

**UN ACERCAMIENTO ALGEBRAICO
A LA TEORÍA DE TORRES DE POSTNIKOV**

Tesis doctoral presentada por:
MIGUEL ÁNGEL GARCÍA MUÑOZ

Dirigida por los doctores:
MANUEL BULLEJOS LORENZO Y
EMILIO FARO RIVAS,

Granada, Septiembre 2003



UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de Álgebra

UN ACERCAMIENTO ALGEBRAICO A LA TEORÍA DE TORRES DE POSTNIKOV

por
Miguel Ángel García Muñoz

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Profesores D. *Manuel Bullejos Lorenzo*, doctor del Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada y D. *Emilio Faro Rivas*, doctor del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Vigo, y que fue defendida el 9 septiembre de 2003, siendo juzgada por el siguiente Tribunal:

- Presidente: D. Antonio Martínez Cegarra (Universidad de Granada)
- Vocales:
 - D. Carles Casacuberta Verges (Universitat Autònoma de Barcelona)
 - D. Luis Javier Hernández Paricio (Universidad de la Rioja)
 - D. Manuel Ladra González (Universidad de Santiago de Compostela)
- Secretario: D. Jesús García Miranda (Universidad de Granada)

que le otorgó la calificación de “Sobresaliente cum Laude” por unanimidad.

En sesión ordinaria de Consejo de Gobierno de la Universidad de Granada celebrada el día 9 de octubre de 2006 se aprobó la concesión del Premio Extraordinario de Doctorado para dicha memoria.

A Raquel, a mis padres y hermanos.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi sincero agradecimiento a los Directores de esta Memoria, D. Manuel Bullejos Lorenzo y D. Emilio Faro Rivas, por la confianza que en mí depositaron, por compartir conmigo sus conocimientos e ideas y por su orientación, apoyo y trabajo a lo largo de la elaboración de esta Memoria sin la cual no se habría realizado.

Igualmente quiero hacer extensivo este agradecimiento al Departamento de Álgebra y en especial al grupo de investigación dirigido por el Profesor D. Antonio Martínez Cegarra, por poner siempre a mi disposición cuanto he necesitado para llevar a cabo este trabajo, permitiéndome hacer uso de sus instalaciones.

De igual forma, expreso mi gratitud al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, donde he venido desarrollando mi docencia, a sus miembros y, en especial, a los miembros del grupo de investigación, al que pertenezco, dirigido por el Profesor D. Ildelfonso Castro López.

Por último, doy las gracias a mi familia y mi novia por soportarme y estar siempre ahí, en especial en los momentos difíciles, ayudándome y animándome para que el trabajo pudiera salir adelante. También a todas las personas que de una forma u otra han colaborado y han facilitado el trabajo.

Índice

Introducción	v
1 Preliminares	1
1.1 Categorías y grupoides internos en una categoría base	1
1.2 Tripleabilidad	15
1.3 Objetos simpliciales	17
1.3.1 Asféricidad y Condición de Kan	20
1.3.2 Nervios de categorías y grupoides	24
1.3.3 Objetos simpliciales aumentados y el funtor Dec	30
1.3.4 Objetos simpliciales dobles. Los funtores \overline{W} y TDec	32
1.3.5 La categoría de conjuntos simpliciales. Grupos de homotopía. Los funtores realización geométrica y complejo singular	35
1.4 Hipergrupoides	40
1.4.1 1-Hipergrupoides	40
1.4.2 n -Hipergrupoides	45
1.5 Colímites Homotópicos	55
1.5.1 Colímites Homotópicos en SSet	55
1.5.2 Los conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados	58
1.5.3 La construcción producto semidirecto de Grothendieck	61
1.5.4 Fibraciones de grupoides y fibraciones plenas escindidas	65
2 La torre de Postnikov de un grupoide simplicial	69
2.1 La categoría Gd de grupoides simpliciales	69
2.2 El complejo de Moore y los grupos de homotopía de un grupoide simplicial.	72
2.3 Los funtores nervio-espacio clasificador y grupoide de lazos-grupoide simplicial fundamental	81
2.4 Las categorías Gd_n de n -tipos	86
2.4.1 Grupoides enriquecidos en n -hipergrupoides	86
2.4.2 Las categorías Gd_n	89

2.5	La construcción de la torre	103
2.6	Algunos resultados técnicos sobre n -grupoides simpliciales	115
2.7	La torre de Postnikov de un espacio	121
3	La torre de Postnikov de un complejo cruzado	125
3.1	Módulos cruzados	126
3.2	Complejos cruzados	151
3.2.1	Los funtores nervio y complejo cruzado fundamental	156
3.2.2	Las categorías \mathbf{Crs}_n de n -tipos	158
3.3	La construcción de la torre	167
3.4	Algunos resultados técnicos sobre complejos cruzados	173
3.5	La torre de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado	179
4	Cohomologías	183
4.1	Cohomología singular con coeficientes locales	183
4.1.1	Un teorema de representación de la cohomología singular con coeficiente locales	186
4.1.2	Cohomología singular de complejos cruzados con coeficientes locales	190
4.2	Cohomologías del cotriple	191
4.2.1	2-Torsores. Interpretación del segundo grupo de cohomología del cotriple	193
4.2.2	Cohomología del cotriple de un complejo cruzado n -dimensional con coeficientes locales	203
4.2.3	2-Torsores con coeficientes locales sobre n -complejos cruzados	207
4.2.4	2-Torsores y extensiones en \mathbf{Crs}_n . Interpretación de las cohomologías del cotriple con coeficientes locales en \mathbf{Crs}_n en términos de extensiones	216
4.3	Representación de la cohomología singular en subcategorías de n -complejos cruzados simpliciales	218
4.3.1	Morfismo de conexión	281
4.4	Cohomologías en \mathbf{Gd}	288
4.4.1	Cohomología singular en \mathbf{Gd}_{n+1}	288
4.4.2	2-torsores con coeficientes locales sobre $(n + 1)$ -grupoides simpliciales. La cohomología algebraica en \mathbf{Gd}_{n+1}	288
5	Los invariantes de Postnikov	293
5.1	Los invariantes de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado	293
5.1.1	Los invariantes de Postnikov algebraicos	294
5.1.2	Los invariantes de Postnikov topológicos	297

5.2	Los invariantes de Postnikov de cualquier espacio	298
5.2.1	Los invariantes de Postnikov algebraicos de un grupoide simplicial	299
5.2.2	Los invariantes de Postnikov topológicos de cualquier espacio	305

Introducción

La teoría de torres de Postnikov de un espacio nos proporciona por una parte una forma de analizar un espacio desde el punto de vista de sus grupos de homotopía, y por otra, una receta para la construcción de espacios con grupos de homotopía específicos en cada dimensión. Dado un espacio X su torre de Postnikov es un diagrama conmutativo de espacios

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X & & \\
 & & \delta_{n+1} & & \downarrow \delta_2 & \delta_1 & \delta_0 \\
 & & \swarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 \dots & X_{n+1} & \xrightarrow{\eta_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\eta_n} & \dots & \xrightarrow{\eta_3} & X_2 & \xrightarrow{\eta_2} & X_1 & \xrightarrow{\eta_1} & X_0 .
 \end{array}$$

tal que para cada $n \geq 0$:

1. El espacio X_n es un n -tipo, esto es, $\pi_i(X_n) = 0$ para $i \geq n + 1$.
2. La aplicación $\eta_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ es una fibración cuya fibra, en cada punto x , tiene el tipo de homotopía del espacio de Eilenberg-Mac Lane $K(\pi_{n+1}(X, x), n + 1)$.
3. Las aplicaciones $\delta_n : X \rightarrow X_n$ inducen isomorfismos en los grupos de homotopía en dimensiones $\leq n$.

La torre de Postnikov de X nos permite reconstruir el tipo de homotopía de X ya que el morfismo inducido $X \rightarrow \varprojlim \{X_n\}$ resulta ser una equivalencia homotópica débil. Esta torre nos da una descomposición del espacio en cierto sentido dual a su descomposición celular ya que, si pensamos en el espacio como una molécula, los espacios del tipo de un $K(\Pi, n)$ son “atómicos” desde el punto de vista de los grupos de homotopía (en contrapunto con los espacios de Moore $M(\Pi, n)$, entre los que están las esferas, que son atómicos desde el punto de vista de los grupos de homología), ya que dichos espacios sólo tienen un grupo de homotopía (homología) no trivial. Las fibraciones que forman la torre de Postnikov llevan consigo la información de como estos “átomos” se tuercen y se pegan para formar la “molécula” que es el espacio. De hecho, las fibraciones en la torre de Postnikov

de un espacio determinan elementos de cohomología, los invariantes de Postnikov del espacio, los cuales proporcionan la información necesaria para reconstruir la torre de Postnikov de X piso por piso. Así el invariante de Postnikov \mathbf{k}_n , asociado a la fibración η_n , nos dice cómo pegar espacios $K(\Pi, n)$ al espacio X_{n-1} para formar el espacio X_n . De manera que estos invariantes determinan completamente el tipo de homotopía del espacio.

La aproximación usual al estudio de la homotopía de tipos de espacios pasa por sustituir dichos espacios por modelos algebraicos, de manera que dichos modelos conserven toda la información homotópica de los espacios pero resulte más simple el estudio de estos modelos que el de los propios espacios. En este proceso se sustituyen las herramientas topológicas necesarias para el estudio de los espacios por herramientas algebraicas.

Así por ejemplo, la aproximación usual a la definición y construcción de la torre de Postnikov y el cálculo de los invariantes de Postnikov de un espacio utiliza herramientas topológicas muy específicas cómo son los procesos de adjuntar celdas para eliminar parte de la homotopía o la construcción de recubrimientos universales, procesos que a veces resultan poco familiares para los algebraistas.

Nuestro objetivo en esta memoria será hacer un tratamiento puramente algebraico de la teoría de torres de Postnikov. Este tratamiento pasará por sustituir las categorías de espacios, que pretendamos estudiar, por categorías “algebraicas” cuyos objetos modelen tipos de homotopía de dichos espacios. Utilizaremos entonces herramientas algebraicas como la construcción de cocientes o la formación de resoluciones libres en lugar de las herramientas topológicas que nos permitían obtener la torre de un espacio.

A parte de hacer el procedimiento de la construcción de torres de Postnikov más transparente para un algebraista, la principal ventaja de nuestro tratamiento algebraico de esta teoría es

la forma “universal” en que se obtiene la torre de Postnikov de un modelo algebraico.

Pensamos que el tratamiento universal que damos a esta teoría nos permitirá (en un futuro) trasladarla a contextos más complicados, por ejemplo a contextos equivariantes. Un primer paso en esta dirección ya fue dado en el trabajo [18], donde se calcula el tercer invariante de Postnikov equivariante de un G -espacio mediante métodos puramente algebraicos de la misma naturaleza de los que presentamos aquí.

Otra de las ventajas que muestra nuestro tratamiento es la de eliminar condiciones, del tipo de ser conexo, 1-conexo o nilpotente, sobre los espacios a los que podemos calcular la torre o los invariantes de Postnikov. El hecho que hace posible el eliminar tales condiciones es el que hemos sustituido los coeficientes para

la cohomología en la que viven los invariantes, que clásicamente eran sistemas de coeficientes triviales, por sistemas de coeficientes locales. Esta sustitución requiere teoremas de representación para la cohomología con tales coeficientes, teoremas que hemos tenido que desarrollar. Pensamos que el esfuerzo que hemos hecho en esta dirección se compensa al no tener que utilizar argumentos del tipo:

todo espacio es del tipo de homotopía de una unión de espacios conexos,

argumentos que en cierto sentido están en contradicción con el carácter universal en que se obtienen las torres de Postnikov.

Aunque en espíritu el tratamiento algebraico de la teoría de torres de Postnikov es bastante simple, el llevar a término este tratamiento pasa por un estudio profundo de las categorías de modelos algebraicos. El desarrollo de dicho estudio es lo que ocupa gran parte de esta memoria. Se observará que una vez analizadas las características de las categorías de modelos algebraicos la obtención de las torres e invariantes de Postnikov resulta natural. Hemos elegido dos contextos algebraicos para mostrar nuestra teoría:

- GRUPOIDES SIMPLICIALES.
- COMPLEJOS CRUZADOS.

El contexto de grupoides simpliciales es totalmente general, en el sentido de que éstos modelan la homotopía de todos los tipos de espacios. Aunque no es cierto que cualquier espacio tenga el tipo de homotopía de un complejo cruzado, el contexto de complejos cruzados es, por un lado, suficientemente simple como para que se pueda desarrollar completamente la teoría de torres de Postnikov y, por otro, suficientemente rico como para que el desarrollo de la teoría en este contexto nos proporcione una guía para el desarrollo de la teoría en un contexto más general (como el de grupoides simpliciales). Fue en el contexto de complejos cruzados donde primero pudimos realizar completamente el tratamiento algebraico de la teoría de Postnikov. Una vez terminada esta tarea nos pusimos a la obra en el contexto de grupoides simpliciales. Puede observarse que esta tarea no está totalmente finalizada, razones de tiempo y extensión nos han obligado a dejar el estudio de los invariantes de Postnikov de un grupoide simplicial algo incompleto. Esperamos que lo que incluimos en esta memoria sea suficiente para mostrar tanto la utilidad de nuestra aproximación como la viabilidad de esta teoría en el contexto de grupoides simpliciales.

En líneas generales, nuestra aproximación a la torre de Postnikov y a los invariantes de Postnikov de un espacio en una categoría \mathbf{T} tiene como escenario un lugar común en topología algebraica pues está basada en la existencia de una categoría algebraica \mathbf{S} , con estructura de modelos de Quillen, junto con un par

de funtores $\mathbf{\Pi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$, “*modelo algebraico fundamental*” y $\mathbf{B} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ “*espacio clasificador*” que inducen una equivalencia entre la correspondientes categorías de homotopía.

De esta forma \mathbb{S} es una categoría de modelos algebraicos para los tipos de homotopía de los espacios en \mathbb{T} . En esta situación,

*reduciremos el cálculo de las torres de Postnikov de los espacios en \mathbb{T}
al calculo de las torres de Postnikov de objetos en \mathbb{S} ,*

con tal de que el functor espacio clasificador \mathbf{B} conserve tanto fibraciones como el tipo de homotopía de sus fibras.

Como antes hemos comentado en esta memoria tomaremos dos categorías de modelos algebraicos $\mathbb{S} = \mathbf{Gd}$, la categoría de grupoides simpliciales, y $\mathbb{S} = \mathbf{Crs}$, la categoría de complejos cruzados. Los grupoides simpliciales modelan todos los tipos de homotopía de espacios, por lo que en este caso como categoría \mathbb{T} podemos tomar la categoría \mathbf{Top} de todos los espacios o la categoría \mathbf{CGHaus} de todos los espacios Hausdorff compactamente generados (entre los que se encuentran los *CW-complejos*). Los complejos cruzados no modelan todos los espacios, así que para $\mathbb{S} = \mathbf{Crs}$ la correspondiente categoría \mathbb{T} será una categoría de espacios con el tipo de homotopía de un complejo cruzado (entre estos espacios se encuentran los *J-espacios* en el sentido de Whitehead [70]). En ambos casos los funtores $\mathbf{\Pi}$ y \mathbf{B} factorizan por la categoría \mathbf{SSet} de conjuntos simpliciales. Tendremos pares de funtores adjuntos

$$G : \mathbf{SSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Gd} : \mathbf{Ner}$$

grupoide de lazos = $G \dashv \mathbf{Ner} = \text{nervio}$,

$$\pi : \mathbf{SSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Crs} : \mathbf{Ner}$$

complejo cruzado fundamental = $\pi \dashv \mathbf{Ner} = \text{nervio}$,

$$|| : \mathbf{SSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbb{T} : \mathbb{S}$$

realización geométrica = $|| \dashv \mathbb{S} = \text{complejo singular}$,

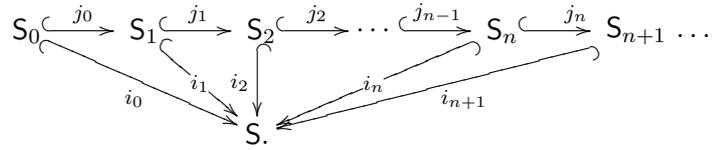
que nos permiten definir el espacio clasificador de un grupoide simplicial o de un complejo cruzado como la realización geométrica de su nervio, $\mathbf{B} = |\mathbf{Ner}|$, y el modelo fundamental (grupoide simplicial fundamental o módulo cruzado fundamental, respectivamente) de un espacio como el grupoide de lazos o el complejo cruzado fundamental de su complejo singular, $\mathbf{\Pi} = GS$ ó $\mathbf{\Pi} = \pi S$ respectivamente. En ambos casos tendremos, para cada espacio $X \in \mathbb{T}$, una equivalencia homotópica (débil) $X \sim \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$ que nos permite reducir la construcción de la torre o los invariantes de Postnikov de X a la construcción de los análogos para $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$. Finalmente, la torre o los invariantes de Postnikov de espacios de la forma $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$

Introducción

se obtendrán a partir de la torre o de los correspondientes invariantes algebraicos para el modelo algebraico $\mathbf{\Pi}(X)$.

El calculo de las torres de Postnikov de los modelos algebraicos, objetos de \mathbf{S} , está basado en el siguiente esquema general:

Para cada entero $n \geq 0$ buscamos una subcategoría plena y reflexiva $i_n : \mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{S}$ cuyos objetos modelen todos los “ n -tipos de homotopía” de \mathbf{S} , y tal que \mathbf{S}_n esté contenida en \mathbf{S}_{n+1} . El hallazgo de estas subcategorías dará lugar a una cadena de inclusiones de subcategorías reflexivas



Si denotamos $\tilde{P}_n : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}_n$ a la reflexión (adjunto izquierda) de la inclusión $i_n : \mathbf{S}_n \hookrightarrow \mathbf{S}$ y $j_n : \mathbf{S}_n \hookrightarrow \mathbf{S}_{n+1}$ a la correspondiente restricción de i_n , se cumplen las siguientes identidades

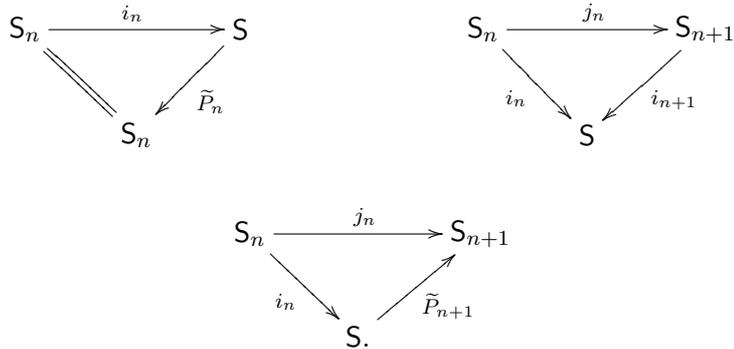
$$\tilde{P}_n i_n = Id_{\mathbf{S}_n} \quad (\text{reflexividad}), \tag{1}$$

$$i_{n+1} j_n = i_n \quad (\text{contenido}), \tag{2}$$

de las que se deduce

$$\tilde{P}_{n+1} i_n = j_n.$$

Que indican la conmutatividad de los siguientes diagramas:



Además los endofuntores idempotentes de \mathbf{S} , $P_n = i_n \tilde{P}_n$ cumplirán las identidades

$$P_{n+1} P_n \cong P_n \quad \text{y} \quad P_n P_{n+1} \cong P_n \tag{3}$$

y de esta forma podremos obtener una cadena de transformaciones naturales

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & Id_S & & \\
 & & \delta^{(n+1)} & & \delta^{(0)} & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & \delta^{(n)} & & \delta^{(1)} & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & \delta^{(2)} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \dots & P_{n+1} & \xrightarrow{\eta_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\eta_n} & \dots & P_2 & \xrightarrow{\eta_2} & P_1 & \xrightarrow{\eta_1} & P_0
 \end{array}$$

(donde η_{n+1} es la imagen por P_{n+1} de la unidad $\delta^{(n)} : Id_S \rightarrow P_n$ de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$).

Esta cadena de transformaciones naturales será la

“torre de Postnikov universal”

en S , en el sentido de que la evaluación de la cadena anterior en un objeto $C \in S$ nos proporcionará su torre de Postnikov

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C & & \\
 & & \delta_C^{(n+1)} & & \delta_C^{(0)} & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & \delta_C^{(n)} & & \delta_C^{(1)} & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & \delta_C^{(2)} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \dots & P_{n+1}(C) & \xrightarrow{(\eta_{n+1})_C} & P_n(C) & \xrightarrow{(\eta_n)_C} & \dots & P_2(C) & \xrightarrow{(\eta_2)_C} & P_1(C) & \xrightarrow{(\eta_1)_C} & P_0(C) .
 \end{array} \tag{4}$$

Probaremos que, en nuestros contextos algebraicos, la torre de Postnikov de C determina a C totalmente (no sólo su tipo de homotopía) ya que podremos reconstruir C como el límite del diagrama anterior, cosa que ocurre en el caso topológico sólo para ciertos tipos de espacios.

Una vez determinada la torre de Postnikov universal en S , para obtener la torre de Postnikov de un espacio $X \in T$, calcularemos la torre de Postnikov de su modelo algebraico $\Pi(X) \in S$, aplicaremos entonces el funtor espacio clasificador B a esta torre algebraica y utilizaremos la equivalencia homotópica (débil) $X \sim B\Pi(X)$ para conectar con X ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & B\Pi(X) & & \\
 & & B(\delta_{\Pi(X)}^{(n+1)}) & & B(\delta_{\Pi(X)}^{(0)}) & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & B(\delta_{\Pi(X)}^{(n)}) & & B(\delta_{\Pi(X)}^{(1)}) & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & & B(\delta_{\Pi(X)}^{(2)}) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \dots & BP_{n+1}\Pi(X) & \xrightarrow{B(\eta_{n+1})_{\Pi(X)}} & BP_n\Pi(X) & \xrightarrow{\dots} & BP_1\Pi(X) & \xrightarrow{B(\eta_1)_{\Pi(X)}} & BP_0\Pi(X) .
 \end{array} \tag{5}$$

Recalquemos de nuevo que hemos de hacer una elección de las subcategorías S_n de n -tipos, una vez hecha esta elección podremos determinar si disponemos o no de una torre de Postnikov universal que tenga a éstas como categorías de n -tipos.

Si la respuesta es afirmativa, la construcción de la torre para cada objeto en \mathbf{S} es natural (en sentido categórico).

En los dos contextos en que se desarrolla esta memoria, grupoides simpliciales $\mathbf{S} = \mathbf{Gd}$ y complejos cruzados $\mathbf{S} = \mathbf{Crs}$, las categorías de n -tipos que hemos elegido son, respectivamente:

- la categoría de n -grupoides simpliciales \mathbf{Gd}_n , con objetos aquellos grupoides simpliciales cuyo complejo de Moore es trivial en dimensiones $\geq n$. Esta categoría es equivalente a la categoría de grupoides enriquecidos en la categoría de $(n - 1)$ -hipergrupoides. Así por ejemplo un 1-grupoide simplicial es precisamente un grupoide, un 2-grupoide simplicial es siempre el nervio de un 2-grupoide (esto es, un grupoide enriquecido en la categoría de grupoides o 1-hipergrupoides) y en general un n -grupoide simplicial será siempre el nervio de un grupoide enriquecido en la categoría de $(n - 1)$ -hipergrupoides.
- la categoría \mathbf{Crs}_n de n -complejos cruzados, esto es, complejos cruzados cuyas componentes en dimensiones $\geq n + 1$ son triviales.

Una vez desarrollada la teoría de las torres de Postnikov, pasaremos a obtener los invariantes de Postnikov. La principal diferencia de procedimiento será el que no se dispondrá de un método universal que permita obtener estos invariantes de forma natural.

En el caso topológico clásico (espacios 1-conexos y coeficientes triviales), la obtención de los invariantes de Postnikov pasa primero por una representación de la cohomología de espacios en términos de aplicaciones a espacios de Eilenberg-Mac Lane y después por una interpretación de esta cohomología en términos de fibraciones principales. Las aplicaciones η en la torre de Postnikov de un espacio X serán fibraciones principales que darán lugar a los invariantes del espacio.

En nuestro contexto algebraico tendremos que seguir un procedimiento paralelo. Elegiremos primero una cohomología *algebraica* en la categoría \mathbf{S}_n , si es posible esta cohomología estará asociada a un cotriple. La elección de este cotriple se hará en función de las propiedades de las fibraciones η en la torre de Postnikov universal. Trataremos después de representar esta cohomología en términos de morfismos simpliciales a *objetos* de Eilenberg-Mac Lane, si la cohomología elegida es la de cierto cotriple, utilizaremos los teoremas de representación para dicha cohomología. Pasaremos entonces a interpretar esta cohomología, primero en términos de torsores y luego, en el caso de complejos cruzados, en términos de extensiones. Finalmente, solo quedará asociar a cada fibración η un tisor o una extensión, cuya clase determinará el invariante algebraico correspondiente. Como dato a destacar, observamos que

el contexto en el que estas cohomologías se han elegido en esta memoria nos permite obtener estos invariantes siempre en términos de 2-torsores o 2-extensiones.

Esta reducción no es algo que ocurre de forma particular en este contexto, sino que más bien es consecuencia de lo que podríamos calificar como una regla general tácita y que podríamos vagamente enunciar de la siguiente forma:

Cohomología m -dimensional en una categoría de n -tipos está relacionada con cohomología $(m + n)$ -dimensional en la categoría de todos los tipos.

Así por ejemplo m -cohomología en la categoría de grupoides (o grupos) está relacionada con $(m + 1)$ -cohomología en la categoría de espacios, m -cohomología en 2-grupoides (o módulos cruzados) está relacionada con $(m + 1)$ -cohomología en grupoides y ésta con $(m + 2)$ -cohomología de espacios y así sucesivamente.

Estas relaciones nos permitirán obtener, a partir de los que llamaremos “*invariantes algebraicos*” y que vivirán siempre en una 2-cohomología, los invariantes que llamaremos topológicos y que vivirán en una $(n + 2)$ -cohomología. Nos parece que este hecho explica en cierto modo el juego de índices para los invariantes de Postnikov en la teoría clásica.

Hemos podido concretar esta relación sólo en el contexto de complejos cruzados y el esfuerzo invertido en ésto ha sido considerable. Una vez establecida esta relación podremos pasar de los invariantes algebraicos a los topológicos y esto nos permitirá recuperar los invariantes de Postnikov clásicos de cualquier espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado.

En el contexto de grupoides simpliciales sólo hemos obtenido los invariantes algebraicos, que están dados en términos de 2-torsores y en tales términos está definida la cohomología algebraica que utilizamos. Para que el estudio estuviese completo en este contexto de forma satisfactoria sería suficiente encontrar un cotriple cuya cohomología pudiese ser interpretada en términos de tales torsores y después intentar relacionar dicha cohomología en un n -tipo con la cohomología singular de su espacio clasificador.

Como ya hemos indicado el desarrollo de la teoría de torres de Postnikov en el contexto de complejos cruzados es bastante más simple que el tratamiento de esta teoría en el contexto de grupoides simpliciales. Esta simplicidad se manifiesta de forma especial a la hora de obtener los invariantes de Postnikov. Es casi inmediato obtener 2-extensiones a partir de las fibraciones dadas por las η 's en la torre de Postnikov de un complejo cruzado. No ocurre así en el caso de grupoides simpliciales, en este caso el proceso de obtención de un 2-torsor a partir de una fibración en la torre de Postnikov de un grupoide simplicial es más laborioso. Lo que facilita la obtención de los invariantes de Postnikov en la categoría \mathbf{Crs} es la siguiente propiedad de los funtores truncación T_n :

la n -truncación $T_n(\mathcal{C})$ de un complejo cruzado \mathcal{C} es un n -complejo cruzado que se encaja canónicamente en \mathcal{C} , $T_n(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Esta propiedad no es cierta para grupoides simpliciales, esto es:

no tiene porqué existir una estructura de n -grupoide simplicial en la n -truncación $T_n(\mathcal{G})$, de un grupoide simplicial \mathcal{G} , de forma que se pueda encajar canónicamente $T_n(\mathcal{G})$ en \mathcal{G} .

Esta diferencia en el comportamiento de los funtores truncación en las categorías **Crs** y **Gd** es la que marca las diferencias en la obtención de los invariantes de Postnikov de un complejo cruzado y un grupoide simplicial.

Trasladando resultados de [54] a nuestro contexto podemos decir que:

básicamente los complejos cruzados pueden identificarse con los grupoides simpliciales que admiten una estructura de n -grupoide simplicial en su n -truncación, para todo $n > 1$.

Esta memoria está dividida en cinco capítulos. A continuación damos una breve descripción de los contenidos de cada uno de ellos.

En el primer Capítulo establecemos los conceptos y terminología básica que se utiliza a lo largo de la memoria, de esta forma en este capítulo preliminar aparecen una serie de resultados, unos bien conocidos que pueden encontrarse en la literatura, otros aunque también conocidos, que usualmente no se encuentran de forma explícita en la bibliografía básica y, por último, también establecemos algunos resultados nuevos (sobre todo en la Sección 1.5) que se usarán con frecuencia a lo largo de la memoria. De cualquier forma hemos considerado importante la inclusión en la memoria de este capítulo con el fin de que fuese, en la medida de lo posible, autosuficiente en contenidos.

Después de recordar conceptos básicos de categorías internas y de tripleabilidad, pasamos en este primer Capítulo a hacer un repaso de la terminología simplicial. En la Sección 1.4, sobre Hipergrupoides, observamos cómo la axiomática de grupoide (categoría en la que toda flecha es invertible) puede ser reescrita en términos de una operación corchete

$$[f, g] = f^{-1}g.$$

Con ésta como operación básica *grupoides* son renombrados como *1-hipergrupoides*. Vemos entonces cómo la axiomática para 1-hipergrupoides tiene una fácil extensión a dimensión n simplicial, dando lugar al concepto de n -hipergrupoide. Dedicamos también un espacio en esta sección para recordar la construcción del nervio de una categoría y un hipergrupoide, caracterizándose los objetos simpliciales que son nervios de n -hipergrupoides. Por último caracterizamos también los morfismos simpliciales con codominio el nervio de un n -hipergrupoide y las homotopías entre ellos.

Para terminar este primer Capítulo, en la Sección 1.5, recordamos la definición de colímite homotópico de funtores a conjuntos simpliciales y la descripción alternativa de este concepto debida a Bousfield y Kan [9], dedicando nuestra atención a probar que cuando tomamos funtores desde un grupoide, las categorías de n -hipergrupoides son cerradas para colímites homotópicos (Proposición 1.5.1). Después en la Sección 1.5.2 introducimos los conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados que en el Capítulo 4 usaremos para representar las cohomologías con coeficientes locales, lo que ya aparece publicado en nuestro trabajo [20].

Terminamos esta sección con la introducción de la construcción producto semidirecto de Grothendieck y el estudio de fibraciones plenas y escindidas de grupoides, un estudio paralelo al de epimorfismos escindidos de grupos, en el que se sustituye la construcción de grupo producto semidirecto por la de grupoide producto semidirecto. Notemos que la Proposición 1.5.1 da pie a pensar que el teorema de colímite homotópico de Thomason [66] tiene una extensión al contexto de n -hipergrupoides. *Nos aventuramos a sugerir que puede hacerse una construcción de colímites débiles de funtores a n -hipergrupoides (análoga a la construcción de Grothendieck) de forma que el funtor nervio transforme colímites débiles de funtores desde un grupoide a la categoría de n -hipergrupoides en colímites homotópicos.* Este es un problema al que no hemos dedicado suficiente tiempo y que consideramos como problema abierto.

El objetivo de los Capítulos 2 y 3 es la realización del esquema general para el tratamiento algebraico de la teoría de torres de Postnikov en los contextos de grupoides simpliciales (Capítulo 2) y complejos cruzados (Capítulo 3). Esta realización pasa por un estudio bastante exhaustivo de estas categorías así como por la elección de las subcategorías de n -tipos. Queremos hacer constar que las categorías de grupos simpliciales y de complejos cruzados reducidos están extensamente tratadas en la literatura, no ocurre así con las categorías de grupoides simpliciales y complejos cruzados (sobre un grupoide base en lugar de un grupo) de manera que muchos de los resultados presentados en estos capítulos son traslaciones a estos contextos (no reducidos, más de un objeto) de resultados análogos en los contextos reducidos (un único objeto). Estas traslaciones hay que hacerlas con cuidado (muchas de ellas no son obvias), buscando demostraciones *naturales* que por su naturalidad sean válidas (o trasladables) a un contexto de múltiples objetos.

El segundo Capítulo constituye el desarrollo del esquema general del cálculo de las torres de Postnikov de los modelos algebraicos en el escenario ideal, es decir, en el contexto algebraico que tiene como \mathbf{S} a la categoría de grupoides simpliciales y como \mathbf{T} a la categoría de todos los espacios. Nos ocupamos de presentar la categoría de grupoides simpliciales en las dos primeras secciones del Capítulo para posteriormente en las dos siguientes comprobar que el escenario satisface las condiciones necesarias para aplicar la teoría, dando para terminar tal

desarrollo en la última sección.

De esta forma en la Sección 2.1 presentamos la categoría de grupoides simpliciales \mathbf{Gd} como la categoría de grupoides enriquecidos en la categoría de conjuntos simpliciales \mathbf{SSet} , observando posteriormente como sus objetos pueden ser analizados desde otros dos puntos de vista: como objetos de una subcategoría plena de la categoría de objetos simpliciales sobre la categoría de grupoides y como objetos de una subcategoría plena de la categoría de grupoides internos en \mathbf{SSet} .

En la segunda sección, seguimos presentado construcciones y repasando conceptos que necesitamos de la categoría de grupoides simpliciales como es el complejo de Moore y los grupos de homotopía de un grupoide simplicial. Prestamos especial dedicación a trasladar al contexto de grupoides simpliciales el hecho de que todo grupo simplicial satisface la condición de Kan, lo que se traduce en que los morfismos canónicos K_n^i a las caras abiertas sean sobreyectivos, de hecho en la Proposición 2.2.3 probamos que también todo grupoide simplicial satisface esta última propiedad.

En la Sección 2.3 usamos el funtor nervio de una categoría, introducido en la Sección 1.1, y el funtor diagonal de Artin-Mazur, definido en la Sección 1.3.4, para asociar (como Dwyer y Kan en [29]) un conjunto simplicial a un grupoide simplicial. Definimos así el funtor nervio de un grupoide simplicial y recordamos también cómo actúa su adjunto izquierda, el funtor grupoide de lazos. Dichos funtores fueron usados por Dwyer y Kan para levantar la estructura de modelos de Quillen de \mathbf{SSet} hasta la categoría de grupoides simpliciales. Teniendo en cuenta el comportamiento de dichos funtores respecto a los grupos de homotopía (Proposición 2.3.1), al componer estos funtores con los funtores realización geométrica y complejo singular se obtienen los funtores *espacio clasificador* \mathbf{B} (de un grupoide simplicial) y *grupoide simplicial fundamental* $\mathbf{\Pi}$ (de un espacio) que inducen una equivalencia entre las correspondientes categorías de homotopía, lo que permite asegurar que los grupoides simpliciales son modelos para todos los tipos de homotopía de espacios. Además el funtor \mathbf{B} lleva fibraciones en fibraciones y conserva fibras. Todo esto nos demuestra que la categoría de grupoides simpliciales es un escenario algebraico adecuado para aplicar el esquema que nos permita la construcción de la torre de Postnikov universal.

En la Sección 2.4.1, con la vista puesta en presentar las subcategorías de n -tipos en \mathbf{Gd} , comenzamos considerando la categoría \mathbf{GnH} de grupoides enriquecidos en la categoría de n -hipergrupoides que, vía el funtor nervio, puede verse como una subcategoría de \mathbf{Gd} . Daremos, al igual que se hizo en la Sección 2.1, dos interpretaciones distintas de dicha categoría, primero como una subcategoría plena de la categoría de n -hipergrupoides internos en \mathbf{Gpd} y después como una subcategoría plena de la categoría de grupoides internos en la categoría de n -hipergrupoides.

Posteriormente se introduce la subcategoría \mathbf{Gd}_n de n -tipos de \mathbf{Gd} como aquella formada por los grupoides simpliciales con complejo de Moore trivial en di-

mensión $\geq n$. Observamos la existencia de un isomorfismo entre dicha categoría y la categoría de grupoides enriquecidos en la categoría de $(n - 1)$ -hipergrupoides que se acaba de introducir, de manera que todo n -tipo es el nervio de un grupoide enriquecido en $(n - 1)$ -hipergrupoides. A continuación se presenta un ejemplo de grupoide simplicial n -dimensional, análogo al de los n -hipergrupoides $K(\Pi, n)$. Finalmente se hace un traspaso de los resultados probados por Conduché en [25], sobre grupos simpliciales con complejo de Moore trivial a partir de cierta dimensión, a grupoides simpliciales. Sacando además algunas consecuencias extra.

Veremos entonces que los funtores inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \rightarrow \mathbf{Gd}$ tienen adjunto izquierda, \tilde{P}_n , que la imagen por el funtor clasificador \mathbf{B} de la unidad de la adjunción induce isomorfismos en los grupos de homotopía, y comprobaremos que se satisfacen las condiciones (1),(2) y (3). Probaremos entonces el principal teorema de este Capítulo, Teorema 2.5.7, que nos da la torre de Postnikov de un grupoide simplicial.

En la Sección 2.6 se prueban algunos lemas técnicos que se usan a la hora de construir los invariantes de Postnikov de un grupoide simplicial en la Sección 5.2.1. Acabamos el Capítulo deduciendo, en la Sección 2.7, la torre de Postnikov de un espacio X a partir de la torre de su grupoide simplicial fundamental $\Pi(X)$.

En el Capítulo 3, se hace un estudio paralelo al desarrollado en el Capítulo anterior aunque en un escenario más simple. De hecho, construimos la torre de Postnikov tomando como escenario la categoría de complejos cruzados \mathbf{Crs} . Este fue el escenario donde primero pudimos hacer la traslación completa construyendo no sólo la torre de Postnikov sino también los invariantes. Aunque como es sabido, dicha categoría no modela todos los tipos de homotopía, los resultados que se obtiene en este caso particular ilustran los métodos algebraicos para hallar la torre de Postnikov de un espacio en un contexto donde los cálculos no son de gran dificultad. Esto compensa la limitación de que en este contexto sólo podemos calcular la torre de Postnikov de un espacio que tenga el mismo tipo de homotopía que un complejo cruzado.

En la Sección 3.1, damos la definición y estudiamos las principales propiedades de los módulos cruzados, concepto en el que se basa la definición de complejo cruzado. Todos los resultados de esta sección pueden encontrarse en la literatura, sólo que se presentan en una manera ligeramente no convencional con un énfasis en el aspecto funtorial de las definiciones. Comenzamos introduciendo un módulo cruzado como un pre-módulo cruzado que además satisface la condición de Peiffer. Además se da explícitamente la equivalencia entre la categoría de módulos cruzados y la categoría de grupoides enriquecidos en 1-hipergrupoides (2-grupoides) y como consecuencia se prueba un isomorfismo entre la categoría de módulos cruzados y la categoría de grupoides simpliciales \mathbf{Gd}_2 lo cual permite definir el nervio de un módulo cruzado. Para terminar la sección se prueba que la categoría de módulos cruzados es una categoría de álgebras sobre la categoría \mathbf{AGpd} de “flechas a

grupoides”, lo que nos permitirá en el Capítulo 4 considerar una cohomología del cotriple en \mathbf{Xm} . Será en esta cohomología donde vivirá el tercer invariante de Postnikov algebraico asociado a un complejo cruzado.

La Sección 3.2 está dedicada a introducir la categoría de complejos cruzados y desarrollar en ella las herramientas necesarias para la construcción de la torre de Postnikov universal. La definición que damos de complejo cruzado no es en absoluto convencional y puede parecer extraña a un especialista en la materia. Hemos adoptado como concepto básico para definir un complejo cruzado el de módulo cruzado, en lugar de grupoide como es costumbre. Esta elección produce una reducción de la complejidad. Al ser el concepto de módulo cruzado (base para nuestra definición) más rico que el de grupoide (base para la definición clásica) la definición de complejo cruzado que aquí adoptamos parece más simple (aparecen menos axiomas) que la clásica. Pensamos que el ver un complejo cruzado como un complejo de módulos cruzados en lugar de como un complejo de grupoides con estructura adicional facilita el tratamiento de estos objetos y nos permite razonamientos y demostraciones más simples y claras.

Después de recordar la definición de los grupos de homotopía de un complejo cruzado, observaremos la existencia de *funtores complejo cruzado fundamental* $\mathbf{\Pi}$ y *espacio clasificador* \mathbf{B} , fijaremos las subcategorías \mathbf{Crs}_n de n -tipos en \mathbf{Crs} (Sección 3.2.2), identificando las dimensiones bajas con categorías conocidas como $\mathbf{Crs}_0 = \mathbf{Set}$, $\mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd}$ y $\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm}$ y viendo que la inclusión $i_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}$ es reflexiva. Terminamos esta sección comprobando que la categoría de n -tipos \mathbf{Crs}_n es una categoría de álgebras sobre la categoría \mathbf{ACrs}_{n-1} de “flechas a $(n-1)$ -complejos cruzados”. Esto generaliza lo visto en la sección anterior para la categoría de módulos cruzados y nos permitirá considerar también en estas categorías \mathbf{Crs}_n una cohomología del cotriple en la que vivirán los invariantes de Postnikov algebraicos de un complejo cruzado.

Dedicamos la Sección 3.3 a construir la torre de Postnikov universal de un complejo cruzado. Para ello primero comprobamos que los funtores inclusión $i_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}$ y sus reflectores satisfacen las identidades (1),(2) y (3), con lo cual podemos probar el principal teorema de este Capítulo, Teorema 3.3.5, que nos proporciona la torre de Postnikov de cualquier complejo cruzado.

En la Sección 3.4 introducimos algunos funtores que usaremos más adelante y extendemos los resultados probados en la Proposición 3.1.9 al contexto de n -complejos cruzados mostrando que las categorías de n -complejos cruzados son equivalentes a una subcategoría plena de la categoría de grupoides internos en la categoría de $(n-1)$ -complejos cruzados. Dedicamos la última sección del Capítulo a deducir la torre de Postnikov de un espacio X con tipo de homotopía de un complejo cruzado a partir de la torre de su complejo cruzado fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$.

La segunda parte de esta memoria que comprende los dos últimos Capítulos está dedicada a la obtención de los k -invariantes de Postnikov: los invariantes

algebraicos y los topológicos. Teniendo en cuenta que ambos tipos de invariantes son elementos de ciertas cohomologías, los primeros de una cohomología algebraica definida en las categorías de n -tipos algebraicos (en nuestros casos particulares \mathbf{Crs}_n y \mathbf{Gd}_n) y los segundos en una cohomología singular de espacios que son n -tipos, dedicamos el Capítulo 4 a hacer un repaso sobre las diferentes cohomologías que vamos a utilizar, dando al final un morfismo que nos conecte la cohomología algebraica con la cohomología singular (en el caso de complejos cruzados). Dichos morfismos serán los que nos permitan obtener los k -invariantes topológicos a partir de los algebraicos.

La principal diferencia con la teoría de torres de Postnikov clásica es el uso de sistemas de coeficientes locales, en lugar de coeficientes triviales. Este uso además de facilitarnos el tratamiento universal que damos a esta teoría nos permitirá evitar condiciones del tipo 1-conexión o nilpotencia sobre los espacios a los que podremos calcular los invariantes.

En la Sección 4.1 hacemos un repaso de la cohomología singular y representamos esta cohomología en términos de aplicaciones simpliciales a espacios de Eilenberg-Mac Lane generalizados (Teorema 4.1.6). Terminamos esta sección particularizando los resultados a la cohomología singular de complejos cruzados con coeficientes locales.

Dedicamos la Sección 4.2 a la cohomología del cotriple, comenzamos con una exposición rápida de la cohomología del cotriple recordando el teorema de representación de Duskin para esta cohomología. En 4.2.1 reformulamos el concepto de 2-torsor de Duskin, tomando como base para su definición la noción de grupoide fibra y también recordamos la interpretación del segundo grupo de cohomología del cotriple en términos de 2-torsores. A continuación particularizamos tanto la cohomología del cotriple como el concepto de 2-torsor al contexto de la categoría de n -tipos de complejos cruzados. Primero introducimos los sistemas de coeficientes que usaremos para estas cohomologías y después particularizaremos los teoremas de representación e interpretación de la cohomología del cotriple a las categorías \mathbf{Crs}_n . Con lo anterior tenemos el camino preparado para, en la siguiente Sección 4.2.4, dar una nueva interpretación de dichos grupos de cohomología ahora en términos de extensiones.

El desarrollo de la Sección 4.3 ha representado un gran esfuerzo, esta sección está dominada por la idea que presentamos en la página xii como “*regla general tácita*”. Tratamos aquí de representar la cohomología singular de un espacio (o un conjunto simplicial) no en la categoría \mathbf{SSet} (de objetos simpliciales en la categoría \mathbf{Set} de 0-tipos) sino en la categoría \mathbf{SCrs}_n (de objetos simpliciales en la categoría \mathbf{Crs}_n de n -tipos). Obsérvese el juego de índices en los teoremas de representación. Estos teoremas de representación nos proporcionarán los que hemos llamado morfismos de conexión, que nos relacionan las cohomologías algebraicas (asociadas a los cotriples) con la cohomología singular. Vemos en el juego de índices para es-

tos morfismos cierta explicación para el juego de índices que aparece en la teoría clásica,

$$\mathbf{k}_{n+1} \in H^{n+2}(X_n, \pi_{n+1}(\mathbf{X})).$$

En la última sección del Capítulo 4 se presentan las cohomologías con las que trabajamos en el contexto de grupoides simpliciales como es la cohomología singular de un grupoide simplicial y cierta cohomología algebraica con coeficientes locales definida en términos de 2-torsores. Lamentamos no haber podido dar morfismos que nos conecten estas cohomologías, este es un problema aún abierto que dejamos planteado.

El Capítulo 5 aborda el problema del cálculo de los invariantes de Postnikov tanto de los invariantes algebraicos como los topológicos. Todo el trabajo previo hace de éste un trabajo casi trivial. En el contexto de complejos cruzados, vemos como cada fibración η en la torre de Postnikov de un complejo cruzado da lugar a una 2-extensión la cual determinará el invariante de Postnikov algebraico correspondiente. Una vez obtenidos los invariantes algebraicos, los morfismos de conexión nos proporcionarán los invariantes topológicos.

Como ya hemos comentado, el caso de grupoides simpliciales es algo más complejo. Las fibraciones en la torre de Postnikov de un grupoide simplicial no dan de forma tan inmediata, como en el caso de complejos cruzados, un 2-torsor y así un invariante algebraico. En la obtención de estos invariantes algebraicos hemos ido utilizando, paso a paso, la mayor parte de los resultados sobre grupoides simpliciales que hemos desarrollado. Sin embargo, como hemos dicho, no hemos podido, aún, obtener unos invariantes topológicos (en cohomologías singulares de los espacios clasificadores) a partir de estos invariantes algebraicos.

Una puntualización sobre la notación

A lo largo de esta memoria hemos distinguido la naturaleza de los objetos utilizando distintas tipografías para nombrarlos y para ello hemos intentado seguir el siguiente criterio:

Utilizaremos el tipo de letra “negrita” para nombrar objetos que están formados por familias cuyos elementos serán nombrados por el mismo tipo de letra pero sin resaltar en negrita. Así por ejemplo:

- Usaremos \mathbf{X} para nombrar a un conjunto simplicial cuyo conjunto de n -símplices será nombrado X_n .
- Usaremos \mathcal{G} para nombrar a un grupoide simplicial cuyo grupoide de n -símplices será nombrado \mathcal{G}_n .

- Usaremos \mathcal{C} para nombrar a un complejo cruzado cuyo módulo cruzado en dimensión n será nombrado \mathcal{C}_n .

Es difícil seguir este criterio cuando los objetos están formados por familias cuyos elementos están a su vez formados por familias. Por ejemplo un conjunto simplicial doble ha sido notado por \mathbb{X} , su conjunto simplicial horizontal (vertical) de n -símplices por \mathbf{X}_n^h (\mathbf{X}_n^v) y su conjunto de (p, q) -símplices como $X_{p,q}$. Sin embargo en este caso la regla tiene sus excepciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se realiza una exposición de las nociones y resultados estándar con los que trabajaremos, y a la vez, se introduce la notación que vamos a utilizar a lo largo de esta memoria.

En toda esta memoria cuando nos refiramos a una categoría base \mathcal{E} , ésta será una categoría *suficientemente buena*, en la que por ejemplo supondremos la existencia de límites finitos y coigualadores de pares núcleos. Cuando hablemos de elementos de un objeto de \mathcal{E} entenderemos elementos de Yoneda.

1.1 Categorías y grupoides internos en una categoría base

Una categoría pequeña o categoría interna en la categoría de conjuntos es una categoría en la que la colección de todos los objetos constituye un conjunto. Ésto implica que la colección de todas las flechas también constituye un conjunto. El concepto de categoría pequeña puede definirse mediante axiomas de primer orden en términos de conjuntos, aplicaciones y composición de aplicaciones. Si en esos axiomas se sustituye la palabra *conjunto* por “objeto de \mathcal{E} ”, *elemento* por “elemento de Yoneda” y *par componible* por “elemento de un pullback”, se obtienen los axiomas que definen el concepto de categoría interna en \mathcal{E} : Una *categoría interna* \mathcal{C} en \mathcal{E} consiste en los siguientes datos:

- un objeto $O \in \mathcal{E}$, cuyos elementos de Yoneda son llamados *objetos* de \mathcal{C} ,
- un objeto $A \in \mathcal{E}$, cuyos elementos de Yoneda son llamados *flechas* de \mathcal{C} ,
- los siguientes cuatro morfismos en \mathcal{E} :
 - morfismos dominio y codominio $s, t : A \rightarrow O$,
 - morfismo identidad $id : O \rightarrow A$, y

- morfismo composición $c : A \times_O A \rightarrow A$, donde $A \times_O A = \text{pbk}(t, s)$ es el objeto pullback del diagrama $A \xrightarrow{t} O \xleftarrow{s} A$, u objeto de pares $(f, g) \in A \times A$ tales que $t(f) = s(g)$.

sujetos a los siguientes axiomas, que no son más que los axiomas de categorías pequeñas expresados en términos de Yoneda:

1. **Axiomas de intendencia:**

- (a) Cada objeto de \mathcal{C} , $x \in O$, es tanto el dominio como el codominio de su identidad, es decir,

$$s(\text{id}(x)) = x = t(\text{id}(x)),$$

- (b) El dominio y codominio de una composición son respectivamente el dominio de la primera componente y el codominio de la segunda, es decir, para cada par componible $(f, g) \in A \times_O A$,

$$s(c(f, g)) = s(f) \quad \text{y} \quad t(c(f, g)) = t(g),$$

2. **Identities:** La identidad de cualquier objeto $x \in O$ es neutro por la derecha y por la izquierda. Dicho de otra forma, cualquier flecha $f \in A$ se puede componer con la identidad de su dominio y con la identidad de su codominio y el resultado siempre es f , es decir,

$$c(\text{id}(s(f)), f) = f = c(f, \text{id}(t(f))).$$

3. **Asociatividad:** Para cualquier terna componible, $(f, g, h) \in A \times_O A \times_O A$

$$c(c(f, g), h) = c(f, c(g, h)).$$

En ocasiones es más útil expresar estos axiomas como diagramas conmutativos o ecuaciones de flechas en \mathcal{E} , en cuyo caso toman esta forma:

1. **Axiomas de intendencia:**

- (a) La flecha id es una sección común a s y t , es decir,

$$s \text{id} = 1_O = t \text{id},$$

(b) Si $p_1, p_2 : A \times_O A \rightarrow A$ son las dos proyecciones canónicas

$$s c = s p_1 \quad \text{y} \quad t c = t p_2,$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_O A & \xrightarrow{c} & A \\ p_1 \downarrow & & \downarrow s \\ O & \xrightarrow{s} & O \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} A \times_O A & \xrightarrow{c} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow t \\ O & \xrightarrow{t} & O. \end{array}$$

2. **Identities:**

$$c(id s, 1_A) = 1_A = c(1_A, id t),$$

$$\begin{array}{ccccc} A \times_O A & \xleftarrow{(id s, 1_A)} & A & \xrightarrow{(1_A, id t)} & A \times_O A \\ & \searrow c & \parallel & \swarrow c & \\ & & A & & \end{array}$$

3. **Asociatividad:**

$$c(c, 1_A) = c(1_A, c),$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_O A \times_O A & \xrightarrow{(c, 1_A)} & A \\ (1_A, c) \downarrow & & \downarrow c \\ A \times_O A & \xrightarrow{c} & A. \end{array}$$

Representaremos a una categoría interna \mathcal{C} en \mathcal{E} mediante un diagrama

$$\mathcal{C} : A \times_O A \xrightarrow{c} A \begin{array}{l} \xleftarrow{id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} O, \quad (1.1)$$

o simplemente, mediante $\mathcal{C} : A \rightrightarrows O$.

Un *funtor interno* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, entre categorías internas, consiste en un par de morfismos $F_0 : O \rightarrow O'$ y $F_1 : A \rightarrow A'$ en \mathcal{E} que hacen conmutativos los diagramas obvios con s, t, id y tal que $F_1(g f) = F_1(g)F_1(f)$ para cada par $(f, g) \in A \times_O A$,

$$\begin{array}{ccccc} A \times_O A & \xrightarrow{c} & A & \begin{array}{l} \xleftarrow{id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} & O \\ F_1 \times F_1 \downarrow & & \downarrow F_1 & & \downarrow F_0 \\ A' \times_{O'} A' & \xrightarrow{c'} & A' & \begin{array}{l} \xleftarrow{id'} \\ \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \\ \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \\ \xrightarrow{s'} \end{array} & O'. \end{array}$$

La categoría de categorías y funtores internos en \mathcal{E} la denotaremos $\mathbf{Cat}(\mathcal{E})$.

Dada la categoría interna en \mathcal{E} (1.1) se puede construir un objeto A_{iso} en \mathcal{E} llamado el *objeto de pares de isomorfía de \mathcal{C}* , definido como el objeto de aquellos pares componibles $(f, g) \in A \times_O A$ tales que:

1. $(g, f) \in A \times_O A$,
2. $c(f, g) = id(s(f))$,
3. $c(g, f) = id(s(g))$.

Este objeto verifica las siguientes propiedades:

1. Cada elemento de un par de isomorfía determina al otro, es decir, las proyecciones canónicas $A_{\text{iso}} \rightrightarrows A$ son monomorfismos. Elegimos la primera proyección, que denotamos $j : A_{\text{iso}} \hookrightarrow A$ para referirnos a A_{iso} como subobjeto de A .
2. Todas las identidades de \mathcal{C} están en A_{iso} . Es decir: existe una inclusión $id' : O \hookrightarrow A_{\text{iso}}$ cuya composición con $j : A_{\text{iso}} \hookrightarrow A$ es el morfismo de identidades id .
3. La composición de elementos de A_{iso} da como resultado otro elemento de A_{iso} .

Como consecuencia de ello el diagrama

$$A_{\text{iso}} \times_O A_{\text{iso}} \xrightarrow{c'} A_{\text{iso}} \begin{array}{c} \xleftarrow{id'} \\ \xrightarrow{t'} \\ \xrightarrow{s'} \end{array} O, \quad (1.2)$$

donde s' , t' , y c' son las restricciones obvias de s , t a A_{iso} y de c a $A_{\text{iso}} \times_O A_{\text{iso}}$, determina una categoría denotada $\text{Iso}(\mathcal{C})$ que se llama la *categoría de isomorfismos de \mathcal{C}* . El par de flechas $j : A_{\text{iso}} \rightarrow A$, $1_O : O \rightarrow O$ define un funtor interno $J : \text{Iso}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ que prueba que $\text{Iso}(\mathcal{C})$ es una subcategoría interna de \mathcal{C} .

Un *grupoide interno* en \mathcal{E} es una categoría interna en \mathcal{E} , \mathcal{C} , tal que $\text{Iso}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Para todo funtor interno $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, entre categorías internas en \mathcal{E} , la restricción de la componente de flechas $F_1 : A \rightarrow A'$ al objeto de isomorfismos A_{iso} de \mathcal{C} se factoriza por el correspondiente objeto de isomorfismos A'_{iso} de \mathcal{C}' . En consecuencia la construcción de la categoría interna de isomorfismos realmente proporciona la función de objetos de un endofuntor $\text{Iso} : \mathbf{Cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{E})$. Se puede comprobar que este funtor es idempotente ($\text{Iso}^2 = \text{Iso}$) y por lo tanto, para toda categoría interna, \mathcal{C} , $\text{Iso}(\mathcal{C})$ es un grupoide interno en \mathcal{E} .

Denotaremos por $\mathbf{Gpd}(\mathcal{E})$ a la subcategoría plena de $\mathbf{Cat}(\mathcal{E})$ con los grupoides internos como objetos.

En el caso de tomar $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$, escribiremos \mathbf{Cat} y \mathbf{Gpd} en lugar de $\mathbf{Cat}(\mathbf{Set})$ y $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Set})$, respectivamente.

Veamos ahora algunas definiciones y construcciones en la categoría de grupoides que necesitaremos a lo largo de esta memoria.

Dado un grupoide interno en \mathcal{E} ,

$$\mathcal{G} : A \times_O A \xrightarrow{c} A \begin{array}{c} \xleftarrow{id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} O, \quad (1.3)$$

el *objeto de componentes conexas* de \mathcal{G} , $\pi_0(\mathcal{G})$, se define como el coigualador del par de flechas dominio s y codominio t , esto es, $\pi_0(\mathcal{G}) = \text{coeq}(s, t)$. Diremos que dos objetos x, y de \mathcal{G} están en la misma componente conexa si determinan el mismo elemento de $\pi_0(\mathcal{G})$.

Dado un funtor entre grupoides internos $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, $\pi_0(F)$ es la aplicación inducida obvia, por lo que tenemos un funtor $\pi_0 : \mathbf{Gpd}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Diremos que \mathcal{G} es *un grupoide sobre T* si $\pi_0(\mathcal{G}) = T$.

Si $\pi_0(\mathcal{G})$ es el objeto terminal de \mathcal{E} diremos que \mathcal{G} es un *grupoide conexo* y, si por el contrario, $\pi_0(\mathcal{G}) = O$ diremos que \mathcal{G} es un *grupoide totalmente desconexo*, en cuyo caso todo morfismo de \mathcal{G} será un endomorfismo. Usaremos la siguiente notación:

- $\mathbf{TdGpd}(\mathcal{E})$ será la subcategoría plena de $\mathbf{Gpd}(\mathcal{E})$ con objetos los grupoides totalmente desconexos.
- Para cada objeto $O \in \mathcal{E}$, $\mathbf{TdGpd}_O(\mathcal{E})$ será la subcategoría de $\mathbf{TdGpd}(\mathcal{E})$ cuyos objetos son los grupoides totalmente desconexos que tienen a O como objeto de objetos, y cuyas flechas son funtores que son la identidad sobre objetos.

Por otro lado, dado un grupoide \mathcal{G} , denotaremos $\text{End}(\mathcal{G})$ al igualador del par de flechas s, t ,

$$\text{End}(\mathcal{G}) = \text{eq}(s, t) \hookrightarrow A \rightrightarrows O.$$

Es claro que la composición en \mathcal{G} restringe a una composición en $\text{End}(\mathcal{G})$, de manera que $s = t : \text{End}(\mathcal{G}) \rightarrow O$ tiene una estructura de grupoide totalmente desconexo, que denotaremos $\mathbf{End}(\mathcal{G})$. Dado $x \in {}^T O$, un objeto de \mathcal{G} , denotaremos $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ a la fibra de $\text{End}(\mathcal{G})$ en x , esto es, el objeto pullback

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{\mathcal{G}}(x) & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow x \\ \text{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{s=t} & O. \end{array}$$

Claramente $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ es un grupo interno en \mathcal{E}/T .

El grupoide totalmente desconexo $\mathbf{End}(\mathcal{G})$ tiene además una estructura adicional de \mathcal{G} -grupo interno en \mathcal{E} , de la que es un ejemplo básico. Recordemos que un \mathcal{G} -grupo interno en \mathcal{E} consta de un grupoide totalmente desconexo $\mathcal{H} : H \xrightarrow{s=t} O$ sobre los objetos de \mathcal{G} , junto con una acción de \mathcal{G} sobre \mathcal{H} , esto es, un morfismo

$$a : A \times_O H \longrightarrow H; (f, h) \mapsto a(f, h) = {}^f h,$$

donde $A \times_O H$ es el objeto pullback del diagrama $A \xrightarrow{s} O \xleftarrow{s} H$, satisfaciendo los axiomas usuales de acción de grupos. En términos de diagramas, éstos se expresarían con la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A \times_O H & \xrightarrow{a} & H \\ pr \downarrow & & \downarrow s=t \\ A & \xrightarrow{t} & O \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} O \times_O H & \xrightarrow{id \times 1} & A \times_O H \\ & \searrow pr & \downarrow a \\ & & H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_O A \times_O H & \xrightarrow{1 \times a} & A \times_O H \\ c \times 1 \downarrow & & \downarrow a \\ A \times_O H & \xrightarrow{a} & H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_O O & \xrightarrow{1 \times id} & A \times_O H \\ & \searrow pr(1 \times id) & \downarrow a \\ & & H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times_O H \times_O H & \xrightarrow{1 \times c} & A \times_O H \\ a \times a \downarrow & & \downarrow a \\ H \times_O H & \xrightarrow{c} & H \end{array}$$

donde pr indica proyección al correspondiente factor y c es el morfismo composición de \mathcal{G} o \mathcal{H} indistintamente.

Notemos que un elemento de $A \times_O H$ sobre T es un par de flechas $(f : T \rightarrow A, h : T \rightarrow H)$ tal que $s(f) = s(h)$, así los axiomas anteriores en términos de elementos se expresan cómo sigue:

1. $s({}^f h) = t(f)$,
2. $id(s(h))h = h$,
3. $g({}^f h) = g^f h$,
4. ${}^f id(s(f)) = id(t(f))$, y
5. ${}^f(h'h) = {}^f h' {}^f h$,

para todo $h, h' : T \rightarrow H$ y $f, g : T \rightarrow A$ tal que $s(f) = s(h) = s(h')$ y $t(f) = s(g)$.

Un *morfismo de \mathcal{G} -grupos internos* $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ es un funtor interno equivariante, esto es, que respeta la acción o lo que es igual tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \times_O H & \xrightarrow{1 \times F} & A \times_O H' \\ a \downarrow & & \downarrow a' \\ H & \xrightarrow{F} & H'. \end{array}$$

En términos de elementos, esto se expresa mediante la ecuación:

$$F({}^f h) = {}^f F(h),$$

cierta para todo elemento h de H y f de A tal que $s(f) = s(h)$.

La categoría de \mathcal{G} -grupos internos y morfismos entre ellos la denotamos por $\mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$. En el caso de que \mathcal{E} sea la categoría de conjuntos, escribiremos simplemente $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$. Esta categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ es precisamente la categoría de funtores de \mathcal{G} en \mathbf{Gp} .

Un primer ejemplo de \mathcal{G} -grupo interno en \mathcal{E} está dado por $\mathbf{End}(\mathcal{G})$ con la acción dada por conjugación en \mathcal{G} , esto es:

$$a : A \times_O \mathbf{End}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{End}(\mathcal{G}); (f, u) \mapsto a(f, u) = {}^f u = f u f^{-1},$$

a este \mathcal{G} -grupo lo llamaremos *grupo de endomorfismos* de \mathcal{G} .

Otro \mathcal{G} -grupo importante es el objeto cero en $\mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$, que denotaremos por $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$. Este \mathcal{G} -grupo está dado por el grupoides discreto \mathcal{O} con O como objeto de objetos, con acción trivial.

Notemos ahora que cualquier funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ induce un funtor $F^* : \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}'} \rightarrow \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$.

La siguiente proposición es clara:

Proposición 1.1.1. *Para cada objeto $O \in \mathcal{E}$ las siguientes categorías son isomorfas:*

- La categoría $\mathbf{TdGpd}_O(\mathcal{E})$, de grupoides totalmente desconexos con objeto de objetos O ,
- la categoría $\mathbf{Gp}(\mathcal{E}/O)$, de grupos internos en la categoría coma \mathcal{E}/O y
- la categoría $\mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{O}}$, de \mathcal{O} -grupos internos (donde \mathcal{O} es la categoría discreta con objeto de objetos O).

Todo funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ induce un morfismo de \mathcal{G} -grupos

$$\mathbf{End}(F) : \mathbf{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}'} F,$$

donde el \mathcal{G} -grupo $\mathbf{End}_{\mathcal{G}'} F$ asocia cada objeto x de \mathcal{G} a la fibra $\mathbf{End}_{\mathcal{G}'}(F(x))$. Además, en caso de ser $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ se tiene:

Proposición 1.1.2. *Sea \mathcal{G} y \mathcal{G}' grupoides (en conjuntos) y $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ un funtor entre ellos. Entonces F es una equivalencia de categoría si, y solo si, $\pi_0(F)$ es biyectiva y $\mathbf{End}(F)$ es una equivalencia natural.*

De forma análoga a como hemos hecho para definir \mathcal{G} -grupo interno, podemos dar el concepto de \mathcal{G} -módulo interno, o \mathcal{G} -grupo interno abeliano, bastará con sustituir grupo por grupo abeliano. Obtenemos así la categoría $\mathbf{Ab}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$, de \mathcal{G} -módulos internos en \mathcal{E} , como una subcategoría plena de $\mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$. Si tomamos \mathcal{E} como la categoría de conjuntos, denotaremos simplemente por $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ a la categoría de \mathcal{G} -módulos internos en \mathbf{Set} .

Por otra parte, tenemos un funtor olvido obvio

$$\widehat{(\)} : \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{TdGpd}(\mathcal{E})$$

de la categoría de \mathcal{G} -grupos a la categoría de grupoides totalmente desconexos. Observamos como este funtor tiene su imagen contenida en $\mathbf{TdGpd}_{\mathbf{obj}(\mathcal{G})}$, por lo que lo podemos considerar como funtor

$$\widehat{(\)} : \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{TdGpd}_{\mathbf{obj}(\mathcal{G})}(\mathcal{E}).$$

Este funtor refleja objetos cero y aplicaciones cero, por tanto solo el objeto cero es aplicado al objeto cero y \widehat{F} es la aplicación cero si y sólo si F es la aplicación cero.

Como consecuencia, una cadena

$$\cdots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

en $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ es un complejo de cadenas (sucesión exacta) si y sólo si su imagen

$$\cdots \rightarrow \widehat{C}_n \rightarrow \widehat{C}_{n-1} \rightarrow \cdots$$

es un complejo de cadenas (sucesión exacta) en $\mathbf{TdGpd}_{\mathbf{obj}(\mathcal{G})}$.

Otro concepto que necesitaremos es el de subgrupoide normal y el de grupoide cociente que repasamos a continuación.

Diremos que un subgrupoide \mathcal{H} de un grupoide \mathcal{G} es un *subgrupoide normal* si:

- (i) \mathcal{H} contiene a todas las identidades, es decir, $\mathbf{obj}(\mathcal{H}) = \mathbf{obj}(\mathcal{G})$.
- (ii) Para cada morfismo $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} y cada $g \in \mathbf{End}_{\mathcal{H}}(x)$, el morfismo $fgf^{-1} \in \mathbf{End}_{\mathcal{H}}(y)$.

Dados dos grupoides $\mathcal{G} : A \rightrightarrows O$ y $\mathcal{G}' : A' \rightrightarrows O'$ y un funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, un ejemplo de subgrupoide normal de \mathcal{G} es el subgrupoide $\ker(F)$, que se obtiene

como el objeto pullback en $\mathbf{Gpd}(\mathcal{E})$,

$$\begin{array}{ccc} \ker(F) & \longrightarrow & \mathcal{O}' \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{F} & \mathcal{G}', \end{array} \quad (1.4)$$

donde \mathcal{O}' es el grupoide discreto que tiene como objeto de objetos a \mathcal{O}' y $\sigma : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{G}'$ es el morfismo de grupoides canónico que es la identidad sobre objetos y actúa como id' sobre flechas.

Tal grupoide $\ker(F)$ tiene como objeto de objetos a \mathcal{O} y su objeto de flechas es el subobjeto del objeto de flechas A de \mathcal{G} cuyos elementos son aquellas flechas $f \in A$ tales que $F(f)$ es una identidad en \mathcal{G}' .

Sea $\mathcal{G} : A \rightrightarrows \mathcal{O}$ un grupoide interno en \mathcal{E} y $\mathcal{H} : A' \rightrightarrows \mathcal{O}$ un subgrupoide normal suyo. El *grupoide cociente* \mathcal{G}/\mathcal{H} de \mathcal{G} por el subgrupoide normal \mathcal{H} viene dado cómo sigue:

- El objeto \mathcal{O}'' de objetos del grupoide cociente \mathcal{G}/\mathcal{H} es $\pi_0(\mathcal{H})$, el coigualador de $s, t : A' \rightarrow \mathcal{O}$,

$$A' \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \mathcal{O} \xrightarrow{p_0} \pi_0(\mathcal{H}) = \mathcal{O}''.$$

- El objeto A'' de morfismos del grupoide cociente es el siguiente coigualador

$$A' \times_{\mathcal{O}} A \times_{\mathcal{O}} A' \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{p}_1} \\ \xrightarrow{\bar{p}_0} \end{array} A \xrightarrow{p_1} \text{coeq}(\bar{p}_0, \bar{p}_1) = A'',$$

donde $A' \times_{\mathcal{O}} A \times_{\mathcal{O}} A'$ es el objeto pullback cuyos elementos son ternas $(h, g, h') \in A' \times A \times A'$, tales que $t(h) = s(g)$ y $t(g) = s(h')$ y los morfismos \bar{p}_0 y \bar{p}_1 están dados por $\bar{p}_0(h, g, h') = h' g h$ y $\bar{p}_1(h, g, h') = g$. En otras palabras dos flechas g y g' en \mathcal{G} determinan la misma flecha en el cociente \mathcal{G}/\mathcal{H} si y solo si existen flechas $h, h' \in \mathcal{H}$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & y \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ x' & \xrightarrow{g'} & y'. \end{array}$$

Tenemos así un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{p_1} & A'' \\ & \searrow s & \downarrow s & \downarrow t & \downarrow id \\ & & \mathcal{O} & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{O}'' \\ & \swarrow id & & & \downarrow id \\ & & & & \mathcal{O}'' \end{array}$$

- Teniendo en cuenta que los morfismos $p_0 s, p_0 t : A \rightarrow O''$ coigualan a \bar{p}_0 y \bar{p}_1 , podemos asegurar la existencia de dos únicos morfismos $s, t : A'' \rightarrow O''$ de forma que $s p_1 = p_0 s$ y $t p_1 = p_0 t$. Por otra parte, el morfismo $p_1 id : O \rightarrow A''$ coiguala a los morfismos $s, t : A' \rightarrow O$, luego existe un único morfismo $id : O'' \rightarrow A''$ tal que $p_1 id = id p_0$.
- Veamos ahora cómo se define el morfismo composición del grupoide cociente. Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (A' \times_O A \times_O A') \times_O (A' \times_O A \times_O A') & \xrightarrow[q_0]{q_1} & A \times_O A \xrightarrow{p_1 \times p_1} A'' \times_{O''} A'' \\
 & & \downarrow c \qquad \qquad \qquad \downarrow \exists! c \\
 & & A \xrightarrow{p_1} A''
 \end{array}$$

donde los elementos de $(A' \times_O A \times_O A') \times_O (A' \times_O A \times_O A')$ serán de la forma

$$((h_1, g_1, h'_1), (h_2, g_2, h'_2)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} t(h_1) = s(g_1), \\ t(g_1) = s(h'_1), \\ t(h'_1) = s(h_2), \\ t(h_2) = s(g_2), \\ t(g_2) = s(h'_2), \\ t(h'_2) = s(g_1), \end{cases}$$

y los morfismos q_0, q_1 vienen dados por

$$\begin{aligned}
 q_0((h_1, g_1, h'_1), (h_2, g_2, h'_2)) &= (h'_1 g_1 h_1, h'_2 g_2 h_2) \\
 q_1((h_1, g_1, h'_1), (h_2, g_2, h'_2)) &= (g_1, g_2).
 \end{aligned}$$

Entonces como $p_1 \times p_1$ es el coigualador del par (q_0, q_1) y la flecha composición $p_1 c : A \times_O A \rightarrow A''$ coiguala a dicho par, podemos asegurar la existencia de un único morfismo

$$c : A'' \times_{O''} A'' \rightarrow A''$$

tal que $c(p_1 \times p_1) = p_1 c$. Con elementos, este morfismo viene dado cómo sigue: Dados $(\bar{g}, \bar{g}') \in A'' \times_{O''} A''$ con $g, g' \in A$ tales que $p_1(g) = \bar{g}$ y $p_1(g') = \bar{g}'$, se tiene que

$$c(\bar{g}, \bar{g}') = \bar{g}' \bar{g} = p_1(g' h g),$$

donde h es cualquier flecha de \mathcal{H} tal que $s(h) = t(g)$ y $t(h) = s(g')$. Notemos que si $\bar{g} \in A''$, con $g \in A$ tal que $p_1(g) = \bar{g}$, entonces $\bar{g}^{-1} = p_1(g^{-1})$.

Observamos que los morfismos (p_0, p_1) determinan un functor $P : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ al que llamaremos *proyección (canónica)*.

Observación 1.1.3. *Notemos que si el subgrupoide normal \mathcal{H} es totalmente desconexo, los grupoides \mathcal{G} y \mathcal{G}/\mathcal{H} tienen el mismo objeto de objetos y la proyección canónica es la identidad en objetos. Además, es de inmediata comprobación que dos flechas f, g en \mathcal{G} determinan la misma flecha en el cociente si y solamente si, tienen el mismo dominio y codominio y la composición gf^{-1} está en \mathcal{H} . Este hecho generaliza lo que ocurre con la construcción de grupos cocientes y para que sea cierto es imprescindible que toda flecha de \mathcal{H} sea un endomorfismo, esto es, que \mathcal{H} sea totalmente desconexo.*

El siguiente lema nos caracteriza los isomorfismos de grupoides.

Lema 1.1.4. *Un functor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ entre grupoides es un isomorfismo si y solamente si, es sobreyectivo (en objetos y flechas), inyectivo en objetos y tiene núcleo trivial.*

Demostración: Claramente todo isomorfismo cumple las condiciones en el enunciado. Para demostrar el recíproco, bastará con probar que el functor F también es inyectivo en flechas. Por ser F una biyección en objetos, dos flechas f y g con la misma imagen por F han de tener el mismo dominio y codominio y por tanto podremos considerar la flecha fg^{-1} . Ésta ha de estar en el núcleo de F que es trivial, de donde se deduce que $f = g$, siendo así F inyectivo también en flechas. ■

Dado un conjunto O , denotaremos por \mathbf{Gpd}_O la subcategoría de \mathbf{Gpd} con objetos los grupoides cuyo conjunto de objetos es O y flechas los funtores que son la identidad en O . La categoría $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Gpd}_O)$ de grupoides internos en \mathbf{Gpd}_O puede identificarse con la categoría de 2-grupoides que tienen a O como conjunto de objetos y flechas los 2-funtores que son la identidad en objetos y también con la categoría $\mathbf{Cat}(\mathbf{Gpd}_O)$ de categorías internas en \mathbf{Gpd}_O . Este hecho bien conocido es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.5. *Un grafo interno en la categoría \mathbf{Gpd}_O*

$$\mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow{T} \\ \xrightarrow{S} \end{array} \mathcal{G}_0 \quad (1.5)$$

es el grafo subyacente a una categoría interna en \mathbf{Gpd}_O si y solamente si, el subgrupoide conmutador $[\ker(S), \ker(T)] \leq \mathcal{G}_1$ es trivial. En este caso, el functor composición

$$\circ : \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1$$

está totalmente determinado por la fórmula

$$\beta \circ \alpha = \alpha Id(T(\alpha))^{-1} \beta = \beta Id(S(\beta))^{-1} \alpha, \quad (1.6)$$

donde yuxtaposición indica composición en el grupoide \mathcal{G}_1 . Además toda flecha $\alpha \in \mathcal{G}_1$ tiene una inversa para esta composición, por lo que toda categoría interna en \mathbf{Gpd}_O es un grupoide.

Demostración: Dada una flecha α en \mathcal{G}_1 hemos denotado $s(\alpha)$ y $t(\alpha)$ a los objetos dominio y codominio de α y $S(\alpha), T(\alpha)$ a las flechas en \mathcal{G}_0 dominio y codominio, por tanto α podría representarse mediante un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S(\alpha) & \\ & \curvearrowright & \\ s(\alpha) & \Downarrow \alpha & t(\alpha) \\ & \curvearrowleft & \\ & T(\alpha) & \end{array} .$$

Observamos en primer lugar, que las composiciones en la fórmula (1.6) tienen sentido pues, dadas α, β flechas en \mathcal{G}_1 tales que $S(\beta) = T(\alpha)$, entonces (por la functorialidad de S y T) $s(\beta) = s(\alpha)$ y $t(\beta) = t(\alpha)$, es decir, α y β son flechas de un mismo objeto x en un mismo objeto y ,

$$\begin{array}{ccc} & S(\alpha) & \\ & \curvearrowright & \\ x & \xrightarrow{S(\beta)=T(\alpha)} & y \\ & \curvearrowleft & \\ & T(\beta) & \end{array} .$$

Supongamos que el conmutador $[\ker(S), \ker(T)] \leq \mathcal{G}_1$ es trivial, entonces la igualdad

$$\alpha Id(T(\alpha))^{-1} \beta = \beta Id(S(\beta))^{-1} \alpha$$

es cierta ya que $\alpha Id(T(\alpha))^{-1}$ es una flechas en $\ker(T)$ y $\beta Id(S(\beta))^{-1}$ es una flecha en $\ker(S)$ por lo que conmutan

$$\begin{aligned} \alpha Id(T(\alpha))^{-1} \beta Id(S(\beta))^{-1} &= \beta Id(S(\beta))^{-1} \alpha Id(T(\alpha))^{-1} \\ &= \beta Id(S(\beta))^{-1} \alpha Id(S(\beta))^{-1} \end{aligned}$$

y simplificando $Id(S(\beta))^{-1}$ se tiene la igualdad buscada.

Es fácil comprobar que una composición dada por la fórmula (1.6) satisface los axiomas de categoría por lo que probar que el grafo (1.5) es el grafo subyacente a una categoría reduce a probar que la fórmula (1.6) define un functor

$$\circ : \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_1.$$

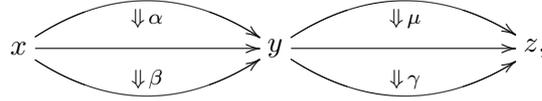
Supongamos entonces dos pares $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ de flechas componibles en $\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1$ (es decir, $\alpha, \beta : x \rightarrow y$ y $\alpha', \beta' : y \rightarrow z$ tales que $S(\beta) = T(\alpha)$ y $S(\beta') = T(\alpha')$) las

flechas $Id(T(\alpha'))^{-1}\beta'$ y $\alpha Id(T(\alpha))^{-1}$ están en $\ker(S)$ y $\ker(T)$, respectivamente, por lo que conmutan entre si de manera que:

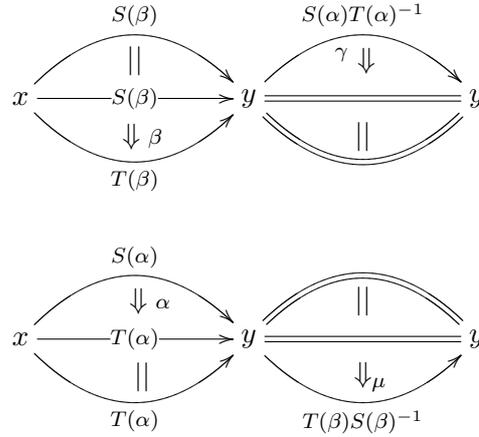
$$\begin{aligned} (\beta' \circ \alpha')(\beta \circ \alpha) &= (\alpha' Id(T(\alpha'))^{-1}\beta')(\alpha Id(T(\alpha))^{-1}\beta) \\ &= \alpha' (Id(T(\alpha'))^{-1}\beta')(\alpha Id(T(\alpha))^{-1})\beta \\ &= \alpha'(\alpha Id(T(\alpha))^{-1})(Id(T(\alpha'))^{-1}\beta')\beta \\ &= \alpha'\alpha Id(T(\alpha'\alpha))^{-1}\beta'\beta = (\beta' \beta) \circ (\alpha' \alpha), \end{aligned}$$

por lo que la composición dada por la fórmula (1.6) conserva composiciones. El comprobar que \circ conserva identidades es inmediato.

Recíprocamente, supongamos que el grafo (1.5) es el grafo subyacente a una categoría, entonces la ley de Godement, que nos dice que $(\mu \circ \gamma)(\beta \circ \alpha) = (\mu\beta) \circ (\gamma\alpha)$ en el diagrama



aplicada a los diagramas



donde $\gamma = \alpha Id(T(\alpha))^{-1}$ y $\mu = \beta Id(S(\beta))^{-1}$, nos asegura que la composición está determinada por la fórmula (1.6).

Por otra parte, dada $\alpha \in \ker(S)$ y $\beta \in \ker(T)$, como $S(\alpha) = T(\beta) = id_x$ podemos calcular la composición $\alpha \circ \beta$ que en este caso coincide con

$$\begin{aligned} \alpha \circ \beta &= \beta Id(id_x)^{-1}\alpha = \beta\alpha \\ \alpha \circ \beta &= \alpha Id(id_x)^{-1}\beta = \alpha\beta, \end{aligned}$$

por lo que el conmutador $[\ker(S), \ker(T)]$ es trivial.

