(\alpha) \in B\}$.*
2. *$Q^A \cup Q^B \cup Q^A Q^B \cup (\bigcup_{\alpha \in F'} Q^A \alpha Q^B) = Q^A \wedge Q^B$.*
3. *$Q^{A\wedge B} \subseteq Q^A \wedge Q^B$.*
4. *$KQ^{A\wedge B}$ es subcoálgebra de $KQ^A \wedge KQ^B$.*
5. *Si $A \subseteq B$ entonces $Q^A \subseteq Q^B$.*
6. *$KQ^{A+B} = KQ^A + KQ^B$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Esta inclusión es trivial.
2. Sea $q \in KQ^A \wedge KQ^B$ un camino, si $q \notin Q^A$ y $q \notin Q^B$, entonces $s(q) \in A \subseteq Q^A$ y $e(q) \in Q^B$, consideremos $q_1 \in Q^A$ y $q_2 \in Q^B$ de longitudes máximas tales que $q = q_1 c q_2$, entonces $l(c) \leq 1$ y $q \in Q^A q Q^B$ o $q \in Q^A c Q^B$. La otra inclusión es evidente.

3. Si $q \in Q^{A\wedge B}$ entonces $q + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i = x \in A \wedge B$ con $\{q, q_1, q_2, ..., q_k\}$ linealmente independientes, por tanto $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ con $x_{(1)} \in A$ o $x_{(2)} \in B$ luego $\Delta(q) = \sum_{(q)} q_{(1)} \otimes q_{(2)}$ con $q_{(1)} \in Q^A$ o $q_{(2)} \in Q^B$.

4. Evidente.

5. Evidente.

6. Es claro que $Q^{A+B} = Q^A \cup Q^B$ y por tanto inmediato.

$\square$

4.6 Coradical de una coálgebra de caminos.

Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (V, F)$, entonces el coradical de KQ es el espacio vectorial que tiene por base al conjunto V de todos los vértices,

$$R = Corad(KQ) = KV$$

En particular si $A \subseteq C$ es una subcoálgebra cualquiera entonces,

$$T = Corad(A) = KV(A)$$

Obsérvese como claramente $R^{\infty(KQ)} = KQ$, y además $T^{\infty(KQ)}$ es la coálgebra de caminos asociada al grafo $(V(A), F')$ donde

$$F' = \{\alpha \in F \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A)\}$$

de hecho, es la mayor subcoálgebra de caminos de KQ coidempotente en KQ que contiene a todos los vértices de A. Además si definimos el elemento idempotente $f_{V(A)} \in KQ^*$ por $f_{V(A)}(x) = 1$ para cada $x \in V(A)$ y $f_{V(A)}(p) = 0$ para cada $p \in Q - V(A)$, entonces

$$T^{\infty(KQ)} = (KQ)^{(f_{V(A)})}$$

es la mayor subcoálgebra de KQ anulada por $f_{V(A)}$.

4.7 Subcoálgebras de caminos coprimas.

Recordemos que una subcoálgebra $P \subseteq KQ$ es coprima si para cualesquiera subcoálgebras $A, B \subseteq KQ$ tal que $P \subseteq A \wedge B$ entonces $P \subseteq A$ o $P \subseteq B$.

Ejemplo 187 *Sea KQ una coálgebra de caminos con tres flechas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in Q_1$ y con $s(\alpha_1) = e(\alpha_3) = x_1$, $s(\alpha_2) = e(\alpha_1) = x_2$ y $s(\alpha_3) = e(\alpha_2) = x_3$, es decir, que forman un ciclo de longitud 3.*

$$\begin{tikzcd} & x_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ x_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & x_3 \arrow[ll, "\alpha_3"] \end{tikzcd}$$

Consideremos el grafo $\Gamma' = (V', E')$ con $V' = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $F' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y llamemos P a la coálgebra de caminos asociada Γ. Es claro que $P \subseteq KQ$ es un subcoálgebra. Además P es el espacio vectorial generado por

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \{q \in Q \mid q \subseteq (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n\}$$

donde por $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n$ entenderemos la concatenación $\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{n-1}$ para cada $n > 1$.

En efecto, P es coprima, supongamos que $P \subseteq A \wedge B$ para dos subcoálgebra A y B de KQ, entonces tendremos que demostrar que $P \subseteq A$ o $P \subseteq B$, para ello basta con demostrar que $\{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \subseteq A$ o B, supongamos que $\{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \not\subseteq B$, entonces existe un n tal que $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n \notin B$, consideremos $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{n+k} \in P$ y

$$\Delta((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{n+k}) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^k \otimes (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n + R$$

donde R es el resto de sumandos, es evidente que todos los caminos que aparecen en una coordenada son linealmente independientes, entonces como $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^n \notin B$, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^k \in A$ para cada $k > 0$, luego $P \subseteq A$.

$\square$

Para $p \in Q$ definimos $\sigma_\alpha(p)$ como el número de veces que p pasa por α y $\sigma_\alpha(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i) = max\{\sigma_\alpha(p_i) \mid i = 1, ..., k\}$.

Proposición 188 *Sea $P \subseteq KQ$ una subcoálgebra coprima que no es simple, entonces:*

1. *P es de dimensión infinita.*
2. *Para cada flecha $\alpha \in F(P)$, no podemos acotar $Max\{\sigma_\alpha(y) \mid y \in P\}$ y por supuesto tampoco la longitud de los caminos que pasan por α.*
3. *Para cada camino $p \in Q^P$, existe otro camino $q \in Q^P$ tal que $p \prec q$,*
4. *Para cada elemento de la forma $\lambda q_1 + \mu q_2 \in P$ con $q_1, q_2 \in Q$, y para cada $n, m \in \mathbb{N}$ existe un camino $c \in Q^P$ tal que c pasa por q_1 y por q_2 al menos n y m veces respectivamente.*

5. *Sea* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in P$ *un elemento cualquiera con* $p_1, p_2, ..., p_k$ *linealmente independiente, entonces existe un camino* $c \in Q^P$ *que pasa por cada* p_i *tantas veces como queramos.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Cualquier coálgebra coprima y de dimensión finita es simple.

2. Sea $\alpha \in F(P)$. Sea A la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (Q_0, Q_1 - \{\alpha\})$, es claro que $P \nsubseteq A$ porque $\alpha \notin A$ y tampoco está en A ningún camino que pase por α, pero $P \subseteq A \wedge A$, salvo que exista un camino p que pase por α al menos dos veces y sea un elemento de P o $\mu p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in P$, esto es, sea parte de una combinación lineal de caminos que sea un elemento de P. $(p \in Q^P)$

   Reiterando el proceso anterior, no existe ningún n tal que no exista un camino p que pase por α menos de n veces y p esté en P o forme parte de una combinación lineal de caminos que esté en P. Veámoslo con más detalle:

   Supongamos que existe m tal que $\sigma_\alpha(y) \leq m$ para cada $y \in P$. Sea

$$G_0 = \{y \mid \sigma_\alpha(y) = n\}$$

   donde $n = max\{\sigma_\alpha(y) \mid y \in P\}$, ahora nos quedamos con los caminos en los que aparece α exactamente n veces,

$$G_1 = \bigcup_{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in G_0} \{p_j \in Q \mid \sigma_\alpha(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i) = \sigma_\alpha(p_j)\}$$

   cada camino $p \in G_1$ es una concatenación de la forma

$$p = q_1 \alpha q_2 \alpha ... q_n \alpha q_{n+1}$$

   donde $q_1, q_2, ..., q_{n+1} \in Q$ son caminos donde no aparece α, esto es, $\sigma_\alpha(q_i) = 0$ para cada $i = 1, 2, ..., (n+1)$. Recordemos que A es la coálgebra de caminos con $V(A) = Q_0$ y $F(A) = Q_1 - \{\alpha\}$. Es evidente que $P \nsubseteq A$. Obsérvese que $q_i \alpha q_{i+1} \in \wedge^2 A$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ pero $\wedge^2 A$ no contiene ningún camino que pase por α más de una vez, análogamente $\wedge^3 A$ no contiene caminos que contenga a α más de dos veces y $\wedge^k A$ no contiene caminos que contengan a α más de $k-1$ veces. Por tanto $P \nsubseteq \wedge^k A$ para cada $k < (n+1)$, por otra parte es evidente que $P \subseteq \wedge^{(n+1)} A$, pero P es coprima, luego no puede existir n.

3. Supongamos que existe un elemento $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ tal que para el camino p_i no ocurre, entonces contruimos la subcoálgebra de KQ generada por todos los caminos de P menos p_i, pero si dejamos todos los subcaminos propios de p_i, esto es, si

$$A_1 = \{p_{i_j} \mid p_{i_j} \text{es un subcamino propio de } p_i\}$$

$$A_2 = (\bigcup_{y\in P}\{p_j \mid y = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j\}) - \{p_i\}$$
$$A = K(A_1 \cup A_2)$$

A es una subcoálgebra de KQ tal que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i \notin A$ porque no existe ningún camino de longitud superior en cualquier otro elemento de A, de manera que al calcular Δ de ese elemento, obtuviésemos una expresión donde apareciera p_i. Y razonando igual que antes, $P \nsubseteq A$ y $P \subseteq A \wedge A$.

4.

(a) Supongamos que $q_1 \npreceq q_2$ y $q_2 \npreceq q_1$. Y supongamos $e(q_1) = e(q_2)$ y $s(q_1) = s(q_2)$. Definimos los conjuntos de caminos

$$A_0 = \{q \in Q \mid q_1 \nsubseteq q\}$$

y

$$B_0 = \{q \in Q \mid q_2 \nsubseteq q\}$$

y les añadimos todos los subcaminos de cada elemento,

$$A = A_0 \cup \bigcup_{q\in A_0}\{p \in Q \mid p \preceq q\}$$

y

$$B = B_0 \cup \bigcup_{q\in B_0}\{p \in Q \mid p \preceq q\}.$$

Es evidente que $q_2 \in A$ y $q_1 \in B$ y además KA y KB son subcoálgebras,

$$\lambda q_1 + \mu q_2 \in KA + KB \subseteq KA \wedge KB,$$

es claro que $P \nsubseteq KA$ y $P \nsubseteq KB$, entonces $P \nsubseteq KA + KB$ porque P es coprima, pero los únicos caminos que no están en $KA + KB$ son aquellos que contienen a q_1 y q_2 simultáneamente, por tanto existe una camino c que pasa por q_1 y q_2 al menos una vez y $c \in Q^P$, esto es, forma parte de un elemento de P, existen $p_1, p_2, ...p_k \in Q$ con $c + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i \in P$ y $c, p_1, p_2, ..., p_k$ linealmente independientes o $c \in P$. Como q_1 y q_2 empiezan y terminan en el mismo vértice, entonces c está contenido en un ciclo.

Además concluimos que $P \nsubseteq A \wedge B$, pero entonces c debe de pasar por q_1 o q_2 más de una vez porque los caminos que no están en $A \wedge B$ son exactamente estos, y si consideramos $(\wedge^n A) \wedge (\wedge^m B)$, como $P \nsubseteq \wedge^2 A$, $P \nsubseteq \wedge^n A$ e igual para B, entonces debe de existir c pasa por q_1 y q_2 tantas veces como queramos. Obsérvese además que si cambiamos el orden en el producto wedge podemos encontrar c pasando por p y q tantas veces como queramos y en el orden que deseemos.

(b) Si $q_1 \preceq q_2$ o $q_2 \preceq q_1$ entonces $q_1, q_2 \in P$, supongamos que q_1 es el mayor de ellos (en el otro caso se haría igual), sea

$$A_0 = \{q \in Q \mid q_1 \not\preceq q\}$$

y

$$A = A_0 \cup \bigcup_{q \in A_0} \{p \in Q \mid q \preceq p\},$$

razonando igual que antes para $\wedge^n A$ se concluye la demostración.

Si $e(q_1) \neq e(q_2)$ o $s(q_1) \neq s(q_2)$ entonces $q_1, q_2 \in P$ y de nuevo estamos en la situación anterior.

5. Igual que el apartado anterior.

□

Diremos que una grafo orientado es **fuertemente conexo** si para cada dos vértices cualesquiera existen dos caminos q_1, q_2 tal que $s(q_1) = x$, $e(q_1) = y$, $s(q_2) = y$ y $e(q_2) = x$, esto es, existe un ciclo orientado que pasa por dos vértices cualesquiera del grafo.

Teorema 189 *Sea $P = KQ$ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, entonces equivalen:*

1. *P es coprima.*
2. *Γ es fuertemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN. (1)⇒(2):

1. Γ es conexo. Evidente por 70 y 171. En efecto, supongamos que Γ no es conexo, entonces existe $x, y \in Q_0$ no conectados, entonces definimos A_0 como el conjunto de todos los vértices conectados con x, es decir,

$$A_0 = \{z \in Q_0 \mid \text{existe } p \in Q, \text{con } e(p) = z, s(p) = x \text{ o } e(p) = x, s(p) = z\},$$

definimos A_1 como el conjunto de todas las flechas de Γ tales que sus vértices están en A_0 y consideramos A la coálgebra de caminos asociada la grafo $\Gamma' = (A_0, A_1)$ (componente conexa de x), es claro que es subcoálgebra propia de P. Por otra parte definimos la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma'' = (Q_0 - A_0, Q_1 - A_1)$ (componente conexa de y), que también es una subcoálgebra propia de P y tenemos que $P = A + B = A \wedge B$, como P es coprima es imposible y en consecuencia x e y están conectados.

2. Cada flecha de Γ está contenida en un ciclo orientado, en efecto; sea $\alpha \in Q_1$ una flecha cualquiera, entonces sabemos por ser P coprima que existe caminos que contienen a α tantas veces como queramos, sea q un camino que contenga a α dos veces, entonces q será la concatenación $q_1\alpha q_2 \alpha q_3$ con $q_1, q_2, q_3 \in Q$ y lógicamente $l(q_2) > 0$, entonces αq_2 claramente es un ciclo orientado.

3. Dos vértices cualesquiera de Γ están conectados por un camino orientado. En efecto, sean $x, y \in V$, entonces existe un camino no orientado que conecta x con y, éste será una sucesión de vértices $\{v_0, ..., v_n\}$ y otra de flechas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de manera que $\{s(\alpha_i), e(\alpha_i)\} = \{v_{i-1}, v_i\}$ y con $v_0 = x$ y $v_n = y$. Por (2) podemos considerar un ciclo orientado c_i que pasa por cada α_i, será de la forma, $c_i = b_{i,1}\alpha_i b_{i,2}$, consideremos el ciclo $t_i = \alpha_i b_{i,2} b_{i,1} = \alpha_i b_i$, y construimos el camino que resulta de concatenar aquellos trozos de cada ciclo t_i que tienen la misma orientación,

$$s_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x_i = s(\alpha_i) \\ b_i & \text{si } x_i = e(\alpha_i) \end{cases}$$

entonces $q = s_1 s_2 ... s_n$ es un camino orientado que conecta x con y.

4. Γ es fuertemente conexo. En efecto, sea $x, y \in Q_0$ dos vértices cualesquiera, por (1) sabemos que existe un camino que conecta a ambos, esto es, existe $q \in Q$ tal que $s(q) = x$ y $e(q) = y$, o bien, $s(q) = y$ y $e(q) = x$. Supongamos que $s(q) = x$ y $e(q) = y$ (para el otro caso se haría igual). Entonces $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, por (2), para α_i existe un ciclo orientado $c_i \in Q$ que pasa por α_i que será de la forma

$$c_i = \beta_1...\beta_i\alpha_i\beta_{i+1}...\beta_m \in Q$$

consideramos los subcaminos $b_{i,1} = \beta_1...\beta_i$ y $b_{i,2} = \beta_{i+1}...\beta_m$, ahora construimos el ciclo,

$$d_i = \alpha_i b_{i,2} b_{i,1}$$

observemos que $e(b_{i,2}b_{i,1}) = s(\alpha_i)$ y $s(b_{i,2}b_{i,1}) = e(\alpha_i)$, podemos en consecuencia considerar el camino,

$$b = b_{n,2}b_{n,1}b_{(n-1),2}b_{(n-1),1}...b_{1,2}b_{1,1}$$

donde $s(b) = e(q)$ y $e(b) = a(q)$, por tanto el camino resultante de la concatenación $bq \in Q$ es un ciclo y pasa por x e y.

(2)$\Rightarrow$(1): Supongamos que P no es coprima, entonces existen A y B dos subcoálgebras propias de P tales que $P = A \wedge B$. $A \subset P$ entonces existe un elemento $p = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in P$ con $p \notin A$, por tanto existe un camino $q_1 \in Q$ tal que $q_1 \in P$ y $q_1 \notin A$. Análogamente existe otro camino $q_2 \in Q$ tal que $q_2 \in P$ y $q_2 \notin B$. Sea $x = e(q_1)$ e $y = s(q_2)$ entonces como Γ es fuertemente conexo existe un camino $c \in Q$ con $s(c) = x$ y $e(c) = y$, luego podemos concatenar y construir el camino $q_1cq_2 \in Q$ y $q_1cq_2 \in P = A \wedge B$. Ahora calculamos,

$$\Delta(q_1cq_2) = q_1c \otimes q_2 + q_1 \otimes cq_2 + \text{ otros términos}$$

entonces razonando como en 184, $q_1c \in A$ o $q_2 \in B$, y además $q_1 \in A$ o $cq_2 \in B$, pero $q_1 \notin A$ y por tanto $q_1c \notin A$, y análogamente $q_2, cq_2 \notin B$, luego $q_1cq_2 \notin A \wedge B$ y en consecuencia P debe ser coprima. $\square$

4.8 El álgebra dual $(KQ)^*$, sus elementos idempotentes.

Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, $(KQ)^* = Hom(KQ, K)$ está en correpondencia biyectiva con el conjunto de todas las aplicaciones, $Aplic(Q, K) = \{f \mid f : Q \to K\}$, de hecho $Hom(KQ, K) \cong K(Aplic(Q, K))$ como espacios vectoriales, el producto de $f, g \in Hom(KQ, K)$ viene dado por la aplicación $fg : KQ \to K$ que para $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$ está definida por,

$$(fg)(q) = f(s(\alpha_1))g(q) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_1\alpha_2...\alpha_i)g(\alpha_{i+1}...\alpha_n) + f(q)g(e(\alpha_n))$$

Lema 190 *Sea $f \in (KQ)^*$ un elemento idempotente, entonces,*

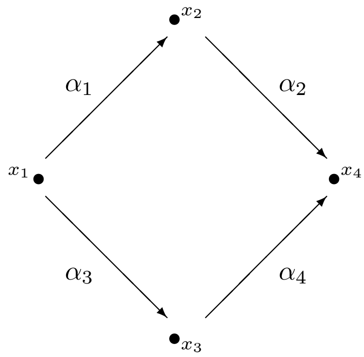
1. *$f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ para cada $x \in Q_0$.*
2. *Sea $\alpha \in Q_1$, si $f(e(\alpha)) = f(s(\alpha))$ entonces $f(\alpha) = 0$.*
3. *Sea $q = \alpha_1...\alpha_n \in Q$, si $f(e(\alpha_i)) = f(s(\alpha_1))$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ entonces $f(q) = 0$.*

Demostración.