Además toda flecha $\alpha \in \mathcal{G}_1$ tiene una inversa para esta composición que viene dada por la flecha $\beta = Id(T(\alpha))\alpha^{-1}Id(S(\alpha))$ pues dicha flecha verifica:

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= \alpha Id(T(\alpha))^{-1} (Id(T(\alpha))\alpha^{-1} Id(S(\alpha))) = Id(S(\alpha)) \quad \text{y} \\ \alpha\beta &= (Id(T(\alpha))\alpha^{-1} Id(S(\alpha))) Id(T(Id(T(\alpha))\alpha^{-1} Id(S(\alpha))))^{-1} \alpha \\ &= (Id(T(\alpha))\alpha^{-1} Id(S(\alpha))) Id(S(\alpha))^{-1} \alpha = Id(T(\alpha)).\end{aligned}$$

■

Para finalizar esta sección notamos que la categoría de grupoides **Gpd** tiene colímites. En particular tiene coigualadores. Éstos se calculan de la siguiente forma:

Sean $\mathcal{G}_1 : A_1 \rightrightarrows O_1$ y $\mathcal{G}_0 : A_0 \rightrightarrows O_0$ dos grupoides y $F, F' : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ dos funtores entre ellos. El coigualador de F y F' es el grupoide

$$coeq(F, F') = \bar{\mathcal{G}} : \bar{A} \rightrightarrows \bar{O}$$

con $\bar{O} = coeq(F_0, F'_0)$ el coigualador en conjuntos y \bar{A} es el conjunto cociente del conjunto cuyos elementos son sucesiones (f_1, f_2, \dots, f_n) con $f_i \in A_0$ tales que $[t(f_i)] = [s(f_{i+1})]$ en \bar{O} por la relación de equivalencia generada por

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_1, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n) \sim (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}f_i, f_{i+2}, \dots, f_n), \quad \text{si existe } f_{i+1}f_i, \\ (f_1, \dots, f_i, Id, f_{i+1}, \dots, f_n) \sim (f_1, \dots, f_n), \\ (f_1, \dots, f_i, F_1g, f_{i+1}, \dots, f_n) \sim (f_1, \dots, f_i, F'_1g, f_{i+1}, \dots, f_n), \quad \text{para } g \in A_1. \end{array} \right.$$

Las aplicaciones dominio y codominio están definidas por

$$s[f_1, \dots, f_n] = [s(f_1)] \quad \text{y} \quad t[f_1, \dots, f_n] = [t(f_n)]$$

y se puede observar con facilidad que no depende del representante elegido.

Dados dos elementos componibles en \bar{A} , con representantes

$$(f_1, \dots, f_n) \quad \text{y} \quad (g_1, \dots, g_m)$$

tales que $[t(g_m)] = [s(f_1)]$, la composición se define mediante

$$[g_1, \dots, g_m][f_1, \dots, f_n] = [g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_n].$$

Hay un caso particular en el que la construcción de coigualadores es más fácil, reflejamos esto en el siguiente lema:

Lema 1.1.6. *Sean $F, F' : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ un par reflexivo de funtores que son la identidad en objetos, sea $\mathcal{N} = \ker(F)$ y sea $\partial : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}_0$ la restricción de F' a \mathcal{N} . Entonces $im(\partial)$ es un subgrupoide normal de \mathcal{G}_0 y la proyección canónica $\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0/im(\partial)$ es el coigualador de F y F' .*

Demostración: Comencemos primero viendo que en esta situación $\text{im}(\partial)$ es un subgrupoide normal de \mathcal{G}_0 . Como F y F' son la identidad en objetos y $\text{obj}(\mathcal{N}) = \text{obj}(\mathcal{G}_1) = \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ (ver página 9), obviamente $\text{obj}(\text{im}(\partial)) = \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ y sólo tenemos que probar que para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 y cada $u \in \text{End}_{\text{im}(\partial)}(x)$, la flecha $f u f^{-1} \in \text{End}_{\text{im}(\partial)}(y)$. En efecto:

Si $S : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$ es la sección común a F y F' y $v \in \ker(F)$ tal que $u = \partial(v)$ se tiene:

$$f u f^{-1} = F' S(f) \partial(v) F' S(f)^{-1} = F' (S(f) v S(f)^{-1}) = \partial(S(f) v S(f)^{-1})$$

ya que $S(f) v S(f)^{-1} \in \ker(F)$.

Veamos ahora que la proyección canónica $\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0/\text{im}(\partial)$ es el coigualador de F y F' . Como los grupoides \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_0 tienen el mismo conjunto de objetos y los funtores F y F' son la identidad en objetos, el coigualador a nivel de objetos coincide con el conjunto $\text{obj}(\mathcal{G}_0)$, que es el conjunto de objetos del grupoide cociente $\mathcal{G}_0/\text{im}(\partial)$. Por otra parte, las flechas del grupoide cociente son clases de flechas de \mathcal{G}_0 de forma que dos flechas $f, g : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 están relacionadas, $f \sim g$ si y sólo si, existen $u \in \text{End}_{\text{im}(\partial)}(x)$ y $v \in \text{End}_{\text{im}(\partial)}(y)$ tal que $u f = g v$. Teniendo esto en cuenta podemos deducir que la proyección al cociente coiguala a los funtores F y F' también a nivel de flechas ya que dada una flecha $\alpha : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_1 como Id_x y $SF(\alpha)\alpha^{-1}$ son flechas de $\mathcal{N} = \ker(F)$, podemos asegurar la existencia de las flechas $u = \partial(SF(\alpha)\alpha^{-1})$ y $v = \partial(Id_x)$ en $\text{im}(\partial)$, tales que

$$u F'(\alpha) = \partial(SF(\alpha)\alpha^{-1}) F'(\alpha) = F(\alpha) = F(\alpha) \partial(Id_x) = F(\alpha) v,$$

es decir, $F'(\alpha) \sim F(\alpha)$ o lo que es igual las clases de las flechas $F(\alpha)$ y $F'(\alpha)$ son iguales.

Por último, veamos que la proyección al cociente tiene la propiedad universal que hace que sea el coigualador de F y F' . Ésto será equivalente (por la propiedad universal del grupoide cociente) a probar que todo funtor $H : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}$, tal que $H F = H F'$ lleva todas las flechas de $\text{im}(\partial)$ en identidades de \mathcal{H} . En efecto, si $u = \partial(v)$ con $v \in \text{End}_{\ker(F)}(x)$ se tiene:

$$H(u) = H(\partial(v)) = H F'(v) = H F(v) = H(Id_x) = Id_{H(x)}.$$

■

1.2 Tripleabilidad

Repasaremos en esta sección el concepto de triple y recordaremos el teorema de tripleabilidad de Beck que usaremos en secciones posteriores.

Sea \mathcal{S} una categoría. Un *triple* en \mathcal{S} consiste en una terna

$$\mathbf{T} = (\mathbb{T}, \eta, \mu)$$

formada por un endofunctor $\mathbb{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ y dos transformaciones naturales, la *unidad* $\eta : Id_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{T}$ y la *multiplicación* $\mu : \mathbb{T}\mathbb{T} = \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}$, satisfaciendo las leyes de identidades y de asociatividad siguientes:

$$\begin{aligned} \mu(\eta\mathbb{T}) &= \mu(\mathbb{T}\eta) = Id_{\mathbb{T}}, \\ \mu(\mu\mathbb{T}) &= \mu(\mathbb{T}\mu). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Un cotriple en \mathcal{S} , $\mathbf{G} = (\mathbb{G}, \epsilon, \delta)$, es un triple en \mathcal{S}^{op} .

Recordemos también, que todo par de funtores adjuntos

$$F : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{B} : U, \quad F \dashv U$$

da lugar a un triple $\mathbf{T} = (UF, \eta, U\epsilon F)$ en \mathcal{S} , y a un cotriple $\mathbf{G} = (FU, \epsilon, F\eta U)$ en \mathcal{B} , donde $\eta : Id_{\mathcal{S}} \rightarrow UF$ y $\epsilon : FU \rightarrow Id_{\mathcal{B}}$ son la unidad y counidad de la adjunción $F \dashv U$ respectivamente.

Eilenberg y Moore por una parte y Kleisli por otra probaron, casi simultáneamente, la conjetura hecha por Hilton que sugería que todo triple proviene de una adjunción. Dado un triple $\mathbf{T} = (\mathbb{T}, \eta, \mu)$ en \mathcal{S} , Eilenberg y Moore construyeron una nueva categoría, la categoría de \mathbf{T} -álgebras $\mathcal{S}^{\mathbf{T}}$. Una \mathbf{T} -álgebra es un par (X, ξ) donde X es un objeto de \mathcal{S} y $\xi : \mathbb{T}(X) \rightarrow X$ es una flecha en \mathcal{S} satisfaciendo las condiciones:

- (a) $\xi \eta_X = Id_X$,
- (b) $\xi \mathbb{T}(\xi) = \xi \mu_X$.

En tal caso al objeto X de \mathcal{S} se le dice que está dotado de *estructura de \mathbf{T} -álgebra* mediante la aplicación ξ . Si X e Y tienen estructura de \mathbf{T} -álgebras dadas por ξ_X e ξ_Y respectivamente, entonces una flecha $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{S} se dice que es un *morfismo de \mathbf{T} -álgebras* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(X) & \xrightarrow{\mathbb{T}(f)} & \mathbb{T}(Y) \\ \xi_X \downarrow & & \downarrow \xi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

La categoría $\mathcal{S}^{\mathbf{T}}$ de \mathbf{T} -álgebras tiene a las \mathbf{T} -álgebras como objetos y a los morfismos de \mathbf{T} -álgebras como flechas. A partir de esta categoría tenemos una situación de adjunción $F^{\mathbf{T}} : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{S}^{\mathbf{T}} : U^{\mathbf{T}}$ cuyo triple asociado es \mathbf{T} , donde $F^{\mathbf{T}}(X) = (\mathbb{T}(X), \mu_X)$ para cada objeto X de \mathcal{S} y $F^{\mathbf{T}}(f) = \mathbb{T}(f)$ para cada flecha $X \xrightarrow{f} Y$ en \mathcal{S} y donde $U^{\mathbf{T}}(X, \xi_X) = X$ y $U^{\mathbf{T}}(f) = f$ para cada \mathbf{T} -álgebra (X, ξ_X) y cada morfismo de \mathbf{T} -álgebras $f : (X, \xi_X) \rightarrow (Y, \xi_Y)$.

Recordemos además que la categoría $\mathcal{S}^{\mathbf{T}}$ es final entre todas las posibles adjunciones cuyo triple asociado sea \mathbf{T} . De esta forma, el par de funtores $F^{\mathbf{T}} \dashv U^{\mathbf{T}}$ es universal en el sentido de que dado cualquier otro par adjunto $F : \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{B} : U$ tal que el triple inducido por esta situación de adjunción es también \mathbf{T} , entonces existe un único functor $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{T}}$, llamado *functor de comparación de Eilenberg-Moore*, tal que:

$$U^{\mathbf{T}} \Phi = U \quad \text{y} \quad \Phi F = F^{\mathbf{T}}.$$

Entre todos los funtores $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ que tienen un adjunto izquierda vamos a quedarnos con aquellos que tienen la propiedad de que la categoría de Eilenberg-Moore para el correspondiente triple es esencialmente la misma que \mathcal{B} . De forma precisa, decimos que un functor $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ es *tripleable* si tiene un adjunto por la izquierda y el correspondiente functor de comparación de Eilenberg-Moore es una equivalencia de categorías. Con frecuencia se dice que \mathcal{B} es *tripleable sobre \mathcal{S}* si se sobrentiende el functor de olvido $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que un functor sea tripleable (ver [5, Teorema 10]):

Teorema 1.2.1 (Teorema de Beck). *Un functor $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ es tripleable si y sólo si*

- (i) *U tiene un adjunto izquierda.*
- (ii) *U refleja isomorfismos.*
- (iii) *\mathcal{B} tiene coigualadores de pares reflexivos U -contráctiles y U los conserva.*

1.3 Objetos simpliciales

Denotaremos por Δ a la *categoría simplicial*, sus objetos son todos los números ordinales $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geq 0$ y sus morfismos $f : [n] \rightarrow [m]$ son las aplicaciones (débilmente) monótonas, es decir, todas las funciones f tales que si $0 \leq i \leq j \leq n$ entonces $f(i) \leq f(j)$.

En esta categoría destacamos los morfismos $\delta_i : [n] \rightarrow [n+1]$ y $\sigma_i : [n] \rightarrow [n-1]$, definidos respectivamente por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

los cuales son exactamente los $n+1$ morfismos inyectivos con dominio $[n]$ y codominio $[n+1]$ y los $(n-1)$ morfismos sobreyectivos con dominio $[n]$ y codominio $[n-1]$ respectivamente.

Tales morfismos δ_i y σ_i generan la categoría Δ , en el sentido de que cualquier otro morfismo en Δ se puede expresar como composición finita de ellos [51]. Además las aplicaciones anteriores satisfacen las siguientes identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad i < j, \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} \quad i \leq j, \\ \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & i < j, \\ Id & i = j, i = j + 1, \\ \delta_{i-1} \sigma_j & i > j + 1, \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

y la categoría Δ es universal respecto de estas relaciones.

La categoría de *objetos simpliciales* sobre una categoría base \mathcal{E} es la categoría de funtores de Δ^{op} en \mathcal{E} ,

$$\mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\Delta^{op}}.$$

Haremos un uso extensivo en esta memoria de las categorías **SSet** y **SimplGpd** de objetos simpliciales sobre conjuntos (conjuntos simpliciales) y sobre grupoides, respectivamente.

Dado un objeto simplicial $\mathbf{X} : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{E}$, escribiremos:

$$X_n = \mathbf{X}([n]) \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} d_i = \mathbf{X}(\delta_i) : X_n \longrightarrow X_{n-1}, \\ s_i = \mathbf{X}(\sigma_i) : X_n \longrightarrow X_{n+1}. \end{array} \right.$$

Estos morfismos son llamados *morfismos cara y degeneración*, respectivamente. Los elementos de Yoneda del objeto X_n son llamados *n-símplices* de \mathbf{X} . Un *n-símplice* $x \in X_n$ se dice *degenerado* si es de la forma $s_i(y)$, para algún $y \in X_{n-1}$ y $0 \leq i < n$.

El hecho de que cualquier morfismo en Δ sea una composición de δ 's y σ 's nos prueba que el objeto simplicial \mathbf{X} está totalmente determinado por sus objetos de *n-símplices* y sus morfismos cara y degeneración. Estos últimos tendrán que satisfacer las *identidades simpliciales*, deducidas de las identidades (1.8) anteriores:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j, \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad i \leq j, \\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j, \\ Id & i = j, i = j + 1, \\ s_j d_{i-1} & i > j + 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Representaremos al objeto simplicial $\mathbf{X} \in \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ como un diagrama:

$$\mathbf{X} : \cdots \quad X_{n+1} \begin{array}{c} \xleftarrow{s_n} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_{n+1}} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_n \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_{n-1} \quad \cdots \quad X_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0.$$

Un *morfismo simplicial* $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es una transformación natural y, por tanto, es equivalente a dar una familia de morfismos

$$\mathbf{f} = \{f_n : X_n \rightarrow Y_n, n \geq 0\},$$

que conmutan con los operadores cara y degeneración, esto es:

$$\begin{cases} f_n d_i = d_i f_{n+1}, \\ f_{n+1} s_i = s_i f_n. \end{cases}$$

Dados dos morfismos simpliciales $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ una *homotopía* $\mathbf{h} : \mathbf{f} \rightsquigarrow \mathbf{g}$, de \mathbf{f} a \mathbf{g} , es una familia de morfismos $\{h_j^n : X_n \rightarrow Y_{n+1}, 0 \leq j \leq n\}$ satisfaciendo las *identidades de homotopía* :

$$\begin{cases} d_0 h_0^n = f_n, \\ d_i h_j^n = h_{j-1}^{n-1} d_i, & i < j, \\ d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} h_j^n, \\ d_i h_j^n = h_j^{n-1} d_{i-1}, & i > j + 1, \\ d_{n+1} h_n^n = g_n, \end{cases} \quad \begin{cases} s_i h_j^{n-1} = h_{j+1}^n s_i, & i \leq j, \\ s_i h_j^{n-1} = h_j^n s_{i-1}, & i > j. \end{cases} \quad (1.10)$$

En tal caso decimos que \mathbf{f} es homotópico a \mathbf{g} .

Notemos que la relación de homotopía, en general, no es una relación de equivalencia, aunque si lo será en el caso de que el objeto simplicial \mathbf{Y} satisfaga la condición de Kan (ver Sección 1.3.1)[53]. Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$, si llamamos R a la menor relación de equivalencia en $Hom_{\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ que contiene a la relación de homotopía (relación de equivalencia generada por la relación de homotopía), denotaremos por $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ o bien $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})}$ al conjunto cociente de $Hom_{\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ por la relación de equivalencia R .

Dado un morfismo simplicial $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, un *inverso homotópico* para \mathbf{f} es un morfismo $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ tal que las composiciones $\mathbf{f}\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}\mathbf{f}$ son homotópicas a las correspondientes identidades. Un morfismo simplicial \mathbf{f} es una *equivalencia homotópica* si tiene un inverso homotópico.

Notemos también que la relación de homotopía es compatible con la composición de morfismos simpliciales.

Para todo objeto simplicial \mathbf{X} en \mathcal{E} el par de morfismos $(d_0, d_1) : X_1 \rightarrow X_0$ admite un coigualador, que se denota $\pi_0(\mathbf{X})$ y se llama *el objeto de componentes conexas* de \mathbf{X} . Notemos que esta construcción define un funtor

$$\pi_0 : \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

que es adjunto izquierda del funtor diagonal

$$\text{Diag} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}),$$

que asocia a cada objeto X en \mathcal{E} el objeto simplicial constante $\text{Diag}(X) = K(X, 0)$. Este funtor diagonal tiene a su vez un adjunto derecha, el funtor

$$\text{vert} : \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$$

que lleva cada objeto simplicial \mathbf{X} en el objeto de sus vértices, $\text{vert}(\mathbf{X}) = X_0$. Tenemos entonces un diagrama:

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_0} \\ \xrightarrow{\text{Diag}} \\ \xleftarrow{\text{vert}} \end{array} \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\Delta^{op}} \quad \text{con} \quad \pi_0 \dashv \text{Diag} \dashv \text{vert}.$$

1.3.1 Asféricidad y Condición de Kan

Para cada $n \geq 0$, sea Δ_n la subcategoría plena de Δ con objetos los $[m]$ tales que $m \leq n$. La categoría de *objetos simpliciales truncados a nivel n* es la categoría de funtores $\mathbf{Simpl}_n(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\Delta_n^{op}}$. La inclusión $\Delta_n \hookrightarrow \Delta$ induce un funtor

$$\text{tr}_n : \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}_n(\mathcal{E}),$$

al que llamaremos *functor truncación a nivel n* , y que consiste en olvidar de cada objeto y cada morfismo simplicial la parte en dimensiones mayores que n .

Este funtor truncación tiene adjuntos por la izquierda sk^n (si \mathcal{E} tiene colímites) y por la derecha $cosk^n$ llamados *functor n -esqueleto* y *functor n -coesqueleto* respectivamente (ver [39]). Éstos se calculan mediante las construcciones de conúcleos y núcleos simpliciales respectivamente.

Sea \mathbf{X} un objeto simplicial en \mathcal{E} y n un entero mayor que cero, el n -ésimo *núcleo simplicial* de \mathbf{X} es un objeto $\Delta_n(\mathbf{X})$ en la categoría \mathcal{E} junto con morfismos

$$p_0, \dots, p_n : \Delta_n(\mathbf{X}) \longrightarrow X_{n-1},$$

satisfaciendo:

$$d_i p_j = d_{j-1} p_i, \quad i < j,$$

y que es universal respecto a estas ecuaciones, esto es: Para cada familia de morfismos $q_0, \dots, q_n : T \rightarrow X_{n-1}$ tales que $d_i q_j = d_{j-1} q_i$, para $i < j$, existe un único morfismo $q = (q_0, \dots, q_n) : T \rightarrow \Delta_n(\mathbf{X})$ tal que $p_i q = q_i$,

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ q \swarrow \text{---} & & \searrow q_n \\ \Delta_n(\mathbf{X}) & \xrightarrow[p_0]{p_n} & X_{n-1} \end{array}$$

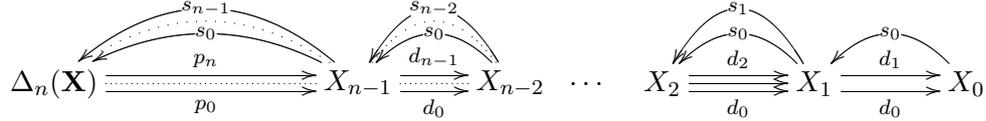
Dicho de otra forma, en términos de elementos de Yoneda, dar un elemento x en $\Delta_n(\mathbf{X})$ es equivalente a dar una $(n+1)$ -upla $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de elementos

$x_i \in X_{n-1}$, tales que $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$, para $i < j$. Siendo $p_i(x_0, \dots, x_n) = x_i$. La existencia de los núcleos simpliciales está garantizada por las propiedades de exactitud impuestas a \mathcal{E} .

Para cada $0 \leq j \leq n-1$, los morfismos $s_j : X_{n-1} \rightarrow \Delta_n(\mathbf{X})$ definidos por:

$$s_j(x) = (s_{j-1}d_0(x), \dots, s_{j-1}d_{j-1}(x), x, x, s_jd_{j+1}(x), \dots, s_jd_{n-1}(x)),$$

para cualquier elemento $x \in X_{n-1}$, hacen de



un objeto simplicial truncado. El funtor

$$\text{cosk}^n : \mathbf{Simpl}_n(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$$

se obtiene asociando a cada objeto simplicial truncado el objeto simplicial obtenido por sucesivas iteraciones de núcleos simpliciales a partir de dimensión $n+1$.

De forma análoga se definen los conúcleos simpliciales, que son universales para las degeneraciones (y que existen siempre que en \mathcal{E} existan colímites), y el funtor n -esqueleto $sk^n : \mathbf{Simpl}_n(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$.

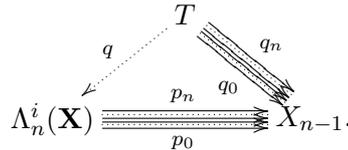
Consideraremos también los endofuntores Sk^n y $Cosk^n$ obtenidos componiendo sk^n y $cosk^n$ con el funtor truncación en dimensión n . Tenemos entonces un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Simpl}(\mathcal{E}) & \begin{array}{c} \xleftarrow{sk^n} \\ \xleftarrow{tr_n} \\ \xleftarrow{cosk^n} \end{array} & \text{Simpl}_n(\mathcal{E}) \end{array} \quad \text{con} \quad sk^n \dashv tr_n \dashv cosk^n.$$

De forma análoga a la definición de núcleo simplicial se puede definir la i -ésima cara abierta en dimensión n , $\Lambda_n^i(\mathbf{X})$, asociada a un objeto simplicial (truncado en dimensión $n-1$) \mathbf{X} . Éste será un objeto en \mathcal{E} junto con morfismos

$$p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n : \Lambda_n^i(\mathbf{X}) \longrightarrow X_{n-1},$$

tales que $d_j p_k = d_{k-1} p_j$, para $j < k$ y $j, k \neq i$, y que es universal respecto a estas ecuaciones, esto es: Para cada familia de morfismos $q_0, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n : T \rightarrow X_{n-1}$ tales que $d_j q_k = d_{k-1} q_j$, para $j < k$ y $j, k \neq i$, existe un único morfismo $q = (q_0, \dots, q_{i-1}, -, q_{i+1}, \dots, q_n) : T \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{X})$ tal que $p_j q = q_j$,



En otras palabras, un elemento $x \in \Lambda_n^i(\mathbf{X})$ consiste en una n -upla

$$x = (x_0, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

con $x_k \in X_{n-1}$ verificando $d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j)$ cuando $j < k$ y $k, j \neq i$. Por extensión, identificaremos las caras abiertas en dimensión 1, $\Lambda_1^i(\mathbf{X})$; $0 \leq i \leq 1$, con el objeto X_0 de cero símplices.

Notemos que para cada objeto simplicial \mathbf{X} se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & X_n & \\ D_n \swarrow & & \searrow K_n^i \\ \Delta_n(\mathbf{X}) & \xrightarrow{H_n^i} & \Lambda_n^i(\mathbf{X}), \end{array} \quad (1.11)$$

donde los morfismos D_n , K_n^i y H_n^i son los únicos morfismos inducidos por $d_0, \dots, d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, $d_0, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ y $p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n : \Delta_n(\mathbf{X}) \rightarrow X_n$, respectivamente, esto es:

$$D_n(x) = (d_0(x), \dots, d_n(x)),$$

$$K_n^i(x) = (d_0(x), \dots, d_{i-1}(x), -, d_{i+1}(x), \dots, d_n(x)),$$

$$H_n^i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Un objeto simplicial \mathbf{X} satisface la *condición de Kan* (o simplemente es de Kan) si, para cada $n \geq 1$ y cada $0 \leq i \leq n$, los morfismos K_n^i son epimorfismos regulares.

Un objeto simplicial \mathbf{X} se dice *asférico* si, para cada $n \geq 1$, el morfismo D_n es un epimorfismo regular.

Un morfismo simplicial $\mathbf{p} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es una *fibración (de Kan)* si la flecha punteada al objeto pullback en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_n & & \\ \downarrow p_n & \searrow K_n^i & \\ Y_n \times_{\Lambda_n^i(\mathbf{Y})} \Lambda_n^i(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \Lambda_n^i(\mathbf{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \Lambda_n^i(\mathbf{p}) \\ Y_n & \xrightarrow{K_n^i} & \Lambda_n^i(\mathbf{Y}) \end{array}$$

es un epimorfismo regular, para cada $n \geq 1$ y $0 \leq i \leq n$. Notemos que un objeto simplicial \mathbf{X} es de Kan si, y sólo si, el único morfismo $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{1}$ es una fibración de Kan, donde $\mathbf{1}$ es el objeto simplicial terminal en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$.

Para finalizar esta sección vamos a hacer un análisis de los objetos simpliciales \mathbf{X} que tienen la propiedad

$$\mathbf{X} = \text{Cosk}^{n-1}(\mathbf{X}),$$

es decir, objetos simpliciales que son núcleos simpliciales en dimensiones $\geq n$.

Dado \mathbf{X} en las condiciones anteriores, debido a que $X_{m+1} = \Delta_{m+1}(\mathbf{X})$, $m \geq n$, deducimos que cada $(m+1)$ -símplice $x \in X_{m+1}$ es una $(m+2)$ -upla

$$x = (x_0, \dots, x_j, \dots, x_{m+1}),$$

donde cada $x_j \in X_m = \Delta_m(\mathbf{X})$ y por tanto x_j está determinado por sus caras, esto es,

$$x_j = (x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{jm}); \quad x_{ji} = d_i(x_j) \in X_{m-1}.$$

Las identidades simpliciales

$$\begin{cases} d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i) & \text{si } i < j, \\ d_i(x_j) = d_j(x_{i+1}) & \text{si } j \leq i, \end{cases}$$

se traducen ahora en las identidades

$$\begin{cases} x_{ji} = x_{ij-1} & \text{si } i < j, \\ x_{ji} = x_{i+1j} & \text{si } j \leq i. \end{cases} \quad (1.12)$$

Representaremos entonces a un elemento $x \in X_{m+1}$, con $m \geq n$, por una matriz de dimensión $(m+2) \times (m+1)$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0m} \\ \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \\ x_{m+10} & x_{m+11} & x_{m+12} & \dots & x_{m+1m} \end{array} \right)$$

con entradas en X_{m-1} y satisfaciendo la identidad $x_{ij} = x_{ji-1}$, $j < i$ que es equivalente a las identidades (1.12). Esta propiedad se ha reflejado en la matriz dibujando rectángulos, siendo iguales los elementos que están en dos rectángulos con el mismo número de elementos.

Por ejemplo, si tomamos $m = n = 2$ un elemento $x \in X_3$ estará representado por una matriz

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline a & d & e \\ b & d & f \\ c & e & f \end{array} \right).$$

Así, cada componente x_j de x está totalmente determinada por el resto de las componentes x_i de x , con $i \neq j$. Deducimos entonces:

Lema 1.3.1. Si \mathbf{X} es un objeto simplicial tal que $\mathbf{X} = \text{Cosk}^{n-1}(\mathbf{X})$, entonces los morfismos canónicos $K_{m+1}^j : X_{m+1} \rightarrow \Lambda_{m+1}^j(\mathbf{X})$ son isomorfismos, para todo $m \geq n$ y todo $0 \leq j \leq m+1$.

1.3.2 Nervios de categorías y grupoides

Recordamos en esta sección la definición del functor nervio de categorías, así como algunas de sus propiedades. Comenzaremos introduciendo el nervio de una categoría interna en conjuntos y veremos luego como este functor se puede generalizar a categorías internas en \mathcal{E} .

Cada objeto $[n]$ de Δ es un conjunto parcialmente ordenado y por tanto puede considerarse como una categoría con objetos sus elementos y con una única flecha $i \rightarrow j$ si $i \leq j$. Se tiene así un encaje canónico pleno

$$\mathbf{i} : \Delta \hookrightarrow \mathbf{Cat}.$$

Por otro lado, el “encaje de Yoneda”

$$\mathbf{y} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{Cat}^{op}}$$

asocia a cada categoría pequeña \mathcal{C} , el functor representable definido por ella

$$\mathbf{y}(\mathcal{C}) : \mathbf{Cat}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}, \mathcal{D} \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{D}, \mathcal{C}).$$

El *functor nervio* se define como la composición

$$\text{Ner}(-) : \mathbf{Cat} \xrightarrow{\mathbf{y}} \mathbf{Set}^{\mathbf{Cat}^{op}} \xrightarrow{\mathbf{i}^*} \mathbf{Set}^{\Delta^{op}} = \mathbf{SSet}, \quad (1.13)$$

esto es, el *nervio de una categoría pequeña* \mathcal{C} es la restricción del functor $\mathbf{y}(\mathcal{C})$ a Δ^{op} ,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{\text{Ner}(\mathcal{C})} & \mathbf{Set} \\ & \searrow & \nearrow \mathbf{y}(\mathcal{C}) \\ & \mathbf{Cat}^{op} & \end{array}$$

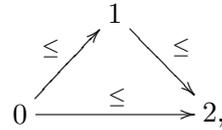
Podemos describir fácilmente los símplexes de $\text{Ner}(\mathcal{C})$:

- Un functor $[0] \rightarrow \mathcal{C}$ es precisamente un objeto de \mathcal{C} , así los 0-símplexes de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ son los objetos de \mathcal{C} .
- La categoría $[1]$ tiene dos objetos y una única flecha (aparte de las identidades)

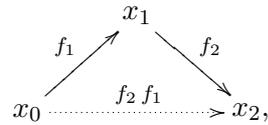
$$0 \xrightarrow{\leq} 1,$$

así un functor $[1] \rightarrow \mathcal{C}$ es precisamente una flecha de \mathcal{C} y por tanto los 1-símplexes de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ son las flechas de \mathcal{C} .

- La categoría $[2]$ puede representarse por el diagrama



así un 2-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ consiste de un diagrama en \mathcal{C} ,

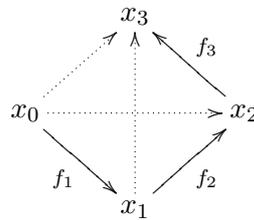


que está totalmente determinado por el par de flechas componibles

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2.$$

La cara i del 2-símplice anterior se obtiene borrando del diagrama el objeto x_i y todas las flechas que salgan o lleguen a él.

- En dimensión 3, un 3-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ será un diagrama en \mathcal{C} con la forma del 1-esqueleto de un tetraedro conmutativo



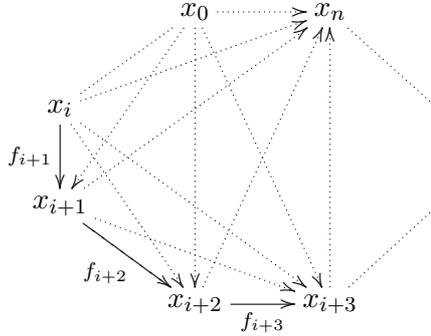
en el que las flechas punteadas se obtienen por composición. La cara i se obtiene eliminando el objeto x_i y todas las flechas que salgan o lleguen a él. Se puede entonces identificar los 3-símplices de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ con ternas componibles,

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3,$$

de flechas de \mathcal{C} .

- Para $n > 3$ un n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ es un diagrama en \mathcal{C} , con la forma del

1-esqueleto de un n -símplice



donde las flechas entre objetos con índices no consecutivos (dibujadas como flechas punteadas en el diagrama) se obtienen por composición. El operador cara d_i se obtiene eliminando del diagrama el objeto x_i y todas las flechas que lleguen o salgan de él y el operador degeneración s_i se obtiene añadiendo la flecha identidad del correspondiente objeto x_i . Es fácil comprobar que dar un n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ es equivalente a dar una sucesión de flechas componibles en \mathcal{C} ,

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n,$$

y que, en términos de sucesiones de flechas componibles, los operadores cara y degeneración del $\text{Ner}(\mathcal{C})$ están dados por las fórmulas:

$$d_0(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n) = x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n,$$

$$d_i(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} x_n) = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \cdots \rightarrow x_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}f_i} x_{i+1} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n, \\ 0 < i < n,$$

$$d_n(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} x_n) = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n-2} \xrightarrow{f_{n-1}} x_{n-1},$$

$$s_i(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_n} x_n) = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \cdots \xrightarrow{f_i} x_i \xrightarrow{Id_{x_i}} x_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n \\ 0 \leq i \leq n.$$

A partir de esta descripción es fácil observar que, para dimensiones $n \geq 3$, cada n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ está unívocamente determinado por sus caras, y concluir que:

$$\text{Ner}(\mathcal{C}) = \text{Cosk}^2(\text{Ner}(\mathcal{C})).$$

Este funtor nervio $\text{Ner} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SSet}$ tiene un adjunto izquierda $c : \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Cat}$ llamado *categorización* o *realización categórica* (ver [36]; pg. 33). De este hecho se deduce que el funtor nervio conserva todos los límites.

Notemos, que como la categoría **Gpd** de grupoides es una subcategoría reflexiva de **Cat**, el funtor “nervio de un grupoide” $\text{Ner} : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{SSet}$ también tiene un adjunto izquierda, éste coincide con el funtor “grupoide fundamental” definido en (1.19). Ya que si \mathcal{G} es un grupoide y \mathbf{X} es un conjunto simplicial, dar un funtor $F : \pi_1(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{G}$ es equivalente a dar un morfismo simplicial truncado $\text{tr}_1(\mathbf{f}) : \text{tr}_1(\mathbf{X}) \rightarrow \text{tr}_1(\text{Ner}(\mathcal{G}))$, con $f_0 = F_0$, $f_1(x) = F_1([x])$ y tal que $f_1 d_0(y) f_1 d_2(y) = f_1 d_1(y)$, para todo 3-símplice y de \mathbf{X} , condición que determina que este morfismo truncado pueda extenderse a un morfismo simplicial $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$, de manera que la componente n -ésima está definida por

$$f_n(x) = (f_1 d_2^{n-1}(x), f_1 d_2^{n-2} d_0(x), \dots, f_1 d_2 d_0^{n-2}(x), f_1 d_0^{n-1}(x)) \in \text{Ner}_n(\mathcal{G})$$

para cada n -símplice $x \in X_n$. Por tanto, si restringimos nuestra atención a grupoides, tenemos un par adjunto,

$$\pi_1 : \mathbf{SSet} \rightleftarrows \mathbf{Gpd} : \text{Ner}, \quad \pi_1 \dashv \text{Ner}. \quad (1.14)$$

Esta última descripción del nervio de una categoría puede ser fácilmente generalizada a categorías internas sobre \mathcal{E} , de manera que podemos extender el concepto anterior y obtener un funtor nervio:

$$\text{Ner} : \mathbf{Cat}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}),$$

cuya descripción es análoga a la dada para el nervio de una categoría (interna en conjuntos). Esto es, dada una categoría \mathcal{C} interna en \mathcal{E} , el *nervio de \mathcal{C}* , $\text{Ner}(\mathcal{C})$ es el objeto simplicial dado por $\text{Ner}_0(\mathcal{C}) = O$, $\text{Ner}_1(\mathcal{C}) = A$, y en general, $\text{Ner}_n(\mathcal{C}) = A \times_O A \times_O \dots \times_O A$ es el objeto de sucesiones de n flechas componibles con operadores cara y degeneración dados como en el caso de categorías en conjuntos.

Es fácil de observar, a partir de la definición del nervio de un grupoide, que el objeto de componentes conexas de un grupoide $\mathcal{G} \in \mathbf{Gpd}(\mathcal{E})$ coincide con el objeto de componentes conexas de su nervio, es decir, $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0(\text{Ner}(\mathcal{G}))$.

En el caso de que cada flecha de \mathcal{C} tenga un inverso; es decir, en el caso de que la categoría \mathcal{C} sea un grupoide, es fácil de comprobar que cada n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$, $n \geq 2$, está totalmente determinado por n cualquiera de sus $(n+1)$ -caras. El recíproco de este resultado también es cierto, como nos lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.3.2. *Un objeto simplicial \mathbf{X} es el nervio de un grupoide si y solamente si las proyecciones canónicas $K_n^i : X_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{X})$ son isomorfismos para todo $n \geq 2$ y todo $0 \leq i \leq n$.*

Demostración: Como hemos dicho anteriormente, es claro que los nervios de grupoides tienen la propiedad enunciada en la proposición. Recíprocamente, dado

un objeto simplicial \mathbf{X} de forma que las proyecciones K_n^i son isomorfismos, para $n \geq 2$ y todo $0 \leq i \leq n$. Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & X_2 & \\ D_2 \swarrow & & \searrow K_2^1 \\ \Delta_2(\mathbf{X}) & \xrightarrow{H_2^1} & \Lambda_2^1(\mathbf{X}), \end{array} \quad (1.15)$$

en el que K_2^1 es un isomorfismo. Deducimos entonces que D_2 es un monomorfismo, por tanto, podemos identificar los elementos de X_2 como elementos en la imagen de D_2 . Así, un elemento $x \in X_2$ será identificado con la terna $x \equiv (x_0, x_1, x_2) \in \Delta_2(\mathbf{X})$, con $x_i = d_i(x)$. Además, por ser cada K_2^i , $0 \leq i \leq 2$ isomorfismos, cada uno de los x_i están determinados unívocamente por los dos restantes. En particular x_1 está determinado por x_0, x_2 . Denotaremos por $x_1 = c(x_2, x_0) = x_0 x_2$.

De esta forma tenemos definido un morfismo “composición”

$$c = d_1(K_2^1)^{-1} : X_1 \times_{X_0} X_1 \cong \Lambda_2^1(\mathbf{X}) \xrightarrow{(K_2^1)^{-1}} X_2 \xrightarrow{d_1} X_1; (f, g) \mapsto gf \quad (1.16)$$

donde el isomorfismo $X_1 \times_{X_0} X_1 \cong \Lambda_2^1(\mathbf{X})$ está dado por $(y, x) \mapsto (x, -, y)$.

Esto es, dado un par componible (f, g) , la composición de (f, g) es h , i.e. $gf = h$, si y sólo si existe un 2-símplice $z = (K_2^1)^{-1}(g, -, f) \in X_2$ tal que:

$$d_0(z) = g, \quad d_1(z) = h, \quad d_2(z) = f.$$

Entonces, la 1-truncación de \mathbf{X} ,

$$\begin{array}{ccc} & s_0=id & \\ & \curvearrowright & \\ X_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1=s} \\ \xrightarrow{d_0=t} \end{array} & X_0 \end{array}$$

junto con este morfismo composición c (1.16) tiene estructura de grupoide, en efecto:

1. Las identidades simpliciales nos aseguran que para todo $x \in X_1$ se tiene:

$$s \, id(x) = x = t \, id(x).$$

2. Para cada par componible $(f, g) \in X_1 \times_{X_0} X_1$ se tiene que $(g, gf, f) \in \Delta_2(\mathbf{X})$ y por tanto:

$$\begin{aligned} s(gf) &= d_1(gf) = d_1(f) = s(f), \\ t(gf) &= d_0(gf) = d_0(g) = t(g). \end{aligned}$$

3. El hecho de que las proyecciones K_n^i son isomorfismos para $n \geq 2$ y $0 \leq i \leq n$, implica que $\mathbf{X} \cong \text{Cosk}^2(\mathbf{X})$, ya que para $m \geq 3$ dar un elemento de X_m será equivalente a dar un elemento de $\Lambda_m^i(\mathbf{X})$ que no será mas que una matriz en la que no aparece la fila i ; ahora bien, por ser K_m^i isomorfismos para $0 \leq i \leq n$ la fila que no aparece en dicha matriz está determinada de forma única por las restantes y debe estar en X_{m-1} .

De esta forma un elemento de X_3 es una matriz cuyas filas están en X_2 , de la forma

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}.$$

Así, cada terna de elementos (f, g, h) en X_1 componibles ($s(g) = t(f)$ y $s(h) = t(g)$), determina 4 elementos de X_2 que, a su vez, generan un elemento en X_3 representado por la matriz

$$\alpha = \begin{pmatrix} f & gf & g \\ f & u & gh \\ gf & v & h \\ g & gh & h \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $d_1 d_2 = d_1 d_1$ se tiene:

$$h(gf) = v = d_1(gf, v, h) = d_1 d_2(\alpha) = d_1 d_1(\alpha) = d_1(f, u, gh) = u = (gh)f.$$

4. Dado $f \in X_1$, $s_0(f) = (f, f, s_0 d_1(f))$ y $s_1(f) = (s_0 d_0(f), f, f) \in \Delta_2(\mathbf{X})$. De hecho $f s_0 d_1(f) = f$ y $s_0 d_0(f) f = f$, es decir,

$$f \text{Id}_{s(f)} = f \text{id}(s(f)) = f \quad \text{y} \quad \text{Id}_{t(f)} f = \text{id}(t(f)) f = f.$$

5. Además, para cada elemento $f \in X_1$, podemos encontrar f^{-1} usando que el elemento $(f, s_0 d_0(f), -) \in \Lambda_2^2(\mathbf{X})$, es decir, existe un inverso respecto de esta operación.

Denotemos \mathcal{X} al grupoide descrito anteriormente. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \text{Ner}_i(\mathcal{X}) &= X_i, & \text{para } i = 0, 1, \\ \text{Ner}_2(\mathcal{X}) &= X_1 \times_{X_0} X_1 \cong \Lambda_2^1(\mathbf{X}) \cong X_2 \end{aligned}$$

e inductivamente, para $n > 2$,

$$\text{Ner}_n(\mathcal{X}) = \Delta_n(\text{tr}_{n-1}(\text{Ner}(\mathcal{X})) = \Delta_n(\text{tr}_{n-1}(\mathbf{X})) \cong \Lambda_n^i(\mathbf{X}) \cong X_n,$$

es decir, el nervio del grupoide \mathcal{X} ,

$$\cdots \Delta_n(\mathbf{X}) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_n} \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} \Delta_{n-1}(\mathbf{X}) \cdots \Delta_3(\mathbf{X}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_3} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \Delta_2^1(\mathbf{X}) \begin{array}{c} \xrightarrow{pr_0} \\ \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{pr_1} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0,$$

“coincide” con el conjunto simplicial de partida \mathbf{X} . ■

1.3.3 Objetos simpliciales aumentados y el funtor Dec

Si ahora añadimos a la categoría Δ un objeto inicial (el conjunto vacío) y las correspondientes aplicaciones, y llamamos Δ_* a la categoría resultante, un funtor $\mathbf{X}^+ : \Delta_*^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ es llamado un *objeto simplicial aumentado*. Éste estará determinado por el objeto $X_{-1} = \mathbf{X}^+(\emptyset)$, un objeto simplicial \mathbf{X} y un morfismo $d_0 : X_0 \rightarrow X_{-1}$, la *aumentación*, tal que $d_0 d_0 = d_0 d_1$. Un morfismo de objetos simpliciales aumentados $\mathbf{f}^+ : \mathbf{X}^+ \rightarrow \mathbf{Y}^+$ es un morfismo de objetos simpliciales $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ junto con un morfismo entre las aumentaciones $f_{-1} : X_{-1} \rightarrow Y_{-1}$, haciendo conmutar el correspondiente diagrama. Tales morfismos serán representados como diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{X}^+ : & \cdots & X_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & X_{n-1} & \cdots & X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \\ \mathbf{f}^+ \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & f_{-1} \downarrow \\ \mathbf{Y}^+ : & \cdots & Y_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & Y_{n-1} & \cdots & Y_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} Y_0 \xrightarrow{d_0} Y_{-1} \end{array}$$

o simplemente mediante diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{d_0} & X_{-1} \\ \mathbf{f} \downarrow & & \downarrow f_{-1} \\ \mathbf{Y} & \xrightarrow{d_0} & Y_{-1}. \end{array}$$

La categoría de objetos simpliciales aumentados en \mathcal{E} es, pues, la categoría de funtores

$$\mathbf{AuSimpl}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\Delta_*^{op}}.$$

Notemos que, para cada objeto $X \in \mathcal{E}$, la categoría de objetos simpliciales internos en la categoría coma \mathcal{E}/X puede ser identificada con la coma categoría $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})/K(X, 0)$, donde $K(X, 0)$ es el objeto simplicial constante determinado

por X . Por otra parte, esta categoría puede ser considerada como la subcategoría de la categoría $\mathbf{AuSimpl}(\mathcal{E})$ de los objetos simpliciales aumentados por X siendo los morfismos, aquellos que son la identidad en la aumentación.

La inclusión $\iota : \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^+$ induce un funtor

$$\iota^* : \mathbf{AuSimpl}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$$

que consiste simplemente en olvidar la aumentación. Este funtor tiene un adjunto izquierda que asocia a cada objeto simplicial \mathbf{X} el objeto simplicial aumentado por el objeto $\pi_0(\mathbf{X})$, es decir, $\mathbf{X} \rightarrow \pi_0(\mathbf{X})$, donde la aumentación $X_0 \rightarrow \pi_0(\mathbf{X})$ es el coigualador del par de morfismos $(d_0, d_1) : X_1 \rightarrow X_0$.

Un objeto simplicial aumentado \mathbf{X}^+ se dice que es *escindido o contráctil* si podemos encontrar una degeneración extra en cada dimensión, esto es, si existe una familia de morfismos

$$\{s_{n+1} : X_n \rightarrow X_{n+1}; n \geq 0\},$$

verificando las identidades simpliciales. Notemos que dar una degeneración extra, como la anterior, es equivalente a dar una contracción homotópica del morfismo simplicial $\mathbf{d} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Diag}(X_{-1})$, inducido por la aumentación, es decir, una aplicación simplicial $\mathbf{s} : \text{Diag}(X_{-1}) \rightarrow \mathbf{X}$ tal que $\mathbf{d}\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}\mathbf{d}$ son homotópicas a las correspondientes aplicaciones simpliciales identidad. Por este motivo, a la familia de morfismos $\{s_{n+1}\}$, como la anterior, se le llama usualmente *contracción homotópica*. Denotaremos por $\mathbf{CoherAuSimpl}(\mathcal{E})$ a la categoría cuyos objetos son objetos simpliciales aumentados y escindidos con una contracción fija y cuyos morfismos son morfismos de complejos simpliciales aumentados que respetan las contracciones, ver [30].

Haremos también uso del funtor “*decalage*” de Illusie [48],

$$\text{Dec}^+ : \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{CoherAuSimpl}(\mathcal{E}),$$

que se obtiene olvidando el último operador cara en cada dimensión y reenumerando las dimensiones, es decir, este funtor asocia a un objeto simplicial \mathbf{X} el objeto simplicial aumentado sobre los cero símplices de \mathbf{X} , cuyos n símplices son los $(n + 1)$ -símplices de \mathbf{X} y cuyos operadores cara y degeneración son los de \mathbf{X} , olvidando el último operador en cada dimensión:

$$\text{Dec}^+(\mathbf{X}) : \cdots \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} s_n \\ \curvearrowright \\ s_{n-1} \\ \curvearrowright \\ s_0 \\ \curvearrowright \\ d_n \end{array} & \\ X_{n+1} & \xrightarrow{d_0} & X_n \end{array} \cdots \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} s_1 \\ \curvearrowright \\ s_0 \end{array} & \\ X_2 & \xrightarrow{d_0} & X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \end{array} .$$

Este funtor tiene un adjunto izquierda, que denotaremos también ι^* , que consiste en olvidar la aumentación y la degeneración extra, ver [30]. Denotaremos

$\text{Dec}(\mathbf{X})$ al objeto simplicial obtenido al olvidar la aumentación de $\text{Dec}^+(\mathbf{X})$, esto es:

$$\text{Dec}(\mathbf{X}) = \iota^* \text{Dec}^+(\mathbf{X}).$$

La counidad de la adjunción $\iota^* \dashv \text{Dec}^+$, $\text{Dec}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$ está dada en cada dimensión por el último operador cara. Notemos que el functor Dec^+ es tripleable con cotriple asociado, dado por el functor Dec .

1.3.4 Objetos simpliciales dobles. Los funtores \overline{W} y TDec

Tomaremos ahora como categoría base la categoría $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ de objetos simpliciales y pasaremos a considerar la categoría $\mathbf{SSimpl}(\mathcal{E}) = \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})^{\Delta^{op}} = (\mathcal{E}^{\Delta^{op}})^{\Delta^{op}}$ de objetos simpliciales sobre $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$. El isomorfismo de categorías

$$(\mathcal{E}^{\Delta^{op}})^{\Delta^{op}} \cong \mathcal{E}^{\Delta^{op} \times \Delta^{op}}$$

nos permitirá identificar un objeto $\mathbb{X} \in \mathbf{SSimpl}(\mathcal{E})$ con un *objeto simplicial doble*, esto es, veremos \mathbb{X} como un functor

$$\mathbb{X} : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow \mathcal{E}; ([p], [q]) \mapsto \mathbb{X}([p], [q]) = X_{p,q}.$$

Asociaremos la componente p con la dirección vertical y la componente q con la horizontal y denotaremos

$$\mathbb{X}(id_p, \delta_i) = d_i^v : X_{p,q} \rightarrow X_{p,q-1},$$

$$\mathbb{X}(\delta_i, id_q) = d_i^h : X_{p,q} \rightarrow X_{p-1,q},$$

$$\mathbb{X}(id_p, \sigma_i) = s_i^v : X_{p,q} \rightarrow X_{p,q+1},$$

$$\mathbb{X}(\sigma_i, id_q) = s_i^h : X_{p,q} \rightarrow X_{p+1,q},$$

a los correspondientes operadores cara y degeneración. Por ello representaremos

\mathbb{X} mediante un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \xrightarrow{s_{n-1}^h} & & \xrightarrow{s_0^h} & \\
 & & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbb{X} : & \cdots & \mathbf{X}_n^v & \xrightarrow{d_n^h} & \mathbf{X}_{n-1}^v & \cdots & \mathbf{X}_1^v & \xrightarrow{d_1^h} & \mathbf{X}_0^v \\
 & & & \xrightarrow{d_0^h} & & & & \xrightarrow{d_0^h} & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbf{X}_n^h : & \cdots & X_{n,n} & \xrightarrow{d_n^v} & X_{n-1,n} & \cdots & X_{1,n} & \xrightarrow{d_1^v} & X_{0,n} \\
 \downarrow d_0^v & \curvearrowright & \downarrow d_n^v & \curvearrowright & \downarrow d_{n-1}^v & \curvearrowright & \downarrow d_1^v & \curvearrowright & \downarrow d_0^v \\
 & & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbf{X}_{n-1}^h : & \cdots & X_{n,n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}^v} & X_{n-1,n-1} & \cdots & X_{1,n-1} & \xrightarrow{d_1^v} & X_{0,n-1} \\
 & & & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbf{X}_1^h : & \cdots & X_{n,1} & \xrightarrow{d_1^v} & X_{n-1,1} & \cdots & X_{1,1} & \xrightarrow{d_1^v} & X_{0,1} \\
 \downarrow d_0^v & \curvearrowright & \downarrow d_n^v & \curvearrowright & \downarrow d_{n-1}^v & \curvearrowright & \downarrow d_1^v & \curvearrowright & \downarrow d_0^v \\
 & & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 \mathbf{X}_0^h : & \cdots & X_{n,0} & \xrightarrow{d_n^v} & X_{n-1,0} & \cdots & X_{1,0} & \xrightarrow{d_1^v} & X_{0,0}
 \end{array}$$

Por otra parte, los funtores diagonal y suma ordinal, [19]

$$\Delta \xrightarrow{D} \Delta \times \Delta \xrightarrow{+or} \Delta,$$

donde el funtor suma ordinal sobre objetos viene dado por $+or([p], [q]) = [p+q+1]$ y

$$\begin{aligned}
 +or(id_p, \delta_i) &= \delta_i : [p+q+1] \rightarrow [p+q+2], & 0 \leq i \leq q+1, \\
 +or(\delta_i, id_q) &= \delta_{q+i+1} : [p+q+1] \rightarrow [p+q+2], & 0 \leq i \leq p+1, \\
 +or(id_p, \sigma_i) &= \sigma_i : [p+q+1] \rightarrow [p+q], & 0 \leq i \leq q-1, \\
 +or(\sigma_i, id_q) &= \sigma_{q+i+1} : [p+q+1] \rightarrow [p+q], & 0 \leq i \leq p-1,
 \end{aligned}$$

inducen funtores

$$\mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\text{TDec} = +or^*} \mathbf{SSimpl}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\text{Diag} = D^*} \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}). \quad (1.17)$$

El funtor *total dec*, TDec toma el aspecto, para cada objeto simplicial \mathbf{X} , de la resolución del cotriple $\text{Dec} : \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ en \mathbf{X} (ver Sección 4.2), esto

es,

$$\begin{array}{c}
\text{TDec}(\mathbf{X}) : \cdots \quad \text{Dec}^3(\mathbf{X}) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1^h} \\ \xrightarrow{s_0^h} \\ \xrightarrow{d_2^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \end{array} \text{Dec}^2(\mathbf{X}) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \end{array} \text{Dec}(\mathbf{X}) \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\cdots \quad X_5 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_3} \\ \xrightarrow{s_4} \\ \xrightarrow{d_4} \\ \xrightarrow{d_3} \end{array} X_4 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_2} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{d_3} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} X_3 \\
\begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow s_0 \\ \downarrow s_1 \end{array} \\
\cdots \quad X_4 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_2} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{d_3} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} X_3 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_2 \\
\begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow d_0 \\ \downarrow d_1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow s_0 \\ \downarrow s_1 \end{array} \\
\cdots \quad X_3 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_1.
\end{array}$$

Haremos uso especialmente del functor TDec y de su adjunto por la izquierda el functor *diagonal de Artin-Mazur* [1],

$$\overline{W} : \mathbf{SSimpl}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}), \quad (1.18)$$

que asocia a cada objeto simplicial doble \mathbb{X} , el objeto simplicial $\overline{W}(\mathbb{X})$ definido cómo sigue:

Cada objeto $\overline{W}(\mathbb{X})_n$ viene dado por el subobjeto del producto $\prod_{p+q=n} X_{p,q}$ con elementos

$$\overline{W}(\mathbb{X})_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) ; x_i \in X_{i,n-i}, d_0^v(x_i) = d_{i+1}^h(x_{i+1}), 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Los operadores cara y degeneración

$$\overline{W}(\mathbb{X})_{n+1} \xleftarrow{s_j} \overline{W}(\mathbb{X})_n \xrightarrow{d_i} \overline{W}(\mathbb{X})_{n-1}$$

están dados por:

$$d_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = (d_i^v(x_0), d_{i-1}^v(x_1), \dots, d_1^v(x_{i-1}), d_i^h(x_{i+1}), d_i^h(x_{i+2}), \dots, d_i^h(x_n)),$$

$$s_j(x_0, x_1, \dots, x_n) = (s_j^v(x_0), s_{j-1}^v(x_1), \dots, s_0^v(x_j), s_j^h(x_j), s_j^h(x_{j+1}), \dots, s_j^h(x_n)).$$

Esto es, la i -ésima cara actúa sobre la $(n+1)$ -upla (x_0, x_1, \dots, x_n) aplicando d_{i-k}^v a la k -ésima componente con $k < i$, d_i^h a la k -ésima componente con $k > i$ y olvidando la i -ésima componente. De forma similar, la j -ésima degeneración repite la j -ésima componente, aplica s_{j-k}^v sobre la k -ésima componente con $k \leq j$ y s_j^h sobre la k -ésima componente con $k \geq j$.

1.3.5 La categoría de conjuntos simpliciales. Grupos de homotopía. Los funtores realización geométrica y complejo singular

En esta sección tomaremos como categoría base \mathcal{E} la categoría **Set** de conjuntos. Los objetos simpliciales sobre $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ son llamados *conjuntos simpliciales* y denotaremos por **SSet** a la categoría de conjuntos simpliciales, i.e. $\mathbf{SSet} = \mathbf{Set}^{\Delta^{op}}$. Haremos aquí un rápido repaso de algunas definiciones y resultados en la categoría **SSet**, para más detalles ver [26, 53].

Comenzamos por recordar la definición de grupos de homotopía de un conjunto simplicial de Kan. Sea \mathbf{X} un conjunto simplicial. Dos n -símplices $x, x' \in X_n$ son *homotópicos*, $x \sim x'$, si:

- $d_i x = d_i x'$, $0 \leq i \leq n$,
- existe un $(n+1)$ -símplice $y \in X_{n+1}$ tal que

$$\begin{aligned} d_n(y) &= x, \\ d_{n+1}(y) &= x', \\ d_i(y) &= s_{n-1}d_i(x), \quad 0 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

El elemento y se dice que es una *homotopía de x a x'* .

Si el conjunto simplicial \mathbf{X} satisface la condición de Kan entonces la relación de homotopía en el conjunto de n -símplices de \mathbf{X} es una relación de equivalencia.

Se define el *grupoide fundamental* de \mathbf{X} , $\pi_1(\mathbf{X})$, como el grupoide que tiene como objetos el conjunto de 0-símplices X_0 y como objeto de flechas el conjunto de las clases de homotopía de 1-símplices, o arcos, de \mathbf{X} , que denotamos por $[X_1]$, gráficamente

$$\pi_1(\mathbf{X}) = [X_1] \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} X_0 \quad (1.19)$$

donde, denotando por $[x]$ a la clase de equivalencia en $[X_1]$ de un arco $x \in X_1$ y $x_0 \in X_0$,

$$s([x]) = d_1(x), \quad t([x]) = d_0(x), \quad id(x_0) = [s_0(x_0)].$$

La composición de dos flechas $[x] : x_0 \rightarrow x_1$ e $[y] : x_1 \rightarrow x_2$ componibles en $\pi_1(\mathbf{X})$ vendrá dada por $[y][x] = [d_1(z)]$ donde z es un elemento de X_2 tal que $d_0(z) = y$ y $d_2(z) = x$, cuya existencia queda asegurada, ya que por ser \mathbf{X} un conjunto simplicial de Kan, la aplicación $K_2^1 : X_2 \rightarrow \Lambda_2^1(\mathbf{X})$ es sobreyectiva, y por tanto, dado $(y, -, x) \in \Lambda_2^1(\mathbf{X})$, existe $z \in X_2$ verificando lo anterior. Esta construcción es funtorial y aplica equivalencias homotópicas simpliciales $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ en equivalencias $\pi_1(\mathbf{f}) : \pi_1(\mathbf{X}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{Y})$ entre los correspondientes grupoides de homotopía.

Por otra parte, dado \mathbf{X} un conjunto simplicial de Kan y $x_0 \in X_0$. El n -ésimo grupo de homotopía de \mathbf{X} en x_0 $\pi_n(\mathbf{X}, x_0)$, $n \geq 1$, se define como

$$\pi_n(\mathbf{X}, x_0) = \overline{X}_n / \sim$$

donde \overline{X}_n denota al conjunto de n -símplices $x \in X_n$ tal que $d_i(x) = s_{n-2} \dots s_0(x_0)$ y \sim es la relación de homotopía restringida a los elementos de \overline{X}_n . Notemos que el primer grupo de homotopía de un conjunto simplicial \mathbf{X} en x_0 , $\pi_1(\mathbf{X}, x_0)$, coincide con el grupo de endomorfismos $\text{End}_{\pi_1(\mathbf{X})}(x_0)$ del grupoide fundamental $\pi_1(\mathbf{X})$ en el objeto x_0 . Denotamos por $[x]$ a la clase de homotopía del n -símplice $x \in \overline{X}_n$. Dados $[x], [y] \in \pi_n(\mathbf{X}, x_0)$, se tiene que la $(n+1)$ -upla de n -símplices $(s_{n-1} \dots s_0(x_0), \dots, s_{n-1} \dots s_0(x_0), x, -, y) \in \Lambda_{n+1}^n(\mathbf{X})$ y como \mathbf{X} es un conjunto simplicial de Kan, la aplicación $K_{n+1}^n : X_{n+1} \rightarrow \Lambda_{n+1}^n(\mathbf{X})$ es sobreyectiva, luego existe $z \in X_{n+1}$, tal que

$$d_i(z) = \begin{cases} s_{n-1} \dots s_0(x_0) & 0 \leq i \leq n-2, \\ x & i = n-1, \\ y & i = n+1. \end{cases}$$

De esta forma podemos definir una operación en $\pi_n(\mathbf{X}, x_0)$ para $n \geq 1$,

$$[x][y] = [d_n(z)],$$

que hace que el conjunto $\pi_n(\mathbf{X}, x_0)$ tenga estructura de grupo para $n \geq 1$, siendo además un grupo abeliano para $n \geq 2$ (ver [53]). Además, la asignación $x_0 \mapsto \pi_n(\mathbf{X}, x_0)$ es funtorial desde el grupoide fundamental $\pi_1(\mathbf{X})$, teniéndose así los funtores *grupos de homotopía*

$$\pi_n(\mathbf{X}) : \pi_1(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Gp}; x_0 \mapsto \pi_n(\mathbf{X}, x_0).$$

Por último, nótese que $\pi_0(\mathbf{X})$ el conjunto de componentes conexas de \mathbf{X} , coincide con el conjunto de clases de homotopía de vértices de \mathbf{X} . Diremos que \mathbf{X} es *conexo* si $\pi_0(\mathbf{X})$ es terminal (es decir, tiene un solo elemento).

La definición de grupos de homotopía se puede también expresar en términos de homotopías de aplicaciones. Para $n \geq 0$, el n -símplice estándar (*simplicial*) $\Delta[n]$ es el conjunto simplicial representado por $[n]$, esto es,

$$\Delta[n] = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n]) : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

que tienen por tanto como conjunto de m -símplices $\Delta[n]_m = \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ al conjunto de aplicaciones de $[m]$ en $[n]$ en la categoría Δ^{op} . Se puede entonces identificar un m -símplice de $\Delta[n]$ con una $(m+1)$ -upla de enteros (a_0, a_1, \dots, a_m) ,

tales que $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_m \leq n$, siendo los operadores cara y degeneración las aplicaciones definidas por

$$d_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m),$$

$$s_i(a_0, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m).$$

El Lema de Yoneda nos asegura que para cualquier conjunto simplicial \mathbf{X} las aplicaciones simpliciales $\Delta[n] \rightarrow \mathbf{X}$ están en correspondencia biyectiva con los n -símplices de \mathbf{X} , es decir, existe una biyección natural

$$\text{Hom}_{\mathbf{SSet}}(\Delta[n], \mathbf{X}) \cong X_n.$$

De forma que a cada $x \in X_n$ le corresponde la única aplicación simplicial $\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow \mathbf{X}$ tal que $\bar{x}_n(1_{[n]}) = x$, donde $1_{[n]}$ es la aplicación identidad en $[n]$ que se identifica con la $(n+1)$ -upla $(0, 1, \dots, n)$. Si llamamos $\partial\Delta[n]$ al menor subobjeto de $\Delta[n]$ que contiene las caras $d_j(1_{[n]})$, $0 \leq j \leq n$, dos elementos $x, y \in X_n$ son homotópicos si y sólo si, existe una homotopía entre los morfismos \bar{x} e \bar{y} relativa a $\partial\Delta[n]$. Ésto nos permite identificar, para cada vértice $x_0 \in X_0$, el grupo $\pi_n(\mathbf{X}, x_0)$ con el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $\Delta[n]$ en \mathbf{X} que aplican $\partial\Delta[n]$ en x_0 .

Si $\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow \mathbf{X}$ es el representante de un elemento $[x] \in \pi_n(\mathbf{X}, x_0)$ y $\omega : \Delta[1] \rightarrow \mathbf{X}$ es el representante de una flecha en $\text{Hom}_{\pi_1(\mathbf{X})}(x_0, y_0)$, entonces $\omega_*\bar{x}$ es el representante de un elemento del grupo $\pi_n(\mathbf{X}, y_0)$. Además, la correspondencia $[x] \mapsto [\omega_*\bar{x}]$ es un morfismo de grupos que es funtorial en $[\omega]$, y por tanto, para $n \geq 2$ la asignación $x_0 \mapsto \pi_n(\mathbf{X}, x_0)$, determina un funtor de $\pi_1(\mathbf{X})$ en \mathbf{Ab} . Es decir, para cada $n \geq 2$, tenemos un funtor

$$\pi_n(\mathbf{X}) : \pi_1(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

en otras palabras, $\pi_n(\mathbf{X})$ es un $\pi_1(\mathbf{X})$ -módulo (ver [41]).

Notamos ahora que el carácter cartesiano cerrado de la categoría de conjuntos se traslada a la categoría de conjuntos simpliciales. Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{SSet}$ el objeto exponencial $\mathbf{Y}^{\mathbf{X}}$ se construye de la siguiente forma:

- (i) $(\mathbf{Y}^{\mathbf{X}})_n = \text{Hom}_{\mathbf{SSet}}(\mathbf{X} \times \Delta[n], \mathbf{Y})$, es decir, los n -símplices son aplicaciones simpliciales $\mathbf{f} : \mathbf{X} \times \Delta[n] \rightarrow \mathbf{Y}$,
- (ii) Los operadores cara y degeneración $(\mathbf{Y}^{\mathbf{X}})_{n+1} \xleftarrow{s_i} (\mathbf{Y}^{\mathbf{X}})_n \xrightarrow{d_i} (\mathbf{Y}^{\mathbf{X}})_{n-1}$ vienen dados por $d_i(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(Id_{\mathbf{X}} \times d_i)$ y $s_i(\mathbf{f}) = \mathbf{f}(Id_{\mathbf{X}} \times s_i)$.

Para finalizar esta sección vamos a relacionar la categoría de conjuntos simpliciales con la categoría de espacios. Denotaremos por \mathbf{Top} a la categoría de espacios topológicos.

Las categorías **SSet** y **Top** están relacionadas mediante los funtores *complejo singular total* S y su adjunto por la izquierda el funtor *realización geométrica* $|\cdot|$,

$$|\cdot| : \mathbf{SSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S, \quad |\cdot| \dashv S. \quad (1.20)$$

Recordemos cómo están definidos estos funtores. El n -símplice estándar topológico es el subespacio

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) / 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^n t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Se tienen aplicaciones continuas (caras y degeneraciones geométricas)

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sigma_i} \Delta^n \xleftarrow{\delta_i} \Delta^{n-1},$$

definidas por

$$\begin{aligned} \delta_i(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}), \\ \sigma_i(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) &= (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Dado $X \in \mathbf{Top}$, un n -símplice singular de X es una aplicación continua $f : \Delta^n \rightarrow X$. El *complejo singular total* de X [53] es el conjunto simplicial $S(X)$, cuyo conjunto de n -símplices es el conjunto de n -símplices singulares de X y cuyos operadores cara y degeneración están dados por:

$$\begin{aligned} (d_i f)(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) &= f \delta_i(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}), \\ (s_i f)(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) &= f \sigma_i(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1}), \end{aligned}$$

para cada $f : \Delta^n \rightarrow X \in S_n(X)$. Esta construcción es functorial, de forma que se tiene un funtor:

$$S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SSet}; \quad X \mapsto S(X).$$

Por otra parte, dado un conjunto simplicial \mathbf{X} , viendo cada conjunto de n -símplices como un espacio con la topología discreta y considerando en la unión disjunta

$$\bar{X} = \bigcup_{n \geq 0} (X_n \times \Delta^n),$$

la relación de equivalencia \approx definida por:

$$(d_i x_n, u_{n-1}) \approx (x_n, \delta_i u_{n-1}) \quad y \quad (s_i x_n, u_{n+1}) \approx (x_n, \sigma_i u_{n+1}),$$

con $x_n \in X_n$, $u_{n-1} \in \Delta^{n-1}$ y $u_{n+1} \in \Delta^{n+1}$, el espacio cociente

$$|\mathbf{X}| = \bar{X} / \approx$$

es la *realización geométrica de Milnor* de \mathbf{X} [53]. Esta construcción es también funtorial, de manera que se tiene un funtor

$$|\cdot| : \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}; \quad \mathbf{X} \mapsto |\mathbf{X}|.$$

Nótese que para cada conjunto simplicial \mathbf{X} , su realización geométrica $|\mathbf{X}|$ es un CW-complejo, y en particular, un espacio Hausdorff compactamente generado entre los cuales están los CW-complejos (ver [41], [65]). De hecho, el funtor realización geométrica toma valores en la categoría \mathbf{CGHaus} de todos los espacios Hausdorff compactamente generados. En lo que sigue interpretamos este funtor como un funtor de \mathbf{SSet} en esta nueva categoría \mathbf{CGHaus} ya que no perdemos información homotópica, y sin embargo, conseguimos que conserve límites finitos (ver [36]), propiedad que no es cierta al considerar la realización geométrica como un funtor sobre la categoría \mathbf{Top} de todos los espacios topológicos.

Destacaremos las siguientes propiedades de estos funtores:

- La realización geométrica conserva productos.
- La realización geométrica conserva homotopías, esto es: si \mathbf{f} y \mathbf{g} son dos aplicaciones simpliciales homotópicas, entonces $|\mathbf{f}|$ y $|\mathbf{g}|$ son dos aplicaciones continuas homotópicas.
- Si \mathbf{K} es un conjunto simplicial, $|\mathbf{K}|$ es un CW-complejo, que tiene una n -celda por cada n -símplice no degenerado de \mathbf{K} . Como ningún 0-símplice es degenerado, por cada 0-símplice tenemos un punto en $|\mathbf{K}|$.
- Si $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es una fibración, entonces $|f| : |\mathbf{X}| \rightarrow |\mathbf{Y}|$ también lo es. Además la realización geométrica conserva fibras (ver [9], página 240).
- $S(X)$ es un conjunto simplicial de Kan.
- $\pi_i(S(X), x_0) = \pi_i(X, x_0)$.
- Si \mathbf{K} es de Kan, $\pi_i(\mathbf{K}, x_0) = \pi_i(|\mathbf{K}|, x_0)$.
- Para cada espacio X la componente de la unidad de la adjunción $|\cdot| \dashv S$ en X , $X \rightarrow |SX|$ es una equivalencia homotópica débil (ver [9], página 237), esto es, induce isomorfismos en los grupos de homotopía.
- Para cada conjunto simplicial \mathbf{X} la componente de la cunidad de la adjunción $|\cdot| \dashv S$ en \mathbf{X} , $S|\mathbf{X}| \rightarrow \mathbf{X}$ es una equivalencia homotópica débil (ver [9], página 237).
- Los funtores realización geométrica y complejo singular inducen una equivalencia entre las correspondientes teorías de homotopía.

Lo anterior nos sugiere la definición de los grupos de homotopía de un conjunto simplicial \mathbf{X} que no sea de Kan, como los grupos de homotopía de su realización geométrica, es decir, para cada 0-símplice x_0 definimos

$$\pi_i(\mathbf{X}, x_0) = \pi_i(S|\mathbf{X}|, x_0),$$

estando bien definido debido a que $S|\mathbf{X}|$ es un conjunto simplicial de Kan.

A partir de la adjunción (1.20) se dota a la categoría \mathbf{SSet} de conjuntos simpliciales de una estructura de categoría de modelos de Quillen con:

- fibraciones, las fibraciones de Kan,
- equivalencias débiles, los morfismos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ tales que $\pi_1(\mathbf{f})$ es una equivalencia de categorías y $\pi_n(\mathbf{f})$ son isomorfismos naturales para $n \geq 1$, y
- cofibraciones, las aplicaciones simpliciales inyectivas.

1.4 Hipergrupoides

1.4.1 1-Hipergrupoides

Daremos en esta sección una definición alternativa de grupoide, que será fácil de generalizar para obtener el concepto de n -hipergrupoide.

Recordemos de nuevo que estamos trabajando internamente en una categoría \mathcal{E} .

Definición 1.4.1. *Un 1-hipergrupoide \mathcal{G} consta de un objeto simplicial truncado a nivel uno*

$$\begin{array}{ccc} & s_0 & \\ & \curvearrowright & \\ G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & G_0 \end{array}$$

junto con una operación corchete (morfismo en \mathcal{E})

$$[\] : \Lambda_2^2(\mathcal{G}) \longrightarrow G_1 ; (f_0, f_1, -) \mapsto [f_0, f_1]$$

satisfaciendo las siguientes axiomas:

(H1) Para todo $(f_0, f_1, -) \in \Lambda_2^2(\mathcal{G})$, la terna $(f_0, f_1, [f_0, f_1]) \in \Delta_2(\mathcal{G})$, es decir,

$$d_0([f_0, f_1]) = d_1(f_0) \quad y \quad d_1([f_0, f_1]) = d_1(f_1).$$

(H2) **Identidades;**

$$[f, f] = s_0 d_1(f) \quad y \quad [s_0 d_0(f), f] = f,$$

para todo $f \in G_1$.

(H3) **Asociatividad:**

Para todos los elementos $f, g, h \in X_1$ tales que $d_0(f) = d_0(g) = d_0(h)$ se tiene

$$[[f, g], [f, h]] = [g, h].$$

(H4) **Existencia de inversos:**

Dado un elemento $(-, f_1, f_2) \in \Lambda_2^0(\mathcal{G})$, existe un único elemento $g \in G_1$ tal que $[g, f_1] = f_2$ y dado $(f_0, -, f_2) \in \Lambda_2^1(\mathcal{G})$, existe un único elemento $h \in G_1$ tal que $[f_0, h] = f_2$.

Denotaremos por **Hiper**₁(\mathcal{E}) a la categoría de 1-hipergrupoides internos en \mathcal{E} , donde un morfismo de 1-hipergrupoides es un morfismo simplicial truncado que respeta la operación corchete. En el caso de ser $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ escribiremos simplemente **Hiper**₁. Dado un 1-hipergrupoide \mathcal{G} , el axioma (i) nos permite definir una inclusión

$$j : \Lambda_2^2(\mathcal{G}) \hookrightarrow \Delta_2\mathcal{G}, (f_0, f_1, -) \mapsto (f_0, f_1, [f_0, f_1]).$$

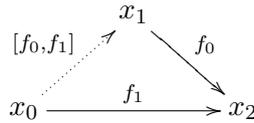
Por otra parte, la condición de identidades, axioma (ii), nos aseguran que las degeneraciones canónicas $s_i : G_1 \rightarrow \Delta_2(\mathcal{G})$, $0 \leq i \leq 1$, factorizan por j . Estas observaciones nos permiten definir el *nervio de un 1-hipergrupoide* \mathcal{G} como el objeto simplicial $\text{Ner}(\mathcal{G})$ que tienen la misma 1-truncación que \mathcal{G} , esto es,

$$\text{Ner}_i(\mathcal{G}) = G_i, \quad 0 \leq i \leq 1,$$

que en dimensión 2 tiene la imagen del morfismo j (con operadores cara las proyecciones y las degeneraciones las mismas que las del núcleo simplicial) y que en dimensiones mayores tiene núcleos simpliciales, esto es,

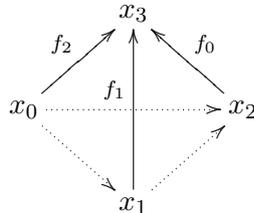
$$\text{Ner}(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^2(\text{Ner}(\mathcal{G})).$$

Si representamos los 1-símplices de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ como flechas, los 2-símplices de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ pueden ser representados por diagramas

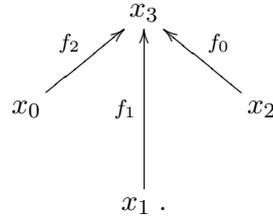


cuya cara i se obtiene, al igual que para el nervio de una categoría, eliminando el objeto x_i y todas las flechas que lleguen o salgan de él.

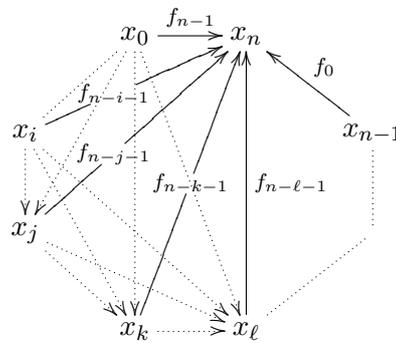
Un 3-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$, se representará entonces por un diagrama



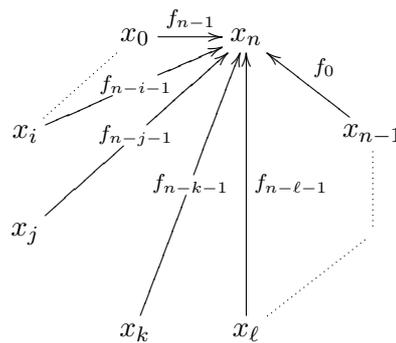
en el que las flechas punteadas se obtienen utilizando la operación corchete. La cara i se obtiene eliminando el objeto x_i y todas las flechas que salgan o lleguen a él. Se puede entonces identificar un 3-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ con una terna de flechas con el mismo final,



Para $n \geq 4$, un n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ puede representarse por un diagrama



en el que las flechas punteadas se obtienen a partir de las de trazo continuo utilizando la operación corchete. De nuevo la cara i de un n -símplice se obtiene eliminando el objeto x_i y todas las flechas que salgan o lleguen a él. Es claro entonces que dar un n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ es equivalente a dar una sucesión de flechas $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ con el mismo final



y que, en términos de estas familias, los operadores cara y degeneración están

dados por las fórmulas:

$$\begin{aligned}
d_i(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) &= (f_0, \dots, f_{n-i-2}, f_{n-i}, \dots, f_{n-1}), & 0 \leq i \leq n-1, \\
d_n(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) &= ([f_0, f_1], [f_0, f_2], \dots, [f_0, f_{n-1}]), \\
s_i(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) &= (f_0, \dots, f_{n-i-1}, f_{n-i-1}, f_{n-i}, \dots, f_{n-1}).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

De forma análoga a la Proposición 1.3.2 tenemos

Proposición 1.4.2. *Un objeto simplicial \mathbf{X} es el nervio de un 1-hipergrupoide si y solamente si, las proyecciones canónicas $K_n^i : X_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{X})$ son isomorfismos para todo $n \geq 2$ y todo $0 \leq i \leq n$.*

Demostración: Supongamos primero que $\mathbf{X} = \text{Ner}(\mathcal{G})$ es el nervio de un 1-hipergrupoide. De las fórmulas (1.21) para las caras de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ es inmediato deducir que cualquier n -símplice de \mathbf{X} , para $n \geq 2$, está totalmente determinado por n de sus $(n+1)$ caras y ésto es claramente equivalente a que los morfismos $K_n^i : X_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{X})$, $n \geq 2$ y $0 \leq i \leq n$ sean isomorfismos.

La demostración del recíproco es análoga a la demostración de la Proposición 1.3.2. En efecto: Sea \mathbf{X} objeto simplicial tal que K_n^i son isomorfismos para todo $n \geq 2$ y cada $0 \leq i \leq n$. En particular, el morfismo canónico $K_2^2 : X_2 \rightarrow \Lambda_2^2(\mathbf{X})$ es un isomorfismo y cómo antes, todo elemento $x \in X_2$ puede identificarse con una terna $x = (x_0, x_1, x_2) \in \Delta_2(\mathbf{X})$ con $x_i = d_i(x)$ con cada uno de los x_i determinados unívocamente por los restantes. En particular, x_2 está determinado por x_0, x_1 , escribiremos $x_2 = [x_0, x_1]$. De esta forma tenemos definido un morfismo:

$$[\] = d_2(K_2^2)^{-1} : \Lambda_2^2(\mathbf{X}) \xrightarrow{(K_2^2)^{-1}} X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 . \tag{1.22}$$

Entonces, la 1-truncación de \mathbf{X} ,

$$\begin{array}{ccc}
& s_0 & \\
& \curvearrowright & \\
X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\
& \xrightarrow{d_0} & \\
& &
\end{array}$$

junto con la aplicación $[\]$ en (1.22) determinan un 1-hipergrupoide que escribiremos por \mathcal{X} . Veamos que en efecto se satisfacen los axiomas:

- (i) Dado $(x_0, x_1, -) \in \Lambda_2^2(\mathbf{X})$ por ser K_2^2 un isomorfismo, podemos asegurar la existencia de un único elemento $x \in X_2$ tal que $K_2^2(x) = (x_0, x_1, -)$, o lo que es igual, tal que $x_0 = d_0(x)$ y $x_1 = d_1(x)$, luego se tiene:

$$d_i([x_0, x_1]) = d_i(d_2(K_2^2)^{-1}(x_0, x_1, -)) = d_1 d_i(K_2^2)^{-1}(x_0, x_1, -) = d_1(x_i),$$

para todo $0 \leq i \leq 1$,

- (ii) Dado $x \in X_1$, el elemento $(s_0 d_0(x), x, -) \in \Lambda_2^2(\mathbf{X})$, y por ser K_2^2 un isomorfismo, podemos asegurar la existencia de un elemento $y = s_1(x) \in X_2$ tal que $K_2^2(y) = (s_0 d_0(x), x, -)$, luego se tiene

$$[s_0 d_0(x), x] = d_2(K_2^2)^{-1}(s_0 d_0(x), x, -) = d_2 s_1(x) = x.$$

Por otra parte, dado $x \in X_1$, el elemento $(x, x, -) \in \Lambda_2^2(\mathbf{X})$, por lo que podemos asegurar que existe $y = s_0(x) \in X_2$ tal que $K_2^2(y) = (x, x, -)$ y, por tanto,

$$[x, x] = d_2(K_2^2)^{-1}(x, x, -) = d_2 s_0(x) = s_0 d_1(x).$$

- (iii) Como para $n \geq 2$, las proyecciones K_n^i son isomorfismos, se tiene que $X_n = \Delta_n(\mathbf{X})$ para $n > 2$ como ocurría en la demostración de la Proposición 1.3.2. Dados $x, y, z \in X_1$ tal que $d_0(x) = d_0(y) = d_0(z)$ tenemos un elemento en X_3 que vendrá dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} x & y & [x, y] \\ x & z & [x, z] \\ y & z & [y, z] \\ [x, y] & [x, z] & [[x, y], [x, z]] \end{pmatrix},$$

y como $d_2 d_3 = d_2 d_2$ se tiene que $[[x, y], [x, z]] = [y, z]$.