1. Sea $x \in Q_0$, entonces $f(x) = (ff)(x) = f(x)f(x) \in K$, por tanto $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$.
2. Sea $\alpha \in Q_1$,
$$f(\alpha) = (ff)(\alpha) = f(s(\alpha))f(\alpha) + f(\alpha)f(e(\alpha))$$
de donde es evidente.
3. Supongamos que $e(\alpha_{i+1}) = s(\alpha) = 1$ en el otro caso sería igual, $f(\alpha_i) = 0$ por el apartado anterior, en particular $f(\alpha_1) = 0$, pero entonces $-f(\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_1)f(\alpha_2)$, por tanto $f(\alpha_1\alpha_2) = 0$, por inducción supongamos que $f(\alpha_1...\alpha_k) = 0$ para cada $k < n$ entonces
$$f(q) = 2f(q) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_1...\alpha_i)f(\alpha_{i+1}...\alpha_n) = 2f(q) + 0$$
por tanto $f(q) = 0$.

$\square$

Ejemplo 191 *Consideramos el grafo,*



y sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo. Consideremos el elemento $f \in (KQ)^*$ definido por

$$\begin{aligned} &f(x_1) = f(\alpha_2) = f(\beta_2) = f(\alpha_1\alpha_2) = f(\beta_1\beta_2) = 0, \\ &f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 1, \\ &f(\alpha_1) = k_1, \\ &f(\beta_1) = k_2 \end{aligned}$$

con $k_1, k_2 \in K$ dos escalares cualesquiera. f es idempotente y

$$x_2, x_3, x_4, \alpha_2, \beta_2, \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \in (f \rightharpoonup KQ)$$

$$x_1, \alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \beta_1, \beta_1\beta_2 \notin (f \rightharpoonup KQ)$$

$\square$

Lema 192 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sea $f \in (KQ)^*$ idempotente, sea $x \in Q_0$ y sea $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$ con $s(\alpha_i) = x_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $e(\alpha_n) = x_{n+1}$. Entonces,*

1. *$x \in (f \rightharpoonup KQ)$ si y sólo si $f(x) = 1$.*
2. *$q \in (f \rightharpoonup KQ)$ si y sólo si $f(q) = f(\alpha_2...\alpha_n) = \ldots = f(\alpha_n) = 0, f(x_{n+1})) = 1$.*
3. *$x \in (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f)$ si y sólo si $f(x) = 1$.*
4. *$\alpha \in (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f)$ si y sólo si $f(s(\alpha)) = f(e(\alpha)) = 1$.*
5. *$q \in (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f)$ si y sólo si*

$$f(q) = f(\alpha_2...\alpha_n) = \ldots = f(\alpha_n) = 0,$$

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_1\alpha_2) = \ldots = f(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}) = 0,$$

$$f(x_{n+1})) = 1 = f(x_1).$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Si $x \in Q_0$, entonces

$$x \in (f \rightharpoonup KQ) \Leftrightarrow (f \rightharpoonup x) = x \Leftrightarrow xf(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1$$

   Por tanto $(f \rightharpoonup KQ) \cap Q_0 = \{x \in Q_0 \mid f(x) = 1\}$.

2. $$q \in (f \rightharpoonup KQ) \Leftrightarrow (f \rightharpoonup q) = q = s(x_1)f(q) + \alpha_1 f(\alpha_2...\alpha_n)) + \ldots + qf(x_{n+1}) \Leftrightarrow$$
$$f(p) = f(\alpha_2...\alpha_n) = \ldots = f(\alpha_n) = 0, f(x_{n+1})) = 1.$$

3. Evidente.

4. $\alpha \in Q_1 \cap (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f)$, $s(\alpha) = x$, $e(\alpha) = y$ si y sólo si $\alpha = f(x)xf(\alpha) + f(x)\alpha f(y) + f(\alpha)yf(y)$, esto es, si y sólo si $f(x) = f(y) = 1$ y $f(\alpha) = 0$.

5. Análoga al apartado anterior.

□

Lema 193 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sean $p, q \in Q$, $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ y $p = \beta_1\beta_2...\beta_m$ dos caminos tales que $e(\alpha_n) = s(\beta_1)$ y sea $f \in (KQ)^*$ un elemento idempotente tal que $f \rightharpoonup qp \leftharpoonup f = qp$,*

$$q \leftharpoonup f = q, \; f \rightharpoonup p = p.$$

DEMOSTRACIÓN. Evidente □

Proposición 194 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Sea $f \in (KQ)^*$ un elemento idempotente,*

1. *$f \rightharpoonup KQ$ no es necesariamente una coálgebra pero contiene a la coálgebra de caminos coidempotente asociada al conjunto de vértices*

$$\{x \in Q_0 \mid f(x) = 1\}.$$

   Es un KQ-comódulo a izquierda.

2. *$KQ^{(f)}$, la mayor subcoálgebra de KQ formada por elementos anulados por f, es la subcoálgebra coidempotente asociada al subconjunto de vértices*

$$V_f = \{x \in Q_0 \mid f(x) = 0\},$$

   esto es, la coálgebra de caminos asociada al subgrafo de Γ,

$$\Gamma' = (V_f, \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V_f\}).$$

3. $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$ contiene a la subcoálgebra coidempotente asociada al subconjunto de vértices

$$\{x \in Q_0 \mid f(x) = 1\}.$$

Es una coálgebra, pero no necesariamente una subcoálgebra de KQ.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q$ con $s(\alpha_i) = x_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $e(\alpha_n) = x_{n+1}$. Entonces, es claro que si $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_{n+1}) = 1$,

$$f(q) = f(\alpha_2...\alpha_n) = \ldots = f(\alpha_n) = 0, f(x_{n+1})) = 1.$$

   Luego $f \rightharpoonup KQ$ contiene a la subcoálgebra de caminos asociada al subgrafo

$$\Gamma = (\{x \in Q_0 \mid f(x) = 1\}, \{\alpha \in Q_1 \mid f(s(\alpha)) = f(e(\alpha)) = 1\})$$

2. Llamemos $A \subseteq KQ$ al conjunto de todos los elementos de KQ anulados por f. Un vértice $x \in A$ si y sólo si $e(x) = 0$. Igual que antes se prueba que la subcoálgebra coidempotente asociada al conjunto de vértices $\{x \in Q_0 \mid f(x) = 0\}$ está contenida en A. De hecho cualquier coálgebra contiene a todos los vértices que aparecen en sus caminos entonces la coálgebra coidempotente anterior es la mayor que podemos encontrar que sea anulada por f.

3. Igual que antes.

   La estructura de coálgebra de $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$ la podemos comprobar en 3.9.

□

Obsérvemos que para cada subconjunto de vértices $H \subseteq \mathcal{P}(Q_0)$, existe un conjunto de elementos idempotentes de $(KQ)^*$,

$$I_H = \{f \in (KQ)^* \mid f^2 = f, f(x) = 0 \text{ para cada } x \in H\}$$

que determinan la mismas subcoálgebras coidempotentes

$$KQ^{(f)} = KQ^{(g)}$$

para cualesquiera $f, g \in I_H$. Entonces los idempotentes de I_H deben de ser semejantes, esto es, los comódulos inyectivos $f \rightharpoonup KQ$ y $g \rightharpoonup KQ$ deben tener los mismos factores de composición, pero es evidente porque tanto las subcoálgebras simples como los comódulos simples en coálgebras de caminos son los espacios vectoriales 1-dimensionales generados por los vértices.

Lema 195 *Sean $f, f' \in (KQ)^*$ dos elementos idempotentes tales que $f(x) = f'(x)$ para cada $x \in Q_0$ entonces $f \rightharpoonup KQ$ y $f' \rightharpoonup KQ$ tienen los mismos factores de composición.*

Demostración. Los comódulos simples de ${}^{KQ}\mathcal{M}$ y de $\mathcal{M}^{KQ}$ son al igual que en KQ los espacios vectoriales 1-dimensionales generados por los vértices, entonces el lema es evidente. $\square$

Por tanto los elementos idempotentes semejantes de $(KQ)^*$ son aquellos que coinciden en Q_0.

Consideremos $f_X \in KQ^*$ un idempotente que es distinto de cero sólo en un subconjunto de vértices $X \subseteq Q_0$.

Entonces:

1. $f_X \rightharpoonup KQ$ es el KQ-módulo a izquierda generado por todos los vértices de X y todos los caminos de Q que terminan en un vértice de X, esto es,
$$f_X \rightharpoonup KQ = K\{q \in Q \mid e(q) \in X\}$$
Análogamente, $KQ \leftharpoonup f_X$ es el KQ-módulo a derecha generado por todos los vértices de X y todos los caminos de Q que empiezan en un vértice de X, esto es,
$$KQ \leftharpoonup f_X = K\{q \in Q \mid s(q) \in X\}$$

2. Sea S_x la subcoálgebra simple asociada al vértice $x \in Q_0$, entonces $E({}^{KQ}S_x)$ la envolvente inyectiva a izquierda de S_x está generada por todos los caminos de Q que termina en x,
$$E({}^{KQ}S_x) = K\{q \in Q \mid e(q) = x\} = f_x \rightharpoonup KQ$$
Análogamente, $E((S_x)^{KQ})$ la envolvente inyectiva a derecha de S_x está generada por todos los caminos de Q que empiezan en x,
$$E((S_x)^{KQ}) = K\{q \in Q \mid s(q) = x\} = KQ \leftharpoonup f_x$$

3. $KQ^{(f_X)}$, la mayor subcoálgebra anulada por f_X, está generada por todos aquellos caminos tales que todos sus vértices están en X,
$$KQ^{(f_X)} = K\{q \in Q \mid V(q) \subseteq X\}$$

4. $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$ está generada por todos los caminos de Q tales que su vértice inicial y final está en X,
$$(f_X \rightharpoonup KQ) \cap (KQ \leftharpoonup f_X) = f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X = K\{q \in Q \mid s(q), e(q) \in X\}$$

Entonces,
$$f_X \rightharpoonup KQ = \bigoplus_{x \in X} E({}^{C}(S_x)) = \bigoplus_{S \in KQ^{(1-f_X)}} E({}^{C}S)$$
$$(1 - f_X) \rightharpoonup KQ = \bigoplus_{x \in Q_0 - X} E({}^{KQ}(S_x)) = \bigoplus_{S \in KQ^{(f_X)}} E({}^{C}S)$$
viendo ${}^{KQ}S \in {}^{KQ}\mathcal{M}$ y donde S_x es la subcoálgebra simple asociada al vértice x.

Proposición 196 *En las condiciones anteriores, equivalen:*

1. f_X *es central.*
2. $KQ^{(f_X)}$ *es inyectivo a izquierda y derecha.*
3. $KQ^{(f_X)}$ *es una suma de componentes conexas de* KQ*.*

DEMOSTRACIÓN. Si f_X es central, $1 - f_X$ también es central, entonces

$$(1 - f_X) \rightharpoonup KQ = KQ \leftharpoonup (1 - f_X) = (1 - f_X) \rightharpoonup KQ \leftharpoonup (1 - f_X) = KQ^{(f_X)}$$

por tanto $KQ^{(f_X)} = E(KQ^{(f)})$ a izquierda y derecha. El resto de la demostración es evidente. □

Definamos la siguiente relación equivalencia en $\mathcal{I} = \{f \in (KQ)^* \mid f = f^2\}$,

$$eRf \Leftrightarrow f\mid_{Q_0} = e\mid_{Q_0}$$

Entonces $\mathcal{I}/R$ es un álgebra de Boole,

$$\overline{e} \leq \overline{f} \Leftrightarrow \overline{ef} = \overline{e}$$

Donde la operación ínfimo se define por,

$$\overline{e} \wedge^* \overline{f} = \overline{ef}$$

y el supremo,

$$\overline{e} \vee \overline{f} = \overline{e + f - ef}$$

Análogamente podemos hacer para el conjunto de subcoálgebras coidempotentes $\mathcal{D} = \{A \subseteq KQ \mid \wedge^2 A = A\}$.

$$A \leq B \Leftrightarrow V(A) \subseteq V(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

y la operación ínfimo sería,

$$A \wedge^* B = KQ'$$

donde Q' es el conjunto de todos los caminos del grafo

$$\Gamma' = (V(A) \cap V(B), \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A) \cap V(B)\}$$

y el supremo

$$A \vee B = KQ''$$

donde Q'' es el conjunto de todos los caminos del grafo

$$\Gamma'' = (V(A) \cup V(B), \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V(A) \cup V(B)\}$$

Proposición 197 *Sea* KQ *la coálgebra de caminos asociada a un grafo* $\Gamma = (V, F)$*, entonces* $(\mathcal{I}/R, \vee, \wedge^*)$*,* $(\mathcal{D}, \vee, \wedge^*)$ *y* $(\mathcal{P}(V), \cup, \cap)$ *son álgebras de Boole isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. □

4.9 Localización de KQ-comódulos. La coálgebra de caminos $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$

En el capítulo 3 se establecen relaciones biyectivas entre las subcategorías localizantes de $\mathcal{M}^C$ y las clases de equivalencia de C-comódulos a derecha inyectivos, para cada clase de equivalencia podemos elegir como representante un comódulo inyectivo quasi-finito que será de la forma $C \leftharpoonup f$ para cierto idempotente $f \in C^*$. También se establece una relación biunívoca entre las subcategorías localizantes y las subcoálgebras de C coidempotentes, así como también con clases de semejanza de elementos idempotentes de C^*.

Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Las subcoálgebras coidempotentes están en relación biyectiva con los subconjuntos de vértices, de hecho, la relación biyectiva se establece también entre subcategorías localizantes y subconjuntos de vértices del grafo. Como hemos visto para cada clase de semejanza de idempotentes KQ^* podemos elegir como representante al idempotente tal que $f_X(x) = 1$ para cada x que pertenece al subconjunto de vértices X del grafo Γ (subconjunto de vértices asociado a una subcategoría localizante por la biyección) y f_X es cero en el resto de elementos de la coálgebra KQ. Entonces para localizar un KQ-comódulo a derecha, tendríamos que estudiar previamente la coálgebra $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$, cuando f_X es un idempotente tal que es distinto de 0 sólo en el subconjunto de vértices X. Recordemos que salvo equivalencia Morita una localización de KQ es de la forma $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$ para $f \in KQ^*$ un elemento idempotente, que salvo semejanza podemos suponer que es $f = f_X$. Entonces podemos concluir que las coálgebras que son localizaciones de KQ también son coálgebras de caminos:

Teorema 198 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sea $f_X \in [g]$ con $[g] \in \mathcal{I}/R$, el idempotente tal que $f_X(x) = 1$ para cada $x \in X \subseteq Q_0$ y $f_X(p) = 0$ para cada $p \in Q - X$, entonces $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$ es la coálgebra de caminos $K\overline{Q}$ asociada al grafo*

$$\overline{\Gamma} = (V, \{p = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in Q \mid f_X(s(p)) = f_X(e(p)) = 1, f_X(e(\alpha_i)) = 0, \ \ \forall 1 \leq i < n\}).$$

Demostración. Definamos el morfismo de espacios vectoriales,

$$\phi : (f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X) \longrightarrow K\overline{Q}$$

que definimos sobre cualquier camino $q \in f_X \rightharpoonup Q \leftharpoonup f_X$ por $\phi(q) = \overline{q}$ donde si $q = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ obsérvese que

$$f_X \rightharpoonup q \leftharpoonup f_X = q = f_X(s(q))qf_X(e(q)) \Leftrightarrow f_X(s(q)) = f_X(e(q)) = 1 \Leftrightarrow s(q), e(q) \in V$$

y entonces $\overline{q} = \beta_1\beta_2...\beta_m$ con

$$\begin{array}{ll}
\beta_1 = \alpha_1...\alpha_{i_1} & f_X(s(\alpha_1)) = f_X(e(\alpha_{i_1})) = 1, \\
 & f_X(e(\alpha_1)) = f_X(e(\alpha_2)) = ... = f_X(e(\alpha_{i_1-1})) = 0; \\
\beta_2 = \alpha_{i_1+1}...\alpha_{i_2} & f_X(s(\alpha_{i_1}+1)) = f_X(e(\alpha_{i_2})) = 1, \\
 & f_X(e(\alpha_{i_1+1})) = f_X(e(\alpha_{i_1+2})) = ... = f_X(e(\alpha_{i_2-1})) = 0; \\
\vdots & \vdots \\
\beta_m = \alpha_{i_{m-1}+1}...\alpha_{i_n} & f_X(s(\alpha_{i_{m-1}+1})) = f_X(e(\alpha_{i_m})) = 1, \\
 & f_X(e(\alpha_{i_{m-1}+1})) = f_X(e(\alpha_{i_{m-1}+2})) = ... = f_X(e(\alpha_{n-1})) = 0
\end{array}$$

con

$$1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < n$$

Observemos que si $f_X \rightharpoonup q \leftharpoonup f_X = q \in f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$ y $q = q_{(1)}q_{(2)}$, la concatenación de $q_{(1)} = \alpha_1...\alpha_k$ y $q_{(2)} = \alpha_{k+1}...\alpha_n$ entonces $f_X \rightharpoonup q_{(1)} \leftharpoonup f_X = f_X \rightharpoonup q_{(1)}$ (siempre es así) y en particular como $f_X(p) = 0$ para cualquier camino de longitud mayor que cero,

$$f_X \rightharpoonup q_{(1)} \leftharpoonup f_X = f_X \rightharpoonup q_{(1)} = \begin{cases} q_{(1)} & \text{si } f_X(e(\alpha_k)) = 1 = f_X(s(\alpha_{k+1})) \\ 0 & \text{si } f_X(e(\alpha_k)) = 0 = f_X(s(\alpha_{k+1})) \end{cases}$$

y análogamente

$$f_X \rightharpoonup q_{(2)} \leftharpoonup f_X = q_{(2)} \leftharpoonup f_X = \begin{cases} q_{(2)} & \text{si } f_X(e(\alpha_k)) = 1 = f_X(s(\alpha_{k+1})) \\ 0 & \text{si } f_X(e(\alpha_k)) = 0 = f_X(s(\alpha_{k+1})) \end{cases}$$

Luego,

$$\Delta_{f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X}(q) = \sum_{q_{(1)}q_{(2)}=q,\ f_X(e(\alpha_k))=1} q_{(1)} \otimes q_{(2)}$$

y además,

$$\Delta_{K\overline{Q}}(\overline{q}) = \sum_{q_{(1)}q_{(2)}=q,\ f_X(e(\alpha_k))=1} \overline{q_{(1)}} \otimes \overline{q_{(2)}}$$

Por otro lado,

$$\epsilon_{f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X}(q) = f_X(q)$$

y

$$\epsilon_{K\overline{Q}}(\overline{q}) = f_X(q)$$

en efecto, $\epsilon_{K\overline{Q}}(\overline{q}) = 1$ si y sólo si $\overline{q} \in V$, esto es, si y sólo si $f_X(q) = 1$, y en el resto de caminos es cero al igual que f_X.
Por tanto las dos coálgebras son isomorfas. $\square$

La localización de un comódulo a derecha sobre una coálgebra de caminos asociada al grafo Γ es otro comódulo a derecha sobre otra coálgebra de caminos, aquella que está asociada al grafo que resulta de simplificar el grafo Γ tras quitarle algunos vértices, esto es, lo que hemos llamado una localización de KQ, hablamos de simplificación porque el grafo resultante asociado a la coálgebra mantiene conectados de la misma forma y por el mismo número de caminos a aquellos vértices que no hemos quitado, de manera que la localización respecto de un subconjunto de vértices o subcoálgebras simples es lo mismo que determinar el grafo que conserve la información del grafo de partida en cuanto a conexión pero quitando los vértices que deseemos.