- (iv) Por último, dados $(-, x_1, x_2) \in \Lambda_2^0(\mathbf{X})$ y $(x_0, -, x_2) \in \Lambda_2^1(\mathbf{X})$ por ser K_2^0 y K_2^1 isomorfismos podemos asegurar que existen $x', y' \in X_2$ tal que $K_2^0(x') = (-, x_1, x_2)$ y $K_2^1(y') = (x_0, -, x_2)$, luego se tiene que los elementos

$$(d_0(x'), x_1, -) \quad \text{y} \quad (x_0, d_1(y'), -) \in \Lambda_2^2(\mathbf{X}),$$

luego existen $x = d_0(x')$ e $y = d_1(y')$ tales que

$$\begin{aligned} [x, x_1] &= d_2(K_2^2)^{-1}(d_0(x'), x_1, -) = d_2(x') = x_2, \\ [x_0, y] &= d_2(K_2^2)^{-1}(x_0, d_1(y'), -) = d_2(y') = x_2. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que el nervio de este 1-hipergrupoide \mathcal{X} coincide con el conjunto simplicial \mathbf{X} . ■

Como consecuencia de las Proposiciones 1.3.2 y 1.4.2 deducimos que las categorías de grupoides y 1-hipergrupoides son isomorfas, mediante un isomorfismo que además hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gpd}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Hiper}_1(\mathcal{E}) \\ & \searrow \text{Ner} & \swarrow \text{Ner} \\ & \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}). & \end{array}$$

Explícitamente, este isomorfismo viene dado cómo sigue: Dado un grupoide $\mathcal{C} : A \rightrightarrows O$ tenemos un 1-hipergrupoide \mathcal{G} cuya truncación es el grafo del grupoide:

$$\begin{array}{ccc} & s_0=id & \\ & \curvearrowright & \\ A & \xrightarrow{d_1=s} & O \\ & \xleftarrow{d_0=t} & \end{array}$$

y cuya operación corchete está dada por:

$$[\] : \Lambda_2^2(\mathcal{G}) \longrightarrow A; \quad (f_0, f_1, -) \mapsto [f_0, f_1] = f_0^{-1}f_1.$$

Recíprocamente, cada 1-hipergrupoide $\mathcal{G} : G_1 \rightrightarrows G_0$ define un grupoide cuyo objeto de objetos es G_0 , su objeto de flechas es G_1 , los morfismos dominio, codominio e identidad vienen dados por $s = d_1$, $t = d_0$ y $id = s_0$ y la composición viene dada por:

$$yx = z \Leftrightarrow [y, z] = x,$$

donde sabemos que tal elemento z existe por el axioma de existencia de inversos (iv) de la definición de 1-hipergrupoide. Con esta definición, dado un objeto $x \in G_1$ su inverso respecto de esta composición viene dado por $[x, s_0d_0(x)]$. Es fácil comprobar que estas dos correspondencias son funtoriales y que una es la inversa de la otra.

1.4.2 n -Hipergrupoides

En esta sección daremos la definición de n -hipergrupoide que se obtiene generalizando la definición 1.4.1 de 1-hipergrupoide, ver [39].

Definición 1.4.3. *Por un n -hipergrupoide en \mathcal{E} entenderemos un objeto simplicial truncado a nivel n , \mathcal{G} , junto con una operación corchete (morfismo en \mathcal{E})*

$$[\] : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}) \longrightarrow G_n; \quad (x_0, \dots, x_n, -) \mapsto [x_0, \dots, x_n]$$

que satisface las siguientes condiciones:

$$(H1) \quad d_i([x_0, \dots, x_n]) = d_n(x_i), \quad 0 \leq i \leq n,$$

(H2) **Identities;**

$$[s_{i-1}d_0(x), \dots, s_{i-1}d_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_{n-1}(x)] = s_i d_n(x),$$

$$[s_{n-1}d_0(x), \dots, s_{n-1}d_{n-1}(x), x] = x,$$

para todo $0 \leq i < n - 1$ y $x \in G_n$.

(H3) **Asociatividad;**

$$[[x_{00}, \dots, x_{0n}], [x_{10}, \dots, x_{1n}], \dots, [x_{n0}, \dots, x_{nn}]] = [x_{0n}, x_{1n}, \dots, x_{nn}],$$

para $(x_{i0}, \dots, x_{in}, -) \in \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G})$ tales que $x_{ij} = x_{j+1i}$.

(H4) **Existencia de inversos;**

Para cada $(x_0, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \Lambda_{n+1}^i(\mathcal{G})$ y cada $0 \leq i \leq n$, existe un único elemento $x \in G_n$ tal que

$$[x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n] = x_{n+1}$$

Denotaremos por $\mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E})$ a la categoría de n -hipergrupoides en \mathcal{E} , donde un morfismo de n -hipergrupoides es un morfismo simplicial truncado que respeta las operaciones corchete. En el caso de ser $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ escribiremos simplemente \mathbf{Hyper}_n .

Ejemplo 1.4.4.

(1) En un objeto simplicial truncado a nivel n , \mathbf{X} , tal que $X_n = \Delta_n(\mathbf{X})$ existe una única operación corchete que lo dota de estructura de n -hipergrupoide. En efecto, puesto que un elemento en $X_n = \Delta_n(\mathbf{X})$ está determinado de forma única por sus caras, la condición (H1) en la definición de hipergrupoide nos determina totalmente la operación corchete, que ha de ser:

$$[x_0, \dots, x_n] = (d_n(x_0), \dots, d_n(x_n)). \quad (1.23)$$

Es fácil, por otro lado, comprobar que una operación definida por la fórmula (1.23) satisface el resto de las condiciones de n -hipergrupoide.

(2) Como un caso particular del ejemplo anterior tenemos que para cada objeto O en la categoría \mathcal{E} , si denotamos por \mathbf{O} al objeto simplicial truncado a nivel n que en cada dimensión $k \leq n$ tiene al objeto O como objeto de k -símplices y todos los operadores cara y degeneración son la identidad (lo que hace que $\Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathbf{O}) = \{(x, x, \dots, x, -) / x \in O\}$), para este objeto simplicial truncado existe una única estructura de n -hipergrupoide, cuya operación corchete viene dada por

$$[] : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathbf{O}) \longrightarrow O; \quad [x, x, \dots, x] = x.$$

Éste será el n -hipergrupoide constante sobre el objeto O .

(3) Dado un objeto grupo abeliano Π interno en \mathcal{E} , podemos considerar para $n \geq 1$ el objeto simplicial truncado en dimensión n ,

$$\Pi \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathbf{1} \quad \cdots \quad \mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathbf{1},$$

donde $\mathbf{1}$ denota al objeto terminal en \mathcal{E} . El objeto de caras abiertas Λ_{n+1}^{n+1} es el producto Π^{n+1} , entonces la operación corchete definida por la fórmula

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} x_i$$

dota a este objeto simplicial truncado de una estructura de n -hipergrupoide. Notemos que si $n > 1$ la asociatividad requiere del carácter abeliano de Π pudiendo eliminar esta condición en el caso $n = 1$.

Observemos también que la operación suma, $+$: $\Pi \times \Pi \rightarrow \Pi$, induce un morfismo de n -hipergrupoides “suma” de forma que el n -hipergrupoide anterior tiene una estructura de objeto grupo abeliano interno en la categoría $\mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E})$. Nótese que tanto aquí como en lo que sigue hemos utilizado notación aditiva para la operación del grupo abeliano Π .

Como hicimos en la sección anterior, Proposición 1.4.2, vamos ahora a identificar la categoría $\mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E})$ de n -hipergrupoides en \mathcal{E} con una subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ de objetos simpliciales en \mathcal{E} . Haremos esto vía la noción de nervio de un n -hipergrupoide.

Observamos primero que la condición (H1) en la definición de n -hipergrupoide nos permite definir un monomorfismo en \mathcal{E}

$$j : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \Delta_{n+1}(\mathcal{G}), (x_0, \dots, x_n, -) \mapsto (x_0, \dots, x_n, [x_0, \dots, x_n]), \quad (1.24)$$

por lo que podemos identificar el objeto de caras abiertas $\Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G})$ con un subobjeto de $\Delta_{n+1}(\mathcal{G})$,

$$\Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}) \cong \{(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Delta_{n+1}(\mathcal{G}) / x_{n+1} = [x_0, \dots, x_n]\}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que los morfismos degeneración canónica $s_i : G_n \rightarrow \Delta_{n+1}(\mathcal{G})$, $0 \leq i \leq n$, vienen dados por:

$$s_i(x) = (s_{i-1}d_0(x), \dots, s_{i-1}d_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_n(x)),$$

la condición (H2) nos dice que estos operadores factorizan a través de j . Además, la condición (H4) nos permite definir isomorfismos

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1}^i(\mathcal{G}) &\xrightarrow{\cong} \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}), \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n, -), \end{aligned}$$

siendo $x \in G_n$ el único elemento tal que $[x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n] = x_{n+1}$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Estas observaciones nos permiten definir el *nervio de un n -hipergrupoides* \mathcal{G} como el objeto simplicial en \mathcal{E} que denotamos por $\text{Ner}(\mathcal{G})$, que tiene la misma n -truncación que \mathcal{G} , esto es,

$$\text{Ner}_i(\mathcal{G}) = G_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

que en dimensión $n+1$ es la imagen de j , $\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) = \text{im}(j)$, con operadores cara las proyecciones y operadores degeneración los mismos que los del núcleo simplicial, y que en dimensiones mayores tiene núcleos simpliciales, es decir,

$$\text{Ner}(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^{n+1}(\text{Ner}(\mathcal{G})).$$

Esta construcción nervio es funtorial, de manera que tenemos un funtor

$$\text{Ner} : \mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E}) \quad (1.25)$$

que claramente es fiel y pleno (ver Corolario 1.4.7). Podemos identificar entonces la categoría $\mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E})$ con una subcategoría de la categoría $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$.

La siguiente proposición es una generalización de la Proposición 1.4.2 y nos caracteriza los objetos simpliciales que son nervios de n -hipergrupoides:

Proposición 1.4.5. *Un objeto simplicial \mathbf{X} es el nervio de un n -hipergrupoides si y sólo si, las proyecciones canónicas $K_m^i : X_m \longrightarrow \Lambda_m^i(\mathbf{X})$, $0 \leq i \leq m$, son isomorfismos para todo $m \geq n+1$.*

Demostración: De forma análoga a la demostración de la Proposición 1.4.2, supongamos primero que $\mathbf{X} = \text{Ner}(\mathcal{G})$ es el nervio de un n -hipergrupoides. Teniendo en cuenta que

$$\text{Ner}(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^{n+1}(\text{Ner}(\mathcal{G})),$$

el Lema 1.3.1 nos asegura que los morfismos K_m^i son isomorfismos para $m \geq n+3$ y todo $0 \leq i \leq m$.

Por otro lado, tenemos que

$$\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) = \text{im}(j) \cong \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}),$$

de donde K_{n+1}^{n+1} es un isomorfismo. Además la condición (H_4) de existencia de inversos nos permite definir isomorfismos, para cada $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1}^i(\mathcal{G}) &\longrightarrow \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}), \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, -), \end{aligned}$$

siendo $x_i \in G_n$ el único elemento tal que $[x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] = x_{n+1}$, que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) & \\ K_{n+1}^i \swarrow & & \searrow K_{n+1}^{n+1} \\ \Lambda_{n+1}^i(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & \Lambda_{n+1}^{n+1} \end{array}$$

luego también se tiene que K_{n+1}^i es un isomorfismo para $0 \leq i \leq n$.

Finalmente, en dimensión $(n+2)$ se tiene $\text{Ner}_{n+2}(\mathcal{G}) = \Delta_{n+2}(\text{Ner}(\mathcal{G}))$ por lo que un $(n+2)$ -símplice x de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ está totalmente determinado por sus caras que a su vez están determinadas por sus caras, así pues x puede identificarse con una matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0n} & [x_{00}, \dots, x_{0n}] \\ x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n} & [x_{10}, \dots, x_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn} & [x_{n0}, \dots, x_{nn}] \\ [x_{00}, \dots, x_{0n}] & [x_{10}, \dots, x_{1n}] & \dots & [x_{n-10}, \dots, x_{n-1n}] & [x_{n0}, \dots, x_{nn}] \end{array} \right) \quad (1.26)$$

con $x_{ij} = d_j(x_i) = d_{i-1}(x_j) = x_{j i-1} \in G_n$, $0 \leq j < i \leq n$. Es entonces inmediato comprobar que $(n+2)$ cualesquiera de las $(n+3)$ filas de la matriz la determinan totalmente y, por tanto, cada $(n+2)$ -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ está totalmente determinado por $(n+2)$ de sus $(n+3)$ caras, lo que nos asegura que los morfismos K_{n+2}^i son isomorfismos, para $0 \leq i \leq n+2$. Nótese que la condición de asociatividad $(H3)$ nos asegura que la última fila de la matriz anterior es del mismo tipo que las anteriores, esto es

$$[[x_{00}, \dots, x_{0n}], [x_{10}, \dots, x_{1n}], \dots, [x_{n-10}, \dots, x_{n-1n}]] = [x_{n0}, \dots, x_{nn}].$$

Recíprocamente, sea $\mathbf{X} \in \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ un objeto simplicial tal que las proyecciones K_m^i son isomorfismos para $m \geq n+1$ y todo $0 \leq i \leq m$. Teniendo en cuenta que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & X_{n+1} & \\ D_{n+1} \swarrow & & \searrow K_{n+1}^{n+1} \\ \Delta_{n+1}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{H_{n+1}^{n+1}} & \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathbf{X}) \end{array} \quad (1.27)$$

y que K_{n+1}^{n+1} es un isomorfismo, deducimos que D_{n+1} es monomorfismo. Así, podemos identificar los elementos $x \in X_{n+1}$ con $(n+2)$ -uplas

$$x \equiv (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{X}), \quad \text{con } x_i = d_i(x).$$

Además, puesto que cada K_{n+1}^i es también un isomorfismo, cada uno de los x_i están determinados unívocamente por los restantes. En particular, x_{n+1} está determinado por x_0, \dots, x_n , por lo que podemos denotar $x_{n+1} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$. De esta forma tenemos definido un morfismo

$$[\] = d_{n+1}(K_{n+1}^{n+1})^{-1} : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathbf{X}) \xrightarrow{(K_{n+1}^{n+1})^{-1}} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n. \quad (1.28)$$

Entonces la n -truncación $\text{tr}_n(\mathbf{X})$ de \mathbf{X} junto con el morfismo $[\]$ en (1.28) determinan un n -hipergrupoide que denotaremos \mathcal{X} . En efecto, veamos que se cumplen los axiomas:

(H1) La $(n+2)$ -upla $(x_0, \dots, x_n, [x_0, \dots, x_n]) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{X})$ y por tanto

$$d_i([x_0, \dots, x_n]) = d_n(x_i),$$

para todo $0 \leq i \leq n$.

(H2) Para cada $x \in X_n$, el elemento $s_i(x) \in X_{n+1}$ está identificado con

$$s_i(x) \equiv (s_{i-1}d_0(x), \dots, s_{i-1}d_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_{n-1}(x), s_i d_n(x)),$$

si $0 \leq i \leq n-1$ y si $i = n$ con

$$s_n(x) \equiv (s_{n-1}d_0(x), \dots, s_{n-1}d_{n-1}(x), x, x),$$

y por tanto

$$[s_{i-1}d_0(x), \dots, s_{i-1}d_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_{n-1}(x)] = s_i d_n(x),$$

para $0 \leq i \leq n-1$ y

$$[s_{n-1}d_0(x), \dots, s_{n-1}d_{n-1}(x), x] = x.$$

(H3) Por ser K_{n+2}^{n+2} un isomorfismo cada elemento $x \in X_{n+2}$ está determinado por sus $(n+2)$ primeras caras y éstas a su vez por sus $(n+1)$ -primeras caras. Así podemos identificar un elemento de X_{n+2} con una matriz como (1.26), cuyas caras están dadas por las columnas. Las identidades simpliciales en las caras de x implican que

$$[[x_{00}, \dots, x_{0n}], [x_{10}, \dots, x_{1n}], \dots, [x_{n-10}, \dots, x_{n-1n}]] = [x_{n0}, \dots, x_{nn}].$$

(H4) Hemos identificado los elementos de X_{n+1} con $(n+2)$ -uplas de la forma

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, [x_0, \dots, x_n]) \in \Delta_{n+1}(\mathbf{X}),$$

el hecho de ser cada morfismo K_{n+1}^i un isomorfismo nos dice que tal elemento está determinado por $(n+1)$ cualquiera de sus $(n+2)$ componentes y esto es equivalente al axioma (H4).

Por último, observamos que ya hemos identificado X_{n+1} con $\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{A})$ y que, por razonamientos análogos, del hecho de ser $K_m^i : X_m \rightarrow \Lambda_m^i(\mathbf{X})$ isomorfismos para $m \geq n+1$, podemos deducir que $\mathbf{X} \cong \text{Cosk}^{n+1}(\mathbf{X})$. Concluimos entonces que

$$\text{Ner}(\mathcal{A}) \cong \mathbf{X}.$$

■

Pero además, podemos caracterizar los morfismos simpliciales con codominio el nervio de un n -hipergrupoide, como nos muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.4.6 (La condición de cociclo). *Sea \mathcal{G} un n -hipergrupoide en \mathcal{E} y \mathbf{X} un objeto simplicial cualquiera en \mathcal{E} . Entonces un morfismo simplicial $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ está totalmente determinado por su n -truncación $\text{tr}_n(\mathbf{f})$ y recíprocamente, una truncación $\text{tr}_n(\mathbf{f}) : \text{tr}_n(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{G}$ determina un morfismo simplicial $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ si y sólo si, satisface la siguiente condición de cociclo*

$$f_n d_{n+1}(x) = [f_n d_0(x), \dots, f_n d_n(x)],$$

para cualquier $(n+1)$ -símplice x de \mathbf{X} .

Demostración: Teniendo en cuenta que $\text{Ner}(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^{n+1}(\text{Ner}(\mathcal{G}))$, un morfismo simplicial truncado a nivel $n+1$, $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{f}) : \text{tr}_{n+1}(\mathbf{X}) \rightarrow \text{tr}_{n+1}(\text{Ner}(\mathcal{G}))$ se extiende de forma única a un morfismo simplicial $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$. Luego para demostrar esta proposición bastará con ver que la truncación $\text{tr}_n(\mathbf{f}) : \text{tr}_n(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{G}$ se extiende una dimensión más si y sólo si, satisface la condición de cociclo.

Puesto que $\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) \subseteq \Delta_{n+1}(\mathcal{G})$, el morfismo f_{n+1} estará totalmente determinado por f_n mediante la fórmula

$$f_{n+1}(x) = (f_n d_0(x), f_n d_1(x), \dots, f_n d_{n+1}(x)),$$

para todo $x \in X_{n+1}$. Así $\text{tr}_n(\mathbf{f})$ extiende una dimensión más si y sólo si, el elemento $f_{n+1}(x)$ está en

$$\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) = \text{im}(j : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow \Delta_{n+1}(\mathcal{G}))$$

que es precisamente la condición de cociclo dada en la proposición. ■

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 1.4.7. *El funtor $\text{Ner} : \mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ es pleno.*

Notamos ahora que no sólo podemos caracterizar, por sus n -truncaciones, los morfismos simpliciales con codominio el nervio de un n -hipergrupoide sino también podemos caracterizar las homotopías entre ellos. Damos esta caracterización en la siguiente proposición:

Proposición 1.4.8 (La condición de homotopía). *Sea \mathcal{G} un n -hipergrupoide en \mathcal{E} y \mathbf{X} un objeto simplicial cualquiera. Dada una homotopía truncada*

$$tr_n(\mathbf{h}) = \{h_i^j : X_i \rightarrow G_{i+1}; 0 \leq i \leq j < n\} : tr_n(\mathbf{f}) \rightsquigarrow tr_n(\mathbf{f}') : tr_n(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{G},$$

para cada $1 \leq j \leq n$, definimos morfismos $\chi_j : X_n \longrightarrow G_n$ de forma inductiva por:

- para cada $x \in X_n$, $\chi_1(x)$ es el único elemento de G_n que satisface

$$h_0^{n-1}d_n(x) = [f_n(x), \chi_1(x), h_0^{n-1}d_1(x), \dots, h_0^{n-1}d_{n-1}(x)],$$

- y para $k \in \{2, \dots, n\}$, $\chi_k(x)$ es el único elemento de G_n que satisface

$$h_{k-1}^{n-1}d_n(x) = [h_{k-2}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{k-2}^{n-1}d_{k-2}(x), \chi_{k-1}(x), \chi_k(x), h_{k-1}^{n-1}d_k(x), \dots, h_{k-1}^{n-1}d_{n-1}(x)].$$

Entonces la homotopía truncada $tr_n(\mathbf{h})$ extiende a una homotopía $\mathbf{h} : \mathbf{f} \rightsquigarrow \mathbf{f}' : \mathbf{X} \longrightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ si y sólo si, satisface la siguiente condición de homotopía:

$$f'_n(x) = [h_{n-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{n-1}^{n-1}d_{n-1}(x), \chi_n(x)]. \quad (1.29)$$

Demostración: De forma análoga a lo ocurrido en la Proposición 1.4.6, como a partir de la dimensión $n+2$, el nervio de un n -hipergrupoide está dado por núcleos simpliciales, es fácil comprobar que una homotopía $\mathbf{h} : \mathbf{f} \rightsquigarrow \mathbf{f}'$ está determinada de forma única por su truncación a nivel $n+1$. Luego será suficiente comprobar que $tr_n(\mathbf{h})$ extiende a una homotopía a nivel $n+1$, si y sólo si, $tr_n(\mathbf{h})$ cumple la condición de homotopía (1.29).

Ahora bien, para extender $tr_n(\mathbf{h})$ a dimensión $n+1$ hemos de definir morfismos

$$h_i^n : X_n \rightarrow \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}), \quad 0 \leq i \leq n,$$

satisfaciendo las correspondientes identidades de homotopía. Puesto que

$$\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) = \text{im}(j),$$

ver (1.24), para cada $x \in X_n$, los elementos $h_i^n(x) \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$ vendrán dados por $(n+2)$ -uplas de la forma:

$$h_i^n(x) = (\chi_{i0}(x), \dots, \chi_{in}(x), [\chi_{i0}(x), \dots, \chi_{in}(x)]) \in \Delta_{n+1}(\mathcal{G}).$$

De las identidades de homotopía (1.10) que h_0^n ha de satisfacer, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{00}(x) = f_n(x), \\ \chi_{0i}(x) = h_0^{n-1}d_{i-1}(x), \quad \text{para } 2 \leq i \leq n, \\ [\chi_{00}(x), \dots, \chi_{0n}(x)] = h_0^{n-1}d_n(x), \end{array} \right.$$

esto es:

$$h_0^n(x) = (f_n(x), \chi_{01}(x), h_0^{n-1}d_1(x), \dots, h_0^{n-1}d_{n-1}(x), [f_n(x), \chi_{01}(x), h_0^{n-1}d_1(x), \dots, h_0^{n-1}d_{n-1}(x)]),$$

y así, de la identidad $d_{n+1}h_0^n = h_0^{n-1}d_n$, obtenemos

$$[f_n(x), \chi_{01}(x), h_0^{n-1}d_1(x), \dots, h_0^{n-1}d_{n-1}(x)] = h_0^{n-1}d_n(x),$$

esta ecuación determina de forma única $\chi_{01}(x)$, de manera que $\chi_{01}(x) = \chi_1(x)$. Concluimos que el morfismo h_0^n está totalmente determinado por la truncaciones $tr_n(\mathbf{h})$ y $tr_n(\mathbf{f})$.

Podemos construir de forma recursiva morfismos h_i^n , $i < n$, que vendrán dados por

$$h_i^n(x) = (h_{i-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{i-1}^{n-1}d_{i-1}(x), \chi_i(x), \chi_{i+1}(x), h_i^{n-1}d_{i+1}(x), \dots, h_i^{n-1}d_{n-1}(x), [h_{i-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{i-1}^{n-1}d_{i-1}(x), \chi_i(x), \chi_{i+1}(x), h_i^{n-1}d_{i+1}(x), \dots, h_i^{n-1}d_{n-1}(x)]).$$

De igual forma, las identidades de homotopía $d_i h_i^n = h_i^{n-1} d_i$, $0 \leq i \leq n-1$, determinan, de forma única, h_n^n por la fórmula:

$$h_n^n(x) = (h_{n-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{n-1}^{n-1}d_{n-1}(x), \chi_n(x), [h_{n-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{n-1}^{n-1}d_{n-1}(x), \chi_n(x)]).$$

La última identidad de homotopía $d_{n+1}h_n^n = f'_n$ quedaría

$$[h_{n-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{n-1}^{n-1}d_{n-1}(x), \chi_n(x)] = f'_n(x),$$

que es precisamente la condición de homotopía. ■

Observación 1.4.9. *Observamos por último, que el nervio del n -hipergrupoide del ejemplo 1.4.4 (1) es el objeto simplicial $\text{Cosk}^{n-1}(\mathbf{X})$ y que el nervio del n -hipergrupoide definido en el ejemplo 1.4.4 (3) es el objeto simplicial de Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi, n)$, asociado a un objeto grupo abeliano, que estudiaremos con más detalle en la Sección 1.5.2. Recordemos que para cada $n \geq 0$ y para cada objeto grupo abeliano Π , se define el objeto simplicial de Eilenberg-Mac Lane, $K(\Pi, n)$, como el objeto simplicial cuya $(n+1)$ -truncación está dada por:*

$$K(\Pi, n)_m = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } m < n, \\ \Pi & \text{si } m = n, \\ \Pi^{n+1} & \text{si } m = n+1, \end{cases}$$

siendo los operadores cara y degeneración en dimensiones n los morfismos al terminal o desde el terminal respectivamente, y en dimensión $n+1$ las distintas

proyecciones excepto el último operador que vendrá dado por la suma alternada de todas las proyecciones, es decir:

$$d_i = pr_i : \Pi^{n+1} \rightarrow \Pi, \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$d_{n+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} pr_i.$$

Los operadores degeneración en dimensión $n + 1$ son:

$$s_i = (0, \dots, 0, Id, Id, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq i \leq n - 1,$$

$$s_n = (0, 0, \dots, 0, Id).$$

En dimensiones mayores $K(\Pi, n)$ está dado por núcleos simpliciales,

$$K(\Pi, n) = Cosk^{n+1}(K(\Pi, n)).$$

Podemos representar a dicho objeto simplicial mediante el diagrama

$$K(\Pi, n) = \cdots \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Pi^{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \Pi \\ \begin{array}{c} \curvearrowright s_n \\ \curvearrowright s_0 \end{array} & & \curvearrowright \\ \xrightarrow{d_0} & & \mathbf{1} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \mathbf{1} \end{array} \end{array} \quad (1.30)$$

Como consecuencia, de que el objeto simplicial de Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi, n)$ es el nervio de un n -hipergrupoide, cualquier morfismo simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow K(\Pi, n)$ está determinado por su truncación $tr_n(\mathbf{u})$, además, tal truncación extiende a un morfismo simplicial si y sólo si, ésta verifica la “condición de cociclo”, ver Proposición 1.4.6, que en este caso sería:

Proposición 1.4.10 (Condición de cociclo para morfismos a un $K(\Pi, n)$). *La condición necesaria y suficiente para que una aplicación truncada*

$$tr_n(\mathbf{u}) : tr_n(\mathbf{X}) \rightarrow tr_n(K(\Pi, n)),$$

es decir, un morfismo $u_n : X_n \rightarrow \Pi$ tal que $u_n s_i = s_i$, extienda a una aplicación simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow K(\Pi, n)$ es que u_n satisfaga la siguiente “condición de cociclo”:

$$u_n d_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} u_n d_i(x), \quad (1.31)$$

para todo $x \in X_{n+1}$.

1.5 Colímites Homotópicos

1.5.1 Colímites Homotópicos en SSet

En esta sección vamos a recordar la definición de colímite homotópico en la categoría **SSet** de conjuntos simpliciales.

Dada una categoría pequeña \mathcal{C} y un objeto x en \mathcal{C} , la *categoría de elementos o coma categoría* x/\mathcal{C} es la categoría cuyos objetos son flechas $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{C} y sus morfismos de $f : x \rightarrow y$ en $g : x \rightarrow z$ son flechas $h : y \rightarrow z$ en \mathcal{C} tales que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ y & & z \\ & \xrightarrow{h} & \end{array}$$

conmuta. La composición en esta categoría es la inducida por la composición de la categoría \mathcal{C} . Notamos que cada flecha $g : x \rightarrow y$ induce, por composición, un funtor $g/\mathcal{C} : y/\mathcal{C} \rightarrow x/\mathcal{C}$. De hecho, la construcción de categoría de elementos nos define un funtor

$$(-)/\mathcal{C} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Cat}.$$

Dada una categoría pequeña \mathcal{C} , denotaremos por $N_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{SSet}$ a la composición del funtor Ner, ver (1.13), y el funtor anterior, $(-)/\mathcal{C} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$, esto es:

$$N_{\mathcal{C}}(x) = \text{Ner}(x/\mathcal{C}).$$

Dado un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$, el *colímite homotópico de F* es el coend del funtor $N_{\mathcal{C}} \times F : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$, esto es,

$$\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F = \int^{x \in \mathcal{C}} N_{\mathcal{C}}(x) \times F(x) = \int^{x \in \mathcal{C}} \text{Ner}(x/\mathcal{C}) \times F(x).$$

Notemos que si F es un objeto final en $\mathbf{SSet}^{\mathcal{C}}$, es decir, $\mathcal{C} \xrightarrow{F=1} \mathbf{SSet}$ es el funtor constante con imagen el conjunto simplicial final. Entonces el colímite homotópico de F es el nervio de \mathcal{C} , es decir, $\text{hocolim}_{\mathcal{C}} 1 = \text{Ner}(\mathcal{C})$.

Como consecuencia, la única transformación natural $F \Rightarrow 1$ induce, para cualquier funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$, una aplicación simplicial canónica

$$\ell = \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(F \Rightarrow 1) : \text{hocolim}_{\mathcal{C}} F \longrightarrow \text{Ner}(\mathcal{C}). \quad (1.32)$$

Usaremos la siguiente descripción alternativa de colímite homotópico de un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$ debida a Bousfield y Kan [9].

Asociado al funtor F tenemos el conjunto simplicial doble, $\Psi(F)$, llamado “*reemplazo simplicial*” cuyos (p,q)-símplices son pares (ξ, a) con

$$\xi : (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-1} \xrightarrow{f_p} x_p) \in \text{Ner}_p(\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad a \in F(x_0)_q.$$

Las caras y degeneraciones verticales de un (p, q) -símplice (ξ, a) están definidas en función de los operadores cara y degeneración en el conjunto simplicial $F(x_0)$, es decir,

$$\begin{aligned} d_i^v(\xi, a) &= (\xi, d_i(a)), & 0 \leq i \leq q, \\ s_i^v(\xi, a) &= (\xi, s_i(a)), & 0 \leq i \leq q, \end{aligned}$$

y los operadores cara y degeneración horizontales son los del $\text{Ner}(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} d_j^h(\xi, a) &= (x_0 \xrightarrow{f_1} \dots \rightarrow x_{j-1} \xrightarrow{f_{j+1}f_j} x_{j+1} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_p} x_p, a), & 0 < j < p, \\ d_p^h(\xi, a) &= (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-2} \xrightarrow{f_{p-1}} x_{p-1}, a), \\ s_j^h(\xi, a) &= (x_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} x_j \xrightarrow{Id_{x_j}} x_j \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_p} x_p, a), & 0 \leq j \leq p, \end{aligned}$$

excepto d_0^h que se define mediante

$$d_0^h(\xi, a) = (x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{p-1} \xrightarrow{f_p} x_p, f_1 a),$$

donde aquí y en lo que sigue denotamos

$$f a = F(f)_q(a),$$

para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{C} y cada q -símplice $a \in F(x)$.

Entonces el colímite homotópico de F se puede calcular como la diagonal de este conjunto bisimplicial, esto es,

$$\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F \cong \text{Diag}(\Psi(F)), \quad (1.33)$$

ver [9] o [67].

De acuerdo con la descripción anterior, el conjunto de m -celdas de $\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F$ está dado por:

$$(\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F)_m = \coprod_{\xi \in \text{Ner}_m(\mathcal{C})} F(d_1 \dots d_m \xi)_m = \coprod_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_m \in \text{Ner}_m(\mathcal{C})} F(x_0)_m.$$

Mientras que las caras y degeneraciones de $\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F$ vienen dadas por las fórmulas:

$$d_i(\xi, a) = \begin{cases} (d_0 \xi, f_1 d_0 a) & \text{si } i = 0, \\ (d_i \xi, d_i a) & \text{si } i > 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad s_i(\xi, a) = (s_i \xi, s_i a),$$

donde $\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_m \in \text{Ner}_m(\mathcal{C})$ y $a \in F(x_0)_m$.

A partir de esta descripción del colímite homotópico, es inmediato comprobar que la proyección ℓ viene dada por

$$\ell_n(\xi, a) = \xi,$$

y es un tipo de “fibración singular” (ver [28], pg. 22). Además, la fibra de ℓ en cada $x \in \mathcal{C}$ es el conjunto simplicial $F(x)$.

La siguiente proposición nos muestra que, cuando tomemos funtores desde un grupoide, las categorías de n -hipergrupos son cerradas para colímites homotópicos (comparar con el teorema del colímite homotópico de Thomason [66], ver Teorema 1.5.4).

Proposición 1.5.1. *Sea \mathcal{G} un grupoide y $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{SSet}$ un funtor que factoriza por la categoría \mathbf{Hyper}_n de n -hipergrupos*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{F} & \mathbf{SSet} \\ & \searrow & \nearrow \text{Ner} \\ & \mathbf{Hyper}_n & \end{array}$$

Entonces $\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F$ es también el nervio de un n -hipergrupoide.

Demostración: Por la Proposición 1.4.5, bastará con probar que las aplicaciones canónicas

$$\begin{aligned} K_m^i : (\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F)_m &\longrightarrow \Lambda_m^i(\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F), \\ (\xi, a) &\longmapsto (d_0(\xi, a), \dots, d_{i-1}(\xi, a), -, d_{i+1}(\xi, a), \dots, d_m(\xi, a)), \end{aligned}$$

son biyecciones para todo $m \geq n + 1$ y $0 \leq i \leq m$.

Veamos primero que estas aplicaciones son sobreyectivas. Dado

$$((\xi_0, a_0), \dots, (\xi_{i-1}, a_{i-1}), -, (\xi_{i+1}, a_{i+1}), \dots, (\xi_m, a_m)) \in \Lambda_m^i(\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F)$$

entonces, $(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, -, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) \in \Lambda_m^i \text{Ner}(\mathcal{G})$ y como el nervio de un grupoide verifica que los morfismos canónicos $K_m^i : \text{Ner}_m(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda_m^i \text{Ner}(\mathcal{G})$ son isomorfismos para todo $m \geq 2$ y $0 \leq i \leq m$, entonces existe

$$\xi = (K_m^i)^{-1}(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, -, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) \in \text{Ner}_m(\mathcal{G})$$

tal que $d_j(\xi) = \xi_j$ para todo $0 \leq j \leq m$ y $j \neq i$. Supongamos

$$\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{m-1} \xrightarrow{f_m} x_m,$$

entonces:

$$\begin{cases} a_0 \in F(x_1)_{m-1}, \\ a_j \in F(x_0)_{m-1}, \quad j \geq 1 \text{ y } j \neq i. \end{cases}$$

Además la condición $d_0(\xi_j, a_j) = d_{j-1}(\xi_0, a_0)$ implica:

$$d_{j-1}(a_0) = f_1 d_0(a_j),$$

o equivalentemente

$$d_{j-1}(f_1^{-1} a_0) = f_1^{-1} d_{j-1}(a_0) = d_0(a_j),$$

para $0 < j \leq m$, y junto con las condiciones $d_i(\xi_j, a_j) = d_{j-1}(\xi_i, a_i)$, $1 \leq i < j \leq m$, implican:

$$(f_1^{-1} a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, -, a_{i+1}, \dots, a_m) \in \Lambda_m^i F(x_0).$$

Ahora bien, como F factoriza por la categoría **Hyper_n**, para cada objeto x de \mathcal{G} se tiene que $F(x)$ es el nervio de un n -hipergrupoide, en particular, $F(x_0)$ es el nervio de un n -hipergrupoide, luego los morfismos canónicos $K_m^i : F(x_0)_m \rightarrow \Lambda_m^i F(x_0)$ son isomorfismos, y así podemos asegurar que existe

$$a = (K_m^i)^{-1}(f_1^{-1} a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, -, a_{i+1}, \dots, a_m) \in F(x_0)_m$$

tal que $d_0(a) = f_1^{-1} a_0$ y $d_j(a) = a_j$ para cada $0 < j \leq m$ y $j \neq i$. De esta forma tenemos un par $(\xi, a) \in (\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F)_m$ y es inmediato comprobar que $d_j(\xi, a) = (\xi_j, a_j)$ para todo $j \neq i$, y por tanto, K_m^i es sobreyectivo.

La inyectividad se deduce de forma inmediata a partir de la inyectividad de los morfismos $K_m^i : \text{Ner}_m(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda_m^i(\text{Ner}(\mathcal{G}))$ y $K_m^i : F(x)_m \rightarrow \Lambda_m^i F(x)$ para cada objeto $x \in \mathcal{G}$.

De esta forma hemos demostrado que $\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F$ es el nervio del n -hipergrupoide cuya n -truncación ha de ser $\text{tr}_n(\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F)$ y cuya operación corchete

$$[\] : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F) \rightarrow (\text{hocolim}_{\mathcal{G}} F)_n$$

debe estar dada por:

$$[(\xi_0, a_0), \dots, (\xi_n, a_n)] = (d_{n+1}(\xi), [f_1^{-1} a_0, a_1, \dots, a_n]) \quad (1.34)$$

donde $\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$, tal que $d_i(\xi) = \xi_i$ para $0 \leq i \leq n$, y $[f_1^{-1} a_0, a_1, \dots, a_n]$ es la operación corchete del n -hipergrupoide asociado al objeto x_0 de \mathcal{G} por F . ■

1.5.2 Los conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados

Una de las principales utilidades de los conjuntos de Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi, n)$ es que “representan” grupos de cohomología. En particular, si X es un espacio topológico y Π es un grupo abeliano, el n -ésimo grupo de cohomología singular

$H^n(X, \Pi)$ puede calcularse en términos de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales desde el complejo singular $S(X)$ en el complejo de Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi, n)$, esto es:

$$H^n(X, \Pi) \cong [S(X), K(\Pi, n)]. \quad (1.35)$$

Si en lugar de tomar coeficientes triviales tomamos coeficientes locales, es decir, si sustituimos el grupo abeliano Π por un $\pi_1(X)$ -módulo que también denotamos por Π , el papel que juegan los complejos de Eilenberg-Mac Lane en la representación de la cohomología singular de X serán jugados ahora por lo que llamaremos *fibraciones de Eilenberg-Mac Lane generalizadas*. El dominio de estas fibraciones es lo que Baues llamó *conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados*, ver [6] o [7].

En esta sección introduciremos estos conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados, estudiando algunas de sus propiedades, y en la Sección 4.1.1 daremos una generalización del teorema de representación (1.35) para las cohomologías con coeficientes locales. La novedad que presentamos en esta sección es que vamos a dar estos conjuntos simpliciales generalizados en términos de colímites homotópicos. De esta forma, obtendremos las fibraciones de Eilenberg-Mac Lane generalizadas como los morfismos canónicos desde un colímite homotópico al nervio de la categoría dominio del funtor, al que le aplicamos el colímite homotópico.

Aunque como se dice en [20] los conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados se pueden definir para cualquier \mathcal{C} -módulo con \mathcal{C} una categoría pequeña arbitraria, en su día en dicho trabajo y hoy aquí, nos restringimos al caso en el cual \mathcal{C} es un grupoide, pues sólo en este caso podremos probar la generalización del teorema de representación (1.35).

Definición 1.5.2. *Sea \mathcal{G} un grupoide, $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un \mathcal{G} -módulo y $n \geq 0$ un entero. El n -ésimo conjunto simplicial de Eilenberg-Mac Lane generalizado de \mathcal{G} con coeficientes en Π , que denotaremos por $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$, es el conjunto simplicial que se obtiene como el colímite homotópico del funtor $K(\Pi(-), n) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{SSet}$ dado por $K(\Pi(-), n)(x) = K(\Pi(x), n)$. En otras palabras:*

$$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n) = \text{hocolim}_{\mathcal{G}} K(\Pi(-), n) = \int^{x \in \mathcal{G}} \text{Ner}(x/\mathcal{G}) \times K(\Pi(x), n). \quad (1.36)$$

La fibración de Eilenberg-Mac Lane generalizada, definida a partir del \mathcal{G} -módulo Π , es la proyección canónica

$$\ell : L_{\mathcal{G}}(\Pi, n) = \text{hocolim}_{\mathcal{G}} K(\Pi(-), n) \longrightarrow \text{Ner}(\mathcal{G}).$$

Vamos ahora a utilizar la descripción dada en (1.33) del colímite homotópico como la diagonal del funtor reemplazo simplicial, para describir completamente los complejos $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$.

Observamos primero que puesto que $K(\Pi(x), n)$ es el nervio de un n -hipergrupoide para cada objeto $x \in \mathcal{G}$, la Proposición 1.5.1 nos asegura que $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ es el nervio de un n -hipergrupoide. En particular deducimos que

$$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n) = \text{Cosk}^{n+1}(L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)).$$

Por otro lado, mediante un cálculo inmediato observamos que la $(n-1)$ -truncación de $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ coincide con la $(n-1)$ -truncación del nervio de \mathcal{G} , esto es,

$$\text{tr}_{n-1}(L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)) = \text{tr}_{n-1}(\text{Ner}(\mathcal{G})).$$

En dimensión n ,

$$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n = \coprod_{\xi=x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} x_n \in \text{Ner}_n(\mathcal{G})} \Pi(x_0),$$

con caras $d_i : L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n \rightarrow \text{Ner}_{n-1}(\mathcal{G})$ actuando sólo sobre el nervio, es decir, $d_i(\xi, a) = d_i\xi$. Las aplicaciones degeneración $s_i : \text{Ner}_{n-1}(\mathcal{G}) \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n$ actúan mediante $s_i(\xi) = (s_i\xi, 0)$ donde 0 denota el elemento neutro del grupo $\Pi(x_0)$ con $x_0 = d_1 \dots d_{n-1}(\xi)$.

Por último, en dimensión $n+1$,

$$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_{n+1} = \coprod_{\xi=x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n+1}} x_{n+1} \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})} \Pi(x_0)^{n+1},$$

con caras dadas por

$$d_i(\xi, (a_0, a_1, \dots, a_n)) = \begin{cases} (d_0\xi, f^1 a_0) & \text{si } i = 0 \\ (d_i\xi, a_i) & \text{si } 0 < i < n+1 \\ (d_{n+1}\xi, \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} a_j) & \text{si } i = n+1 \end{cases},$$

donde $f^1 a_0 = \Pi(f_1)(a_0)$. Los operadores degeneración

$$s_i : L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_{n+1}$$

están dados por $s_i(\xi, a) = (s_i(\xi), s_i(a))$.

Tenemos por tanto a $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ totalmente descrito.

Siguiendo la expresión (1.34), podemos calcular la operación corchete en la n -truncación de $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$, ésta viene dada a partir de las operaciones corchete en $K(\Pi(x), n)$, con $x \in \mathcal{G}$, que está descrita en el Ejemplo 1.4.4 (3). Así obtenemos que $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ es el nervio de un n -hipergrupoide cuyo operador corchete viene dado por

$$[(\xi_0, a_0), (\xi_1, a_1), \dots, (\xi_n, a_n)] = \left(d_{n+1}(\xi), (-1)^n f_1^{-1} a_0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} a_i \right),$$

donde $\xi \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$ es el único elemento cuyas n primeras caras son $d_i(\xi) = \xi_i$, $0 \leq i \leq n$.

Notemos que los conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane clásicos se pueden ver como conjuntos simpliciales de Eilenberg-Mac Lane generalizados. Para ello, bastará considerar un grupo abeliano Π como $\mathbf{1}$ -módulo, con $\mathbf{1} = [0]$ el grupoide de un solo objeto y una sola flecha. Entonces

$$K(\Pi, n) = L_{\mathbf{1}}(\Pi, n), \quad n \geq 0. \quad (1.37)$$

Por otra parte, por ser $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ el nervio de un n -hipergrupoide, cualquier morfismo simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ está determinado por su truncación $\text{tr}_n(\mathbf{u})$, además, tal truncación extiende a un morfismo simplicial si y sólo si, ésta verifica la “condición de cociclo”, ver Proposición 1.4.6, que en este caso sería:

Proposición 1.5.3 (La condición de cociclo). *La condición necesaria y suficiente para que una aplicación truncada*

$$\text{tr}_n(\mathbf{u}) : \text{tr}_n(\mathbf{X}) \rightarrow \text{tr}_n(L_{\mathcal{G}}(\Pi, n))$$

extienda a una aplicación simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ es que u_n satisfaga la siguiente “condición de cociclo”:

$$f_1^{-1} q(u_n d_0(x)) = q(u_n d_1(x)) - q(u_n d_2(x)) + \dots + (-1)^n q(u_n d_{n+1}(x)), \quad x \in X_{n+1}, \quad (1.38)$$

donde q es la función que asocia a cada n -celda (ξ, a) en $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ la componente $a \in \Pi(d_1 \dots d_n(\xi))$ y $f_1 = d_2 \dots d_n(\ell_n(u_n d_{n+1}(x)))$.

1.5.3 La construcción producto semidirecto de Grothendieck

La Proposición 1.5.1 nos asegura que la categoría \mathbf{Hyper}_n de n -hipergrupoides, como subcategoría de la categoría \mathbf{SSet} , es cerrada para colímites homotópicos de funtores con dominio un grupoide. Este resultado es también básicamente cierto para la categoría \mathbf{Cat} , esto es: la categoría \mathbf{Cat} , vista como una subcategoría plena de la categoría \mathbf{SSet} (vía el funtor nervio), es cerrada para colímites homotópicos. En el sentido de que cualquier colímite homotópico de un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$ que factoriza por el funtor $\text{Ner} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SSet}$, es homotópicamente equivalente al nervio de una categoría (ver Teorema 1.5.4). La demostración de este resultado se basa en la llamada *construcción producto semidirecto o integral de Grothendieck* (ver [42], [52]), que debido a su utilidad en el desarrollo de esta memoria recordaremos en esta sección.

Notemos que el problema de la existencia de una construcción interna en \mathbf{Hyper}_n , análoga a la construcción de Grothendieck, que nos permita calcular, salvo equivalencia homotópica, colímites homotópicos de funtores definidos sobre grupoides permanece abierto.

Como en secciones anteriores, dada una categoría pequeña \mathcal{C} y un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$, para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{C} denotaremos $F(f) = {}^f(-) : F(x) \rightarrow F(y)$, esto es:

$$F(f)(a) = {}^f a \quad \text{y} \quad F(f)(\lambda) = {}^f \lambda$$

para cada objeto a y cada flecha λ en la categoría $F(x)$.

La categoría *producto semidirecto de Grothendieck* $\mathcal{C} \int F$, tiene por objetos los pares (x, a) , donde x es un objeto de \mathcal{C} y a es un objeto en la categoría pequeña $F(x)$. Una flecha en $\mathcal{C} \int F$ de (x, a) en (x', a') , es también un par (f, λ) con $f : x \rightarrow x'$ un morfismo en \mathcal{C} y $\lambda : {}^f a \rightarrow a'$ un morfismo en la categoría $F(x')$. Dados dos morfismos componibles en $\mathcal{C} \int F$,

$$(x, a) \xrightarrow{(f, \lambda)} (x', a') \xrightarrow{(g, \mu)} (x'', a''),$$

su composición está dada por la fórmula:

$$(g, \mu)(f, \lambda) = (gf, \mu {}^g \lambda).$$

Observamos que una transformación natural $\tau : F \Rightarrow F'$ entre dos funtores $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ induce un functor $\mathcal{C} \int \tau : \mathcal{C} \int F \rightarrow \mathcal{C} \int F'$ definido por

$$(\mathcal{C} \int \tau)(x, a) = (x, \tau_x(a)),$$

$$(\mathcal{C} \int \tau)(f, \lambda) = (f, \tau_{x'}(\lambda)),$$

para cada objeto (x, a) y cada morfismo $(f, \lambda) : (x, a) \rightarrow (x', a')$ en $\mathcal{C} \int F$.

Además, existe una proyección obvia $\mathcal{C} \int F \rightarrow \mathcal{C}$, inducida por la única transformación natural $F \Rightarrow 1$, que nos sugiere que la construcción de Grothendieck $\mathcal{C} \int (-)$ puede ser vista como un functor de la categoría de funtores $\mathbf{Cat}^{\mathcal{C}}$ a la coma categoría \mathbf{Cat}/\mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} \int (-) : \mathbf{Cat}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{Cat}/\mathcal{C}.$$

Dicho functor tiene un adjunto izquierda, ver [42].

Un caso particular de esta construcción lo encontramos al considerar funtores

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Gp},$$

donde cada grupo es considerado como categoría con un solo objeto, con flechas los elementos de dicho grupo y composición dada por la operación del grupo. Si aplicamos la construcción del producto semidirecto a este functor obtenemos una nueva categoría $\mathcal{C} \int F$ cuyos objetos los podemos identificar con los objetos de \mathcal{C} y cuyas flechas son pares (f, a) con $f : x \rightarrow y$ una flecha de \mathcal{C} y a es un elemento del grupo $F(y)$. Es claro que en este caso la proyección canónica $F \int \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene una

sección canónica. Si además F es un funtor desde un grupoide, es decir, $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ es un grupoide entonces $\mathcal{G} \int F$ es también un grupoide.

Además, en el caso en que F sea un \mathcal{C} -módulo, esto es, factorice por la categoría de grupos abelianos, entonces el diagrama

$$\mathcal{C} \int F \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{C}$$

representa un objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Cat}/\mathcal{C} . Notemos también que el producto de dicho objeto consigo mismo en la categoría \mathbf{Cat}/\mathcal{C} , que se obtiene como el pullback

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C} \int F & \\ & \downarrow pr & \\ \mathcal{C} \int F & \xrightarrow{pr} & \mathcal{C}, \end{array}$$

es $\mathcal{C} \int F^2 \rightarrow \mathcal{C}$. En general se tiene:

$$(\mathcal{C} \int F \rightarrow \mathcal{C})^n = \mathcal{C} \int F^n \rightarrow \mathcal{C}.$$

Notemos ahora que la construcción de Grothendieck puede verse como un colímite débil calculado en la 2-categoría \mathbf{Cat} , ver [66]. Esto es:

- Existe una familia de funtores, uno para cada objeto x en \mathcal{C} ,

$$\mathbf{j}_x : F(x) \longrightarrow \mathcal{C} \int F; \quad \begin{cases} \mathbf{j}_x(a) = (x, a), \\ \mathbf{j}_x(\lambda) = (Id_x, \lambda), \end{cases}$$

para cada objeto a y cada flecha λ en $F(x)$, y una familia de transformaciones naturales, una para cada flecha $f : x \rightarrow x'$ en \mathcal{C} ,

$$\begin{array}{ccc} & F(x') & \\ F(f) \nearrow & & \searrow \mathbf{j}_{x'} \\ & \uparrow \mathbf{j}_f & \\ F(x) & \xrightarrow{\mathbf{j}_x} & \mathcal{C} \int F \end{array}$$

cuya componente en un objeto $a \in F(x)$ es el morfismo

$$(\mathbf{j}_f)_a : (x, a) \rightarrow (x', {}^f a)$$

en $\mathcal{C} \int F$ determinado por el par $(\mathbf{j}_f)_a = (f, Id_{F(x')})$.

- Tales que

$$(a) \quad \mathbf{j}_{Id(x)} = 1_{\mathbf{j}_x},$$

- (b) para cada par de morfismos componibles $x \xrightarrow{f} x' \xrightarrow{g} x''$ en \mathcal{C} el siguiente diagrama de transformaciones naturales conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{j}_{x''} F(g) F(f) & \xleftarrow{\mathbf{j}_g F(f)} & \mathbf{j}_{x'} F(f) \\ & \swarrow \mathbf{j}_{gf} & \searrow \mathbf{j}_f \\ & \mathbf{j}_x & \end{array}$$

- Además estos datos son universales en el sentido usual de colímites débiles, esto es:

Dada una categoría \mathcal{D} (no necesariamente pequeña), junto con una familia de funtores

$$\{\mathbf{t}_x : F(x) \rightarrow \mathcal{D}; x \in \mathcal{C}\}$$

y una familia de transformaciones naturales

$$\{\mathbf{t}_f : \mathbf{t}_x \rightarrow \mathbf{t}_{x'} F(f); f : x \rightarrow x' \in \mathcal{C}\},$$

satisfaciendo las propiedades (a) y (b) anteriores, existe un único functor $T : \mathcal{C} \int F \rightarrow \mathcal{D}$ que determina todos los funtores \mathbf{t}_x y todas las transformaciones naturales \mathbf{t}_f en función de \mathbf{j}_x y \mathbf{j}_f , esto es, tal que el siguiente diagrama conmuta a nivel de funtores y también de transformaciones naturales:

$$\begin{array}{ccc} & F(x') & \\ \mathbf{t}_{x'} \swarrow & \uparrow F(f) & \searrow \mathbf{j}_{x'} \\ & F(x) & \\ \mathbf{t}_x \swarrow & \uparrow \mathbf{t}_f & \searrow \mathbf{j}_f \\ \mathcal{D} & & \mathcal{C} \int F \\ & \xleftarrow{T} & \end{array}$$

Esta propiedad universal nos permite identificar la construcción de Grothendieck con un colímite débil calculado en la 2-categoría \mathbf{Cat} . Como dijimos al principio de esta sección, el siguiente teorema (del colímite homotópico de Thomason [66]) nos prueba que la categoría \mathbf{Cat} , vista como una subcategoría plena de la categoría \mathbf{SSet} (vía el functor nervio), es cerrada para colímites homotópicos, o en otras palabras, que el functor nervio lleva colímites débiles calculados en \mathbf{Cat} en colímites homotópicos calculados en \mathbf{SSet} :

Teorema 1.5.4 (Teorema del colímite homotópico). *Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ un functor. Entonces existe una equivalencia homotópica*

$$\eta : \text{hocolim}_{\mathcal{C}}(\text{Ner } F) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{C} \int F)$$

entre el colímite homotópico de la composición $\text{Ner } F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SSet}$ y el nervio de la construcción de Grothendieck.

1.5.4 Fibraciones de grupoides y fibraciones plenas escindidas

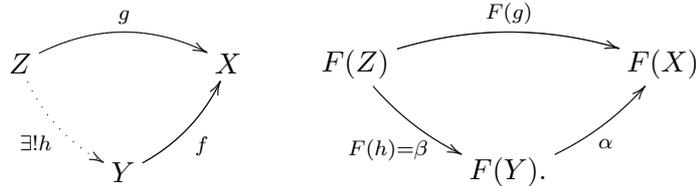
El principal uso de la construcción producto semidirecto de Grothendieck es el estudio y clasificación de las fibraciones de categorías. Básicamente, Grothendieck [44] probó que toda fibración de categorías es equivalente a una de la forma $\mathcal{C} \int F \rightarrow \mathcal{C}$, para F un “seudofunctor” de \mathcal{C} a la 2-categoría **Cat** de categorías, generalizando así la teoría de Schreier al contexto de categorías pequeñas. No utilizaremos en esta memoria el estudio hecho por Grothendieck en su total generalidad sino solamente su particularización al caso de fibraciones de grupoides escindidas, no obstante, vamos a hacer aquí un pequeño recordatorio de cómo va esta teoría, centrándonos posteriormente en el contexto que nos interesa.

Sea $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un funtor entre dos categorías. Dado un objeto $I \in \mathcal{F}$, la *fibra de F sobre I* es una subcategoría \mathcal{E}_I de \mathcal{E} definida cómo sigue:

- Un objeto $X \in \mathcal{E}$ está en \mathcal{E}_I si $F(X) = I$;
- si X, Y son objetos en \mathcal{E}_I , un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{E} está en \mathcal{E}_I cuando $F(f) = Id_I$.

Dada $\alpha : J \rightarrow I$ una flecha en \mathcal{F} . Una flecha $f : Y \rightarrow X$ de \mathcal{E} es un *morfismo α -cartesiano sobre F* si:

1. $F(f) = \alpha$;
2. dado $g : Z \rightarrow X$ un morfismo de \mathcal{E} tal que $F(g)$ factoriza como $\alpha \beta$, entonces existe un único morfismo $h : Z \rightarrow Y$ en \mathcal{E} tal que $F(h) = \beta$ y $g = f h$



Obsérvese que si F es un funtor entre grupoides, teniendo en cuenta que en un grupoide toda flecha tiene inversa, el que un morfismo f sea cartesiano sobre otro α se reduce a la primera condición, es decir, $F(f) = \alpha$, pues dado $g : Z \rightarrow X$ un morfismo de \mathcal{E} tal que $F(g) = \alpha \beta$ siempre existe un único $h = f^{-1}g$ tal que $F(h) = \beta$ y $g = f h$.

Definición 1.5.5. *Un funtor $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ es una fibración cuando para toda flecha $\alpha : J \rightarrow I$ en \mathcal{F} y todo objeto X en la fibra sobre I , existe en \mathcal{E} un morfismo cartesiano $f : Y \rightarrow X$ sobre α . En tal caso también se dice que \mathcal{E} es una categoría fibrada sobre \mathcal{F} .*

Nos centramos ahora en el contexto de fibraciones de grupoides.

Notemos que en tal caso, teniendo en cuenta la observación anterior sobre morfismos cartesianos, la definición de fibración entre grupoides se reduce a lo sigue:

Un functor $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ entre grupoides, es una *fibración* si para cada objeto $y \in \mathcal{E}$ y cada flecha $g \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, P(y))$, existe una flecha $f \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(y', y)$, tal que $P(f) = g$.

Definición 1.5.6. Una *fibración de grupoides escindida* es un par (P, S) , con P una fibración y S una escisión de P , esto es, un functor $S : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$, tal que $PS = \text{Id}_{\mathcal{G}}$.

Si el functor P es pleno, diremos que el par (P, S) es una *fibración plena escindida*, notamos que en presencia de una escisión, la condición de fibración se deduce de la condición de plenitud del functor P .

Nuestro próximo objetivo es clasificar la fibraciones plenas escindidas de grupoides.

Dada una fibración escindida (P, S) definimos el *functor fibra*

$$N = N_{(P,S)} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gp} \quad (1.39)$$

como el functor que asocia:

- A cada objeto x de \mathcal{G} el subgrupo $N(x) \subseteq \text{End}_{\mathcal{E}}(S(x))$, del grupo de endomorfismos de $S(x)$ en \mathcal{E} , con elementos los endomorfismos de $S(x)$ que por P van a la identidad en x ,

$$N(x) = \{f \in \text{End}_{\mathcal{E}}(S(x)); P(f) = \text{Id}_x\}.$$

- A cada flecha $g : x \rightarrow x'$ el morfismo de grupos obtenido por conjugación en \mathcal{E} vía $S(g)$, es decir,

$$N(g) : N(x) \longrightarrow N(x'); u \mapsto {}^g u = S(g)uS(g)^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que S es un functor, es fácil ver que N también lo es. Entonces se tiene:

Proposición 1.5.7. Dada una fibración plena escindida $(P, S) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, sea $N : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gp}$ el functor fibra. Entonces la proyección canónica $\mathcal{G} \int N \rightarrow \mathcal{G}$ es una fibración plena que tiene una escisión canónica S' . Además existe una equivalencia de categorías $G : \mathcal{G} \int N \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \int N & \xrightarrow{G} & \mathcal{E} \\ \downarrow pr & & \downarrow P \\ \mathcal{G} & & \mathcal{G} \\ \uparrow S' & & \uparrow S \end{array}$$

a nivel tanto de fibraciones como de sus escisiones. En el caso de que la fibración P sea la identidad en objetos, la equivalencia anterior es un isomorfismo de categorías que actúa como la identidad en objetos.

Demostración: Puesto que para cada objeto x de \mathcal{G} , $N(x)$ es un grupo, podemos identificar los objetos de la categoría $\mathcal{G} \int N$ con los objetos de \mathcal{G} y sus flechas con pares $(g, u) : x \rightarrow x'$ donde $g : x \rightarrow x'$ es una flecha de \mathcal{G} y $u \in N(x')$, es decir, $u : S(x') \rightarrow S(x')$ es un endomorfismo en \mathcal{E} tal que $P(u) = Id_{x'}$ (ver página 62).

La escisión canónica $S' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \int N$ vendrá dada por la identidad sobre objetos y sobre morfismos $g : x \rightarrow x'$ mediante $S'(g) = (g, Id_{S(x')})$. Claramente S' es una escisión para la proyección canónica $pr : \mathcal{G} \int N \rightarrow \mathcal{G}$, que es una fibración plena.

Definimos el functor $G : \mathcal{G} \int N \rightarrow \mathcal{E}$ sobre objetos como el functor S y sobre flechas mediante $G(g, u) = u S(g)$. Así definido es un functor, pues dados dos morfismos (g, u) y (h, v) componibles en $\mathcal{G} \int N$, es decir, de forma que $g : x \rightarrow x'$ y $h : x' \rightarrow x''$ con $u \in N(x')$ y $v \in N(x'')$, se tiene:

$$\begin{aligned} G((h, v)(g, u)) &= G(hg, v^h u) = v^h u S(hg) = v N(h)(u) S(h) S(g) \\ &= v (S(h) u S(h)^{-1}) S(h) S(g) = (v S(h)) (u S(g)) \\ &= G(h, v) G(g, u). \end{aligned}$$

Además este functor hace conmutar el diagrama correspondiente a nivel de fibraciones:

$$PG(g, u) = P(u S(g)) = P(u) P S(g) = Id_{x'} g = g = pr(g, u)$$

y a nivel de escisiones pues para cada flecha $g : x \rightarrow x'$ en \mathcal{G} se tiene:

$$GS'(g) = G(g, Id_{S(x')}) = Id_{S(x')} S(g) = S(g).$$

Veamos además que G es una equivalencia de categorías. Para ello bastará con ver que el functor G es fiel, pleno y denso.

Para ver que G es denso (es decir, cada objeto $i \in \mathcal{E}$ es isomorfo a algún objeto de la forma $G(x)$ con $x \in \text{obj}(\mathcal{G} \int N)$), dado $i \in \mathcal{E}$ consideramos $SP(i) \in \mathcal{E}$, por ser P pleno el morfismo $P : Hom_{\mathcal{E}}(i, SP(i)) \rightarrow Hom_{\mathcal{G}}(P(i), P(i))$ es sobreyectivo y por tanto existe una flecha $u : i \rightarrow SP(i)$, tal que $P(u) = Id_{P(i)}$. Tenemos entonces que i y $SP(i) = GP(i)$ están conectados en \mathcal{E} que es un grupoide, y por tanto i y $GP(i)$ son isomorfos. Así el functor G es denso.

Veamos ahora que G es fiel y pleno, es decir, que para cada par de objetos x, x' en \mathcal{G} la aplicación inducida

$$G : Hom_{\mathcal{G} \int N}(x, x') \rightarrow Hom_{\mathcal{E}}(S(x), S(x')), (g, u) \mapsto G(g, u) = u S(g)$$

es una biyección, pero dada $f \in Hom_{\mathcal{E}}(S(x), S(x'))$, la flecha

$$(P(f), f SP(f)^{-1}) \in Hom_{\mathcal{G} \int N}(x, x')$$

es la única tal que $G(P(f), fSP(f)^{-1}) = f$.

Por último, notamos que si además P es la identidad en objetos, entonces S y por tanto G también son la identidad en objetos. Pero una equivalencia de categorías que es la identidad en objetos es un isomorfismo. ■

Nota 1.5.8. *Para finalizar obsérvese que un funtor $P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ escindido que es la identidad en objetos siempre es pleno y por tanto es una fibración plena.*

Capítulo 2

La torre de Postnikov de un grupoide simplicial

2.1 La categoría \mathbf{Gd} de grupoides simpliciales

La categoría \mathbf{SSet} de conjuntos simpliciales es una categoría cartesiana cerrada, por tanto puede considerarse como una categoría monoidal cerrada con producto tensor dado por el producto. Podemos así considerar categorías enriquecidas sobre ella.

Por un *grupoide simplicial* \mathcal{G} entenderemos un grupoide (pequeño) enriquecido en la categoría de conjuntos simpliciales. Por tanto, \mathcal{G} consta de:

- un conjunto de objetos O ,
- un conjunto simplicial $\mathcal{G}(x, y)$, para cada par de objetos $x, y \in O$, y
- una aplicación simplicial “*composición*” para cada terna de objetos $x, y, z \in O$,

$$\mathcal{G}(x, y) \times \mathcal{G}(y, z) \rightarrow \mathcal{G}(x, z),$$

que asocia a cada par de n -símplices componibles $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ el n -símplice composición $gf : x \rightarrow z$,

satisfaciendo los axiomas de asociatividad, unidades y existencia de inversos. La categoría \mathbf{Gd} será la categoría de grupoides y funtores enriquecidos en conjuntos simpliciales.

Vamos a continuación a observar como un grupoide simplicial puede ser analizado desde otros dos puntos de vista.

- En primer lugar, veremos como la categoría \mathbf{Gd} de grupoides simpliciales puede ser identificada con una subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Gpd}^{\Delta^{op}}$ de objetos simpliciales sobre la categoría de grupoides.

- En segundo lugar, veremos como \mathbf{Gd} puede ser considerada como una subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Gpd}(\mathbf{SSet})$ de grupoides internos en la categoría de conjuntos simpliciales.

Para cada entero $n \geq 0$, consideramos el conjunto

$$G_n = \coprod_{x,y \in O} \mathcal{G}_n(x,y),$$

coproducto (unión disjunta) de los conjuntos de n -símplices de $\mathcal{G}(x,y)$, la composición en \mathcal{G} restringida a los n -símplices nos determina un grupoide \mathcal{G}_n con conjunto de objetos O y conjunto de flechas G_n . Además los operadores cara y degeneración de cada conjunto simplicial $\mathcal{G}(x,y)$ determinan funtores

$$\mathcal{G}_{n+1} \xleftarrow{s_i} \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_i} \mathcal{G}_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

respectivamente, que son la identidad en objetos.

El recíproco también es cierto, de manera que podemos identificar cada grupoide simplicial \mathcal{G} con el objeto simplicial interno en la categoría de grupoides

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} = & \cdots & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{G}_{n-1} & \cdots & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}_0 \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \\ & & \xrightarrow{d_n} & & \xrightarrow{d_{n-1}} & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} & & \\ & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{s_0} \end{array} & & \\ & & \xrightarrow{d_n} & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_2} & & \xrightarrow{d_1} & & \\ & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \\ & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow s \\ \downarrow t \end{array} & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & O & \xrightarrow{\quad} & O & \cdots & O & \xrightarrow{\quad} & O & \xrightarrow{\quad} & O \end{array} \quad (2.1)$$

que tiene la propiedad de que los grupoides \mathcal{G}_n , de n -símplices, tienen todos el mismo conjunto de objetos O y los operadores cara y degeneración son la identidad en objetos. Análogamente, un functor enriquecido corresponde, vía la identificación anterior, biunívocamente con un morfismo simplicial interno en grupoides. En resumen tenemos:

Proposición 2.1.1. *La categoría \mathbf{Gd} puede identificarse con la subcategoría plena de la categoría $\mathbf{SimplGpd} = \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op}}$, de objetos simpliciales internos en grupoides, con objetos aquellos objetos simpliciales tales que todos los funtores cara y degeneración son la identidad en objetos.*

La segunda visión, que podemos tener de un grupoide simplicial, está basada en el isomorfismo

$$\mathbf{SimplGpd} \cong \mathbf{Gpd}(\mathbf{SSet}),$$

que se tiene entre la categoría de objetos simpliciales sobre grupoides y la categoría de grupoides internos en la categoría de conjuntos simpliciales. Así, el hecho de ser la composición en un grupoide simplicial un morfismo de grupoides, nos permite identificar un grupoide simplicial \mathcal{G} , como el anterior, con un grupoide interno en la categoría de conjuntos simpliciales, con objetos el conjunto simplicial constante $\mathbf{O} = K(O, 0)$, y con flechas el conjunto simplicial

$$\mathbf{G} = \cdots \quad G_n \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_{n-1} \quad \cdots \quad G_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} G_0 .$$

El recíproco también es cierto, de manera que tenemos:

Proposición 2.1.2. *La categoría de grupoides simpliciales \mathbf{Gd} puede ser considerada como la subcategoría plena de la categoría de grupoides internos en la categoría de conjuntos simpliciales $\mathbf{Gpd}(\mathbf{SSet})$, con objetos aquellos grupoides con objeto de objetos un conjunto simplicial constante.*

Notemos que en este caso el funtor “categoría subyacente” desde la categoría de grupoides simpliciales factoriza por la categoría de grupoides. Además, puesto que la unidad u (para el producto cartesiano) en \mathbf{SSet} es el objeto terminal, el grupoide subyacente de un grupoide simplicial \mathcal{G} es precisamente el grupoide \mathcal{G}_0 de cero símplices. Así el funtor “categoría subyacente”

$$U = (-)_0 : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gpd}$$

es el funtor truncación a nivel cero.

Notemos también que \mathbf{Gd} como subcategoría de $\mathbf{SimplGpd}$ o de $\mathbf{Gpd}(\mathbf{SSet})$ es cerrada para límites. En particular, para cada $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$, se tiene que $\text{Cosk}^n(\mathcal{G}) \in \mathbf{Gd}$ para cualquier $n \geq 1$.

Obsérvese el uso de tipos de letra que hemos utilizado y que utilizaremos a lo largo de esta memoria:

- \mathcal{G} denotará un grupoide simplicial, a cuyo conjunto de objetos normalmente denotaremos como O .
- \mathcal{G}_n denotará el grupoide de n -símplices de \mathcal{G} .
- G_n denotará el conjunto de flechas del grupoide \mathcal{G}_n .
- \mathbf{G} denotará al conjunto simplicial de flechas de \mathcal{G} .
- $\mathbf{O} = K(O, 0)$ denotará al conjunto simplicial de objetos de \mathcal{G} que tiene al conjunto O en todas las dimensiones con caras y degeneraciones la identidad en O .

2.2 El complejo de Moore y los grupos de homotopía de un grupoide simplicial.

Sea \mathcal{G} un grupoide simplicial como el representado por el diagrama (2.1). Para cada $n \geq 1$, sea $\Lambda_n^n(\mathcal{G})$ el grupoide correspondiente de caras abiertas en dimensión n . Entonces el conjunto de objetos de $\Lambda_n^n(\mathcal{G})$ es también O y una flecha de $\Lambda_n^n(\mathcal{G})$ consiste en una n -upla

$$(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, -)$$

de flechas f_i en \mathcal{G}_{n-1} , tales que $d_j(f_k) = d_{k-1}(f_j)$, cuando $j < k$ y $k, j \neq n$. Recordemos que $\Lambda_1^1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ (ver Sección 1.3.1).

Observamos como dada una n -upla $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, -)$ en $\Lambda_n^n(\mathcal{G})$, la condición $d_j(f_k) = d_{k-1}(f_j)$ asegura que todas las flechas f_i de dicha n -upla tienen el mismo dominio y codominio, pues en particular $d_0(f_k) = d_{k-1}(f_0)$, para $0 < k \leq n-1$, lo cual implica que $s(d_0(f_k)) = s(d_{k-1}(f_0))$ y $t(d_0(f_k)) = t(d_{k-1}(f_0))$. Ahora bien, $sd_i = s$ y $td_i = t$, luego $s(f_k) = s(f_0)$ y $t(f_k) = t(f_0)$ para $0 < k \leq n-1$. Además la composición en $\Lambda_n^n(\mathcal{G})$ está dada componente a componente.

Denotaremos por $\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$, $n \geq 1$, al grupoide totalmente desconexo núcleo del funtor canónico

$$K_n^n : \mathcal{G}_n \longrightarrow \Lambda_n^n(\mathcal{G}); f \mapsto (d_0(f), \dots, d_{n-1}(f), -), \text{ en flechas } f \in \mathcal{G}_n,$$

ver (1.11). Puesto que el funtor K_n^n es la identidad en objetos el grupoide $\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$ es totalmente desconexo con objeto de objetos O . Para $n = 0$ escribiremos $\mathcal{N}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$.

El último operador cara $d_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n-1}$ en cada dimensión induce, por restricción, un funtor (que es la identidad en objetos)

$$\partial_n : \mathcal{N}_n(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{N}_{n-1}(\mathcal{G}),$$

de manera que se tiene una sucesión de grupoides (todos ellos totalmente desconexos salvo quizás \mathcal{G}_0) y morfismos de grupoides que son la identidad en objetos

$$\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \dots \mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{N}_n(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{N}_{n-1}(\mathcal{G}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{N}_1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{N}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0, \quad (2.2)$$

con la propiedad de que cualquier composición $\partial_n \partial_{n+1}$ lleva cada flecha de $\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$ en una identidad. En efecto, dada $u : x \rightarrow x$ en $\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$, la condición $d_i(u) = Id_x$ para $0 \leq i \leq n$, implica:

$$\partial_n \partial_{n+1}(u) = \partial_n(d_{n+1}(u)) = d_n d_{n+1}(u) = d_n d_n(u) = d_n(Id_x) = Id_x.$$

El complejo de grupoides $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ (2.2) es el *complejo de Moore* del grupoide simplicial \mathcal{G} .

Además, el complejo $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ tiene la siguiente estructura adicional. Para cada objeto $x \in O$ y cada $n \geq 1$ denotemos por $N_n(\mathcal{G})(x)$ al grupo de endomorfismos del grupoide totalmente disconexo $\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$ en el objeto x , esto es,

$$N_n(\mathcal{G})(x) = \mathbf{End}_{\mathcal{N}_n(\mathcal{G})}(x).$$

Puesto que $\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$ es un subgrupoide normal de \mathcal{G}_n , ya que es el núcleo de un funtor (ver (1.4)), la conjugación en \mathcal{G}_n nos permite definir un funtor

$$N_n(\mathcal{G}) : \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathbf{Gp}; x \mapsto N_n(\mathcal{G})(x),$$

esto es, $N_n(\mathcal{G})$ es un \mathcal{G}_n -grupo con acción dada por conjugación. Ahora bien, el único morfismo $s_0^n : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_n$, determinado por los operadores degeneración, nos permite considerar a cada $N_n(\mathcal{G})$ como un \mathcal{G}_0 -grupo, vía composición con s_0^n , esto es, podemos considerar el funtor

$$N_n(\mathcal{G}) : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathbf{Gp},$$

que asocia a cada objeto x de \mathcal{G}_0 el grupo $N_n(\mathcal{G})(x) = \mathbf{End}_{\mathcal{N}_n(\mathcal{G})}(x)$ y a cada flecha $t : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 , el morfismo de grupos

$$N_n(\mathcal{G})(t) : N_n(\mathcal{G})(x) \rightarrow N_n(\mathcal{G})(y)$$

que asocia a cada $u \in N_n(\mathcal{G})(x)$ el endomorfismo $s_0^n(t) u s_0^n(t)^{-1}$ en $N_n(\mathcal{G})(y)$.

Notemos además que los funtores $\partial_n : \mathcal{N}_n(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{N}_{n-1}(\mathcal{G})$ inducen transformaciones naturales

$$\partial_n : N_n(\mathcal{G}) \longrightarrow N_{n-1}(\mathcal{G}),$$

que asocian a cada objeto x el morfismo de grupos

$$(\partial_n)_x : N_n(\mathcal{G})(x) \rightarrow N_{n-1}(\mathcal{G})(x); u \mapsto (\partial_n)_x(u) = \partial_n(u) = d_n(u).$$

Así definida esta aplicación ∂_n es efectivamente natural pues, dada una flecha $t : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 y dado un objeto $u \in N_n(\mathcal{G})(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned} N_{n-1}(\mathcal{G})(t)((\partial_n)_x(u)) &= N_{n-1}(\mathcal{G})(t)(d_n(u)) = s_0^{n-1}(t)d_n(u)s_0^{n-1}(t)^{-1} \\ &= d_n(s_0^n(t)us_0^n(t)^{-1}) = d_n(N_n(\mathcal{G})(t)(u)) \\ &= (\partial_n)_y(N_n(\mathcal{G})(t)(u)), \end{aligned}$$

siendo entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} x & N_n(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_n)_x} N_{n-1}(\mathcal{G})(x) \\ t \downarrow & N_n(\mathcal{G})(t) \downarrow & \downarrow N_{n-1}(\mathcal{G})(t) \\ y & N_n(\mathcal{G})(y) & \xrightarrow{(\partial_n)_y} N_{n-1}(\mathcal{G})(y) \end{array}$$

conmutativo.

De esta manera obtenemos una sucesión de \mathcal{G}_0 -grupos

$$N(\mathcal{G}) : \dots \rightarrow N_{n+1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} N_n(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_n} N_{n-1}(\mathcal{G}) \rightarrow \dots \rightarrow N_1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\partial_1} \text{End}_{\mathcal{G}_0}, \quad (2.3)$$

tal que $\partial_n \partial_{n+1}$ es trivial. A la sucesión de \mathcal{G}_0 -grupos (2.3) anterior también la llamaremos *complejo de Moore* del grupoide simplicial \mathcal{G} .

Notamos ahora que las construcciones $\mathcal{N}(-)$ y $N(-)$ son ambas funtoriales.

Recordemos también que la condición de Kan para grupos simpliciales se traduce en que los morfismos canónicos K_n^i a las caras abiertas sean sobreyectivos. La Proposición 2.2.3 nos va a trasladar al contexto de grupoides simpliciales el hecho de que todo grupo simplicial satisface la condición de Kan. Para demostrarla necesitaremos los siguientes lemas previos:

Lema 2.2.1. *Sea \mathcal{G} un grupoide simplicial, para cada $n \geq 1$ y cada $(m+1)$ -upla de flechas (f_0, f_1, \dots, f_m) en \mathcal{G}_n con $0 \leq m \leq n$, tales que $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ si $0 \leq i < j \leq m$, definimos recursivamente*

$$\begin{aligned} [f_0] &= f_0, \\ [f_0, f_1] &= f_1 f_0^{-1} s_0 d_1(f_0), \\ [f_0, f_1, \dots, f_m] &= f_m [f_0, \dots, f_{m-1}]^{-1} [s_{m-1} d_m(f_0), \dots, s_{m-1} d_m(f_{m-1})]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Entonces

$$d_i[f_0, f_1, \dots, f_m] = d_m(f_i)$$

para todo $0 \leq i \leq m$.

Demostración: Observamos primero que, como antes ya comentamos, la condición $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ para $0 \leq i < j \leq m$, hace que cada una de las flechas de la $(m+1)$ -upla tengan el mismo dominio y codominio, por lo que las composiciones que utilizamos para definir los corchetes anteriores pueden realizarse. Además, cada uno de estos corchetes es una flecha en \mathcal{G}_n de igual dominio y codominio que cada una de las f_i de la $(m+1)$ -upla con la que operamos.