Ahora parece lógico preguntarse cuando dadas dos coálgebras de caminos, podemos asegurar que si una de ellas es KQ, la otra es de la forma $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$, es decir, si una de ellas es la localización de la otra; o bien, dados dos grafos cuando podemos decir que uno de ellos es la simplificación del otro tras eliminar algunos de sus vértices, el siguiente resultado nos da una respuesta a este problema:

Teorema 199 *Sean $\Gamma^1 = (V^1, F^1)$ y $\Gamma^2 = (V^2, F^2)$ dos grafos y sean KQ^1 y KQ^2 las coálgebras de caminos respectivas asociadas. Entonces equivalen:*

1. *$KQ^2 \cong f \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup f$ para algún idempotente $f \in (KQ)^*$.*
2. *Existe $\phi : KQ^1 \to KQ^2$ aplicación lineal sobreyectiva veirficando:*
   - *(a) Si $q_1, q_2 \in Q^1$, $q_1 \neq q_2$ y $\phi(q_1) = \phi(q_2)$ entonces $\phi(q_1) = 0 = \phi(q_2)$.*
   - *(b) Si $q \in Q^1$ entonces $\phi(q) \in Q^2$.*
   - *(c) $(\phi \otimes \phi)(\Delta_1(q)) = \Delta_2(\phi(q))$.*

Demostración. (1)⇒(2): Si KQ^2 es la localización de KQ^1 entonces existe $g : KQ^1 \to K$ un idempotente definido por $g(x) = 1$ para cada $x \in V \subseteq V^1$ y $g(q) = 0$ para cada $q \in Q^1 - V$ y de forma que KQ^2 es equivalente Morita a $g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g$. Definimos $\phi : KQ^1 \longrightarrow (g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g) \cong KQ^2$ por $\phi(q) = g \rightharpoonup q \leftharpoonup g$, es claro q ϕ es un morfismo de coálgebras sobreyectivo y verifica las condiciones (a) y (b).

(2)⇒(1): Definimos el idempotente de $(KQ^1)^*$, $g : KQ^1 \to K$ por

$$g(q) = \begin{cases} 1 \text{ para cada } q \in V = \{x \in V^1 \mid \phi(x) \in V^2\}, \\ 0 \text{ para cada } q \in Q^1 - V. \end{cases}$$

Y definimos la aplicación lineal $\phi' : (g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g) \longrightarrow KQ^2$ por $\phi'(q) = \phi(q)$ para cada $q \in Q^1 \cap (g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g)$, esto es, $q = g \rightharpoonup q \leftharpoonup g = g(s(q))qg(e(q))$, demostramos que ϕ' es un isomorfismo de coálgebras.

ϕ' es morfismo de coálgebras, en efecto, sea $q = \alpha_1 ... \alpha_n \in Q^1$ tal que $g(s(q)) = g(e(q)) = 1$ o lo que es lo mismo $g \rightharpoonup q \leftharpoonup g = q \in g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g$, entonces si

$$\Delta_{KQ^1}(q) = s(q) \otimes q + q \otimes e(q) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_1 ... \alpha_k \otimes \alpha_{k+1} ... \alpha_n;$$

$$\begin{aligned}(\phi' \otimes \phi')\Delta_{g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g}(q) &= \phi(g \rightharpoonup s(q) \leftharpoonup g) \otimes \phi(g \rightharpoonup q \leftharpoonup g)+\\ &\quad +\phi(g \rightharpoonup q \leftharpoonup g) \otimes \phi(g \rightharpoonup e(q) \leftharpoonup g)+\\ &\quad +\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \phi(g \rightharpoonup \alpha_1...\alpha_k \leftharpoonup g) \otimes \phi(g \rightharpoonup \alpha_{k+1}...\alpha_n \leftharpoonup g)\\ &= \phi(s(q)) \otimes \phi(q) + \phi(q) \otimes \phi(e(q))+\\ &\quad +\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \phi(g \rightharpoonup \alpha_1...\alpha_k) \otimes \phi(\alpha_{k+1}...\alpha_n \leftharpoonup g)\end{aligned}$$

Por otra parte como ϕ es una aplicación lineal verificando (c),

$$\Delta_{KQ^2}(\phi'(q)) = \Delta_{KQ^2}(\phi(q)) = (\phi \otimes \phi)\Delta_{KQ^1}(q) =$$

$$= \phi(s(q)) \otimes \phi(q) + \phi(q) \otimes \phi(e(q)) + \sum_{i=1}^{n-1} \phi(\alpha_1...\alpha_k) \otimes \phi(\alpha_{k+1}...\alpha_n);$$

y $\phi(g \rightharpoonup \alpha_1...\alpha_k) = \phi(\alpha_1...\alpha_k)$, $\phi(\alpha_k...\alpha_n \leftharpoonup g) = \phi(\alpha_k...\alpha_n)$ para cada k por como hemos definido g.

$\epsilon_1(g \rightharpoonup q \leftharpoonup g) = g(q) = 1$ si y sólo si $\epsilon_2(\phi'(q)) = \epsilon_2(\phi(q)) = 1$.

ϕ' es sobreyectiva, en efecto, como ϕ es sobreyectiva para cada elemento de $0 \neq b \in KQ^2$ existe $a \in KQ^1$ tal que $\phi(a) = b$, entonces $\phi'(g \rightharpoonup a \leftharpoonup g) = \phi(g \rightharpoonup a \leftharpoonup g)$ y como $0 \neq a$ entonces $g \rightharpoonup a \leftharpoonup g = a$ y estaría demostrado.

ϕ' es inyectiva, en efecto, sean $q_1 \neq q_2$, tal que $q_1, q_2 \in g \rightharpoonup KQ^1 \leftharpoonup g$, $\phi'(q_1) = \phi'(q_2)$, luego $\phi(q_1) = \phi(q_2)$ y usando (a) entonces $q_1 = q_2$. Supongamos ahora dos elementos cualesquiera $a, b \in KQ^1$, $a \neq b$ y de forma que $\phi'(a) = \phi'(b)$. Por (b) podemos asegurar que $\phi(q) \in Q^2$ para cualquier $q \in Q^1$, por tanto $\phi'(a) = \phi'(b)$ implica $a = b$.

$\square$

Entonces si $M \in \mathcal{M}^{KQ}$, sea $\Lambda \subseteq Simp(KQ)$ un subconjunto de simples y sea $f \in (KQ)^*$ el idempotente que es cero en cualquier elemento de KQ menos en los vértices asociados a los simples de Λ, la localización de M será $f \rightharpoonup M$ que es un $(f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f)$-comódulo a derecha, o según hemos visto un $K\overline{Q}$-comódulo a derecha.

Localización respecto de coprimas.

Recordemos que las subcoálgebras simples son en particular coprimas, si localizamos respecto de una coprima, en realidad, estamos localizando también respecto de simples, es decir, respecto de los simples contenidos en la subcoálgebra coprima, o lo que es lo mismo, respecto del subconjunto de todos los vértices contenidos en la coprima. Lo importante es que la coprima se comporta como un simple, es decir, como si fuese un único vértice por ser fuertemente conexa. Luego sería igual que antes, pero en vez de quitar un vértice o varios vértices, quitaríamos varias coprimas completas, o lo que es lo mismo todos los vértices que están dentro de las coprimas, sin olvidar que cada coprima se comporta como un único vértice al localizar y al quitar los vértices desaparecen todos los caminos de la coprima.

4.10 Subcoálgebras coprimas de una coálgebra de caminos.

A partir de 188 se deduce inmediatamente el siguiente resultado:

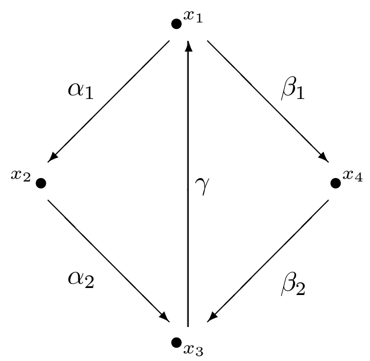
Proposición 200 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, sea $P \subseteq C$ una subcoálgebra coprima entonces:*

1. *Para cualesquiera $x, y \in V(P)$ existe un ciclo orientado $c \in Q$ que pasa por x e y.*
2. *Existe D una subcoálgebra de KQ, que es coálgebra de caminos coprima (es decir, fuertemente conexa) y contiene a P.*

Demostración. Inmediata. □

No todas las subcoálgebras coprimas de una coálgebra KQ son coálgebras de caminos, y como demuestran los siguientes ejemplos, existen subcoálgebras coprimas que están generadas por combinaciones lineales de caminos y no existe una base de ella compuesta exclusivamente por caminos.

Ejemplo 201 *Sea Γ el grafo,*



Sea Q el conjunto de todos los caminos de Γ. Llamamos $\alpha = \alpha_1\alpha_2\gamma$ y $\beta = \beta_1\beta_2\gamma$. Definimos recursivamente la siguiente función,

$$\begin{array}{rcl}\sigma_1(\alpha,\beta) & = & \alpha+\beta \\ \sigma_2(\alpha,\beta) & = & \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 \\ \sigma_n(\alpha,\beta) & = & \alpha\sigma_{n-1}(\alpha,\beta)+\beta\sigma_{n-1}(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^n\end{array}$$

podemos comprobar que

$$\begin{array}{rl}\Delta(\sigma_n(\alpha,\beta)) = & x_1\otimes\sigma_n(\alpha,\beta)+ \\ & +\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i(\alpha,\beta)\otimes\sigma_{n-i}(\alpha,\beta)+\sigma_n(\alpha,\beta)\otimes x_1+ \\ & +\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i(\alpha,\beta)\alpha_1\otimes\alpha_2\gamma\sigma_{n-i-1}(\alpha,\beta)+\sigma_i(\alpha,\beta)\beta_1\otimes\beta_2\gamma\sigma_{n-i-1}(\alpha,\beta)+ \\ & +\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i(\alpha,\beta)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)\otimes\gamma\sigma_{n-i-1}(\alpha,\beta)\end{array}$$

y consideramos P la subcoálgebra de KQ generada por

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2, \alpha_2\gamma, \beta_2\gamma\} \cup$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \begin{array}{l}\{\sigma_n(\alpha,\beta), \sigma_n(\alpha,\beta)\alpha_1, \sigma_n(\alpha,\beta)\beta_1, \\ \sigma_n(\alpha,\beta)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2), \alpha_2\gamma\sigma_n(\alpha,\beta), \alpha_2\gamma\sigma_n(\alpha,\beta), \gamma\sigma_n(\alpha,\beta)\}\end{array}$$

entonces es evidente que $\alpha, \beta \notin P$ y P es coprima, en efecto, supongamos $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras tales que $P \subseteq A \wedge B$, supongamos que $P \not\subseteq B$, bastará con demostrar que $\sigma_n(\alpha,\beta) \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ (el resto se haría lo mismo), es claro que existe $k \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que $\sigma_k(\alpha,\beta) \notin B$, entonces

$$\Delta(\sigma_{n+k}(\alpha,\beta)) = x_1 \otimes \sigma_{n+k}(\alpha,\beta) + \sum_{i=1}^{n+k-1} \sigma_i(\alpha,\beta) \otimes \sigma_{n+k-i}(\alpha,\beta) + \sigma_{n+k}(\alpha,\beta) \otimes x_1 + R$$

donde todos los vectores de la primera coordenada son linealmente independientes e igual ocurre en la segunda, entonces

$$\Delta(\sigma_{n+k}(\alpha,\beta)) = \sigma_n(\alpha,\beta) \otimes \sigma_k(\alpha,\beta) + R \in A \wedge B$$

donde R es el resto de sumandos, entonces $\sigma_n(\alpha,\beta) \in A$ y P es coprima.

□

Ejemplo 202 *Otra subcoálgebra coprima análoga se obtendría para dos lazos $\alpha, \beta \in Q_1$ de un mismo vértice $x \in Q_0$ si consideramos el espacio vectorial generado por*

$$\{x\} \cup \{(\alpha+\beta)^n \mid n \in \mathbb{N}-\{0\}\}$$

□

Incluso aunque consideremos que P es coprima con una base formada sólo por caminos, ésta puede no ser una coálgebra de caminos como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 203 *No todas las coálgebras coprimas generadas por caminos son coálgebras de caminos. Supongamos que tenemos el siguiente grafo $\Gamma = (V, F)$ con $V = \{x_1, x_2\}$ y $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ con*

$$s(\alpha) = e(\beta) = x_1,$$
$$s(\gamma) = e(\gamma) = e(\alpha) = s(\beta) = x_2.$$

Podemos considerar la coálgebra coprima generada por los caminos,

$$V \cup F \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{p \in Q \mid p \subseteq (\alpha\gamma\beta)^n\}$$

obsérvese que $\alpha\beta \in Q$ y $\alpha\beta \notin Q$.

□

Corolario 204 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. $P \subseteq KQ$ es una subcoálgebra con una base formada por caminos, entonces equivalen:*

1. *P es coprima.*
2. *Para cada $p_1, p_2 \in Q^P \subseteq P$ existe $q \in Q^P \subseteq P$ tal que $p_1, p_2 \preceq q$. (Si consideramos $p_1 = p_2$ entonces existe $q \in Q^P$ tal que pasa por p_1 al menos dos veces).*

DEMOSTRACIÓN. (1)$\Rightarrow$(2) Ya está hecha.

(2)$\Rightarrow$(1): Si P tiene una base formada por caminos entonces $P = KQ^P$, supongamos que $P \subseteq A \wedge B$ para $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras, supongamos que existen $a \notin A$, $b \notin B$, claramente podemos suponer que a y b son caminos, entonces por (2) existe $c \in P$ un ciclo tal que $a, b \prec c$ y por tanto existe un camino $q = adb \in P$, pero $adb \notin A \wedge B$, que es una contradicción. □

Nos falta por estudiar las subcoálgebras coprimas que no son subcoálgebras de caminos. Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, recordemos como definíamos A_q en 4.5, entonces:

Proposición 205 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Sea $P \subseteq A \wedge B$ una subcoálgebra de KQ, definimos*

$$\Lambda_{A,B} = \{q \in Q^P \mid q \notin Q^A \cup Q^B\}$$

si $\Lambda \neq \emptyset$ entonces,

1. *$(A + B) \cap P \subseteq \bigcap_{q \in \Lambda} P_q$.*
2. *Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i \in \bigcap_{q \in \Lambda} P_q$ entonces $q_i \in Q^{A+B}$ para cada i.*
3. *Si $q_1, q_2 \in \Lambda$ distintos, entonces $P_{q_1} + P_{q_2}$ es una subcoálgebra.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in (A+B) \cap P$, sea $q \in \Lambda_{A,B}$ entonces $x \in P_q$ porque en caso contrario, si $x \notin P_q$ entonces $p_i = q$ para algún i con $\lambda_i \neq 0$, y $q \notin Q^A \cup Q^B$, por tanto $x \notin A + B$.
2. Evidente.
3. Si $P_{q_1} + P_{q_2}$ no es subcoálgebra entonces existe $p \in Q^P$ tal que $q_1, q_2 \subseteq p$ y $p \in Q^P \subseteq Q^{A \wedge B}$ pero $p \in \Lambda_{A,B}$ y por tanto $p \notin A \wedge B$ porque contiene a dos caminos distintos de $\Lambda_{A,B}$.

□

Proposición 206 *Si $P \subseteq KQ$ es una coálgebra coprima, entonces KQ^P tiene una base formada por caminos pero no es necesariamente una coálgebra de caminos.*

DEMOSTRACIÓN. Véase el ejemplo 203. □

Proposición 207 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Sea P una subcoálgebra coprima de KQ, entonces,*

1. *P_q no es subcoálgebra para cada $q \in Q^P$.*
2. *KQ^P es coprima.*
3. *KQ_P es coprima.*
4. *$P \subseteq KQ^P \subseteq KQ_P$ y no necesariamente han de ser iguales.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Evidente, si existe $q \in \Lambda$ tal que P_q es coálgebra entonces no existe nigún caminos $p \in Q^P$ tal que $q \subseteq p$.
2. Evidente, KQ^P es fuertemente conexa o en el caso en que no sea de caminos tiene una base formada sólo por caminos que por ser P coprima, verifica la condición (2) del corolario 204.
3. KQ_P es una coálgebra de caminos fuertemente conexa.
4. Evidente.

□

Lema 208 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Sea $P \subseteq KQ$ una subcoálgebra tal que para cualesquiera $q_1, q_2 \in Q^P$ no necesariamente distintos, existe $p \in Q^P$ tal que $q_1, q_2 \preceq p$ (si $q_1 = q_2$ entonces p pasa por q_1 al menos dos veces), sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras tales que $P \subseteq A \wedge B$, entonces:*

1. *$\Lambda_{A,B} = \emptyset$, esto es, $Q^P \subseteq Q^A \cup Q^B$.*
2. *$Q^P \subseteq Q^A$ o $Q^P \subseteq Q^B$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras y sean $q_1, q_2 \in \Lambda_{A,B} = \{q \in Q^P \mid q \notin Q^A \cup Q^B\}$ caminos distintos, entonces existe un camino p tal que $q_1, q_2 \preceq p \in Q^P$, es claro que $p \in \Lambda$, y $p \in Q^P$, pero $p \notin Q^{A \wedge B}$ y como $P \subseteq A \wedge B$, $Q^P \subseteq Q^{A \wedge B}$, lo cual es absurdo.

   Si Λ tuviera un único elemento eligiríamos un caminos p que contuviese al camino dos veces.

2. Si $\Lambda = \emptyset$, entonces $Q^P \subseteq Q^A \cup Q^B = Q^{A+B}$ entonces $Q^P \subseteq Q^A$ o $Q^P \subseteq Q^B$, en efecto, si $Q^P \not\subseteq Q^A$ entonces existe $q \in Q^P$ tal que $q \notin Q^A$, y es claro que $q \in Q^B$, ahora demostremos que $Q^P \subseteq Q^B$, sea $q' \in Q^P$, existe un camino p tal que $q, q' \preceq p \in Q^P$ y p no puede estar en Q^A luego $p \in Q^B$ y por tanto $q' \in Q^B$.

□

Podemos caracterizar cualquier subcoálgebra coprima cerrada para la concatenación.

Teorema 209 *Sea KQ una coálgebra de caminos, sea $P \subseteq KQ$ una coálgebra cerrada para concatenaciones, entonces:*

1. *P es coprima.*
2. *Para cada $p_1, p_2 \in Q^P \subseteq P$ existe $q \in Q^P \subseteq P$ tal que $p_1, p_2 \preceq q$. (Si consideramos $p_1 = p_2$ entonces existe $q \in Q^P$ tal que pasa por p_1 al menos dos veces).*

DEMOSTRACIÓN. (1)⇒(2) Ya está hecha.

(2)⇒(1): Sean $A, B \subseteq KQ$ dos subcoálgebras tales que $P \subseteq A \wedge B$ y supongamos que $P \not\subseteq A$ entonces existe $p \in Q^P$ tal que $p \notin Q^A$ y existe $p + \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in P - A$ con $\{p, p_1, ..., p_n\}$ linealmente independientes y todos ellos con mismo inicio y fin. Análogamente si $P \not\subseteq B$ existirá $q + \sum_{i=1}^m \mu_i q_i \in P - B$. Por (2) podemos encontrar un elemento $h = \sum_{i=1}^k \eta_i h_i$ tal que $e(h) = s(q)$ y $s(h) = e(p)$, entonces la concatenación de los tres elementos pertenece a P, pero por como lo hemos construido no pertenece a $A \otimes C + C \otimes B$, y llegamos a una contradicción. □

4.11 Conilpotentes y coprimas.

Proposición 210 *Sea KQ una coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Equivalen,*

1. *No existe una subcoálgebra propia $A \subset KQ$ tal que $\wedge^n A = KQ$ para algún n.*
2. *$KQ = \sum_{i \in I} P_i$ con P_i una subcoálgebra coprima de KQ que además es coálgebra de caminos para cada $i \in I$.*

DEMOSTRACIÓN. (2) ⇒ (1) Si $KQ = \sum_{i \in I} P_i$ y $KQ = \wedge^n A$ entonces $P_i \subseteq \wedge^n A$ para cada $i \in I$, entonces $P_i \subseteq A$ para cada $i \in I$ y $KQ \subseteq A$, por tanto $KQ = A$.

(1) ⇒ (2) Sea $q \in Q$ un camino cualquiera, entonces existe $c \in Q$ un ciclo orientado tal que $q \preceq c$, en efecto, supongamos que no existe, entonces si $q = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ existe i tal que α_i no

está en ningún ciclo (en caso contrario podríamos meter q en un ciclo, véase la demostración 189). Definimos

$$A = K(Q - \{q \in Q \mid \alpha_i \preceq q\})$$

Obsérvese que si $\alpha_i \preceq q$ entonces $q = q_1\alpha_i q_2$ la concatenación de $q_1, q_2 \in Q$ y α_i, con $\alpha_i \not\preceq q_1$ y $\alpha_i \not\preceq q_2$ porque α_i no está contenido en nigún ciclo. Entonces $A \subseteq KQ$ y $A \neq KQ$ pero $\wedge^2 A = KQ$ porque $\alpha_i \in \wedge^2 A$, ésto es, si $q = q_1\alpha_i q_2$ con $q_1, q_2 \in A$ entonces $q \in \wedge^2 A$.

Puesto que para cada camino $q \in Q$ existe un ciclo orientado $c \in Q$ tal que $q \preceq c$ consideremos la coálgebra de caminos

$$q \in P_{(q)} = K(\bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \{p \in Q \mid p \preceq c^n\})$$

que es subcoálgebra de KQ y es coprima porque es fuertemente conexa o tiene una base de caminos de manera que dos vértices cualesquiera están conectados orientadamente (en ambos sentidos), y claramente

$$KQ = \sum_{q \in Q} P_{(q)}$$

□

Proposición 211 *Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ. Llamamos $Conil(KQ)$ al conjunto de todas las subcoálgebras conilpotentes propias y llamamos $Spec(KQ)$ al conjunto de todas las subcoálgebras coprimas de KQ. Entonces:*

$$\bigcap_{A \in Conil(KQ)} A = \sum_{P \in Spec(KQ)} P$$

DEMOSTRACIÓN. $(\supseteq)$ Evidente, si $\wedge^n A = KQ$, $P \subseteq \wedge^n A$ entonces $P \subseteq A$, es cierto para cualquier coálgebra, véase la observación 105.

$(\subseteq)$ Como cualquier subcoálgebra coprima P está contenida en otra subcoálgebra coprima $P \subseteq D$ pero con D subcoálgebra de caminos, por ejemplo $D = KQ_P$, entonces podemos considerar que todas las subcoálgebras coprimas son de caminos para la demostración. Sea $q \notin P$ para cada P coprima, entonces q no está contenido en nigún ciclo, en caso contrario existiría una coprima con $q \in P_{(q)}$. Sea $\alpha \in Q_1$ con $\alpha \preceq q$ y no contenida en ningún ciclo, y $\Gamma' = (Q_0, Q_1 - \{\alpha\})$ entonces A la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ' es subcoálgebra de KQ, claramente es conilpotente y $q \notin A$. □

4.12 Subcoálgebras coprimas, reducción al estudio de grafos de dos vértices.

Dada una coálgebra de caminos KQ, denotamos por $f_{x_1x_2}$ al elemento idempotente de $PC(G)^*$ definido por $f_{x_1x_2}(x_1) = f_{x_1x_2}(x_2) = 1$ y $f_{x_1x_2}(q) = 0$ para cada $q \in Q - \{x_1, x_2\}$. En general denotaremos por f_X al elemento idempotente de $(KQ)^*$ definido por $f_X(x) = 1$ para cada $x \in X$ y $f_X(q) = 0$ para cada $q \in KQ - X$.

Siguiendo la demostración para coálgebras coprimas de caminos del teorema 189 deducimos el siguiente resultado:

Corolario 212 *Sea $\Gamma = (V, F)$ una grafo orientado y sea $P \subseteq KQ$ una subcoálgebra, entonces son equivalentes:*

1. *P es coprima.*

2. *$f_X \rightharpoonup P \leftharpoonup f_X$ es una subcoálgebra coprima de $f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X$ para cada $X \subseteq V \cap P$ y $card(X) \leq 4$.*

Demostración. (1)⇒(2): Ya está hecha (ver 160).

(2)⇒(1): Sean $A, B \subseteq P$ subcoálgebras tales que $D \subseteq A \wedge P$. Sean $a, b \in P$ tal que $a \notin A$ y $b \notin B$, sea $X = \{s(a), e(a), s(b), e(b)\}$, entonces $f_X \rightharpoonup P \leftharpoonup f_X$ es coprima y

$$f_X \rightharpoonup P \leftharpoonup f_X \subseteq f_X \rightharpoonup (A \wedge B) \leftharpoonup f_X \subseteq (f_X \rightharpoonup A \leftharpoonup f_X) \wedge^{f_X \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_X} (f_X \rightharpoonup B \leftharpoonup f_X)$$

como $a = f_X \rightharpoonup a \leftharpoonup f_X$, $b = f_X \rightharpoonup b \leftharpoonup f_X$ y $f_X \rightharpoonup A \leftharpoonup f_x \subseteq A$, $f_X \rightharpoonup B \leftharpoonup f_X \subseteq B$ como espacios vectoriales, por ser $f_X \rightharpoonup P \leftharpoonup f_X$ coprima llegamos a una contradicción. □

El resultado anterior reduce el estudio de coálgebras coprimas a estudiar subcoálgebras coprimas de una coálgebra de caminos asociada a un grafo de 4 vértices, en realidad podemos afinar un poco más y reducirlo al estudio de grafos con sólo dos vértices, como prueba el siguiente resultado.

Teorema 213 *Sea $\Gamma = (V, E)$ una grafo orientado y sea $D \subseteq KQ$ una subcoálgebra, entonces son equivalentes:*

1. *P es coprima.*

2. *$f_{x_1x_2} \rightharpoonup P \leftharpoonup f_{x_1x_2}$ es una subcoálgebra coprima de $f_{x_1x_2} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{x_1x_2}$ para cada $\{x_1, x_2\} \subseteq V \cap P$.*

Demostración. (1)⇒(2): Ya está hecha.

(2)⇒(1): Sean $A, B \subseteq P$ dos subcoálgebras de P tales que $P \subseteq A \wedge B$, supongamos que P no es coprima, en tal caso existen $a, b \in P$ elementos tales que $a \notin A$ y $b \notin B$. Podemos considerar que a y b son combinaciones lineales de caminos con tramos iniciales y finales comunes. Llamemos $x_1 = s(a)$ y $x_2 = e(a)$, entonces

$$a = f_{x_1x_2} \rightharpoonup a \leftharpoonup f_{x_1x_2} \in f_{x_1x_2} \rightharpoonup P \leftharpoonup f_{x_1x_2} \subseteq f_{x_1x_2} \rightharpoonup (A \wedge^{KQ} B) \leftharpoonup f_{x_1x_2} \subseteq$$
$$\subseteq (f_{x_1x_2} \rightharpoonup A \leftharpoonup f_{x_1x_2}) \wedge^{f_{x_1x_2} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{x_1x_2}} (f_{x_1x_2} \rightharpoonup B \leftharpoonup f_{x_1x_2})$$

y por hipótesis entonces

$$a \in f_{x_1x_2} \rightharpoonup B \leftharpoonup f_{x_1x_2} \subseteq B$$

y por tanto $a \in B$. Análogamente $b \in A$, en realidad acabamos de demostrar que $P \subseteq A \cup B$, pero entonces $a + b \in P \subseteq A \cup B$, luego si $a \notin A$ entonces $a \in B$ y por tanto $b \in B$. $\square$

El siguiente ejemplo demuestra que aunque KQ^P sea coálgebra de caminos coprima para cierta coálgebra P, P no tiene serlo. Incluso aunque $KQ_P = KQ^P$ sea coprima, la coálgebra P no tiene que serlo.

Ejemplo 214 *Dado el grafo $\Gamma = (V, F)$ con un único vértice $V = \{x\}$ y con 4 lazos $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, definimos A como la subcoálgebra de KQ generada por $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4$ y todas las posibles concatenaciones de estos, y definimos B como la subcoálgebra generada por $\alpha_2 + \alpha_3$ y todas sus potencias, claramente A y B son coprimas mientras que $D = A \wedge B$ no lo es. Por otra parte observemos que $KQ^D = KQ^A = KQ$ y por tanto coprimas.*

4.13 Coálgebras punteadas.

Coálgebra cotensor.

Sea $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ una coálgebra y sea M un C-bicomódulo con aplicaciones estructura ω_C y $_C\omega$. Definimos la **coálgebra cotensor** como

$$T_C(M) = \bigoplus_{n \leq 0} M^{\square^n}$$

donde $T_C(M)_0 = M^{\square^0} = C$, $T_C(M)_1 = M^{\square^1} = M$, $T_C(M)_2 = M^{\square^2} = M \square_C M$, y así sucesivamente para cada $n \in \mathbb{N}$.

La comultiplicación y la counidad vienen dadas por:

1. Si $m \in M^{\square^n}$ con $n > 0$, $m = x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n$,

$$\Delta(m) = _C\omega(x_1) \otimes x_2 .... \otimes x_n + x_1 \otimes x_2 .... \otimes x_{n-1} \otimes \omega_C(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 \otimes ... \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes ... \otimes x_n)$$

donde $x_1 \otimes ... \otimes x_i \in M^{\square^i}$ y $x_{i+1} \otimes ... \otimes x_n \in M^{\square^{n-i}}$.

$$\epsilon(m) = 0.$$

2. Si $m \in M^{\square^0}$ entonces $\Delta(m) = \Delta_C(m)$ y $\epsilon(m) = \epsilon_c(m)$.

Coálgebras punteadas.

Sea C una coálgebra punteada, consideramos su filtración corradical (véase [10, 5.4]):

1. $C_0 = KG$ donde G es el conjunto de los elementos group-like.
2. Para $g, h \in G$ se define el conjunto de los elementos g, h-primitivos

$$P_{g,h}(C) = \{c \in C \mid \Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c\}$$

entonces $K(g-h) \subseteq P_{g,h}(C) \cap P_{h,g}(C) \cap C_0$,

$$C_1 = KG \oplus (\bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C)),$$

donde $P'_{g,h}(C)$ es el subespacio vectorial de $P_{g,h}(c)$ tal que $P_{g,h}(C) = K(g-h) \oplus P'_{g,h}(C)$.

3. $C_0 \wedge C_0 = C_1$, $C_{n-1} \wedge C_0 = C_n$.

Proposición 215 *C es una subcoálgebra de la coálgebra cotensor $T_{C_0}(C_1/C_0) \cong KQ$, donde KQ es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (C_0, C_1/C_0)$.*

$\square$

Como subcoálgebra de una de caminos encontramos algunas propiedades, no es una subcoálgebra cualquiera.

Proposición 216 *Sea C una coálgebra punteada. Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ tal que C es su subcoálgebra. Entonces:*

1. $V(C) = C_0 = Q_0 \subseteq C$.
2. $F(C) = C_1/C_0 = Q_1 \subseteq C$.

$\square$

Puesto que C es una subcoálgebra de una de caminos podemos trasladar algunas propiedades de las coálgebras de caminos a C.

4.14 Localización en coálgebras punteadas.

Para una coálgebra cualquiera C sabemos que existe una biyección entre clases de equivalencia de comódulos inyectivos, entre subconjuntos de subcoálgebras simples de C, clases de semejanza de elementos idempotentes de C^*, subcoálgebras coidempotentes y subcategorías localizantes.

Supongamos que C es una coálgebra punteada, en tal caso C puede ser vista como una subcoálgebra de la coálgebra cotensor $T_{C_0}(C_1/C_0)$ donde $C_0 = KG$ y $C_1 = KG \oplus (\bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C))$, con G el conjunto de los elementos group-like y si $P'_{g,h}(C)$ es el subespacio vectorial del espacio vectorial $P_{g,h}(C)$ de todos los elementos g,h-primitivos de C, con $P_{g,h}(C) = KG \otimes P'_{g,h}(C)$. Llamemos $\Phi : C \to T_{C_0}(C_1/C_0)$ al morfismo de coálgebras inyectivo que existe entre ambos. Por otro lado la coálgebra cotensor $T_{C_0}(C_1/C_0)$ es isomorfa a la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (C_0, C_1/C_0)$, entonces C puede ser vista como subcoálgebra de la coálgebra de caminos KQ, identificaremos Φ con la composición de Φ y dicho isomorfismo. Las subcoálgebras de una coálgebra de caminos, o tienen una base como espacios vectoriales compuestas sólo por caminos, o bien existen elementos de la forma $\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i$ donde los caminos $q_i \in Q$ tienen el mismo vértice inicial y mismo vértice final, por tanto un elemento cualquiera de C es de la forma $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \in C$ con cada $\Phi(c_i) \in C_n = C_1^{\Box_{C_0}^n}$ pero c_i no es necesariamente un elemento de C, al ser una subcoálgebra de una de caminos si $c_i \notin C$ entonces $\Phi(c_i)$ y $\Phi(c_j)$ con $j \neq i$, deben de tener mismo vértice inicial y mismo vértice final como caminos del grafo Γ.

Observemos que C vista como subcoálgebra de KQ contiene a todos los vértices y flechas del grafo Γ, de modo que $Simp(C) \cong Q_0 = G$. Por tanto los subconjuntos de simples de C podemos verlos como subconjuntos de vértices del grafo Γ.

Subcoálgebras coidempotentes.

Sea KQ una coálgebra de caminos asociada al grafo Γ, es clara la biyección entre subcoálgebras coidempotentes y subconjuntos de vértices y por tanto de subcoálgebras simples. Para un subconjunto de vértices $V \subseteq Q_0$, la subcoálgebra de KQ, coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma^V = (V, \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V\})$ es una subcoálgebra coidempotente que denotaremos KQ^V.