Vamos ahora a demostrar el resultado por inducción sobre m . Es obvio el resultado para $m = 0$ y veamos cómo también es cierto para $m = 1$:

$$\begin{aligned} d_0[f_0, f_1] &= d_0(f_1 f_0^{-1} s_0 d_1(f_0)) = d_0(f_1) d_0(f_0)^{-1} d_0 s_0 d_1(f_0) = d_1(f_0), \\ d_1[f_0, f_1] &= d_1(f_1 f_0^{-1} s_0 d_1(f_0)) = d_1(f_1) d_1(f_0)^{-1} d_1 s_0 d_1(f_0) = d_1(f_1). \end{aligned}$$

Supongamos ahora cierto el resultado para $k \leq m-1$, es decir,

$$d_i[f_0, f_1, \dots, f_k] = d_k(f_i), \quad 0 \leq i \leq k \text{ y } k \leq m-1,$$

y demostremos que es también cierto para $k = m$:

$$\begin{aligned}
d_i[f_0, f_1, \dots, f_m] &= d_i(f_m[f_0, \dots, f_{m-1}]^{-1}[s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) \\
&= d_i(f_m)d_i([f_0, \dots, f_{m-1}])^{-1}d_i([s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) \\
&= d_i(f_m)d_{m-1}(f_i)^{-1}d_{m-1}(s_{m-1}d_m(f_i)) = d_m(f_i), \quad 0 \leq i \leq m-1, \\
d_m[f_0, f_1, \dots, f_m] &= d_m(f_m[f_0, \dots, f_{m-1}]^{-1}[s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) \\
&= d_m(f_m)d_m([f_0, \dots, f_{m-1}])^{-1}d_m([s_{m-1}d_m(f_0), \dots, \\
&\quad s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) = d_m(f_m),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta, pues

$$\begin{aligned}
d_m[s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})] &= [d_m s_{m-1}d_m(f_0), \dots, d_m s_{m-1}d_m(f_{m-1})] \\
&= [d_m(f_0), \dots, d_m(f_{m-1})] = d_m[f_0, \dots, f_{m-1}],
\end{aligned}$$

por el apartado 1 del siguiente Lema 2.2.2. ■

Los corchetes definidos recursivamente por las fórmulas (2.4) satisfacen las siguientes propiedades que usaremos posteriormente.

Lema 2.2.2. *En las condiciones del Lema anterior se tiene:*

1. $d_k[f_0, \dots, f_m] = [d_k(f_0), \dots, d_k(f_m)]$ para todo $m < k \leq n$.
2. $s_j[f_0, \dots, f_m] = [s_j(f_0), \dots, s_j(f_m)]$ para todo $m < j \leq n$.

Demostración: Vamos a demostrar estas propiedades por inducción sobre m .

La primera propiedad es cierta para $m = 0$, pues

$$d_k[f_0] = d_k(f_0) = [d_k(f_0)].$$

Supongamos que es cierta para cualquier $i \leq m-1$ y veamos cómo también lo es para $i = m$:

$$\begin{aligned}
d_k[f_0, \dots, f_m] &= d_k(f_m[f_0, \dots, f_{m-1}]^{-1}[s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) \\
&= d_k(f_m)[d_k(f_0), \dots, d_k(f_{m-1})]^{-1} \\
&\quad [d_k s_{m-1}d_m(f_0), \dots, d_k s_{m-1}d_m(f_{m-1})] \\
&= d_k(f_m)[d_k(f_0), \dots, d_k(f_{m-1})]^{-1} \\
&\quad [s_{m-1}d_m d_k(f_0), \dots, s_{m-1}d_m d_k(f_{m-1})] \\
&= [d_k(f_0), \dots, d_k(f_m)].
\end{aligned}$$

Por lo que la primera propiedad es cierta.

Por otra parte, la propiedad 2 también es cierta para $m = 0$:

$$s_j[f_0] = s_j(f_0) = [s_j(f_0)].$$

Si es cierta para cualquier $i \leq m - 1$, también lo es para $i = m$:

$$\begin{aligned} s_j[f_0, \dots, f_m] &= s_j(f_m [f_0, \dots, f_{m-1}]^{-1} [s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_{m-1}d_m(f_{m-1})]) \\ &= s_j(f_m) [s_j(f_0), \dots, s_j(f_{m-1})]^{-1} \\ &\quad [s_j s_{m-1}d_m(f_0), \dots, s_j s_{m-1}d_m(f_{m-1})] \\ &= s_j(f_m) [s_j(f_0), \dots, s_j(f_{m-1})]^{-1} \\ &\quad [s_{m-1}d_m s_j(f_0), \dots, s_{m-1}d_m s_j(f_{m-1})] \\ &= [s_j(f_0), \dots, s_j(f_m)]. \end{aligned}$$

Por tanto, también se cumple la propiedad 2. ■

Proposición 2.2.3. *Todo grupoide simplicial \mathcal{G} satisface la siguiente condición:*

Para todo $n \geq 1$ y para $0 \leq i \leq n$, los funtores

$$K_n^i : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathcal{G})$$

son sobreyectivos a nivel de objetos y flechas.

Demostración: Notemos que los funtores anteriores a nivel de objetos son todos la identidad, luego sólo tenemos que ver que son sobreyectivos a nivel de flechas.

Comencemos viendo que $K_n^n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^n(\mathcal{G})$ es sobreyectivo en flechas.

Dada una flecha $(f_0, \dots, f_{n-1}, -) \in \Lambda_n^n(\mathcal{G})$, la n -upla, de flechas en \mathcal{G}_n ,

$$(s_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-1}(f_{n-1}))$$

cumple:

$$d_i s_{n-1}(f_j) = s_{n-2} d_i(f_j) = s_{n-2} d_{j-1}(f_i) = d_{j-1} s_{n-1}(f_i),$$

para $i < j \leq n - 1$. De esta forma, estamos en las condiciones del Lema 2.2.1 y podemos encontrar una flecha de \mathcal{G}_n

$$f = [s_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-1}(f_{n-1})]$$

tal que $d_i(f) = d_{n-1} s_{n-1}(f_i) = f_i$ para $0 \leq i \leq n - 1$. En otras palabras

$$K_n^n(f) = (f_0, \dots, f_{n-1}, -),$$

y por tanto, K_n^n es sobreyectivo en flechas.

Veamos ahora cómo K_n^{n-1} es sobreyectivo en flechas. Dado

$$(f_0, \dots, f_{n-2}, -, f_n) \in \Lambda_n^{n-1}(\mathcal{G}),$$

la $(n-1)$ -upla, de flechas de \mathcal{G}_n ,

$$(s_{n-2}(f_0), \dots, s_{n-2}(f_{n-2}))$$

cumple:

$$d_i s_{n-2}(f_j) = s_{n-3} d_i(f_j) = s_{n-3} d_{j-1}(f_i) = d_{j-1} s_{n-2}(f_i).$$

para $i < j \leq n-2$. De nuevo estamos en las condiciones del Lema 2.2.1 por lo que podemos construir una flecha

$$g = [s_{n-2}(f_0), \dots, s_{n-2}(f_{n-2})]$$

en \mathcal{G}_n , satisfaciendo que

$$d_i(g) = d_{n-2} s_{n-2}(f_i) = f_i, \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-2.$$

Ahora bien, la composición

$$f = s_{n-1}(f_n (d_n(g))^{-1}) g$$

será una flecha de \mathcal{G}_n , tal que:

- Para $0 \leq i \leq n$ e $i \neq n-1$,

$$\begin{aligned} d_i(f) &= d_i(s_{n-1}(f_n (d_n(g))^{-1}) g) = d_i s_{n-1}(f_n (d_n(g))^{-1}) d_i(g) \\ &= s_{n-2}(d_i(f_n) d_i(d_n(g))^{-1}) f_i = s_{n-2}(d_i(f_n) (d_{n-1} d_i(g))^{-1}) f_i \\ &= s_{n-2}(d_i(f_n) d_{n-1}(f_i)^{-1}) f_i = f_i, \end{aligned}$$

ya que $d_i(f_n) = d_{n-1}(f_i)$.

- Y para $i = n$

$$d_n(f) = d_n(s_{n-1}(f_n (d_n(g))^{-1}) g) = f_n d_n(g)^{-1} d_n(g) = f_n.$$

Por tanto,

$$K_n^{n-1}(f) = (f_0, \dots, f_{n-2}, -, f_n)$$

y así, el morfismo canónico K_n^{n-1} es sobreyectivo en flechas.

Por último, generalizando lo anterior vamos a demostrar que $K_n^r : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^r(\mathcal{G})$ es también sobreyectivo en flechas, para $0 < r \leq n-2$.

Dado $(f_0, \dots, f_{r-1}, -, f_{r+1}, \dots, f_n) \in \Lambda_n^r(\mathcal{G})$, donde $f_i : x \rightarrow y$ para $0 \leq i \leq n$ e $i \neq r$, consideremos la r -upla de flechas de \mathcal{G}_n

$$(s_{r-1}(f_0), \dots, s_{r-1}(f_{r-1}))$$

ésta satisface, como en los casos anteriores, que $d_i s_{r-1}(f_j) = d_{j-1} s_{r-1}(f_i)$, para $i < j \leq r-1$, por lo que está en las condiciones del Lema 2.2.1 y de esta forma

$$g_r = [s_{r-1}(f_0), \dots, s_{r-1}(f_{r-1})]$$

es una flecha de \mathcal{G}_n , satisfaciendo que $d_i(g_r) = d_{r-1} s_{r-1}(f_i) = f_i$, $0 \leq i \leq r-1$. Vamos ahora a encontrar, para cada $1 \leq p \leq n-r$, una flecha h_{rp} de \mathcal{G}_n , tal que $d_i(h_{rp}) = f_i$ si $0 \leq i < r$ y $n-p < i \leq n$ (nótese que la flecha f del caso anterior, donde $r = n-1$, es $h_{n-1,1} = h_{rn-r}$). Daremos estas flechas h_{rp} de forma inductiva: Definimos

$$h_{r1} = s_{n-1}(f_n (d_n(g_r))^{-1}) g_r$$

que claramente satisface las condiciones buscadas pues para $0 \leq i < r$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_i(h_{r1}) &= d_i(s_{n-1}(f_n (d_n(g_r))^{-1}) g_r) = d_i s_{n-1}(f_n (d_n(g_r))^{-1}) d_i(g_r) \\ &= s_{n-2} d_i(f_n) (s_{n-2} d_{n-1} d_i(g_r))^{-1} d_i(g_r) = s_{n-2} d_i(f_n) (s_{n-2} d_{n-1}(f_i))^{-1} f_i \\ &= f_i, \end{aligned}$$

y para $i = n$

$$d_n(h_{r1}) = d_n(s_{n-1}(f_n (d_n(g_r))^{-1}) g_r) = f_n (d_n(g_r))^{-1} d_n(g_r) = f_n.$$

Supuesto definida la flecha h_{rp-1} con $0 < p \leq n-r$, definimos

$$h_{rp} = s_{n-p}(f_{n-p+1} (d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}) h_{rp-1}.$$

Así definida satisface las condiciones requeridas pues para $0 \leq i < r$, se tiene

$$\begin{aligned} d_i(h_{rp}) &= d_i(s_{n-p}(f_{n-p+1} (d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}) h_{rp-1}) \\ &= d_i s_{n-p}(f_{n-p+1} (d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}) d_i(h_{rp-1}) \\ &= s_{n-p-1} d_i(f_{n-p+1}) (s_{n-p-1} d_{n-p} d_i(h_{rp-1}))^{-1} d_i(h_{rp-1}) \\ &= s_{n-p-1} d_i(f_{n-p+1}) (s_{n-p-1} d_{n-p}(f_i))^{-1} f_i = f_i, \end{aligned}$$

para $n-p+1 < i \leq n$, se tiene

$$\begin{aligned} d_i(h_{rp}) &= d_i(s_{n-p}(f_{n-p+1} (d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}) h_{rp-1}) \\ &= d_i s_{n-p}(f_{n-p+1} (d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}) d_i(h_{rp-1}) \\ &= s_{n-p} d_{i-1}(f_{n-p+1}) (s_{n-p} d_{n-p+1} d_i(h_{rp-1}))^{-1} d_i h_{rp-1} \\ &= s_{n-p} d_{i-1}(f_{n-p+1}) (s_{n-p} d_{n-p+1}(f_i))^{-1} f_i = f_i, \end{aligned}$$

y para $i = n - p + 1$, también tenemos:

$$\begin{aligned} d_{n-p+1}(h_{rp}) &= d_{n-p+1}(s_{n-p}(f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{rp-1})))^{-1})h_{rp-1}) \\ &= f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{rp-1}))^{-1}d_{n-p+1}(h_{rp-1}) = f_{n-p+1}. \end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos $f = h_{rn-r}$ se tiene que $d_i(f) = f_i$ para $0 \leq i \leq n$ e $i \neq r$, es decir,

$$K_n^r(f) = (f_0, \dots, f_{r-1}, -, f_{r+1}, \dots, f_n),$$

y por tanto, K_n^r es sobreyectivo en flechas.

Por último, veamos que $K_n^0 : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^0(\mathcal{G})$ es también sobreyectivo en flechas. Dada una flecha $(-, f_1, \dots, f_n) \in \Lambda_n^0(\mathcal{G})$, siguiendo con la misma filosofía de los casos anteriores vamos a encontrar morfismos h_p para $1 \leq p \leq n$ tales que $d_i(h_p) = f_i$ si $n - p < i \leq n$. Definimos

$$h_1 = s_{n-1}(f_n)$$

que claramente satisface $d_n(h_1) = f_n$. Supuesta definida h_{p-1} tal que $d_i(h_{p-1}) = f_i$ si $n - p + 1 < i \leq n$, definimos

$$h_p = s_{n-p}(f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{p-1})))^{-1}h_{p-1}$$

y así definida para $n - p + 1 < i \leq n$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_i(h_p) &= d_i(s_{n-p}(f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{p-1})))^{-1}h_{p-1}) \\ &= d_i s_{n-p}(f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{p-1})))^{-1}d_i h_{p-1} \\ &= s_{n-p}d_{i-1}(f_{n-p+1})(s_{n-p}d_{n-p+1}d_i(h_{p-1}))^{-1}d_i(h_{p-1}) \\ &= s_{n-p}d_{i-1}(f_{n-p+1})(s_{n-p}d_{n-p+1}(f_i))^{-1}f_i = f_i, \end{aligned}$$

y también para $i = n - p + 1$

$$\begin{aligned} d_{n-p+1}(h_p) &= d_{n-p+1}(s_{n-p}(f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{p-1})))^{-1}h_{p-1}) \\ &= f_{n-p+1}(d_{n-p+1}(h_{p-1}))^{-1}d_{n-p+1}(h_{p-1}) = f_{n-p+1}, \end{aligned}$$

como queríamos. Tomando $f = h_n$ se tiene que $d_i(f) = f_i$ para $0 < i \leq n$, es decir,

$$K_n^0(f) = (-, f_1, \dots, f_n),$$

y por tanto, K_n^0 también es sobreyectivo en flechas. ■

Otro resultado de grupos simpliciales que podemos trasladar al contexto de grupoides simpliciales y que nos será de gran utilidad viene dado en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.4. *En un grupoide simplicial \mathcal{G} , los núcleos de los morfismos $K_n^i : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathcal{G})$ son biyectivos para cada $0 \leq i \leq n$.*

Demostración: Este resultado es un corolario inmediato del Lema 1.6.1 de [22], en él que se demuestra un enunciado análogo al de esta proposición pero restringido al contexto de grupos simpliciales. Basta con observar que los funtores K_n^i son todos la identidad en objetos, y por tanto, sus núcleos son grupoides totalmente desconexos. Por tanto, para probar que $\ker(K_n^n) \cong \ker(K_n^i)$ para cada $0 \leq i \leq n - 1$, basta con ver que para cada elemento $x \in O$ los grupos $\text{End}_{\ker(K_n^n)}(x)$ y $\text{End}_{\ker(K_n^i)}(x)$ son isomorfos, pero estos núcleos son precisamente los núcleos de los morfismos de grupos $K_n^n : \mathcal{G}_n(x, x) \rightarrow \Lambda_n^n(\mathcal{G}(x, x))$ y $K_n^i : \mathcal{G}_n(x, x) \rightarrow \Lambda_n^i(\mathcal{G}(x, x))$ que son isomorfos por el Lema 1.6.1 de [22]. ■

Como consecuencia de la Proposición anterior obtenemos el siguiente resultado que usaremos más adelante.

Corolario 2.2.5. *Sea \mathcal{G} un grupoide simplicial y $n \geq 0$. Si el núcleo del morfismo $K_n^n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^n(\mathcal{G})$ es trivial, entonces el núcleo del morfismo $K_n^i : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathcal{G})$ es trivial para cada $0 \leq i \leq n - 1$.*

Pasamos ahora a definir la “homotopía” de un grupoide simplicial \mathcal{G} .

El “grupoide de componentes conexas” $\pi_0(\mathcal{G})$ es el coigualador de los funtores d_0, d_1 ,

$$\mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{q} \pi_0(\mathcal{G}).$$

Puesto que los funtores d_0 y d_1 son la identidad en objetos, podemos aplicar el Lema 1.1.6 para deducir que

$$\pi_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 / \text{im}(\partial_1)$$

con $\partial_1 : \mathcal{N}_1(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{N}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$ el primer morfismo en el complejo de Moore de \mathcal{G} , ver (2.2). Además, puesto que ∂_1 es un funtor desde un grupoide totalmente desconexo $\mathcal{N}_1(\mathcal{G})$ en \mathcal{G}_0 , $\text{im}(\partial_1)$ es también un grupoide totalmente desconexo, así $\pi_0(\mathcal{G})$ tiene los mismos objetos que \mathcal{G} y la proyección canónica $q : \mathcal{G}_0 \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$ es la identidad en objetos.

La construcción del grupoide de componentes conexas es funtorial de manera que tenemos un funtor

$$\pi_0 : \mathbf{Gd} \longrightarrow \mathbf{Gpd}.$$

Para $n \geq 1$, la homotopía de \mathcal{G} se define básicamente como la homología de su complejo de Moore $N(\mathcal{G})$ (2.3). Más concretamente, si consideramos el complejo

de \mathcal{G}_0 grupos $N(\mathcal{G})$, su homología en dimensión n será un \mathcal{G}_0 -grupo

$$H_n N(\mathcal{G}) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})} : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathbf{Gp}$$

que sobre cada objeto $x \in \mathcal{G}_0$ actúa como

$$[H_n N(\mathcal{G})](x) = H_n [N(\mathcal{G})(x)] = H_n N[\mathcal{G}(x, x)] = \frac{\ker(\partial_n)_x}{\text{im}(\partial_{n+1})_x}.$$

Se tiene entonces que la homología de $N(\mathcal{G})$ en un objeto $x \in \mathcal{G}_0$ es la homotopía del grupo simplicial $\mathcal{G}(x, x)$ por lo que $H_n N(\mathcal{G})(x)$ es un grupo abeliano. Observamos ahora que estos \mathcal{G}_0 -grupos $H_n(N(\mathcal{G}))$ factorizan de forma única a través de la proyección canónica q ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{q} & \pi_0(\mathcal{G}) \\ & & \searrow^{H_n N(\mathcal{G})} & & \swarrow_{\pi_n(\mathcal{G})} \\ & & & \mathbf{Ab.} & \end{array} \quad (2.5)$$

Se define el “ n -ésimo grupo de homotopía de \mathcal{G} ” $\pi_n(\mathcal{G})$ como el único $\pi_0(\mathcal{G})$ -módulo que hace conmutar el triángulo en el diagrama (2.5) anterior.

2.3 Los funtores nervio-espacio clasificador y grupoide de lazos-grupoide simplicial fundamental

En esta sección utilizaremos el funtor nervio

$$\text{Ner} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SSet},$$

introducido en la Sección 1.1, y el funtor diagonal de Artin-Mazur

$$\overline{W} : \mathbf{SSimpl}(\mathbf{Set}) \rightarrow \mathbf{SSet},$$

definido en la Sección 1.3.4, para asociar, como Dwyer y Kan en [29], un conjunto simplicial a un grupoide simplicial al que llamaremos su nervio.

El funtor nervio $\text{Ner} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SSet}$, introducido en la Sección 1.1, induce, aplicándolo en cada dimensión o vía composición

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & & \\ \mathcal{G} \downarrow & \searrow^{\text{Ner}_*(\mathcal{G})} & \\ \mathbf{Gpd} & \xrightarrow{\text{Ner}} & \mathbf{SSet}, \end{array}$$

un funtor

$$\text{Ner}_* : \mathbf{SimplGpd} \rightarrow \mathbf{SSimpl}(\mathbf{Set}).$$

De esta forma para cada grupoide simplicial \mathcal{G} , como el dado por el diagrama (2.1), tenemos un conjunto simplicial doble

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ner}_*(\mathcal{G}) : & \cdots & \text{Ner}_3(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \text{Ner}_2(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{G} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{O} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \text{Ner}(\mathcal{G}_2) : & \cdots & \text{Ner}_3(\mathcal{G}_2) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_2 \times_O G_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \end{array} & \mathcal{O} \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \text{Ner}(\mathcal{G}_1) : & \cdots & \text{Ner}_3(\mathcal{G}_1) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_1 \times_O G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \end{array} & \mathcal{O} \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \\
 \text{Ner}(\mathcal{G}_0) : & \cdots & \text{Ner}_3(\mathcal{G}_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_0 \times_O G_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & G_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_0^h} \end{array} & \mathcal{O} \\
 & & & & & & & & d_0^h
 \end{array} \tag{2.6}$$

donde los operadores cara y degeneración horizontales son los del nervio de cada uno de los grupoides \mathcal{G}_i y los operadores cara y degeneración verticales son los inducidos por los funtores cara y degeneración del grupoide simplicial.

Definimos el *nervio de un grupoide simplicial* \mathcal{G} como el conjunto simplicial

$$\text{Ner}(\mathcal{G}) = \overline{W}\text{Ner}_*(\mathcal{G}), \tag{2.7}$$

donde \overline{W} es funtor diagonal de Artin-Mazur definido en la Sección 1.3.4.

El funtor nervio desde la categoría de grupoides simpliciales se define entonces como la composición

$$\text{Ner} : \mathbf{Gd} \hookrightarrow \mathbf{SimplGpd} \xrightarrow{\text{Ner}_*} \mathbf{SSimpl}(\mathbf{Set}) \xrightarrow{\overline{W}} \mathbf{SSet} .$$

Vamos ahora a hacer una descripción explícita del nervio de un grupoide simplicial \mathcal{G} .

Teniendo en cuenta la definición de los funtores nervio y \overline{W} es obvio que $\text{Ner}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{O}$ y que $\text{Ner}_1(\mathcal{G}) = G_0$. Vamos a estudiar con detalle quienes serían los 2-símplices de este conjunto simplicial para luego generalizando obtener los n -símplices.

Un 2-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ estará formado por una terna $(x, g_1, (h_1, h_2))$ con $x \in \mathcal{O}$, $g_1 \in G_1$ y $(h_1, h_2) \in G_0 \times_O G_0$ verificando que $d_0^v(x) = d_1^h(g_1)$ y $d_0^v(g_1) =$

$d_2^h(h_1, h_2)$, es decir, $x = s(g_1)$ y $d_0(g_1) = h_1$. Podemos observar que h_1 está totalmente determinada por g_1 y además $s(h_2) = t(g_1)$, así identificaremos un 2-símplice de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ con un par de morfismos $x \xrightarrow{g_1} y \xrightarrow{h_2} z$ de forma que $g_1 \in G_1$ y $h_2 \in G_0$. Renombrando estos morfismos haremos la identificación:

$$\text{Ner}_2(\mathcal{G}) = \{(f_1, f_2) ; f_i \in G_{2-i}, t(f_1) = s(f_2)\},$$

es decir, $\text{Ner}_2(\mathcal{G})$ es el conjunto de pares de morfismos $x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2$ donde $f_i \in G_{2-i}$. Teniendo ahora en cuenta la definición de los operadores cara y degeneración del conjunto simplicial $\overline{W}(\text{Ner}_*(\mathcal{G}))$ y la identificación anterior, obtenemos los siguientes operadores cara:

$$d_0(f_1, f_2) \equiv d_0(x_0, f_1, (d_0(f_1), f_2)) = (d_0^h(f_1), d_0^h(d_0(f_1), f_2)) = (t(f_1), f_2) \equiv f_2,$$

$$d_1(f_1, f_2) \equiv d_1(x_0, f_1, (d_0(f_1), f_2)) = (d_1^v(x_0), d_1^h(d_0(f_1), f_2)) = (x_0, f_2 d_0(f_1)) \\ \equiv f_2 d_0(f_1),$$

$$d_2(f_1, f_2) \equiv d_2(x_0, f_1, (d_0(f_1), f_2)) = (d_2^v(x_0), d_1^v(f_1)) = (x_0, d_1(f_1)) \equiv d_1(f_1),$$

y degeneración:

$$s_0(f) \equiv s_0(s(f), f) = (s_0^v(s(f)), s_0^h(s(f)), s_0^h(f)) = (s(f), Id_{s(f)}, (Id_{s(f)}, f)) \\ \equiv (Id_{s(f)}, f),$$

$$s_1(f) \equiv s_1(s(f), f) = (s_1^v(s(f)), s_0^v(f), s_1^h(f)) = (s(f), s_0(f), (f, Id_{t(f)})) \\ \equiv (s_0(f), Id_{t(f)}).$$

En general,

$$\text{Ner}_n(\mathcal{G}) = \{(f_1, f_2, \dots, f_n) ; f_i \in G_{n-i}, t(f_{i-1}) = s(f_i)\},$$

es decir, $\text{Ner}_n(\mathcal{G})$ es el conjunto de sucesiones de morfismos

$$x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n,$$

donde $f_i \in G_{n-i}$. Los operadores cara y degeneración

$$\text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G}) \xleftarrow{s_i} \text{Ner}_n(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_i} \text{Ner}_{n-1}(\mathcal{G})$$

están definidos por:

$$d_0(f_1, f_2, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n),$$

$$d_i(f_1, f_2, \dots, f_n) = (d_{i-1}(f_1), \dots, d_1(f_{i-1}), f_{i+1} d_0(f_i), f_{i+2}, \dots, f_n),$$

$$d_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = (d_{n-1}(f_1), \dots, d_2(f_{n-2}), d_1(f_{n-1})),$$

$$s_0(f_1, f_2, \dots, f_n) = (Id_{s(f_1)}, f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$s_i(f_1, f_2, \dots, f_n) = (s_{i-1}(f_1), \dots, s_0(f_i), Id_{t(f_i)}, f_{i+1}, \dots, f_n).$$

Es decir, si $x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n \in \text{Ner}_n(\mathcal{G})$, su imagen por d_0 es

$$x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n,$$

por d_i , con $1 \leq i \leq n-1$, es

$$x_0 \xrightarrow{d_{i-1}(f_1)} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{i-2} \xrightarrow{d_1(f_{i-1})} x_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}d_0(f_i)} x_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} x_{i+2} \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} x_n,$$

y por d_n su imagen es

$$x_0 \xrightarrow{d_{n-1}(f_1)} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-3} \xrightarrow{d_2(f_{n-2})} x_{n-2} \xrightarrow{d_1(f_{n-1})} x_{n-1},$$

y la imagen de $x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n$ por s_0 es

$$x_0 \xrightarrow{Id} x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n,$$

y por s_i es

$$x_0 \xrightarrow{s_{i-1}(f_1)} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{i-1} \xrightarrow{s_0(f_i)} x_i \xrightarrow{Id} x_i \xrightarrow{f_{i+1}} x_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_n \xrightarrow{f_0} x_0.$$

Este funtor nervio tiene un adjunto izquierda, el funtor *grupoide de lazos*

$$G : \mathbf{SSet} \longrightarrow \mathbf{Gd}.$$

Dado un conjunto simplicial \mathbf{X} , el grupoide de lazos $G(\mathbf{X})$ está dado por el grupoide simplicial que tiene como objetos el conjunto X_0 de vértices de \mathbf{X} , y en dimension n , $G(\mathbf{X})_n : G_n \rightrightarrows X_0$ es el grupoide libre con un generador

$$\bar{x} : d_1 d_2 \dots d_{n+1}(x) \rightarrow d_0 d_2 \dots d_{n+1}(x)$$

para cada $x \in X_{n+1}$, dividido por la relación $\overline{s_0 y} = \overline{Id}_{d_1 \dots d_n(y)}$ para cada $y \in X_n$. Los operadores cara están definidos

$$d_0 \bar{x} = \overline{d_0 x}^{-1} \overline{d_1 x},$$

$$d_i \bar{x} = \overline{d_{i+1} x}, \quad i \geq 1,$$

y las degeneraciones

$$s_i \bar{x} = \overline{s_{i+1} x}.$$

Estos dos funtores, Ner y G , son usados por Dwyer y Kan [29] para levantar la estructura de modelos de Quillen establecida en \mathbf{SSet} hasta la categoría de grupoides simpliciales. En particular usaremos el concepto de fibración de grupoides simpliciales:

Un morfismo de grupoides simpliciales $\mathbf{f} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ es una *fibración* si

- (1) la aplicación inducida entre los grupoides $\mathcal{G}_0 : G_0 \rightrightarrows O$ y $\mathcal{G}'_0 : G'_0 \rightrightarrows O'$ es una fibración, y
- (2) para cada $x \in O$, el morfismo inducido $\mathcal{G}(x, x) \rightarrow \mathcal{G}'(f(x), f(x))$ es una fibración de grupos simpliciales (o equivalentemente de conjuntos simpliciales).

Otra propiedad interesante de los funtores nervio y lazos es su comportamiento respecto a los grupos de homotopía, reflejamos este comportamiento en la siguiente proposición cuya demostración es análoga a la dada en [53] para grupos simpliciales (ver también [29]).

Proposición 2.3.1. *Para cualquier grupoide simplicial \mathcal{G} se tiene un isomorfismo (natural) de grupoides*

$$\pi_0(\mathcal{G}) \cong \pi_1(\text{Ner}(\mathcal{G})),$$

que nos permitirá identificar el grupoide de componentes conexas de un grupoide simplicial con el grupoide fundamental de su nervio. Además, usando la identificación anterior, para todo $n \geq 0$ se tienen isomorfismos de $\pi_0(\mathcal{G}) \cong \pi_1(\text{Ner}(\mathcal{G}))$ -módulos

$$\pi_n(\mathcal{G}) \cong \pi_{n+1}(\text{Ner}(\mathcal{G})).$$

Análogamente, para cualquier conjunto simplicial \mathbf{X} se tienen isomorfismos naturales

$$\pi_{n+1}(\mathbf{X}) \cong \pi_n(G(\mathbf{X})),$$

para todo $n \geq 0$, que para $n = 0$ será de grupoides y para $n > 0$ de módulos.

Al componer los funtores Ner y G con los funtores realización geométrica y complejo singular (ver Sección 1.3.5), respectivamente, obtenemos los funtores *espacio clasificador* \mathbf{B} (de un grupoide simplicial) y *grupoide simplicial fundamental* $\mathbf{\Pi}$ (de un espacio),

$$\mathbf{\Pi} = GS : \mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{SSet} \xrightarrow{G} \mathbf{Gd},$$

$$\mathbf{B} = |\text{Ner}(-)| : \mathbf{Gd} \xrightarrow{\text{Ner}} \mathbf{SSet} \xrightarrow{\parallel} \mathbf{Top}.$$

Teniendo en cuenta que por una parte los funtores realización geométrica y complejo singular [9] y por otra los funtores Ner y G [29] inducen equivalencias entre las categorías de homotopía, tenemos que los funtores $\mathbf{\Pi}$ y \mathbf{B} también inducen una equivalencia entre las correspondientes categorías de homotopía. Ésto nos permite asegurar que los grupoides simpliciales son modelos para todos los tipos de homotopía de espacios. Además, el functor espacio clasificador \mathbf{B} lleva fibrationes en fibrationes y conserva fibras de fibrationes, pues tanto la realización geométrica (ver [9]) como el functor G (ver [29]) llevan fibrationes en fibrationes y conservan fibras de fibrationes.

Como corolario inmediato de la Proposición anterior tenemos

Corolario 2.3.2. *Para cada grupoide simplicial \mathcal{G} se tiene un isomorfismo natural de grupoides*

$$\pi_1(\mathbf{B}(\mathcal{G})) \cong \pi_0(\mathcal{G}),$$

e isomorfismos naturales de $\pi_1(\mathbf{B}(\mathcal{G}))$ -módulos

$$\pi_{n+1}(\mathbf{B}(\mathcal{G})) \cong \pi_n(\mathcal{G}),$$

para todo $n \geq 1$.

2.4 Las categorías \mathbf{Gd}_n de n -tipos

2.4.1 Grupoides enriquecidos en n -hipergrupoides

Recordemos que la categoría \mathbf{Hyper}_n de n -hipergrupoides puede verse, vía el funtor nervio (1.25), como una subcategoría plena y cerrada para productos de la categoría \mathbf{SSet} de conjuntos simpliciales. Vamos a considerar ahora la categoría \mathbf{GnH} de grupoides enriquecidos en la categoría \mathbf{Hyper}_n . Así pues, podremos considerar de nuevo vía el funtor nervio a \mathbf{GnH} como una subcategoría plena de la categoría \mathbf{Gd} de grupoides simpliciales. Más concretamente, un objeto \mathcal{H} de \mathbf{GnH} , al que llamaremos *grupoide enriquecido en n -hipergrupoides*, consta de:

- un conjunto de objetos O ,
- un n -hipergrupoide $\mathcal{H}(x, y)$, para cada par de objetos $x, y \in O$, y
- un morfismo de n -hipergrupoides, *composición*,

$$\mathcal{H}(x, y) \times \mathcal{H}(y, z) \rightarrow \mathcal{H}(x, z),$$

para cada terna de objetos $x, y, z \in O$, que asocia a cada par de m -símplices componibles $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ el m -símplice composición $gf : x \rightarrow z$.

Satisfaciendo los correspondientes axiomas de asociatividad, unidades y existencia de inversos.

De forma análoga a como hicimos en la sección 2.1, podemos reestructurar los datos en un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides \mathcal{H} . Obteniendo dos visiones diferentes del concepto de grupoide enriquecido en n -hipergrupoides. Para conseguir esto, denotamos

$$H_m = \coprod_{x, y \in O} \mathcal{H}_m(x, y), \quad (2.8)$$

al coproducto (unión disjunta) de los conjuntos de m -símplices de $\mathcal{H}(x, y)$, para cada entero $0 \leq m \leq n$. La composición en \mathcal{H} restringida a los m -símplices nos

determina un grupoide \mathcal{H}_m , con conjunto de objetos O y conjunto de flechas H_m , de manera que los operadores cara y degeneración de cada n -hipergrupoide $\mathcal{H}(x, y)$ determinan funtores

$$\mathcal{H}_{m+1} \xleftarrow{s_i} \mathcal{H}_m \xrightarrow{d_i} \mathcal{H}_{m-1}, \quad 0 \leq i \leq m \leq n,$$

que son la identidad en objetos. De esta forma \mathcal{H} determina un objeto simplicial truncado interno en la categoría de grupoides, al que también denotaremos \mathcal{H} , haciendo abuso del lenguaje. Además las operaciones corchete en cada n -hipergrupoide $\mathcal{H}(x, y)$ determinan un funtor corchete

$$[-] : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}_n,$$

que de nuevo es la identidad en objetos. De esta forma \mathcal{H} es un n -hipergrupoide interno en la categoría de grupoides. En la siguiente Proposición 2.4.1 completamos esta visión:

Proposición 2.4.1. *La categoría \mathbf{GnH} puede ser identificada con:*

- La subcategoría plena de la categoría de n -hipergrupoides internos en la categoría de grupoides con objetos aquellos n -hipergrupoides cuyos funtores cara, degeneración y corchete son la identidad en objetos.
- La subcategoría plena de la categoría de grupoides internos en la categoría de n -hipergrupoides con objetos aquellos grupoides con objeto de objetos un n -hipergrupoide constante.

Demostración: Esta proposición se obtiene mediante un traslado a este contexto de los resultados establecidos en las Proposiciones 2.1.1 y 2.1.2.

Dado un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides \mathcal{H} , consideremos los grupoides \mathcal{H}_m , $0 \leq m \leq n$, definidos anteriormente. Obtenemos así un objeto simplicial truncado a nivel n interno en \mathbf{Gpd} ,

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccccccc} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_n} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \\ \mathcal{H}_n & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{H}_{n-1} & \cdots & \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{H}_0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_n} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} \\ H_n & \xrightarrow{d_0} & H_{n-1} & \cdots & H_2 & \xrightarrow{d_0} & H_1 & \xrightarrow{d_0} & H_0 \\ \downarrow s \quad \downarrow t & & \downarrow s \quad \downarrow t \\ O & \xrightarrow{=} & O & \cdots & O & \xrightarrow{=} & O & \xrightarrow{=} & O \end{array}$$

de manera que todos los grupoides \mathcal{H}_m tienen el mismo conjunto de objetos O y los operadores cara y degeneración son la identidad en objetos. Además la operación corchete en cada uno de los n -hipergrupoides $\mathcal{H}(x, y)$, $x, y \in O$, nos permite definir un funtor

$$[-] : \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}_n$$

que será la identidad en objetos y sobre morfismos actúa puntualmente. Esto es, si $(f_0, \dots, f_n, -) \in \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{H})$ la condición $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ para $0 \leq i < j \leq n$, implica que $s(f_i) = s(f_j)$ y $t(f_i) = t(f_j)$, $0 \leq i < j \leq n$, con lo que $(f_0, \dots, f_n, -) \in \Lambda_{n+1}^{n+1}(\mathcal{H}(x, y))$ con $x = s(f_0)$, $y = t(f_0)$ por lo que podemos construir el corchete $[f_0, \dots, f_n]$ que será una flecha de \mathcal{H}_n .

Así definida esta operación, es rutinario comprobar que satisface las condiciones (H1), (H2), (H3) y (H4), por lo que hemos construido un n -hipergrupoide interno en **Gpd** a partir de un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides. De forma análoga se puede comprobar que el recíproco también es cierto. Además, un funtor enriquecido corresponde, vía la identificación anterior, biunívocamente con un morfismo de n -hipergrupoides internos en grupoides.

Por otra parte, la segunda identificación se basa en el isomorfismo

$$\mathbf{SimplGpd} \cong \mathbf{Gpd}(\mathbf{SSet})$$

y en particular, en el isomorfismo que existe entre la categoría de objetos simpliciales truncados a nivel n internos en grupoides y la categoría de grupoides internos en la categoría de conjuntos simpliciales truncados a nivel n , es decir,

$$\mathbf{Simpl}_n(\mathbf{Gpd}) \cong \mathbf{Gpd}(\mathbf{Simpl}_n(\mathbf{Set})).$$

Así, el hecho de que la composición de un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides es un morfismo de grupoides, nos permite identificar un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides \mathcal{H} , como el anterior, con un grupoide interno en la categoría de n -hipergrupoides, con objeto de objetos el n -hipergrupoide \mathbf{O} constante O (ver 1.4.4 (2)), con objeto de flechas el n -hipergrupoide con n -truncación

$$\mathbf{H} = H_n \begin{array}{c} \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} H_{n-1} \cdots H_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} H_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} H_0$$

y con operador corchete dado, como antes, por los operadores corchete de cada uno de los n -hipergrupoides $\mathcal{H}(x, y)$, $x, y \in O$. ■

Hagamos constar ahora que, tomando $n = 1$, la categoría **G1H** de grupoides enriquecidos en la categoría de 1-hipergrupoides es isomorfa a la categoría de 2-grupoides ó grupoides enriquecidos en grupoides, vía el isomorfismo entre las categorías de 1-hipergrupoides y grupoides.

El siguiente resultado técnico lo usaremos más adelante

Lema 2.4.2. *Sea $\mathcal{H} \in \mathbf{GnH}$ un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides con conjunto de objetos O y sea $f : O' \rightarrow O$ una aplicación. Entonces existe un grupoide enriquecido en n -hipergrupoides \mathcal{H}' con conjunto de objetos O' y un funtor enriquecido $\mathbf{f} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ que en objetos es f .*

Demostración: El grupoide \mathcal{H}' enriquecido en n -hipergrupoides tiene a O' como conjunto de objetos y, para cada par de elementos $x, y \in O'$,

$$\mathcal{H}'(x, y) := \mathcal{H}(f(x), f(y)),$$

la composición en \mathcal{H}' es inducida por la composición de \mathcal{H} , esto es, dados $x, y, z \in O'$ el morfismo composición en \mathcal{H}' está definido por

$$\mathcal{H}'(x, y) \times \mathcal{H}'(y, z) = \mathcal{H}(f(x), f(y)) \times \mathcal{H}(f(y), f(z)) \longrightarrow \mathcal{H}(f(x), f(z)) = \mathcal{H}'(x, z).$$

Es inmediato deducir que esta composición es un morfismo de n -hipergrupoides de manera que \mathcal{H}' es un grupoide enriquecido en grupoides. Además la aplicación $f : O' \rightarrow O$ y la identidad determinan un funtor enriquecido $\mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$. ■

2.4.2 Las categorías \mathbf{Gd}_n

Definimos la categoría \mathbf{Gd}_n como la subcategoría plena de la categoría \mathbf{Gd} ($i_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$) con objetos los grupoides simpliciales que tienen complejo de Moore trivial en dimensiones $m \geq n$. A los elementos de \mathbf{Gd}_n los llamaremos *grupoides simpliciales n -dimensionales* (o simplemente *n -grupoides simpliciales*).

Notemos que al ser el complejo de Moore de cada $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$ trivial en dimensiones $m \geq n$, sus grupos de homotopía también serán triviales en dimensiones $m \geq n$. La igualdad

$$\pi_{m+1}(\mathbf{B}(\mathcal{G})) \cong \pi_m(\mathcal{G}),$$

nos muestra que el espacio clasificador $\mathbf{B}(\mathcal{G})$ tiene entonces grupos de homotopía triviales en dimensiones $m > n$ y por tanto, $\mathbf{B}(\mathcal{G})$ es un n -tipo. En este sentido diremos que los elementos de \mathbf{Gd}_n son n -tipos. Probaremos posteriormente (ver Proposición 2.5.3) que todo n -tipo es homotópicamente equivalente al espacio clasificador de un grupoide simplicial n -dimensional.

Como corolario inmediato del Lema 1.1.4, del Corolario 2.2.5 y de la Proposición 2.2.3 tenemos:

Corolario 2.4.3. *Un grupoide simplicial \mathcal{G} es un objeto de \mathbf{Gd}_n si y solamente si los funtores canónicos $K_m^i : \mathcal{G}_m \rightarrow \Lambda_m^i(\mathcal{G})$ son isomorfismos para todo $m \geq n$ y $0 \leq i \leq m$.*

Demostración: Sea $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$, recordemos que el grupoide $\mathcal{N}_m(\mathcal{G})$ en el complejo de Moore de \mathcal{G} es el núcleo del funtor $K_m^m : \mathcal{G}_m \rightarrow \Lambda_m^m(\mathcal{G})$. Así, si $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$,

$\mathcal{N}_m(\mathcal{G})$ es el grupoide trivial para $m \geq n$. Ahora bien, por el Corolario 2.2.5, se tiene que el núcleo de K_m^i es también trivial para cada $0 \leq i \leq m - 1$. Además, la Proposición 2.2.3 nos asegura que los funtores K_m^i son sobreyectivos, y por otro lado, son la identidad sobre objetos, así por el Lema 1.1.4 estos funtores K_m^i serán isomorfismos. El recíproco es inmediato. ■

Como dijimos al principio de la sección 2.4.1, el funtor nervio (1.25) nos permite ver la categoría **Hyper_n** como una subcategoría plena de la categoría **SSet** de conjuntos simpliciales. Además, la Proposición 1.4.5 nos caracteriza que conjuntos simpliciales son el nervio de un n -hipergrupoide. Estos hechos junto con el Corolario 2.4.3 nos muestran:

Proposición 2.4.4. *El funtor $\text{Ner} : \mathbf{Hyper}_n \rightarrow \mathbf{SSet}$ induce un isomorfismo de categorías*

$$\text{Ner} : \mathbf{GnH} \xrightarrow{\cong} \mathbf{Gd}_{n+1} .$$

Observación 2.4.5. *Nos tomaremos a partir de ahora la libertad de identificar los siguientes conceptos equivalentes, utilizando en cada momento la definición más apropiada:*

1. *Un grupoide simplicial $(n + 1)$ -dimensional, esto es, un grupoide simplicial \mathcal{H} con complejo de Moore trivial en dimensiones $\geq n + 1$ o equivalentemente un grupoide simplicial tal que los funtores canónicos $K_m^i : \mathcal{H}_m \rightarrow \Lambda_m^i(\mathcal{H})$ son isomorfismos, para todo $m \geq n + 1$ y $0 \leq i \leq m$.*
2. *Un grupoide enriquecido en la categoría de n -hipergrupoides.*
3. *Un n -hipergrupoide interno en la categoría de grupoides tal que sus funtores cara, degeneración y corchete son la identidad en objetos.*
4. *Un grupoide interno en la categoría de n -hipergrupoides con n -hipergrupoide de objetos constante.*

Como consecuencia de lo anterior, teniendo en cuenta que el nervio de cualquier $(n - 1)$ -hipergrupoide es un Cosk^n , ver definición en la página 48, tenemos:

Corolario 2.4.6. *Si $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$ entonces $\mathcal{G} \cong \text{Cosk}^n(\mathcal{G})$.*

Una consecuencia, que posteriormente usaremos, del Corolario 2.4.3 viene dada en el siguiente:

Lema 2.4.7. *El funtor $\text{Ner} : \mathbf{Gd}_n \rightarrow \mathbf{SSet}$ factoriza por la categoría **Hyper_n** de n -hipergrupoides*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gd}_n & \xrightarrow{\text{Ner}} & \mathbf{SSet} \\ & \searrow & \nearrow \text{Ner} \\ & \mathbf{Hyper}_n & \end{array}$$

Demostración: Dado $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$ veamos cómo $\text{Ner}(\mathcal{G})$ es el nervio de un n -hipergrupoide. Ésto, usando la caracterización dada por la Proposición 1.4.5, es equivalente a probar que las proyecciones canónicas

$$K_m^i : \text{Ner}_m(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda_m^i(\text{Ner}(\mathcal{G})), \quad 0 \leq i \leq m,$$

son isomorfismos para todo $m \geq n + 1$. O lo que también es equivalente, que cada elemento $\xi = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \text{Ner}_m(\mathcal{G})$, $m \geq n + 1$ está totalmente determinado por cualesquiera m de sus $m + 1$ caras. Ahora bien:

1. Si conocemos todas las caras de ξ excepto la última, como

$$d_0(\xi) = (f_2, \dots, f_m),$$

conocemos todas las componentes de ξ excepto $f_1 \in \text{arr}(\mathcal{G}_{m-1})$. Pero, como

$$d_1(\xi) = (f_2 d_0 f_1, f_3, \dots, f_m)$$

y conocemos f_2 también conocemos $d_0(f_1)$ y para $2 \leq i \leq m - 1$ a partir de $d_i(\xi)$ conoceremos $d_{i-1}f_1$, por tanto, a partir de todas las caras de ξ menos la última podemos construir la sucesión (f_2, \dots, f_m) y el elemento

$$(d_0 f_1, d_1 f_1, \dots, d_{m-2} f_1, -) \in \Lambda_{m-1}^{m-1}(\mathcal{G})$$

que por ser \mathcal{G} un elemento de \mathbf{Gd}_n determina unívocamente a f_1 (ya que el Corolario 2.4.3 nos asegura que el morfismo canónico $K_{m-1}^{m-1} : \mathcal{G}_{m-1} \rightarrow \Lambda_{m-1}^{m-1}(\mathcal{G})$ es un isomorfismo). Tenemos así que todas las caras de ξ salvo la última determinan unívocamente a ξ

2. Si suponemos ahora que conocemos todas las caras de ξ excepto la cara i con $1 \leq i \leq m - 1$, a partir de la cara $d_0(\xi)$ conocemos de nuevo todas las componentes de ξ excepto f_1 . Ahora bien, de nuevo, a partir de las demás caras d_j con $1 \leq j \leq m$ y $j \neq i$ conocemos todas las caras $d_{j-1}f_1$ (excepto la $(i - 1)$) y por tanto, tenemos un elemento

$$(d_0 f_1, \dots, d_{i-2} f_1, -, d_i f_1, \dots, d_{m-1} f_1) \in \Lambda_{m-1}^{i-1}(\mathcal{G})$$

que, de nuevo por el Corolario 2.4.3, nos determina unívocamente a f_1 y así a ξ .

3. Por último, si conocemos todas las caras de ξ excepto $d_0(\xi)$, la cara

$$d_1(\xi) = (f_2 d_0 f_1, f_3, \dots, f_{n+1}),$$

nos permite conocer todas las componentes de ξ excepto la dos primeras, aunque conociendo la componente f_1 a partir de $d_1(\xi)$ también tendríamos determinada la componente f_2 . Ahora bien, las caras $d_i(\xi)$ con $2 \leq i \leq m$ determinan las caras $d_{i-1}f_1$ y por tanto, un elemento $(-, d_1 f_1, \dots, d_{m-1} f_1) \in \Lambda_{m-1}^0(\mathcal{G})$ que de nuevo determina unívocamente la componente f_1 de ξ .



En dimensiones bajas es fácil identificar estas subcategorías \mathbf{Gd}_n con categorías conocidas.

- Así \mathbf{Gd}_0 puede ser identificada con la categoría **Set** de conjuntos, pues en un grupoide simplicial 0-dimensional, su grupoide de 0-símplices tiene que ser discreto, su grupoide de 1-símplices tiene que coincidir con las caras abiertas en dimensión 1 que a su vez coinciden con el grupoide de 0-símplices y ha de ser un Cosk^0 . De esta forma la inclusión $i_0 : \mathbf{Gd}_0 \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ puede ser identificada con el funtor $\mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ que asocia a cada conjunto O el grupoide simplicial $i_0(O)$, con O como conjunto de objetos y con conjunto simplicial de flechas $\mathbf{O} = K(O, 0)$, el constante determinado por O , es decir, $i_0(O)$ es el grupoide simplicial constante \mathcal{O} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} \\
 & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}
 \end{array}$$

- Por otra parte, en un grupoide simplicial 1-dimensional de nuevo el grupoide de 1-símplices ha de coincidir con las caras abiertas en dimensión 1 que a su vez coinciden con el grupoide de 0-símplices y además ha de ser un Cosk^1 . Por tanto un grupoide 1-dimensional está totalmente determinado por su grupoide de 0-símplices. De esta forma podemos identificar la categoría de grupoides simpliciales 1-dimensionales \mathbf{Gd}_1 con la categoría **Gpd** de grupoides y la inclusión $i_1 : \mathbf{Gd}_1 \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ con el funtor diagonal $\mathbf{Gpd} \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ que asocia a un grupoide $\mathcal{G} : A \rightrightarrows O$ el grupoide simplicial con los mismos objetos que \mathcal{G} y cuyo conjunto simplicial de flechas es el constante A , esto es, $i_1(\mathcal{G})$ es el grupoide simplicial constante \mathcal{G} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G} & \cdots & \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \cdots & A & \xlongequal{\quad} & A & \cdots & A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\
 & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \cdots & O & \xlongequal{\quad} & O & \xlongequal{\quad} & O
 \end{array}$$

Veamos un ejemplo de grupoide simplicial n -dimensional análogo a los n -hipergrupoides $K(\Pi, n)$ asociados a un grupo abeliano Π .

Ejemplo 2.4.8. Sea \mathcal{G} un grupoide y $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un \mathcal{G} -módulo, la categoría $\mathcal{G} \int \Pi$ está dotada de una proyección escindida canónica

$$\tilde{\Pi}_1 : \mathcal{G} \int \Pi \xleftarrow{\text{pr}} \mathcal{G},$$

que es la identidad en objetos. La estructura de \mathcal{G} -módulo de Π convierte a este funtor en un objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} . Podemos por tanto construir un n -hipergrupoide interno en \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} , cuya truncación es

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} \int \Pi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}} \\ \xleftarrow{\text{pr}} \end{array} & \mathcal{G} & \text{---} \cdots \text{---} & \mathcal{G} & \text{---} & \mathcal{G} \\ \text{pr} \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{G} & \text{---} & \mathcal{G} & \text{---} \cdots \text{---} & \mathcal{G} & \text{---} & \mathcal{G} \end{array}$$

y cuya operación corchete

$$[\] : \mathcal{G} \int \Pi^{n+1} \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi,$$

(nótese que hemos identificado el grupoide de $(n+1)$ -caras abiertas en dimensión $n+1$ con $\mathcal{G} \int \Pi^{n+1}$), es la identidad en objetos y en flechas está dada por

$$[(f, (x_0, x_1, \dots, x_n))] = (f, [x_0, x_1, \dots, x_n]) = (f, \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} x_i),$$

(ver ejemplo 1.4.4 (3)). Obsérvese que todos los elementos x_i están en el mismo grupo $\Pi(s(f))$. Esta operación corchete es un funtor sobre \mathcal{G} .

Puesto que la proyección $\text{pr} : \mathcal{G} \int \Pi \rightarrow \mathcal{G}$ es la identidad en objetos, si nos quedamos con el “dominio” del n -hipergrupoide anterior obtenemos un objeto en \mathbf{GnH} que, por el isomorfismo de categorías $\text{Ner} : \mathbf{GnH} \rightarrow \mathbf{Gd}_{n+1}$ de la Proposición 2.4.4, nos determina un $(n+1)$ -grupoide simplicial que denotaremos $\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)$. Gráficamente este $(n+1)$ -grupoide simplicial es

$$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) = \text{Cosk}^{n+1} \left(\mathcal{G} \int \Pi^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}} \\ \xleftarrow{\text{pr}} \end{array} \mathcal{G} \int \Pi \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{pr}} \\ \xleftarrow{\text{pr}} \end{array} \mathcal{G} \text{---} \cdots \text{---} \mathcal{G} \text{---} \mathcal{G} \right)$$

con caras $d_i : \mathcal{G} \int \Pi^{n+1} \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi$ las proyecciones, para $0 \leq i \leq n$, y $d_{n+1} = [\]$. Las degeneraciones $s_j : \mathcal{G} \int \Pi \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi^{n+1}$ están dadas, para cada $f : x \rightarrow y$ flecha de \mathcal{G} y $a \in \Pi(y)$, por la expresión $s_j(f, a) = (f, 0, \dots, 0, a, a, 0, \dots, 0)$ con a en la posición

j y $j + 1$. Este $(n + 1)$ -grupoide simplicial viene equipado con una proyección canónica a $K(\mathcal{G}, 0)$,

$$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow K(\mathcal{G}, 0),$$

además la estructura de grupo abeliano de $\tilde{\Pi}_1 : \mathcal{G} \int \Pi \rightarrow \mathcal{G}$ se traslada a este morfismo, de forma que $\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow K(\mathcal{G}, 0)$ es un objeto grupo abeliano en la coma categoría $\mathbf{Gd}_{n+1}/\mathcal{G}$, donde hemos identificado \mathcal{G} con $K(\mathcal{G}, 0)$.

Tenemos además

Proposición 2.4.9. Para cualquier grupoide \mathcal{G} , cualquier \mathcal{G} -módulo Π y cualquier $n > 1$ se tiene un isomorfismo natural

$$\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \cong L_{\mathcal{G}}(\Pi, n + 1).$$

Además este isomorfismo es compatible con la fibración $\ell : L_{\mathcal{G}}(\Pi, n + 1) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ y la proyección $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ por lo que realmente éste determina un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) & \xrightarrow{\cong} & L_{\mathcal{G}}(\Pi, n + 1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Ner}(\mathcal{G}) & \end{array}$$

en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$.

Demostración: Comencemos describiendo los m -símplices de $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$.

Teniendo en cuenta la definición de los m -símplices de Ner dada en la Sección 2.3, se tiene:

- $\text{Ner}_m(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) = \text{Ner}_m(\mathcal{G})$ para todo $m < n$,
- un n -símplice en $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ es una sucesión

$$(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{f_n} x_n)$$

en \mathcal{G} , es decir, de nuevo $\text{Ner}_n(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) = \text{Ner}_n(\mathcal{G})$,

- un $(n + 1)$ -símplice en $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$, teniendo en cuenta que

$$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)_n = \mathcal{G} \int \Pi,$$

es una sucesión

$$(x_0 \xrightarrow{(f_1, a)} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \xrightarrow{f_{n+1}} x_{n+1})$$

donde f_i son flechas de \mathcal{G} y $x_0 \xrightarrow{(f_1, a)} x_1$ es una flecha en $\mathcal{G} \int \Pi$. De hecho, podemos identificar

$$\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))_{n+1} \equiv \coprod_{\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})} \Pi(x_1),$$

- un $(n+2)$ -símplice en $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$, teniendo en cuenta que

$$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)_{n+1} = \mathcal{G} \int \Pi^{n+1},$$

es una sucesión

$$(x_0 \xrightarrow{(f_1, \alpha)} x_1 \xrightarrow{(f_2, a)} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} x_{n+2})$$

donde f_i son flechas en \mathcal{G} , además $x_0 \xrightarrow{(f_1, \alpha)} x_1$ es una flecha de $\mathcal{G} \int \Pi^{n+1}$ y $x_1 \xrightarrow{(f_2, a)} x_2$ una flecha en $\mathcal{G} \int \Pi$. De hecho, podemos identificar un elemento en $\text{Ner}_{n+2}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ con una terna (ξ, α, a) con:

-) $\xi = (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n+2}} x_{n+2}) \in \text{Ner}_{n+2}(\mathcal{G})$,
-) $\alpha = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \Pi(x_1)^{n+1}$ y
-) $a \in \Pi(x_2)$.

- Finalmente, un m -símplice en $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ con $m > n+2$, teniendo en cuenta que $\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)$ tiene núcleos simpliciales en dimensiones mayores a $n+1$, es una sucesión

$$(x_0 \xrightarrow{\zeta_1} x_1 \xrightarrow{\zeta_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{m-1} \xrightarrow{\zeta_m} x_m)$$

con

$$\zeta_i \in \begin{cases} \text{arr}(\Delta_{m-i}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))) & \text{si } 1 \leq i \leq m-n-2, \\ \text{arr}(\mathcal{G} \int \Pi^{m+1}) & \text{si } i = m-n-1, \\ \text{arr}(\mathcal{G} \int \Pi) & \text{si } i = m-n, \text{ y} \\ \text{arr}(\mathcal{G}) & \text{si } m-n+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Respecto a los operadores cara y degeneración de la n -truncación del conjunto simplicial $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$, es obvio que coinciden con los del $\text{Ner}(\mathcal{G})$. Además para cada $(\xi, a) \in \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ con $\xi = (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n+1}} x_{n+1}) \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$ y $a \in \Pi(x_1)$, los operadores cara

$$d_i : \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}_n(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$$

vienen dados por

$$d_0(\xi, a) \equiv d_0((f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) = (f_2, \dots, f_{n+1}) = d_0(\xi),$$

$$\begin{aligned} d_i(\xi, a) &\equiv d_i((f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) \\ &= (d_{i-1}(f_1, a), \dots, d_1 f_{i-1}, f_{i+1} d_0 f_i, f_{i+2}, \dots, f_{n+1}) \\ &= (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1} f_i, f_{i+2}, \dots, f_{n+1}) = d_i(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1}(\xi, a) &\equiv d_{n+1}((f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) = (d_n(f_1, a), \dots, d_2 f_{n-1}, d_1 f_n) \\ &= (f_1, \dots, f_{n-1}, f_n) = d_{n+1}(\xi), \end{aligned}$$

y las degeneraciones

$$s_j : \text{Ner}_n(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)),$$

para cada $\xi = (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} x_n) \in \text{Ner}_n(\mathcal{G})$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} s_j(\xi) &= (s_{j-1} f_1, \dots, s_0 f_j, Id_{x_j}, f_{j+1}, \dots, f_n) = ((f_1, 0), f_2, \dots, f_j, Id_{x_j}, f_{j+1}, \dots, f_n) \\ &\equiv (s_j(\xi), 0). \end{aligned}$$

De forma análoga, dado $(\xi, \alpha, a) \in \text{Ner}_{n+2}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ con $\xi = (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n+2}} x_{n+2}) \in \text{Ner}_{n+2}(\mathcal{G})$, $\alpha = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \Pi(x_1)^{n+1}$ y $a \in \Pi(x_2)$ los operadores cara

$$d_i : \text{Ner}_{n+2}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)),$$

vienen dados por

$$d_0(\xi, \alpha, a) \equiv d_0((f_1, \alpha), (f_2, a), f_3, \dots, f_{n+2}) = ((f_2, a), f_3, \dots, f_{n+2}) \equiv (d_0(\xi), a),$$

$$\begin{aligned} d_1(\xi, \alpha, a) &\equiv d_1((f_1, \alpha), (f_2, a), f_3, \dots, f_{n+2}) = ((f_2, a)d_0(f_1, \alpha), f_3, \dots, f_{n+2}) \\ &= ((f_2, a)(f_1, a_1), f_3, \dots, f_{n+1}) = ((f_2 f_1, a +^{f_2} a_1), f_3, \dots, f_{n+2}) \\ &\equiv (d_1(\xi), a +^{f_2} a_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i(\xi, \alpha, a) &\equiv d_i((f_1, \alpha), (f_2, a), f_3, \dots, f_{n+2}) = (d_{i-1}(f_1, \alpha), d_{i-2}(f_2, a), \dots, d_1 f_{i-1}, \\ &f_{i+1} d_0 f_i, f_{i+2}, \dots, f_{n+2}) = ((f_1, a_i), f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1} f_i, f_{i+2}, \dots, f_{n+1}) \\ &\equiv (d_i(\xi), a_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n+2}(\xi, \alpha, a) &\equiv d_{n+2}((f_1, \alpha), (f_2, a), f_3, \dots, f_{n+2}) = (d_{n+1}(f_1, \alpha), d_n(f_2, a), \dots, \\ &d_1 f_{n+1}) = ((f_1, \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i-1} a_i), f_2, \dots, f_{n+1}) \\ &\equiv (d_{n+2}(\xi), \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i-1} a_i), \end{aligned}$$

y las degeneraciones

$$s_j : \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}_{n+2}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)),$$

para cada $\xi = (x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n+1}} x_{n+1}) \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$ y $a \in \Pi(x_0)$, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} s_0(\xi, a) &\equiv s_0((f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) = (Id_{s(f_1, a)}, (f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) \\ &= ((Id_{x_0}, 0, \dots, 0), (f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) \equiv (s_0(\xi), (0, \dots, 0), a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1(\xi, a) &\equiv s_1((f_1, a), f_2, \dots, f_{n+1}) = (s_0(f_1, a), Id_{t(f_1, a)}, f_2, \dots, f_{n+1}) \\ &= ((f_1, a, a, 0, \dots, 0), (Id_{x_1}, 0), f_2, \dots, f_{n+1}) \equiv (s_1(\xi), (a, a, 0, \dots, 0), 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j(\xi, a) &\equiv (s_{j-1}(f_1, a), s_{j-2} f_2, \dots, s_0 f_j, Id_{x_j}, f_{j+1}, \dots, f_{n+1}) \\ &= ((f_1, 0, \dots, 0, a, a, 0, \dots, 0), (f_2, 0), f_3, \dots, f_j, Id_{x_j}, f_{j+1}, \dots, f_{n+1}) \\ &\equiv (s_j(\xi), (0, \dots, 0, a, a, 0, \dots, 0), 0). \end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)$ es el nervio de un $(n+1)$ -hipergrupoide

(ver Sección 1.5.2) con $(n+1)$ -truncación dada por

$$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)_m = \begin{cases} \text{Ner}_m(\mathcal{G}) & \text{si } m \leq n, \\ \prod_{\xi \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})} \Pi(d_1 \dots d_{n+1} \xi) & \text{si } m = n+1. \end{cases}$$

y cuyo operador corchete viene dado por:

$$[(\xi_0, a_0), (\xi_1, a_1), \dots, (\xi_{n+1}, a_{n+1})] = \left(d_{n+2}(\xi), (-1)^{n+1} f_1^{-1} a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i+1} a_i \right)$$

con $\xi \in \text{Ner}_{n+2}(\mathcal{G})$ tal que $d_i \xi = \xi_i$ con $0 \leq i \leq n+1$.

Así, para dar el morfismo

$$\mathbf{g} : \text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \cong L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)$$

(que a posteriori será el isomorfismo buscado) será suficiente con dar un morfismo simplicial truncado en dimensión $n+1$

$$\text{tr}_{n+1}(\mathbf{g}) : \text{tr}_{n+1}(\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))) \rightarrow \text{tr}_{n+1}(L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1))$$

satisfaciendo la condición de cociclo. Definimos este morfismo mediante

$$g_m = Id_{\text{Ner}_m(\mathcal{G})} \text{ para } m \leq n, \text{ y}$$

$$g_{n+1}(\xi, a) = (\xi, f_1^{-1} a) \text{ para cada par } (\xi, a) \in \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \text{ con}$$

$$\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \xrightarrow{f_{n+1}} x_{n+1} \in \text{Ner}_{n+1}(\mathcal{G})$$

$$\text{y } a \in \Pi(x_1).$$

Nótese que todas las componentes de este morfismo truncado son isomorfismos. Además es simplicial pues hace que los siguientes diagramas sean conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} & \\ \text{Ner}_{n+1}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ner}_n(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \\ g_{n+1} \downarrow & & \parallel \\ L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)_{n+1} & \xrightarrow{\quad} & L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)_n. \end{array}$$

En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} d_i g_{n+1}(\xi, a) &= d_i(\xi, f_1^{-1} a) = d_i \xi = g_n(d_i \xi) = g_n d_i(\xi, a), \\ g_{n+1} s_j(\xi) &= g_{n+1}(s_j \xi, 0) = (s_j \xi, 0) = s_j(\xi) = s_j g_n(\xi). \end{aligned}$$

Además, esta aplicación simplicial truncada satisface la “condición de cociclo” (1.38), pues dado $\gamma = (\xi, \alpha, a) \in \text{Ner}_{n+2}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} q(g_{n+1} d_i(\gamma)) &= (f_2 f_1)^{-1} a + f_1^{-1} a_1 - f_1^{-1} a_2 + \dots + (-1)^n (f_1^{-1} a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i-1} a_i \right) = f_1^{-1} f_2^{-1} a \\ &= f_1^{-1} q(d_0 \xi, f_2^{-1} a) = f_1^{-1} q(g_{n+1}(d_0 \xi, a)) \\ &= f_1^{-1} q(g_{n+1} d_0(\gamma)). \end{aligned}$$

Por tanto, la Proposición 1.5.3 nos asegura que la truncación $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{g})$ extiende a una única aplicación simplicial $\mathbf{g} : \text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)$.

Para demostrar que esta aplicación simplicial \mathbf{g} es un isomorfismo basta con ver que todas sus componentes son biyecciones. Ya hemos notado que todas las componentes de la truncación $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{g})$ son isomorfismos.

Por otra parte, como $\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)$ es un $(n+1)$ -grupoide simplicial, su nervio $\text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n))$ es el nervio de un $(n+1)$ -hipergrupoide (ver Lema 2.4.7), al igual que ocurre con $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1)$, por tanto un morfismo \mathbf{g} entre ellos es un isomorfismo si y solamente si su $(n+1)$ -truncación $\text{tr}_{n+1}(\mathbf{g})$ es un isomorfismo. Hecho que ya hemos probado.

De la definición de \mathbf{g} se deduce inmediatamente su compatibilidad con las proyecciones al $\text{Ner}(\mathcal{G})$ y así que \mathbf{g} es realmente un isomorfismo en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$. ■

Como consecuencia inmediata del Lema 2.4.2 obtenemos

Lema 2.4.10. *Sea \mathcal{G} un n -grupoide simplicial con conjunto de objetos O y sea $f : O' \rightarrow O$ una aplicación cualquiera. Entonces existe un n -grupoide simplicial \mathcal{G}' con conjunto de objetos O' y un morfismo de grupoides simpliciales $\mathbf{f} : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ que en objetos es f .*

Demostración: Por el isomorfismo de categorías de la Proposición 2.4.4, el n -grupoide simplicial \mathcal{G} con conjunto de objetos O puede ser visto como un grupoide enriquecido en $(n-1)$ -hipergrupoides con conjunto de objetos O , $\mathcal{G} = \text{Ner}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H} \in \mathbf{G}(n-1)\mathbf{H}$. El Lema 2.4.2 nos asegura que en estas condiciones existe un grupoide enriquecido en $(n-1)$ -hipergrupoides \mathcal{H}' con conjunto de objetos O' y un morfismo de grupoides enriquecidos $\mathbf{f} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ que en objetos actúa como f . Bastará con tomar $\mathcal{G}' = \text{Ner}(\mathcal{H}')$. ■

A continuación haremos un traspaso de los resultados probados por Conduché en [25], sobre los grupos simpliciales con complejo de Moore trivial a partir de

cierta dimensión, a grupoides simpliciales. Sacando además algunas consecuencias extra.

Teorema 2.4.11 (Conduché [25] Teorema 1.5). *Sea \mathcal{G}_n un grupoide simplicial truncado en dimensión n . Entonces existe un grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}_n$, tal que $\text{tr}_n(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_n$ si y sólo si, el grupoide \mathcal{G}_n satisface la siguiente condición:*

(CC) *Para cualesquiera subconjuntos no vacíos I, J de $[n] = \{0, \dots, n\}$ tales que $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J = [n]$ los subgrupoides $\bigcap_{j \in J} \ker(d_j)$ y $\bigcap_{i \in I} \ker(d_i)$ conmutan, es decir,*

$$\left[\bigcap_{j \in J} \ker(d_j), \bigcap_{i \in I} \ker(d_i) \right] = \mathcal{O},$$

donde \mathcal{O} es el grupoide discreto sobre el conjunto O , de objetos de cada grupoide \mathcal{G}_n .

Además, el grupoide simplicial así obtenido es único salvo isomorfismo.

Este Teorema 2.4.11 es básicamente equivalente a la siguiente:

Proposición 2.4.12. *En un grupoide simplicial truncado en dimensión n , \mathcal{G}_n , existe a lo sumo una estructura de n -hipergrupoide (interno en \mathbf{Gpd}) cuya operación corchete es la identidad en objetos y en flechas está dada inductivamente por las fórmulas en (2.4). Además una operación corchete definida por la fórmula anterior determina una estructura de n -hipergrupoide en \mathcal{G}_n si y sólo si, se da la condición (CC).*

Demostración: Para demostrar la primera parte, supongamos que en \mathcal{G}_n existe una estructura de n -hipergrupoide, esto es, que existe una operación corchete

$$[-] : \Lambda_n^n(\mathcal{G}_n) \rightarrow \mathcal{G}_n$$

que es funtorial, la identidad en objetos y satisface las condiciones de n -hipergrupoide en 1.4.3. Veamos como esta operación corchete está dada en flechas por la formula (2.4), es decir, veamos como para cada $(n+1)$ -upla (f_0, \dots, f_n) de flechas en \mathcal{G}_n , tales que $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ con $0 \leq i < j \leq n$, se tiene:

$$[f_0, f_1, \dots, f_n] = f_n [f_0, \dots, f_{n-1}]^{-1} [s_{n-1}d_n(f_0), \dots, s_{n-1}d_n(f_{n-1})]. \quad (2.9)$$

Para ello en primer lugar vamos a deducir, de la funtorialidad de $[-]$, que para cada n -upla (f_0, \dots, f_{n-1}) en \mathcal{G}_n , tales que $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ con $0 \leq i < j \leq n-1$ se tiene:

$$[f_0, \dots, f_{n-1}, [f_0, \dots, f_{n-1}]] = [s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-1})].$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
[f_0, \dots, f_{n-1}, [f_0, \dots, f_{n-1}]] &= [f_0, \dots, f_{n-1}, f_{n-1}[f_0, \dots, f_{n-2}]^{-1} \\
&\quad [s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-2})]] = [s_{n-2}d_0(f_{n-1}) s_{n-2}d_{n-2}(f_0)^{-1} f_0, \dots, \\
&\quad s_{n-2}d_{n-2}(f_{n-1}) s_{n-2}d_{n-2}(f_{n-2})^{-1} f_{n-2}, f_{n-1}[f_0, \dots, f_{n-2}]^{-1}[f_0, \dots, f_{n-2}], \\
&\quad f_{n-1}[f_0, \dots, f_{n-2}]^{-1}[s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-2})]] \\
&= [s_{n-2}d_0(f_{n-1}), \dots, s_{n-2}d_{n-2}(f_{n-1}), f_{n-1}, f_{n-1}] \\
&\quad [s_{n-2}d_{n-2}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-2}(f_{n-2}), [f_0, \dots, f_{n-2}], [f_0, \dots, f_{n-2}]]^{-1} \\
&\quad [f_0, \dots, f_{n-2}, [f_0, \dots, f_{n-2}], [s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-2})]] \\
&= s_{n-1}d_n(f_{n-1}) [s_{n-2}d_0([f_0, \dots, f_{n-2}]), \dots, s_{n-2}d_{n-2}([f_0, \dots, f_{n-2}]), \\
&\quad [f_0, \dots, f_{n-2}], [f_0, \dots, f_{n-2}]]^{-1} [f_0, \dots, f_{n-2}, [f_0, \dots, f_{n-2}], \\
&\quad [s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-2})]] = s_{n-1}d_n(f_{n-1}) \\
&\quad s_{n-1}d_n([f_0, \dots, f_{n-2}])^{-1}[s_{n-2}d_n(f_0), \dots, s_{n-2}d_n(f_{n-2})] \\
&= s_{n-1}d_n(f_{n-1}) [s_{n-1}d_n(f_0), \dots, s_{n-1}d_n(f_{n-2})]^{-1} \\
&\quad [s_{n-2}d_n(f_0), \dots, s_{n-2}d_n(f_{n-2})] = [s_{n-1}d_n(f_0), \dots, s_{n-1}d_n(f_{n-1})].
\end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades de la operación corchete, el Lema 2.2.2 y la identidad:

$$\begin{aligned}
&[f_0, \dots, f_{n-2}, [f_0, \dots, f_{n-2}], [s_{n-2}d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2}d_{n-1}(f_{n-2})]] \\
&= [s_{n-2}d_n(f_0), \dots, s_{n-2}d_n(f_{n-2})].
\end{aligned}$$

De hecho, esta identidad es un caso particular de una propiedad más fuerte que satisface el operador corchete de la estructura de n -hipergrupoide que tenemos en \mathcal{G}_n , dicha propiedad nos asegura que para cada $(k+1)$ -upla (f_0, \dots, f_k) en \mathcal{G}_n tal que $d_i(f_j) = d_{j-1}(f_i)$ con $0 \leq i < j \leq k$ y $k < n$, se tiene:

$$[f_0, \dots, f_k, [f_0, \dots, f_k], \dots, [s_k d_{n-1}(f_0), \dots, s_k d_{n-1}(f_k)]] = [s_k d_n(f_0), \dots, s_k d_n(f_k)].$$

En efecto, para $k = 1$ la identidad anterior es cierta ya que:

$$\begin{aligned}
&[f_0, f_1, [f_0, f_1], [s_1 d_2(f_0), s_1 d_2(f_1)], \dots, [s_1 d_{n-1}(f_0), s_1 d_{n-1}(f_1)]] \\
&= [s_0 d_0(f_1) s_0 d_0(f_0)^{-1} f_0, f_1 f_0^{-1} f_0, f_1 f_0^{-1} s_0 d_1(f_0), \\
&\quad s_1 d_2(f_1) s_1 d_2(f_0)^{-1} s_0 d_2(f_0), \dots, s_1 d_{n-1}(f_1) s_1 d_{n-1}(f_0)^{-1} s_0 d_{n-1}(f_0)] \\
&= [s_0 d_0(f_1), f_1, f_1, s_1 d_2(f_1), \dots, s_1 d_{n-1}(f_1)][s_0 d_0(f_0), f_0, f_0, s_1 d_2(f_0), \dots, \\
&\quad s_1 d_{n-1}(f_0)]^{-1} [f_0, f_0, s_0 d_1(f_0), \dots, s_0 d_{n-1}(f_0)] \\
&= s_1 d_n(f_1) s_1 d_n(f_0)^{-1} s_0 d_n(f_0) = [s_1 d_n(f_0), s_1 d_n(f_1)].
\end{aligned}$$

Si suponemos que la propiedad es cierta para cualquier $k < i$, veamos como también es cierta para $k = i$:

$$\begin{aligned}
& [f_0, \dots, f_i, [f_0, \dots, f_i], \dots, [s_i d_{n-1}(f_0), \dots, s_i d_{n-1}(f_i)]] = [s_{i-1} d_0(f_i) s_{i-1} d_{i-1}(f_0)^{-1} f_0, \\
& \quad , \dots, s_{i-1} d_{i-1}(f_i) s_{i-1} d_{i-1}(f_{i-1})^{-1} f_{i-1}, f_i [f_0, \dots, f_{i-1}]^{-1} [f_0, \dots, f_{i-1}], \\
& \quad f_i [f_0, \dots, f_{i-1}]^{-1} [s_{i-2} d_{i-1}(f_0), \dots, s_{i-2} d_{i-1}(f_{i-1})], \dots, \\
& \quad s_i d_{n-1}(f_i) [s_i d_{n-1}(f_0), \dots, s_i d_{n-1}(f_{i-1})] [s_{i-1} d_{n-1}(f_0), \dots, s_{i-1} d_{n-1}(f_{i-1})]] \\
& = [s_{i-1} d_0(f_i), \dots, s_{i-1} d_{i-1}(f_i), f_i, f_i, s_i d_{i+1}(f_i), \dots, s_i d_{n-1}(f_i)] \\
& \quad [s_{i-1} d_0([f_0, \dots, f_{i-1}]), \dots, s_{i-1} d_{i-1}([f_0, \dots, f_{i-1}]), [f_0, \dots, f_{i-1}], \\
& \quad [f_0, \dots, f_{i-1}], s_i d_{i+1}([f_0, \dots, f_{i-1}]), \dots, s_i d_{n-1}([f_0, \dots, f_{i-1})]]^{-1} \\
& \quad [f_0, \dots, f_{i-1}, [f_0, \dots, f_{i-1}], \dots, [s_{i-1} d_{n-1}(f_0), \dots, s_{i-1} d_{n-1}(f_{i-1})]] \\
& = s_i d_n(f_i) s_i d_n([f_0, \dots, f_{i-1}])^{-1} [s_{i-1} d_n(f_0), \dots, s_{i-1} d_n(f_{i-1})] \\
& = s_i d_n(f_i) [s_i d_n(f_0), \dots, s_i d_n(f_{i-1})]^{-1} [s_{i-1} d_n(f_0), \dots, s_{i-1} d_n(f_{i-1})] \\
& = [s_i d_n(f_0), \dots, s_i d_n(f_i)].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$[f_0, \dots, f_{n-1}, [f_0, \dots, f_{n-1}]] = [s_{n-2} d_{n-1}(f_0), \dots, s_{n-2} d_{n-1}(f_{n-1})],$$

y utilizando este resultado podemos ya demostrar que la operación corchete viene dada por la fórmula (2.9), en efecto:

$$\begin{aligned}
& [f_0, f_1, \dots, f_n] = [s_{n-1} d_0(f_n) s_{n-1} d_0(f_n)^{-1} f_0, \dots, s_{n-1} d_{n-1}(f_n) s_{n-1} d_{n-1}(f_n)^{-1} f_{n-1}, \\
& \quad f_n [f_0, \dots, f_{n-1}]^{-1} [f_0, \dots, f_{n-1}]] \\
& = [s_{n-1} d_0(f_n) s_{n-1} d_0([f_0, \dots, f_{n-1}])^{-1} f_0, \dots, \\
& \quad s_{n-1} d_{n-1}(f_n) s_{n-1} d_{n-1}([f_0, \dots, f_{n-1}])^{-1} f_{n-1}, \\
& \quad f_n [f_0, \dots, f_{n-1}]^{-1} [f_0, \dots, f_{n-1}]] \\
& = [s_{n-1} d_0(f_n), \dots, s_{n-1} d_{n-1}(f_n), f_n] [s_{n-1} d_0([f_0, \dots, f_{n-1}]), \dots, \\
& \quad s_{n-1} d_{n-1}([f_0, \dots, f_{n-1}]), [f_0, \dots, f_{n-1}]]^{-1} [f_0, \dots, f_{n-1}, [f_0, \dots, f_{n-1}]] \\
& = f_n [f_0, \dots, f_{n-1}]^{-1} [s_{n-1} d_n(f_0), \dots, s_{n-1} d_n(f_{n-1})].
\end{aligned}$$

Así si en \mathcal{G}_n existe una estructura de n -hipergrupoide su operación corchete está totalmente determinada por la composición en \mathcal{G}_n .

La segunda parte de esta proposición, es decir, que la condición (CC) es equivalente a la existencia de una estructura de n -hipergrupoide en \mathcal{G}_n , es consecuencia inmediata del Teorema 2.4.11 y del isomorfismo en la Proposición 2.4.4. Puesto que este resultado no es relevante para el desarrollo de esta memoria dejamos su demostración al lector. ■

2.5 La construcción de la torre

La categoría \mathbf{Gd}_n de grupoides simpliciales n -dimensionales es una subcategoría plena de \mathbf{Gd} , es decir, el functor inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ es pleno. Vamos a ver que además dicho functor es reflexivo.

Para describir el adjunto por la izquierda de este functor inclusión notamos primero que para cualquier $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$, como en el diagrama (2.1), el subgrupoide de \mathcal{G}_n

$$B_n(\mathcal{G}) = d_{n+1}(\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{G}_n$$

es normal y que para cada $0 \leq i \leq n$ el subgrupoide

$$d_i^*(B_n(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{G}_{n+1},$$

imagen inversa de $B_n(\mathcal{G})$ por d_i , también es normal en \mathcal{G}_{n+1} y por tanto, también lo es el subgrupoide intersección

$$\bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{G}_{n+1}.$$

Podemos así considerar los correspondientes grupoides cocientes que denotaremos:

$$\bar{\mathcal{G}}_n = \mathcal{G}_n / B_n(\mathcal{G}) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} = \mathcal{G}_{n+1} / \bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})), \quad (2.10)$$

respectivamente. Nótese que los subgrupoides $B_n(\mathcal{G})$ y $\bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G}))$ son totalmente desconexos y por tanto, los grupoides cocientes $\bar{\mathcal{G}}_n$ y $\tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$ tienen los mismos objetos que \mathcal{G}_n y \mathcal{G}_{n+1} respectivamente y las correspondientes proyecciones son la identidad en objetos.