En C una coálgebra punteada, los simples son los mismos salvo el morfismo de coálgebras inyectivo Φ, $Simp(C) \cong Simp(KQ) = Q_0$. Un subconjunto de simples de C es en realidad un subconjunto de vértices $V \subseteq G = Q_0$ y la coálgebra coidempotente asociada, esto es, aquella que tiene todos sus factores de composición en V debería estar relacionada con KQ^V, en efecto, KQ^V es la coálgebra de caminos asociada al grafo Γ^V, entonces podemos comprobar que si

$$KQ^V \cap C = C^V$$

C^V es coidempotente en C, en efecto:

$$C^V \wedge^C C^V = (C^V \wedge^{KQ} C^V) \cap C \subseteq (KQ^V \wedge^{KQ} KQ^V) \cap C = C^V$$

y es obvio que $C^V \subseteq C^V \wedge^C C^V$, con lo que C^V es coidempotente en C y sus factores de composición están en V.

Elementos idempotentes de C^*.

Sea $f \in C^*$ un elemento idempotente $f^2 = f$, si establecemos la relación de equivalencia entre elementos idempotentes $f, g \in C^*$, fRg si y sólo si $f \rightharpoonup C$ y $g \rightharpoonup C$ tienen los mismos factores de composición (esto es, son semejantes) entonces el conjunto cociente de todos los idempotentes bajo esta relación de equivalencia, debe ser biyectivo por lo visto en el capítulo 3 con el conjunto de todas las coálgebras coidempotentes y por tanto con partes del conjunto de todos los elementos group-like (o vértices), en efecto, dos elementos idempotentes $f, g \in C^*$ son semejantes si y sólo si $f\mid_G = g\mid_G$, es decir, coinciden en el conjunto de elementos group-like de C, así pues, si llamamos $\mathcal{I}_C$ al conjunto de todos los elementos idempotentes, si $[f] \in \mathcal{I}_C/R$ es una clase, existe un idempotente $g \in [f]$ tal que $g(x) = 1$ para cada $x \in V \subseteq G$ para algún subconjunto de elementos group-like (o vértices por el morfismo Φ) y $g(c) = 0$ para cualquier otro elemento $c \in C$.

Observemos que si $f \in KQ^*$ entonces $f\mid_{\Phi(C)} \circ\Phi \in C^*$ y por tanto

$$C^* \cong KQ^*/A^\perp$$

y $f\mid_{\Phi(C)} \circ\Phi = g\mid_{\Phi(C)} \circ\Phi$ si y sólo si $f(\Phi(A)) = g(\Phi(A)) = 0$. Asi que al establecer la relación de equivalencia ser semejantes, da igual en $C \cong \Phi(C)$ que en KQ ya que obtenemos el mismo número de clases de equivalencia por tener el mismo número de simples (vértices) y para cada clase de equivalencia el representante que elegimos es el idempotente que es cero en todos los caminos de longitud mayor que cero, que también es idempotente en C^*, en efecto, su restricción a $C \cong \Phi(C)$ es idempotente y en consecuencia será también el representante que elegimos de cada clase de equivalencia en el cociente $\mathcal{I}_C/R$.

Es por tanto evidente la biyección entre $\mathcal{I}_C/R$, subconjuntos de elementos group-like (vértices) y el conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de C.

Proposición 217 *Sea C una coálgebra punteada. Los conjuntos $\mathcal{I}_C/R$, $\mathcal{P}(G)$ y $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de C, son tres álgebras de Boole isomorfas.*

□

$f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ en coálgebras punteadas.

En los apartados anteriores se establece con claridad la biyección entre las clases de idempotentes semejantes, subconjuntos de subcoálgebras simple de C y subcoálgebras coidempotentes:

$$\mathcal{I}_C/R \to \mathcal{P}(Simp(C)), \qquad [f] \longmapsto \{Kx \mid f(x) = 0, x \in G\}$$

$$\mathcal{P}(Simp(C)) \to \mathcal{I}_{\mathcal{C}}/R, \qquad \Lambda \longmapsto [f]_\Lambda$$

donde si $g \in [f]_\Lambda$, $g(x) = 0$ para cada $x \in V \subseteq G$ con $V = \{x \in G \mid Kx \in \Lambda\}$ y $g(x) = 1$ para el resto de x de G.

Sea C^Λ la mayor subcoálgebra de cuyos factores de composición están en Λ, entonces $C^{(f)} = C^\Lambda = C^V = KQ^V \cap C$ donde KQ^V es la subcoálgebra de KQ coidempotente que es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma^V = (V, \{\alpha \in Q \mid s(\alpha), e(\alpha) \in V\})$.

Para f el representante de la clase de idempotentes semejantes que es 1 en los elementos group-like que generan los simples del subconjunto y cero en el resto como ya hemos comentado. Llamemos $K\overline{Q}$ a la coálgebra de caminos $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$, entonces $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ es una subcoálgebra de $K\overline{Q}$. En efecto, si consideramos $\Phi : C \to KQ$ el morfismo inclusión y lo restringimos a $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ entonces

$$\begin{array}{ccc} f \rightharpoonup C \leftharpoonup f & \longrightarrow & f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f \cong K\overline{Q} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{\Phi(c_i)} \end{array}$$

que es morfismo inyectivo de coálgebras para las respectivas estructuras de coálgebra de $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ y $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f$ y donde $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i$ es un elemento cualquiera de $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ con cada $c_i \in C_{n_i}/C_{n_i-1}$. De hecho, obsérvese que si $c = f \rightharpoonup c \leftharpoonup f \in (f \rightharpoonup C \leftharpoonup f)$, entonces $\Phi(c) = \Phi(f \rightharpoonup c \leftharpoonup f) = f \rightharpoonup \Phi(c) \leftharpoonup f$ y por tanto,

$$\Phi(f \rightharpoonup C \leftharpoonup f) = f \rightharpoonup \Phi(C) \leftharpoonup f = (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f) \cap \Phi(C).$$

Se ha demostrado el siguiente resultado:

Teorema 218 *Sea C una coálgebra punteada, sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (C_0, C_1/C_0)$, sea $\Lambda \subseteq Simp(C)$ y $f \in [f]_\Lambda$ el idempotente tal que $f(c) = 0$ para cada $c \notin C_0$, entonces:*

1. *$\Lambda \cong V$ con V un subconjunto de vértices del grafo Γ.*
2. *$C^{(f)} = C^\Lambda = C^V = KQ^V \cap C$ con C^V coidempotente en C, y KQ^V la subcoálgebra coidempotente de KQ asociada a V.*

3. $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ *es una subcoálgebra de* $f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f \cong K\overline{Q}$*,*

$$f \rightharpoonup C \leftharpoonup f \cong (f \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f) \cap \Phi(C).$$

□

Localización.

Sea C una coálgebra punteada, entonces para $[f]$ una clase de idempotentes semejantes de C^*, tomamos como representante, aquel que es 1 en un subconjunto de elementos group-like y cero en el resto de elementos básicos, entonces la localización de $M \in \mathcal{M}^C$ es $f \rightharpoonup M \in \mathcal{M}^{f \rightharpoonup C \leftharpoonup f}$ con $f \rightharpoonup C \leftharpoonup f$ la subcoálgebra de $K\overline{Q}$,

$$K\overline{Q} \cap \Phi(C)$$

5 Otros ejemplos

En éste capítulo mostramos algunos ejemplos.

5.1 Diagramas de orden.

Consideremos un conjunto S con la relación de orden $R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \leq y\}$. Consideremos el espacio vectorial V con base R. Y definimos las aplicaciones lineales:

1. Por una parte $\Delta : V \to V \otimes V$ definida por
$$\Delta(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} (x, z) \otimes (z, y).$$
2. Y por otra
$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} 0 \; si \; x \neq y \\ 1 \; si \; x = y \end{cases}$$

Entonces (V, Δ, ϵ) es una coálgebra.

Obsérvese que si consideramos el grafo $\Gamma = (V, F)$ asociado al diagrama de orden, con
$$V = \{(x, x) \mid x \in S\}$$
y
$$F = \{(x, y) \in R \mid \Delta(x, y) = (x, x) \otimes (x, y) + (x, y) \otimes (x, x)\}$$
entonces $Q = R$ y la coálgebra de caminos KR es la coálgebra que hemos definido en el ejemplo. Es evidente que las únicas subcoálgebras coprimas son las simples (espacios vectoriales 1-dimensionales generados por un vértice) porque en un diagrama de orden no hay ciclos orientados. La localización también se puede calcular de manera inmediata, si $f_X : KR \to K$ es el idempotente tal que $f((x, x)) = 1$ para cada $(x, x) \in X \subseteq V$ y $f(x, y) = 0$ para cada $(x, y) \in R - X$, entonces la localización $f_X \rightharpoonup KR \leftharpoonup f_X$ es el grafo asociado al diagrama de orden del subconjunto $S' = \{x \in S \mid (x, x) \in X\}$ con el orden inducido por R.

Para ilustrar el ejemplo consideremos un conjunto con tres elementos, $S = \{a, b, c\}$ con la relación de orden R definida por:
$$a \leq b \leq c.$$

Entonces
$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$$
y V es el espacio vectorial con base R. Veamos como funcinan Δ y ϵ:

$$\begin{aligned}
&\Delta(a,a) = (a,a)\otimes(a,a),\\
&\Delta(a,b) = (a,a)\otimes(a,b)+(a,b)\otimes(b,b),\\
&\Delta(a,c) = (a,a)\otimes(a,c)+(a,b)\otimes(b,c)+(a,c)\otimes(c,c),\\
&\Delta(b,b) = (b,b)\otimes(b,b),\\
&\Delta(b,c) = (b,b)\otimes(b,c)+(b,c)\otimes(c,c),\\
&\Delta(c,c) = (c,c)\otimes(c,c),\\
&\epsilon(a,a) = \epsilon(b,b) = \epsilon(c,c) = 1,\\
&\epsilon(a,b) = \epsilon(a,c) = \epsilon(b,c) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto
$$Ker(\epsilon) = K\{(a,b),(b,c),(a,c),(a,a)-(b,b),(a,a)-(c,c)\}$$
$$dim(Ker(\epsilon)) = 5$$
y
$$\Delta V = K\{(a,a)\otimes(a,a),(a,a)\otimes(a,b)+(a,b)\otimes(b,b),$$
$$(a,a)\otimes(a,c)+(a,b)\otimes(b,c)+(a,c)\otimes(c,c),(b,b)\otimes(b,b),$$
$$(b,b)\otimes(b,c)+(b,c)\otimes(c,c),(c,c)\otimes(c,c)\}.$$
Efectivamente $Ker(I\otimes\epsilon)\cap\Delta V = 0$ y $Ker(I\otimes\epsilon)\oplus\Delta V = V\otimes V$.

La coasociatividad se expresaría:
$$(I\otimes\Delta)\circ\Delta(x,y) = (\Delta\otimes I)\circ\Delta(x,y) = \sum_{x\le z\le z'\le y}(x,z)\otimes(z,z')\otimes(z',y).$$
La counidad:
$$(I\otimes\epsilon)\Delta(x,y) = \sum_{x\le z\le y}(x,z)\otimes(z,y) = (x,y).$$

Si analizamos las subcoálgebras de (V,Δ,ϵ) tenemos las siguientes:

$$\begin{aligned}
&V_1 = K\{(a,a)\},\\
&V_2 = K\{(b,b)\},\\
&V_3 = K\{(c,c)\},\\
&V_4 = K\{(a,a),(a,b),(b,b)\},\\
&V_5 = K\{(b,b),(b,c),(c,c)\},
\end{aligned}$$

y sumas de éstas.

Podemos calcular el producto Wedge entre subcoálgebras fácilmente, por ejemplo:

$$\begin{array}{l} V_1 \wedge V_2 = V_2 \wedge V_1 = V_4 \supseteq V_1 \oplus V_2, \\ V_2 \wedge V_3 = V_3 \wedge V_2 = V_5 \supseteq V_2 \oplus V_3, \\ V_1 \wedge V_3 = V_3 \wedge V_1 = V_1 \oplus V_3, \\ V_1 \wedge V_4 = V_4 \wedge V_1 = V_2 \wedge V_4 = V_4 \wedge V_2 = V_4, \\ V_2 \wedge V_5 = V_5 \wedge V_2 = V_3 \wedge V_5 = V_5 \wedge V_3 = V_5, \\ V_3 \wedge V_4 = V_4 \wedge V_3 = V_3 \oplus V_4, \\ V_1 \wedge V_5 = V_5 \wedge V_1 = V_1 \oplus V_5, \\ V_1 \oplus V_2 \wedge V_3 = V_5 \oplus V_1, \\ Ker(\epsilon_i) \wedge V_i = V_i \; con \; i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{array}$$

Las subcoálgebras simples son V_1, V_2 y V_3. Y las únicas coprimas a la vista de como se comporta el producto Wedge o por el razonamiento desde grafos del principio, son las simples. Sería una coálgebra punteada. Si intentamos ver cuales son las subcoálgebras conilpotentes y probamos con las V_i obtenemos

$$\begin{array}{l} \bigwedge^n V_1 = V_1 \\ \bigwedge^n V_2 = V_2 \\ \bigwedge^n V_3 = V_3 \\ \bigwedge^n V_4 = V_4 \\ \bigwedge^n V_5 = V_5 \end{array}$$

para cada $n > 1$, con lo que ninguna es conilpotente, si lo intentamos con $V_1+V_2+V_3$ obtenemos:

$$(V_1 + V_2 + V_3) \wedge (V_1 + V_2 + V_3) = V_4 + V_5$$

$$(V_1 + V_2 + V_3) \wedge (V_4 + V_5) = V$$

por tanto, $V_1 + V_2 + V_3$ es conilpotente, de hecho cualquier subcoalgebra de V que contenga a $V_1 + V_2 + V_3$ es conilpotente, y cualquiera que no la contenga no lo es. En éste ejemplo es claro que

$$V_1 + V_2 + V_3 = \bigcap \{conilpotentes\},$$

es decir, la suma de coprimas es igual a la intersección de conilpotentes.

Calculamos C^* y sus elementos idempotentes, C es un K-espacio vectorial de dimensión 6 con K-base

$$\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$$

renombramos los vectores básicos,

$$\begin{array}{lll} e_1 = (a, a), & e_2 = (a, b), & e_3 = (a, c), \\ e_4 = (b, b), & e_5 = (b, c), & e_6 = (c, c) \end{array}$$

y consideramos la base del dual,

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$$

donde $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ (δ de Kronecker). Calculamos los productos de los vectores básicos y obtenemos la siguiente tabla:

$-$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	0	0	0
φ_2	0	0	0	φ_2	φ_3	0
φ_3	0	0	0	0	0	φ_3
φ_4	0	0	0	φ_4	φ_5	0
φ_5	0	0	0	0	0	φ_5
φ_6	0	0	0	0	0	φ_6

Ahora consideramos un vector cualquiera $\phi \in C^*$ que será de la forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i$$

donde a_i son las coordenadas de ϕ en la base dual, y comprobamos cuando es idempotente utilizando la tabla anterior, esto es, $\phi^2 = \phi$, obtenemos seis ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1^2 \\
a_2 &= a_1 a_2 + a_2 a_4 \\
a_3 &= a_1 a_3 + a_2 a_5 + a_3 a_6 \\
a_4 &= a_4^2 \\
a_5 &= a_4 a_5 + a_5 a_6 \\
a_6 &= a_6^2
\end{aligned}$$

A la vista de las ecuaciones observamos que a_1,a_4 y a_6 sólo pueden ser 1 o 0, por lo que estudiamos cada caso por separado y obtenemos para cada uno de ellos elementos idempotentes:

a_1	a_4	a_6	*Idempotente*
1	1	1	$\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_6 = \epsilon$
1	1	0	$\varphi_1 + \lambda\varphi_3 + \varphi_4 + \mu\varphi_5$
1	0	1	$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 + \mu\varphi_5 + \varphi_6$
1	0	0	$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 + \mu\varphi_3$
0	1	1	$\mu\varphi_2 + \lambda\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_6$
0	1	0	$\lambda\varphi_2 + \lambda\mu\varphi_3 + \varphi_4 + \mu\varphi_5$
0	0	1	$\lambda\varphi_3 + \mu\varphi_5 + \varphi_6$
0	0	0	0

donde μ y λ son parámetros. Obsérvese como forman un álgebra de Boole isomorfa a $\mathbb{B}_2^3$.

Ahora calculamos $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ para $e \in C^*$ un idempotente, y vemos que por ejemplo $\varphi_1 C \varphi_1 = V_1$,$(\varphi_4 + \varphi_6) \rightharpoonup C \leftharpoonup (\varphi_4 + \varphi_6) = V_5$, $(\epsilon \rightharpoonup C \leftharpoonup \epsilon) = C$; observamos que de hecho, $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e$ para $e \in C^*$ un idempotente cualquiera es siempre una subcoálgebra de C.

Calculamos ahora el centro de C^*, para ello al igual que antes tomamos un elemento cualquiera $\phi \in C^*$ de la forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i$$

y comprobamos que conmuta con todos los elementos de la base dual:

$$(\sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i)\varphi_i = \varphi_i(\sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i),$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, obtenemos 6 ecuaciones y por la independencia lineal, concluimos que las coordenadas de ϕ son $a_2 = a_3 = a_5 = 0$ y $a_1 = a_4 = a_6 = \lambda$ para λ un parámetro, entonces el centro será el espacio vectorial generado por la counidad $\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_6 = \epsilon$.

De la misma forma que antes analizamos la localización para un conjunto ordenado de dos elementos. Obtendríamos la siguiente coálgebra:

Consideremos C la coálgebra con K-base $\{x, y, z\}$, donde la comultiplicación y la counidad se definen por:

$$\begin{array}{ll} \Delta(x) = x \otimes x, & \epsilon(x) = 1; \\ \Delta(y) = x \otimes y + y \otimes z, & \epsilon(y) = 0; \\ \Delta(z) = z \otimes z, & \epsilon(z) = 1. \end{array}$$

Es evidente que,

$$C^* \cong \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

con K-base:

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\};$$

base dual de $\{x, y, z\}$, donde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x) = 1$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(z) = 0$. Y análogamente para los otros. Algunos elementos idempotentes de C^* son, $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(I - e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nótese que entonces $e \rightharpoonup x = x \leftharpoonup e = x$, $e \rightharpoonup y = xe(xy) + ye(z) = 0$, $y \leftharpoonup e = e(x)y + e(y)z = y$, $e \rightharpoonup z = z \leftharpoonup e = 0$. Por tanto $e \rightharpoonup C = Kx$ y $C \leftharpoonup e = Kx + Ky$; mientras que $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = Kx$ es un subcoálgebra, en efecto, $e \rightharpoonup C \leftharpoonup e = (e \rightharpoonup C) \cap (C \leftharpoonup e)$.

Obsérvese que esta coálgebra es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (V, F)$ con $V = \{x_1, x_2\}$ y $F = \{\alpha\}$ con $s(\alpha) = x_1$ y $e(\alpha) = x_2$; nótese que viendo a C como coálgebra de caminos la localizacion es inmediata.

5.2 Algebras de Lie.

Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces $C = U(L)$ es una coálgebra. La única subcoálgebra simple de C es $S = K \cdot 1$, por tanto cualquier subcoálgebra de C contiene a S y en consecuencia contiene a 1. Sea $x \in L$ y consideremos la subcoálgebra de C, $D_x = K\{1, x, x^2, x^3, ...\}$. Entonces D_x es coprima y $D_x^{\perp}$ es prima. Recordemos que para $A, B \subseteq C$ subcoálgebras:

$$A \wedge B \quad = \quad Ker(C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\pi} C/A \otimes C/B)$$

y que

$$\Delta x^n = \sum_{a=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ a \end{pmatrix} x^a \otimes x^{n-a}.$$

Para demostrarlo utilizaremos los siguientes lemas.

Lema 219 *Sea $C = U(L)$ con L un álgebra de Lie. Sean A, B dos subcoálgebras de C y $x \in L$. Si $x, x^2, ..., x^n \in A$ con $n \in \mathbb{N}$ y $x^{m+1} \in A \wedge B$ con $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$, entonces $x^{n+1} \in A$ o $x, ..., x^{m-n} \in B$.*

DEMOSTRACIÓN. Cosideramos n fijo y lo demostramos por inducción sobre m. Por tanto suponemos siempre que $x, ...x^n \in A$.

1. Demostramos que es cierto para $m = n+1$. Entonces $x^{n+2} \in A \wedge B$, es decir, $\pi \Delta x^{n+2} = 0$, pero
$$\pi \Delta x^{n+2} = \pi \sum_{a=0}^{n+2} \begin{pmatrix} n+2 \\ a \end{pmatrix} x^a \otimes x^{n+2-a}$$
y como $1, x, ..., x^n \in A$,
$$= \pi \sum_{a=0}^{n+2} \begin{pmatrix} n+2 \\ a \end{pmatrix} x^a \otimes x^{n+2-a}$$
y como $1 \in B$,
$$= \pi \begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} x^{n+1} \otimes x = 0$$
entonces $x^{n+1} \in A$ o $x \in B$.

2. Supongamos que es cierto para $m = (k-1) > n+2$, es decir, que si $x, ..., x^n \in A$ y $x^k \in A \wedge B$, entonces $x^{n+1} \in A$ o $x, ..., x^{k-1-n} \in B$. Si $x^{n+1} \in A$ hemos terminado, por tanto supondremos que $x, ..., x^{k-1-n} \in B$.

3. Lo demostramos para $m = k$, entonces $x^{k+1} \in A \wedge B$, es decir, $\pi \Delta x^{k+1} = 0$,
$$\pi \Delta x^{k+1} = \pi \sum_{a=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ a \end{pmatrix} x^a \otimes x^{k+1-a}$$

como $1, x, ..., x^n \in A$,

$$= \pi \sum_{a=n+1}^{k+1} \binom{k+1}{a} x^a \otimes x^{k+1-a}$$

y por hipótesis de inducción $1, x, ..., x^{k-n-1} \in B$

$$= \pi(x^{n+1} \otimes x^{k-n}) = 0,$$

entonces $x^{n+1} \in A$ o $x^{k-n} \in B$.

$\square$

Lema 220 *En las mismas condiciones de antes, si* $1, x, ..., x^{2n} \in A \wedge B$ *con* $n > 0$ *entonces* $x, x^2, ..., x^n \in A$ *o* $x, x^2, ..., x^n \in B$.

Demostración. Demostramos por inducción sobre n.

1. Para $n = 1$, $x^2 \in A \wedge B$, entonces como

$$\Delta x^2 = x^2 \otimes 1 + 2(x \otimes x) + 1 \otimes x^2,$$

$$\pi \Delta x^2 = 2(x \otimes x) = 0,$$

por tanto $x \in A$ o $x \in B$.

2. Supongamos que es cierto para $n = k$ y que $x, ..., x^k \in A$, el otro caso sería igual.

3. Vamos a demostrarlo para $n = k+1$, entonces $x, ..., x^{2(k+1)} \in A \wedge B$ y $x, ..., x^k \in A$ por hipótesis de inducción, entonces aplicando el lema anterior para $m = 2k+1$ tenemos que $x^{k+1} \in A$ o $x, ..., x^k \in B$. Si $x^{k+1} \in A$ hemos terminado, supongamos que estamos en el otro caso, $x, ..., x^k \in B$. Como $x^{2(k+1)} \in A \wedge B$, entonces $\pi \Delta x^{2(k+1)} = 0$, pero

$$\pi \Delta x^{2(k+1)} = \pi \sum_{a=0}^{2(k+1)} \binom{2(k+1)}{a} x^a \otimes x^{2(k+1)-a}$$

y como $1, x, ..., x^n \in A$,

$$= \pi \sum_{a=n+1}^{2(k+1)} \binom{2(k+1)}{a} x^a \otimes x^{2(k+1)-a}$$

y como además $1, x, ..., x^k \in B$,

$$= \pi \binom{2(k+1)}{k+1} x^{k+1} \otimes x^{k+1} = 0$$

luego $x^{k+1} \in A$ o $x^{k+1} \in B$, en cualquier caso $x, ..., x^{k+1} \in A$ o $x, ..., x^{k+1} \in B$.

□

Proposición 221 *Sea $C = U(L)$ con L un álgebra de Lie. Sean A, B subcoálgebras de C, $x \in L$ y $D_x = K\{1, x, x^2, ...\}$. Entonces $D_x^\perp$ es primo y D_x es coprima.*

DEMOSTRACIÓN. Si $D_x \subseteq A \wedge B$, entonces es evidente por el lema anterior que $D_x \subseteq A$ o $D_x \subseteq B$ y por tanto D_x es coprima. Vamos a demostrar que $D_x^\perp$ es primo, consideremos $\alpha \cdot \beta \in D_x^\perp$ entonces existe un r mínimo tal que $\alpha(x^r) \neq 0$ y existe s mínimo tal que $\beta(x^s) \neq 0$. Pero

$$(\alpha \cdot \beta)(x^{r+s}) = (\alpha \otimes \beta) \sum_{a=0}^{r+s} \begin{pmatrix} r+s \\ a \end{pmatrix} x^a \otimes x^{r+s-a} =$$

$$= \begin{pmatrix} r+s \\ r \end{pmatrix} \alpha(x^r)\beta(x^s) \neq 0.$$

Entonces $\alpha \cdot \beta \notin D^\perp$ y $D_x^\perp$. □

Si L es de dimensión finita, podemos describir $C = U(L)$ utilizando subcoálgebras coprimas:

Proposición 222 *Si L es una K-álgebra de Lie de dimensión finita, entonces $C = U(L)$ es suma de n subcoálgebras coprimas,*

$$C = D_{x_1} + ... + D_{x_n},$$

para $\{x_1, ..., x_n\}$ una K-base de L.

□

5.3 Semigrupos.

Sea S un semigrupo con elemento identidad $e \in S$, sea K un cuerpo, entonces KS es una K-álgebra, sería la que resulta del K-módulo generado por S con el producto,

$$(\sum_{x \in S} a_x x)(\sum_{y \in S} b_y y) = \sum_{x \in S} (\sum_{xy=z} a_x b_y) z.$$

$(KS)^*$ es un coálgebra, con comultiplicación y counidad:

$$\Delta f(x \otimes y) = f(xy)$$

$$\epsilon f(x) = f(e)$$

para cualquier $f \in (KS)^*$.

Por otra parte KS también tiene estructura de coálgebra, con comultiplicación y counidad:

$$\Delta(s) = s \otimes s$$

$$\epsilon(s) = e$$

y por tanto $(KS)^*$ tiene estructura de álgebra (el álgebra dual):

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$(fg)(s) = f(s)g(s)$$

$$(af)(s) = a(f(s)).$$

5.4 Coálgebra coprima y no simple.

Sea $S = \{c_0, c_1, ...\}$, sea $C = KS$ el espacio vectorial generado por S sobre K, es claro que S es una K-base de C. Definimos las aplicaciones lineales:

$$\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}$$

y $\epsilon(c_n) = \delta_{0n}$ entonces (C, Δ, ϵ) es una coálgebra coconmutativa.

Nótese que C es la coálgebra de caminos asociada sl grafo $\Gamma = (\{c_0\}, \{c_1\})$ con $e(c_1) = s(c_1) = c_0$ y con la concatenación n veces de c_1, $(c_1)^n = c_n$. Claramente C es una coálgebra coprima que no es simple porque es de dimensión infinita y tiene una única simple Kc_0.

5.5 Coálgebra simple de dimensión mayor que 1.

Sea $S = \{s_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, sea $C = KS$ el espacio vectorial generado por S sobre K, es claro que S es una K-base de C. Definimos las aplicaciones lineales:

$$\Delta(s_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} \otimes s_{kj}$$

y $\epsilon(s_{ij}) = \delta_{ij}$ entonces (C, Δ, ϵ) es una coálgebra no coconmutativa. Obsérvese que $dim_K(C) = n^2$ y que además C es una coálgebra simple.

5.6 Coálgebra group-like.

Para S un conjunto cualquiera y K un cuerpo, consideramos el menor espacio vectorial sobre K que contiene a S, esto es, el generado por S, lo denotaremos por $C = KS$. Es obvio que S es una base de C. Definimos las siguientes aplicaciones lineales sobre los vectores básicos:

1. $\Delta : C \to C \otimes C$ definida por $\Delta s = s \otimes s$ para cada $s \in S$.
2. $\epsilon : C \to K$, definida por $\epsilon(s) = 1$ para cada $s \in S$.

Nótese que es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (V, F)$ con $V = S$ y $F = \emptyset$.

Entonces (C, Δ, ϵ) es una coálgebra coconmutativa, en efecto, la comultiplicación Δ es coasociativa, para $x \in C$, entonces $x = \sum_{s\in S} k_s s$ y

$$((I \otimes \Delta) \circ \Delta)(x) = \sum_{s\in S} k_s(s \otimes s \otimes s) = ((\Delta \otimes I) \circ \Delta)(x),$$

y la counidad ϵ verifica,

$$(I \otimes \epsilon)\Delta(x) = \sum_{s\in S} k_s(s\epsilon(s)) = x = (\epsilon \otimes I)\Delta(x).$$

Además es evidente que es coconmutativa.

Observemos que $\epsilon(x) = \sum_{s\in S} k_s$, por tanto $Ker(\epsilon) = \{c = \sum_{s\in S} k_s s \mid \sum_{s\in S} k_s = 0\}$. Nótese también que cualquier elemento $\sum_i x_i \otimes y_i \in C \otimes C$ se puede escribir de manera única como una combinación lineal de vectores de la forma $s \otimes r$ con $r, s \in S$ y que cada uno de ellos se puede escribir de la forma $s \otimes r = s \otimes s + s \otimes (r - s)$, esto es, que en efecto $Ker(I \otimes \epsilon) \oplus \Delta(C) = C \otimes C$.

Si $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ es finito, entonces estaríamos en el caso finito (véase 1.7), de hecho, bastaría tomar $\{s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_1, ..., s_n - s_1\}$ como base y definir Δ apropiadamente para encontrarnos en un caso particular de 1.7. En este caso obsérvese que,

$$Ker(\epsilon) = K\{s_1 - s_2, s_2 - s_3, ..., s_{n-1} - s_n\}$$

y que $dim(Ker(\epsilon)) = dim(C) - 1$.

Volviendo al caso general, las subcoálgebras de C son los subespacios vectoriales generados por subconjuntos de S, es decir, de la forma KA para $A \in \mathcal{P}(S)$, las subcoálgebras simples son los subespacios generados por un único elemento $s \in S$, $K\{s\}$ (por un vértice). El producto Wedge de dos subcoálgebras KA y KB con $A, B \in \mathcal{P}(S)$ será,

$$KA \wedge KB = K(A \cup B) = KA + KB.$$

Las subcoágebras coprimas son las simples. La única conilpotente es C que es semisimple y es evidente que la suma de simples es la intersección de conilpotentes.

Obsérvese que $C^* \supseteq K\{f_s : C \to K \mid s \in S\}$, con $f_s(x) = k_s$ para cada $x = \sum_{s\in S} k_s s \in C$. El conjunto de todos los elementos idempotentes de C^* es

$$\mathcal{I} = \{e_A = \sum_{s\in A} f_s \mid A \in \mathcal{P}(S)\}$$

Nótese que $f_s f_t = 0$ si $s, t \in S$ y $s \neq t$, por tanto para $A, B \in \mathcal{P}(S)$,

$$e_A \leq e_B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

de hecho $e_A \wedge e_B = e_{A\cap B}$ y $e_A \vee e_B = e_{A\cup B}$ y $(\mathcal{I}, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole cuyo elemento 0 es el 0 de C^*, cuyo elemento 1 es $e_S = \sum_{s\in S} f_s$ y el complemento de un idempotente cualquiera e_A es e_{S-A}.

Todas las subcoálgebras son coidempotentes, $KA \wedge KA = KA$ para cualquier $A \in \mathcal{P}(S)$. Obsérvese que para cualquier $A \in \mathcal{P}(S)$ la subcoálgebra asociada es de la forma $KA = e_A \rightharpoonup C = C^{(e_{S-A})}$, y como sabemos el conjunto de todas las subcoálgebras de C es un álgebra de Boole, definiendo las operaciones $KA \wedge^* KB = K(A\cap B)$ y $KA \vee KB = K(A\cup B)$. Es evidente el isomorfimo de álgebras de Boole con $\mathcal{I}$.

En este ejemplo $X = Simp(C) = \{K\{s\} \mid s \in S\}$, observemos que cualquier abierto es de la forma $U = \{K\{s\} \mid s \in A\}$ para algún $A \subseteq S$ (un subconjunto de vértices), esto es, $U = X(e_{S-A} \rightharpoonup C) = X(K(S - A))$, como C es semisimple entonces $E(K\{s\}) = \{s\}$ para cualquier $s \in S$, entonces $\bigoplus_{s\in U} E(K\{s\}) = C^{(e_{S-A})}$ y $Open(X)$ con la unión y la intersección es también un álgebra de Boole isomorfa a las anteriores como era de esperar.

Para cada $A \in \mathcal{P}(S)$ consideramos el idempotente de C^*, $e_A = \sum_{s\in S} f_s$, entonces consideramos la teoría de torsión asociada a e_A y la llamamos σ_{e_A}, el funtor localización será

$$Q_{\sigma_{e_A}}(M) = e_A \rightharpoonup M \cong M \,\square_C\, (e_A \rightharpoonup C)$$

con

$$Q_{\sigma_{e_A}}(C) = e_A \rightharpoonup C = KA.$$

5.7 Coálgebra punteada y no de caminos.

Sea S un conjunto cualquiera, consideremos $A = \{a_i \mid i \in \Lambda = \{0, 1, ..., n, ...\} \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq S$ un subconjunto de elementos distintos de S (Usaremos Λ en vez de todo $\mathbb{N}$ para considerar simultáneamente también el caso finito). Sea $C = KS$ el K-espacio vectorial generado por S, por tanto, S será una K-base de C. Definimos las siguientes aplicaciones lineales,

$$\Delta : C \to C \otimes C$$

$$\begin{array}{ll}
\Delta(a_0) = a_0 \otimes a_0 & \\
\Delta(a_1) = a_1 \otimes a_1 + a_1 \otimes a_0 + a_0 \otimes a_1 & \\
\Delta(a_k) = (\sum_{i=0}^{k} a_i) \otimes (\sum_{i=0}^{k} a_i) - (\sum_{i=0}^{k-1} a_i) \otimes (\sum_{i=0}^{k-1} a_i) & \forall k \in \mathbb{N},\ k > 0 \\
\Delta(x) = x \otimes (\sum_{i\in I_x} a_i) + (\sum_{i\in I_x} a_i) \otimes x & \forall x \in S - A,\ I_x = \{0, 1, ..., n_x\} \subseteq \mathbb{N}
\end{array}$$

y

$$\begin{aligned} \epsilon : C &\to K \\ \epsilon(a_0) &= 1 \\ \epsilon(x) &= 0 \quad \forall x \in S - \{a_0\} \end{aligned}$$

En primer lugar nótese que

$$\Delta(\sum_{i=0}^{n} a_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \otimes \sum_{i=0}^{n} a_i \ \forall n \in \Lambda.$$

Y podemos demostrar,

1. Δ es coasociativa, en efecto, sea $c \in C$ entonces

$$c = \sum_{s \in S} \alpha_s s$$

y

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = (I \otimes \Delta)(\sum_{s \in S-A} \alpha_s (s \otimes \sum_{i \in I_s} a_i + \sum_{i \in I_s} a_i \otimes s) + \\ + \sum_{0<k\in\Lambda} \alpha_{a_k} (\sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i) + \alpha_{a_0}(a_0 \otimes a_0)) = \\ = \sum_{s \in S-A} \alpha_s (s \otimes (\sum_{i \in I_s} a_i \otimes \sum_{i \in I_s} a_i) + \sum_{i \in I_s} a_i \otimes (s \otimes \sum_{i \in I_s} a_i + \sum_{i \in I_s} a_i \otimes s) + \\ + \sum_{0<k\in\Lambda} \alpha_{a_k} (\sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i) + \alpha_{a_0}(a_0 \otimes a_0 \otimes a_0)) = \\ = (\Delta \otimes I)(\sum_{s \in S-A} \alpha_s (s \otimes \sum_{i \in I_s} a_i + \sum_{i \in I_s} a_i \otimes s) + \\ + \sum_{0<k\in\Lambda} \alpha_{a_k} (\sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i) + \alpha_{a_0}(a_0 \otimes a_0)) = \\ = (\Delta \otimes I) \circ \Delta(c). \end{aligned}$$

2. También se verifica la propiedad de la counidad,

$$\begin{aligned} (I \otimes \epsilon) \circ \Delta(c) = \sum_{s \in S-A} \alpha_s (s \otimes \epsilon(\sum_{i \in I_s} a_i) + \sum_{i \in I_s} a_i \otimes \epsilon(s)) + \\ + \sum_{0<k\in\Lambda} \alpha_{a_k} (\sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \epsilon(\sum_{i=0}^{k} a_i) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \epsilon(\sum_{i=0}^{k-1} a_i)) + \alpha_{a_0}(a_0 \otimes \epsilon(a_0)) = c, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(c) = \sum_{s \in S-A} \alpha_s(\epsilon(s) \otimes \sum_{i \in I_s} a_i + \epsilon(\sum_{i \in I_s} a_i) \otimes s) +$$

$$+ \sum_{0<k\in\Lambda} \alpha_{a_k}(\epsilon(\sum_{i=0}^{k} a_i) \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \epsilon(\sum_{i=0}^{k-1} a_i) \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i) + \alpha_{a_0}(\epsilon(a_0) \otimes a_0) = c$$

Por tanto (C, Δ, ϵ) es una coálgebra, además es evidente por como hemos definido Δ que es coconmutativa.