Observamos ahora que los funtores cara $d_i : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n-1}$, $0 \leq i \leq n$, llevan las flechas de $B_n(\mathcal{G})$ en identidades, en efecto: dada una flecha $f \in \mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$, entonces $d_i d_{n+1}(f) = d_n d_i(f) = Id_{s(f)}$. Por tanto inducen funtores desde el cociente

$$\begin{array}{ccccc} B_n(\mathcal{G}) \subset & \longrightarrow & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{pr} & \bar{\mathcal{G}}_n \\ & & \downarrow d_i & \nearrow \exists! d_i & \\ & & \mathcal{G}_{n-1} & & \end{array}$$

Por otro lado, los funtores $d_i : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \mathcal{G}_n$ llevan las flechas de $\bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G}))$ en flechas de $B_n(\mathcal{G})$. Ésto es claro para todo d_i con $0 \leq i \leq n$. Veámoslo para d_{n+1} :

Tomemos una flecha $f \in \bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G}))$, entonces $d_i(f) \in B_n(\mathcal{G})$, $0 \leq i \leq n$, y por tanto, existen flechas $f_i \in \mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$ tales que $d_i(f) = d_{n+1}(f_i)$. Consideremos la flecha $(f_0, \dots, f_n, -, f) \in \Lambda_{n+2}^{n+1}(\mathcal{G})$ y sea $f' \in \mathcal{G}_{n+2}$ una flecha tal que $K_{n+2}^{n+1}(f') = (f_0, \dots, f_n, -, f)$ (ésta existe por la Proposición 2.2.3). Entonces la flecha $f_{n+1} = d_{n+1}(f')$ es una flecha de $\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$ (para $0 \leq i \leq n$, $d_i(f_{n+1}) = d_i d_{n+1}(f') = d_n d_i(f') = d_n(f_i) = Id$) tal que

$$d_{n+1}(f_{n+1}) = d_{n+1} d_{n+1}(f') = d_{n+1} d_{n+2}(f') = d_{n+1}(f)$$

y por tanto, $d_{n+1}(f) \in B_n(\mathcal{G})$.

Como consecuencia, las composiciones $pr d_i : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_n$, $0 \leq i \leq n+1$, inducen funtores únicos $d_i : \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_n$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{pr} & \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow d_i & & \downarrow \exists! d_i \\ B_n(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{pr} & \bar{\mathcal{G}}_n. \end{array}$$

Análogamente, las degeneraciones $s_i : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$, llevan todas las flechas de $B_n(\mathcal{G})$ en flechas de $\bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G}))$, pues dada $f \in \mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})$, entonces para $0 \leq i, j \leq n$ se tiene $d_j(s_i d_{n+1}(f)) = d_j(d_{n+2} s_i(f)) = d_{n+1}(d_j s_i(f)) \in B_n(\mathcal{G})$, y por tanto, las composiciones $pr s_i : \mathcal{G}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$, $0 \leq i \leq n$, inducen funtores que también denotamos $s_i : \bar{\mathcal{G}}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$, haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B_n(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{pr} & \bar{\mathcal{G}}_n \\ \downarrow & & \downarrow s_i & & \downarrow \exists! s_i \\ \bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{pr} & \tilde{\mathcal{G}}_{n+1}. \end{array}$$

Es fácil comprobar que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright s_n \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_{n-1} \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_1 \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_0 \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} \\ \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \tilde{\mathcal{G}}_n & \xrightarrow{d_n} & \tilde{\mathcal{G}}_{n-1} \cdots & \tilde{\mathcal{G}}_2 & \xrightarrow{d_2} & \tilde{\mathcal{G}}_1 & \xrightarrow{d_1} & \tilde{\mathcal{G}}_0 \\ & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \end{array}$$

representa un grupoide simplicial truncado, donde las degeneraciones $s_i : \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_n$ están dadas por las composiciones

$$s_i : \mathcal{G}_{n-1} \xrightarrow{s_i} \mathcal{G}_n \xrightarrow{pr} \bar{\mathcal{G}}_n.$$

Tenemos entonces

Proposición 2.5.1. *Para cada $n \geq 0$, el funtor inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ es reflexivo, es decir, tiene un adjunto izquierda que denotaremos por $\tilde{P}_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}_n$.*

Demostración: Para $n = 0$, teniendo en cuenta que hemos identificado \mathbf{Gd}_0 con la categoría de conjuntos, el funtor \tilde{P}_0 será el adjunto del funtor inclusión $\mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Gd}$. Entonces, este funtor \tilde{P}_0 asocia a cada grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$ el conjunto de componentes conexas de su grupoide de componentes conexas, es decir:

$$\tilde{P}_0(\mathcal{G}) = \pi_0 \pi_0(\mathcal{G}). \quad (2.11)$$

Es fácil probar la adjunción $\tilde{P}_0 \dashv i_0$.

Por otra parte, para $n = 1$, hemos identificado \mathbf{Gd}_1 con la categoría de grupoides. Así el funtor \tilde{P}_1 será el adjunto izquierda del funtor diagonal $\mathbf{Gpd} \hookrightarrow \mathbf{Gd}$. Éste asocia a cada grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$ el grupoide de componentes conexas $\pi_0(\mathcal{G})$, esto es:

$$\tilde{P}_1(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G}). \quad (2.12)$$

Para $n \geq 1$, el funtor \tilde{P}_{n+1} asocia a cada grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$, como en el diagrama (2.1), el $(n + 1)$ -grupoide simplicial:

$$\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) = \text{cosk}^{n+1} \left(\begin{array}{ccccccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright s_n \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_{n-1} \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_1 \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} & & \begin{array}{c} \curvearrowright s_0 \\ \curvearrowleft s_0 \end{array} \\ \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} & \xrightarrow[d_0]{d_{n+1}} & \tilde{\mathcal{G}}_n & \xrightarrow[d_0]{d_n} & \tilde{\mathcal{G}}_{n-1} & \cdots & \tilde{\mathcal{G}}_2 & \xrightarrow[d_0]{d_2} & \tilde{\mathcal{G}}_1 & \xrightarrow[d_0]{d_1} & \tilde{\mathcal{G}}_0 \end{array} \right). \quad (2.13)$$

En principio, $\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ es un objeto de $\mathbf{SimplGpd}$ pero teniendo en cuenta que cosk^{n+1} en esta categoría se construye haciendo límites, y éstos se calculan punto a punto en este contexto, es decir, haciendo límites en objetos y en flechas, y como $\text{cosk}^{n+1}(O = O = \dots = O) = K(O, 0)$, se deduce que $\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) \in \mathbf{Gd}$, es decir, el conjunto de objetos es el mismo en todas las dimensiones.

Veamos ahora que realmente $\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ es un $(n + 1)$ -grupoide simplicial, para ello tenemos que demostrar que el grupoide $\mathcal{N}_m \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ es el grupoide discreto \mathcal{O} sobre el conjunto O , para $m \geq n + 1$.

En primer lugar, obsérvese que si $f \in \tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$ es una flecha tal que $d_i(f) \in B_n(\mathcal{G})$, $0 \leq i \leq n$, entonces su clase en $\tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$ es trivial. Este hecho nos prueba que toda flecha de $\mathcal{N}_{n+1} \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ es una identidad o, equivalentemente, que el morfismo canónico

$$K_{n+1}^{n+1} : \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda_{n+1}^{n+1}(\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}))$$

es un isomorfismo. Deducimos entonces que $\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ tiene caras abiertas en dimensión $n + 1$ y de este hecho, al ser $\tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ un cosk^{n+1} , utilizando un razonamiento análogo al hecho en la demostración del Lema 1.3.1 deducimos que en

dimensión $m \geq n + 2$ cualquier m -símplice está determinado por m -cualquiera de sus caras y por tanto, toda flecha de $\mathcal{N}_m \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$ es una identidad.

Veamos ahora que realmente $\tilde{P}_{n+1} : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}_{n+1}$ es el adjunto izquierda del functor inclusión i_{n+1} .

En lo que sigue, identificaremos $i_{n+1}(\mathcal{G})$ con \mathcal{G} .

Para probar esta adjunción veamos que se tiene un morfismo canónico (componente de la unidad de la adjunción en \mathcal{G})

$$\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)} : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G})$$

con la siguiente propiedad universal:

Cualquier morfismo en \mathbf{Gd} de \mathcal{G} en un $\mathcal{H} \in \mathbf{Gd}_{n+1}$ factoriza de forma única por $\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}} & \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) \\ & \searrow \mathbf{g} & \swarrow \exists! \mathbf{h} \\ & & \mathcal{H}. \end{array} \quad (2.14)$$

El morfismo $\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}$ tiene:

- funtores identidad en dimensiones $i \leq n - 1$,
- las proyecciones canónicas

$$(\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)})_n = pr : \mathcal{G}_n \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_n \quad \text{y} \quad (\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)})_{n+1} = pr : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{n+1},$$

en dimensiones n y $n + 1$,

- los únicos funtores determinados por la propiedad universal de los núcleos simpliciales en dimensiones mayores que $n + 1$.

Dado entonces un morfismo $\mathbf{g} : \mathcal{G} \rightarrow i_{n+1}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ en la categoría \mathbf{Gd} , el morfismo $\mathbf{h} : \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{H}$ que hace conmutar el diagrama (2.14) tiene como $(n - 1)$ -truncación igual a \mathbf{g} , esto es, $tr_{n-1}(\mathbf{h}) = tr_{n-1}(\mathbf{g})$. En dimensión n , observamos que cualquier flecha en $B_n(\mathcal{G})$ es llevada a una identidad por g_n , ya que $g_n d_{n+1}(\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})) = d_{n+1} g_{n+1}(\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G})) \subseteq d_{n+1}(\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{H}))$ que es trivial por $\mathcal{H} \in \mathbf{Gd}_{n+1}$. Así, por la propiedad universal del grupoide cociente, g_n induce un único functor h_n haciendo conmutar el triángulo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n & \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)})_n} & \bar{\mathcal{G}}_n \\ & \searrow g_n & \swarrow h_n \\ & & \mathcal{H}_n. \end{array}$$

En dimensión $(n + 1)$ de nuevo observamos que el funtor g_{n+1} lleva las flechas de $\bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{G}_{n+1}$ en identidades, en efecto, dada una flecha

$$f \in \bigcap_{i=0}^n d_i^*(B_n(\mathcal{G})),$$

para probar que $g_{n+1}(f)$ es una identidad bastará con que probemos que sus $(n+1)$ primeras caras son identidades, pero $d_i g_{n+1}(f) = g_n d_i(f)$, $0 \leq i \leq n$, que es una identidad pues $d_i(f) \in B_n(\mathcal{G})$ y g_n lleva las flechas de $B_n(\mathcal{G})$ en identidades. Así g_{n+1} induce un único funtor h_{n+1} haciendo conmutar el triángulo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)})_{n+1}} & \tilde{\mathcal{G}}_{n+1} \\ & \searrow^{g_{n+1}} & \swarrow_{h_{n+1}} \\ & & \mathcal{H}_{n+1} \end{array}$$

Es inmediato comprobar que los funtores h_n y h_{n+1} nos permiten definir un morfismo simplicial truncado

$$tr_{n+1}(\mathbf{h}) : tr_{n+1} \tilde{P}_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow tr_{n+1}(\mathcal{H}),$$

que extiende a un único morfismo simplicial \mathbf{h} por ser $\mathcal{H} = \text{Cosk}^{n+1}(\mathcal{H})$.

Notemos finalmente que la asociación $\mathcal{G} \mapsto \delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}$ es natural y corresponde a la unidad de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$. ■

Denotamos en lo que sigue, por P_n al endofunctor idempotente de \mathbf{Gd} que se obtiene componiendo el correspondiente par inclusión-reflector, es decir, $P_n := i_n \tilde{P}_n$.

Proposición 2.5.2. *Para cada grupoide simplicial \mathcal{G} , la componente en \mathcal{G} de la unidad $\delta^{(n)}$ de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$ induce isomorfismos naturales de grupoides y módulos*

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathcal{G}) &\cong \pi_0 P_n(\mathcal{G}), & 1 \leq n, \\ \pi_m(\mathcal{G}) &\cong \pi_m P_n(\mathcal{G}), & 1 \leq m \leq n - 1. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la aplicación continua

$$\mathbf{B}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)}) : \mathbf{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{B}P_n(\mathcal{G})$$

induce isomorfismos en los grupos de homotopía en dimensiones $\leq n$.

Demostración: Puesto que $P_1(\mathcal{G})$ es el grupoide simplicial constante $\pi_0(\mathcal{G})$, es claro que $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0 P_1(\mathcal{G})$. Además teniendo en cuenta la definición de $P_n(\mathcal{G})$ claramente se tiene también $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0 P_n(\mathcal{G})$ para $n \geq 2$.

Supongamos ahora que $n > 1$ y que $1 \leq m \leq n$.

Los grupoides simpliciales \mathcal{G} y $P_n(\mathcal{G})$ tienen igual $(n-2)$ -truncación y $\delta^{(n)}$ tiene a la identidad como $(n-2)$ -truncación. Entonces, para cada objeto x de $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0 P_n(\mathcal{G})$ (o equivalentemente, de \mathcal{G} o de $P_n(\mathcal{G})$), la componente en x de $\delta_{\mathcal{G}}^{(n)}$ induce un morfismo de complejos de cadenas de grupos

$$\begin{array}{ccccccc} N(\mathcal{G})(x): & \cdots & \longrightarrow & N_n(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_n)_x} & N_{n-1}(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_{n-1})_x} & N_{n-2}(\mathcal{G})(x) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow N(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x & & \downarrow N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x & & \parallel & & \\ NP_n(\mathcal{G})(x): & \cdots & \xlongequal{\quad} & \mathbf{0} & \xrightarrow{(\partial_n)_x} & N_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_{n-1})_x} & N_{n-2}(\mathcal{G})(x) & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (2.15)$$

que claramente induce un isomorfismo en los correspondientes grupos de homología en dimensiones $\leq n-3$, por tanto, $\delta_{\mathcal{G}}^{(n)}$ induce un isomorfismo en los grupos de homotopía en dimensiones $\leq n-3$. Además, es fácil comprobar, a partir de la definición de los operadores cara de \mathcal{G} y $P_n(\mathcal{G})$ respectivamente, que el morfismo $N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x$ es sobreyectivo. Deducimos entonces que el morfismo de complejos anterior también induce isomorfismo en la homología en dimensión $n-2$ y así $\delta_{\mathcal{G}}^{(n)}$ también induce un isomorfismo en la homotopía en dimensión $n-2$.

Para ver que ocurre en dimensión $n-1$ introducimos en el diagrama 2.15 anterior la homología en dimensión $n-1$, obtenemos así un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} N_n(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_n)_x} & N_{n-1}(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_{n-1})_x} & N_{n-2}(\mathcal{G})(x) \\ \downarrow N_n(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x & \searrow & \downarrow N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x & & \parallel \\ \mathbf{0} & \xrightarrow{N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x} & N_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x) & \xrightarrow{(\partial_{n-1})_x} & N_{n-2}(\mathcal{G})(x) \\ & \searrow & \downarrow \text{ker}(\partial_{n-1})_x = \pi_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x) & & \\ & & \text{ker}(\partial_{n-1})_x & \xrightarrow{\quad} & \pi_{n-1}(\mathcal{G})(x) \end{array}$$

Observamos que, de la sobreyectividad del morfismo $N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x$ y de la conmutatividad del cuadrado de la derecha en el diagrama anterior, se deduce que la restricción de $N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x$ a los núcleos

$$N_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_x : \text{ker}(\partial_{n-1})_x \rightarrow \pi_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x)$$

es también sobreyectiva y así lo será el morfismo inducido

$$\pi_{n-1}(\mathcal{G})(x) \rightarrow \pi_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x).$$

Nos resta comprobar que este morfismo es también inyectivo.

Sea $[f] \in \pi_{n-1}(\mathcal{G})(x)$ tal que su imagen por el morfismo anterior, que denotamos por

$$\bar{f} \in \pi_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x),$$

sea trivial. Entonces,

$$\bar{f} \in \text{Ner}_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x) \subseteq \bar{\mathcal{G}}_{n-1}(x, x) = (\mathcal{G}_{n-1}/B_{n-1}(\mathcal{G}))(x, x)$$

y deducimos que \bar{f} es la clase en el cociente de una flecha $f \in B_{n-1}(\mathcal{G})(x, x)$, o lo que es igual $f = d_n(g)$ con $g \in \mathcal{N}_n(\mathcal{G})(x)$, de donde $f \in \text{im}(\partial_n)_x$ y por tanto, $[f]$ es trivial. De esta forma el morfismo inducido entre $\pi_{n-1}(\mathcal{G})(x)$ y $\pi_{n-1}P_n(\mathcal{G})(x)$ también es inyectivo.

La conclusión sobre los grupos de homotopía de los espacios clasificadores de \mathcal{G} y $P_n(\mathcal{G})$ es clara, utilizando el Corolario 2.3.2. ■

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.5.2 y 2.3.1 se tiene:

Proposición 2.5.3. *Todo n -tipo es débilmente homotópicamente equivalente al espacio clasificador de un grupoide simplicial n -dimensional.*

Demostración: Dado $X \in \mathbf{Top}$ un n -tipo, el grupoide simplicial fundamental de X , $\mathbf{\Pi}(X) = GS(X)$ es un n -tipo (su espacio clasificador tiene el mismo tipo que X , Proposición 2.3.1), por tanto, la proyección canónica $GS(X) \rightarrow P_nGS(X)$ induce equivalencias naturales en homotopía

$$\pi_m \mathbf{\Pi}(X) \cong \pi_m P_n \mathbf{\Pi}(X), \text{ para todo } m \geq 0.$$

De donde deducimos que la composición

$$X \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X) \rightarrow \mathbf{B}P_n \mathbf{\Pi}(X)$$

es una equivalencia homotópica débil. ■

Veamos para acabar esta sección como los funtores $P_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}$ satisfacen las condiciones necesarias para desarrollar nuestra construcción de la torre de Postnikov de manera algebraica (ver página ix):

Lema 2.5.4. *Para cada $n \geq 0$, se tienen las siguientes relaciones entre los funtores inclusión $j_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}_{n+1}$, $i_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$, y los funtores reflexión $\tilde{P}_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}_n$:*

$$\tilde{P}_n i_n = \text{Id}_{\mathbf{Gd}_n}, \tag{2.16}$$

$$i_{n+1} j_n = i_n, \tag{2.17}$$

las cuales implican

$$\tilde{P}_{n+1}i_n = j_n \quad (2.18)$$

gráficamente, los triángulos siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gd}_n & \xrightarrow{i_n} & \mathbf{Gd} \\ & \searrow & \swarrow \tilde{P}_n \\ & \mathbf{Gd}_n & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Gd}_n & \xrightarrow{j_n} & \mathbf{Gd}_{n+1} \\ & \searrow i_n & \swarrow i_{n+1} \\ & \mathbf{Gd} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Gd}_n & \xrightarrow{j_n} & \mathbf{Gd}_{n+1} \\ & \searrow i_n & \swarrow \tilde{P}_{n+1} \\ & \mathbf{Gd} & \end{array}$$

Demostración: Si \mathcal{G} es un grupoide simplicial n -dimensional, sabemos que $\mathcal{N}_n(\mathcal{G}) = \mathcal{O}$, de donde $\tilde{P}_n(\mathcal{G})_{n-1} = \mathcal{G}_{n-1}$, $\tilde{P}_n(\mathcal{G})_n = \mathcal{G}_n$, luego $\tilde{P}_n i_n(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^n(\mathcal{G})$, y por el Corolario 2.4.6, se tiene que $\tilde{P}_n i_n(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$. La tercera igualdad (2.18) es trivial y a partir de las dos primeras (2.16) y (2.17). ■

Otras identidades que satisfacen los funtores idempotentes P_n están dadas en la siguiente

Proposición 2.5.5. *Los funtores idempotentes $P_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}$ satisfacen las identidades*

$$P_{n+1}P_n = P_n \quad \text{y} \quad P_n P_{n+1} = P_n.$$

Demostración: La primera identidad es consecuencia inmediata de las igualdades del Lema 2.5.4. En efecto, dado un grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$ tenemos:

$$P_{n+1}P_n(\mathcal{G}) = i_{n+1}\tilde{P}_{n+1}i_n\tilde{P}_n(\mathcal{G}) = i_{n+1}j_n\tilde{P}_n(\mathcal{G}) = i_n\tilde{P}_n(\mathcal{G}) = P_n(\mathcal{G}).$$

Para probar la segunda identidad volvemos a observar que el morfismo inducido

$$\text{Ner}_n(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ner}_n P_{n+1}(\mathcal{G})$$

es la identidad en objetos y sobreyectivo a nivel de flechas, por lo que, debido a la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{G}_{n-1} \\ \downarrow & & \parallel \\ P_{n+1}(\mathcal{G})_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{G}_{n-1}, \end{array}$$

se tiene que

$$d_n(\text{Ner}_n(\mathcal{G})) = d_n(\text{Ner}_n P_{n+1}(\mathcal{G}))$$

y por tanto

$$(P_n P_{n+1}(\mathcal{G}))_{n-1} = (P_n(\mathcal{G}))_{n-1}.$$

De aquí es inmediato concluir el resto de la identidad $P_n P_{n+1}(\mathcal{G}) = P_n(\mathcal{G})$. ■

Tomemos ahora

$$\eta_{n+1} = P_{n+1} \delta^{(n)} : P_{n+1} \rightarrow P_n$$

la composición de P_{n+1} con la unidad $\delta^{(n)}$ de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$. Entonces, para $n > 1$ y cada grupoide simplicial \mathcal{G} , el morfismo

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : P_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$$

consiste en:

- Los funtores identidad $Id_{\mathcal{G}_i}$ en dimensiones $0 \leq i \leq n - 2$.
- El functor proyección $\mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}_{n-1}/B_{n-1}(\mathcal{G})$ en dimensión $n - 1$.
- En dimensión n , observamos que se tiene una inclusión de grupoide

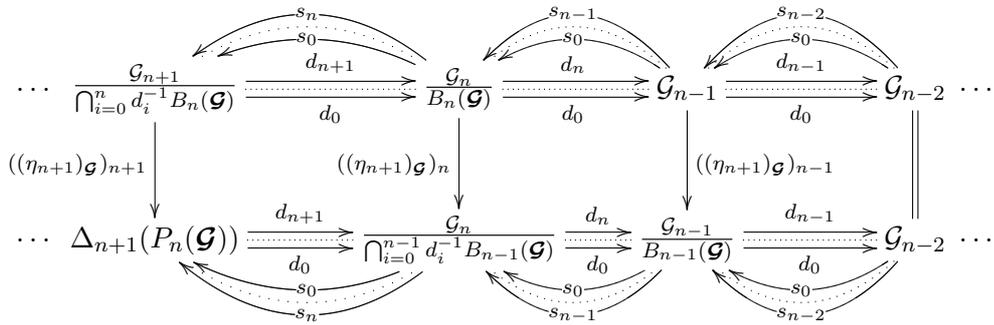
$$B_n(\mathcal{G}) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} d_i^* B_{n-1}(\mathcal{G})$$

y por tanto, un functor (sobre en flechas)

$$((\eta_{n+1})_{\mathcal{G}})_n : \mathcal{G}_n/B_n(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}_n / \bigcap_{i=0}^{n-1} d_i^* B_{n-1}(\mathcal{G}).$$

- En dimensiones superiores, el único morfismo que existe utilizando el hecho de que $P_n(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^n(P_n(\mathcal{G}))$.

En resumen $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : P_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$ viene representado por el diagrama:



Además se tiene:

Proposición 2.5.6. *Para cada grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$, y para cada $n \geq 0$, la componente de η_{n+1} en \mathcal{G} ,*

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : P_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$$

es una fibración cuya fibra tiene el tipo de homotopía de un $K(\Pi, n+1)$. En concreto:

- *Para $n \geq 1$, la fibra de $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ sobre cada objeto $x \in O$ tiene tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}\mathbf{B}(\mathcal{G})(x), n+1) = K(\pi_n(\mathcal{G})(x), n+1)$.*
- *Para $n = 0$, la fibra de $(\eta_1)_{\mathcal{G}}$ para cada componente conexa $\bar{x} \in \pi_0\pi_0(\mathcal{G})$ tiene tipo de homotopía del grupo $\pi_1\mathbf{B}(\mathcal{G})(x)$.*

Demostración: La igualdad $P_n P_{n+1} = P_n$ probada en la Proposición 2.5.5 y el hecho de ser P_{n+1} la identidad sobre la categoría \mathbf{Gd}_{n+1} (Lema 2.5.4) nos permiten reducirnos al caso en que \mathcal{G} sea un objeto de \mathbf{Gd}_{n+1} , en cuyo caso $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ coincide con la proyección canónica $\mathcal{G} \rightarrow P_n(\mathcal{G})$, esto es, la componente en \mathcal{G} de la unidad de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$.

Vamos a probar entonces que, en el caso de ser \mathcal{G} un grupoide simplicial $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 1$, la proyección canónica anterior es una fibración con fibra en cada objeto x del tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}\mathbf{B}(\mathcal{G})(x), n+1)$.

Una vez probado que $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ es una fibración, la segunda parte de la demostración para $n > 1$ es consecuencia inmediata de la Proposición 2.5.2, bastará con considerar la sucesión en homotopía asociada a la fibración

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x) : \mathcal{G}(x, x) \longrightarrow P_n(\mathcal{G})(x, x),$$

el hecho de que esta fibración induce isomorfismos en los grupos de homotopía $\pi_m(\mathcal{G})(x) \cong \pi_m P_n(\mathcal{G})(x)$ para $m \leq n-1$ (Proposición 2.5.2) y el hecho de ser \mathcal{G} y $P_n(\mathcal{G})$ grupoides simpliciales $(n+1)$ y n -dimensionales respectivamente (y por tanto $\pi_m(\mathcal{G})(x) = 0$ para $m \geq n+1$ y $\pi_m P_n(\mathcal{G})(x) = 0$ para $m \geq n$) implican que la fibra \mathcal{F} de $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ en x es un grupo simplicial (por ser $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ la identidad en objetos) que tiene grupos de homotopía triviales en todas dimensiones salvo en dimensión n , y en esta dimensión $\pi_n(\mathcal{F}) = \pi_n(\mathcal{G})(x)$, o equivalentemente $\pi_{n+1}\mathbf{B}(\mathcal{F}) = \pi_{n+1}\mathbf{B}(\mathcal{G})(x)$. Se tiene entonces que \mathcal{F} tiene el tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}\mathbf{B}(\mathcal{G})(x), n+1) = K(\pi_n(\mathcal{G})(x), n+1)$.

Analicemos el caso $n = 0$. Puesto que hemos identificado la categoría \mathbf{Gd}_1 con la categoría de grupoides y es claro que, vía esta identificación, fibraciones entre grupoides simpliciales 1-dimensionales corresponden a fibraciones de grupoides. Hemos de probar que para todo grupoide \mathcal{G} , la proyección canónica $\mathcal{G} \rightarrow P_0(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G})$ es una fibración de grupoides (donde $\pi_0(\mathcal{G})$ es considerado como un grupoide discreto), con fibra en cada componente conexa \bar{x} del tipo de homotopía del grupo

$\pi_1 \mathbf{B}(\mathcal{G})(x) = \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$. Ahora bien, esta proyección es sobreyectiva en objetos y su codominio es un grupoide discreto, por tanto es una fibración, su fibra en cada componente conexa es claramente un grupoide conexo y por tanto, del tipo de homotopía de un grupo, el grupo de endomorfismos en \mathcal{G} de cualquier objeto en dicha componente.

Veamos que ocurre en la siguiente dimensión, $n = 1$. Supongamos entonces que \mathcal{G} es un grupoide simplicial 2-dimensional, esto es, \mathcal{G} es el nervio de un 2-grupoide, $P_1(\mathcal{G})$ es el grupoide de componentes conexas de \mathcal{G} y la proyección $\mathcal{G} \rightarrow P_1(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G})$ es la proyección canónica al grupoide de componentes conexas (visto éste como grupoide simplicial discreto o constante). Este morfismo a nivel cero tiene la proyección canónica $\mathcal{G}_0 \rightarrow \pi_0(\mathcal{G})$ que es la identidad en objetos y sobreyectivo en flechas y por tanto, es una fibración de grupoides. Además, por estar considerando a $P_1(\mathcal{G})$ como grupoide simplicial discreto, para cada objeto x de \mathcal{G} (o equivalentemente de $P_1(\mathcal{G})$) el grupo simplicial $P_1(\mathcal{G})(x, x)$ es constante,

$$P_1(\mathcal{G})(x, x) = K(\text{End}_{P_1(\mathcal{G})}(x), 0) \quad \text{y} \quad \text{End}_{P_1(\mathcal{G})}(x) = \pi_0(\mathcal{G}(x, x)),$$

y el morfismo inducido $\mathcal{G}(x, x) \rightarrow P_1(\mathcal{G})(x, x)$ es el morfismo canónico de un grupo simplicial al grupo simplicial constante de sus componentes conexas que es siempre una fibración. Concluimos entonces que $(\eta_2)_{\mathcal{G}}$ es una fibración de grupoides simpliciales.

Puesto que la categoría \mathbf{Gd}_2 es cerrada para límites, la fibra \mathcal{F} de $(\eta_2)_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow P_1(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G})$ sobre un objeto x de $\pi_0(\mathcal{G})$, es decir, sobre un objeto x de \mathcal{G} , es de nuevo un grupoide simplicial 2-dimensional. Pero como $(\eta_2)_{\mathcal{G}}$ es la identidad en objetos, \mathcal{F} tiene sólo un objeto y por tanto, será un grupoide simplicial 2-dimensional con un solo objeto, esto es, un grupoide interno en grupos. Este grupoide tiene como grupo de objetos a aquellas endomorfismos $f \in \text{End}_{\mathcal{G}_0}(x)$ conectados con el endomorfismo $Id_x \in \mathcal{G}_0$ (esto es, los $f \in \text{End}_{\mathcal{G}_0}(x)$ tales que existe $\alpha : f \rightarrow Id_x$ flecha en \mathcal{G}_1) y como grupo de flechas todos los endomorfismos β en \mathcal{G}_1 ,

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & x \\ & g & \end{array}$$

Es claro entonces que dos flechas $f, g \in \mathcal{F}_1$ están siempre conectadas por una flecha $\beta \in \mathcal{F}_2$ ya que ambas están conectadas a la identidad Id_x y por tanto $\pi_1 \mathbf{B}(\mathcal{F})(x) = \pi_0(\mathcal{F})$ es trivial así $\mathbf{B}(\mathcal{F})$ tiene sólo un grupo de homotopía no trivial

$$\pi_2 \mathbf{B}(\mathcal{F})(x) = \pi_1(\mathcal{F})(x) = \pi_1(\mathcal{G})(x),$$

para ver la última igualdad basta con identificar los elementos de ambos grupos

con flechas en \mathcal{G}_1 de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 & Id_x & \\
 x & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & x \\
 & Id_x &
 \end{array}$$

En general, para $n > 1$, supuesto \mathcal{G} un grupoide simplicial $(n + 1)$ -dimensional, la proyección canónica $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow P_n(\mathcal{G})$ es la identidad en dimensiones $\leq n - 1$ y por tanto, en dimensión cero es una fibración de grupoides. Para concluir que es una fibración de grupoides simpliciales sólo resta probar que, para cada objeto x , el morfismo de grupos simpliciales

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x) : \mathcal{G}(x, x) \rightarrow P_n(\mathcal{G})(x, x)$$

es una fibración de Kan. Es claro que este morfismo es un epimorfismo en todas dimensiones. El hecho de ser $\mathcal{G}_m \cong \Lambda_m^j(\mathcal{G})$, para todo $m \geq n + 2$, $P_n(\mathcal{G})_m \cong \Lambda_m^j(P_n(\mathcal{G}))$, para todo $m \geq n + 1$, y $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x)$ épico implican la condición de fibración para $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x)$ en dimensiones $m \geq n + 2$. La condición de fibración en dimensión $n + 1$ se deduce del isomorfismo $(P_n(\mathcal{G}))_{n+1} \cong \Lambda_{n+1}^j(P_n(\mathcal{G}))$ y del hecho de ser $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x)$ y cada morfismo $K_m^i : \mathcal{G}_{m+1} \rightarrow \Lambda_{n+1}^i(\mathcal{G})$ epimorfismos. La condición de fibración en dimensión n se deduce de ser $\Lambda_n^i(\mathcal{G}) = \Lambda_n^i(P_n(\mathcal{G}))$ y $((\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x))_n$ épico. En dimensiones inferiores la condición de fibración es clara ya que $((\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}(x))_m$ es una identidad para $m \leq n - 1$. ■

Podemos ya probar el principal teorema de este capítulo.

Teorema 2.5.7 (La torre de Postnikov algebraica de un grupoide simplicial). *Para cada grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$ el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathcal{G} & & & \\
 & \delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)} & & \downarrow \delta_{\mathcal{G}}^{(2)} & & \delta_{\mathcal{G}}^{(0)} & \\
 & \swarrow & \delta_{\mathcal{G}}^{(n)} & \downarrow \delta_{\mathcal{G}}^{(1)} & \searrow & & \\
 \dots & P_{n+1}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}} & P_n(\mathcal{G}) & \xrightarrow{(\eta_n)_{\mathcal{G}}} & \dots & P_2(\mathcal{G}) & \xrightarrow{(\eta_2)_{\mathcal{G}}} & P_1(\mathcal{G}) & \xrightarrow{(\eta_1)_{\mathcal{G}}} & P_0(\mathcal{G})
 \end{array} \tag{2.19}$$

obtenido a partir de las unidades de las adjunciones $\tilde{P}_n \dashv i_n$, es la torre de Postnikov de \mathcal{G} .

Demostración: Comprobemos primero la conmutatividad del diagrama, esto es, que para todo $n \geq 0$, se tiene:

$$\delta_{\mathcal{G}}^{(n)} = (\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} \delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}.$$

Estos dos morfismos de grupoides simpliciales $\delta_{\mathcal{G}}^{(n)}$ y $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} \delta_{\mathcal{G}}^{(n+1)}$ en dimensiones menores a $n - 1$ vienen dados ambos por los funtores identidad, en dimensión $n - 1$

por el funtor proyección de $\mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}_{n-1}$ y en dimensión n ambos morfismos están dados por el funtor proyección $\mathcal{G}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_n$. En dimensiones superiores ambos son el único morfismo a un coesqueleto.

Concluimos entonces que el diagrama (2.19) es un diagrama cono sobre

$$\dots \xrightarrow{(\eta_{m+2})_{\mathcal{G}}} P_{n+1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{(\eta_{m+1})_{\mathcal{G}}} P_n(\mathcal{G}) \xrightarrow{(\eta_m)_{\mathcal{G}}} \dots \xrightarrow{(\eta_2)_{\mathcal{G}}} P_1(\mathcal{G}) \xrightarrow{(\eta_1)_{\mathcal{G}}} P_0(\mathcal{G}). \quad (2.20)$$

Además, $\{\mathcal{G}, \delta_{\mathcal{G}}^{(n)}\}$ es universal en el sentido de que dado otro cono $\{\phi^{(n)} : \mathcal{G}' \rightarrow P_n(\mathcal{G})\}$ sobre (2.20) existe una única forma de definir un morfismo de grupoides simpliciales

$$\phi : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G},$$

tal que $\delta_{\mathcal{G}}^{(n)} \phi = \phi^{(n)}$ para todo $n \geq 0$. Basta con que observemos que los funtores $(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_m$ son la identidad para todo $m < n - 1$, con lo cual

$$\phi_m = \phi_m^{(n)}, \text{ para } m < n - 1.$$

Tomando cualquier $n > m + 1$ tendremos determinado ϕ_m de forma única.

Concluimos entonces que el diagrama (2.19) es un diagrama límite.

La Proposición 2.5.6 completa la demostración de este teorema. ■

2.6 Algunos resultados técnicos sobre n -grupoides simpliciales

En esta sección probaremos algunos lemas técnicos que usaremos a la hora de construir los invariantes de Postnikov de un grupoide simplicial, Sección 5.2.1. El primer resultado que probaremos en la Proposición 2.6.2 nos muestra cómo actúa el funtor $\widetilde{P}_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}_n$ sobre grupoides simpliciales que tienen una contracción homotópica, esto es, una degeneración extra. Para probar este resultado necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.6.1. *Si \mathcal{G} es un grupoide simplicial n -dimensional, $n \geq 2$, con una contracción homotópica entonces $\mathcal{G} \cong \text{Cosk}^{n-2}(\mathcal{G})$.*

Demostración: La existencia de una contracción homotópica, esto es, una degeneración extra, nos permite probar que el funtor canónico

$$D_m : \mathcal{G}_m \rightarrow \Delta_m(\mathcal{G}), \quad m \geq 1,$$

que es la identidad en objetos y sobre flechas actúa como

$$D_m(f) = (d_0(f), d_1(f), \dots, d_m(f)),$$

es sobreyectivo para todo $m \geq 1$. En efecto:

Dada una flecha $(f_0, f_1, \dots, f_m) \in \Delta_m(\mathcal{G})$, por la Proposición 2.2.3, como K_m^{m-1} es sobreyectivo, podemos asegurar la existencia de una flecha $f \in \mathcal{G}_m$, tal que $d_i(f) = f_i$ para $0 \leq i \leq m-1$. Utilizando la degeneración adicional $s_m : \mathcal{G}_{m-1} \rightarrow \mathcal{G}_m$ construimos la flecha

$$g = f s_m d_m(f)^{-1} s_m(f_m) \in \mathcal{G}_m.$$

Esta flecha satisface $D_m(g) = (f_0, f_1, \dots, f_m)$, pues para $0 \leq i \leq m-1$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_i(f s_m d_m(f)^{-1} s_m(f_m)) &= d_i(f) d_i s_m d_m(f)^{-1} d_i s_m(f_m) \\ &= f_i s_{m-1} d_i d_m(f)^{-1} s_{m-1} d_i(f_m) \\ &= f_i s_{m-1} d_{m-1}(f_i)^{-1} s_{m-1} d_{m-1}(f_i) = f_i, \end{aligned}$$

y para $i = m$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_m(f s_m d_m(f)^{-1} s_m(f_m)) &= d_m(f) d_m s_m d_m(f)^{-1} d_m s_m(f_m) \\ &= d_m(f) d_m(f)^{-1} f_m = f_m. \end{aligned}$$

Por otra parte, para $m \geq n$, el funtor D_m tiene núcleo trivial ya que:

Dada una flecha f en $\ker(D_m)$, f es una flecha en \mathcal{G}_m tal que $d_i(f)$ es la identidad para todo $0 \leq i \leq m$, en particular, f es una flecha del grupoide $\mathcal{N}_m(\mathcal{G})$ que es trivial, pues \mathcal{G} es un grupoide simplicial n -dimensional y $m \geq n$.

Así, por el Lema 1.1.4, los morfismos D_m son isomorfismos para $m \geq n$ y, por tanto, $\mathcal{G} \cong \text{Cosk}^{n-1}(\mathcal{G})$. Pero hemos de probar que $\mathcal{G} \cong \text{Cosk}^{n-2}(\mathcal{G})$, de esta forma nos resta ver que el morfismo canónico $D_{n-1} : \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \Delta_{n-1}(\mathcal{G})$ es también un isomorfismo. Por ser éste sobre y la identidad en objetos, bastaría con probar que es inyectivo en flechas. La Proposición 2.4.4 nos asegura que \mathcal{G} es el nervio de un $(n-1)$ -hipergrupoide, luego tenemos que el morfismo canónico $K_n^n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^n(\mathcal{G})$ es un isomorfismo pero hemos probado que también el morfismo $D_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Delta_n(\mathcal{G})$ es un isomorfismo, por tanto la inclusión canónica $\Lambda_n^n(\mathcal{G}) \rightarrow \Delta_n(\mathcal{G})$ es un isomorfismo (esto es, dos elementos del núcleo simplicial $\Delta_n(\mathcal{G})$ coinciden si y sólo si sus primeras n -componentes son iguales). Dadas entonces flechas $f, g \in \mathcal{G}_{n-1}$ tales que $D_{n-1}(f) = D_{n-1}(g)$, tenemos que $(s_{n-2}d_0f, \dots, s_{n-2}d_{n-1}f, f, g)$ y $(s_{n-2}d_0f, \dots, s_{n-2}d_{n-1}f, f, f)$ son dos elementos de $\Delta_n(\mathcal{G})$ con sus n primeras componentes iguales y por tanto, han de coincidir, lo que implica $f = g$. ■

Podemos entonces probar:

Proposición 2.6.2. *Si \mathcal{G} es un grupoide simplicial con una contracción homotópica, entonces*

$$\tilde{P}_n(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^{n-2}(\mathcal{G}), \quad n \geq 2.$$

Demostración: Observaremos primero que si \mathcal{G} tiene una degeneración extra, entonces también la tiene $\tilde{P}_n(\mathcal{G})$. Bastará entonces aplicar el Lema 2.6.1 anterior para concluir esta demostración. La degeneración extra de $\tilde{P}_n(\mathcal{G})$ está dada por:

1. El mismo functor $s_i : \mathcal{G}_{i-1} \rightarrow \mathcal{G}_i$, degeneración extra de \mathcal{G} , para $1 \leq i \leq n-2$.
2. La degeneración $s_{n-1} : \mathcal{G}_{n-2} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_{n-1}$ vendrá dada por la composición de la degeneración de \mathcal{G} y la proyección

$$\mathcal{G}_{n-2} \xrightarrow{s_{n-1}} \mathcal{G}_{n-1} \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_{n-1}} \bar{\mathcal{G}}_{n-1}.$$

3. La degeneración extra $s_n : \bar{\mathcal{G}}_{n-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_n$, está inducida por la degeneración extra $s_n : \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}_n$. Bastará con observar que este functor lleva las flechas de $B_{n-1}(\mathcal{G})$ en flechas de $\bigcap_{i=0}^{n-1} d_i^*(B_{n-1}(\mathcal{G}))$. En efecto:

Dada una flecha $f \in B_{n-1}(\mathcal{G})$, existe $g \in \mathcal{N}_n(\mathcal{G})$ tal que $f = d_n(g)$.

Entonces

$$\begin{aligned} d_i s_n(f) &= d_i s_n d_n(g) = d_i d_n s_{n+1}(g) = d_{n-1} d_i s_{n+1}(g) \\ &= d_{n-1} s_n d_i(g) = d_{n-1} s_n(Id) = Id, \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq n-1$ y por tanto, claramente $d_i s_n(f) \in B_{n-1}(\mathcal{G})$.

Entonces $s_n : \bar{\mathcal{G}}_{n-1} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_n$ es la única flecha que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B_{n-1}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_{n-1} & \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_{n-1}} & \bar{\mathcal{G}}_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow s_n & & \downarrow s_n \\ \bigcap_{i=0}^{n-1} d_i^*(B_{n-1}(\mathcal{G})) & \hookrightarrow & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{G}}^{(n)})_n} & \tilde{\mathcal{G}}_n \end{array}$$

4. En dimensiones $m \geq n+1$ las degeneraciones extra se obtienen utilizando que $\tilde{P}_n(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^n(\tilde{P}_n(\mathcal{G}))$.

La comprobación de que esta degeneración extra satisface las correspondientes identidades simpliciales es un mero ejercicio. Tenemos entonces que $\tilde{P}_n(\mathcal{G})$ es un grupoide simplicial n -dimensional con una degeneración extra, el Lema 2.6.1 nos asegura

$$\tilde{P}_n(\mathcal{G}) \cong \text{Cosk}^{n-2}(\tilde{P}_n(\mathcal{G})) = \text{Cosk}^{n-2}(\mathcal{G}).$$

■

El siguiente resultado técnico que necesitaremos es que los funtores inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \rightarrow \mathbf{Gd}$ conservan coigualadores al menos de pares de flechas reflexivas que son la identidad en objetos.

Lema 2.6.3. *Para todo $n \leq 0$ los funtores inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \rightarrow \mathbf{Gd}$ conservan coigualadores de pares reflexivos de flechas que son la igualdad en objetos.*

Demostración: Supongamos (\mathbf{f}, \mathbf{g}) un par reflexivo de morfismos de grupoides simpliciales,

$$\begin{array}{ccc} & \text{s} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{H} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{f}} \\ \xrightarrow{\mathbf{g}} \end{array} & \mathcal{G} \end{array}$$

tales que \mathbf{f} y \mathbf{g} son la identidad en objetos y $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbf{Gd}_n$. El coigualador del par (\mathbf{f}, \mathbf{g}) en \mathbf{Gd} se calcula haciendo coigualadores en \mathbf{Gpd} dimensión a dimensión. Podemos utilizar el Lema 1.1.6 para encontrar subgrupoides normales $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{G}_i$, $0 \leq i$, tales que $\text{coeq}(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i) = \mathcal{G}_i/\mathcal{K}_i$. Notamos que, por ser \mathbf{f} y \mathbf{g} la identidad en objetos, los subgrupoides \mathcal{K}_i son todos totalmente desconexos y así el grupoide cociente $\mathcal{G}_i/\mathcal{K}_i$ tiene los mismos objetos que el grupoide \mathcal{G}_i . Además los subgrupoides \mathcal{K}_i son estables para los funtores cara y degeneración de \mathcal{G} , de forma que obtenemos un grupoide simplicial \mathcal{K} (que en cada dimensión tiene al grupoide \mathcal{K}_i y cuyas caras y degeneraciones son las restricciones de las caras y degeneraciones de \mathcal{G}). Si denotamos \mathcal{G}/\mathcal{K} al grupoide simplicial que en cada dimensión i tiene al grupoide cociente $\mathcal{G}_i/\mathcal{K}_i$ y cuyas caras y degeneraciones son inducidas por las de \mathcal{G} , entonces $\text{coeq}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathcal{G}/\mathcal{K}$ (nótese que este cociente es efectivamente un objeto de \mathbf{Gd} por ser todos los grupoides \mathcal{K}_i totalmente desconexos). Nuestro objetivo es probar que este grupoide cociente \mathcal{G}/\mathcal{K} está en \mathbf{Gd}_n , esto es, tiene complejo de Moore trivial en dimensiones $m \geq n$. Ésto será equivalente a probar que si tenemos una flecha $\alpha \in \mathcal{G}_m$ tal que $d_i(\alpha) \in \mathcal{K}_{m-1}$, para todo $0 \leq i \leq m-1$, entonces la flecha $\alpha \in \mathcal{K}_m$ (ver Observación 1.1.3). Para ver esto observamos que:

$$\alpha = \left(\alpha [s_{m-1}d_0\alpha, s_{m-1}d_1\alpha, \dots, s_{m-1}d_{m-1}\alpha]^{-1} \right. \\ \left. [s_{m-1}d_0\alpha, s_{m-1}d_1\alpha, \dots, s_{m-1}d_{m-1}\alpha], \right.$$

pero

$$\alpha [s_{m-1}d_0\alpha, s_{m-1}d_1\alpha, \dots, s_{m-1}d_{m-1}\alpha]^{-1} \in \mathcal{N}_m(\mathcal{G}),$$

que es trivial, y

$$[s_{m-1}d_0\alpha, s_{m-1}d_1\alpha, \dots, s_{m-1}d_{m-1}\alpha] \in \mathcal{K}_m$$

por $d_i(\alpha) \in \mathcal{K}_{m-1}$, $0 \leq i \leq m-1$, y s_{m-1} llevar flechas de \mathcal{K}_{m-1} en flechas de \mathcal{K}_m . Los corchetes que hemos utilizado vienen dados por las fórmulas del Lema 2.2.1 que a su vez están dadas en términos de las composiciones en \mathcal{K}_m . ■

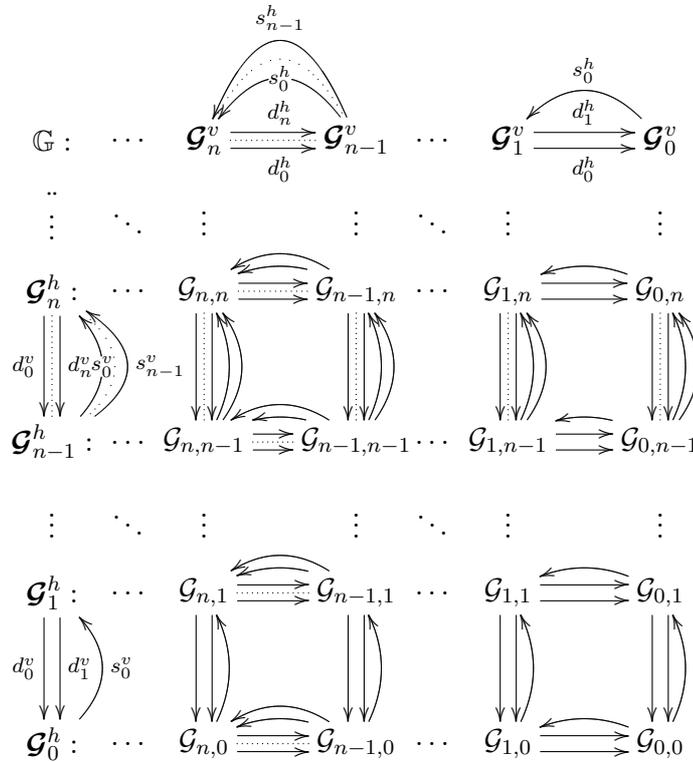
Y como corolario inmediato, por tener el funtor \tilde{P}_n un adjunto derecha, tenemos:

Corolario 2.6.4. *Para todo $n \leq 0$ los funtores $P_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}$ conservan coigualadores de pares reflexivos de flechas que son la identidad en objetos.*

El siguiente resultado técnico nos probará que los funtores P_n conmutan entre ellos en el siguiente sentido. Consideremos la categoría

$$\mathbf{SSimplGpd} = \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op} \times \Delta^{op}}$$

de objetos simpliciales dobles en la categoría \mathbf{Gpd} de grupoides y la subcategoría $\mathbf{SGd} \subseteq \mathbf{SSimplGpd}$ de aquellos grupoides simpliciales dobles tales que los funtores cara y degeneración tanto horizontales como verticales son la identidad en objetos. Esta categoría \mathbf{SGd} es precisamente la categoría de grupoides enriquecidos en la categoría de conjuntos simpliciales dobles. Un objeto en \mathbf{SGd} será representado por un diagrama



en el que cada $\mathcal{G}_{p,q}$ representa un grupoide. Además todos los grupoides en el diagrama anterior tiene un mismo conjunto de objetos y todas las caras (horizontales y verticales) son funtores que actúan como la identidad en objetos. Para cada $n \geq 0$ denotaremos \mathbf{SGd}_n^h (\mathbf{SGd}_n^v) a la subcategoría plena de \mathbf{SGd} con objetos aquellos grupoides simpliciales dobles \mathbb{G} tales que los grupoides simpliciales $\mathcal{G}_q^h \in \mathbf{Gd}_n$ (respectivamente $\mathcal{G}_p^v \in \mathbf{Gd}_n$) para todo $q \geq 0$ (respectivamente $p \geq 0$). Claramente \mathbf{SGd}_n^h es una categoría reflexiva de \mathbf{SGd} el reflector

$$\tilde{P}_n^h : \mathbf{SGd} \rightarrow \mathbf{SGd}_n^h$$

se obtiene aplicando el functor \tilde{P}_n en la dirección horizontal. Análogamente \mathbf{SGd}_n^v es una categoría reflexiva de \mathbf{SGd} en este caso, el reflector

$$\tilde{P}_n^v : \mathbf{SGd} \rightarrow \mathbf{SGd}_n^v$$

se obtiene aplicando el functor \tilde{P}_n en la dirección vertical. Denotaremos P_n^h y P_n^v a los correspondientes endofuntores de \mathbf{SGd} .

Proposición 2.6.5. *Para cada $n, m \geq 0$, la categoría intersección $\mathbf{SGd}_n^h \cap \mathbf{SGd}_m^v$ es reflexiva en \mathbf{SGd}_n^h (\mathbf{SGd}_m^v).*

Demostración: Para probar esta proposición bastará con ver que si $\mathbb{G} \in \mathbf{SGd}_n^h$, entonces $P_m^v(\mathbb{G}) \in \mathbf{SGd}_n^h$. La mayor dificultad para probar que $P_m^v(\mathbb{G}) \in \mathbf{SGd}_n^h$ consistirá en ver que $(P_m^v(\mathbb{G}))_{m-1}^h \in \mathbf{SGd}_n$, ya que en dimensiones menores que $(m-1)$ el functor P_m^v deja invariante a \mathbb{G} y en dimensiones mayores que $(m-1)$, el grupoide simplicial $P_m^v(\mathbb{G})$ consiste en caras abiertas. Veamos entonces que $(P_m^v(\mathbb{G}))_{m-1}^h \in \mathbf{SGd}_n$, es decir, que el grupoide simplicial $(P_m^v(\mathbb{G}))_{m-1}^h$ tiene complejo de Moore trivial en dimensiones $\geq n$. Representemos este grupoide simplicial mediante el diagrama

$$(P_m^v(\mathbb{G}))_{m-1}^h : \cdots \begin{array}{c} \begin{array}{c} s_{n-1}^h \\ \curvearrowright \\ s_0^h \\ \downarrow d_n^h \\ \overline{\mathcal{G}}_{n,m-1} \end{array} \\ \xrightarrow{d_0^h} \overline{\mathcal{G}}_{n-1,m-1} \cdots \begin{array}{c} \begin{array}{c} s_1^h \\ \curvearrowright \\ s_0^h \\ \downarrow d_2^h \\ \overline{\mathcal{G}}_{2,m-1} \end{array} \\ \xrightarrow{d_0^h} \overline{\mathcal{G}}_{1,m-1} \end{array} \xrightarrow{d_0^h} \overline{\mathcal{G}}_{0,m-1} ,$$

donde $\overline{\mathcal{G}}_{p,m-1}$ indica el grupoide cociente de $\mathcal{G}_{p,m-1}$ por el subgrupoide normal cuyas flechas son de la forma $d_m^v(f)$, para flechas $f \in \mathcal{G}_{p,m}$ tales que $d_i^v(f) = Id$, $0 \leq i \leq m-1$. Notemos que, por $\mathbb{G} \in \mathbf{SGd}_n^h$, dos flechas en $\mathcal{G}_{n,m-1}$ son iguales si y sólo si n cualesquiera de sus $(n+1)$ caras son iguales. Supongamos entonces que $u \in \mathcal{G}_{n,m-1}$ es una flecha tal que su clase en el grupoide cociente $\bar{u} \in \overline{\mathcal{G}}_{n,m-1}$ tiene:

$$d_j^h(\bar{u}) = \overline{d_j^h(u)} = Id \in \overline{\mathcal{G}}_{n-1,m-1}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (2.21)$$

Hemos de probar que $\bar{u} = Id$, esto es, hemos de encontrar una flecha $w \in \mathcal{G}_{n,m}$ tal que $d_i^v(w) = Id$, $0 \leq i \leq m-1$, y $d_m^v(w) = u$. La identidad (2.21) implica la existencia de flechas $f_j \in \mathcal{G}_{n-1,m}$, $0 \leq j \leq n-1$, tales que:

$$d_i^v(f_j) = Id, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$d_m^v(f_j) = d_j^h(u) .$$

Si la n -upla $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, -)$ representase un elemento en $\Lambda_n^n(\mathcal{G}_m^h)$ podríamos asegurar la existencia de un elemento $w \in \mathcal{G}_{n,m}$ tal que $d_j^h(w) = f_j$, $0 \leq j \leq n-1$,

y tendríamos

$$\begin{aligned} d_m^v(w) &= u, \\ d_i^v(w) &= Id, \quad 0 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

La primera de estas dos últimas identidades es cierta ya que

$$d_j^h d_m^v(w) = d_m^v d_j^h(w) = d_m^v(f_j) = d_j^h(u), \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

y la segunda se deduce de las igualdades

$$d_j^h d_i^v(w) = d_i^v d_j^h(w) = d_i^v(f_j) = Id, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

El problema es que no tiene por que ser cierto que la n -upla $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, -)$ pertenezca a $\Lambda_n^n(\mathcal{G}_m^h)$, es decir, no tienen porqué satisfacerse las identidades

$$d_k^h(f_j) = d_{j-1}^h(f_k), \quad 0 \leq k < j \leq n-1.$$

Veamos cómo podemos modificar las flechas f_j para obtener otras g_j cumpliendo:

$$d_i^v(g_j) = Id, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$d_m^v(g_j) = d_j^h(u),$$

$$d_k^h(g_j) = d_{j-1}^h(g_k), \quad 0 \leq k < j \leq n-1,$$

y el problema estaría resuelto. Tomaremos por inducción:

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0, \\ g_1 &= f_1 (s_0^h d_0^h f_1)^{-1} (s_0^h d_0^h g_0), \\ g_2 &= f_2 ([s_1^h d_0^h f_2, s_1^h d_1^h f_2]^h)^{-1} [s_1^h d_1^h g_0, s_1^h d_1^h g_1]^h \end{aligned}$$

y supuesto definidas las flechas g_j con $j < k \leq n-1$ tomamos

$$\begin{aligned} g_k &= f_k ([s_{k-1}^h d_0^h f_k, s_{k-1}^h d_1^h f_k, \dots, s_{k-1}^h d_{k-1}^h f_k]^h)^{-1} \\ &\quad [s_{k-1}^h d_{k-1}^h g_0, s_{k-1}^h d_{k-1}^h g_1, \dots, s_{k-1}^h d_{k-1}^h g_{k-1}]^h \end{aligned}$$

donde $[]^h$ indica la operación corchete correspondiente, definida según las fórmulas del Lema 2.2.1, para el grupoide simplicial \mathcal{G}_m^h . ■

2.7 La torre de Postnikov de un espacio

En esta sección construiremos la torre de Postnikov de un espacio X a partir de la torre de su grupoide simplicial fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$.

Usaremos la conexión entre las categorías de espacios y de grupoides simpliciales dada por los funtores “grupoide simplicial fundamental” y “espacio clasificador”

$$\mathbf{\Pi} = GS : \mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{SSet} \xrightarrow{G} \mathbf{Gd} ,$$

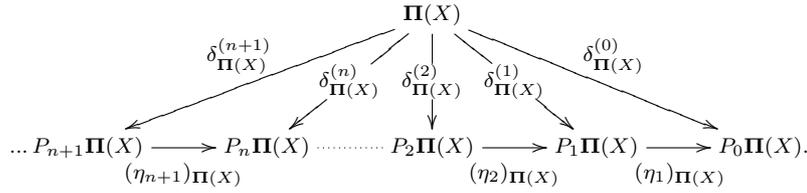
$$\mathbf{B} = |\mathbf{Ner}(-)| : \mathbf{Gd} \xrightarrow{\mathbf{Ner}} \mathbf{SSet} \xrightarrow{||} \mathbf{Top} ,$$

que hemos recordado en la Sección 2.3. Observamos que:

- El functor nervio $\mathbf{Ner} : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{SSet}$ lleva fibraciones en fibraciones (ver [29] Teorema 3.3) y como tiene un adjunto izquierda conserva limites, en particular, conserva fibras.
- El functor realización geométrica $|| : \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ también conserva fibraciones y fibras, ver página 39. No conserva límites en general pero si lleva límites en límites homotópicos.

Concluimos entonces que el functor \mathbf{B} conserva fibraciones y fibras y lleva límites en límites homotópicos.

Dado entonces un espacio X , consideramos su grupoide simplicial fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$ y construimos su torre de Postnikov (ver 2.19)



Aplicamos ahora el functor \mathbf{B} al diagrama anterior y obtenemos un diagrama de espacios

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X) \\
 \begin{array}{c}
 \mathbf{B}(\delta_{\mathbf{\Pi}(X)}^{(n+1)}) \quad \mathbf{B}(\delta_{\mathbf{\Pi}(X)}^{(n)}) \quad \mathbf{B}(\delta_{\mathbf{\Pi}(X)}^{(2)}) \quad \mathbf{B}(\delta_{\mathbf{\Pi}(X)}^{(1)}) \quad \mathbf{B}(\delta_{\mathbf{\Pi}(X)}^{(0)}) \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 \dots \mathbf{B}P_{n+1}\mathbf{\Pi}(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_n\mathbf{\Pi}(X) \dots \mathbf{B}P_2\mathbf{\Pi}(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_1\mathbf{\Pi}(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_0\mathbf{\Pi}(X). \\
 \mathbf{B}((\eta_{n+1})_{\mathbf{\Pi}(X)}) \quad \mathbf{B}((\eta_2)_{\mathbf{\Pi}(X)}) \quad \mathbf{B}((\eta_1)_{\mathbf{\Pi}(X)})
 \end{array}
 \end{array} \tag{2.22}$$

En el que cada flecha $\mathbf{B}(\eta_m)_{\mathbf{\Pi}(X)}$ es una fibración y su fibra en cada punto x tiene el tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}(X)(x), n + 1)$. Además $\mathbf{B}P_n\mathbf{\Pi}(X)$ conserva el n -tipo de X , o equivalentemente de $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$, las componentes de la unidad de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$ nos dan una aplicación

$$\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X) \rightarrow \mathbf{B}P_n\mathbf{\Pi}(X)$$

que induce isomorfismos en la homotopía hasta dimensión n . Deducimos entonces que el diagrama 2.22 es la torre de Postnikov del espacio $\mathbf{B}\Pi(X)$.

Nota 2.7.1. Aunque no lo hemos podido probar, nos parece que el diagrama (2.22) es un diagrama límite al menos en la categoría \mathbf{CGHaus} , lo que si es cierto en general es que el morfismo canónico desde $\mathbf{B}\Pi(X)$ en el límite de dicho diagrama induce isomorfismos en los grupos de homotopía y por tanto, es una equivalencia homotópica débil por lo que $\mathbf{B}\Pi(X)$ es el límite homotópico del diagrama.

Para construir la torre de X bastará con conectar X con el espacio $\mathbf{B}\Pi(X)$, esta conexión la hacemos vía la counidad y unidad de las adjunciones $| \dashv S$ y $G \dashv \text{Ner}$ respectivamente, cuyas componentes en X y $S(X)$ darán equivalencias homotópicas débiles

$$X \longleftarrow |S(X)| \longrightarrow |\text{Ner}GS(X)| = \mathbf{B}\Pi(X)$$

(y por tanto, isomorfismos en la categoría de homotopía). Si nos restringimos, por ejemplo, a CW -complejos podremos encontrar (aunque no de forma natural) una inversa homotópica para el morfismo $|S(X)| \rightarrow X$ y está nos permitirá dar una conexión directa $X \rightarrow \mathbf{B}\Pi(X)$ (que es un isomorfismo en la categoría de homotopía). En general escribiremos $X \sim \mathbf{B}\Pi(X)$ para indicar la conexión entre ambos espacios. Tenemos entonces:

Teorema 2.7.2. El diagrama

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \text{~~~~~} \\
 \mathbf{B}\Pi(X) \\
 \begin{array}{c}
 \swarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(n+1)}) \quad \downarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(n)}) \quad \downarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(2)}) \quad \downarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(1)}) \quad \searrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(0)}) \\
 \dots \mathbf{B}P_{n+1}\Pi(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_n\Pi(X) \cdots \mathbf{B}P_2\Pi(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_1\Pi(X) \longrightarrow \mathbf{B}P_0\Pi(X) \\
 \mathbf{B}((\eta_{n+1})_{\Pi(X)}) \qquad \qquad \qquad \mathbf{B}((\eta_2)_{\Pi(X)}) \qquad \qquad \mathbf{B}((\eta_1)_{\Pi(X)})
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{2.23}$$

es la torre de Postnikov del espacio X .

Capítulo 3

La torre de Postnikov de un complejo cruzado

En este capítulo haremos un estudio paralelo al desarrollado en el capítulo anterior aunque en un escenario más simple. Así, construimos la torre de Postnikov tomando como contexto base $\mathcal{S} = \mathbf{Crs}$, la categoría de complejos cruzados. Fue en este escenario donde primero pudimos hacer la traslación completa de la teoría de Postnikov, construyendo no sólo la torre de Postnikov de un complejo cruzado sino también sus invariantes. A pesar de que, como es sabido, la categoría \mathbf{Crs} no modela todos los tipos de homotopía, los resultados aquí obtenidos tienen el interés de ilustrar los métodos algebraicos para hallar la torre de Postnikov de un espacio en un contexto particular en que los cálculos se pueden llevar a cabo sin grandes dificultades. Evidentemente los resultados de este capítulo sólo sirven para hallar la torre de Postnikov de espacios que tengan el tipo de homotopía de un complejo cruzado. Pero esta limitación (que no existe, por ejemplo, en el caso de los grupoides simpliciales) queda compensada por una mayor sencillez de los cálculos.

Comenzamos el capítulo dando un resumen de los elementos de la teoría de complejos cruzados que vamos a necesitar, para más detalle sobre esta teoría ver [12] y [14].

Primero haremos una introducción del concepto en el que se basa la definición de complejo cruzado: el módulo cruzado. Es ésta una estructura que ha sido generalizada en muchas direcciones desde que fue introducida por Whitehead, como la estructura algebraica que modela los 2-tipos de homotopía de forma análoga a como los grupoides (grupos) modelan los 1-tipos (1-tipos conexos). En topología se acostumbra a reducir el estudio de los tipos de homotopía a espacios conexos. Ésto simplifica los razonamientos “topológicos” sin perder generalidad y lleva a estructuras algebraicas “mas simples”. Sin embargo, desde el punto de vista categórico que hemos adoptado en esta memoria, trabajar con la categoría de grupoides (los

modelos genuinos de 1-tipos de homotopía, cuando no se lleva a cabo la reducción a espacios conexos) es más natural, nos lleva a razonamientos categóricos más transparentes y no ofrece mayor dificultad que la de tratar con grupos. De acuerdo con esto, la definición de módulo cruzado que aquí manejaremos no se basa en acciones de grupos sobre grupos, sino en acciones de grupoïdes sobre grupos. Vamos a dar una definición functorial simple de módulo cruzado y de complejo cruzado, indicando también la forma usual bajo la cual esas definiciones se pueden encontrar en la literatura.

3.1 Módulos cruzados

En todo este capítulo \mathcal{G} denotará un grupoïde base fijo. Como se dijo en la Sección 1.1 un \mathcal{G} -grupo es un functor $C : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gp}$, y la categoría de \mathcal{G} -grupos es la categoría de funtores $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$. Recuérdese que con cada \mathcal{G} -grupo C podemos asociar:

- Un grupoïde totalmente desconexo, que denotamos por \widehat{C} , que tiene como conjunto de objetos los de \mathcal{G} y como grupo de endomorfismos de $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ el grupo $\text{End}_{\widehat{C}}(x) = C(x)$.
- Una “acción” de (las flechas de) \mathcal{G} en (las flechas de) \widehat{C} , que hemos denotado por

$${}^t u = C(t)(u)$$

para cada flecha $x \xrightarrow{t} y$ en \mathcal{G} y $u \in C(x)$ (y por tanto ${}^t u \in C(y)$).

Se tiene un functor olvido

$$\widehat{(\)} : \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{TdGpd},$$

que toma valores en la subcategoría $\mathbf{TdGpd}_{\text{obj}(\mathcal{G})}$, cuyos objetos son grupoïdes totalmente desconexos que tienen como conjunto de objetos al conjunto $\text{obj}(\mathcal{G})$ y cuyas flechas son funtores que son la identidad sobre objetos. Dicho functor de olvido no sólo conserva, sino que además refleja el objeto cero y por tanto también los morfismos cero. Es decir, sólo un objeto cero es aplicado a un objeto cero y \widehat{f} es un morfismo cero si y sólo si, f es un morfismo cero. Como consecuencia, dicho functor también refleja complejos de cadenas, es decir, un diagrama

$$\dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots$$

en $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ es un complejo de cadenas si y sólo si su imagen por el functor $\widehat{(\)}$,

$$\dots \rightarrow \widehat{C}_n \rightarrow \widehat{C}_{n-1} \rightarrow \dots$$

es un complejo de cadenas en $\mathbf{TdGpd}_{\text{obj}(\mathcal{G})}$.

Recordemos también que el funtor “grupo de endomorfismos”

$$\text{End}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gp}$$

es un tipo especial de \mathcal{G} -grupo. Éste asocia a cada objeto x en \mathcal{G} el grupo de endomorfismo en \mathcal{G} de x , $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$, y a cada flecha $x \xrightarrow{f} y$ el morfismo de grupos dado por conjugación, es decir,

$$\text{End}_{\mathcal{G}}(f)(u) = fuf^{-1},$$

para cada $u \in \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$. Su grupoide totalmente desconexo es la subcategoría

$$\mathbf{End}(\mathcal{G}) = \widehat{\text{End}}_{\mathcal{G}}$$

de \mathcal{G} que consta de todos los endomorfismos de \mathcal{G} , ver página 6. Otro \mathcal{G} -grupo importante es el objeto cero en $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$, que lo hemos denotado por $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ y viene dado por el funtor constante cero $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gp}$, siendo su grupoide totalmente desconexo $\widehat{\mathbf{0}}_{\mathcal{G}}$, el grupoide discreto sobre $\text{obj}(\mathcal{G})$, ver página 7.

Definición 3.1.1. *Un \mathcal{G} -pre-módulo cruzado, es un par (C, δ) donde C es un \mathcal{G} -grupo y $\delta : C \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$ es una transformación natural (llamada morfismo de conexión).*

La categoría $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ de pre-módulos cruzados sobre un grupoide fijo \mathcal{G} es la coma categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}/\text{End}_{\mathcal{G}}$. Según esto, los morfismos de \mathcal{G} -pre-módulos cruzados son las transformaciones naturales compatibles con los morfismos de conexión, es decir, un morfismo en esta categoría de $\delta^1 : C_1 \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$ en $\delta^2 : C_2 \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$ es una transformación natural $\tau : C_1 \rightarrow C_2$, de forma que para cada objeto x en \mathcal{G} , $\delta_x^2 \tau_x = \delta_x^1$, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C_1(x) & \xrightarrow{\tau_x} & C_2(x) \\ & \searrow \delta_x^1 & \swarrow \delta_x^2 \\ & \text{End}_{\mathcal{G}}(x) & \end{array}$$

Un pre-módulo cruzado (C, δ) se dice que es *abeliano* si C es abeliano como \mathcal{G} -grupo, es decir, si C es un \mathcal{G} -módulo (esto es, un funtor $C : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ a la categoría de grupos abelianos).

Nota 3.1.2. *Aplicando el funtor olvido $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\widehat{()}} \mathbf{TdGpd}_{\text{obj}(\mathcal{G})}$ a la transformación natural $\delta : C \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$, obtenemos un funtor $\widehat{\delta} : \widehat{C} \rightarrow \mathbf{End}(\mathcal{G})$ en $\mathbf{TdGpd}_{\text{obj}(\mathcal{G})}$, que es equivalente a un funtor $\widehat{C} \rightarrow \mathcal{G}$ debido a que \widehat{C} es totalmente desconexo. Recíprocamente, cada funtor $\widehat{C} \rightarrow \mathcal{G}$ que es la identidad sobre objetos y tiene*

la propiedad de “preservar la acción” (condición expresada mediante la ecuación $\delta(tu) = t\delta(u)t^{-1}$), nos define un pre-módulo cruzado sobre \mathcal{G} . Esta última es la definición clásica de pre-módulo cruzado (para el caso punteado se puede ver en [16]).

Nota 3.1.3. Como ocurre con toda coma categoría de una categoría con productos, el funtor olvido de $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ a $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$, tiene un adjunto derecha. Este adjunto lleva el objeto cero en $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$, $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, al objeto final de $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ que denotaremos por $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ y que está dado por el par $(\text{End}_{\mathcal{G}}, \text{Id}_{\text{End}_{\mathcal{G}}})$, donde $\text{Id}_{\text{End}_{\mathcal{G}}}$ es la transformación natural identidad $\text{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$. Este objeto final en $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ será el objeto al que nos referiremos cuando consideremos a $\text{End}_{\mathcal{G}}$ como un pre-módulo cruzado. Por otra parte, cada \mathcal{G} -grupo $C \in \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ tiene una estructura de pre-módulo cruzado “trivial” sobre \mathcal{G} dada por la transformación natural cero $C \xrightarrow{0} \text{End}_{\mathcal{G}}$ (para cada objeto x de \mathcal{G} el morfismo de grupos $0_x : C(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ está definido por $0_x(u) = \text{Id}_x$, para todo $u \in C(x)$). Ésto define un funtor

$$\text{zero} : \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$$

que tiene un adjunto derecha

$$\text{ker} : \mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$$

definido sobre objetos por $\text{ker}(C, \delta)(x) = \text{ker}(\delta_x)$ y sobre flechas por restricción. Es evidente que el objeto inicial en $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ es $\text{zero}(\mathbf{0}_{\mathcal{G}}) = (\mathbf{0}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{0} \text{End}_{\mathcal{G}})$. Este objeto, que denotaremos también por $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, es el pre-módulo cruzado dado por el par $(\mathbf{0}_{\mathcal{G}}, 0)$ y no es igual al objeto final $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$, excepto cuando \mathcal{G} es un grupoide discreto, esto es, un conjunto. De aquí deducimos que en general la categoría $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ no tiene objeto cero.

La categoría de \mathcal{G} -pre-módulos cruzados es muy semejante a la categoría de módulos sobre un anillo. De hecho, aunque la categoría de \mathcal{G} -pre-módulos cruzados se puede ver como la coma categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}/\text{End}_{\mathcal{G}}$, podemos considerar morfismos de “cambio de escalares” (funtores entre grupoides) para definir morfismos de un \mathcal{G} -pre-módulo cruzado a un \mathcal{H} -pre-módulo cruzado. De esta forma podemos definir un pre-módulo cruzado como una terna (\mathcal{G}, C, δ) donde \mathcal{G} es un grupoide (el *grupoide base*), y (C, δ) es un \mathcal{G} -pre-módulo cruzado. Si $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ y $\mathcal{C}' = (\mathcal{G}', C', \delta')$ son pre-módulos cruzados, un *morfismo de pre-módulos cruzados* de \mathcal{C} en \mathcal{C}' es un par (F, α) donde $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ es un funtor (funtor cambio de base) y $\alpha : C \rightarrow C'F$ es una transformación natural, tal que

$$(\delta' \circ F) \alpha = \tilde{F} \delta, \quad (3.1)$$

donde \tilde{F} es el funtor F visto como una transformación natural de $\text{End}_{\mathcal{G}}$ a $\text{End}_{\mathcal{G}'}F$,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & C'F \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta' \circ F \\ \text{End}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{End}_{\mathcal{G}'}F. \end{array}$$

Si especificamos la acción de un elemento $u \in C(x)$ para algún objeto x en \mathcal{G} , la condición (3.1) dice

$$F(\delta_x(u)) = \delta'_{F(x)}(\alpha_x(u)). \quad (3.2)$$

Estos morfismos (F, α) son las flechas de la categoría de todos los pre-módulos cruzados, que denotamos por \mathbf{Pxm} . Claramente las subcategorías $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}} = \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}/\text{End}_{\mathcal{G}}$ de “pre-módulos cruzados sobre \mathcal{G} ” no son subcategorías plenas de \mathbf{Pxm} .

Por un pre-módulo cruzado reducido entendemos uno en el cual el grupoide base es un grupo.

La siguiente proposición nos proporciona la definición del grupoide fundamental de un pre-módulo cruzado.

Proposición 3.1.4. *La categoría $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ es la fibra en \mathcal{G} de la fibración “grupoide base de un pre-módulo cruzado”,*

$$\text{base} : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{Gpd}.$$

Este funtor tiene adjuntos izquierda y derecha, $\text{discr} \dashv \text{base} \dashv \text{codiscr}$, que asocian a cada grupoide respectivamente el objeto inicial y el objeto terminal en la fibra correspondiente. Además el adjunto izquierda discr tiene a su vez un adjunto izquierda llamado el funtor “grupoide fundamental” $\pi_1 \dashv \text{discr}$.

Demostración: En primer lugar, veamos que el funtor base es una fibración.

Dado un pre-módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ y un funtor $F : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$ hemos de encontrar un morfismo $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ en \mathbf{Pxm} cuya imagen por base sea F . Construimos entonces un pre-módulo cruzado $\mathcal{C}' = (\mathcal{G}', C', \delta')$, definiendo $C' : \mathcal{G}' \rightarrow \mathbf{Gp}$ como el funtor que a cada objeto x en \mathcal{G}' le asocia el pullback de grupos:

$$\begin{array}{ccc} C'(x) & \xrightarrow{\alpha_x} & CF(x) \\ \delta'_x \downarrow & & \downarrow \delta_{F(x)} \\ \text{End}_{\mathcal{G}'}(x) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{End}_{\mathcal{G}}(F(x)) \end{array}$$

siendo claro como C' actúa sobre flechas. La transformación natural $\delta' : C' \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}'}$ asocia a cada objeto x en \mathcal{G}' la proyección canónica $\delta'_x : C'(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}'}(x)$

del pullback a la primera componente. De esta forma el par (F, α) , donde $\alpha_x : C'(x) \rightarrow CF(x)$ es la proyección del pullback a la segunda componente, determina un morfismo de pre-módulos cruzados $(F, \alpha) : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$.

Hemos de probar ahora que este morfismo es cartesiano sobre el funtor **base**. Supongamos entonces un morfismo $(F', \alpha') : (\mathcal{G}'', C'', \delta'') \rightarrow (\mathcal{G}, C, \delta)$ en **Pxm** tal que su imagen por el funtor **base**, $F' : \mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{G}$, se factoriza a través de F ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}'' & \xrightarrow{F'} & \mathcal{G} \\ & \searrow^{F''} & \nearrow^F \\ & \mathcal{G}' & \end{array}, \quad F' = F F''.$$

Entonces claramente sólo tenemos una forma de definir una factorización de (F', α') a través de (F, α) , que viene dada por $(F', \alpha') = (F, \alpha)(F'', \alpha'')$, donde $\alpha'' : C'' \rightarrow C'F''$ es la transformación natural que asocia a cada objeto x en \mathcal{G}'' la única flecha α''_x tal que $\alpha'_x = \alpha_{F''(x)}\alpha''_x$ y $\delta'_{F''(x)}\alpha''_x = \tilde{F}''\delta''_x$, definida por la propiedad universal del pullback:

$$\begin{array}{ccccc} C''(x) & & & & \\ & \searrow^{\alpha''_x} & & \searrow^{\alpha'_x} & \\ & & C'F''(x) & \xrightarrow{\alpha_{F''(x)}} & CF'(x) \\ & \searrow^{\tilde{F}''\delta''_x} & \downarrow^{\delta'_{F''(x)}} & & \downarrow^{\delta_{F'(x)}} \\ & & \text{End}_{\mathcal{G}'}(F''(x)) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{End}_{\mathcal{G}}(F'(x)). \end{array}$$

Con esto se tiene que **base** es una fibración.

Además claramente se tiene que el funtor **discr** que asocia a cada grupoide \mathcal{G} el pre-módulo cruzado inicial $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ es adjunto izquierda del funtor **base**, ya que para cada grupoide \mathcal{G} , el funtor identidad en \mathcal{G} es universal desde \mathcal{G} al funtor **base** y el funtor **codiscr**, que asocia a cada grupoide \mathcal{G} el pre-módulo cruzado terminal $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$, es adjunto derecha del funtor **base**, pues para cada pre-módulo cruzado (\mathcal{G}, C, δ) , el morfismo de pre-módulos cruzados dado por el par $(Id_{\mathcal{G}}, \delta)$ es universal desde (\mathcal{G}, C, δ) al funtor **codiscr**.

Para la última afirmación observamos que el grupoide fundamental de un pre-módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ se calcula como el coigualador de grupoides:

$$\widehat{\mathcal{C}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\widehat{\delta}} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \pi_1(\mathcal{C}).$$

Nótese que todos los funtores del diagrama anterior son la identidad en objetos. De esta forma, el grupoide fundamental define un funtor $\pi_1 : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ que es adjunto izquierda del funtor **discr**, pues dado un pre-módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$, el morfismo de pre-módulos cruzados dado por el par $(q, 0)$ donde 0 es la única transformación natural de C en $\mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})}$ es universal desde \mathcal{C} al funtor **discr**. ■

En la bibliografía clásica (ver [12], [10]) se dice que un *módulo cruzado sobre un grupoide* \mathcal{G} o un \mathcal{G} -*módulo cruzado* viene dado por:

1. Un grupoide totalmente desconexo \mathbf{C} , con los mismos objetos que \mathcal{G} ,
2. una acción de \mathcal{G} sobre \mathbf{C} , de forma que para cada $u \in C(x) = \text{End}_{\mathbf{C}}(x)$ y para cada morfismo $x \xrightarrow{f} y$ en \mathcal{G} se tiene que ${}^f u \in C(y) = \text{End}_{\mathbf{C}}(y)$,
3. un morfismo de grupoides $\delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{G}$ que es la identidad sobre objetos y que preserva la acción de \mathcal{G} , donde \mathcal{G} actúa sobre cada $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ por conjugación, es decir, en términos de elementos δ es un funtor que satisface:

$$\delta({}^t u) = t\delta(u)t^{-1}, \quad (3.3)$$

para cada $u \in C(x)$ y cada flecha $t : x \rightarrow y$ de \mathcal{G} .