Veamos como son sus coálgebras, es claro que $K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ es una subcoálgebra simple, y que $C_k = K\{a_i \mid i \in \mathbb{N},\, i \leq k \in \mathbb{N}\}$ para cada $2 \leq k \in \mathbb{N}$ es una subcoálgebra semisimple, en efecto,

$$C_k = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} K\{\sum_{j=0}^{i} a_i\}$$

Combinando todas las subcoálgebras simples podemos obtener otras subcoálgebras, por ejemplo, $K\{a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2\} = K\{a_0 + a_1, a_2\}$. Otras subcoálgebras podemos obtenerlas de la forma $K(B \cup R)$ con R un subconjunto cualquiera de $S - A$, y con $\{a_k \mid k \leq max\{n_s \in \Lambda \mid s \in R\}\} \subseteq B \subseteq A$.

Entonces,

$$Simp(C) = \{S_k = K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\} \mid k \in \Lambda\}$$

Observemos además que

$$E(K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\}) = K\{s \in S - A \mid n_s = k\} \cup \{\sum_{i=0}^{k} a_i\}$$

además cada $E(K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\})$ es coidempotente, de hecho cualquier subcoálgebra de la forma

$$\bigoplus_{k \in I \subseteq \Lambda} E(K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\})$$

es coidempotente. Y también es evidente que

$$\bigoplus_{n \in \Lambda} E(K\{\sum_{i=0}^{n} a_i\}) = KS = C$$

Por otra parte si estudiamos su álgebra dual C^*, observemos que $C^* \supseteq K\{f_s \mid s \in S\}$ donde $f_s : C \to K$ está definida por $f_s(s) = 1$ y $f_s(x) = 0$ para cada $x \in S - \{s\}$. Nótese que

$f_s f_t = 0$ para cualesquiera $s \in S$ y $t \in S - A$, mientras que si consideramos $i, j \in \Lambda$ con $i < j$ entonces $f_i f_j = f_i$ y $f_i f_i = f_i$ es idempotente, por otra parte observese que $(f_i + f_j)^2 = f_i + 3f_j$ y $(f_i - f_j)^2 = f_i - f_j$ es también idempotente, de hecho los elementos idempotentes los obtenemos para cualquier subconjunto $I = \{i_0, i_1, ..., i_n, ...\} \subseteq \Lambda$ con $i_0 < i_1 < ... < i_n < ....$; y son los de la forma

$$e_I = \sum_{i_k \in I} (-1)^k f_{a_{i_k}}$$

Ahora vamos a calcular la subcoálgebra $e_I \rightharpoonup C$, recordemos que $e_I = \sum_{i_k \in I \subseteq \Lambda} (-1)^k f_{a_{i_k}}$ con $i_k < i_k + 1$, vamos a realizar los cálculos en varios pasos:

1. Para ello vamos a calcular en primer lugar $f_{a_i} \rightharpoonup C$ para cualquier $i \neq 0$. Sea $x \in C$, entonces $x = \sum_{S-A} \alpha_s s + \sum_{k \in \Lambda} \alpha_{a_k} a_k$, y

$$\Delta(x) = \sum_{S-A} \alpha_s (s \otimes \sum_{j=0}^{n_s} a_j + \sum_{j=0}^{n_s} a_j \otimes s) + \sum_{0 \neq k \in \Lambda} \alpha_{a_k} (\sum_{j=0}^{k} a_j \otimes \sum_{j=0}^{k} a_j - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \otimes \sum_{j=0}^{k-1} a_j) + \alpha_0 (a_0 \otimes a_0)$$

   luego

$$f_{a_i} \rightharpoonup x = \sum_{\{s \in S-A | i \leq n_s\}} \alpha_s s + \alpha_{a_i} (\sum_{j=0}^{i} a_j) + \sum_{i < k \in \Lambda} \alpha_{a_k} a_k$$

   por tanto,

$$(f_{a_i} \rightharpoonup C) = K(\{s \in S - A \mid i \leq n_s\} \cup \{\sum_{k=0}^{i} a_k\} \cup (A - \{a_0, a_1, ..., a_i\})) =$$

$$= K(\{s \in S - A \mid i \leq n_s\} \cup \{\sum_{k=0}^{t} a_i \mid i \leq t \in \Lambda\}) =$$

$$= \bigoplus_{i \leq t \in \Lambda} K(\{s \in S - A \mid t = n_s\} \cup \{\sum_{k=0}^{t} a_k\}) = \bigoplus_{i \leq t \in \Lambda} E(S_t).$$

2. De la misma forma que el apartado anterior es fácil de ver que $f_{a_0} \rightharpoonup x = x$ para cualquier $x \in C$, esto es, $f_{a_0} = \epsilon = 1_{C^*}$ y $f_{a_0} \rightharpoonup C = C$.

3. Ahora vamos a calcular $(f_{a_i} - f_{a_j}) \rightharpoonup C$ para $i < j \in \Lambda$. Al igual que antes consideramos $x \in C$ y calculamos Δx, entonces

$$(f_{a_i} - f_{a_j}) \rightharpoonup C = K(\{s \in S - A \mid i \leq n_s < j\} \cup \{\sum_{k=0}^{i} a_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}\}) =$$

$$= \bigoplus_{i \leq t < j} K(\{s \in S - A \mid k = n_s\} \cup \{\sum_{k=0}^{t} a_i\}) = \bigoplus_{i \leq t < j} E(S_t).$$

4. Y por tanto $e_I \rightharpoonup C$ será,

   (a) Si I tiene un número $n+1$ par elementos,

   $$e_I \rightharpoonup C = \bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} ((f_{a_{i_{2k}}} - f_{a_{i_{2k+1}}}) \rightharpoonup C).$$

   (b) Si I tiene un número $n+1$ impar de elementos

   $$e_I \rightharpoonup C = \bigoplus_{k=0}^{(n/2-1} ((f_{a_{i_{2k}}} - f_{a_{i_{2k+1}}}) \rightharpoonup C) \bigoplus (f_{a_n} \rightharpoonup C).$$

   (c) Si I tiene infinitos elementos,

   $$e_I \rightharpoonup C = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} ((f_{a_{i_{2k}}} - f_{a_{i_{2k+1}}}) \rightharpoonup C).$$

5. Entonces $e_I \rightharpoonup C =$

   (a)
   $$\bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} (\bigoplus_{\{t\in\Lambda | i_k \leq t < i_{k+1}\}} E(S_t))$$
   si I tiene un número $n+1$ par de elementos.

   (b)
   $$\bigoplus_{k=0}^{(n-2)/2} (\oplus_{\{t\in\Lambda | i_k \leq t < i_{k+1}\}} E(S_t)) \oplus (\bigoplus_{n\leq t\in\Lambda} E(S_t))$$
   si I tiene un número impar $n+1$ de elementos.

   (c)
   $$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (\bigoplus_{\{t\in\Lambda | i_k \leq t < i_{k+1}\}} E(S_t))$$
   si I tiene infinitos elementos.

Sabemos que la topología de Zariski es la discreta, $Open(X) = \mathcal{P}(X)$ con $X = Simp(C)$, si tenemos un abierto $U = X(D) \in \mathcal{P}(X)$ para alguna subcoálgebra $D \subseteq C$, entonces

$$U = X(e \rightharpoonup C) = \{S \in X \mid S \leftharpoonup e\}$$

para algún idempotente $e \in C^*$, como los simples son de forma $S_k = K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\}$ entonces $U = \{S_{i_0}, S_{i_1}, ...\}$ con $i_k < i_{k+1}$ y $i_k, i_{k+1} \in \Lambda$, si consideramos $I = \{i_0, i_0+1, i_1, i_1+1, ...\}$

(donde i_j y $i_j + 1$ no necesariamente tienen que ser distintos) entonces el idempotente $e_I = \sum_k f_{a_{i_k}} - f_{a_{i_k+1}}$ es tal que

$$\bigoplus_{S \in U} E(S) = e_I \rightharpoonup C$$

y

$$U = X((1 - e_I) \rightharpoonup C).$$

(Nótese que $e_I = e_J$ donde $J = \{k \in \Lambda \mid i_k + 1 \neq i_{k+1}\} \subseteq I$ estaría formado por elementos distintos de Λ).

Resulta ya muy fácil considerar el radical σ_{e_I} que podríamos llamar σ_I para cualquier subconjunto $I \subseteq \Lambda$. Y el funtor localización asociado,

$$Q_{\sigma_I}(M) = e_I \rightharpoonup M \cong M \,\square_C\, (e_I \rightharpoonup C)$$

con

$$Q_{\sigma_{e_I}}(C) = e_I \rightharpoonup C$$

Tenemos además una biyección entre subconjuntos de Λ, subconjuntos de subcoálgebras simples de C, subcoálgebras coidempotentes y elementos idempotentes de C^*:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{P}(\Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) = Open(X) & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\
I = \{i_0, i_1, ..., i_n, ...\} & \longmapsto & U_I = X(e_I \rightharpoonup C) & \longmapsto & \bigoplus_{S \in U} E(S) = (1 - e_I) \rightharpoonup C & \longmapsto & e_U = (1 - e_I)
\end{array}$$

Recordemos que las subcoalgebras coidempotentes, los subconjuntos de subcoálgebras simples y los elementos idempotentes de C^* son isomorfos como álgebras de Boole, y recordando 5.8 tendríamos que

$$e_I \vee e_J = e_I + e_J - e_I e_J = e_{U \cap V},$$

$$e_I \wedge e_J = e_I e_J = e_{U \cup V}$$

para cualesquiera idempotentes $e_I, e_J \in \mathcal{I}$, donde $U, V \in \mathcal{P}(X)$ son los abiertos asociados a e_I y e_J por la biyección anterior, esto es $U = X((1 - e_I) \rightharpoonup C)$ y $V = X((1 - e_J) \rightharpoonup C)$. También podemos definir el supremo y el ínfimo en $\mathcal{A}$, si llamamos para $I, J \subseteq \Lambda$, consideramos $U_I, U_J \in \mathcal{P}(X)$, entonces

$$((1 - e_I) \rightharpoonup C) \wedge ((1 - e_J) \rightharpoonup C) = ((1 - (e_I \vee e_J)) \rightharpoonup C),$$

$$((1 - e_I) \rightharpoonup C) \vee ((1 - e_J) \rightharpoonup C) = ((1 - (e_I \wedge e_J)) \rightharpoonup C).$$

De la misma forma tendríamos un ínfimo y un supremo,

$$U_I \vee U_J = U_I \cup U_J$$

$$U_I \wedge U_J = U_I \cap U_J$$

en $Open(X)$. Y como se vió en 5.8, dotan de estructuras de álgebras de Boole isomorfas a los tres conjuntos.

Vamos a estudiar los siguientes tres casos particulares de este ejemplo,

1. Supongamos que A tienen un único elemento, $A = \{a_0\}$. Llamemos $y = a_0$, entonces $C = KS$, $\Delta y = y \otimes y$ y $\Delta x = x \otimes y + y \otimes x$ para cualquier $x \in S - \{y\}$; $\epsilon(y) = 1$ y $\epsilon(x) = 0$ para cualquier $x \in S - \{y\}$. (C, Δ, ϵ) es una coálgebra coconmutativa. Sus subcoálgebras son de la forma $K(R \cup \{y\})$ con $R \in \mathcal{P}(S)$ y tiene una única simple, $Simp(C) = \{(K\{y\})\}$. Por otra parte obsérvese que $K\{y\} \wedge K\{y\} = C$ y por tanto no existe subcoálgebras coidempotentes propias. Si analizamos C^*, será el álgebra $K\{f_s \mid s \in S\}$ con $f_s(x) = 0$ para cada $x \neq s$, $x \in S$ y $f_s(s) = 1$; los únicos elementos idempotentes son $f_y = \epsilon$ y 0. En este caso las biyecciones son triviales, tenemos que $\mathcal{P}(Simp(C)) = \{\emptyset, \{K\{y\}\}, \mathcal{I} = \{0, \epsilon\}$ y $\mathcal{A} = \{0, C\}$, luego la situación es trivial, las álgebras de Boole son isomorfas a $\mathbb{B}_2$.

2. Supongamos que A tienen $n+1$ elementos, $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ y que $n_x = n$ para cada $x \in S - A$. Ahora tendríamos que $\Delta(a_0) = a_0 \otimes a_0$, $\Delta(a_k) = \sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ para cualquier $1 \leq k \leq n$ y $\Delta(x) = \sum_{i=0}^{n} x \otimes a_i + a_i \otimes x$ para cualquier $x \in S - A$. Y $\epsilon(a_0) = 1$, $\epsilon(x) = 0$ para cualquier $x \in S - \{a_0\}$. Entonces si $C = KS$, (C, Δ, ϵ) es una coálgebra coconmutativa, sus subcoálgebras simples son
$$Simp(C) = \{K\{a_0\}, K\{a_0 + a_1\}, ..., K\{\sum_{i=0}^{n} a_i\}\}$$
Podemos calcular otras subcoálgebras de la forma $K(R \cup \{\sum_{i=0}^{n} a_i\} \cup A_k)$ con $R \subseteq S$ y $A_k = \{a_0, a_1, ..., a_k\} \subseteq A$. Las subcoálgebras coidempotentes serán de la forma
$$\bigoplus_{S_k \in \Gamma \subseteq Simp(C)} E(S_k)$$
con $S_k = K\{\sum_{i=0}^{k} a_i\}$, obsérvese que $E(S_k) = S_k$ para cada $k < n$ y $E(S_n) = K(S - A \cup \{\sum_{i=0}^{n} a_i\})$. Por otro lado $C^* = K\{f_s \mid s \in S\}$ y sus elementos idempotentes son de la forma e_I como en el ejemplo general, con la diferencia de que ahora $I \in \mathcal{P}(\{0, 1, ..., n\})$ siempre es finito. Entonces el álgebra de Boole resultante será $\mathcal{B}_2^n$. Obsérvese que en este caso
$$f_{a_i} \rightharpoonup C = K(S - A \cup \{\sum_{j=0}^{i} a_j\} \cup \{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n\}) = \bigoplus_{j=i}^{n} E(S_k).$$

3. Supongamos que A tienen $n+1$ elementos, $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ y que $n_x = 0$ para cada $x \in S - A$. En este último caso $\Delta(a_0) = a_0 \otimes a_0$, $\Delta(a_k) = \sum_{i=0}^{k} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \otimes \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ para cualquier $1 \leq k \leq n$ y $\Delta(x) = x \otimes a_0 + a_0 \otimes x$ para cada $x \in S - A$ y ϵ como siempre. Las subcoálgebras simples son las mismas del caso anterior pero ahora

$E(S_0) = K(S - A \cup \{a_0\})$ y $E(S_k) = S_k$ para cada $1 \leq k \leq n$. Obsérvese también que en este caso

$$f_{a_i} \rightharpoonup C = \bigoplus_{i \leq j \leq n} S_j$$

para cada $i > 1$.

Nótese que llamando $x_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$ para cada $k \in \Lambda$, y considerando $S' = (S - A) \cup \{x_k \mid k \in \Lambda\}$, $C = KS = KS'$. Pero con esta nueva base Δ quedaría definida de forma muy sencilla $\Delta x_k = x_k \otimes x_k$ para cada $k \in \Lambda$ y $\Delta s = s \otimes x_{k_s} + x_{k_s} \otimes s$ para cada $s \in S - A$, y $\epsilon(x_k) = 1$ para cada $k \in \Lambda$, $\epsilon(s) = 0$ para cada $s \in S - A$. Aunque así la definición es sencilla, otros cálculos resultan más complicados.

Sin embargo si definimos la coálgebra de caminos KQ asociada a

$$\Gamma = (\{x_k \mid k \in \Lambda\}, S - A)$$

donde todos los elementos de $S - A$ son lazos, entonces C es la subcoálgebra de KQ que podemos definir por $K(Q_0 \cup Q_1)$. Es evidente que $Simp(C) = Spec(C)$ y el cálculo de la localización ahora es inmediato.

Obsérvese también que podemos definir

$$\Delta(s) = s \otimes x_{k_s} + x_{j_s} \otimes s$$

para cada $s \in S - A$ y (C, Δ, ϵ) sigue siendo una coálgebra pero no coconmutativa. Análogamente se puede definir la coálgebra de caminos y C sería la subcoálgebra generada por los vértices y las flechas que ahora no son lazos.

5.8 Las Algebras de Boole asociadas a una coálgebra coconmutativa.

Por 158 sabemos que $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}(\Lambda)$ y $C - Tor$ son álgebras de Boole isomorfas para cualquier coálgebra C. Si consideramos una coálgebra coconmutativa C, entonces $\mathcal{I}$ es el conjunto de todos los elementos idempotentes de C^* y para $e \in C^*$, tenemos la subcoálgebra $\bigoplus_{S \in U \subseteq Simp(C)} E(S) = (1 - e) \rightharpoonup C$, donde $U = \{S \in Simp(C) \mid e \rightharpoonup S = 0\}$. Es claro que las situaciones se simplifican considerablemente y en éste ejemplo comprobamos explícitamente como son dichos retículos.