Estos datos han de satisfacer además la siguiente condición, conocida como *identidad de Peiffer*: Para todo $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y para todo $u, v \in C(x)$ se tiene

$$\delta_x(u)v = uvu^{-1}. \quad (3.4)$$

Usando la definición que aquí hemos dado de pre-módulo cruzado podemos compactar esta definición y obtenemos:

Definición 3.1.5. *Un módulo cruzado es un pre-módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ que además cumple la siguiente identidad:*

Identidad de Peiffer: *El siguiente diagrama de funtores conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\text{End}_{\widehat{\mathcal{C}}}} & \mathbf{Gp} \\ \searrow \widehat{\delta} & & \nearrow C \\ & \mathcal{G} & \end{array}, \quad C\widehat{\delta} = \text{End}_{\widehat{\mathcal{C}}}. \quad (3.5)$$

La categoría de módulos cruzados, que denotaremos por \mathbf{Xm} , es la correspondiente subcategoría plena de la categoría de pre-módulos cruzados.

La categoría de módulos cruzados sobre un grupoide \mathcal{G} (o \mathcal{G} -módulos cruzados), que denotamos por $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$, es la correspondiente subcategoría plena de la de pre-módulos cruzados sobre \mathcal{G} . Estas subcategorías de módulos cruzados $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ sobre un grupoide fijo serán las que jueguen un papel fundamental en la definición de complejos cruzados (ver Sección 3.2). Notemos que los objetos inicial y final en $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$, $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ siguen siendo los objetos inicial y final en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$.

Nota 3.1.6. Dados $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ y $\mathcal{C}' = (\mathcal{G}, C', \delta')$ dos \mathcal{G} -módulos cruzados y un morfismo de \mathcal{G} -módulos cruzados $\partial : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, la terna $(\widehat{C}, C'\widehat{\delta}, \partial)$ es un \widehat{C} -módulo cruzado, donde $C'\widehat{\delta}$ es el \widehat{C} -grupo dado por el funtor composición

$$\widehat{C} \xrightarrow{\widehat{\delta}} \mathbf{End}_{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{C'} \mathbf{Gp}$$

y $\partial : C'\widehat{\delta} \rightarrow \mathbf{End}_{\widehat{C}}$ es la transformación natural que asocia a cada objeto x el morfismo $\partial_x : C'(x) \rightarrow C(x)$. La asociación $\partial \mapsto (\widehat{C}, C'\widehat{\delta}, \partial)$ es funtorial de forma que tenemos un funtor

$$\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}/\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Xm}_{\widehat{C}} \quad (3.6)$$

que usaremos en secciones posteriores.

Nota 3.1.7. Como consecuencia de la identidad de Peiffer (3.4) o (3.5), en un módulo cruzado (\mathcal{G}, C, δ) , el núcleo de cada morfismo δ_x es centralizador, es decir, está contenido en el centro de su dominio, $C(x)$, ya que dados $u \in \ker(\delta_x)$ y $v \in C(x)$, se tiene

$$v = \delta_x(u)v = uvu^{-1}.$$

Este hecho tiene tres consecuencias importantes:

- (1) Para un \mathcal{G} -grupo C , el pre-módulo cruzado $\mathbf{zero}(C) = (C \xrightarrow{0} \mathbf{End}_{\mathcal{G}})$ es un módulo cruzado si y sólo si, $C(x)$ es un grupo abeliano para todo $x \in \mathbf{obj}(\mathcal{G})$, esto es, C es un \mathcal{G} -módulo.
- (2) El núcleo de δ (visto como una flecha en la categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$) es un funtor cuyas imágenes caen en la categoría \mathbf{Ab} de grupos abelianos, es decir, es un \mathcal{G} -módulo. Por la observación previa se tiene entonces que $\mathbf{zero}(\ker(\delta)) = (\ker(\delta), 0)$ es un \mathcal{G} -módulo cruzado. Notemos que este módulo cruzado es precisamente el núcleo de δ como aplicación de $(C, \delta) \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ (la única aplicación al objeto final). Ésto nos proporciona el siguiente diagrama conmutativo entre pares adjuntos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{zero}} \\ \xrightarrow{\ker} \end{array} & \mathbf{Ab}^{\mathcal{G}} & \mathbf{zero} \dashv \ker \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{zero}} \\ \xrightarrow{\ker} \end{array} & \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}} & \mathbf{zero} \dashv \ker \end{array} \quad (3.7)$$

donde las flechas verticales son inclusiones plenas y las composiciones $\mathbf{zero} \dashv \ker$ son funtores idempotentes.

- (3) La acción de $\text{im}(\delta)$ sobre $\text{ker}(\delta)$ es trivial, es decir, el funtor $\text{ker}(\delta)$ lleva cada flecha en \mathcal{G} de la forma $\delta_x(u)$ al endomorfismo identidad del grupo $\text{ker}(\delta_x)$, para cada objeto x de \mathcal{G} . Dicho de otro modo, la composición

$$\widehat{C} \xrightarrow{\widehat{\delta}} \mathcal{G} \xrightarrow{\text{ker}(\delta)} \mathbf{Ab}$$

es trivial. Como consecuencia, y en vista de que $\text{ker}(\delta)$ es centralizador (ver página anterior), $\text{im}(\delta)$ es normal en \mathcal{G} (es decir, para cada $x \in \mathcal{G}$, $\text{im}(\delta_x)$ es un subgrupo normal de $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$) y por tanto el coigualador

$$\widehat{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\widehat{\delta}} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \pi_1(\mathcal{C})$$

viene dado por un grupoide cociente:

$$\pi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{G}/\text{im}(\widehat{\delta}),$$

ver también Lema 1.1.6.

Los adjuntos izquierda de los funtores plenos reflexivos $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} \leftrightarrow \mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$ se pueden unir (ver por ejemplo, [8], sec. 8.4) para darnos el adjunto izquierda del funtor inclusión $\mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Pxm}$, hecho que se usará mas tarde pero que recordamos aquí.

Proposición 3.1.8. *El funtor inclusión $\mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Pxm}$ tiene un adjunto izquierda, el funtor “módulo cruzado libre generado por un pre-módulo cruzado”.*

Demostración: En efecto, el funtor inclusión tiene como adjunto izquierda el funtor

$$G : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{Xm}$$

que asocia a un pre-módulo cruzado (\mathcal{G}, C, δ) el módulo cruzado

$$G(\mathcal{G}, C, \delta) = (\mathcal{G}, \overline{C}, \overline{\delta}),$$

donde \overline{C} es el \mathcal{G} -grupo definido sobre objetos x en \mathcal{G} como el cociente

$$\overline{C}(x) = C(x)/S_x,$$

siendo S_x el subgrupo de $C(x)$ generado por los elementos de la forma

$$\{u, v\} = \delta^{(u)} v u v^{-1} u^{-1}, \quad u, v \in C(x).$$

Notemos que S_x es un subgrupo normal, ya que dado $\{u, v\} \in S_x$ y dado $w \in C(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} w^{-1}\{u, v\}w &= w^{-1}(\delta^{(u)}vuv^{-1}u^{-1})w \\ &= w^{-1}\delta^{(u)}vw(\delta^{(w^{-1})}(\delta^{(u)}v))^{-1}\delta^{(w^{-1}u)}vw^{-1}uv^{-1}u^{-1}w \\ &= (\delta^{(w^{-1})}(\delta^{(u)}v)w^{-1}(\delta^{(u)}v)^{-1}w)^{-1}(\delta^{(w^{-1}u)}vw^{-1}uv^{-1}u^{-1}w) \\ &= \{w^{-1}, \delta^{(u)}v\}^{-1}\{w^{-1}u, v\} \in S_x. \end{aligned}$$

Por otro lado es claro que, para cada flecha $x \xrightarrow{t} y$ en \mathcal{G} , el morfismo de grupos $C(t) : C(x) \rightarrow C(y)$ lleva los generadores $\{u, v\}$ de S_x en generadores de S_y ,

$$\begin{aligned} C(t)\{u, v\} &= {}^t\{u, v\} = {}^t(\delta^{(u)}vuv^{-1}u^{-1}) = {}^{t\delta^{(u)}v}{}^t u {}^t(v^{-1}) {}^t(u^{-1}) \\ &= {}^{t\delta^{(u)}t^{-1}t}{}^t v {}^t u ({}^t v)^{-1} ({}^t u)^{-1} = \delta^{({}^t u)}({}^t v) {}^t u ({}^t v)^{-1} ({}^t u)^{-1} = \{{}^t u, {}^t v\}, \end{aligned}$$

por tanto induce un morfismo de grupos $\overline{C}(t) : \overline{C}(x) \rightarrow \overline{C}(y)$,

$$\begin{array}{ccccc} S_x \hookrightarrow & C(x) & \twoheadrightarrow & C(x)/S_x = \overline{C}(x) \\ \downarrow & \downarrow C(t) & & \downarrow \overline{C}(t) \\ S_y \hookrightarrow & C(y) & \twoheadrightarrow & C(y)/S_y = \overline{C}(y). \end{array}$$

De esta forma \overline{C} es un nuevo \mathcal{G} -grupo.

Además la componente de la transformación natural δ en cada objeto $x \in \mathcal{G}$ lleva los generadores de S_x en la identidad en x ,

$$\begin{aligned} \delta_x\{u, v\} &= \delta_x(\delta^{(u)}vuv^{-1}u^{-1}) = \delta_x(\delta^{(u)}v)\delta_x(u)\delta_x(v)^{-1}\delta_x(u)^{-1} \\ &= \delta_x(u)\delta_x(v)\delta_x(u)^{-1}\delta_x(u)\delta_x(v)^{-1}\delta_x(u)^{-1} = Id_x. \end{aligned}$$

Por tanto induce un único morfismo de grupos $\overline{\delta}_x : \overline{C}(x) \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}}(x)$,

$$\begin{array}{ccccc} S_x \hookrightarrow & C(x) & \twoheadrightarrow & C(x)/S_x = \overline{C}(x) \\ & \searrow 0 & \downarrow \delta_x & \swarrow \overline{\delta}_x \\ & & \mathbf{End}_{\mathcal{G}}(x) & \end{array}$$

Que, debido a la unicidad, induce una transformación natural $\overline{\delta} : \overline{C} \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}}$. Es fácil comprobar que $G(\mathcal{G}, C, \delta) = (\mathcal{G}, \overline{C}, \overline{\delta})$ cumple los axiomas de módulo cruzado.

Supongamos ahora un morfismo $(F, \alpha) : (\mathcal{G}, C_1, \delta^1) \rightarrow (\mathcal{G}', C_2, \delta^2)$ en la categoría \mathbf{Pxm} . Entonces, para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ el morfismo $\alpha_x : C_1(x) \rightarrow C_2F(x)$

lleva los generadores de S_x en generadores de $S_{F(x)}$,

$$\begin{aligned}\alpha_x\{u, v\} &= \alpha_x(\delta_x^1(u)vv^{-1}u^{-1}) = \alpha_x(\delta_x^1(u)v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} \\ &= F\delta_x^1(u)\alpha_x(v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} \\ &= \delta_{F(x)}^2(\alpha_x(u))\alpha_x(v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} = \{\alpha_x(u), \alpha_x(v)\},\end{aligned}$$

y por tanto induce un morfismo (único) $\bar{\alpha} : \bar{C}_1(x) \rightarrow \bar{C}_2F(x)$,

$$\begin{array}{ccccc} S_x & \hookrightarrow & C_1(x) & \twoheadrightarrow & C_1(x)/S_x = \bar{C}_1(x) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha_x & & \downarrow \bar{\alpha}_x \\ S_{F(x)} & \hookrightarrow & C_2F(x) & \twoheadrightarrow & C_2F(x)/S_{F(x)} = \bar{C}_2F(x) . \end{array}$$

La unicidad en la existencia de este morfismo hace que la correspondencia $x \mapsto \bar{\alpha}_x$ sea natural de manera que

$$G(F, \alpha) = (F, \bar{\alpha}) : G(\mathcal{G}, C_1, \delta^1) \rightarrow G(\mathcal{G}', C_2, \delta^2)$$

es un morfismo de módulos cruzados.

Notamos ahora que la proyección canónica $C(x) \rightarrow \bar{C}(x) = C(x)/S_x$ es natural en x y nos determina un morfismo de pre-módulos cruzados

$$\eta_C : (\mathcal{G}, C, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}, \bar{C}, \bar{\delta}),$$

que es la identidad a nivel del grupoide base y que tiene la siguiente propiedad universal:

Dado un módulo cruzado $(\mathcal{G}', C', \delta')$ y un morfismo de pre-módulos cruzados

$$(F, \alpha) : (\mathcal{G}, C, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}', C', \delta')$$

existe un único morfismo de módulos cruzados $(F, \alpha') : (\mathcal{G}, \bar{C}, \bar{\delta}) \rightarrow (\mathcal{G}', C', \delta')$ tal que el siguiente diagrama conmuta en **Pxm**:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, C, \delta) & \xrightarrow{\eta_C} & (\mathcal{G}, \bar{C}, \bar{\delta}) \\ & \searrow (F, \alpha) & \downarrow (F, \alpha') \\ & & (\mathcal{G}', C', \delta') . \end{array}$$

Nótese que, para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, el morfismo $\alpha_x : C(x) \rightarrow C'F(x)$ lleva generadores de S_x en cero,

$$\begin{aligned}\alpha_x\{u, v\} &= \alpha_x(\delta_x(u)vv^{-1}u^{-1}) = \alpha_x(\delta_x(u)v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} \\ &= F\delta_x(u)\alpha_x(v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} \\ &= \delta_{F(x)}'(\alpha_x(u))\alpha_x(v)\alpha_x(u)\alpha_x(v)^{-1}\alpha_x(u)^{-1} = 0 \in C'F(x),\end{aligned}$$

y por tanto induce un único morfismo $\alpha'_x : \overline{C}(x) \rightarrow C'F(x)$,

$$\begin{array}{ccccc}
 S_x & \hookrightarrow & C(x) & \twoheadrightarrow & C(x)/S_x = \overline{C}(x) \\
 & \searrow & \downarrow \alpha_x & \swarrow \alpha'_x & \\
 & & C'F(x) & &
 \end{array}$$

que es natural en x .

Esta propiedad universal nos muestra que este funtor G es adjunto izquierda del funtor inclusión. ■

Todo módulo cruzado se puede obtener como el *módulo cruzado asociado a un 2-grupoide* según la siguiente construcción funtorial. Recuérdese primero que la categoría de grupoïdes es isomorfa a la categoría de 1-hipergrupoïdes y que hemos denotado por $\mathbf{G1H}$ a la categoría de grupoïdes enriquecidos en 1-hipergrupoïdes o de forma equivalente la categoría de grupoïdes enriquecidos en grupoïdes o 2-grupoïdes. Se tiene entonces un funtor

$$\text{xm} : \mathbf{G1H} \longrightarrow \mathbf{Xm},$$

que está definido cómo sigue: dado un 2-grupoïde

$$\mathcal{G} : \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{id} \\ \xrightarrow[t]{s} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \mathcal{G}_0, \tag{3.8}$$

el funtor s es la identidad en objetos y por tanto el par (s, id) es una fibración plena escindida, podemos entonces considerar el funtor fibra (ver (1.39)) $N = N_{(s,id)} : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathbf{Gp}$. Este funtor asocia a cada objeto $x \in \mathcal{G}_0$ el subgrupo $N(x) \subseteq \text{End}_{\mathcal{G}_1}(x)$ formado por las flechas $u \in \mathcal{G}_1$ (deformaciones) con dominio $s(u)$ la identidad en x ,

$$u : Id_x \rightarrow t(u) \quad \text{gráficamente} \quad x \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_x} \\ \Downarrow u \\ \xrightarrow{t(u)} \end{array} x.$$

Definimos entonces $\text{xm}(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}_0, N, \delta)$, donde la transformación natural $\delta : N \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}$ está inducida por el funtor “codominio” t , esto es,

$$\delta_x : N(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}(x) ; u \mapsto t(u).$$

Además, esta transformación natural verifica la identidad de Peiffer, pues para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y para cada $u, v \in N(x)$ se tiene:

$$\delta_x(u)v = t(u)v = N(t(u))(v) = id(t(u))v id(t(u))^{-1} = uvu^{-1},$$

donde la última igualdad es consecuencia de la Proposición 1.1.5, ya que \mathcal{G} puede verse como un grupoide interno en $\mathbf{Gpd}_{\text{obj}(\mathcal{G}_0)}$ y por tanto el conmutador

$$[\ker(s), \ker(t)]$$

es trivial, pero si $u, v \in N(x)$, entonces $u, v \in \ker(s)$, además $u^{-1}id(t(u))$ es una flecha de $\ker(t)$, de donde

$$v(u^{-1}id(t(u))) = (u^{-1}id(t(u)))v$$

y de aquí

$$uvu^{-1} = id(t(u))v id(t(u))^{-1}$$

como queríamos.

Recíprocamente, dado un módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$, la construcción del producto semidirecto de Grothendieck nos determina un grupoide $\mathcal{G} \int C$ con los mismos objetos que \mathcal{G} (ya que C se factoriza por grupos). Además, la proyección canónica $s : \mathcal{G} \int C \rightarrow \mathcal{G}$ tiene una sección id que es la identidad en objetos y asocia a cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} la flecha $(f, 0_{C(y)})$, donde $0_{C(y)}$ es el elemento neutro del grupo $C(y)$. Este funtor id resulta ser también una sección para un segundo funtor $t : \mathcal{G} \int C \rightarrow \mathcal{G}$ que al igual que s es la identidad sobre objetos y está determinado por δ sobre morfismos mediante la fórmula

$$t(f, u) = \delta_y(u)f,$$

para cada flecha $x \xrightarrow{f} y$ en \mathcal{G} y cada $u \in C(y)$.

Estos funtores determinan un grafo $(\mathcal{G} \int C, \mathcal{G}, s, t, id)$ interno en $\mathbf{Gpd}_{\text{obj}(\mathcal{G})}$. De la condición de Peiffer se deduce inmediatamente que el conmutador $[\ker(s), \ker(t)]$ es trivial por lo que, aplicando de nuevo la Proposición 1.1.5, existe una única composición en el grafo anterior que lo dota de estructura de 2-grupoide. Denotaremos a éste por $2\text{gd}(\mathcal{C})$. Esta construcción es funtorial por lo que tenemos

$$2\text{gd} : \mathbf{Xm} \hookrightarrow \mathbf{G1H}. \quad (3.9)$$

Notemos que un par de flechas $((g, v), (f, u))$ es un par componible en $2\text{gd}(\mathcal{C})$ si $f, g : x \rightarrow y$, $u, v \in C(y)$ y $\delta_y(u)f = g$. Entonces el funtor composición

$$\circ : \mathcal{G} \int C \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G} \int C \rightarrow \mathcal{G} \int C$$

en $2\text{gd}(\mathcal{C})$ está dada por la fórmula:

$$\begin{aligned} (g, v) \circ (f, u) &= (g, v)id(s(g, v))^{-1}(f, u) = (g, v)(g^{-1}, 0_{C(x)})(f, u) \\ &= (g, v)(g^{-1}f, 0_{C(x)}C(g^{-1})(u)) = (g, v)(g^{-1}f, C(g^{-1})(u)) \\ &= (g(g^{-1}f), vC(g)(C(g)^{-1}(u))) = (f, vu). \end{aligned}$$

Además, la inversa para esta composición de una flecha (f, u) en $\mathcal{G} \int C$ viene dada por $(\delta_y(u)f, u^{-1})$.

Podemos ahora utilizar la Proposición 1.5.7 para probar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.9. *El funtor $xm : \mathbf{G1H} \rightarrow \mathbf{Xm}$ es una equivalencia de categorías, con quasi-inverso dado por el funtor $2gd$. Además, estos funtores se restringen a una equivalencia entre $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ y la subcategoría $\mathbf{G1H}_{\mathcal{G}}$ de $\mathbf{G1H}$ formada por los 2-grupoides que tiene a \mathcal{G} como grupoide de objetos y los funtores internos que son la identidad a nivel del grupoide de objetos.*

Demostración: Dado un 2-grupoide \mathcal{G} como (3.8), la Proposición 1.5.7 nos muestra la existencia de un isomorfismo $G : \mathcal{G}_0 \int N \rightarrow \mathcal{G}_1$, que es la identidad en objetos y en flechas está dado por $G(f, u) = uid(f)$. Es inmediato que el par $(G, Id_{\mathcal{G}_0})$ es un isomorfismo de grafos internos en grupoides y por tanto un isomorfismo de 2-grupoides. ■

Como corolario inmediato de las Proposiciones 3.1.9 y 2.4.4 tenemos

Corolario 3.1.10. *Las categorías \mathbf{Xm} de módulos cruzados y \mathbf{Gd}_2 de grupoides simpliciales con complejo de Moore trivial en dimensiones ≥ 2 son isomorfas.*

Definimos el *nervio de un módulo cruzado* $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$, como el nervio (2.7) del grupoide simplicial 2-dimensional asociado a \mathcal{C} según el Corolario 3.1.10. Esto es, el funtor nervio desde la categoría de módulos cruzados viene dado por la composición

$$\text{Ner} : \mathbf{Xm} \xrightarrow[\cong]{2gd} \mathbf{G1H} \xrightarrow[\cong]{\text{Ner}} \mathbf{Gd}_2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbf{Gd} \xrightarrow{\text{Ner}} \mathbf{SSet}.$$

Más concretamente, el nervio del módulo cruzado \mathcal{C} tiene la forma

$$\text{Ner}(\mathcal{C}) = \text{cosk}^3 \left(\begin{array}{ccccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_3} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & \text{obj}(\mathcal{G}) \\ \text{Ner}_3(\mathcal{C}) & \xrightarrow{d_0} & \text{Ner}_2(\mathcal{C}) & \xrightarrow{d_0} & \text{arr}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{d_0} & \text{obj}(\mathcal{G}) \end{array} \right),$$

donde $\text{Ner}_2(\mathcal{C})$ es el pullback del diagrama $\text{arr}(\mathcal{G} \int C) \xrightarrow{t} \text{obj}(\mathcal{G}) \xleftarrow{s} \text{arr}(\mathcal{G})$, es decir, un 2-símplice es un par de flechas

$$x_0 \xrightarrow{(f_1, u)} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2,$$

donde (f_1, u) es un flecha de $\mathcal{G} \int C$ y f_2 es una flecha de \mathcal{G} . Ahora bien, podemos notar que dar el par de flechas $((f_1, u), f_2)$ es equivalente a dar el par $((f_1, v), f_2)$ con $v = f_1^{-1}u$ y de esta forma podemos identificar $\text{Ner}_2(\mathcal{C})$ con el conjunto de pares (ξ, v) con $\xi \in \text{Ner}_2(\mathcal{G})$ y $v \in C(x_0 = d_1 d_2(\xi))$.

Los operadores cara y degeneración en dimensión dos, y teniendo en cuenta la identificación anterior, vienen dados por:

$$\begin{aligned}
d_0(\xi, v) &= d_0((f_1, f_1 v), f_2) = f_2 = d_0(\xi), \\
d_1(\xi, v) &= d_1((f_1, f_1 v), f_2) = f_2 d_0(f_1, f_1 v) = f_2 \delta_{x_1}(f_1 v) f_1 \\
&= f_2 (f_1 \delta_{x_0}(v) f_1^{-1}) f_1 = f_2 f_1 \delta_{x_0}(v) = d_1(\xi) \delta_{x_0}(v), \\
d_2(\xi, v) &= d_2((f_1, f_1 v), f_2) = d_1(f_1, f_1 v) = f_1 = d_2(\xi), \\
s_0(f_0) &= (Id_{s_0(f_0)}, f_0) = ((Id_{x_0}, 0_{C(x_0)}), f_0) = (s_0(f_0), 0_{C(x_0)}), \\
s_1(f_0) &= (s_0(f_0), Id_{t(f_0)}) = ((f_0, 0_{C(x_1)}), Id_{x_1}) = ((f_0, 0_{C(x_0)}), Id_{x_1}) \\
&= (s_1(f_0), 0_{C(x_0)}).
\end{aligned}$$

De igual forma, un 3-símplice es una terna de flechas

$$x_0 \xrightarrow{\phi_1} x_1 \xrightarrow{(f_2, u_2)} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3,$$

donde $\phi_1 = ((f_1, u_0), (\delta_{x_1}(u_0)f_1, u_1))$ es una flecha del grupoide $\mathcal{G}fC \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}fC$, (f_2, u_2) es una flecha de $\mathcal{G}fC$ y f_3 es una flecha de \mathcal{G} , es decir, $\text{Ner}_3(\mathcal{C})$ es el conjunto

$$\text{arr}(\mathcal{G}fC \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G}fC) \times_{\text{obj}(\mathcal{G})} \text{arr}(\mathcal{G}fC) \times_{\text{obj}(\mathcal{G})} \text{arr}(\mathcal{G}).$$

Ahora bien, igual que antes podemos notar que dar la terna

$$(((f_1, u_0), (\delta_{x_1}(u_0)f_1, u_1)), (f_2, u_2), f_3)$$

es equivalente a dar un par (ξ, α) donde $\xi \in \text{Ner}_3(\mathcal{G})$ y $\alpha = (v_0, v_1, v_2) \in C(x_0 = d_1 d_2 d_3(\xi))^3$ siendo

$$\xi = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \xrightarrow{f_3} x_3 \in \text{Ner}_3(\mathcal{G})$$

y

$$\alpha = (f_1^{-1} u_0, f_1^{-1} u_1, (f_2 f_1)^{-1} u_2) \in C(x_0)^3.$$

En esta dimensión las caras $d_i : \text{Ner}_3(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ner}_2(\mathcal{C})$ vienen dadas para cada elemento (ξ, α) en $\text{Ner}_3(\mathcal{C})$ mediante:

$$\begin{aligned} d_0(\xi, \alpha) &= d_0((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1), (f_2, f^2 f^1 v_2), f_3) = ((f_2, f^2 f^1 v_2), f_3) \\ &= (d_0(\xi), f_2^{-1} f^2 f^1 v_2) = (d_0(\xi), f^1 v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1(\xi, \alpha) &= d_1((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1), (f_2, f^2 f^1 v_2), f_3) \\ &= ((f_2, f^2 f^1 v_2) d_0((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1)), f_3) \\ &= ((f_2 \delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^2 f^1 v_2 f^2(f^1 v_1)), f_3) = ((f_2 f_1 \delta_{x_0}(v_0), f^2 f^1(v_2 v_1)), f_3) \\ &= (d_1(\xi) \delta_{x_0}(v_0), (f_2 f_1 \delta_{x_0}(v_0))^{-1} (f^2 f^1(v_2 v_1))) \\ &= (d_1(\xi) \delta_{x_0}(v_0), \delta_{x_0}(v_0^{-1})(v_2 v_1)) = (d_1(\xi) \delta_{x_0}(v_0), v_0^{-1} v_2 v_1 v_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2(\xi, \alpha) &= d_2((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1), (f_2, f^2 f^1 v_2), f_3) \\ &= (d_1((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1)), f_3 d_0(f_2, f^2 f^1 v_2)) \\ &= ((f_1, f^1 v_0 f^1 v_1), f_3 \delta_{x_2}(f^2 f^1 v_2) f_2) = ((f_1, f^1(v_0 v_1)), f_3 f_2 \delta_{x_1}(f^1 v_2)) \\ &= (\delta_{x_3}(f^1 v_2) d_2(\xi), f_1^{-1}(f^1(v_0 v_1))) = (\delta_{x_3}(f^1 v_2) d_2(\xi), v_0 v_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3(\xi, \alpha) &= (d_2((f_1, f^1 v_0), (\delta_{x_1}(f^1 v_0) f_1, f^1 v_1)), d_1(f_2, f^2 f^1 v_2)) = ((f_1, f^1 v_0), f_2) \\ &= (d_3(\xi), f_1^{-1}(f^1 v_0)) = (d_3(\xi), v_0), \end{aligned}$$

y las degeneraciones $s_j : \text{Ner}_2(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ner}_3(\mathcal{C})$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} s_0(\xi, v) &= s_0((f_1, f^1 v), f_2) = (((Id_{x_0}, 0_{C(x_0)}), (Id_{x_0}, 0_{C(x_0)})), (f_1, f^1 v), f_2) \\ &= (s_0(\xi), (0_{C(x_0)}, 0_{C(x_0)}, v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1(\xi, v) &= s_1((f_1, f^1 v), f_2) = (((f_1, 0_{C(x_0)}), (f_1, f^1 v)), (Id_{x_1}, 0_{C(x_1)}), f_2) \\ &= (s_1(\xi), (0_{C(x_0)}, v, 0_{C(x_0)})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(\xi, v) &= s_2((f_1, f^1 v), f_2) = (((f_1, f^1 v), (\delta_{x_1}(u) f_1, 0_{C(x_1)})), (f_2, 0_{C(x_2)}), Id_{x_2}) \\ &= (s_2(\xi), (v, 0_{C(x_0)}, 0_{C(x_0)})). \end{aligned}$$

Para $n > 3$, cada n -símplice de $\text{Ner}(\mathcal{C})$ está unívocamente determinado por sus caras pues a partir de esta dimensión $\text{Ner}_n(\mathcal{C})$ está dado por núcleos simpliciales.

Nota 3.1.11. Dado un \mathcal{G} -módulo Π , si tomamos el módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, \Pi, 0)$ es fácil observar que los conjuntos simpliciales $\text{Ner}(\mathcal{C})$ y $L_{\mathcal{G}}(\Pi, 2)$ son isomorfos y este isomorfismo $\mathbf{f} : \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, 2)$ viene dado por la identidad en dimensiones menores a 3 y en dimensión 3 viene dado por:

$$f_3 : \text{Ner}_3(\mathcal{C}) \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, 2)_3, f_3(\xi, v_0, v_1, v_2) = (\xi, v_2, v_2 v_1, v_0 v_1)$$

siendo su inverso el morfismo simplicial \mathbf{g} que viene dado por la identidad en dimensiones menores a 3 y en dimensión 3 por:

$$g_3 : L_{\mathcal{G}}(\Pi, 2)_3 \rightarrow \text{Ner}_3(\mathcal{C}), g_3(\xi, a_0, a_1, a_2) = (\xi, a_0 a_1^{-1} a_2, a_0^{-1} a_1, a_0).$$

Notemos además que este isomorfismo es compatible con las proyecciones canónicas al $\text{Ner}(\mathcal{G})$, esto es, el triángulo

$$\begin{array}{ccc} \text{Ner}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbf{f}} & L_{\mathcal{G}}(\Pi, 2) \\ & \searrow & \swarrow \ell \\ & \text{Ner}(\mathcal{G}) & \end{array}$$

es conmutativo, o equivalentemente \mathbf{f} es un morfismo en la categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$, donde el morfismo $\text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ es inducido por el morfismo cero $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ (nótese que $\text{Ner}(\mathbf{0}_{\mathcal{G}}) = \text{Ner}(\mathcal{G})$).

La categoría de módulos cruzados está relacionada con la categoría de grupoides de forma similar a como la categoría de grupoides está relacionada con la categoría de conjuntos. Recuérdese que existe una fibración de categorías

$$\text{obj} : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Set},$$

“conjunto de objetos”, que tiene tanto adjunto por la izquierda como por la derecha

$$\text{discr} \dashv \text{obj} \dashv \text{codiscr},$$

donde el adjunto izquierda, discr , además tiene un adjunto izquierda, π_0 (“conjunto de componentes conexas”)

$$\pi_0 \dashv \text{discr}.$$

De forma similar, existe una fibración de categorías

$$\text{base} : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Gpd}, \tag{3.10}$$

“grupoide base”, la cual tiene tanto adjunto a la izquierda como a la derecha

$$\text{discr} \dashv \text{base} \dashv \text{triv}$$

dados por $\text{discr}(\mathcal{G}) = \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ y $\text{triv}(\mathcal{G}) = \mathbf{1}_{\mathcal{G}}$, por tanto base conserva tanto límites como colímites. En este caso de nuevo se verifica que el adjunto por la izquierda también tiene un adjunto izquierda,

$$\pi_1 \dashv \text{discr},$$

“grupoide fundamental”, que calculamos más abajo.

Primero definamos el *conjunto de componentes conexas de un módulo cruzado*, éste viene dado a partir del correspondiente concepto para grupoides, de hecho $\pi_0 : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Set}$ es el functor composición π_0 base, es decir, el *conjunto de componentes conexas de un módulo cruzado* se obtiene calculando el conjunto de componentes conexas de su grupoide base, así para un módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ se tiene

$$\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathcal{G}).$$

Para calcular el functor *grupoide fundamental*

$$\pi_1 : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Gpd},$$

dado un módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$, consideramos el functor composición

$$\widehat{\delta} : \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{\delta}} \mathbf{End}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{G}$$

inducido por la transformación natural δ (ver 3.1.2). Al definir π_1 como adjunto izquierda a discr se está diciendo que dar un functor $\pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{G}'$ es lo mismo que dar un morfismo de módulos cruzados $\mathcal{C}' \rightarrow \text{discr}(\mathcal{G}')$ que es equivalente a dar un functor $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ tal que $f\widehat{\delta} = 0$. Ésto, a su vez, nos dice que $\pi_1(\mathcal{C})$ (junto a la unidad de la adjunción, $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$) es el coigualador de los funtores $\widehat{\delta}$ y “0” (véase la parte horizontal del diagrama (3.11)), donde 0 denota al functor trivial que es la identidad sobre objetos y lleva cada flecha a una identidad. Así pues, $\pi_1(\mathcal{C})$ es el grupoide cociente

$$\pi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{G}/\text{im}(\widehat{\delta}).$$

De hecho, los objetos de $\pi_1(\mathcal{C})$ son los mismos que los de \mathcal{G} , la proyección canónica $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ es la identidad sobre objetos, y una flecha $x \rightarrow y$ en $\pi_1(\mathcal{C})$ es una clase de flechas $x \rightarrow y$ en \mathcal{G} bajo la relación de equivalencia

$$f \sim g \Leftrightarrow f^{-1}g = \delta_x(u) \text{ para algún } u \in C(x),$$

ver página 11.

Esta construcción es functorial pues todo morfismo de módulos cruzados $(F, \alpha) : \mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta) \rightarrow \mathcal{C}' = (\mathcal{G}', C', \delta')$ lleva $\text{im}(\widehat{\delta})$ en $\text{im}(\widehat{\delta}')$. Tenemos así definido un functor

$$\pi_1 : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Gpd}.$$

Pasemos ahora a definir el segundo “*grupo de homotopía*” de un módulo cruzado $\pi_2(\mathcal{C})$. Por la observación (3) de la Nota 3.1.7, el functor composición $\ker(\delta) \widehat{\delta}$ es trivial (es decir, lleva cada flecha en la identidad), de esta forma el functor $\ker(\delta) :$

$\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ factoriza a través de q , y así obtenemos un funtor $\pi_2(\mathcal{C}) : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ tal que $\pi_2(\mathcal{C}) q = \ker(\delta)$:

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow[\underset{0}{\delta}]{\delta} & \mathcal{G} & \xrightarrow{q} & \pi_1(\mathcal{C}) \\
 & & & \searrow & \downarrow \pi_2(\mathcal{C}) \\
 & & & \ker(\delta) & \downarrow \\
 & & & & \mathbf{Ab}.
 \end{array} \tag{3.11}$$

Se tiene además el siguiente resultado conocido (ver [14]):

Proposición 3.1.12. *Para cualquier módulo cruzado \mathcal{C} se tienen isomorfismos (de conjuntos, grupoides y módulos respectivamente)*

$$\begin{aligned}
 \pi_0(\mathcal{C}) &\cong \pi_0(\mathbf{Ner}(\mathcal{C})), \\
 \pi_1(\mathcal{C}) &\cong \pi_0(2\mathbf{gd}(\mathcal{C})) \cong \pi_1(\mathbf{Ner}(\mathcal{C})), \\
 \pi_2(\mathcal{C}) &\cong \pi_1(2\mathbf{gd}(\mathcal{C})) \cong \pi_2(\mathbf{Ner}(\mathcal{C})).
 \end{aligned}$$

Para terminar con esta revisión de módulos cruzados, dedicaremos el resto de esta sección a probar que la categoría de módulos cruzados es una categoría de álgebras sobre la categoría \mathbf{AGpd} , que definiremos a continuación. Este resultado nos permitirá considerar en \mathbf{Xm} una cohomología del cotriple, que será interpretada en términos, primero de torsores y luego de extensiones. Será en esta cohomología donde vivirá el tercer invariante de Postnikov (algebraico) asociado a un complejo cruzado.

La categoría \mathbf{AGpd} de “flechas a grupoides” tiene como objetos las ternas

$$(X, f, \mathcal{G})$$

donde \mathcal{G} es un grupoide, X es un conjunto y $f : X \rightarrow \mathbf{End}(\mathcal{G})$ es una aplicación de X en el conjunto de endomorfismos del grupoide \mathcal{G} .

Una flecha $(X, f, \mathcal{G}) \rightarrow (X', f', \mathcal{G}')$ en \mathbf{AGpd} es un par (F, g) donde $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ es un funtor y $g : X \rightarrow X'$ es una aplicación tal que $F f = f' g$,

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & X' \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 \mathbf{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{F} & \mathbf{End}(\mathcal{G}').
 \end{array}$$

Existe un funtor olvido obvio

$$U : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$$

que lleva cada pre-módulo cruzado (\mathcal{G}, C, δ) a la terna $(\mathbf{arr}(\widehat{\mathcal{C}}), \widehat{\delta}, \mathcal{G})$.

Proposición 3.1.13. *El funtor olvido $U : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$ tiene un adjunto izquierda \overline{F} .*

Demostración: Sea (X, f, \mathcal{G}) un objeto en \mathbf{AGpd} . Para cada objeto x en \mathcal{G} consideremos el grupo

$$C_X(x) = F_{gp} \left(\coprod_{z \in \text{obj}(\mathcal{G})} \left[\text{Hom}_{\mathcal{G}}(z, x) \times \coprod_{v \in \mathcal{G}(z, z)} \text{fbr}(f, v) \right] \right),$$

donde F_{gp} es el funtor grupo libre, y $\text{fbr}(f, v)$ es la fibra de f sobre v . Es decir, $C_X(x)$ es el grupo libre generado por todos los pares $\langle t, u \rangle$ donde $t : z \rightarrow x$ es una flecha en \mathcal{G} (con la única restricción de que su codominio es x), y u es un elemento de X tal que $f(u)$ es un endomorfismo en \mathcal{G} de z (el dominio de t). Dada una flecha $x \xrightarrow{s} y$ en \mathcal{G} , sea $C_X(s)$ el morfismo definido sobre generadores de $C_X(x)$ mediante

$$C_X(s)\langle t, u \rangle = \langle st, u \rangle.$$

Claramente esta construcción es functorial pues para cada par de flechas componibles (s, s') en \mathcal{G} y cada $\langle f, u \rangle \in C_X(x)$ se tiene:

- $C_X(s's)\langle t, u \rangle = \langle (s's)t, u \rangle = \langle s'(st), u \rangle = C_X(s')\langle st, u \rangle = C_X(s')C_X(s)\langle t, u \rangle$,
- $C_X(\text{Id}_x)\langle t, u \rangle = \langle \text{Id}_x t, u \rangle = \langle t, u \rangle = 1_{C_X(x)}\langle t, u \rangle$.

Definimos ahora una transformación natural

$$\delta_X : C_X \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}$$

especificando que para cada objeto x en \mathcal{G} la componente $(\delta_X)_x$ es el homomorfismo de grupos

$$(\delta_X)_x : C_X(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$$

definido sobre los generadores por

$$(\delta_X)_x\langle t, u \rangle = t f(u) t^{-1}.$$

Así definido δ_X es una transformación natural pues, dada una flecha $x \xrightarrow{s} y$ en \mathcal{G} , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} x & & C_X(x) \xrightarrow{(\delta_X)_x} \text{End}_{\mathcal{G}}(x) \\ s \downarrow & & \downarrow C_X(s) \quad \downarrow \text{End}_{\mathcal{G}}(s) \\ y & & C_X(y) \xrightarrow{(\delta_X)_y} \text{End}_{\mathcal{G}}(y). \end{array}$$

En efecto, dado un generador $\langle t, u \rangle \in C_X(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} s(\delta_X)_x \langle t, u \rangle s^{-1} &= s(tf(u)t^{-1})s^{-1} = (st)f(u)(st)^{-1} = (\delta_X)_y \langle st, u \rangle \\ &= (\delta_X)_y C_X(s) \langle t, u \rangle. \end{aligned}$$

Así pues $(\mathcal{G}, C_X, \delta_X)$ es un pre-módulo cruzado y podemos definir \bar{F} sobre objetos como:

$$\bar{F}(X, f, \mathcal{G}) = (\mathcal{G}, C_X, \delta_X).$$

Dada una flecha $(F, g) : (X, f, \mathcal{G}) \rightarrow (X', f', \mathcal{G}')$ en \mathbf{AGpd} , definimos

$$\bar{F}(F, g) = (F, \alpha) : (\mathcal{G}, C_X, \delta_X) \rightarrow (\mathcal{G}', C_{X'}, \delta_{X'}),$$

donde $\alpha : C_X \rightarrow C_{X'} F$ es la transformación natural cuya componente en cada objeto x de \mathcal{G} viene dada sobre generadores por:

$$\alpha_x \langle t, u \rangle = \langle F(t), g(u) \rangle.$$

Nótese que está bien definida, pues dada $t : z \rightarrow x$ cualquier flecha en \mathcal{G} , entonces $F(t) : F(z) \rightarrow F(x)$ y como $u \in X$, se tiene que $g(u)$ es un elemento en X' de forma que $f'g(u) = F(f(u))$, luego $f'g(u)$ es un endomorfismo de $F(z)$ en \mathcal{G}' , y por tanto $\alpha_x \langle t, u \rangle \in C_{X'}(F(x))$.

Veamos que la asociación $x \mapsto \alpha_x$ es natural, para ello hemos de ver que para cada morfismo $s : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} x & & C_X(x) \xrightarrow{\alpha_x} C_{X'}F(x) \\ s \downarrow & & \downarrow C_X(s) \quad \downarrow C_{X'}F(s) \\ y & & C_X(y) \xrightarrow{\alpha_y} C_{X'}F(y), \end{array}$$

pero, sobre generadores $\langle t, u \rangle$ en $C_X(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} C_{X'}F(s)\alpha_x \langle t, u \rangle &= C_{X'}F(s) \langle F(t), g(u) \rangle = \langle F(s)F(t), g(u) \rangle = \langle F(st), g(u) \rangle \\ &= \alpha_y \langle st, u \rangle = \alpha_y C_X(s) \langle t, u \rangle. \end{aligned}$$

Además para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y para cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_X(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} ((\delta_{X'} \circ F) \alpha)_x \langle t, u \rangle &= (\delta_{X'})_{F(x)} \alpha_x \langle t, u \rangle = (\delta_{X'})_{F(x)} \langle F(t), g(u) \rangle \\ &= F(t) f' g(u) F(t)^{-1} = F(t) F(f(u)) F(t)^{-1} = \tilde{F}(t f(u) t^{-1}) \\ &= \tilde{F}((\delta_X)_x \langle t, u \rangle) = \tilde{F}(\delta_X)_x \langle t, u \rangle, \end{aligned}$$

es decir, (F, α) es un morfismo de pre-módulos cruzados.

Esta construcción es claramente funtorial.

Nos queda probar que \overline{F} es el adjunto izquierda del functor olvido U . La unidad de la adjunción $\eta : Id_{\mathbf{AGpd}} \rightarrow U\overline{F}$ asocia a cada objeto (X, f, \mathcal{G}) en \mathbf{AGpd} el morfismo

$$\eta_{(X,f,\mathcal{G})} = (Id_{\mathcal{G}}, h)$$

donde $h : X \rightarrow \text{arr}(\widehat{C_X})$ es la aplicación definida por $h(u) = \langle Id_x, u \rangle$, para cada $u \in X$ tal que $f(u) \in \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$. Así definida, η es una transformación natural, en efecto: Dado un morfismo $(F, g) : (X, f, \mathcal{G}) \rightarrow (X', f', \mathcal{G}')$ en \mathbf{AGpd} el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (X, f, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\eta_{(X,f,\mathcal{G})}} & U\overline{F}(X, f, \mathcal{G}) \\ (F,g) \downarrow & & \downarrow U\overline{F}(F,g)=(F,g') \\ (X', f', \mathcal{G}') & \xrightarrow{\eta_{(X',f',\mathcal{G}')}} & U\overline{F}(X', f', \mathcal{G}') \end{array}$$

donde $g' : \text{arr}(\widehat{C_{X'}}) \rightarrow \text{arr}(\widehat{C_X})$ viene dado, sobre generadores, por $g'\langle t, u \rangle = \langle F(t), g(u) \rangle$. Claramente para cada $u \in X$ tal que $f(u) \in \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ se tiene:

$$g'h(u) = g'\langle Id_x, u \rangle = \langle F(Id_x), g(u) \rangle = \langle Id_{F(x)}, g(u) \rangle = h'g(u),$$

luego

$$\begin{aligned} U\overline{F}(F, g) \eta_{(X,f,\mathcal{G})} &= (F, g')(Id_{\mathcal{G}}, h) = (F, g'h) = (F, h'g) = (Id_{\mathcal{G}'}, h')(F, g) \\ &= \eta_{(X',f',\mathcal{G}')} (F, g). \end{aligned}$$

Además $\eta_{(X,f,\mathcal{G})}$ es universal desde (X, f, \mathcal{G}) a $U\overline{F}(X, f, \mathcal{G})$, es decir, para cada pre-módulo cruzado $(\mathcal{G}', C', \delta')$ y cada flecha $(F, g) : (X, f, \mathcal{G}) \rightarrow U(\mathcal{G}', C', \delta')$ existe una única flecha $(F, \alpha) : \overline{F}(X, f, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G}', C', \delta')$ en \mathbf{Pxm} tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \overline{F}(X, f, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\eta_{(X,f,\mathcal{G})}} & U\overline{F}(X, f, \mathcal{G}) \\ \downarrow (F,\alpha) & & \downarrow U(F,\alpha) \\ (\mathcal{G}', C', \delta') & \xrightarrow{(F,g)} & U(\mathcal{G}', C', \delta'). \end{array} \quad (3.12)$$

En efecto, la flecha $(F, \alpha) : \overline{F}(X, f, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G}', C', \delta')$ en \mathbf{Pxm} está determinada por el functor F y la transformación natural $\alpha : C_X \rightarrow C'$ F cuya componente en un objeto x viene dada, sobre generadores de $C_X(x)$, por

$$\alpha_x(\langle t, u \rangle) = C'F(t)(g(u)).$$

Claramente α es natural pues para cada flecha $x \xrightarrow{s} y$ en \mathcal{G} y para cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_X(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} C'F(s) \alpha_x(\langle t, u \rangle) &= C'F(s)(C'F(t)(g(u))) = C'F(st)(g(u)) = \alpha_y(\langle st, u \rangle) \\ &= \alpha_y C(s)(\langle t, u \rangle). \end{aligned}$$

Además el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{\alpha} & C'F \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta' \circ F \\ \text{End}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \text{End}_{\mathcal{G}'} F \end{array}$$

conmuta pues para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y para cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_X(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\delta_X)_x(\langle t, u \rangle) &= \tilde{F}(tf(u)t^{-1}) = F(t)Ff(u)F(t)^{-1} = F(t)\hat{\delta}'g(u)F(t)^{-1} \\ &= F(t)\delta'_{F(z)}(g(u))F(t)^{-1} = \delta'_{F(x)}(C'F(t)(g(u))) \\ &= (\delta' \circ F)_x(C'F(t)(g(u))) = (\delta' \circ F)_x \alpha_x(\langle t, u \rangle). \end{aligned}$$

Deducimos entonces que (F, α) es un morfismo de pre-módulos cruzados que hace conmutar el diagrama (3.12) pues, dado $u \in X$ tal que $f(u) \in \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$, se tiene:

$$g'h(u) = g'\langle Id_x, u \rangle = \alpha_x(\langle Id_x, u \rangle) = C'F(Id_x)(g(u)) = g(u),$$

y así

$$U(F, \alpha) \eta_{(X, f, \mathcal{G})} = (F, g') (Id_{\mathcal{G}}, h) = (F, g'h) = (F, g).$$

Por otra parte, esta flecha (F, α) tal que

$$(F, g) = U(F, \alpha) \eta_{(X, f, \mathcal{G})}$$

es única: Dada otra flecha

$$\bar{F}(X, f, \mathcal{G}) \xrightarrow{(F', \alpha')} (\mathcal{G}', C', \delta')$$

en \mathbf{Pxm} tal que $(F, g) = U(F', \alpha') \eta_{(X, f, \mathcal{G})}$ entonces, si denotamos $U(F', \alpha') = (F', g')$, la aplicación g' actúa sobre generadores $\langle t, u \rangle \in C_X(x)$ como

$$g''\langle t, u \rangle = (\alpha')_x \langle t, u \rangle$$

y tenemos que $(F, g) = (F', g') (Id_{\mathcal{G}}, h)$ implica $F' = F$ y $g'h = g$. De esta forma,

$$g(u) = g'h(u) = g''\langle Id_x, u \rangle = \alpha'_x \langle Id_x, u \rangle$$

para cada $u \in X$ tal que $f(u) \in \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$. Así, para cada objeto x en \mathcal{G} y cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_X(x)$ se tiene:

$$\alpha'_x \langle t, u \rangle = \alpha'_x C_X(t) \langle Id_x, u \rangle = C'F(t) \alpha'_z \langle Id_x, u \rangle = C'F(t)(g(u)) = \alpha_x \langle t, u \rangle$$

con lo que $(F', \alpha') = (F, \alpha)$. ■

Como corolario inmediato de las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.13 tenemos:

Corolario 3.1.14. *El funtor de olvido composición*

$$U_2 : \mathbf{Xm} \xrightarrow{U} \mathbf{Pxm} \xrightarrow{U} \mathbf{AGpd}$$

tiene un adjunto izquierda, el funtor composición

$$F_2 : \mathbf{AGpd} \xrightarrow{\bar{F}} \mathbf{Pxm} \xrightarrow{G} \mathbf{Xm}.$$

La siguiente proposición nos asegura que el funtor de olvido anterior es tripleable.

Proposición 3.1.15. *El funtor olvido $U_2 : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$ es tripleable.*

Demostración: Usando el Teorema 1.2.1 (de Beck) y después del Corolario 3.1.14, sólo resta por probar que U_2 refleja isomorfismos y conserva los coigualadores de pares reflexivos U_2 -contráctiles.

Lo primero es claro, pues dado $(F, \alpha) : (\mathcal{G}, C, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}', C', \delta')$ un morfismo de módulos cruzados tal que su imagen por U_2 , $U_2(F, \alpha) = (\hat{\alpha}, F) : (\text{arr}(\hat{C}), \hat{\delta}, \mathcal{G}) \rightarrow (\text{arr}(\hat{C}'), \hat{\delta}', \mathcal{G}')$ es un isomorfismo, entonces F es un isomorfismo de grupoides y $\hat{\alpha} : \text{arr}(\hat{C}) \rightarrow \text{arr}(\hat{C}')$ es una aplicación biyectiva y por tanto para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, el morfismo de grupos $\alpha_x : C(x) \rightarrow CF(x)$ es biyectivo considerado como una aplicación entre conjuntos y por tanto, es un isomorfismo.

Respecto a la segunda parte, supongamos que tenemos un par reflexivo de morfismos de módulos cruzados

$$(\mathcal{G}_1, C_1, \delta_1) = \mathcal{C}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{(F, \varphi_0)} \\ \xrightarrow{(F', \varphi_1)} \end{array} \mathcal{C}_0 = (\mathcal{G}_0, C_0, \delta_0),$$

apliquémosle el funtor olvido U_2 y supongamos que resulta un par contráctil (necesariamente reflexivo). Si hallamos el coigualador $(Pr, pr) : (\text{arr}(\hat{C}_0), \hat{\delta}_0, \mathcal{G}_0) \rightarrow (\bar{X}, \delta, \bar{\mathcal{G}})$ del par obtenido en \mathbf{AGpd} , tendremos el siguiente diagrama de conjuntos y aplicaciones:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xleftarrow{t} & & \xleftarrow{s} \\
 & & \hat{\varphi}_0 & & pr \\
 \text{arr}(\hat{C}_1) & \xrightarrow{\hat{\varphi}_1} & \text{arr}(\hat{C}_0) & \xrightarrow{\delta} & \bar{X} \\
 \delta_1 \swarrow & & \delta_0 \swarrow & & \delta \swarrow \\
 G_1 & \xrightarrow{F_1} & G_0 & \xrightarrow{Pr_1} & \bar{G} \\
 \delta_1 \swarrow & & \delta_0 \swarrow & & \delta \swarrow \\
 O_1 & \xrightarrow{F_0} & O_0 & \xrightarrow{Pr_0} & O \\
 & & & & \bar{d} \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \bar{G} \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & O
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \delta_1 \swarrow & & \delta_0 \swarrow \\ T_1 & \xrightarrow{F_1} & S_1 \\ F_1 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \\ F'_1 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \\ T_0 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \\ d_1 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \\ F_0 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \\ F'_0 & \xrightarrow{F_1} & Pr_1 \end{array}$

con $\bar{X} = \text{coeq}(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1)$ en conjuntos, δ inducida por δ_1, δ_0 y $\bar{\mathcal{G}} : \bar{G} \rightrightarrows \bar{O}$ el grupoide coigualador de F, F' (ver página 14). Además tenemos dos funtores $S : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}_0$ y $T : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1$ tales que $FT = Id, F'T = SPr = Id$ y $PrS = Id$, y aplicaciones $s : \bar{X} \rightarrow \text{arr}(\hat{C}_0)$ y $t : \text{arr}(\hat{C}_0) \rightarrow \text{arr}(\hat{C}_1)$ tales que $\hat{\varphi}_0 t = Id, \hat{\varphi}_1 t = spr = Id$ y $pr s = Id$. Además (S, s) y (T, t) son morfismos en **AGpd**.

Vamos ahora a construir un módulo cruzado $(\bar{\mathcal{G}}, X, \bar{\delta})$ y un morfismo de módulos cruzados $(\bar{Pr}, \bar{pr}) : (\mathcal{G}_0, C_0, \delta_0) \rightarrow (\bar{\mathcal{G}}, X, \bar{\delta})$ tales que $U_2(\bar{Pr}, \bar{pr}) = (Pr, pr)$ y demostraremos que (\bar{Pr}, \bar{pr}) es el coigualador de (F, φ_0) y (F', φ_1) .

Primero hagamos la siguiente observación: los elementos de $\bar{O} = \text{coeq}(F_0, F'_0)$ serán clases $[x]$ de elementos $x \in O_0$ módulo la relación de equivalencia generada por F_0 y F'_0 . Por ser S_0 una sección se tiene que en cada clase de \bar{O} hay un representante de la forma $S_0[x]$. Las flechas de $\bar{\mathcal{G}}$ serán también clases de equivalencia $[f_1, \dots, f_n]$ donde

$$x_{10} \xrightarrow{f_1} x_{11} \sim x_{20} \xrightarrow{f_2} x_{21} \sim x_{30} \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-11} \sim x_{n0} \xrightarrow{f_n} x_{n1}$$

con $x_{i1} \sim x_{i+10}$ relacionados en \bar{O} . De nuevo, como S_1 es una sección, en cada clase $[f_1, \dots, f_n]$ de flechas de $\bar{\mathcal{G}}$ hay una de la forma $S_1[f_1, \dots, f_n] : x \rightarrow y$, que será una flecha de \mathcal{G}_0 con $x = S_0[x_{10}]$ e $y = S_0[x_{n1}]$.

Por último, los elementos de \bar{X} son clases $[c]$ con $c \in \text{arr}(\hat{C}_0)$ y en cada una de las clases hay un representante que es de la forma $s[c] \in \text{arr}(\hat{C}_0)$ y se tiene que

$$\delta[s[c]] = [\delta_0 s[c]] = [S_1 \delta[c]],$$

o también

$$\bar{d}[s[c]] = [d_0 s[c]] = [S_0 \bar{d}[c]].$$

Definimos $X : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}$ sobre objetos mediante:

$$X([x]) = \{[c] \in \bar{X} / \bar{d}[c] = [x]\},$$

con estructura de grupo definida por el hecho de que para cualquier $[c] \in X[x]$, $s[c] \in C_0(S_0[x])$ que es un grupo pues

$$d_0 s[c] = S_0 \bar{d}[c] = S_0[x].$$

Así dados $[c], [c'] \in X[x]$ definimos el producto

$$[c] \cdot [c'] = [s[c] \cdot s[c']].$$

Por otra parte, para definir X sobre flechas, dada una flecha en $\bar{\mathcal{G}}$ que como hemos visto es de la forma

$$[S_1[f_1, \dots, f_n]] : [S_0[x]] \rightarrow [S_0[y]]$$

con $S_1[f_1, \dots, f_n] : S_0[x] \rightarrow S_0[y]$ una flecha en \mathcal{G}_0 , tenemos que definir un morfismo de grupos

$$X[S_1[f_1, \dots, f_n]] : X[x] \rightarrow X[y],$$

y teniendo en cuenta de nuevo que dado $[c] \in X[x]$, $s[c] \in C_0(S_0[x])$ podemos hacer actuar $S_1[f_1, \dots, f_n]$ sobre $s[c]$, luego definimos

$$X[S_1[f_1, \dots, f_n]]([c]) = {}^{[S_1[f_1, \dots, f_n]]} [c] := [S_1[f_1, \dots, f_n]s[c]] = [C_0(S_1[f_1, \dots, f_n])(s[c])].$$

Así definido $X[S_1[f_1, \dots, f_n]]$ es un morfismo de grupos lo que se deduce de que también lo es $C_0(S_1[f_1, \dots, f_n])$. Además la functorialidad de X se deduce de la functorialidad de S .

Por otra parte, teniendo en cuenta que (S, s) es un morfismo de módulos cruzados podemos definir un morfismo de grupos para cada $[x] \in \bar{O}$

$$\bar{\delta}_{[x]} : X[x] \rightarrow \mathbf{End}_{\bar{\mathcal{G}}}[x], \quad \bar{\delta}_{[x]}([c]) := \delta[c] = [(\delta_0)_{S_0[x]}(s[c])].$$

De hecho, tenemos definida una transformación natural $\bar{\delta} : X \rightarrow \mathbf{End}_{\bar{\mathcal{G}}}$ pues para cada flecha $[S_1[f_1, \dots, f_n]] : [S_0[x]] \rightarrow [S_0[y]]$ en $\bar{\mathcal{G}}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X[S_0[x]] & \xrightarrow{\bar{\delta}_{[S_0[x]]}} & \mathbf{End}_{\bar{\mathcal{G}}}([S_0[x]]) \\ X[S_1[f_1, \dots, f_n]] \downarrow & & \downarrow \\ X[S_0[y]] & \xrightarrow{\bar{\delta}_{[S_0[y]]}} & \mathbf{End}_{\bar{\mathcal{G}}}([S_0[y]]), \end{array}$$

es decir, para cada $[c] \in X[S_0[x]]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{[S_0[y]]} X[S_1[f_1, \dots, f_n]]([c]) &= \bar{\delta}_{[S_0[y]]}({}^{[S_1[f_1, \dots, f_n]]} s[c]) = [(\delta_0)_{S_0[y]}({}^{[S_1[f_1, \dots, f_n]]} s[c])] \\ &= [S_1[f_1, \dots, f_n](\delta_0)_{S_0[x]}(s[c])S_1[f_1, \dots, f_n]^{-1}] \\ &= [S_1[f_1, \dots, f_n][(\delta_0)_{S_0[x]}(s[c])][S_1[f_1, \dots, f_n]^{-1}] \\ &= [S_1[f_1, \dots, f_n]][\bar{\delta}_{[S_0[x]]}([c])][S_1[f_1, \dots, f_n]^{-1}]. \end{aligned}$$

Con esto, la terna $(\bar{\mathcal{G}}, X, \bar{\delta})$ nos define un pre-módulo cruzado. Además para cada $[c], [c'] \in X[x]$ se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{[x]}[c][c'] &= [(\delta_0)_{S_0[x]}(s[c])][c'] = [(\delta_0)_{S_0[x]}(s[c])s[c']] \\ &= [s[c]s[c']s[c]^{-1}] = [s[cc'c^{-1}]] = [cc'c^{-1}] = [c][c'][c]^{-1}, \end{aligned}$$

es decir, satisface la identidad de Peiffer, y por tanto, $(\bar{\mathcal{G}}, X, \bar{\delta})$ es un módulo cruzado. Por otra parte es claro que pr determina una transformación natural $\bar{pr} : C_0 \rightarrow \bar{X}$ y si tomamos $\bar{Pr} = Pr$, la definición de $\bar{\delta}$ nos asegura que el par $(\bar{Pr}, \bar{pr}) : (\mathcal{G}_0, C_0, \delta_0) \rightarrow (\bar{\mathcal{G}}, X, \bar{\delta})$ es un morfismo de módulos cruzados.

Es claro que $U_2(\overline{\mathcal{G}}, X, \overline{\delta}) = (\overline{X}, \delta, \overline{\mathcal{G}})$, de hecho:

$$\text{arr}(\widehat{X}) = \coprod_{[x] \in \overline{\mathcal{O}}} X[x] = \overline{X}$$

y $\widehat{\delta} = \delta : \text{arr}(\widehat{X}) \rightarrow \text{End}(\overline{\mathcal{G}})$. Además, evidentemente, $U_2(\overline{Pr}, \overline{pr}) = (Pr, pr)$ con lo cual sólo falta demostrar que efectivamente $(\overline{Pr}, \overline{pr}) : (\mathcal{G}_0, C_0, \delta_0) \rightarrow (\overline{\mathcal{G}}, X, \overline{\delta})$ es el coigualador de (F, φ_0) y (F', φ_1) en módulos cruzados. Antes de nada digamos que dejamos la distinción notacional entre (Pr, pr) considerada como una flecha en **AGpd** y considerada como una flecha de módulos cruzados. Como pr es el coigualador de $\widehat{\varphi}_0$ y $\widehat{\varphi}_1$, es claro que para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_1)$ se tiene $(pr)_{F(x)}(\varphi_0)_x = (pr)_{F'(x)}(\varphi_1)_x$ y por tanto (Pr, pr) coiguala (F, φ_0) y (F', φ_1) . Además si $(G, \alpha) : C_0 \rightarrow \mathcal{D} = (\mathcal{H}, D, \delta')$ es un morfismo de módulos cruzados que también coiguala (F, φ_0) y (F', φ_1) , $(G, \alpha)(F, \varphi_0) = (G, \alpha)(F', \varphi_1)$, es obvio que $(G, \hat{\alpha})$ es una flecha en **AGpd** que coiguala a las flechas $U_2(F, \varphi_0)$ y $U_2(F', \varphi_1)$, es decir, G coiguala en **Gpd** a los funtores F y F' y $\hat{\alpha}$ coiguala en conjuntos a las aplicaciones $\widehat{\varphi}_0$ y $\widehat{\varphi}_1$. Por tanto podemos asegurar la existencia de un functor $G' : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $G' Pr = G$ y la existencia de una aplicación $q : \overline{X} \rightarrow \text{arr}(\widehat{D})$ tal que $q pr = \hat{\alpha}$. Con estos datos definimos un morfismo (G', α') en **Xm** de $(\overline{\mathcal{G}}, X, \overline{\delta}) \rightarrow \mathcal{D}$ donde para cada $[x] \in \text{obj}(\overline{\mathcal{G}})$ la componente en $[x]$ de α' es $\alpha'_{[x]}([c]) = q[c]$ tal que $(G', \alpha')(Pr, pr) = (G, \alpha)$, es decir, (Pr, pr) tiene la propiedad universal del coigualador. ■

Denotamos por ${}^2\mathbb{G}$ al cotriple asociado a la adjunción $F_2 \dashv U_2$. Además, dado un módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$, también tenemos un par adjunto

$$F_2 : \mathbf{AGpd}/U_2(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Xm}/\mathcal{C} : U_2$$

entre las correspondientes coma categorías. Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que el correspondiente functor olvido es tripleable.

Corolario 3.1.16. *Para cada módulo cruzado \mathcal{C} , el functor olvido $U_2 : \mathbf{Xm}/\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AGpd}/U_2(\mathcal{C})$ entre las coma categorías es tripleable.*

Denotaremos también por ${}^2\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple en la coma categoría \mathbf{Xm}/\mathcal{C} .

3.2 Complejos cruzados

La definición de complejo cruzado sobre un grupoide fue dada por R. Brown y P.J. Higgins en [12] generalizando el trabajo de Whitehead [69], en el que bajo el nombre de “sistemas de homotopía” estudiaba las propiedades formales de la sucesión

$$\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\delta} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\delta} C_1$$

que se obtiene a partir de los grupos de homotopía relativa $C_n = \pi_n(X_n, X_{n-1}, *)$ de un espacio filtrado X_* con punto base, sobre el cual actúa $C_1 = \pi_1(X_1, *)$. Si el punto-base varía en un subespacio discreto X_0 , obtenemos una sucesión como la anterior para cada punto de X_0 , y el grupoide fundamental $\pi_1(X_1, X_0)$ actúa sobre todas las sucesiones formando un “complejo cruzado” $\pi(X_*)$.

En esta sección vamos a dar una definición de complejo cruzado algo distinta de la dada por R. Brown y P.J. Higgins, aunque fácilmente se ve que es equivalente a ella. Nuestra definición está en la línea que hemos adoptado en el desarrollo de esta memoria. Su principal diferencia con la definición clásica es que adopta como concepto básico el de módulo cruzado (en lugar de grupo o grupoide, cómo se hace clásicamente). Así, el concepto de complejo cruzado está aquí dado internamente en la categoría de módulos cruzados, con esto se simplifican los axiomas de la definición ya que gran parte de la complejidad de la definición clásica queda ahora relegada a la propia definición de módulo cruzado.

Dado un grupoide \mathcal{G} , por un *complejo de cadenas (sucesión exacta)* de \mathcal{G} -módulos cruzados entendemos un diagrama

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots, \quad (3.13)$$

en la categoría $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ de módulos cruzados sobre \mathcal{G} , cuya imagen por el funtor olvido $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ es un complejo de cadenas (sucesión exacta) de \mathcal{G} -grupos. Notemos que él que la sucesión anterior sea un complejo de cadenas (sucesión exacta) de módulos cruzados es equivalente a que, para cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, la sucesión

$$\mathcal{C}(x) : \cdots \rightarrow C_{n+1}(x) \xrightarrow{(\partial_{n+1})_x} C_n(x) \xrightarrow{(\partial_n)_x} C_{n-1}(x) \rightarrow \cdots$$

sea un complejo de cadenas (sucesión exacta) de grupos.

Definición 3.2.1. Si \mathcal{G} es un grupoide, un \mathcal{G} -complejo cruzado es un complejo de cadenas en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ de la forma

$$\mathcal{C} : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}} \quad (3.14)$$

tal que para $n \geq 3$ la acción de $\text{im}(\partial_2)$ sobre \widehat{C}_n es trivial. En otras palabras, el funtor composición

$$\widehat{C}_2 \xrightarrow{\widehat{\delta}_2} \mathcal{G} \xrightarrow{C_n} \mathbf{Gp} \quad (3.15)$$

lleva toda flecha de \widehat{C}_2 a una identidad (aquí estamos usando la notación $C_n = (C_n, \delta_n)$ para $n \geq 2$, para los \mathcal{G} -módulos cruzados de \mathcal{C}).

Al grupoide \mathcal{G} y al módulo cruzado C_2 los llamaremos respectivamente grupoide base y módulo cruzado base del complejo cruzado.

Nota 3.2.2. Para obtener la definición clásica de complejo cruzado a partir de la nuestra basta considerar la sucesión de grupoides

$$\cdots \rightarrow \widehat{C}_{n+1} \xrightarrow{\widehat{\partial}_{n+1}} \widehat{C}_n \xrightarrow{\widehat{\partial}_n} \widehat{C}_{n-1} \xrightarrow{\widehat{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\widehat{\partial}_3} \widehat{C}_2 \xrightarrow{\widehat{\delta}_2} \mathcal{G}, \quad (3.16)$$

todos los cuales tienen los mismos objetos, y donde todos los funtores son la identidad en objetos. Además, todos los \widehat{C}_n , $n \geq 2$ son grupoides totalmente desconexos.

Nota 3.2.3. En un “complejo de cadenas” en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ como el representado en (3.14), el morfismo de \mathcal{G} -módulos cruzados ∂_2 (el único que hay de \widehat{C}_2 a $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$, objeto final en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$) es necesariamente el morfismo de estructura del módulo cruzado $C_2 = (\mathcal{G}, C_2, \delta_2)$, esto es, $\partial_2 = \delta_2$. En efecto, puesto que $\partial_2 : C_2 = (C_2, \delta_2) \rightarrow (\mathbf{End}_{\mathcal{G}}, Id)$ es un morfismo de \mathcal{G} -módulos cruzados y, por tanto, $\partial_2 : \delta_2 \rightarrow Id$ es una transformación natural, tenemos que, para cada objeto x en \mathcal{G} , $Id_x(\partial_2)_x = (\delta_2)_x$, es decir, $\partial_2 = \delta_2$.

Nota 3.2.4. Notemos también que para $n \geq 3$, la aplicación de estructura δ_n del módulo cruzado C_n coincide con la composición $\partial_2 \cdots \partial_n$, (por inducción: si $\delta_{n-1} = \partial_2 \cdots \partial_{n-1}$, ∂_n es una transformación natural de δ_n a δ_{n-1} , luego para cada $x \in \mathbf{obj}(\mathcal{G})$, se tiene que $(\delta_{n-1})_x (\partial_n)_x = (\delta_n)_x$ y, por tanto, $\delta_n = \partial_2 \cdots \partial_n$). Teniendo en cuenta que un complejo cruzado es un complejo de cadenas, tal composición es trivial, es decir, $\delta_n = \partial_2 \cdots \partial_n = 0$, para $n \geq 3$ y de esta forma la identidad de Peiffer fuerza a que C_n sea un \mathcal{G} -módulo, esto es, $C_n(x) \in \mathbf{Ab}$, para todo $x \in \mathbf{obj}(\mathcal{G})$.

Nota 3.2.5. Al igual que ocurre con $\mathbf{im}(\partial_2) = \mathbf{im}(\delta_2)$ (ver Nota 3.1.7, (3)), también para $n > 2$, $\mathbf{im}(\partial_n)$ es normal en C_n (es decir, la imagen de cada $(\partial_n)_x$ es un subgrupo normal de $C_n(x)$). Esto es evidente para $n > 3$ porque las componentes de ∂_n son homomorfismos de grupos abelianos. Pero también es cierto para $n = 3$ porque $\mathbf{im}(\partial_3)$ está contenida en $\ker(\partial_2) = \ker(\delta_2)$, que es centralizador en C_2 (Nota 3.1.7). Como consecuencia, el siguiente coigualador en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ (que, teniendo en cuenta el hecho de que ambos morfismos coigualados tienen cambio de base trivial, también es un coigualador en \mathbf{Xm} y en realidad se reduce a un coigualador en \mathcal{G} -grupos) viene dado por un cociente para todo $n \geq 2$:

$$C_{n+1} \xrightarrow[\mathbf{0}]{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{q_n} C_n / \mathbf{im}(\partial_{n+1}).$$

Nota 3.2.6. Finalmente, nótese que él que la acción de $\mathbf{im}(\delta_2)$ sobre C_n , para $n \geq 3$, sea trivial, implica que, para $n \geq 3$, el funtor C_n se factoriza a través del

funtor canónico $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}_2)$,

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathcal{C}}_2 & \xrightarrow[\underset{0}{\parallel}]{\widehat{\delta}_2} & \mathcal{G} & \xrightarrow{q} & \pi_1(\mathcal{C}_2) \\
 & & \searrow^{C_n} & & \swarrow^{\overline{C}_n} \\
 & & \mathbf{Ab} & &
 \end{array} \tag{3.17}$$

Además, como la composición $\partial_2 \partial_3$ es trivial, la transformación natural $\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2$ es equivalente a una transformación natural de C_3 en $\ker(\partial_2) = \ker(\delta_2)$, con lo cual a partir de la transformación natural ∂_3 obtenemos una transformación natural $\overline{\partial}_3$ del $\pi_1(\mathcal{C}_2)$ -módulo \overline{C}_3 al $\pi_2(\mathcal{C}_2)$.

Por otro lado, para $n > 3$, a partir de la transformación natural ∂_n entre los \mathcal{G} -módulos C_n y C_{n-1} , obtenemos otra transformación natural $\overline{\partial}_n$ entre los $\pi_1(\mathcal{C}_2)$ -módulos \overline{C}_n y \overline{C}_{n-1} de manera que para cada objeto x del grupoide fundamental $\pi_1(\mathcal{C}_2)$, le asigna el morfismo de grupos:

$$(\overline{\partial}_n)_x : \overline{C}_n(x) \rightarrow \overline{C}_{n-1}(x), \quad (\overline{\partial}_n)_x(u) = (\partial_n)_x(u)$$

para cada $u \in C_n(x)$.

Como consecuencia de la última observación (Nota 3.2.6), cada complejo cruzado \mathcal{C} nos proporciona un complejo de cadenas

$$\overline{\mathcal{C}} : \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{n+1}} \overline{C}_n \xrightarrow{\overline{\partial}_n} \overline{C}_{n-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_4} \overline{C}_3 \xrightarrow{\overline{\partial}_3} \pi_2(\mathcal{C}_2) \rightarrow \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C}_2)} \rightarrow \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C}_2)}, \tag{3.18}$$

en la correspondiente categoría $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C}_2)}$ de $\pi_1(\mathcal{C}_2)$ -módulos, cuya homología se utilizará más abajo (en relación con esta homología, nótese que $H_1(\overline{\mathcal{C}}) = \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C}_2)}$ y $H_2(\overline{\mathcal{C}}) = \pi_2(\mathcal{C}_2)/\text{im}\overline{\partial}_3$).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ es un módulo cruzado y sea $\Pi_1 = \pi_1(\mathcal{C})$ y $\Pi_2 = \pi_2(\mathcal{C})$, entonces todo complejo de cadenas positivo de Π_1 -módulos terminado en Π_2 es el complejo de cadenas (3.18) de un único complejo cruzado \mathcal{C} que tiene a \mathcal{C} como módulo cruzado base.

Un morfismo de \mathcal{G} -complejos cruzados $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de complejos de cadenas, esto es, una familia $\{\phi_n : C_n \rightarrow C'_n\}$ de morfismos de módulos cruzados sobre \mathcal{G} tal que $\phi_n \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \phi_{n+1}$, para $n \geq 1$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow \phi_n & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Notemos que en tal morfismo ϕ , el morfismo de módulos cruzados $\phi_1 : \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}} = \mathcal{C}'_1$ ha de ser la identidad del objeto final $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$.

La categoría de complejos cruzados sobre el grupoide \mathcal{G} la denotamos por $\mathbf{Crs}_{\mathcal{G}}$.

Un *complejo cruzado* es un par $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ con \mathcal{G} un grupoide y \mathcal{C} un \mathcal{G} -complejo cruzado. La categoría \mathbf{Crs} de todos los complejos cruzados se obtiene admitiendo la posibilidad de cambio de base en los morfismos de complejos cruzados de forma análoga a cómo se hizo para módulos cruzados. Notemos igualmente que en esta última categoría, dado un morfismo ϕ entre dos complejos cruzados \mathcal{C} y \mathcal{C}' con grupoide base \mathcal{G} y \mathcal{G}' , respectivamente, el morfismo de módulos cruzados $\phi_1 : \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}'} = \mathcal{C}'_1$ está completamente determinado por el funtor cambio de base (necesariamente el mismo para todos los ϕ_n), que puede ser la identidad en el caso de que ambos complejos cruzados tengan el mismo grupoide base. Por ello, identificaremos con ϕ_1 dicho funtor de cambio de base.

Existen funtores de olvido obvios “grupoide base” $\mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ y “módulo cruzado base” $\mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Xm}$. La categoría de complejos cruzados sobre un grupoide \mathcal{G} , $\mathbf{Crs}_{\mathcal{G}}$, es la fibra sobre \mathcal{G} de este funtor “grupoide base”. Si \mathcal{C} es un módulo cruzado, $\mathbf{Crs}_{\mathcal{C}}$ denota la fibra sobre \mathcal{C} del funtor “módulo cruzado base”.

Un morfismo $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ de complejos cruzados es un *fibración de complejos cruzados* (ver por ejemplo [47] o [14]) si cada componente ϕ_n es una fibración de módulos cruzados, esto es, si el funtor $\phi_1 : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ de cambio de base es una fibración de grupoide y la transformación natural olvido para cada una de los morfismos de módulos cruzados $\phi_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}'_n$ es sobreyectiva.

Recordemos ahora cómo se definen los grupos de homotopía de un complejo cruzado.

El conjunto de *componentes conexas de un \mathcal{G} -complejo cruzado \mathcal{C}* se define como el conjunto de componentes conexas del grupoide base \mathcal{G} , es decir,

$$\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathcal{G}).$$

De forma similar, el “*grupoide fundamental*” de \mathcal{C} se define como el grupoide fundamental del módulo cruzado base de \mathcal{C} , esto es

$$\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_1(\mathcal{C}_2) = \mathcal{G}/\text{im}(\delta_2).$$

Nótese que $\pi_0\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathcal{C})$ ya que el grupoide cociente $\pi_1(\mathcal{C})$ tiene el mismo conjunto de objetos que \mathcal{G} y la proyección al cociente $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ es la identidad en objetos por lo si dos objetos $x, y \in \text{obj}(\pi_1(\mathcal{C})) = \text{obj}(\mathcal{G})$ están en la misma componente conexa de $\pi_1(\mathcal{C})$, es decir, si existe una flecha $[f] : x \rightarrow y$ con dominio x y codominio y en el cociente, cualquier representante de esa clase será una flecha con dominio x y codominio y en \mathcal{G} , y por tanto, x y y están en la misma componente conexa de \mathcal{G} , el recíproco es obvio.

Los *grupos de homotopía de orden superior* de un complejo cruzado \mathcal{C} se definen como los $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulos de homología

$$\pi_n(\mathcal{C}) = H_n(\bar{\mathcal{C}}) : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad n \geq 2,$$

del complejo de cadenas de $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulos $\bar{\mathcal{C}}$ asociado a \mathcal{C} , ver (3.18). Así, $\pi_2(\mathcal{C}) = H_2(\bar{\mathcal{C}}) = \pi_2(\mathcal{C}_2)/\text{im}(\bar{\partial}_3)$, $\pi_3(\mathcal{C}) = H_3(\bar{\mathcal{C}}) = \ker(\bar{\partial}_3)/\text{im}(\bar{\partial}_4)$, etc.

Es evidente, que si \mathcal{C} es un complejo cruzado sobre \mathcal{G} , para cada $n \geq 2$,

$$\mathcal{A} = (\pi_n(\mathcal{C}), 0)$$

es un \mathcal{G} -módulo cruzado, considerando $\pi_n(\mathcal{C})$ como \mathcal{G} -módulo vía la proyección canónica $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$. Precisamente éste es el núcleo del morfismo canónico

$$\mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}$$

inducido por el hecho de que $\partial_n \partial_{n+1}$ es trivial.

3.2.1 Los funtores nervio y complejo cruzado fundamental

Un ejemplo básico de complejo cruzado es el *complejo cruzado fundamental* $\mathcal{C} = \pi(X_*)$ de un espacio filtrado $X_* = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. El grupoide base de este complejo cruzado es $\mathcal{G} = \pi_1(X_1, X_0)$, el grupoide fundamental de clases de homotopía de caminos en X_1 con extremos en X_0 ; y para $n \geq 2$, y $x \in X_0 = \text{obj}(\mathcal{G})$, $C_n(x)$ es el grupo de homotopía relativa $\pi_n(X_n, X_{n-1}, x)$ con base en el punto x . Los bordes y las acciones son los bordes usuales para los grupos de homotopía relativa y el cambio de punto base respectivamente, ver [14]. De esta forma se obtiene un funtor

$$\pi : \mathbf{Filt} \longrightarrow \mathbf{Crs},$$

de la categoría de espacios filtrados a la categoría de complejos cruzados.

La definición de complejo cruzado fundamental puede extenderse a conjuntos simpliciales, basta con definir el complejo cruzado fundamental de un conjunto simplicial \mathbf{X} como el complejo cruzado fundamental de su realización geométrica, considerando en este CW-complejo la filtración dada por sus esqueletos, tenemos así el funtor

$$\pi : \mathbf{SSet} \longrightarrow \mathbf{Crs}.$$

Este funtor tiene un adjunto derecha, el funtor *nervio de un complejo cruzado*, ver [14]. Dado un complejo cruzado \mathcal{C} , su nervio, que lo denotamos por $\text{Ner}(\mathcal{C})$, es un conjunto simplicial cuyo conjunto de n -símplices es el conjunto de elementos (generalizados) de \mathcal{C} definidos sobre $\pi(\Delta^n)$, esto es:

$$\text{Ner}_n(\mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathbf{Crs}}(\pi(\Delta^n), \mathcal{C}),$$

los morfismos cara y degeneración se obtienen de la forma usual a partir de las aplicaciones simpliciales canónicas $\Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \leftarrow \Delta^{n-1}$. Esta construcción es funtorial, teniéndose así un funtor

$$\text{Ner} : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{SSet} \quad (3.19)$$

que, por su definición, es adjunto derecha al funtor π .

Una propiedad interesante del funtor nervio es su comportamiento respecto a los grupos de homotopía, reflejamos esta propiedad en la siguiente proposición cuya demostración puede verse en [14].

Proposición 3.2.7. *Para cualquier complejo cruzado \mathcal{C} se tienen un isomorfismo (de conjuntos, grupoides y módulos, respectivamente):*

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathcal{C}) &\cong \pi_0(\text{Ner}(\mathcal{C})), \\ \pi_1(\mathcal{C}) &\cong \pi_1(\text{Ner}(\mathcal{C})), \\ \pi_n(\mathcal{C}) &\cong \pi_n(\text{Ner}(\mathcal{C})), \quad n > 1. \end{aligned}$$

El *espacio clasificador* $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ de un complejo cruzado \mathcal{C} se define como la realización geométrica de su nervio:

$$\mathbf{B}(\mathcal{C}) = |\text{Ner}(\mathcal{C})|,$$

es decir, el funtor espacio clasificador será por tanto la composición:

$$\mathbf{B} : \mathbf{Crs} \xrightarrow{\text{Ner}} \mathbf{SSet} \xrightarrow{||} \mathbf{Top}.$$

Análogamente, el *complejo cruzado fundamental* de un espacio X se define como el complejo cruzado fundamental de su complejo singular

$$\mathbf{\Pi}(X) = \pi S(X),$$

es decir, el funtor complejo cruzado fundamental está dado por la composición

$$\mathbf{\Pi} : \mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{SSet} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Crs}.$$

Como corolario inmediato de la Proposición anterior tenemos

Corolario 3.2.8. *Para cada complejo cruzado \mathcal{C} , existen isomorfismos naturales (de conjuntos, grupoides y módulos, respectivamente)*

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathbf{B}(\mathcal{C})) &\cong \pi_0(\mathcal{C}), \\ \pi_1(\mathbf{B}(\mathcal{C})) &\cong \pi_1(\mathcal{C}), \\ \pi_n(\mathbf{B}(\mathcal{C})) &\cong \pi_n(\mathcal{C}), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Por una “*equivalencia homotópica débil*” entre complejos cruzados entenderemos un morfismo de complejos cruzados que induzca isomorfismos en la homotopía.

3.2.2 Las categorías \mathbf{Crs}_n de n -tipos

Un *complejo cruzado n -dimensional* o simplemente un *n -complejo cruzado* (también llamado complejo cruzado n -truncado [12], y complejo cruzado de rango n , [11]) es aquel para el cual todos los módulos cruzados \mathcal{C}_m para $m > n$ son iguales al \mathcal{G} -módulo cruzado inicial $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, donde \mathcal{G} es el grupoide base. En general, cuando representemos los morfismos borde de un complejo cruzado n -dimensional, omitiremos los módulos cruzados triviales $\mathcal{C}_m = \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, $m > n$, por tanto representaremos sólo la parte no trivial de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{C} : \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_3 \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}}.$$

Los complejos cruzados n -dimensionales determinan una subcategoría plena de \mathbf{Crs} , que denotaremos por $i_n : \mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$.

Observemos que en dimensiones bajas es fácil identificar estas subcategorías con categorías conocidas, así

$$\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm} \quad \text{y} \quad \mathbf{Crs}_{2,\mathcal{G}} = \mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}.$$

Por otra parte, para cada grupoide base \mathcal{G} hay un solo \mathcal{G} -complejo cruzado 1-dimensional y todo morfismo entre dos complejos cruzados 1-dimensionales está completamente determinado por el funtor cambio de base. Podemos así identificar la categoría de complejos cruzados 1-dimensionales con la categoría de grupoides

$$\mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd},$$

y la inclusión $i_1 : \mathbf{Crs}_1 \hookrightarrow \mathbf{Crs}$ con la inclusión discreta $\mathbf{Gpd} \hookrightarrow \mathbf{Xm}$ compuesta con i_2 ,

$$i_1 : \mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd} \xrightarrow{\text{discr}} \mathbf{Xm} = \mathbf{Crs}_2 \xrightarrow{i_2} \mathbf{Crs}.$$

Podemos observar también que si \mathcal{C} es un complejo cruzado 0-dimensional, su grupoide base $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$ tiene que ser discreto, ya que tiene que verificar:

$$\mathbf{0}_{\mathcal{G}} = \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}},$$

(ver Nota 3.1.3). De acuerdo con esto, podemos identificar \mathbf{Crs}_0 con la categoría \mathbf{Set} de conjuntos y la inclusión $i_0 : \mathbf{Crs}_0 \hookrightarrow \mathbf{Crs}$ con la inclusión discreta $\mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Gpd}$ (compuesta con i_1).

Nótese que como cada n -complejo cruzado \mathcal{C} tiene módulos cruzados $\mathcal{C}_m = \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ en dimensiones $m \geq n + 1$, los grupos de homotopía de \mathcal{C} también serán triviales en dimensiones $m \geq n + 1$. La igualdad

$$\pi_n(\mathbf{B}(\mathcal{C})) = \pi_n(\mathcal{C})$$

nos muestra que el espacio clasificador $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ tiene grupos de homotopía triviales en dimensiones $m > n$ y por tanto $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ es un n -tipo.

Veremos que además cualquier complejo cruzado que sea un n -tipo es débilmente homotópicamente equivalente a un n -complejo cruzado (ver Corolario 3.3.3). En este sentido diremos que los elementos de \mathbf{Crs}_n son n -tipos.

Proposición 3.2.9. *Para cada $n \geq 0$, la inclusión plena $i_n : \mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$ es reflexiva, tiene por tanto un adjunto izquierda al que denotaremos \tilde{P}_n .*

Demostración: Para $n = 0$, teniendo en cuenta que el functor “conjunto de componentes conexas” de un grupoide es adjunto izquierda de la inclusión discreta $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ (ver página 141), se deduce que el adjunto izquierda a $i_0 : \mathbf{Crs}_0 = \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Crs}$ es $\tilde{P}_0 = \pi_0 \text{ base}$, el functor “conjunto de componentes conexas del grupoide base”.

Para $n = 1$, teniendo en cuenta que el “grupoide fundamental” de un módulo cruzado es el adjunto izquierda de la inclusión “discreta” $\mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Xm}$ (ver página 141), se tiene que el adjunto izquierda de $i_1 : \mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Crs}$ es $\tilde{P}_1 = \pi_1 \text{ base}$, el functor “grupoide fundamental del módulo cruzado base”.

Para dimensiones superiores, el functor reflector $\tilde{P}_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}_n$ de la inclusión i_n se calcula en $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}$ en términos del siguiente coigualador en \mathbf{Xm} (ver Nota 3.2.5):

$$\mathcal{C}_{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ \xrightarrow[0]{} \end{array} \mathcal{C}_n \xrightarrow{q_n} \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}).$$

Nótese que existe un morfismo

$$\bar{\partial}_n : \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}$$

inducido por el hecho de que ∂_n coiguala 0 y ∂_{n+1} , es decir, $\bar{\partial}_n$ es el único morfismo de módulos cruzados tal que $\partial_n = \bar{\partial}_n q_n$ (y viene dado para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ por $(\bar{\partial}_n)_x(\bar{u}) = (\partial_n)_x(u)$), así que podemos definir el complejo cruzado n -dimensional, $\tilde{P}_n(\mathcal{C})$ como:

$$\tilde{P}_n(\mathcal{C}) : \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \mathcal{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}}. \quad (3.20)$$

La definición de \tilde{P}_n en morfismos es evidente de forma que tenemos un functor de \mathbf{Crs} en \mathbf{Crs}_n .

Notamos ahora que se tiene un morfismo canónico $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathcal{C}: & \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\partial_2} & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} \\ \delta_{\mathcal{C}}^{(n)} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow q_n & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ i_n \tilde{P}_n(\mathcal{C}): & \dots & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \mathcal{C}_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\partial_2} & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} \end{array}$$

que hereda de q_n la siguiente propiedad universal que nos prueba que realmente \tilde{P}_n es adjunto izquierda de i_n :

Cualquier morfismo $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ en \mathbf{Crs} con codominio un n -complejo cruzado \mathcal{C}' se factoriza de forma única por el morfismo anterior.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}} & i_n \tilde{P}_n(\mathcal{C}) \\ \phi \downarrow & \swarrow \exists! \bar{\phi} & \\ \mathcal{C}' & & \end{array}$$

Para simplificar notación hemos hecho la identificación $i_n(\mathcal{C}') = \mathcal{C}'$. En efecto, dado un n -complejo cruzado

$$\mathcal{C}' : \mathcal{C}'_n \xrightarrow{\partial'_n} \mathcal{C}'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \dots \rightarrow \mathcal{C}'_2 \xrightarrow{\partial'_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}'}$$

con grupoide base \mathcal{G}' y dado un morfismo $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ en \mathbf{Crs} , el morfismo $\bar{\phi} : \tilde{P}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}'$ en \mathbf{Crs}_n tal que $\bar{\phi} \delta_{\mathcal{C}}^{(n)} = \phi$ está dado por $\bar{\phi}_i = \phi_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}'_i$, en dimensiones $i < n$, y, en dimensión n , $\bar{\phi}_n : \mathcal{C}_n / \text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \mathcal{C}'_n$ es el único morfismo inducido por ϕ_n , teniendo en cuenta que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \mathcal{C}_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ \mathbf{0}_{\mathcal{G}'} & \longrightarrow & \mathcal{C}'_n \end{array}$$

es conmutativo. ■

Para terminar esta sección dedicada a la presentación de las categorías \mathbf{Crs}_n , al igual que en la Sección 3.1 donde probamos que la categoría $\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm}$ de módulos cruzados era una categoría de álgebras sobre la categoría \mathbf{AGpd} de “flechas a grupoides”, veremos ahora que la categoría \mathbf{Crs}_{n+1} es una categoría de álgebras sobre la categoría \mathbf{ACrs}_n de “flechas a n -complejos cruzados”. Este resultado nos permitirá considerar una cohomología del cotriple en estas categorías de $(n+1)$ -complejos cruzados que podrá ser interpretada en términos de torsores y extensiones y en la que vivirá el invariante de Postnikov algebraico k_{n+2} de un complejo cruzado.

Para cada $k > 2$ sea \mathbf{ACrs}_k la categoría cuyos objetos son ternas (X, f, \mathcal{C}) donde \mathcal{C} es un complejo cruzado k -dimensional

$$\mathcal{C} : \mathcal{C}_k \xrightarrow{\partial_k} \mathcal{C}_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}},$$

X es un conjunto, y

$$f : X \rightarrow \coprod_{a \in \text{obj}(\mathcal{G})} C_k(a) = \text{arr}(\widehat{C}_k)$$

es una aplicación tal que $\widehat{\partial}_k f = 0$ (es decir, f es simplemente una aplicación de X en $\ker(\widehat{\partial}_k)$).

Una flecha $(X, f, \mathcal{C}) \rightarrow (X', f', \mathcal{C}')$ en \mathbf{ACrs}_k es un par (ϕ, g) donde $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es una aplicación en \mathbf{Crs}_k y $g : X \rightarrow X'$ es una aplicación tal que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \text{arr}(\widehat{C}_k) & \xrightarrow{\widehat{\phi}_k} & \text{arr}(\widehat{C}'_k). \end{array}$$

Existe un functor de olvido obvio

$$U_{n+1} : \mathbf{Crs}_{n+1} \rightarrow \mathbf{ACrs}_n,$$

que asocia a cada complejo cruzado $(n+1)$ -dimensional \mathcal{C} la terna

$$(\text{arr}(\widehat{C}_{n+1}), \widehat{\partial}_{n+1}, T_n(\mathcal{C}))$$

(que claramente cumple los requisitos para ser un objeto de \mathbf{ACrs}_n) donde

$$T_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}_n$$

es el functor truncación a nivel n que asocia, a cada complejo cruzado el n -complejo cruzado obtenido olvidando las dimensiones mayores que n . Es decir, sólo nos quedamos con la n -cola del complejo cruzado de partida, functor del que estudiaremos algunas propiedades más adelante, en la Sección 3.3.

Proposición 3.2.10. *Para $n \geq 2$, el functor olvido $U_{n+1} : \mathbf{Crs}_{n+1} \rightarrow \mathbf{ACrs}_n$ tiene un adjunto por la izquierda, F_{n+1} .*

Demostración: La primera parte de esta demostración es muy similar a la demostración de la Proposición 3.1.13 aunque algo más simple debido al carácter abeliano de los módulos cruzados que aparecen en dimensiones > 2 en un complejo cruzado.

Vamos pues a dar la definición del adjunto izquierda F_{n+1} .

Sea (X, f, \mathcal{C}) un objeto en \mathbf{ACrs}_n , con

$$\mathcal{C} : \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}},$$

y $\mathcal{C}_i = (\mathcal{G}, C_i, \delta_i)$, $2 \leq i \leq n$. En primer lugar, necesitamos definir un \mathcal{G} -módulo cruzado $\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{G}, C_{n+1}, 0)$ sobre el que actúe trivialmente $\text{im}(\delta_2)$. Definimos $C_{n+1} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ sobre objetos $x \in \mathcal{G}$ como:

$$C_{n+1}(x) = F_{ab} \left(\prod_{z \in \text{obj}(\mathcal{G})} \left[\text{Hom}_{\pi_1(\mathcal{C})}(z, x) \times \prod_{v \in \ker(\widehat{\partial}_n)_z} \text{fbr}(f, v) \right] \right),$$

es decir, $C_{n+1}(x)$ es el grupo abeliano libre generado por todos los pares de elementos $\langle t, u \rangle$ donde $t : z \rightarrow x$ es una flecha en $\pi_1(\mathbf{C})$ con la única restricción de que su codominio es x , y u es un elemento en X tal que $f(u)$ es un elemento de $\ker(\widehat{\partial}_n)_z$, o sea, $(\partial_n)_z(f(u)) = Id_z$. Sobre flechas $s : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} , definimos $C_{n+1}(s) : C_{n+1}(x) \rightarrow C_{n+1}(y)$ como el homomorfismo de grupos abelianos que sobre generadores está dado por:

$$C_{n+1}(s)(\langle t, u \rangle) = \langle q(s) t, u \rangle,$$

donde $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathbf{C})$ es la proyección canónica.

Es claro que $\text{im}(\delta_2)$ actúa trivialmente sobre C_{n+1} , ya que para cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y cada $v \in C_2(x)$

$$C_{n+1}((\delta_2)_x(v))(\langle t, u \rangle) = \langle q((\delta_2)_x(v)) t, u \rangle = \langle Id_x t, u \rangle = \langle t, u \rangle.$$

Consideremos entonces el módulo cruzado $\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{G}, C_{n+1}, 0)$. La transformación natural

$$\partial_{n+1} : \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow \mathcal{C}_n$$

la definimos diciendo que su componente en cada objeto $x \in \mathcal{G}$ es el morfismo de grupos

$$(\partial_{n+1})_x : C_{n+1}(x) \rightarrow C_n(x)$$

que actúa sobre generadores de $C_{n+1}(x)$ mediante

$$(\partial_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) = \sigma^{(t)} f(u) = C_n(\sigma(t))(f(u)),$$

donde $\sigma : \pi_1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{G}$ es una sección, a nivel de grafos subyacentes, de la proyección canónica q , es decir, $\sigma(t)$ es un representante en \mathcal{G} de la flecha t . Nótese que esta definición no depende de la sección σ elegida pues, por la Nota 3.2.6, C_n factoriza a través del funtor $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathbf{C})$. Además ∂_{n+1} es natural, pues dado un morfismo $s : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} y dado un generador se tiene:

$$\begin{aligned} C_n(s)(\partial_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) &= C_n(s)(C_n(\sigma(t))(f(u))) = C_n(s \sigma(t))(f(u)) = \sigma^{(q(s)t)} f(u) \\ &= (\partial_{n+1})_y(\langle q(s) t, u \rangle) = (\partial_{n+1})_y C_{n+1}(s)(\langle t, u \rangle). \end{aligned}$$

Además así definido se tiene que $\partial_n \partial_{n+1}$ es trivial, pues para cada objeto x en \mathcal{G} y cada generador $\langle t, u \rangle \in C_{n+1}(x)$ se tiene:

$$(\partial_n)_x (\partial_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) = (\partial_n)_x(\sigma^{(t)} f(u)) = \sigma^{(t)}((\partial_n)_z(f(u))) = \sigma^{(t)}(Id_z) = Id_x.$$

Concluimos entonces que

$$F_{n+1}(X, f, \mathbf{C}) : \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{G}}.$$

es un $(n + 1)$ -complejo cruzado.

Tenemos ahora que definir F_{n+1} sobre flechas. Dada una flecha

$$(\phi, g) : (X, f, \mathcal{C}) \rightarrow (X', f', \mathcal{C}')$$

en \mathbf{ACrs}_n , el morfismo

$$F_{n+1}(\phi, g) : F_{n+1}(X, f, \mathcal{C}) \rightarrow F_{n+1}(X', f', \mathcal{C}')$$

tiene a $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ como n -truncación y en dimensión $n + 1$ está determinado por la transformación natural

$$\phi_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C'_{n+1}\phi_1,$$

(donde aquí ϕ_1 denota el funtor inducido por ϕ a nivel de grupoides base), cuya componente en cada objeto $x \in \mathcal{G}$ actúa sobre generadores de $C_{n+1}(x)$ como:

$$(\phi_{n+1})_x \langle t, u \rangle = \langle \pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle,$$

donde $\pi_1(\phi) : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}')$ es el morfismo inducido por ϕ en los grupoides fundamentales. Es claro que $(\phi_{n+1})_x \langle t, u \rangle \in C'_{n+1}\phi_1(x)$ ya que

$$\begin{aligned} (\partial'_n)_z(f'(g(u))) &= (\partial'_n)_z(\widehat{\phi}_n(f(u))) = (\partial'_n)_z((\phi_n)_z(f(u))) = (\phi_{n-1})_z(\partial_n)_z(f(u)) \\ &= (\phi_{n-1})_z(\text{Id}_z) = \text{Id}_{\phi_1(z)}. \end{aligned}$$

Además dado un morfismo $s : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} y dado un generador $\langle t, u \rangle$ en $C_{n+1}(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} C'_{n+1}(\phi_1(s))(\phi_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) &= C'_{n+1}(\phi_1(s))(\langle \pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle) \\ &= \langle q'(\phi_1(s))\pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle \\ &= \langle \pi_1(\phi)q(s)\pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle = \langle \pi_1(\phi)(q(s)t), g(u) \rangle \\ &= (\phi_{n+1})_y(\langle q(s)t, u \rangle) = (\phi_{n+1})_y C_{n+1}(s)(\langle t, u \rangle), \end{aligned}$$

donde $q' : \mathcal{G}' \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}')$ es la proyección canónica. Con esto ϕ_{n+1} es una transformación natural de C_{n+1} en $C'_{n+1}\phi_1$.

Nos queda probar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n \\ \phi_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n \end{array}$$

conmuta. Pero, para cada objeto x en \mathcal{G} y cada generador $\langle t, u \rangle$ de $C_{n+1}(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\phi_n)_x(\partial_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) &= (\phi_n)_x(\sigma^{(t)} f(u)) = (\phi_n)_x C_n(\sigma(t))(f(u)) \\ &= C'_n(\phi_1(\sigma(t)))(\phi_n)_z(f(u)) = C'_n(\sigma'(\pi_1(\phi)(t)))(\widehat{\phi}_n(f(u))) \\ &= C'_n(\sigma'(\pi_1(\phi)(t)))(f'g(u)) = (\partial'_{n+1})_x(\langle \pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle) \\ &= (\partial'_{n+1})_x(\phi_{n+1})_x(\langle t, u \rangle), \end{aligned}$$

donde $\sigma' : \pi_1(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{G}'$ es una sección correspondiente a la proyección $q' : \mathcal{G}' \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}')$.

Es fácil ver que así definido F_{n+1} es un funtor de $\mathbf{ACrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$.

Veamos por último que este funtor es adjunto izquierda del funtor olvido U_{n+1} . En efecto, para cada objeto (X, f, \mathcal{C}) en \mathbf{ACrs}_n consideremos el morfismo

$$\eta_{(X, f, \mathcal{C})} : (X, f, \mathcal{C}) \rightarrow U_{n+1}F_{n+1}(X, f, \mathcal{C})$$

definido por el par $(Id_{\mathcal{C}}, h)$ con $h : X \rightarrow \text{arr}(\widehat{C}_{n+1}(X))$ la aplicación que asocia cada elemento $u \in X$ tal que $f(u) \in \widehat{C}_n(x)$ con $(\partial_n)_x(f(u)) = Id_x$, al elemento $h(u) = \langle Id_x, u \rangle \in C_{n+1}(x)$.

La correspondencia $(X, f, \mathcal{C}) \mapsto \eta_{(X, f, \mathcal{C})}$ es natural pues dado un morfismo $(\phi, g) : (X, f, \mathcal{C}) \rightarrow (X', f', \mathcal{C}')$ en \mathbf{ACrs}_n el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (X, f, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\eta_{(X, f, \mathcal{C})} = (Id_{\mathcal{C}}, h)} & U_{n+1}F_{n+1}(X, f, \mathcal{C}) \\ (\phi, g) \downarrow & & \downarrow U_{n+1}F_{n+1}(\phi, g) = (\phi', g') \\ (X', f', \mathcal{C}') & \xrightarrow{\eta_{(X', f', \mathcal{C}')} = (Id_{\mathcal{C}'}, h')} & U_{n+1}F_{n+1}(X', f', \mathcal{C}') \end{array}$$

donde $g' : \text{arr}(\widehat{C}'_{n+1}) \rightarrow \text{arr}(\widehat{C}_{n+1})$ viene dado sobre generadores por

$$g'(\langle t, u \rangle) = \langle \pi_1(\phi)(t), g(u) \rangle.$$

De hecho, para cada $u \in X$ tal que $f(u) \in \widehat{C}_n(x)$ se tiene:

$$g'h(u) = g'(\langle Id_x, u \rangle) = \langle \pi_1(\phi)(Id_x), g(u) \rangle = \langle Id_{\phi_1(x)}, g(u) \rangle = h'g(u),$$

luego

$$\begin{aligned} U_{n+1}F_{n+1}(\phi, g) \eta_{(X, f, \mathcal{C})} &= (\phi, g')(Id_{\mathcal{C}}, h) = (\phi, g'h) = (\phi, h'g) = (Id_{\mathcal{G}'}, h')(\phi, g) \\ &= \eta_{(X', f', \mathcal{C}')}(\phi, g). \end{aligned}$$

Además $\eta_{(X, f, \mathcal{C})}$ es universal desde (X, f, \mathcal{C}) a $U_{n+1}F_{n+1}(X, f, \mathcal{C})$, es decir, para cada complejo cruzado $(n+1)$ -dimensional \mathcal{C}' y cada flecha

$$(\phi, g) : (X, f, \mathcal{C}) \rightarrow U_{n+1}(\mathcal{C}')$$

existe una única flecha $\phi' : F_{n+1}(X, f, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}'$ en \mathbf{Crs}_{n+1} haciendo conmutar el triángulo

$$\begin{array}{ccc} (X, f, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\eta_{(X, f, \mathcal{C})}} & U_{n+1}F_{n+1}(X, f, \mathcal{C}) \\ & \searrow (\phi, g) & \downarrow U_{n+1}(\phi') = (T_n(\phi'), g') \\ & & U_{n+1}(\mathcal{C}'). \end{array} \quad (3.21)$$

En efecto: para cada $k \leq n$, $\phi'_k = \phi_k$ y la transformación natural $\phi'_{n+1} : \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow \mathcal{C}'_{n+1}$ actúa sobre cada objeto $x \in \mathcal{G}$ y cada generador $\langle t, u \rangle \in \mathcal{C}_{n+1}(x)$ como

$$(\phi'_{n+1})_x \langle t, u \rangle = C'_{n+1}(\phi_1(\sigma(t)))(g(u)),$$

donde $\sigma(t)$ es una flecha en \mathcal{G} que representa a la flecha $t : z \rightarrow x$ en el cociente y $u \in X$ es un elemento tal que $g(u) : \phi_1(z) \rightarrow \phi_1(x) \in \text{arr}(\widehat{C}'_{n+1})$, luego $(\phi'_{n+1})_x \langle t, u \rangle \in C'_{n+1}(\phi_1(x))$. Además es natural pues para cada flecha $x \xrightarrow{s} y$ en \mathcal{G} y cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_{n+1}(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} C'_{n+1}(\phi_1(s))(\phi'_{n+1})_x \langle t, u \rangle &= C'_{n+1}(\phi_1(s))C'_{n+1}(\phi_1(\sigma(t)))(g(u)) \\ &= C'_{n+1}(\phi_1(s \sigma(t)))(g(u)) = C'_{n+1}(\phi_1(\sigma(q(s) t)))(g(u)) \\ &= (\phi'_{n+1})_y \langle q(s)t, u \rangle = (\phi'_{n+1})_y (C_{n+1}(s) \langle t, u \rangle) \\ &= (\phi'_{n+1})_y C_{n+1}(s) \langle t, u \rangle. \end{aligned}$$

Además hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \mathcal{C}_n \\ \phi'_{n+1} \downarrow & & \downarrow \phi'_n \\ \mathcal{C}'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & \mathcal{C}'_n \end{array}$$

es decir, para cada objeto x en \mathcal{G} y cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_{n+1}(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\phi'_n)_x (\partial_{n+1})_x \langle t, u \rangle &= (\phi'_n)_x (C_n(\sigma(t))(f(u))) = C'_n(\phi_1(\sigma(t)))(\phi_n)_z(f(u)) \\ &= C'_n(\phi_1(\sigma(t)))\tilde{\phi}(f(u)) = C'_n(\phi_1(\sigma(t)))(\hat{\partial}'_{n+1}g(u)) \\ &= C'_n(\phi_1(\sigma(t)))(\partial'_{n+1})_{\phi_1(z)}(g(u)) \\ &= (\partial'_{n+1})_{\phi_1(x)}C'_{n+1}(\phi_1(\sigma(t)))(g(u)) \\ &= (\partial'_{n+1})_{\phi_1(x)}(\phi'_{n+1})_x \langle t, u \rangle. \end{aligned}$$

Para ver que el triángulo 3.21 conmuta, sea $u \in X$ tal que $f(u) \in \widehat{C}_n(x)$ se tiene entonces

$$g'h(u) = g'(\langle Id_x, u \rangle) = (\phi'_{n+1})_x \langle Id_x, u \rangle = C'_{n+1}(\phi_1(Id_x))(g(u)) = g(u),$$

y así

$$U(\phi') \eta_{(X,f,\mathcal{C})} = (T_n(\phi'), g') (Id_{\mathcal{G}}, h) = (\phi, g'h) = (\phi, g).$$

Además la factorización $(\phi, g) = U(\phi') \eta_{(X,f,\mathcal{C})}$ es única pues si existe otra flecha

$$F_{n+1}(X, f, \mathcal{C}) \xrightarrow{\phi'} \mathcal{C}'$$

en \mathbf{Crs}_{n+1} tal que

$$(\phi, g) = U(\phi'') \eta_{(X,f,\mathcal{C})}$$

y denotamos $U_{n+1}(\phi'') = (T_n(\phi''), g'')$, entonces

$$g''(\langle t, u \rangle) = (\phi''_{n+1})_x(\langle t, u \rangle),$$

para cada $\langle t, u \rangle \in C_{n+1}(x)$, de la igualdad

$$(T_n(\phi''), g'') (Id_{\mathcal{G}}, h) = (\phi, g)$$

deducimos $T_n(\phi'') = \phi$ y $g''h = g$. De esta forma, dado $u \in X$ tal que $f(u) \in \widehat{C}_n(x)$ se tiene:

$$g(u) = g''h(u) = g''(\langle Id_x, u \rangle) = (\phi''_{n+1})_x(\langle Id_x, u \rangle),$$

observamos entonces que, para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ y cada generador $\langle t, u \rangle$ en $C_{n+1}(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} (\phi''_{n+1})_x(\langle t, u \rangle) &= (\phi''_{n+1})_x C_{n+1}(\sigma(t))(\langle Id_z, u \rangle) = C'_{n+1} \phi_1(\sigma(t))(\phi''_{n+1})_z(\langle Id_z, u \rangle) \\ &= C'_{n+1} \phi_1(\sigma(t))(g(u)) = (\phi'_{n+1})_x(\langle t, u \rangle), \end{aligned}$$

con lo que $\phi'' = \phi'$. ■

Nótese, respecto a la adjunción $F_n \dashv U_n$ que acaba de ser establecida, que la counidad

$$\epsilon_{\mathcal{C}} : F_n U_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$$

es una identidad en dimensiones distintas de n . Lo mismo ocurre con la unidad

$$\eta_{U_n(\mathcal{C})} : U_n(\mathcal{C}) \rightarrow U_n F_n U_n(\mathcal{C})$$

y con su imagen por F_n .

De la misma forma que en la Proposición 3.1.15 demostramos que el funtor olvido $U_2 : \mathbf{Crs}_2 \rightarrow \mathbf{AGpd}$ es tripleable, podemos probar que el funtor olvido U_n es tripleable, la demostración de este hecho (que destacamos en la siguiente proposición) es rutinaria.

Proposición 3.2.11. *El funtor olvido $U_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}$ para $n > 2$ es tripleable.*

Denotamos por ${}^n\mathbb{G}$ al cotriple asociado a la adjunción $F_n \dashv U_n$ anterior. Además, dado un complejo cruzado n -dimensional \mathcal{C} como en la página 158, también tenemos un par adjunto

$$F_n : \mathbf{ACrs}_{n-1}/U_n(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Crs}_n/\mathcal{C} : U_n ,$$

entre las correspondientes coma categorías y como consecuencia de la Proposición 3.2.11 se tiene

Corolario 3.2.12. *El functor olvido $U_n : \mathbf{Crs}_n/\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}/U_n(\mathcal{C})$ es tripleable.*

Denotamos también por ${}^n\mathbb{G}$ al cotriple asociado a la adjunción anterior.

3.3 La construcción de la torre

Los funtores \tilde{P}_n, i_n, j_n entre las subcategorías \mathbf{Crs}_n y \mathbf{Crs} satisfacen las relaciones:

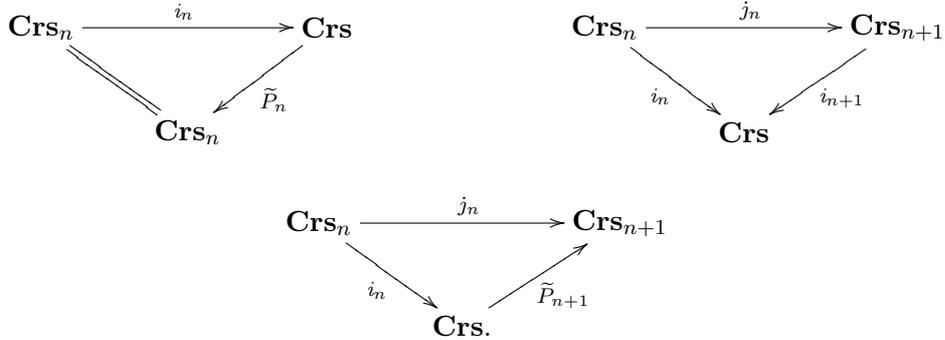
$$\tilde{P}_n i_n = Id_{\mathbf{Crs}_n}, \tag{3.22}$$

$$i_{n+1} j_n = i_n, \tag{3.23}$$

las cuales implican

$$\tilde{P}_{n+1} i_n = j_n. \tag{3.24}$$

Gráficamente, los diagramas siguientes conmutan:



Como consecuencia, los endofuntores $P_n = i_n \tilde{P}_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}$ son idempotentes ($P_n^2 = i_n \tilde{P}_n i_n \tilde{P}_n = i_n Id_{\mathbf{Crs}_n} \tilde{P}_n = P_n$) y además se tiene:

Proposición 3.3.1. *Los funtores idempotentes $P_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}$ satisfacen las identidades*

$$P_{n+1} P_n = P_n \quad y \quad P_n P_{n+1} = P_n.$$

Demostración: La primera igualdad es inmediata

$$P_{n+1}P_n = i_{n+1} \tilde{P}_{n+1} i_n \tilde{P}_n = i_{n+1} j_n \tilde{P}_n = i_n \tilde{P}_n = P_n.$$

La segunda igualdad es consecuencia de que $\text{im}(\partial_{n+1}) = \text{im}(\bar{\partial}_{n+1})$ (ver página 159). ■

Así, obtenemos una cadena de transformaciones naturales

$$\dots \xrightarrow{\eta_{m+2}} P_{n+1} \xrightarrow{\eta_{n+1}} P_n \xrightarrow{\eta_n} \dots \xrightarrow{\eta_2} P_1 \xrightarrow{\eta_1} P_0,$$

donde $\eta_{n+1} = P_{n+1} \circ \delta^{(n)}$ es la composición (horizontal) de (la identidad de) P_{n+1} con la unidad $\delta^{(n)} : Id_{\mathbf{Crs}} \rightarrow P_n$ de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$. Nótese que de la identidad (3.22) se deduce

$$P_n \circ \delta^{(n)} = Id_{P_n}, \quad (3.25)$$

y que además $P_{n+1} \circ \delta^{(n)} = \delta^{(n)} \circ P_{n+1}$, de donde, para cada complejo cruzado $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}$, la componente en \mathcal{C} de la transformación natural η_{n+1} viene dada por

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} = P_{n+1}(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}) = \delta_{P_{n+1}(\mathcal{C})}^{(n)}.$$

Además se tiene:

Proposición 3.3.2. *Para cada complejo cruzado \mathcal{C} , la componente en \mathcal{C} de la unidad $\delta^{(n)}$ de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$ inducen isomorfismos naturales de conjuntos, grupoides y módulos*

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathcal{C}) &\cong \pi_0 P_n(\mathcal{C}), \\ \pi_1(\mathcal{C}) &\cong \pi_1 P_n(\mathcal{C}), \quad 1 \leq n, \\ \pi_m(\mathcal{C}) &\cong \pi_m P_n(\mathcal{C}), \quad 2 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la aplicación continua

$$\mathbf{B}(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}) : \mathbf{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{B}P_n(\mathcal{C})$$

inducen isomorfismos en los grupos de homotopía en dimensiones $\leq n$.

Demostración: Puesto que $P_0 \equiv \pi_0$, es claro que $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0 P_0(\mathcal{C})$. Por otro lado, como $P_1 \equiv \pi_1$, si $n = 1$, entonces $\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_1 P_1(\mathcal{C})$ y como consecuencia de $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0 \pi_1(\mathcal{C})$ (ver página 155) tenemos que $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0 P_1(\mathcal{C})$.

Supongamos $n \geq 2$. Teniendo en cuenta que el morfismo $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}$ tiene:

- Morfismos de módulos cruzados identidad en dimensiones $\leq n - 1$.

- El morfismo de \mathcal{G} -módulos cruzados

$$(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1})$$

en dimensión n , y

- morfismos triviales $\mathcal{C}_m \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ en dimensiones $m > n$.

Es claro que $\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_1 P_n(\mathcal{C})$ y por tanto también $\pi_0(\mathcal{C}) = \pi_0 P_n(\mathcal{C})$.

Al calcular los correspondientes complejos de cadenas (3.18) en la categoría $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})}$ obtenemos un morfismo de complejos de cadenas de $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulos

$$\overline{\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}} : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \overline{P_n(\mathcal{C})}$$

que de nuevo vendrá dado por la transformación identidad en dimensiones menores a n y mediante la transformación inducida por la transformación asociada al morfismo de módulos cruzados proyección en dimensión n . Este morfismo, claramente, induce la igualdad de los $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulos $\pi_m(\mathcal{C})$ y $\pi_m(P_n(\mathcal{C}))$ para todo $2 \leq m \leq n - 2$. Sólo nos resta probar que también induce un isomorfismo natural en dimensiones $n - 1$ y n .

Para cada objeto x obtenemos un morfismo de complejos de cadenas de grupos

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}_{n+1}(x) & \xrightarrow{(\overline{\partial}_{n+1})_x} & \overline{\mathcal{C}}_n(x) & \xrightarrow{(\overline{\partial}_n)_x} & \overline{\mathcal{C}}_{n-1}(x) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}_{n-2}(x) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow (\overline{\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}})_x & & \parallel & & \parallel & & \\ \cdots & \xlongequal{\quad} & \mathbf{0} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1})}(x) & \xrightarrow{(\overline{\partial}'_n)_x} & \overline{\mathcal{C}}_{n-1}(x) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}_{n-2}(x) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

y por ser $(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_n$ el morfismo de módulos cruzados asociado a la transformación natural $\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1})$ cuya componente en $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ es el morfismo proyección a un grupo cociente, el morfismo $(\overline{\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}})_x$ es sobreyectivo y por tanto las imágenes de los morfismos

$$(\overline{\partial}_n)_x : \overline{\mathcal{C}}_n(x) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_{n-1}(x) \quad \text{y}$$

$$(\overline{\partial}'_n)_x : \overline{\mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1})}(x) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_{n-1}(x)$$

coinciden. De esta forma, el morfismo inducido

$$\pi_{n-1}(\mathcal{C})(x) \longrightarrow \pi_{n-1} P_n(\mathcal{C})(x)$$

es un isomorfismo.

Por último, si consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \ker(\bar{\partial}_n)_x & \longrightarrow & \bar{C}_n(x) & \xrightarrow{(\bar{\partial}_n)_x} & \bar{C}_{n-1}(x) \\
 \downarrow & & \downarrow (\bar{\delta}_{\mathcal{C}}^{(n)})_x & & \parallel \\
 \ker(\bar{\partial}'_n)_x & \longrightarrow & \overline{C_n/\text{im}(\bar{\partial}_{n+1})}_x & \xrightarrow{(\bar{\partial}'_n)_x} & \bar{C}_{n-1}(x)
 \end{array}$$

por ser $(\bar{\delta}_{\mathcal{C}}^{(n)})_x$ sobreyectivo, el morfismo inducido entre los núcleos también es sobreyectivo. Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{im}(\bar{\partial}_{n+1})_x & \longrightarrow & \ker(\bar{\partial}_n)_x & \twoheadrightarrow & \pi_n(\mathcal{C})(x) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(\bar{\partial}'_n)_x & \equiv & \pi_n P_n(\mathcal{C})(x)
 \end{array}$$

y por tanto el morfismo inducido $\pi_n(\mathcal{C})(x) \rightarrow \pi_n P_n(\mathcal{C})(x)$ también es sobreyectivo. Además si $[f] \in \pi_n(\mathcal{C})(x)$ es tal que su imagen por el morfismo $\pi_n(\mathcal{C})(x) \rightarrow \pi_n P_n(\mathcal{C})(x) = \ker(\bar{\partial}_n)_x$, que escribimos por \bar{f} , es trivial, entonces como $\bar{f} \in \bar{C}_n(x)/\text{im}(\bar{\partial}_{n+1})_x$ se deduce que $f \in \text{im}(\bar{\partial}_{n+1})_x$, de donde $[f]$ es trivial. De esta forma el morfismo inducido entre $\pi_n(\mathcal{C})(x)$ y $\pi_n P_n(\mathcal{C})(x)$ también es inyectivo. ■

Como corolario inmediato de esta Proposición 3.3.2 tenemos:

Corolario 3.3.3. *Todo complejo cruzado que sea un n -tipo es débilmente homotópicamente equivalente a un n -complejo cruzado.*

Proposición 3.3.4. *Para cada complejo cruzado $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}$, y para cada $n \geq 0$, la aplicación*

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} : P_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow P_n(\mathcal{C})$$

es una fibración cuya fibra tiene el tipo de homotopía de un $K(\Pi, n+1)$. Más concretamente, para $n > 1$, la fibra de $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}}$ sobre cada objeto x en \mathcal{G} tiene tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}(\mathcal{C})(x), n+1)$.

Demostración: Consideremos primero $(\eta_1)_{\mathcal{C}}$ que no es más que la proyección canónica $q_0 : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$, un functor sobreyectivo en objetos a un grupoide discreto y de esta forma es una fibración de grupoides. La fibra sobre una componente conexa $\bar{x} \in \pi_0(\mathcal{C})$ es un grupoide conexo y de esta forma tiene tipo de homotopía de un $K(\Pi, 1)$ tomando como Π el grupo de endomorfismos de cualquier objeto x en la componente conexa \bar{x} , esto es, $\Pi = \pi_1(\mathcal{C})(x)$.

Consideremos ahora $(\eta_2)_{\mathcal{C}} : P_2(\mathcal{C}) \rightarrow P_1(\mathcal{C})$ que viene dada por la proyección canónica $q_1 : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$, este functor es la identidad en objetos y sobreyectivo en

flechas, y por tanto, es una fibración de grupoides. La fibra de $(\eta_2)\mathcal{C}$ sobre un objeto x de $P_1(\mathcal{C})$, es decir, sobre un objeto x del grupoide base \mathcal{G} del complejo cruzado \mathcal{C} es el módulo cruzado (2-complejo cruzado)

$$(\mathcal{C}_2/\text{im}(\partial_3))(x) : C_2(x)/\text{im}(\partial_3)_x \rightarrow \text{im}(\partial_2)_x.$$

Este módulo cruzado es un módulo cruzado reducido pues su grupoide base es un grupo, el grupo $\text{im}(\partial_2)_x$, y tiene $\pi_0 = 0$. Como la aplicación anterior es sobreyectiva, este módulo cruzado tiene $\pi_1 = 0$, mientras que π_2 es precisamente el grupo abeliano $\pi_2(\mathcal{C})(x)$. Para $n > 2$, los grupos de homotopía de la fibra en dimensión n son triviales (por ser ésta un 2-complejo cruzado), de hecho $(\eta_2)\mathcal{C}$ es una fibración cuya fibra sobre $x \in P_1(\mathcal{C})$ tiene el tipo de homotopía de $K(\pi_2(\mathcal{C})(x), 2)$.

Para $n > 1$, todas las $(\eta_{n+1})\mathcal{C} : P_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow P_n(\mathcal{C})$ constan de:

- la aplicación trivial $\mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ en dimensión $n + 1$,
- la “proyección al cociente”, $q_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n/\text{im}(\partial_{n+1})$, en dimensión n , y
- la aplicación identidad en todas las demás dimensiones.

Expresamos esto gráficamente en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 P_{n+1}(\mathcal{C}) : & \cdots & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{C}_{n+1}}{\text{im}(\partial_{n+2})} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1} & \cdots \\
 (\eta_{n+1})\mathcal{C} \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 P_n(\mathcal{C}) : & \cdots & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{C}_n}{\text{im}(\partial_{n+1})} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{n-1} & \cdots
 \end{array}$$

De hecho la aplicación $(\eta_{n+1})\mathcal{C}$ del diagrama (3.26) está determinada esencialmente por la proyección canónica q_n , que a su vez está determinada por el n -ésimo morfismo de conexión, ∂_n , de \mathcal{C} . De esta forma, a nivel de grupoides $(\eta_{n+1})\mathcal{C}$ es la identidad luego trivialmente es una fibración de grupoides. Además para $2 \leq m \leq n - 1$, dado un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, el morfismo de grupos

$$((\eta_{n+1})\mathcal{C})_m : C_m(x) \rightarrow C_m(x)$$

es la identidad, luego es sobreyectivo. Para $m = n$, este morfismo es la proyección sobre el cociente y por tanto es sobreyectivo y en dimensiones mayores la sobreyectividad es obvia, con lo que $(\eta_{n+1})\mathcal{C}$ es una fibración.

Concluimos entonces que la fibra de $(\eta_{n+1})\mathcal{C}$ en un objeto $x \in \mathcal{G}$ es el complejo cruzado reducido

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow C_{n+1}(x)/\text{im}(\partial_{n+2})_x \twoheadrightarrow \text{im}(\partial_{n+1})_x \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

De esta forma, todos los grupos de homotopía de este complejo cruzado son triviales en dimensiones distintas de $n + 1$, en la que es igual a

$$\pi_{n+1}(\mathcal{C})(x) = \ker(C_{n+1}(x)/\text{im}(\partial_{n+2})_x \longrightarrow \text{im}(\partial_{n+1})_x).$$

De esta forma la fibra de $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}}$ en x tiene el tipo de homotopía de

$$K(\pi_{n+1}(\mathcal{C})(x), n + 1).$$

■

Estamos ya en disposición de probar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.3.5 (La torre de Postnikov algebraica de un complejo cruzado). *Para cada complejo cruzado \mathcal{C} , el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{C} & & & \\ & \delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)} \swarrow & & \downarrow \delta_{\mathcal{C}}^{(2)} & \searrow \delta_{\mathcal{C}}^{(1)} & \delta_{\mathcal{C}}^{(0)} \searrow & \\ \dots & P_{n+1}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}}} & P_n(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(\eta_n)_{\mathcal{C}}} & \dots & P_2(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(\eta_2)_{\mathcal{C}}} & P_1(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(\eta_1)_{\mathcal{C}}} & P_0(\mathcal{C}) \end{array} \quad (3.26)$$

es la torre de Postnikov algebraica de \mathcal{C} .

Demostración: El diagrama (3.26) es conmutativo, pues para todo $n \geq 0$, se tiene:

$$\delta_{\mathcal{C}}^{(n)} = (\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} \delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)},$$

ya que los morfismos de complejos cruzados $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}$ y $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} \delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)}$ en dimensiones menores a n vienen dados ambos por la transformación natural identidad, en dimensiones mayores a n por la única transformación natural $\mathcal{C}_k \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ y en dimensión n ambos morfismos están dados por la transformación natural inducida por la “proyección al cociente” $\mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n/\text{im}\partial_{n+1}$.

Después de las Proposiciones 3.3.2 y 3.3.4 bastará con probar que (3.26) es el diagrama límite de

$$\dots \xrightarrow{(\eta_{m+2})_{\mathcal{C}}} P_{m+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\eta_{m+1})_{\mathcal{C}}} P_m(\mathcal{C}) \xrightarrow{(\eta_m)_{\mathcal{C}}} \dots \xrightarrow{(\eta_1)_{\mathcal{C}}} P_0(\mathcal{C}). \quad (3.27)$$

Sabemos que $\{\mathcal{C}, \delta_{\mathcal{C}}^{(n)}\}$ es universal en el sentido de que dado otro cono $\{\phi^{(n)} : \mathcal{C}' \rightarrow P_n(\mathcal{C})\}$ sobre (3.27) existe una única forma de definir una aplicación de complejos cruzados $\phi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tal que para todo n , $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)} \phi = \phi^{(n)}$, basta con que nos demos cuenta de que $(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_m$ viene dada por la transformación natural identidad para todo $m < n$, con lo cual $\phi_m = \phi_m^{(n)}$ para $m < n$, además $\phi^{(n)} = (\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} \phi^{(n+1)}$ y para $m < n$, el morfismo $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}}$ también viene dado por la transformación

natural identidad, de donde deducimos que $\phi_m^{(n)} = \phi_m^{(n+1)}$ para todo $m < n$. De esta forma podemos definir $\phi_n = \phi_n^{(n+1)}$. Así definido $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}\phi = \phi^{(n)}$, ya que si $m < n$, se tiene:

$$(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}\phi)_m = (\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_m\phi_m = \phi_m = \phi_m^{(m+1)} = \phi_m^{(n)},$$

si $m = n$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}\phi)_n &= (\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_n\phi_n = (\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})_n\phi_n^{(n+1)} = ((\eta_{n+1})_{\mathcal{C}})_n(\delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)})_n\phi_n^{(n+1)} \\ &= ((\eta_{n+1})_{\mathcal{C}})_n\phi_n^{(n+1)} = \phi_n^{(n)}, \end{aligned}$$

y para $m > n$ claramente se da la igualdad ya que tanto $\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}\phi$ como $\phi^{(n)}$ en estas dimensiones son triviales. ■

Notemos que todos los complejos cruzados $P_n(\mathcal{C})$ para $n \geq 2$ en el diagrama (3.26) tienen el mismo grupoide base, \mathcal{G} , y que todos los morfismos

$$\eta_{n+1} : P_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow P_n(\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad \delta_{\mathcal{C}}^{(n)} : \mathcal{C} \rightarrow P_n(\mathcal{C})$$

son morfismos de \mathcal{G} -complejos cruzados (es decir, sus funtores cambio de base son la identidad en \mathcal{G}). De esta forma, todos los complejos cruzados $P_n(\mathcal{C})$ para $n \geq 1$ tienen el mismo grupoide fundamental que \mathcal{C} , como se puede deducir aplicando P_1 a la identidad (3.25) y del hecho de que $\tilde{P}_1(\mathcal{C}) = \pi_1(\mathcal{C})$.

3.4 Algunos resultados técnicos sobre complejos cruzados

Comenzamos esta sección introduciendo dos funtores que necesitaremos más adelante.

El funtor

$$\text{techo}_2 = \text{techo} : \mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}} \quad (3.28)$$

asocia a cada módulo cruzado $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ sobre \mathcal{G} , el \mathcal{G} -grupo C y a cada morfismo de módulos cruzados sobre \mathcal{G} , la correspondiente transformación natural. Obsérvese que este funtor conserva límites finitos y coigualadores.

Para $n > 2$, el funtor

$$\text{techo}_n : \mathbf{Crs}_{n, \mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathcal{G}} \quad (3.29)$$

asocia a cada n -complejo cruzado \mathcal{C} con \mathcal{G} como grupoide base, el \mathcal{G} -módulo $\text{techo}_n(\mathcal{C}) = \text{techo}(\mathcal{C}_n)$. Nótese que, al igual que el funtor techo este funtor conserva límites finitos y coigualadores.

Además del funtor \tilde{P}_n existe una segunda forma de obtener un n -complejo cruzado a partir de un complejo cruzado: si $n \geq 1$, la “truncación simple” nos define un funtor $T_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}_n$ tomando las n primeras dimensiones del complejo cruzado dado, así T_2 es el “módulo cruzado base” y T_1 es el “grupoide base”. Para $n = 0$ tenemos el “conjunto de objetos del grupoide base”, $T_0 = \text{obj} T_1$. Para todo $n = 0, 1, \dots$, el funtor T_n resulta ser adjunto derecha a la inclusión $i_n : \mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$. Para comprobarlo, supongamos dados un n -complejo cruzado \mathcal{C} con grupoide base \mathcal{G} y un complejo cruzado \mathcal{C}' con grupoide base \mathcal{G}' . Vamos a comprobar que dar un morfismo de \mathcal{C} a $T_n(\mathcal{C}')$ en \mathbf{Crs}_n es equivalente a dar un morfismo de $i_n(\mathcal{C})$ a \mathcal{C}' en \mathbf{Crs} , gráficamente:

$$\frac{\mathcal{C} \longrightarrow T_n(\mathcal{C}')}{i_n(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}'}$$

Dado $\phi : \mathcal{C} \rightarrow T_n(\mathcal{C}')$, definimos $\bar{\phi} : i_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}'$, de forma que coincida con ϕ hasta la dimensión n , es decir, $\bar{\phi}_k = \phi_k$ para $k \leq n$, y en dimensión $k > n$ el morfismo de módulos cruzados $\bar{\phi}_k : \mathbf{0}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{C}'_k$, teniendo en cuenta que el funtor cambio de grupoide base F tiene que ser igual en todas las dimensiones, viene dado por la transformación natural $\tau_k : \mathbf{0}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{C}'_k F$ que asocia a cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ el morfismo trivial de grupos $(\tau_k)_x : \mathbf{0}_{\mathcal{G}}(x) \rightarrow \mathcal{C}'_k(F(x))$, es decir, $(\tau_k)_x(\text{Id}_x) = \text{Id}_{F(x)}$, pues como $\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$ es el \mathcal{G} -módulo cruzado inicial, no tiene morfismos distintos de la identidad. Así definida la correspondencia $\phi \mapsto \bar{\phi}$ es obviamente natural y hace conmutar los cuadrados:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_n \\ f_{n+1} \downarrow & & \downarrow f_n \\ \mathcal{C}'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & \mathcal{C}'_n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{0}_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\mathcal{G}} \\ f_{k+1} \downarrow & & \downarrow f_k \\ \mathcal{C}'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & \mathcal{C}'_k \end{array} \quad \forall k > n + 1.$$

Recíprocamente, dado un morfismo $\phi : i_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}'$ tenemos otro en \mathbf{Crs}_n que no es más que la n -truncación de ϕ , es decir, $T_n(\phi) : \mathcal{C} \rightarrow T_n(\mathcal{C}')$. Es sencillo observar que estas dos correspondencias son una la inversa de la otra, y por tanto, $i_n \dashv T_n$.

El funtor T_n tiene además un adjunto derecha que en dimensiones bajas es esencialmente *codiscr* ($n = 0$) y *triv* ($n = 1$). En dimensiones $n > 1$, el adjunto derecha a T_n es el funtor $\text{cosk}_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}$, que asigna a cada n -complejo cruzado

$$\mathcal{C} : \dots \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}}$$

el siguiente $(n + 1)$ -complejo cruzado

$$\text{cosk}_n(\mathcal{C}) : \dots \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}} \rightarrow \ker(\partial_n) \hookrightarrow \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}}.$$

El hecho de que T_n tenga adjuntos derecha e izquierda nos permite asegurar que este funtor conserva límites y colímites. También podemos asegurar que estos funtores se extienden a las categorías de grupos o grupoides internos en \mathbf{Crs} , esto es, llevan un grupo o grupoide interno en \mathbf{Crs} en un grupo o grupoide interno en \mathbf{Crs}_n . Denotaremos también T_n al funtor truncación a nivel n desde la categoría \mathbf{Crs}_m , con $m \geq n$.

Vamos a continuación a extender los resultados probados en la Proposición 3.1.9 al contexto de complejos cruzados n -dimensionales. Comenzaremos introduciendo las categorías \mathbf{GCrs}_n . Para cada $n > 0$, ésta será la subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Gpd}(\mathbf{Crs}_n)$ de grupoides internos en \mathbf{Crs}_n con objetos aquellos grupoides $\mathcal{G} \in \mathbf{Gpd}(\mathbf{Crs}_n)$ tales que su $(n - 1)$ -truncación $T_{n-1}(\mathcal{G})$ es un grupoide discreto, esto es, los n -complejos cruzados de objetos y flechas de \mathcal{G} tienen la misma $(n - 1)$ -truncación y los morfismos dominio, codominio, identidades y composición tienen identidades como $(n - 1)$ -truncación. Representaremos a un grupoide $\mathcal{G} \in \mathbf{GCrs}_n$ mediante un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_n^1 \times_{\mathcal{C}_n^0} \mathcal{C}_n^1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}_n^1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{id} \\ \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{id} \end{array} & \mathcal{C}_n^0 \\
 & \searrow^{\partial_n^1 \times_{\partial_n^0} \partial_n^1} & \downarrow \partial_n^1 & & \swarrow_{\partial_n^0} \\
 & & \mathcal{C}_{n-1} & & \\
 & & \downarrow \partial_{n-1} & & \\
 & & \mathcal{C}_{n-2} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{C}_2 & & \\
 & & \downarrow \partial_2 & & \\
 & & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} & &
 \end{array} \tag{3.30}$$

Si $n = 1$, la categoría \mathbf{GCrs}_1 es la categoría de 2-grupoides equivalente a la categoría $\mathbf{G1H}$. En la Proposición 3.1.9 probamos la existencia de una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm} \begin{array}{c} \xrightarrow{2\text{gd}} \\ \xleftarrow{\text{xm}} \end{array} \mathbf{G1H} = \mathbf{GCrs}_1.$$

En la siguiente proposición extendemos este resultado a las categorías \mathbf{GCrs}_n para $n > 1$.

Proposición 3.4.1. *Las categorías \mathbf{Crs}_{n+1} y \mathbf{GCrs}_n son equivalentes para $n > 1$.*

Demostración: La equivalencia buscada viene dada por los funtores

$$\mathbf{N}_n : \mathbf{Crs}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{GCrs}_n \quad \text{y} \quad \mathbf{crs}_n : \mathbf{GCrs}_n \longrightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$$

definidos cómo sigue.

Dado un complejo cruzado $(n+1)$ -dimensional \mathcal{C} el grupoide $\mathbf{N}_n(\mathcal{C})$ tiene como objeto de objetos a $\mathcal{F}^0 = T_n(\mathcal{C})$ y como objeto de flechas el n -complejo cruzado

$$\mathcal{F}^1 : \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n p_0} \mathcal{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}},$$

donde $\mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n, 0)$ es el \mathcal{G} -módulo cruzado asociado al \mathcal{G} -módulo $\mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n$ y $p_0 : \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n$ es la proyección canónica.

La aplicación dominio $s : \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^0$ es la inducida por la proyección $p_0 : \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n$, y la aplicación codominio $t : \mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^0$ es la inducida por el morfismo de \mathcal{G} -módulos $\mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_n$ que en cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ tiene como componente en x el morfismo de grupos abelianos que asocia a cada $(u, v) \in \mathcal{C}_{n+1}(x) \oplus \mathcal{C}_n(x)$ el producto $(\partial_{n+1})_x(u)v \in \mathcal{C}_n(x)$. Además la inclusión canónica de \mathcal{G} -módulos $\mathcal{C}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n$ determina una sección común para s y t , y obtenemos un grafo

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{F}^1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & \mathcal{F}^0 \end{array} \quad (3.31)$$

interno en la categoría $(\mathbf{Crs}_n)_{T_{n-1}(\mathcal{C})}$ de n -complejos cruzados con $(n-1)$ -truncación igual a $T_{n-1}(\mathcal{C})$.

Aplicando el functor techo_n al grafo anterior obtenemos un grafo

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{C}_{n+1} \oplus \mathcal{C}_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} & \mathcal{C}_n \end{array} \quad (3.32)$$

en la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} -módulos. En este grafo existe una única estructura de grupoide interno en $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$, cuya composición está dada por la transformación natural que en cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, actúa como

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{n+1}(x) \oplus \mathcal{C}_n(x)) \times_{\mathcal{C}_n(x)} (\mathcal{C}_{n+1}(x) \oplus \mathcal{C}_n(x)) &\xrightarrow{\circ} \mathcal{C}_{n+1}(x) \oplus \mathcal{C}_n(x) \\ ((u, v), (u', (\partial_{n+1})_x(u)v)) &\longmapsto (u' u', v). \end{aligned}$$

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula (1.6) en la Proposición 1.1.5 pues tomando el grupo $\mathcal{C}_{n+1}(x) \oplus \mathcal{C}_n(x)$ como un grupoide discreto, sus flechas serán los elementos de dicho grupo y se tiene:

$$\begin{aligned} (u', v') \circ (u, v) &= (u', v') \text{id}(s(u', v'))^{-1}(u, v) = (u', v')(0_{\mathcal{C}_{n+1}(x)}, v')^{-1}(u, v) \\ &= (u', v')(0_{\mathcal{C}_{n+1}(x)}, (v')^{-1})(u, v) = (u' u', v) = (u' u', v). \end{aligned}$$

La estructura de grupoide interno en $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ del grafo (3.32) determina una estructura de grupoide interno en $(\mathbf{Crs}_n)_{T_{n-1}(\mathcal{C})}$ en el grafo (3.31), a este grupoide interno en \mathbf{Crs}_n lo denotaremos como $\mathbf{N}_n(\mathcal{C})$. Es fácil comprobar que esta construcción es funtorial por lo que tenemos definido el funtor

$$\mathbf{N}_n : \mathbf{Crs}_{n+1} \rightarrow \mathbf{GCrs}_n. \quad (3.33)$$

Vamos ahora a definir su cuasi-inverso $\mathbf{crs}_n : \mathbf{GCrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$. Consideremos un objeto

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \mathcal{C}^0$$

id

en \mathbf{GCrs}_n , como en (3.30), y apliquemos el funtor techo_n al morfismo $s : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^0$, obtenemos entonces un morfismo de \mathcal{G} -módulos

$$s = \text{techo}_n(s) : \text{techo}_n(\mathcal{C}^1) = C_n^1 \rightarrow C_n^0 = \text{techo}_n(\mathcal{C}^0).$$

El núcleo de este morfismo es un nuevo \mathcal{G} -módulo $K = \ker(s) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que asocia a cada objeto $x \in \mathcal{G}$ el subgrupo $K(x)$ de $C_n^1(x)$ formado por los elementos $u \in C_n^1(x)$ tales que $s_x(u) = 0_{C_n^0(x)}$ con acción inducida por la acción de C_n^1 . Además este \mathcal{G} -módulo define un módulo cruzado $\mathcal{K} = (\mathcal{G}, K, 0)$ de forma que la imagen de ∂_2 actúa trivialmente sobre el grupoide totalmente desconexo \hat{K} . De hecho, tenemos un $(n+1)$ -complejo cruzado

$$\mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) = (\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^0 \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}}),$$

donde $\partial_{n+1} : K \rightarrow C_n^0$ es un morfismo de \mathcal{G} -módulos inducido por el morfismo de \mathcal{G} -módulos $t = \text{techo}_n(t) : C_n^1 \rightarrow C_n^0$ asociado al codominio de \mathcal{G} , es decir, para cada objeto $x \in \mathcal{G}$, la componente de ∂_{n+1} en x viene dada por

$$(\partial_{n+1})_x : K(x) \rightarrow C_n^0(x), \quad (\partial_{n+1})_x(u) = t_x(u).$$

Nótese que realmente $\mathbf{crs}_n(\mathcal{G})$ es un complejo de cadenas. En efecto, dado $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y $u \in K(x)$ como $\partial_n^0 t = \partial_n^1 = \partial_n^0 s$ se tiene:

$$(\partial_n^0 \partial_{n+1})_x(u) = (\partial_n^0)_x t_x(u) = (\partial_n^0)_x s_x(u) = (\partial_n^1)_x (0_{C_n^0(x)}) = 0_{C_{n-1}(x)}.$$

La construcción de $\mathbf{crs}_n(\mathcal{G})$ también es funtorial, por lo que tenemos un funtor

$$\mathbf{crs}_n : \mathbf{GCrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}. \quad (3.34)$$

Veamos que los funtores \mathbf{crs}_n y \mathbf{N}_n son cuasi-inversos uno del otro.

Demostración: Puesto que $\mathbf{crs}_n(\mathbf{N}_n(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$, es suficiente verificar el cuadrado de la derecha, es decir, $\pi_0(\mathcal{G}) = P_n \mathbf{crs}_n(\mathcal{G})$. Estos dos complejos cruzados coinciden en dimensiones menores que n . Ahora bien, $\pi_0(\mathcal{G})$ es, en dimensión n , el coigualador de s y t (ver diagrama 3.30). Por otro lado, $P_n \mathbf{crs}_n(\mathcal{G})$ es, en dimensión n , el cociente de C_n^0 por la imagen de $\partial_{n+1}(= t) : \ker(s) \rightarrow C_n^0$. Que este cociente es igual al coigualador anterior es una consecuencia inmediata del hecho general de que el coigualador de un par de homomorfismos de grupos, $s, t : G \rightarrow H$ que tienen una sección común es el cociente de H por $t(\ker(s))$. ■

Usando ahora el funtor techo_n (3.29), se tiene

Proposición 3.4.3. *Para cualquier grupoide $\mathcal{G} \in \mathbf{GCrs}_n$ y cualquier $(n+1)$ -complejo cruzado \mathcal{C} se tienen isomorfismos naturales:*

$$\text{techo}_n \text{End}(\mathcal{G}) \cong \text{techo}_n \text{obj}(\mathcal{G}) \times (\pi_{n+1} \mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) \circ q) \quad y$$

$$\text{techo}_n \text{End}(\mathbf{N}_n(\mathcal{C})) \cong \text{techo}_n T_n(\mathcal{C}) \times (\pi_{n+1}(\mathcal{C}) \circ q),$$

donde hemos denotado \mathcal{G} indistintamente al grupoide base de $\text{obj}(\mathcal{G})$ y de \mathcal{C} y por q a las proyecciones canónicas $\mathcal{G} \rightarrow \pi_1 \text{obj}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$.

Demostración: Teniendo en cuenta que $\text{obj}(\mathbf{N}_n(\mathcal{C})) = T_n(\mathcal{C})$ y que $\mathbf{crs}_n \mathbf{N}_n(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, basta con probar el primer isomorfismo.

Ahora bien, $\text{techo}_n \text{End}(\mathcal{G})$ es el igualador en la categoría de \mathcal{G} -módulos de $\text{techo}_n(s)$ y $\text{techo}_n(t)$ (ver diagrama 3.30). Para cada objeto $x \in \mathcal{G}$, el isomorfismo

$$\text{techo}_n \text{End}(\mathcal{G})(x) \xrightarrow{\cong} \text{techo}_n \text{obj}(\mathcal{G})(x) \times (\pi_{n+1} \mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) \circ q(x))$$

asocia a cada $u \in \text{techo}_n \text{End}(\mathcal{G})(x)$ el par

$$(s(u) = t(u), u - id(s(u))) \in \text{techo}_n \text{obj}(\mathcal{G})(x) \times (\pi_{n+1} \mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) \circ q(x)).$$

■

3.5 La torre de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado

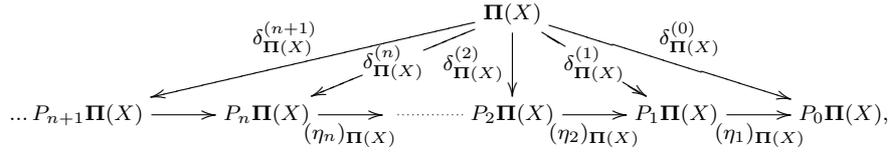
Vamos ahora a obtener la torre de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado. Para ello, como en el Capítulo 2, usaremos la conexión entre las categorías de espacios y de complejos cruzados dada por los funtores “complejo cruzado fundamental” y “espacio clasificador” de un complejo cruzado

$$\mathbf{\Pi} = \pi S : \mathbf{Top} \xrightarrow{S} \mathbf{SSet} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Crs},$$

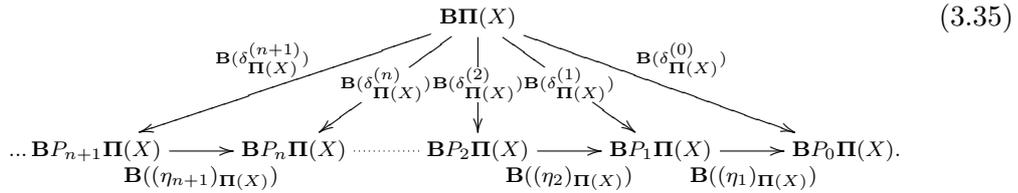
$$\mathbf{B} = |\text{Ner}(-)| : \mathbf{Crs} \xrightarrow{\text{Ner}} \mathbf{SSet} \xrightarrow{||} \mathbf{Top},$$

que hemos recordado en la Sección 3.2.1. Observamos que el hecho de que el espacio X sea del tipo de homotopía de un complejo cruzado (es decir, que su complejo cruzado fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$ tenga el mismo tipo de homotopía que X) es equivalente a que exista una equivalencia homotópica débil $X \sim \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$.

A partir del complejo cruzado fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$ podemos obtener la torre de Postnikov de $\mathbf{\Pi}(X)$ (ver 3.26)



y aplicando al diagrama anterior el functor espacio clasificador \mathbf{B} obtenemos el diagrama



Si tenemos en cuenta que el functor \mathbf{B} se obtiene como la composición del functor $\text{Ner} : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{SSet}$ y de la realización geométrica $|| : \mathbf{SSet} \rightarrow \mathbf{Top}$, que el functor Ner conserva fibraciones (ver [14], Proposición 6.2), y como tiene un adjunto izquierda lleva fibras en fibras, deducimos que el functor \mathbf{B} también conserva fibraciones y lleva fibras en fibras pues es composición de dos funtores a los que les ocurre esto. De lo anterior se tiene que las flechas $\mathbf{B}(\eta_n)_{\mathbf{\Pi}(X)}$ son fibraciones y sus fibras tienen el tipo de homotopía de un $K(\mathbf{\Pi}, n + 1)$. Deducimos entonces que el diagrama (3.35) es la torre de Postnikov del espacio $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$.

Para construir la torre de X bastará con conectar X con el espacio $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$, esta conexión la hacemos vía la counidad y unidad de las adjunciones $|| \dashv S$ y $\pi \dashv \text{Ner}$ respectivamente, cuyas componentes en X y $S(X)$ darán equivalencias homotópicas débiles

$$X \longleftarrow |S(X)| \longrightarrow |\text{Ner}\pi S(X)| = \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$$

(y por tanto isomorfismos en la categoría de homotopía). En general escribiremos $X \sim \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$ para indicar la conexión entre ambos espacios. Tenemos entonces:

Teorema 3.5.1. *El diagrama*

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \text{~~~~~} \\
 \mathbf{B}\Pi(X) \\
 \begin{array}{ccccc}
 \swarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(n+1)}) & & \downarrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(n)}) & & \searrow \mathbf{B}(\delta_{\Pi(X)}^{(0)}) \\
 \mathbf{B}P_{n+1}\Pi(X) & \longrightarrow & \mathbf{B}P_n\Pi(X) & \cdots & \mathbf{B}P_1\Pi(X) & \longrightarrow & \mathbf{B}P_0\Pi(X) \\
 \mathbf{B}((\eta_{n+1})_{\Pi(X)}) & & & & \mathbf{B}((\eta_2)_{\Pi(X)}) & & \mathbf{B}((\eta_1)_{\Pi(X)})
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{3.36}$$

es la torre de Postnikov del espacio X .

Obsérvese que para cualquier espacio X el morfismo de conexión $X \sim \mathbf{B}\Pi(X)$ no es en general una equivalencia homotópica y de esta forma el diagrama 3.36 nos dará la torre de Postnikov de X sólo cuando X tiene el tipo de homotopía de un complejo cruzado (por ejemplo, si X es un J -espacio en el sentido de Whitehead [70]).

Capítulo 4

Cohomologías

La segunda parte de esta memoria está dedicada a la obtención de los k -invariantes de Postnikov. Distinguiremos entre dos tipos de k -invariantes:

- Algebraicos
- Topológicos

Los invariantes algebraicos serán elementos de cohomologías algebraicas definidas en las categorías de n -tipos algebraicos (en nuestro caso las categorías \mathbf{Crs}_n o \mathbf{Gd}_n). Los invariantes topológicos serán elementos en cohomologías singulares de espacios que son n -tipos.

En este capítulo haremos un repaso sobre las diferentes cohomologías que vamos a utilizar y además daremos un morfismo que nos conecte cohomologías algebraicas con cohomologías singulares. Estos morfismos nos permitirán obtener los k -invariantes topológicos a partir de los algebraicos.

Notamos también que los coeficientes que usaremos para definir estas cohomologías, en las que vivirán los k -invariantes, serán *sistemas de coeficientes locales*. El uso de estos sistemas (en lugar de usar sistemas de coeficientes triviales, como es común en las teorías de torres de Postnikov clásicas) nos permitirá evitar condiciones del tipo de 1-conexión o nilpotencia en los espacios o modelos algebraicos. Ésta puede ser otra de las ventajas del tratamiento universal que a esta teoría se le está dando en esta memoria.

4.1 Cohomología singular con coeficientes locales

En esta sección haremos un repaso de la cohomología singular, ver [71], y probaremos el Lema 4.1.1 que nos permite interpretar los cociclos para la cohomología singular con coeficientes locales en términos de aplicaciones simpliciales.

Sea \mathbf{X} un conjunto simplicial, \mathcal{G} un grupoide y $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$ una aplicación simplicial. Esta aplicación simplicial determina un objeto, que denotaremos \mathbf{X}_φ , en la coma categoría $\mathbf{S}\text{Set}/\text{Ner}(\mathcal{G})$. Notemos que para cada n -símplice $x \in X_n$, si $\varphi_n(x) = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \in \text{Ner}_n(\mathcal{G})$ entonces el objeto x_0 en \mathcal{G} se puede calcular como $x_0 = d_1 \dots d_n \varphi_n(x)$ y la flecha f_1 es $f_1 = d_2 \dots d_n \varphi_n(x)$.

Recordamos que una (φ, n) -cocadena singular de \mathbf{X} con coeficientes en un \mathcal{G} -módulo Π es una función

$$c : X_n \longrightarrow \coprod_{x_0 \in \text{obj}(\mathcal{G})} \Pi(x_0)$$

que asigna a cada n -símplice $x \in X_n$ un elemento $c(x) \in \Pi(d_1 \dots d_n \varphi_n(x))$.

Una *cocadena singular normalizada* es una cocadena singular tal que $c(x)$ es trivial para cada n -símplice degenerado $x \in X_n$, es decir, $c(s_j(y)) = 0$ para cada $0 \leq j \leq n-1$ e $y \in X_{n-1}$.

El conjunto $C_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$ de todas las (φ, n) -cocadenas singulares normalizadas es un grupo abeliano con la suma de funcionales y cero la aplicación “constante” cero.

Podemos usar el hecho de que cada flecha en el grupoide \mathcal{G} tienen una inversa para definir un operador coborde:

$$\delta : C_\varphi^m(\mathbf{X}, \Pi) \rightarrow C_\varphi^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi)$$

que vendrá dado para cada $x \in X_{n+1}$ mediante la suma alternada:

$$\delta c(x) = f_1^{-1} c(d_0(x)) - c(d_1(x)) + \dots + (-1)^{n+1} c(d_{n+1}(x)) \quad (4.1)$$

siendo $f_1 = d_2 \dots d_n \varphi_n(x)$.

Una (φ, n) -cocadena singular $c \in C_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$ tal que $\delta(c) = 0$ es llamada *cociclo*.

Así definido el operador coborde δ (4.1) es un morfismo de grupos y $\delta^2 = 0$ pues para cada $x \in X_{n+2}$ si $\varphi_{n+2}(x) = x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n+2} \in \text{Ner}_{n+2}(\mathcal{G})$, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta^2 c(x) &= f_1^{-1} (\delta c(d_0(x))) - \delta c(d_1(x)) + \delta c(d_2(x)) + \dots + (-1)^{n+2} \delta c(d_{n+2}(x)) \\ &= f_1^{-1} (f_2^{-1} c(d_0 d_0(x)) - c(d_1 d_0(x)) + \dots + (-1)^{n+1} c(d_{n+1} d_0(x))) \\ &\quad - ((f_2 f_1)^{-1} c(d_0 d_1(x)) - c(d_1 d_1(x)) + \dots + (-1)^{n+1} c(d_{n+1} d_1(x))) \\ &\quad + (f_1^{-1} c(d_0 d_2(x)) - c(d_1 d_2(x)) + \dots + (-1)^{n+1} c(d_{n+1} d_2(x))) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+2} (f_1^{-1} c(d_0 d_{n+2}(x)) - c(d_1 d_{n+2}(x)) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} c(d_{n+1} d_{n+2}(x))) = 0. \end{aligned}$$

Tenemos así definido un complejo de cocadenas de grupos abelianos

$$C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi) = C_\varphi^0(\mathbf{X}, \Pi) \xrightarrow{\delta} C_\varphi^1(\mathbf{X}, \Pi) \rightarrow \dots \rightarrow C_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi) \xrightarrow{\delta} C_\varphi^{n+1}(\mathbf{X}, \Pi) \rightarrow \dots$$

Denotaremos por $Z_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$ al grupo de n -cociclos del complejo anterior y por $H_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$ a sus grupos de homología.

En particular, si $\mathcal{G} = \pi_1(\mathbf{X})$ es el grupoide fundamental de \mathbf{X} , Π es un $\pi_1(\mathbf{X})$ -módulo y

$$\varphi = \eta_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))$$

es el morfismo canónico, dado por la unidad de la adjunción $\pi_1 \dashv \text{Ner}$ (1.14), los grupos de cohomología correspondientes a esta aplicación φ son por definición los grupos de *cohomología singular* de \mathbf{X} con coeficientes en Π , que denotaremos por $H^n(\mathbf{X}, \Pi)$, (ver [71]).

Como vimos en la Sección 1.5.2, el n -ésimo conjunto simplicial de Eilenberg-Mac Lane generalizado de \mathcal{G} con coeficientes en Π , $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$, puede ser considerado como un elemento en la coma categoría $\mathbf{S}\text{Set}/\text{Ner}(\mathcal{G})$ mediante la proyección canónica $\ell : L_{\mathcal{G}}(\Pi, n) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$. En lo que sigue denotaremos por $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ tanto al dominio de ℓ como al objeto $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_\ell$ en la categoría coma $\mathbf{S}\text{Set}/\text{Ner}(\mathcal{G})$.

El siguiente lema nos muestra cómo los cociclos en el complejo de cocadenas $C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$ se pueden interpretar como aplicaciones de \mathbf{X}_φ en $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ en la coma categoría $\mathbf{S}\text{Set}/\text{Ner}(\mathcal{G})$.

Lema 4.1.1. *Los n -cociclos en el complejo de cocadenas $C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$ corresponden biyectivamente a aplicaciones simpliciales $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ tales que $\ell \mathbf{u} = \varphi$,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\quad \mathbf{u} \quad} & L_{\mathcal{G}}(\Pi, n) \\ & \searrow \varphi & \swarrow \ell \\ & \text{Ner}(\mathcal{G}) & \end{array} \tag{4.2}$$

En otras palabras, existe una biyección natural

$$Z_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{S}\text{Set}/\text{Ner}(\mathcal{G})}(\mathbf{X}_\varphi, L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)).$$

Demostración: Como la aplicación ℓ es la identidad en dimensiones menores que n , las componentes bajas u_0, \dots, u_{n-1} de una aplicación simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$, tal que $\ell \mathbf{u} = \varphi$ están completamente determinadas por φ (ellas son $u_k = \varphi_k$). De hecho dar una aplicación simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ tal que $\ell \mathbf{u} = \varphi$ es equivalente a dar una aplicación

$$u_n : X_n \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n = \coprod_{\xi \in \text{Ner}_n(\mathcal{C})} \Pi(d_1 \dots d_n(\xi))$$

tal que:

a.- $\ell_n u_n = \varphi_n$,

- b.- $d_i u_n = \varphi_{n-1} d_i$, $0 \leq i \leq n$,
- c.- $u_n s_j = s_j \varphi_{n-1}$, $0 \leq j \leq n-1$,
- d.- satisface la condición de cociclo (1.38).

Si c es una función tal que $u_n(x) = (\xi(x), c(x))$ para $x \in X_n$, entonces la condición (a) implica que $\xi(x) = \varphi_n(x)$ y de esta forma $c(x) \in \Pi(d_1 \dots d_n \varphi_n(x))$ de donde c es una (φ, n) -cocadena singular de X con coeficientes en Π . Además, la condición $u_n s_j = s_j u_{n-1}$, $0 \leq j \leq n-1$, implica que c es normalizada y la condición de cociclo (1.38) para u_n establece precisamente la condición de que esta cocadena singular es un cociclo.

Recíprocamente, si $c \in C_\varphi^m(\mathbf{X}, \Pi)$ es un cociclo. Definimos la aplicación $u_n : X_n \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n$ como $u_n(x) = (\varphi_n(x), c(x))$ por lo que automáticamente satisface la condición de cociclo y $\ell_n u_n = \varphi_n$. El hecho de ser c normalizado implica que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, u_n)$ es una aplicación simplicial truncada. Por la Proposición 1.5.3 podemos extenderla a una aplicación simplicial $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ tal que $\ell \mathbf{u} = \varphi$. ■

4.1.1 Un teorema de representación de la cohomología singular con coeficiente locales

En esta sección vamos a presentar un teorema de representación de la cohomología singular con coeficientes locales. Para ello, comenzamos estableciendo una caracterización de las homotopías entre aplicaciones de \mathbf{X}_φ en $L_{\mathcal{G}}(A, n)$ en la categoría coma $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$, que será análoga a la dada en la Proposición 1.5.3 para aplicaciones simpliciales. Esta caracterización se basa en que $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ es el nervio de un n -hipergrupoide y por tanto cualquier homotopía \mathbf{h} entre morfismos simpliciales con codominio $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ está completamente determinada por su truncación $\text{tr}_n(\mathbf{h})$, además una tal truncación se extiende a una homotopía si y sólo si verifica la “condición de homotopía”, ver Proposición 1.4.8.

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ dos morfismos en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$. Éstos estarán dados por aplicaciones simpliciales $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{X} \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$. Por una homotopía de \mathbf{u} a \mathbf{v} en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$ entendemos una homotopía $\mathbf{h} : \mathbf{u} \rightsquigarrow \mathbf{v}$ satisfaciendo la condición adicional

$$\ell_{m+1} h_i^m = s_i \varphi_m \quad (4.3)$$

para todo $m > 0$ y para cada $i = 0, 1, \dots, m$. Notemos que esta propiedad adicional implica que para $m < n-1$, $h_i^m = s_i \varphi_m$.

Proposición 4.1.2 (La condición de homotopía). *Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ dos morfismos en la categoría coma $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$. Una homotopía truncada*

$$\text{tr}_n(\mathbf{h}) = \{h_i^j; 0 \leq i \leq j < n\} : \text{tr}_n(\mathbf{u}) \rightsquigarrow \text{tr}_n(\mathbf{v}),$$

Así de la identidad de homotopía (4.5) se deduce,

$$\begin{aligned} qv_n(x) &= q([h_{n-1}^{n-1}d_0(x), \dots, h_{n-1}^{n-1}d_{n-1}(x), \chi_n(x)]) \\ &= (-1)^n \left(f_1^{-1} qh_{n-1}^{n-1}d_0(x) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} qh_{n-1}^{n-1}d_i(x) + q\chi_n(x), \end{aligned}$$

y usando la expresión (4.1.1), obtenemos la condición de homotopía (4.4). ■

Como caso particular de la Proposición anterior si tomamos por \mathbf{v} la aplicación simplicial cero $\mathbf{0} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ en $\mathbf{SSet}/\mathbf{Ner}(\mathcal{G})$, obtenemos:

Lema 4.1.3. *Una aplicación $\mathbf{u} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ es homotópica a la aplicación cero si y sólo si para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una función c^k que asigna a cada $y \in X_{n-1}$ un elemento $c^k(y) \in \Pi(d_1 \dots d_n s_k \varphi_{n-1}(y))$ y tal que, para cada $x \in X_n$ se cumple:*

$$qu_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} \left(f_1^{-1} c^k d_0(x) \right) + \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j+1} c^k d_j(x) \right] = 0. \quad (4.6)$$

Demostración: Si existe una homotopía $\mathbf{h} : \mathbf{u} \rightsquigarrow \mathbf{0}$ definimos $c^k = qh_k^{n-1}$. Entonces, para cada $x \in X_{n-1}$, se tiene $c^k(x) = qh_k^{n-1}(x) \in \Pi(d_1 \dots d_n s_k \varphi_{n-1}(x))$ ya que por la condición (4.3), sabemos que $\ell_n h_k^{n-1} = s_k \varphi_{n-1}$. Tales funciones satisfacen la condición (4.6), basta con sustituir en (4.4) qh_k^{n-1} por c^k .