Sea C una coálgebra coconmutativa y sea $X = Simp(C)$, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una álgebra de Boole con $U \wedge V = U \cap V$ y $U \vee V = U \cup V$ para cada $U, V \in \mathcal{P}(X)$.

Lema 223 *Sea $\mathcal{A} = \{\bigoplus_{S \in U} E(S) \mid U \in \mathcal{P}(X)\}$, entonces $(\mathcal{A}, \subseteq)$ es un retículo con,*

1. $[\bigoplus_{S\in U} E(S)] \vee [\bigoplus_{S\in V} E(S)] = [\bigoplus_{S\in U} E(S)] + [\bigoplus_{S\in V} E(S)] = \bigoplus_{S\in U\cup V} E(S)$ *para cualesquiera* $U, V \in Open(X)$.

2. $[\bigoplus_{S\in U} E(S)] \wedge [\bigoplus_{S\in V} E(S)] = [\bigoplus_{S\in U} E(S)] \cap [\bigoplus_{S\in V} E(S)] = \bigoplus_{S\in U\cap V} E(S)$ *para cualesquiera* $U, V \in Open(X)$.

DEMOSTRACIÓN. La inclusión en $\mathcal{A}$ es una relación de orden,

$$\bigoplus_{S\in U} E(S) \subseteq \bigoplus_{S\in V} E(S) \Leftrightarrow \bigoplus_{S\in U} E(S) \cap \bigoplus_{S\in V} E(S) = \bigoplus_{S\in U} E(S)$$

y el lema es evidente. □

Corolario 224 *$(\mathcal{A}, \vee, \wedge)$ es un álgebra de Boole.*

□

Proposición 225 *Sea C una coálgebra coconmutativa, sea $e \in C^*$ un idempotente y $U = \{S \in Simp(C) \mid e \rightharpoonup S = 0\}$. Entonces $X(e \rightharpoonup C) = U$.*

DEMOSTRACIÓN. $(\subseteq)$ Sea $S \in X(e \rightharpoonup C)$,

$$(S \cap e \rightharpoonup C) = \begin{cases} 0 \\ o \\ S \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (S \cap (1-e) \rightharpoonup C) = \begin{cases} 0 \\ o \\ S \end{cases}$$

porque S es simple. Por otro lado cualquier $z \in S \subseteq C = (e \rightharpoonup C) \oplus ((1-e) \rightharpoonup C)$, es de la forma $z = x + y$ con $x \in e \rightharpoonup C$ e $y \in (1-e) \rightharpoonup C$, entonces $e \rightharpoonup z = x + 0$ y $(1-e) \rightharpoonup z = y$, de hecho $S = e \rightharpoonup S \oplus (1-e) \rightharpoonup S$, $e \rightharpoonup S$ y $(1-e) \rightharpoonup S$ son subcoálgebras de S, pero S es simple y como $S \nsubseteq (e \rightharpoonup C)$ por hipótesis, entonces $S \cap (e \rightharpoonup C) = 0$, por tanto $S \cap e \rightharpoonup S = e \rightharpoonup S = 0$ y también $(1-e) \rightharpoonup S = S$, luego es evidente que $S \in U$ y $S \subseteq (1-e) \rightharpoonup C$.

$(\supseteq)$ Si $S \in U$ entonces $e \rightharpoonup S = 0$, luego si suponemos que $S \subseteq e \rightharpoonup C$, $e \rightharpoonup S = S = 0$ que es absurdo, por tanto $S \nsubseteq e \rightharpoonup C$ y $S \in X(e \rightharpoonup C)$. □

Lema 226 *Sea $\mathcal{I}$ el conjunto formado por todos los idempotentes de C^*, consideramos la relación de orden,*

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = e$$

entonces para $U, V \in \mathcal{P}(X)$, sean e_U y e_V los idempotentes asociados a U y V respectivamente por la biyección, entonces:

$$e_U \leq e_V \Leftrightarrow U \supseteq V$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Sabemos que $e_U \leq e_V$, entonces $e_U e_V = e_U$, esto es, $(e_U e_V) \rightharpoonup x = e_u \rightharpoonup x$ para cada $x \in C$, entonces $e_U \rightharpoonup C \subseteq e_V \rightharpoonup C$, y además si $S \in V$ entonces $e_V \rightharpoonup S = 0$ y $e_U \rightharpoonup S = (e_U e_V) \rightharpoonup S = 0$, por tanto $V \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Si $V \subseteq U$ entonces

$$(1 - e_V) \rightharpoonup C = \bigoplus_{S \in V} E(S) \subseteq \bigoplus_{S \in U} E(S) = (1 - e_V) \rightharpoonup C$$

luego $((1-e_V) \rightharpoonup x) = ((1-e_U)(1-e_V) \rightharpoonup x)$ para cada $x \in C$ porque $(1-e_U)$ es idempotente, entonces $\epsilon((1-e_V) \rightharpoonup x) = \epsilon((1-e_U)(1-e_V) \rightharpoonup x)$ por tanto $(1-e_V)(x) = ((1-e_U)(1-e_V))(x)$ para cada $x \in C$, es decir, $1 - e_V = (1 - e_U)(1 - e_V)$ y $(1 - e_V) \leq (1 - e_U)$, pero entonces quitando los paréntesis tenemos $1 - e_V - e_U + e_U e_V = 1 - e_V$ y $e_U \leq e_V$. □

De forma análoga $(1 - e_U) \leq (1 - e_V) \Leftrightarrow U \subseteq V$.

Lema 227 $(\mathcal{I}, \leq)$ *para la relación de orden anterior, es un retículo, donde*

1. $e \wedge f = ef = e_{X(e \rightharpoonup C) \cup X(f \rightharpoonup C)}$ *para cada* $e, f \in C^*$.
2. $e \vee f = e + f - ef = e_{X(e \rightharpoonup C) \cap X(f \rightharpoonup C)}$ *para cada* $e, f \in C^*$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar demostramos que el ínfimo para esta relación de orden es el producto, en efecto, es cota inferior porque como e y f son idempotentes, $efe = ef$ y entonces $ef \leq e$ y además $eff = ef$ y también tenemos $ef \leq f$, y es la mayor de las cotas inferiores, consideremos otra cota, $g \leq e$ y $g \leq f$, es decir, $ge = g$ y $gf = f$, pero entonces $gef = gf = g$ y por tanto $g \leq ef$.

Ahora demostramos que $e \wedge f = e_{X(e \rightharpoonup C) \cap X(f \rightharpoonup C)}$, en primer lugar si llamamos $U = X(e \rightharpoonup C)$ y $V = X(f \rightharpoonup C)$, nótese que $e = e_U$ y $f = e_V$, por tanto, en realidad queremos demostrar $e_U \wedge e_V = e_{U \cup V}$. Por el lema anterior es evidente y por unicidad del ínfimo tenemos lo que buscábamos.

En segundo lugar demostramos que $e \vee f = e + f - ef$, en efecto, es cota superior porque $e(e + f - ef) = e$ y $f(e + f - ef) = f$, y es la menor de las cotas porque si consideramos otra $g \in C^*$ con $e \leq g$ y $f \leq g$ entonces $(e+f-ef)g = eg+fg-efg = e+f-ef$ y $(e+f-ef) \leq g$.

Al igual que antes y por el lema anterior es inmediata la segunda igualdad del supremo.

Es evidente que para dos idempotentes existe siempre el ínfimo y el supremo, por tanto $(I, \leq)$ es un retículo. □

Corolario 228 $(\mathcal{I}, \vee, \wedge)$ *es un álgebra de Boole.*

□

Proposición 229 *Las álgebras de Boole* $(\mathcal{A}, \vee, \wedge)$*,* $(\mathcal{I}, \vee, \wedge)$ *y* $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ *son isomorfas.*

Demostración. Los isomorfismos de retículos son,

$$\begin{array}{rclcrcl} \Phi : (\mathcal{P}(X), \subseteq) & \longrightarrow & (\mathcal{A}, \subseteq) & \qquad & \varphi : \quad (\mathcal{A}, \subseteq) & \longrightarrow & (\mathcal{I}, \leq) \\ U & \longmapsto & \bigoplus_{S \in U} E(S) & & \bigoplus_{S \in U} E(S) & \longmapsto & (1 - e_U) \end{array}$$

□

Acabamos de demostrar que $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{P}(X)$ son álgebras de Boole isomorfas, pero según vimos, estos conjuntos también son biyectivos al conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de C. Llamemos $\mathcal{D}$ al conjunto de todas las subcoálgebras coidempotentes de C y definamos las siguientes operaciones, para $A, B \in \mathcal{D}$, sabemos existen idempotentes $e, f \in C^*$ de manera única tal que $A = C^{(e)}$ y $B = C^{(f)}$,

$$A \vee B = C^{(e)} \vee C^{(f)} = C^{(ef)} = C^{(e \wedge f)}$$

$$A \wedge^* B = C^{(e)} \wedge^* C^{(f)} = C^{(e+f-ef)} = C^{(e \vee f)}$$

(denotamos $\wedge^*$ al ínfimo para distinguirlo del producto Wedge de coálgebras) En realidad $C^{(e_U)} = \bigoplus_{S \in U} E(S)$ y las operaciones que acabamos de definir son las mismas de $\mathcal{A}$, entonces $(\mathcal{D}, \vee, \wedge)$ es evidente, utilizando lo anterior, que es un álgebra de Boole isomorfa a $\mathcal{I}$ y $\mathcal{P}(X)$.

Con lo visto es trivial establecer un isomorfismo con $C - Tor$.

5.9 Comódulos torsión en coálgebras de caminos.

Sea KQ la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma = (V, F)$, entonces para cada clase de equivalencia de KQ-comódulos inyectivos a derecha, encontramos un representante quasi-finito de la forma $X = \bigoplus_{\beta \in \overline{B}} E(S_\beta)$ para $\overline{B} \subseteq B$ y $\Lambda = \{S_\beta\}_{\beta \in B}$. Obsérvese que $S \in \mathcal{M}^{KQ}$ es un subcomódulo simple si y sólo si S es isomorfo a un espacio vectorial 1-dimensional generado por un vértice, entonces podemos considerar que $B = V$ y $\overline{B}$ es un subconjunto de vértices. De hecho obsérvese que

$$X = \bigoplus_{x \in \overline{B}} E(S_x) = \bigoplus_{x \in \overline{B}} (KQ \leftharpoonup f_x) = KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}$$

donde S_x es el espacio vectorial 1-dimensional generado por x, $f_x \in KQ^*$ es el elemento idempotente tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(p) = 0$ para cada $p \in Q$, $p \neq x$, y de la misma forma, $f_{\overline{B}} \in KQ^*$

es el idempotente tal que $f_{\overline{B}}(x) = 1$ para cada $x \in \overline{B}$ y 0 en el resto de caminos.

Como las subcategorías localizantes están en relación biyectiva con las clases de equivalencia de comódulos inyectivos, y acabamos de comprobar que estos a su vez lo están, con los subconjuntos de vértices y como vimos en 183, los subconjuntos de vértices lo están con las subcoálgebras coidempotentes como era de esperar.

En 198 vimos que $f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}$ es la coálgebra de caminos $K\overline{Q}$ asociada al grafo $(\overline{B}, \{q \in Q \mid V(q) \cap \overline{(B)} = \{s(q), e(q)\}\})$ y además por 144,

$$f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}} \cong Coend_{-C}(KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}) \cong Coend_{C-}(f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ) \cong K\overline{Q},$$

mientras que

$$f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \cong Cohom_{-C}(KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}, KQ) \cong K\{q \in Q \mid e(q) \in \overline{B}\}$$

es el espacio vectorial con base formada por todos los caminos de $q \in Q$ tales que $e(q) \in \overline{B}$, análogamente

$$KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}} \cong Cohom_{C-}(f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ, KQ) \cong K\{q \in Q \mid s(q) \in \overline{B}\}$$

es el espacio vectorial con base formada por todos los caminos de $q \in Q$ tales que $s(q) \in \overline{B}$.

Por otra parte en 195 se comprobó que en cada clase de elementos idempotentes semejantes puede elegirse un representante de la forma $f_{\overline{B}}$, y en efecto tenemos un contexto Morita-Takeuchi para el idempotente $f_{\overline{B}}$, véase 143, definido por:

$$((f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}), KQ, KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}, f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ, f, g)$$

con

$$f : (f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}) \cong (KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}}) \square_{KQ} (f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ)$$

y

$$g : KQ \longrightarrow (f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ) \square_{(f_{\overline{B}} \rightharpoonup KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}})} (KQ \leftharpoonup f_{\overline{B}})$$

definida por

$$\begin{array}{rcl} g(q) & = & \sum_{q=q_1 q_2} f_{\overline{B}} \rightharpoonup q_1 \otimes q_2 \leftharpoonup f_{\overline{B}} \\ & = & (f_{\overline{B}} \rightharpoonup s(q)) \otimes (q \leftharpoonup f_{\overline{B}}) + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{\overline{B}} \rightharpoonup \alpha_1 ... \alpha_i) \otimes (\alpha_{i+1} ... \alpha_n \leftharpoonup f_{\overline{B}}) + \\ & & +(f_{\overline{B}} \rightharpoonup q) \otimes (e(q) \leftharpoonup f_{\overline{B}}) \end{array}$$

para cada camino $q = \alpha_1 ... \alpha_n \in Q$. Obsérvese que,

1. $f_{\overline{B}} \rightharpoonup q_1 \neq 0$ si y sólo si $e(q_1) \in \overline{B}$.
2. $q_2 \leftharpoonup f_{\overline{B}} \neq 0$ si y sólo si $s(q_2) \in \overline{B}$.
3. $s(q_2) = e(q_1)$.

Luego es evidente que $Ker(g) \cap Q = \{q \in Q \mid V(q) \cap \overline{B} = \emptyset\}$, esto es, $Ker(g)$ es la coálgebra de caminos asociada al grafo $\Gamma_{\overline{B}} = (V - \overline{B}, \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), e(\alpha) \notin \overline{B}\})$ que es una subcoálgebra coidempotente de KQ y además es $KQ^{(f_{\overline{B}})}$, la mayor subcoálgebra anulada por el idempotente $f_{\overline{B}}$ como esperábamos.

Recordemos que $M \in \mathcal{M}^{KQ}$ es torsión si y sólo si $cf(M)$ lo es, donde $cf(M)$ es la menor subcoálgebra para la cual $\omega_M(M) \subseteq M \otimes cf(M)$. Sea V' un subconjunto de vértices del grafo Γ, como las subcategorías localizantes o clases de torsión están en realción biyectiva con los subconjuntos de vértices, entonces $V' \leftrightarrow \mathcal{T}_{V'}$. Consideremos un subconjunto de vértices V‘ y claramente una subcoálgebra $A \subseteq KQ$ es torsión si y sólo si $V(A) \cap V' = \emptyset$, y evidentemente,

$$\mathcal{T}_{V'} = \{M \in \mathcal{M}^{KQ} \mid V(cf(M)) \cap V' = \emptyset\}$$

es decir, se reduce el estudio de la torsión a observar los vértices.

Comódulos torsión en coálgebras punteadas.

Si C es una coálgebra punteada entonces existe KQ una coálgebra de caminos para un grafo $\Gamma = (V, F)$ tal que $C \subseteq KQ$ es subcoálgebra suya y de forma que $Simp(C) \cong V = G$ donde G es el conjunto de elementos group-like. Por lo visto anteriormente y por 4.14, las subcategorías localizantes también están en relación biyectiva con los subconjuntos de vértices, y se pueden describir de la misma forma.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Abe, E.
Hopf Algebras, Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1997.

[2] Bueso J.L., Jara P. and Verschoren A.
Compatibility, stability, and sheaves, Marcel Dekker, Inc. 1995.

[3] Coelho, F.U. and Lui, S.X.
Generalizad Path Coalgebras. Interactions between ring theory and representations of algebras (Murcia). Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 210, Dekker, New York (2000), 53-66.

[4] Cuadra J., Gómez-Torrecillas J.
Idempotents and Morita-Takeuchi Theory, Comm. in Algebra 30 (2002), 2405-2426.

[5] Doi, Y.
Homological coalgebra, J. Math Soc. Japan 33 (1981), 31-50.

[6] Gabriel, P.
Des catégories abeliennes, Bull Soc. Math. France 90 (1962), 323-448.

[7] García J.M., Jara P. and Merino L.M.
Decomposition of comodules, Comm. Algebra 27 (1999), 1797-1805.

[8] Golan, J.S.
Structure sheaves over a noncommutative ring, Marcel Dekker, Inc. New York 1980.

[9] Green, J.A.
Locally Finite Representations, J. Algebra 41 (1976), 137-171.

[10] Montgomery, S.
Hopf Algebras and their actions on rings, CBMS Amer. Math. Soc. 82.

[11] Montgomery, S.
Indecomposable Coalgebras, Simple Comódulos, ans pointed Hopf Algebras, Amer. Math. Soc., Vol.123, 8, 2343-2351, 1995.

[12] NASTASESCU, C. AND TORRECILLAS, B.
Colocalization on Grothendieck Categories with Applications to Coalgebras, J. Algebra 185 (1996), 108-124.

[13] NASTASESCU, C. AND TORRECILLAS, B.
Torsion theories for coalgebras, J. of Pure and Applied Algebra 97 (1994), 203-220.

[14] NICHOLS, W.D.
Bialgebras of type one, Comm. in Algebra, 6(15) (1978), 1521-1552.

[15] POPESCU, N.
Abelian categories with applications to rings and modules, Academic Press, 1973.

[16] RADFORD, D.E.
On the structure of pointed coalgebras, J. Algebra 77 (1982), 1-14.

[17] SWEEDLER, M. E.
Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

[18] TAKEUCHI, M.
Morita theorems for categories of comodulos, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977), 629-644.

[19] TORRECILLAS, B.; VAN OYSTAEYEN, F. AND ZHANG, Y. H.
Coflat Monomorphisms of Coalgebras, J. of Pure and Applied Algebra, 128 (1998), 171-183.

[20] WOODCOCK, D.
Some Categorical Remarks on the Representation Theory of Coalgebras, Comm. in Algebra, 25(9) (1997), 2775-2794.