Recíprocamente, sean c^k funciones verificando la condición (4.6). Definimos entonces una homotopía truncada $\mathbf{tr}_n(\mathbf{h}) : \mathbf{tr}_n(\mathbf{u}) \rightsquigarrow \mathbf{tr}_n(\mathbf{0})$ como la única determinada por la condición (4.3) en las dimensiones menores a $n-1$, esto es, $h_k^m = s_k \varphi_m$ para todo $m < n-1$ y $0 \leq k \leq m$, y que en dimensión $n-1$ tiene:

$$h_k^{n-1}(x) = (s_k \varphi_{n-1}(x), c^k(x))$$

para cada $x \in X_{n-1}$, estas aplicaciones tienen su codominio en $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)_n$ ya que por hipótesis $c^k(x) \in \Pi(d_1 \dots d_n s_k \varphi_{n-1}(x))$.

Por (4.6) las $(h_k^{n-1})_{k=0}^{n-1}$ satisfacen la condición de homotopía, y por tanto, por la Proposición 4.1.2, \mathbf{u} y $\mathbf{0}$ son homotópicas. ■

De este lema es inmediato obtener:

Teorema 4.1.4. *Existe una biyección natural*

$$H_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathbf{X}_\varphi, L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\mathbf{Ner}(\mathcal{G})},$$

entre los elementos del n -ésimo grupo de cohomología de \mathbf{X}_φ con coeficientes en Π y las clases de homotopía de aplicaciones simpliciales en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\mathbf{Ner}(\mathcal{G})$ de \mathbf{X}_φ a $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$.

Demostración: Después del Lema 4.1.1, sólo tenemos que ver que las aplicaciones que corresponden a cociclos cohomólogos son homotópicas y viceversa, o lo que es igual, sólo tenemos que probar que un cociclo es un coborde si y sólo si la aplicación correspondiente $\mathbf{u} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_G(\Pi, n)$ es homotópica a la aplicación cero $\mathbf{0} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_G(\Pi, n)$.

Supongamos primero que el n -cociclo $c \in C_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$ es un coborde. Entonces existe $c' \in C_\varphi^{n-1}(\mathbf{X}, \Pi)$ tal que $\delta c' = c$, esto es, para cada $x \in X_n$, por definición tenemos (tomando $f_1 = d_2 \dots d_n \varphi_n(x)$):

$$c(x) = \delta c'(x) = f_1^{-1} c'(d_0(x)) + \sum_{i=1}^n (-1)^i c'(d_i(x)). \quad (4.7)$$

Definimos funciones c^0, \dots, c^{n-1} en X_{n-1} mediante

- $c^0 = c'$ y
- $c^k(x) = 0 \in \Pi(d_1 \dots d_n s_k \varphi(x))$ para $k > 0$,

y sea \mathbf{u} la aplicación simplicial que corresponde al cociclo c . Entonces se tiene la condición de homotopía (4.6) del Lema anterior ya que se reduce a (4.7), y así \mathbf{u} es homotópica a cero.

Recíprocamente, sea $\mathbf{u} : \mathbf{X}_\varphi \rightarrow L_G(\Pi, n)$ una aplicación homotópica a $\mathbf{0}$, supongamos $u_n(x) = (\varphi_n(x), c(x))$, es decir, $qu_n(x) = c(x)$, para cada $x \in X_n$, y consideremos funciones c^k como en el Lema 4.1.3, $0 \leq k \leq n-1$. Entonces c es un n -cociclo como hemos visto en el Lema 4.1.1. Además si tomamos c' la función definida por

$$c'(y) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c^k(y),$$

para cada $y \in X_{n-1}$, se tiene que $c' \in C_\varphi^{n-1}(\mathbf{X}, \Pi)$ y por la condición (4.6)

$$c(x) = qu_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [(-1)^k (f_1^{-1} c^k(d_0(x))) + \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} c^k(d_j(x))]$$

que en términos de c' , nos dice

$$c(x) = f_1^{-1} c'(d_0(x)) - c'(d_1(x)) + \dots + (-1)^n c'(d_n(x)),$$

es decir, $c = \delta c'$ es un coborde. ■

Un *sistema de coeficientes locales* en un conjunto simplicial \mathbf{X} es un \mathcal{G} -módulo $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ donde \mathcal{G} es el grupoide fundamental de \mathbf{X} , $\mathcal{G} = \pi_1(\mathbf{X})$. De acuerdo con el Teorema 4.1.4, como corolario inmediato, obtenemos que el n -ésimo espacio generalizado de Eilenberg-Mac Lane de \mathbf{X} con coeficientes en Π , $L_G(\Pi, n)$ (como un objeto en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))$) vía la proyección canónica ℓ) representa la cohomología singular de $\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}$ con coeficientes en Π en el sentido:

Teorema 4.1.5 (Teorema de representación de la cohomología singular con coeficientes locales). *Para cada conjunto simplicial \mathbf{X} y cada sistema de coeficientes locales Π para \mathbf{X} , existe una biyección natural,*

$$H^n(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, L_{\pi_1(\mathbf{X})}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))},$$

entre los elementos del n -ésimo grupo de cohomología singular de $\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}$ con coeficientes en Π y las clases de homotopía de aplicaciones en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))$ de $\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}$ a $L_{\pi_1(\mathbf{X})}(\Pi, n)$.

Si X es un espacio, un sistema de coeficientes locales para X es un $\pi_1(X)$ -módulo. La cohomología singular de X con coeficientes locales en un $\pi_1(X)$ -módulo Π se define como la cohomología singular del complejo singular $S(X)$ con coeficientes en Π :

$$H^n(X, \Pi) := H^n(S(X), \Pi). \quad (4.8)$$

Tenemos, como consecuencia inmediata del Teorema 4.1.5:

Teorema 4.1.6 (Teorema de representación de la cohomología singular con coeficientes locales de un espacio). *Para cada espacio X y cada sistema de coeficientes locales Π para X , se tiene una biyección natural*

$$H^n(X, \Pi) \cong [S(X)_{\eta_{S(X)}}, L_{\pi_1(X)}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(X))}.$$

4.1.2 Cohomología singular de complejos cruzados con coeficientes locales

Vamos a aplicar los teoremas anteriores al caso particular de la categoría de los complejos cruzados.

Dado un complejo cruzado \mathcal{C} y un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π la *cohomología singular de \mathcal{C} con coeficientes locales en Π* es la cohomología singular de su espacio clasificador $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ (ver página 157) con coeficientes locales en Π , es decir,

$$H_{sing}^n(\mathcal{C}, \Pi) := H^n(\mathbf{B}(\mathcal{C}), \Pi).$$

Notemos que como la cohomología singular de espacios se puede obtener como la cohomología singular en \mathbf{SSet} del complejo singular del espacio (ver 4.8) se tiene:

$$H_{sing}^n(\mathcal{C}, \Pi) = H^n(S\mathbf{B}(\mathcal{C}), \Pi).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $S\mathbf{B}(\mathcal{C}) = S|\text{Ner}(\mathcal{C})|$ y que la componente en cualquier conjunto simplicial \mathbf{X} de la counidad de la adjunción $|| \dashv S$ es una equivalencia homotópica, en particular la componente en $\text{Ner}(\mathcal{C})$ de la counidad de dicha adjunción $S|\text{Ner}(\mathcal{C})| \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{C})$ es una equivalencia homotópica y por tanto

$$H_{sing}^n(\mathcal{C}, \Pi) = H^n(S\mathbf{B}(\mathcal{C}), \Pi) \cong H^n(\text{Ner}(\mathcal{C}), \Pi).$$

Nótese que dado un n -complejo cruzado \mathcal{C} , su espacio clasificador $\mathbf{B}(\mathcal{C})$ lo obtenemos también como la realización geométrica del nervio de dicho n -complejo cruzado,

$$\mathbf{B}(\mathcal{C}) = |\mathrm{Ner}(\mathcal{C})|$$

donde el funtor $\mathrm{Ner} : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{SSet}$ no es mas que la composición del funtor inclusión $i_n : \mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$ con el funtor Ner (3.19) de un complejo cruzado. Así, en particular si $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}_n$ es un n -complejo cruzado definimos la *cohomología singular de \mathcal{C} con coeficientes locales en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π* de la misma manera, es decir, como la cohomología singular de su espacio clasificador que es isomorfa a la cohomología singular del $\mathrm{Ner}(\mathcal{C})$ con coeficientes en Π

$$H_{\mathrm{sing}}^n(\mathcal{C}, \Pi) := H^n(\mathbf{B}(\mathcal{C}), \Pi) \cong H^n(\mathrm{Ner}(\mathcal{C}), \Pi).$$

Vamos a usar el teorema de representación para la cohomología singular con coeficientes locales (Teorema (4.1.5)) para calcular esta cohomología en términos de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales. De esta forma tomando $\mathbf{X} = \mathrm{Ner}(\mathcal{C})$ y como $\pi_1(\mathrm{Ner}(\mathcal{C})) = \pi_1(\mathcal{C})$ podemos asegurar la existencia de un isomorfismo natural

$$H_{\mathrm{sing}}^n(\mathcal{C}, \Pi) \cong H^n(\mathrm{Ner}(\mathcal{C}), \Pi) \cong [\mathrm{Ner}(\mathcal{C})_{\eta_{\mathrm{Ner}(\mathcal{C})}}, L_{\pi_1(\mathcal{C})}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\mathrm{Ner}(\pi_1(\mathcal{C}))},$$

donde $[\mathrm{Ner}(\mathcal{C})_{\eta_{\mathrm{Ner}(\mathcal{C})}}, L_{\pi_1(\mathcal{C})}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\mathrm{Ner}(\pi_1(\mathcal{C}))}$ es el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\mathrm{Ner}(\pi_1(\mathcal{C}))$ desde el nervio del complejo cruzado $\mathrm{Ner}(\mathcal{C})_{\eta_{\mathrm{Ner}(\mathcal{C})}}$, visto como un objeto en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\mathrm{Ner}(\pi_1(\mathcal{C}))$ via la aplicación canónica $\mathrm{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{Ner}(\pi_1(\mathcal{C}))$ dada por la componente en $\mathrm{Ner}(\mathcal{C})$ de la unidad de la adjunción $\pi_1 \dashv \mathrm{Ner}$, a la fibración Sección 1.5.2 hemos llamado fibración de Eilenberg-Mac Lane generalizada.

4.2 Cohomologías del cotriple

Comenzamos esta sección haciendo un breve repaso de la cohomología de un cotriple en una categoría (equivalente a la categoría) de álgebras para un triple. Recordaremos también el teorema de representación de Duskin para la cohomología del cotriple en términos de clases de homotopía de morfismos simpliciales. Las referencias [4], [30] y [51] han sido nuestra guía para esta sección y de ellas hemos tomado la terminología.

Dado un funtor tripleable $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$, con adjunto izquierda F y unidad y counidad de la adjunción η y ϵ respectivamente, el cotriple asociado $\mathbf{G} = (\mathbb{G} = FU, \epsilon, \delta = F\eta U)$ (ver Sección 1.2) da lugar a un teoría de cohomología en \mathcal{B} , la *teoría de cohomología del cotriple*.

Para cada objeto X de \mathcal{B} , la *resolución del cotriple* de X es el conjunto simplicial aumentado

$$\mathbb{G}_\bullet(X) : \cdots \mathbb{G}^{n+1}(X) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \mathbb{G}^n(X) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_{n-1}} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \mathbb{G}^{n-1}(X) \cdots \mathbb{G}^2(X) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} \mathbb{G}(X) \xrightarrow{d_0} X$$

cuyos operadores cara y degeneración están dados en términos de la unidad y counidad de la adjunción $F \dashv U$ por:

$$\begin{aligned} d_i : \mathbb{G}^{n+1}(X) &\rightarrow \mathbb{G}^n(X); & d_i &= \mathbb{G}^i(\epsilon_{\mathbb{G}^{n-i}(X)}) & 0 \leq i \leq n, \\ s_j : \mathbb{G}^n(X) &\rightarrow \mathbb{G}^{n+1}(X); & s_j &= \mathbb{G}^j(\delta_{\mathbb{G}^{n-j-1}(X)}) & 0 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

y cuya aumentación viene dada por la counidad, es decir, $d_0 = \epsilon_X : \mathbb{G}(X) \rightarrow X$.

Por otra parte, para cada objeto grupo abeliano en \mathcal{B} , Π , a partir la resolución del cotriple de X se obtiene el siguiente complejo de cocadenas de grupos abelianos:

$$C_{\mathbb{G}}^0(X, \Pi) \xrightarrow{\partial_1} C_{\mathbb{G}}^1(X, \Pi) \xrightarrow{\partial_2} C_{\mathbb{G}}^2(X, \Pi) \cdots \rightarrow C_{\mathbb{G}}^{n-1}(X, \Pi) \xrightarrow{\partial_n} C_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \cdots$$

que en dimensión n tiene

$$C_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathbb{G}^{n+1}(X), \Pi)$$

y cuya diferencial está dada por

$$\partial_n : C_{\mathbb{G}}^{n-1}(X, \Pi) \rightarrow C_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi), \quad \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Hom}_{\mathcal{B}}(d_i, \Pi).$$

La *cohomología del cotriple* $H_{\mathbb{G}}^*(X, \Pi)$, de un objeto X con coeficientes en el objeto grupo abeliano Π , se define como la homología del complejo de cocadenas anterior. Esto es,

$$H_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi) = \begin{cases} \ker(\partial_1), & n = 0, \\ \ker(\partial_{n+1})/\text{im}(\partial_n), & n \geq 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

El teorema de representación de Duskin [30, Corolario 3.8] nos representa esta cohomología en términos de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales:

Teorema 4.2.1 (Teorema de representación de la cohomología del cotriple). *Si \mathcal{B} es una categoría tripleable sobre \mathcal{S} , para cada objeto $X \in \mathcal{B}$ y cada objeto grupo abeliano Π en \mathcal{B} se tienen isomorfismos naturales*

$$H_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi) = [\mathbb{G}(X), K(\Pi, n)]_{\text{Simpl}(\mathcal{B})},$$

donde $[-, -]_{\text{Simpl}(\mathcal{B})}$ denota el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales en la categoría $\text{Simpl}(\mathcal{B})$ de objetos simpliciales en \mathcal{B} .

4.2.1 2-Torsores. Interpretación del segundo grupo de cohomología del cotriple

Los torsores fueron desarrollados por Duskin como las estructuras algebraicas apropiadas para “representar” la cohomología del cotriple. En esta sección vamos a revisar el concepto de 2-torsor así como la interpretación del segundo grupo de cohomología del cotriple utilizando estas estructuras.

Revisemos el concepto de 2-torsor dando primero la definición clásica de Duskin [30] o [39], para después reformular este concepto tomando como base para nuestra definición la noción de grupoide fibra de un torsor, ver [18].

Sea \mathcal{E} una categoría, X un objeto en \mathcal{E} y Π un objeto grupo abeliano en \mathcal{E} , cuya operación denotaremos $+$. Por un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X entendemos un par (\mathbf{X}, ξ) que consta de un objeto simplicial $\mathbf{X} \rightarrow X$ aumentado sobre X y una aplicación simplicial $\xi : \mathbf{X} \rightarrow K(\Pi, 2)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. El objeto simplicial aumentado es asferical.
2. La aplicación canónica $d : \mathbf{X} \rightarrow \text{Cosk}^1(\mathbf{X})$ es un isomorfismo.
3. El cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{\xi_n} & K(\Pi, 2)_n \\
 K_n^i \downarrow & & \downarrow K_n^i \\
 \Lambda_n^i(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \Lambda_n^i(K(\Pi, 2))
 \end{array} \tag{4.10}$$

es un pullback para todo $n \geq 2$ y $0 \leq i \leq n$.

Notemos que la condición de asfericidad en dimensión 0 nos dice que el morfismo aumentación $X_0 \rightarrow X$ es un epimorfismo regular, de hecho es el coigualdor del par de morfismos $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$. La condición (2) nos permitirá identificar \mathbf{X} con $\text{Cosk}^1(\mathbf{X})$, además la condición (3) en presencia de las dos anteriores es equivalente a que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 = \Delta_2(\mathbf{X}) & \xrightarrow{\xi_2} & \Pi \\
 K_2^i \downarrow & & \downarrow K_2^i \\
 \Lambda_2^i(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathbf{1} = \Lambda_2^i(K(\Pi, 2))
 \end{array} \tag{4.11}$$

sea un pullback para todo $0 \leq i \leq 2$. Esto es, un elemento $(x_0, x_1, x_2) \in \Delta_2(\mathbf{X})$ estará totalmente determinado por dos cualquiera de sus componentes junto con el elemento $\xi_2(x_0, x_1, x_2) \in \Pi$.

La fibra de un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X , (\mathbf{X}, ξ) , se define como el objeto simplicial pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \xi) & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{\xi} & K(\Pi, 2), \end{array} \quad (4.12)$$

donde $0 : \mathbf{1} \rightarrow K(\Pi, 2)$ es la aplicación simplicial que en cada dimensión tiene a la aplicación cero $\mathbf{1} \rightarrow K(\Pi, 2)_n$. Tenemos entonces:

- $G_0 = X_0$,
- $G_1 = X_1$,
- G_2 consiste en ternas $(x_0, x_1, x_2) \in \Delta_2(x)$ tales que $\xi_2(x_0, x_1, x_2) = 0$. El hecho de ser pullback los cuadrados (4.11) y (4.12) implica que el rectángulo

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \xrightarrow{\xi_2} & \Pi \\ K_2^i \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_2^i(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

es un pullback y por tanto $G_2 \cong \Lambda_2^i(\mathbf{X}) = \Lambda_2^i(\mathbf{G})$.

- En dimensiones $n > 2$, G_n consiste en los elementos $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n(\mathbf{X})$ tales que $\xi_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Ahora bien, por ser ambos $\mathbf{X} = \text{Cosk}^1(\mathbf{X})$ y $K(\Pi, 2)$ nervios de 2-hipergrupos se tiene que los morfismos canónicos $K_n^i : X_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{X})$ y $K_n^i : K(\Pi, 2) \rightarrow \Lambda_n^i(K(\Pi, 2))$ son isomorfismos, entonces la condición (3) en la definición de torsor implica que los morfismos canónicos $K_n^i : G_n \rightarrow \Lambda_n^i(\mathbf{G})$ son isomorfismos.

Resulta entonces que \mathbf{G} es el nervio de un grupoide $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{X}, \xi)$ (*el grupoide fibra del 2-torsor*). Este grupoide tiene como objetos los 0-símplices de \mathbf{X} , flechas los 1-símplices f de \mathbf{X}

$$d_1(f) \xrightarrow{f} d_0(f),$$

composición la dada por la condición

$$gf = h \Leftrightarrow \xi_2(g, h, f) = 0,$$

y objeto de componentes conexas a X .

Notemos además que la condición de cociclo para ξ (ver 1.4.10) nos asegura que para cualquier elemento

$$\Delta = \begin{pmatrix} f & g & h \\ f & k & l \\ g & k & m \\ h & l & m \end{pmatrix} \in X_3 = \Delta_3(\mathbf{X})$$

se tiene

$$\xi_2 d_3(\Delta) = \xi_2 d_0(\Delta) - \xi_2 d_1(\Delta) + \xi_2 d_2(\Delta), \quad (4.13)$$

es decir,

$$\xi_2(h, l, m) = \xi_2(f, g, h) - \xi_2(f, k, l) + \xi_2(g, k, m). \quad (4.14)$$

Además la condición $\xi_2 s_i = s_i \xi_1 = 0$ implica que para cualquier flecha $f : x \rightarrow y$ se tiene

$$\xi_2(f, f, s_0(x)) = \xi_2(s_0(y), f, f) = 0.$$

Si suponemos que $f : x \rightarrow x$ es un endomorfismo en \mathcal{G} , considerando los elementos

$$\begin{pmatrix} s_0(x) & f & f \\ s_0(x) & f & s_0(x) \\ f & f & s_0(x) \\ f & s_0(x) & s_0(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_0(x) & s_0(x) & f \\ s_0(x) & f & s_0(x) \\ s_0(x) & f & s_0(x) \\ f & s_0(x) & s_0(x) \end{pmatrix} \in X_3 = \Delta_3(\mathbf{X})$$

se tienen las igualdades

$$\xi_2(s_0(x), f, s_0(x)) = -\xi_2(f, s_0(x), s_0(x)) = -\xi_2(s_0(x), s_0(x), f).$$

Deducimos entonces que para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ la aplicación

$$\alpha_x : \text{End}_{\mathcal{G}}(x) \rightarrow \Pi;$$

$$f \mapsto \xi_2(s_0(x), f, s_0(x)) = -\xi_2(f, s_0(x), s_0(x)) = -\xi_2(s_0(x), s_0(x), f)$$

es un isomorfismo de grupos natural en x , donde Π es considerado como \mathcal{G} -grupo constante Π (con acción trivial). Tenemos así una equivalencia natural

$$\alpha : \text{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow \Pi.$$

El proceso anterior puede invertirse, de manera que el grupoide fibra $\mathcal{G}(\mathbf{X}, \xi)$ junto con la transformación natural α determinan totalmente al torsor. En esto se basa la definición de 2-torsor que adoptamos:

Definición 4.2.2. Sea $X \in \mathcal{E}$ un objeto y Π un objeto grupo abeliano en \mathcal{E} . Un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X consiste en un par (\mathcal{G}, α) donde \mathcal{G} es un grupoide interno en \mathcal{E} con X como objeto de componentes conexas, llamado fibra del 2-torsor, y

$\alpha : \text{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow \Pi$ es una equivalencia natural de \mathcal{G} -módulos, llamada cociclo del 2-torsor, donde Π es considerado como \mathcal{G} -módulo constante con acción trivial. En otras palabras, $\alpha : \text{End}(\mathcal{G}) \rightarrow \Pi$ es un morfismo haciendo pullback el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi \\ s=t \downarrow & & \downarrow \\ \text{obj}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

y satisfaciendo:

- Para cada objeto x y cada par u, v de endomorfismos componibles en \mathcal{G}

$$\alpha(\text{Id}_x) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(uv) = \alpha(u) + \alpha(v). \tag{4.15}$$

- Para cada flecha f y todo endomorfismo u en \mathcal{G} tal que $s(f) = s(u)$

$$\alpha(fu) = \alpha(fu f^{-1}) = \alpha(u). \tag{4.16}$$

Un morfismo de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre X , $F : (\mathcal{G}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{G}', \alpha')$ es un functor interno $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ que induce la identidad en componentes conexas y que es compatible con los correspondientes cociclos, esto es, F hace conmutativos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \text{obj}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{pr} & X, \\ F \downarrow & \nearrow pr & \\ \text{obj}(\mathcal{G}') & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi. \\ F \downarrow & \nearrow \alpha' & \\ \text{End}(\mathcal{G}') & & \end{array} \tag{4.17}$$

La categoría de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre X la denotamos por $\text{Tor}^2(X, \Pi)$ y al conjunto de componentes conexas de esta categoría lo denotamos por $\text{Tor}^2[X, \Pi]$.

Veamos cómo un 2-torsor (\mathcal{G}, α) sobre X según la definición 4.2.2 da lugar a un 2-torsor según la definición de Duskin:

Consideremos el objeto simplicial $\mathbf{X} = \text{Cosk}^1(\mathcal{G})$. Por ser X el objeto de componentes conexas de \mathcal{G} podemos considerar a \mathbf{X} como objeto simplicial aumentado sobre X y como tal es claramente asférico. Consideramos entonces el morfismo simplicial 2-truncado

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_2(\mathbf{X}) & \rightrightarrows & G_1 & \rightrightarrows & G_0 & \longrightarrow & X \\ \xi_2 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi & \rightrightarrows & \mathbf{1} & \rightrightarrows & \mathbf{1} & \rightrightarrows & \mathbf{1}, \end{array}$$

donde $\xi_2 : \Delta_2(\mathcal{G}) \rightarrow \Pi$ asocia a cada objeto $(f, g, h) \in \Delta_2(\mathcal{G})$,

$$\begin{array}{c}
 & & x_1 & & \\
 & h \nearrow & & \searrow f & \\
 g^{-1}fh \curvearrowright x_0 & \xrightarrow{g} & x_2 & , &
 \end{array}$$

el objeto $\xi_2(f, g, h) = \alpha(g^{-1}fh) \in \Pi$. Teniendo en cuenta que $K(\Pi, 2)$ es el nervio de un 2-hipergrupoide, el morfismo truncado anterior se extiende a un morfismo simplicial $\xi : \mathbf{X} \rightarrow K(\Pi, 2)$ si y sólo si ξ_2 satisface la condición de cociclo de la Proposición 1.5.3, que en este caso queda reducida a que para cada

$$\Delta = \begin{pmatrix} f & g & h \\ f & k & l \\ g & k & m \\ h & l & m \end{pmatrix} \in X_3 = \Delta_3(\mathbf{X}) \quad \text{o gráficamente} \quad \begin{array}{ccccc}
 & & x_3 & & \\
 & k \nearrow & & \searrow f & \\
 x_0 & \xrightarrow{l} & x_2 & & \\
 & m \searrow & & \nearrow h & \\
 & & x_1 & &
 \end{array}$$

se satisfaga la ecuación (4.14) que en este caso reduce a:

$$\alpha(l^{-1}hm) = \alpha(g^{-1}fh) - \alpha(k^{-1}fl) + \alpha(k^{-1}gm).$$

En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \alpha(l^{-1}hm) &\stackrel{(4.15)}{=} \alpha(l^{-1}hg^{-1}k) + \alpha(k^{-1}gm) \stackrel{(4.16)}{=} \alpha(h^{-1}l(l^{-1}hg^{-1}k)) + \alpha(k^{-1}gm) \\
 &\stackrel{(4.16)}{=} \alpha(g^{-1}kl^{-1}h) + \alpha(k^{-1}gm) \stackrel{(4.15)}{=} \alpha(g^{-1}fh) + \alpha(h^{-1}f^{-1}kl^{-1}h) \\
 &\quad + \alpha(k^{-1}gm) \stackrel{(4.16)}{=} \alpha(g^{-1}fh) + \alpha(h^{-1}(f^{-1}kl^{-1})) + \alpha(k^{-1}gm) \\
 &\stackrel{(4.16)}{=} \alpha(g^{-1}fh) + \alpha(f^{-1}kl^{-1}) + \alpha(k^{-1}gm) \stackrel{(4.15)}{=} \alpha(g^{-1}fh) - \alpha(lk^{-1}f) \\
 &\quad + \alpha(k^{-1}gm) \stackrel{(4.16)}{=} \alpha(g^{-1}fh) - \alpha(l^{-1}(lk^{-1}f)) + \alpha(k^{-1}gm) \\
 &\stackrel{(4.16)}{=} \alpha(g^{-1}fh) - \alpha(k^{-1}fl) + \alpha(k^{-1}gm).
 \end{aligned}$$

Para concluir que el par (\mathbf{X}, ξ) es un 2-torsor en el sentido de Duskin, sólo resta ver que cada elemento $(f, g, h) \in \Delta_2(\mathbf{X})$ está determinado por dos cualesquiera de sus componentes y el elemento $u = \xi_2(f, g, h) = \alpha(g^{-1}hf) \in \Pi$. Pero, por ser α un isomorfismo, $\alpha(g^{-1}hf)$ determina unívocamente el endomorfismo $g^{-1}hf \in \mathcal{G}$ y éste, junto con dos componentes cualesquiera de la terna (f, g, h) , determinan (por composición) a la tercera.

Si $\Pi : \Pi \rightleftharpoons X$ es un objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathcal{E}/X , por un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X entenderemos un $(\Pi, 2)$ -torsor en la categoría \mathcal{E}/X sobre el

objeto Id_X . Éste constará de un par (\mathcal{G}, α) donde \mathcal{G} es un grupoide interno en \mathcal{E} con X como objeto de componentes conexas y α es un morfismo en \mathcal{E} , haciendo del cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi \\ \downarrow s=t & & \downarrow \\ \mathbf{obj}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & X \end{array}$$

un pullback y satisfaciendo las condiciones (4.15) y (4.16). Nótese que la condición en (4.15) sobre la imagen de las identidades por α implica la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi \\ \uparrow id & & \uparrow \\ \mathbf{obj}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & X \end{array}$$

que a partir de ahora sobrentenderemos.

Si suponemos ahora que tenemos un funtor tripleable $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$, donde la categoría \mathcal{S} tiene límites finitos, un 2-torsor U -escindido sobre X con coeficientes en un objeto grupo abeliano Π es un 2-torsor (\mathcal{G}, α) sobre X tal que la proyección canónica $pr : \mathbf{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow X$ y el morfismo canónico $(s, t) : \mathbf{arr}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{obj}(\mathcal{G}) \times_X \mathbf{obj}(\mathcal{G})$ son morfismos U -escindidos, donde $\mathbf{obj}(\mathcal{G}) \times_X \mathbf{obj}(\mathcal{G})$ es el par núcleo de $pr : \mathbf{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow X$ y un morfismo U -escindido es un morfismo cuya imagen por U tiene una sección. La categoría de $(\Pi, 2)$ -torsores U -escindidos sobre X la denotamos por $Tor_U^2(X, \Pi)$. El conjunto de componentes conexas de la categoría $Tor_U^2(X, \Pi)$ lo denotaremos mediante $Tor_U^2[X, \Pi]$.

Nos centramos en estos torsores U -escindidos puesto que la cohomología del cotriple puede interpretarse en términos de ellos como nos muestra el siguiente teorema de interpretación (ver [30]).

Teorema 4.2.3 (Teorema de interpretación de Duskin). *Sea \mathcal{S} una categoría con límites finitos y sea $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ un funtor tripleable, con cotriple asociado $\mathbf{G} = (\mathbb{G}, \epsilon, \delta)$. Para cada objeto $X \in \mathcal{E}$ y cada objeto grupo abeliano Π en \mathcal{E} existe una biyección natural*

$$H_{\mathbb{G}}^2(X, \Pi) \cong Tor_U^2[X, \Pi]$$

entre el segundo grupo de cohomología del cotriple de X con coeficientes en Π y el conjunto de componentes conexas de la categoría de $(\Pi, 2)$ -torsores U -escindidos sobre X .

La siguiente proposición nos será de utilidad posteriormente.

Proposición 4.2.4. *El functor olvido “objeto de objetos”, $\text{obj} : \mathbf{Gpd}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ es una fibración, y su composición con el functor olvido “grupoide fibra”*

$$\text{fib} : \text{Tor}^2(X, \Pi) \rightarrow \mathbf{Gpd}(\mathcal{E}), (\mathcal{G}, \alpha) \mapsto \mathcal{G}$$

es de nuevo una fibración. De forma más explícita, si (\mathcal{G}, α) es un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X con objeto de objetos O , y $f : O' \rightarrow O$ es un morfismo en \mathcal{E} , podemos obtener un $(\Pi, 2)$ -torsor (\mathcal{G}', α') sobre X y un morfismo de torsores $F : (\mathcal{G}', \alpha') \rightarrow (\mathcal{G}, \alpha)$ tal que:

- *El objeto de objetos de \mathcal{G}' es O' y el functor F en objetos es f ,*
- *la proyección $q' : O' \rightarrow X$ es igual a la composición $O' \xrightarrow{f} O \xrightarrow{q} X$, $q' = q f$.*

Además, si (\mathcal{G}, α) es U -escindido para algún functor exacto izquierda $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$, entonces (\mathcal{G}', α') es también U -escindido si y sólo si q' es U -escindido.

Demostración: En primer lugar, veamos que el functor obj es una fibración. En efecto, dado un grupoide $\mathcal{G} : A \rightrightarrows O$ interno en \mathcal{E} y dada una flecha $f : O' \rightarrow O = \text{obj}(\mathcal{G})$ en \mathcal{E} podemos construir otro grupoide \mathcal{G}' cuyo objeto de objetos sea O' , para cada par de objetos $x, y \in O'$, $\text{Hom}_{\mathcal{G}'}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(f(x), f(y))$ y la identidad de un objeto x en O' es la identidad de $f(x)$ en el grupoide \mathcal{G} . Nótese que la composición en \mathcal{G}' claramente es la inducida por la composición de \mathcal{G} . De hecho, el objeto de flechas de \mathcal{G}' , junto con las aplicaciones dominio y codominio

$$A' \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} O'$$

se pueden definir mediante el siguiente pullback:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{(s', t')} & O' \times_X O' \\ u \downarrow & & \downarrow f \times f \\ A & \xrightarrow{(s, t)} & O \times_X O \end{array}$$

donde $O \times_X O$ y $O' \times_X O'$ son los pares núcleo de las proyecciones canónicas $q : O \rightarrow X$ y $q' = q f : O' \rightarrow X$.

La construcción de \mathcal{G}' anterior nos proporciona un functor interno $F : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ cuya componente sobre flechas es la proyección $u : A' \rightarrow A$ y que actúa como f sobre objetos. Para probar que obj es una fibración bastará con probar que F es un functor obj -cartesiano de grupoides (internos). Para ello, sea $G : \mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de grupoides internos en \mathcal{E} tal que sus imágenes por obj , $g_0 : O'' \rightarrow O$, se factoriza a través de f como $g_0 = f h$. Entonces, sólo tenemos una forma de definir

una factorización de $G = FH$ tal que $\text{obj}(H) = h$. Esta condición determina H sobre objetos y G lo determina sobre flechas. Con esto se tiene que obj es una fibrición.

Si ahora consideramos el funtor composición del funtor fib con el funtor obj :

$$\text{Tor}^2(X, \Pi) \xrightarrow{\text{fib}} \mathbf{Gpd}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\text{obj}} \mathcal{E}$$

de nuevo es una fibrición, pues si (\mathcal{G}, α) es un $(\Pi, 2)$ -torsor sobre X con $\text{obj}(\mathcal{G}) = O$ y $f : O' \rightarrow O$ es un morfismo en \mathcal{E} , existe un $(\Pi, 2)$ -torsor (\mathcal{G}', α') sobre X y un morfismo (obj fib) -cartesiano de 2-torsores $F : (\mathcal{G}', \alpha') \rightarrow (\mathcal{G}, \alpha)$ sobre f . En efecto, basta con tomar \mathcal{G}' y $F : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ como antes, y teniendo en cuenta que el funtor inducido $F^* : \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}'}$ satisface $F^*(\text{End}_{\mathcal{G}}) = \text{End}_{\mathcal{G}'}$, la aplicación cociclo α' será la imagen por α del funtor inducido, esto es, $\alpha' = F^* \alpha$. Si suponemos ahora que (\mathcal{G}, α) es un 2-torsor U -escindido, para que (\mathcal{G}', α') sea U -escindido es condición necesaria y suficiente que $q' = q f : O' \rightarrow X$ sea U -escindido. La condición es necesaria por definición y también es suficiente pues a partir de la exactitud de U y como el morfismo $U(s, t)$ es escindido se tiene también que (s', t') es U -escindido. ■

Como un corolario inmediato de esta proposición tenemos:

Corolario 4.2.5. *Sea $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ un funtor tripleable, X un objeto y Π un objeto grupo abeliano en \mathcal{E} . Para cada $(\Pi, 2)$ -torsor U -escindido sobre X , (\mathcal{G}, α) , existe un $(\Pi, 2)$ -torsor U -escindido sobre X , (\mathcal{G}', α') cuyo objeto de objetos es $\mathbb{G}(X)$ (el valor del cotriple \mathbb{G} en X) y cuya proyección es la componente en X de la counidad $\epsilon_X : \mathbb{G}(X) \rightarrow X$.*

Además (\mathcal{G}', α') está en la misma componente conexa de $\text{Tor}_U^2(X, \Pi)$ que (\mathcal{G}, α) .

Demostración: Sea $O = \text{obj}(\mathcal{G})$ y $s : U(X) \rightarrow U(O)$ una U -sección de la proyección $q : O \rightarrow X$ de (\mathcal{G}, α) . Tomando como f el morfismo composición

$$f : \mathbb{G}(X) \xrightarrow{F(s)} \mathbb{G}(O) \xrightarrow{\epsilon_O} O$$

(con $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ el adjunto izquierda de U) y aplicando la Proposición 4.2.4, obtenemos un 2-torsor sobre X con coeficientes en Π , (\mathcal{G}', α') cuya proyección q' viene dada por la composición

$$q f = q \epsilon_O F(s) = \epsilon_X F U(q) F(s) = \epsilon_X F(U(q) s) = \epsilon_X F \text{Id}_{U(X)} = \epsilon_X : \mathbb{G}(X) \rightarrow X.$$

Como ϵ_X es una aplicación U -escindida (su U -sección es $\eta_{U(O)}$ la componente en $U(O)$ de la unidad de la adjunción) se tiene que (\mathcal{G}', α') es U -escindido. Además como existe un morfismo $\tilde{F} : (\mathcal{G}', \alpha') \rightarrow (\mathcal{G}, \alpha)$, los dos 2-torsores están en la misma componente conexa de $\text{Tor}_U^2(X, \Pi)$. ■

Por un razonamiento similar al dado en [39, Theorem 5.7.5] podemos probar:

Lema 4.2.6. *Dado un diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \alpha) & & (\mathcal{G}'', \alpha'') \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & (\mathcal{G}', \alpha') & \end{array}$$

en $Tor_U^2(X, \Pi)$. Existe un torsor $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\alpha}) \in Tor_U^2(X, \Pi)$ junto con morfismos de torsores

$$\begin{array}{ccc} & (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\alpha}) & \\ & \swarrow & \searrow \\ (\mathcal{G}, \alpha) & & (\mathcal{G}'', \alpha'') \end{array} .$$

Demostración: Tomaremos como grupoide $\tilde{\mathcal{G}}$ la coma categoría de los funtores F y G ,

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{G}} = (F, G) & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{G} & & \mathcal{G}'' \end{array}$$

con las proyecciones canónicas a \mathcal{G} y \mathcal{G}'' respectivamente. Entonces:

- los objetos de $\tilde{\mathcal{G}}$ serán ternas $(x, F(x) \xrightarrow{h} G(y), y)$ con $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, $y \in \text{obj}(\mathcal{G}'')$ objetos y h una flecha en \mathcal{G}' ,
- las flechas de $\tilde{\mathcal{G}}$ serán pares de flechas

$$(f, g) : (x, F(x) \xrightarrow{h} G(y), y) \rightarrow (x', F(x') \xrightarrow{h'} G(y'), y')$$

en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}''$ tales que el cuadrado siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{h} & G(y) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(g) \\ F(x') & \xrightarrow{h'} & G(y'), \end{array}$$

- la composición en $\tilde{\mathcal{G}}$ está dada componente a componente.

Es fácil deducir, a partir del hecho de que \mathcal{G} , \mathcal{G}' y \mathcal{G}'' son grupoides, que $\tilde{\mathcal{G}}$ es un grupoide.

Además si (x, h, y) es un objeto de $\tilde{\mathcal{G}}$, entonces los objetos $x, y, F(x)$ y $F(y)$ determinan un único elemento de X , que corresponde a la componente conexa de x en \mathcal{G} , de y en \mathcal{G}'' o de $F(x)$ y $F(y)$ en \mathcal{G}' . De forma que dos objetos $(x, h, y), (x', h', y') \in \tilde{\mathcal{G}}$ están en la misma componente conexa si y solamente si se da una de las siguientes condiciones equivalentes:

- x y x' están en la misma componente conexa de \mathcal{G} ,
- y e y' están en la misma componente conexa de \mathcal{G}'' ,
- $F(x)$ y $F(x')$ están en la misma componente conexa de \mathcal{G}' o
- $G(y)$ y $G(y')$ están en la misma componente conexa de \mathcal{G}' .

Concluimos que el objeto de componentes conexas de $\tilde{\mathcal{G}}$ es X y que las proyecciones canónicas $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}''$ son compatibles con las proyecciones a X , esto es, los triángulos correspondientes al triángulo en la izquierda del diagrama (4.17) conmutan.

Para definir el cociclo $\tilde{\alpha}$ observamos que un endomorfismo

$$(f, g) : (x, F(x) \xrightarrow{h} G(y), y) \rightarrow (x, F(x) \xrightarrow{h} G(y), y)$$

en $\tilde{\mathcal{G}}$ está unívocamente determinado por su dominio (x, h, y) junto con uno cualquiera de los endomorfismos $f \in \mathcal{G}$, $g \in \mathcal{G}''$, $F(f)$ o $G(g) \in \mathcal{G}'$. Por ejemplo, f claramente determina a $F(f)$ y a $G(g) = hF(f)h^{-1}$ y $G(g)$ determina a g como el único endomorfismo tal que $\alpha''(g) = \alpha'(G(g))$. Así la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{x,h,y} : \text{End}_{\tilde{\mathcal{G}}}(x, h, y) &\rightarrow \Pi; \\ (f, g) &\mapsto \alpha(f) = \alpha'(F(f)) = \alpha'(hF(f)h^{-1}) = \alpha'(G(g)) = \alpha''(g) \end{aligned}$$

establece una equivalencia natural $\tilde{\alpha} : \text{End}_{\tilde{\mathcal{G}}} \rightarrow \Pi$ que satisface las condiciones (4.15) y (4.16) en la definición de torsor. Es inmediato también observar que las proyecciones canónicas $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}''$ inducen morfismos de torsores

$$(\mathcal{G}, \alpha) \leftarrow (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (\mathcal{G}'', \alpha'').$$

Por último, observamos que puesto que el funtor U conserva límites, entonces $U(\tilde{\mathcal{G}}) = U(F, G) = (U(F), U(G))$ es también una coma categoría. Es entonces fácil levantar las escisiones de los grupoides $U(\mathcal{G})$, $U(\mathcal{G}')$ y $U(\mathcal{G}'')$ a $U(\tilde{\mathcal{G}})$ por lo que el torsor $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\alpha})$ seguirá siendo U -escidido. ■

Como consecuencia inmediata del Lema anterior obtenemos

Corolario 4.2.7. *Dos 2-torsores U -escindidos (\mathcal{G}, α) y (\mathcal{G}', α') están en la misma componente conexa de $\text{Tor}_U^2(X, \Pi)$ si y solamente si existe un torsor $(\mathcal{G}'', \alpha'')$ y morfismos*

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}'', \alpha'') & \\ \swarrow & & \searrow \\ (\mathcal{G}, \alpha) & & (\mathcal{G}', \alpha') \end{array}$$

en $\text{Tor}_U^2(X, \Pi)$.

Sea $\underline{Tor}_U^2(X, \Pi)$ la subcategoría plena de $Tor_U^2(X, \Pi)$ determinada por los 2-torsores cuyo objeto de objetos es $\mathbb{G}(X)$ y cuya proyección canónica es la counidad $\epsilon_X : \mathbb{G}(X) \rightarrow X$ y sea $\underline{Tor}_U^2[X, \Pi]$ el correspondiente conjunto de componentes conexas. Entonces los Corolarios 4.2.5 y 4.2.7 implica la siguiente:

Proposición 4.2.8. *Sea $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow Tor_U^2(X, \Pi)$ un funtor pleno tal que la inclusión*

$$\underline{Tor}_U^2(X, \Pi) \hookrightarrow Tor_U^2(X, \Pi)$$

se factoriza a través de Φ . Entonces Φ establece una biyección entre el conjunto $\pi_0(\mathbf{E})$ de componentes conexas de \mathbf{E} y $Tor_U^2[X, \Pi]$.

Demostración: Sean $E_1, E_2 \in \mathbf{E}$ tales que $\Phi(E_1)$ y $\Phi(E_2)$ están en la misma componente conexas de $Tor_U^2(X, \Pi)$. Tenemos que demostrar que E_1 y E_2 están en la misma componente conexas en \mathbf{E} . Por el Corolario 4.2.7 existe un 2-torsor (\mathcal{G}, α) y un morfismo de (\mathcal{G}, α) a cada uno de las imágenes, es decir, obtenemos un diagrama

$$\Phi(E_1) \xleftarrow{f} (\mathcal{G}, \alpha) \xrightarrow{g} \Phi(E_2). \quad (4.18)$$

Por el Corolario 4.2.5 existe un torsor (\mathcal{G}', α') en $\underline{Tor}_U^2(X, \Pi)$ que está en la misma componente conexas que (\mathcal{G}, α) , lo cual nos da flechas de (\mathcal{G}', α') a cada una de las imágenes de E_1 y E_2 . Teniendo en cuenta que la inclusión de $\underline{Tor}_U^2(X, \Pi)$ se factoriza a través de Φ existe un objeto E en \mathbf{E} cuya imagen por Φ es (\mathcal{G}', α') y por ser Φ un funtor pleno obtenemos una flecha de E a cada uno de los objetos E_1 y E_2

$$E_1 \leftarrow E \rightarrow E_2$$

que nos prueba que E_1 y E_2 están en la misma componente conexas. ■

Corolario 4.2.9. *Si $\Phi : \mathbf{E} \rightarrow Tor_U^2(X, \Pi)$ es un funtor pleno tal que la inclusión*

$$\underline{Tor}_U^2(X, \Pi) \hookrightarrow Tor_U^2(X, \Pi)$$

se factoriza a través de Φ entonces existe una biyección

$$H_{\mathbb{G}}^2(X, \Pi) \cong \pi_0(\mathbf{E}).$$

4.2.2 Cohomología del cotriple de un complejo cruzado n -dimensional con coeficientes locales

Particularizaremos en esta sección el estudio de las cohomologías del cotriple al caso $\mathcal{E} = \mathbf{Crs}_n$, la categoría de n -tipos de complejos cruzados.

Estas categorías \mathbf{Crs}_n son tripleables sobre diversas categorías, nuestra elección del funtor de olvido y así del cotriple y en último caso de la cohomología que consideramos en \mathbf{Crs}_n está determinada por nuestro principal objetivo en esta segunda parte de la memoria

“la obtención, a partir de las fibraciones η_{n+1} en la torre de Postnikov de un complejo cruzado, de los invariantes algebraicos k_{n+1} que serán elementos en ciertos grupos de cohomología”

La naturaleza de tales fibraciones es la que determina la cohomología a usar.

Recordemos a continuación los diferentes funtores de olvido U_n desde las categorías \mathbf{Crs}_n . Las identificaciones que hemos hecho de las categorías \mathbf{Crs}_n cuando $n = 1, 2$ nos hacen tratar estos dos casos independientemente.

Hemos identificado la categoría \mathbf{Crs}_1 de 1-complejos con la categoría de grupoides. Es bien conocido que esta categoría es tripleable sobre la categoría de grafos \mathbf{Gph} siendo el functor olvido

$$U_1 : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Gph}$$

el functor “*grafo subyacente*”. Denotaremos ${}^1\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple en \mathbf{Crs}_1 . La tripleabilidad de este functor de olvido pasa a cualquier coma categoría, más concretamente, dado \mathcal{T} un grupoide el functor de olvido inducido por U_1 en las correspondientes coma categorías

$$U_1 : \mathbf{Gpd}/\mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Gph}/U_1(\mathcal{T})$$

es también tripleable. Denotaremos también por ${}^1\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple en la coma categoría \mathbf{Gpd}/\mathcal{T} .

Nota 4.2.10. *Obsérvese que si $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$ es un objeto en \mathbf{Gpd}/\mathcal{T} entonces se tiene ${}^1\mathbb{G}(F)$ es el objeto dado por la diagonal del cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} {}^1\mathbb{G}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \\ {}^1\mathbb{G}(F) \downarrow & \searrow & \downarrow F \\ {}^1\mathbb{G}(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \end{array}$$

Por ello a menudo haremos la identificación ${}^1\mathbb{G}(F) \equiv {}^1\mathbb{G}(\mathcal{G})$ sobrentendiendo el morfismo a \mathcal{T} .

En la Sección 3.1 vimos que el functor de olvido

$$U_2 : \mathbf{Crs}_2 \equiv \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$$

a la categoría de flechas a grupoides \mathbf{AGpd} es tripleable. Denotaremos por ${}^2\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple en \mathbf{Xm} . Esta situación se traslada a cualquier coma categoría, así, para cualquier módulo cruzado \mathcal{C} , denotaremos también por

$$U_2 : \mathbf{Crs}_2/\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AGpd}/U_2(\mathcal{C})$$

al correspondiente funtor de olvido entre las coma categorías y ${}^2\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple.

Por último, en la Sección 3.2.2, definimos para $n > 2$ el funtor de olvido

$$U_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}$$

y probamos que era tripleable. Denotaremos ${}^n\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple en \mathbf{Crs}_n . De forma análoga, para cada n -complejo cruzado \mathcal{C} , denotaremos también

$$U_n : \mathbf{Crs}_n/\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}/U_n(\mathcal{C})$$

al correspondiente funtor entre las coma categorías y ${}^n\mathbb{G}$ al correspondiente cotriple.

La cohomología del cotriple, que consideraremos aquí, de un n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π será una cohomología definida en la coma categoría $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$. Donde $\pi_1(\mathcal{C})$ es considerado como n -complejo cruzado vía la inclusión $i_1 : \mathbf{Gpd} \equiv \mathbf{Crs}_1 \rightarrow \mathbf{Crs}_n$, esto es, estamos identificando el grupoide $\pi_1(\mathcal{C})$ con el n -complejo cruzado $i_1(\pi_1(\mathcal{C}))$,

$$\pi_1(\mathcal{C}) \equiv i_1(\pi_1(\mathcal{C})) : \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})}, \quad (4.19)$$

cuando $n \geq 2$. Para definir la cohomología del cotriple de un n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes locales vamos primero a asociar un objeto grupo abeliano $\tilde{\Pi}_n$ en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$ a cualquier $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π . De nuevo, haremos esta asociación en dimensiones 1, 2 y luego en general para $n > 2$.

- Para $n = 1$, un 1-complejo cruzado es un grupoide. Sea \mathcal{T} un grupoide, entonces un sistema de coeficientes locales en este caso es justamente un \mathcal{T} -módulo, esto es, un funtor $\Pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Aplicando la construcción producto semidirecto de Grothendieck a este funtor obtenemos un objeto grupo abeliano en la coma categoría $\mathbf{Gpd}/\mathcal{T} = \mathbf{Crs}_1/\mathcal{T}$:

$$\tilde{\Pi}_1 : \mathcal{T} \int \Pi \xrightleftharpoons{\quad} \mathcal{T} \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Crs}_1/\mathcal{T}). \quad (4.20)$$

- Para $n = 2$, un 2-complejo cruzado es un módulo cruzado. Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ un módulo cruzado y $\Pi : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo. Consideremos el funtor

$$\text{ins}_2 : \mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C})$$

que asocia a cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π el módulo cruzado sobre $\pi_1(\mathcal{C})$ dado por

el morfismo canónico

$$\begin{array}{ccc} \text{ins}_2(\Pi) : \text{zero}(\Pi) & \longrightarrow & i_1(\pi_1(\mathcal{C})) \\ \dots & & \dots \\ \Pi & \xrightarrow{0} & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})}, \end{array}$$

Este functor conserva productos y por tanto lleva todos los objetos de $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})}$ (los cuales tienen una estructura canónica de grupo abeliano interno) en objetos grupo abeliano en $\mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C})$. Para simplificar denotaremos

$$\tilde{\Pi}_2 = \text{ins}_2(\Pi) : \text{zero}(\Pi) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}) \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Crs}_2/\pi_1(\mathcal{C})). \quad (4.21)$$

- De forma análoga, para $n > 2$ dado un n -complejo cruzado $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}_n$ y un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π , consideramos el functor

$$\text{ins}_n : \mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$$

que asocia a cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π el n -complejo cruzado sobre $i_n(\pi_1(\mathcal{C}))$ dado por el morfismo de n -complejos cruzados

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ins}_n(\Pi) & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ \text{zero}_n(\Pi) : & \text{zero}(\Pi) & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})} \\ \downarrow & \downarrow & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ \pi_1(\mathcal{C}) : & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})}. \end{array}$$

Este functor conserva productos y por tanto lleva todo $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo en un objeto grupo abeliano en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$. Para simplificar denotaremos

$$\tilde{\Pi}_n = \text{ins}_n(\Pi) = \text{zero}_n(\Pi) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}) \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})). \quad (4.22)$$

Estamos ya en posición de introducir la cohomología del cotriple de un n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes locales en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π , esta viene definida por

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) := H_{n\mathbb{G}}^m(\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}, \tilde{\Pi}_n),$$

donde $n\mathbb{G}$ es el cotriple asociado al functor de olvido

$$U_n : \mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{ACrs}_n/U_n(\pi_1(\mathcal{C})),$$

$\tilde{\Pi}_n$ es el objeto grupo abeliano dado en (4.20), (4.21) y (4.22) respectivamente y el morfismo

$$\delta_{\mathcal{C}}^{(1)} : \mathcal{C} \longrightarrow P_1(\mathcal{C}) \equiv \pi_1(\mathcal{C}),$$

es la componente de la unidad de la adjunción $\tilde{P}_1 \dashv i_1$ en \mathcal{C} (ver diagrama (3.26)). Siguiendo el convenio dado en la Nota 4.2.10 haremos la identificación

$${}^n\mathbb{G}(\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}) \equiv {}^n\mathbb{G}(\mathcal{C})$$

entendiendo este último como un objeto en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$ vía el morfismo canónico

$${}^n\mathbb{G}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}} \pi_1(\mathcal{C}).$$

Análogamente haremos la identificación ${}^n\mathbb{G}_{\bullet}(\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}) \equiv {}^n\mathbb{G}_{\bullet}(\mathcal{C})$.

El teorema de representación de Duskin 4.2.1 nos permitirá representar esta cohomología como clases de homotopía de aplicaciones simpliciales en la coma categoría $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$:

Corolario 4.2.11 (Teorema de representación para la cohomología del cotriple en \mathbf{Crs}_n con coeficientes locales). *Para cada $n \geq 1$, dado un n -complejo cruzado \mathcal{C} y un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π se tienen isomorfismos naturales*

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \cong [{}^n\mathbb{G}_{\bullet}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}))},$$

donde $[-, -]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}))}$ denota el conjunto de clases de homotopía de morfismos simpliciales en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$.

4.2.3 2-Torsores con coeficientes locales sobre n -complejos cruzados

En este apartado vamos a particularizar la definición de 2-torsor al contexto de n -complejos cruzados. Daremos el concepto de 2-torsor (U_n -escindido) de un n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π y veremos cómo estos torsores representan la cohomología $H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi)$ de \mathcal{C} con coeficientes en Π .

Por un 2-torsor (U_n -escindido) del n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π entenderemos un 2-torsor (U_n -escindido) en la coma categoría $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$ de $\delta_{\mathcal{C}}^{(1)} : \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ con coeficientes en el objeto grupo abeliano $\tilde{\Pi}_n$ (ver (4.20), (4.21) y (4.22) para $n = 1, 2$ y $n > 2$ respectivamente). Denotaremos $Tor^2(\mathcal{C}, \Pi)$ ($Tor_{U_n}^2(\mathcal{C}, \Pi)$) a la correspondiente categoría de 2-torsores, también denotaremos

$$q = \text{base}(\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}) : \text{base}(\mathcal{C}) = \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}).$$

Pasaremos a continuación a analizar este concepto detenidamente. Debido a las particularidades de las categorías $\mathbf{Crs}_1 \equiv \mathbf{Gpd}$ y $\mathbf{Crs}_2 \equiv \mathbf{Xm}$ trataremos,

como hemos hecho hasta ahora, estos dos casos separadamente. Así, analizaremos los conceptos de 2-torsor con coeficientes locales de un grupoide, de un módulo cruzado, y por último, de un n -complejo cruzado con $n > 2$.

2-Torsores sobre grupoides

Comencemos analizando el caso de grupoides. Un grupoide interno \mathcal{G} en la categoría de grupoides, es decir, un grupoide doble, se puede representar mediante un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{G}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & \mathcal{G}_0 \\
 \dots & & \dots & & \dots \\
 A_1 \times_{A_0} A_1 & \xrightarrow{\circ} & A_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{T_1} \\ \xrightarrow{S_1} \end{array} & A_0 \\
 \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow & \begin{array}{c} \xrightarrow{S_0} \\ \xrightarrow{T_0} \end{array} & \downarrow \downarrow \downarrow \uparrow \\
 O_1 \times_{O_0} O_1 & \xrightarrow{\circ} & O_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{T_0} \\ \xrightarrow{S_0} \end{array} & O_0
 \end{array}
 \tag{4.23}$$

en el cual tanto las filas como las columnas representan grupoides y los morfismos S, T, Id y \circ son funtores.

Consideramos el funtor de olvido $U_1 : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Gph}$ que es tripleable. Dado un grupoide \mathcal{T} , un sistema de coeficientes locales Π para \mathcal{T} es precisamente un \mathcal{T} -módulo. El grupo abeliano $\tilde{\Pi}_1$ está dado por

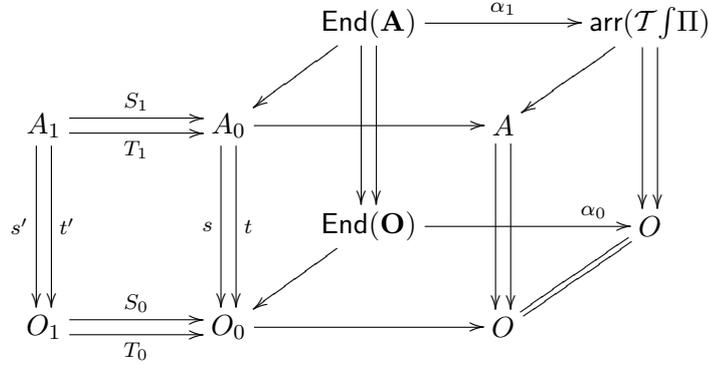
$$\tilde{\Pi}_1 : \mathcal{T} \int \Pi \xrightleftharpoons[pr]{} \mathcal{T} .$$

Un torsor sobre \mathcal{T} con coeficientes en Π consistirá por tanto de un par (\mathcal{G}, α) , donde \mathcal{G} es un grupoide, interno en \mathbf{Gpd} como el representado en (4.23), sobre \mathcal{T} , esto es, con \mathcal{T} como grupoide de componentes conexas, y α es un morfismo en \mathbf{Gpd} , haciendo el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 \text{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{T} \int \Pi \\
 s=t \downarrow & & \downarrow pr \\
 \text{obj}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{q} & \mathcal{T}
 \end{array}$$

un pullback. La condición de ser U_1 -escindido se reduce a que los morfismos canónicos $q : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{T}$ y $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{T}} \mathcal{G}_0$ sean sobreyectivos a nivel de objetos y flechas. Supongamos que O y A son los objetos de objetos y flechas de \mathcal{T} respectivamente. Entonces el grupoide $\mathcal{T} \int \Pi$ tiene también a O como objeto de objetos

y la proyección $\mathcal{T} \int \Pi \rightarrow \mathcal{T}$ es la identidad en O . Podemos entonces representar un 2-torsor sobre \mathcal{T} con coeficientes en Π mediante el diagrama



donde $\text{End}(\mathbf{A}) \rightarrow A_0$ y $\text{End}(\mathbf{O}) \rightarrow O_0$ son los grupos (sobre A_0 y O_0 respectivamente) de endomorfismos de los grupoide

$$\mathbf{A} : A_1 \xrightarrow[T_1]{S_1} A_0, \quad \mathbf{O} : O_1 \xrightarrow[T_0]{S_0} O_0$$

respectivamente y los cuadrados horizontales

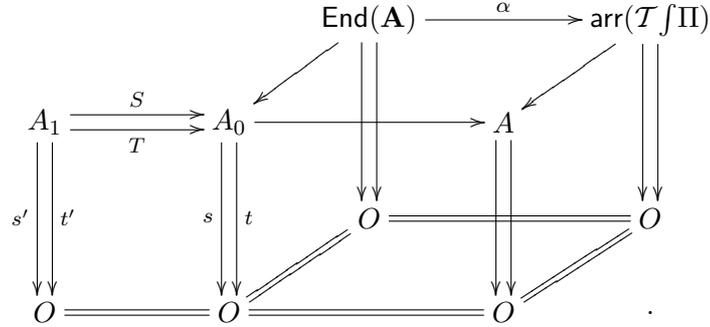
$$\begin{array}{ccc}
 \text{End}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\alpha_1} & \text{arr}(\mathcal{T} \int \Pi), \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_0 & \xrightarrow{\quad} & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \text{End}(\mathbf{O}) & \xrightarrow{\alpha_0} & O \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 O_0 & \xrightarrow{\quad} & O
 \end{array}
 \quad (4.24)$$

son pullbacks. Notemos que esta última condición implica que el grupo $\text{End}(\mathbf{O}) \rightarrow O_0$ es trivial y por tanto el grupoide \mathbf{O} es el grupoide asociado a una relación de equivalencia, concretamente al par núcleo del morfismo $O_0 \rightarrow O$. Identificaremos entonces $\text{End}(\mathbf{O})$ con O_0 , esta identificación hace que el morfismo α esté totalmente determinado por su componente en flechas α_1 (y claro está la proyección $O_0 \rightarrow O$).

Utilizamos ahora el Corolario 4.2.5 para asegurarnos que en la componente conexa de cualquier torsor sobre \mathcal{T} hay uno cuyo grupoide fibra tiene a ${}^1\mathbb{G}(\mathcal{T})$ como grupoide de objetos y a la counidad de la adjunción como proyección ${}^1\mathbb{G}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{T}$, notemos que esta proyección es la identidad en objetos (${}^1\mathbb{G}(\mathcal{T})$ es el grupoide libre sobre el grafo subyacente a \mathcal{T}) y por tanto el grupoide \mathbf{O} en un torsor de este tipo es el grupoide asociado al par núcleo de la identidad. Deducimos entonces que en la clase de cualquier 2-torsor sobre \mathcal{T} con coeficientes en Π existe uno en el que el grupoide fibra es un 2-grupoide (y no solamente un grupoide doble).

Vamos a denotar como $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ a la subcategoría plena de $\text{Tor}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ con objetos aquellos 2-torsores cuyo grupoide fibra es un 2-grupoide. Un 2-torsor (\mathcal{G}, α)

en $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ estará representado por un diagrama



Notemos que al ser los funtores S y T la identidad en objetos, su coigualador es un grupo cociente (ver Lema 1.1.6) y la proyección $\text{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{T}$ es la identidad en objetos y sobreyectiva en flechas. Deducimos entonces que en este caso tal proyección es siempre U_1 -escindida. Igualmente ocurre con la proyección $\text{arr}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{obj}(\mathcal{G}) \times_{\mathcal{T}} \text{obj}(\mathcal{G})$. Por tanto todo torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ es U_1 -escindido.

Si para cada objeto $x \in O$ denotamos $\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ al grupo formado por aquellos elementos $u \in A_1$ (deformaciones) tales que $S(u) = T(u) = Id_x$,

$$\begin{array}{ccc}
 & Id_x & \\
 x & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow u \\ \curvearrowleft \end{array} & x \\
 & Id_x &
 \end{array}$$

entonces la asociación $x \mapsto \text{End}_{\mathcal{G}}(x)$ nos define un funtor

$$\text{End}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathbf{Gp},$$

donde las flechas actúan por conjugación. Es fácil comprobar que el grupoide

$$eq(S, T) = \text{End}(\mathcal{G}) : \text{End}(\mathbf{A}) \rightrightarrows O$$

es precisamente $\text{End}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0 \int \text{End}_{\mathcal{G}}$. Dar entonces un funtor $\alpha : \text{End}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{T} \int \Pi$ haciendo pullback el cuadrado de la izquierda del diagrama (4.24) y cumpliendo las condiciones de torsor (4.15) y (4.16) es equivalente a dar una equivalencia natural α :

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{End}_{\mathcal{G}} & \\
 \mathcal{G}_0 = \text{obj}(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{Gp}. \\
 & \Pi q &
 \end{array} \tag{4.25}$$

Identificaremos entonces un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ con un par (\mathcal{G}, α) donde \mathcal{G} es un 2-grupoide y α es una transformación natural como en (4.25).

Claramente tenemos un diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_{U_1}^2(\mathcal{T}, \Pi) & \hookrightarrow & \text{Tor}_{U_1}^2(\mathcal{T}, \Pi) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi) & \end{array}$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 4.2.8 para concluir lo siguiente:

Teorema 4.2.12 (Interpretación de la cohomología del cotriple de un grupoide con coeficientes locales). *Para cada grupoide \mathcal{T} y cada \mathcal{T} -módulo Π se tiene un isomorfismo natural*

$$H_{\mathbb{G}}^2(\mathcal{T}, \Pi) \cong \mathbf{T}^2[\mathcal{T}, \Pi]$$

entre la cohomología del cotriple de \mathcal{T} con coeficientes locales y las clases de componentes conexas de 2-torsores en $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$.

2-Torsores sobre módulos cruzados

Consideremos ahora la categoría de módulos cruzados y el funtor de olvido $U_2 : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$. Sea $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \delta)$ un módulo cruzado, $\Pi : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ un sistema de coeficientes locales y $\tilde{\Pi}_2 : \text{zero}(\Pi) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ el grupo abeliano en $\mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C})$ asociado a Π . Un 2-torsor sobre \mathcal{C} con coeficientes en Π consistirá de un par (\mathcal{G}, α) donde \mathcal{G} es un grupoide interno en \mathbf{Xm} con \mathcal{C} como módulo cruzado de componentes conexas y $\alpha : \text{End}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{zero}(\Pi)$ es un morfismo de módulos cruzados que satisface las condiciones de torsor, gráficamente tenemos un diagrama en la categoría \mathbf{Xm}

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \text{zero}(\Pi) \\ & & \downarrow S=T & & \downarrow \\ \mathcal{G} : \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & \mathcal{C}_0 & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{C}}^{(1)}} & \pi_1(\mathcal{C}) \end{array}$$

en el que el cuadrado es un pullback. Si aplicamos el funtor $\text{base} : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ (3.10), que conserva límites y coigualadores, al diagrama anterior obtenemos un diagrama en grupoides

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{base}(\text{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\text{base}(\alpha)} & \pi_1(\mathcal{C}) \\ & & \downarrow S=T & & \parallel \\ \text{base}(\mathcal{G}) : \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{G}_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & \mathcal{G}_0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{q=\text{base}(\delta_{\mathcal{G}}^{(1)})} & \pi_1(\mathcal{C}), \end{array} \tag{4.26}$$

(donde hemos denotado $\mathcal{G}_i = \text{base}(\mathcal{C}_i)$, $i = 0, 1$ y hemos identificado S, T, Id y \circ con $\text{base}(S)$, $\text{base}(T)$, $\text{base}(Id)$ y $\text{base}(\circ)$ respectivamente), en el que:

- el cuadrado es un pullback,
- $\text{base}(\mathcal{G})$ es un grupoide interno en grupoides con $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$ como grupoide de componentes conexas y
- $\text{base}(\text{End}(\mathcal{G})) \rightarrow \mathcal{G}_0$ es el grupo (interno en grupoides) sobre \mathcal{G}_0 de endomorfismos de $\text{base}(\mathcal{G})$.

Del hecho de ser el lado derecho del pullback en (4.26) una identidad, deducimos que también lo será el lado izquierdo, y concluimos que $\text{End}(\text{base}(\mathcal{G})) = \text{base}(\text{End}(\mathcal{G}))$ es un grupo trivial y por tanto $\text{base}(\mathcal{G})$ es el grupoide asociado a una relación de equivalencia (concretamente al par núcleo del morfismo $\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}$).

Utilizamos ahora el Corolario 4.2.5 para asegurarnos que en la componente conexa de cualquier torsor sobre \mathcal{C} hay uno cuyo grupoide fibra tiene a ${}^2\mathbb{G}(\mathcal{C})$ como módulo cruzado de objetos y a la counidad de la adjunción como proyección ${}^2\mathbb{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, notemos que esta proyección es la identidad a nivel de grupoides base. Podemos entonces asegurar, utilizando el razonamiento anterior, que en la clase de cada 2-torsor sobre \mathcal{C} con coeficientes en Π existe uno (\mathcal{G}, α) en el que el grupoide interno en grupoides $\text{base}(\mathcal{G})$ es el grupoide discreto con grupoide de objetos \mathcal{G} . Denotaremos $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ a la subcategoría plena de $\text{Tor}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ con objetos aquellos 2-torsos (\mathcal{G}, α) cuyo grupoide fibra \mathcal{G} tiene $\text{base}(\mathcal{G})$ el grupoide discreto con objetos $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$, en otras palabras \mathcal{G} es un grupoide interno en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$. Al igual que ocurre en el caso de grupoides, del hecho de ser la proyección $\text{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}$ la identidad a nivel de grupoides base, podemos deducir que todo torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ es U_2 -escindido.

Claramente tenemos un diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_{U_2}^2(\mathcal{C}, \Pi) & \hookrightarrow & \text{Tor}_{U_2}^2(\mathcal{C}, \Pi) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi) & \end{array}$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 4.2.8 para concluir:

Teorema 4.2.13 (Interpretación de la cohomología del cotriple de un módulo cruzado con coeficientes locales). *Para cada módulo cruzado \mathcal{C} y cada \mathcal{C} -módulo Π se tiene un isomorfismo natural*

$$H_{2\mathbb{G}}^2(\mathcal{C}, \Pi) \cong \mathbf{T}^2[\mathcal{C}, \Pi]$$

entre la cohomología del cotriple de \mathcal{C} con coeficientes locales y las clases de componentes conexas de 2-torsos en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$.

Nos resta analizar lo que ocurre a nivel de \mathcal{G} -grupos.

Supongamos $(\mathcal{G}, \alpha) \in \mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$, tenemos entonces que \mathcal{G} es un grupoide interno en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$ y por tanto podemos aplicar el funtor $\text{techo} : \mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ (ver (3.28), que conserva límites finitos y coigualadores) para obtener un grupoide interno $\text{techo}(\mathcal{G})$ en la categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$. Además este grupoide $\text{techo}(\mathcal{G})$ tiene a $\text{techo}(\mathcal{C}) = C$ como objeto de componentes conexas. Haciendo un abuso notacional podemos dibujar un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{techo}(\text{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\text{techo}(\alpha)} & \Pi & & \\ & & \downarrow S=T & & \downarrow & & \\ \text{techo}(\mathcal{G}) : C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\circ} & C_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow[S]{} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & C_0 & \xrightarrow{} & C \xrightarrow{0} \mathbf{0}_{\pi_1(C)}, \end{array}$$

donde hemos denotado $C_i = \text{techo}(C_i)$ y hemos identificado T, S, Id y \circ con $\text{techo}(T), \text{techo}(S), \text{techo}(Id)$ y $\text{techo}(\circ)$ respectivamente. Notemos que todo el diagrama anterior está en la categoría de \mathcal{G} -módulos salvo la flecha vertical en la derecha. Reescribimos este diagrama completamente en la categoría de \mathcal{G} -módulos

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{techo}(\text{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\text{techo}(\alpha)} & C \times (\Pi q) & & \\ & & \downarrow S=T & & \downarrow pr & & \\ \text{techo}(\mathcal{G}) : C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\circ} & C_1 & \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow[S]{} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & C_0 & \xrightarrow{} & C \end{array} \tag{4.27}$$

y observamos que el cuadrado ha de ser un pullback por lo que este diagrama representa un 2-torsor en la categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ sobre C con coeficientes en el objeto grupo abeliano

$$pr : C \times (\Pi q) \longrightarrow C.$$

Concluimos entonces que un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ consiste en un par (\mathcal{G}, α) donde \mathcal{G} es un grupoide interno en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$, con \mathcal{C} como módulo cruzado de componentes conexas y $(\text{techo}(\mathcal{G}), \text{techo}(\alpha))$ es un 2-torsor sobre $C = \text{techo}(\mathcal{C})$ en la categoría $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ con coeficientes en el objeto grupo abeliano $pr : C \times (\Pi q) \rightarrow C$. Notemos que, con la notación utilizada en el diagrama (4.27), para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ y para cada elemento $u \in C_0(x)$, el grupo $\text{End}_{\text{techo}(\mathcal{G})(x)}(u)$ es isomorfo, vía $\text{techo}(\alpha)_x$, al grupo abeliano $\Pi(x)$ además este isomorfismo ha de ser natural tanto en los objetos x de \mathcal{G} como en los objetos u de $\text{techo}(\mathcal{G})(x)$ (nótese que el funtor proyección $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ es la identidad en objetos).

2-Torsores sobre n -complejos cruzados, con $n > 2$

Por último consideramos la categoría de n -complejos cruzados para $n > 2$ y el funtor de olvido $U_n : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}$. Sea \mathcal{C} un n -complejo cruzado,

$\Pi \in \mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})}$ un sistema de coeficientes locales para \mathcal{C} y

$$\tilde{\Pi}_n : \mathbf{zero}_n(\Pi) \xrightleftharpoons{\quad} \pi_1(\mathcal{C})$$

el objeto grupo abeliano en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$ asociado a Π .

Un 2-torsor (U_n -escindido) sobre \mathcal{C} con coeficientes en Π consiste en un par (\mathcal{G}, α) con \mathcal{G} un grupoide interno en \mathbf{Crs}_n sobre \mathcal{C} y $\alpha : \mathbf{End}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{zero}_n(\Pi)$ un morfismo en \mathbf{Crs}_n satisfaciendo las condiciones de torsor. Gráficamente tenemos un diagrama en la categoría \mathbf{Crs}_n

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{End}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{zero}_n(\Pi) & & \\ \downarrow S=T & & \downarrow & & \\ \mathcal{G} : \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow[S]{T} & \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\delta_{\mathcal{C}}^{(n)}} \pi_1(\mathcal{C}) \end{array} \quad (4.28)$$

$\begin{array}{c} \text{Id} \\ \curvearrowright \\ S \\ \text{---} \\ T \end{array}$

en el que el cuadrado es un pullback. Aplicamos el funtor T_{n-1} , truncación a nivel $n - 1$, al diagrama anterior y obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} T_{n-1}(\mathbf{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{T_{n-1}(\alpha)} & T_{n-1}(\mathbf{zero}_n(\Pi)) = \pi_1(\mathcal{C}) & & \\ \downarrow S=T & & \parallel & & \\ T_{n-1}(\mathcal{G}) : T_{n-1}(\mathcal{C}_1) & \xrightarrow[S]{T} & T_{n-1}(\mathcal{C}_0) & \longrightarrow & T_{n-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{T_{n-1}(\delta_{\mathcal{C}}^{(n)})} \pi_1(\mathcal{C}). \end{array}$$

$\begin{array}{c} \text{Id} \\ \curvearrowright \\ S \\ \text{---} \\ T \end{array}$

Este funtor conserva límites y colímites (ver página 174) y por tanto $T_{n-1}(\mathcal{G})$ es un grupoide en \mathbf{Crs}_{n-1} con $T_{n-1}(\mathcal{C})$ como $(n - 1)$ -complejo cruzado de componentes conexas y que el cuadrado en el diagrama anterior es un pullback. Del hecho de ser el morfismo vertical en la derecha del diagrama anterior una igualdad, deducimos que el grupo $\mathbf{End}(T_{n-1}(\mathcal{G})) = T_{n-1}(\mathbf{End}(\mathcal{G})) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{C}_0)$ sobre $T_{n-1}(\mathcal{C}_0)$ es trivial y por tanto el grupoide $T_{n-1}(\mathcal{G})$ es el grupoide asociado a una relación de equivalencia, concretamente al par núcleo del morfismo $T_{n-1}(\mathcal{C}_0) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{C})$.

Utilizamos de nuevo el Corolario 4.2.5 para asegurarnos que en la componente conexas de cualquier torsor sobre \mathcal{C} hay uno cuyo grupoide fibra tiene a ${}^n\mathbb{G}(\mathcal{C})$ como n -complejo cruzado de objetos y a la counidad de la adjunción como proyección ${}^n\mathbb{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, notemos que esta proyección tienen a la identidad como $(n - 1)$ -truncación. Podemos entonces asegurar, utilizando el razonamiento anterior, que en la clase de cada 2-torsor sobre \mathcal{C} con coeficientes en Π existe uno (\mathcal{G}, α) en el que el grupoide $T_{n-1}(\mathcal{G})$, interno en $(n - 1)$ -complejos cruzados, es el grupoide discreto con objetos $T_{n-1}(\mathcal{C})$. Denotaremos $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ a la subcategoría plena de $\mathbf{Tor}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ con objetos aquellos 2-torsos (\mathcal{G}, α) cuyo grupoide fibra \mathcal{G} tiene como $(n - 1)$ -truncación al grupoide discreto con objetos $T_{n-1}(\mathcal{C})$. De nuevo, del hecho de tener la proyección $\mathbf{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{C}$ la identidad como $(n - 1)$ -truncación, deducimos que todo torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ es U_n -escindido.

Claramente tenemos un diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{array}{ccc} \underline{Tor}_{U_n}^2(\mathcal{C}, \Pi) & \hookrightarrow & Tor_{U_n}^2(\mathcal{C}, \Pi) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi) & \end{array}$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 4.2.8 para concluir:

Teorema 4.2.14 (Interpretación de la cohomología del cotriple de un n -complejo cruzado con coeficientes locales). *Para cada n -complejo cruzado \mathcal{C} y cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π se tiene un isomorfismo natural*

$$H_{n_G}^2(\mathcal{C}, \Pi) \cong \mathbf{T}^2[\mathcal{C}, \Pi]$$

entre la cohomología del cotriple de \mathcal{C} con coeficientes locales y las clases de componentes conexas de 2-torsores en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$.

Analicemos por último qué ocurre a nivel n . Supongamos $(\mathcal{G}, \alpha) \in \mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ un 2-torsor, entonces \mathcal{G} es un grupoide interno en $\mathbf{Crs}_{n, \mathcal{G}}$ al que podemos aplicar el funtor techo_n , ver (3.29), obtenemos entonces un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{techo}_n(\text{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\text{techo}_n(\alpha)} & \Pi \\ & & \downarrow S=T & & \downarrow \\ \text{techo}_n(\mathcal{G}) : \text{techo}_n(\mathcal{C}_1) & \xrightleftharpoons[S]{S} & \text{techo}_n(\mathcal{C}_0) & \longrightarrow & \text{techo}_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{0} \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} \\ & \swarrow Id & & & \end{array}$$

en el que todas las flechas están en la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ salvo la vertical en la derecha que está en la categoría $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})}$. Reescribimos este diagrama completamente en la categoría de \mathcal{G} -módulos levantando por pullback el morfismo $\Pi \rightarrow \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})}$ y obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{techo}_n(\text{End}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\text{techo}_n(\alpha)} & \text{techo}_n(\mathcal{C}) \times (\Pi q) \\ & & \downarrow S=T & & \downarrow pr \\ \text{techo}_n(\mathcal{G}) : \text{techo}_n(\mathcal{C}_1) & \xrightleftharpoons[S]{S} & \text{techo}_n(\mathcal{C}_0) & \longrightarrow & \text{techo}_n(\mathcal{C}) \\ & \swarrow Id & & & \end{array}$$

que nos representa un 2-torsor en la categoría $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ sobre $\text{techo}_n(\mathcal{C})$ con coeficientes en el objeto grupo abeliano $\text{techo}_n(\mathcal{C}) \times (\Pi q) \rightarrow \text{techo}_n(\mathcal{C})$.

Concluimos entonces que un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ consiste en un par (\mathcal{G}, α) tal que \mathcal{G} es un grupoide interno en \mathbf{Crs}_n con truncación $T_{n-1}(\mathcal{G})$ el grupoide discreto sobre $T_{n-1}(\mathcal{C})$ y con $(\text{techo}_n(\mathcal{G}), \text{techo}_n(\alpha))$ un 2-torsor en la categoría

$\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} -módulos (con \mathcal{G} el grupoide base de \mathcal{C}) sobre $\text{techo}_n(\mathcal{C})$ con coeficientes en $\text{techo}_n(\mathcal{C}) \times (\Pi q) \rightarrow \text{techo}_n(\mathcal{C})$. Entonces para cada objeto $x \in \mathcal{G}$ y cada elemento $u \in \text{techo}_n(\mathcal{C}_0)(x)$ el grupo $\text{End}_{\text{techo}_n(\mathcal{G})(x)}(u)$ es isomorfo, vía $\text{techo}_n(\alpha)_x$, al grupo abeliano $\Pi(x)$ además este isomorfismo ha de ser natural tanto en los objetos x de \mathcal{G} como en los objetos u de $\text{techo}(\mathcal{G})(x)$ (de nuevo usamos que el functor proyección $q : \mathcal{G} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ es la identidad en objetos).

4.2.4 2-Torsores y extensiones en Crs_n . Interpretación de las cohomologías del cotriple con coeficientes locales en Crs_n en términos de extensiones

En este apartado, vamos a interpretar los grupos de cohomología del cotriple $H_{n, \mathcal{G}}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ en términos de extensiones. Para ello utilizaremos los Teoremas 4.2.12, 4.2.13 y 4.2.14 que nos dan una interpretación de dichos grupos de cohomología como clases de componentes conexas de 2-torsores en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$.

Será entonces suficiente con dar una interpretación de los elementos de $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ en términos de extensiones. Para hacer esta interpretación distinguiremos el caso de grupoide, tratándose todos los demás casos al mismo tiempo.

Comencemos analizando el caso de grupoides. Dado un grupoide \mathcal{T} y un \mathcal{T} -módulo Π , como comentamos en la subsección anterior 4.2.3 un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ consta de un par (\mathcal{G}, α) donde el grupoide fibra \mathcal{G} (interno en \mathbf{Gpd}) es un 2-grupoide con \mathcal{T} como grupoide de componentes conexas y $\alpha : \text{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow (\Pi q)$ es una equivalencia natural (ver (4.25)), donde $q : \text{obj}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{T}$ es la proyección canónica. Para obtener el concepto de 2-extensión de \mathcal{T} por Π utilizaremos la equivalencia entre la categoría de 2-grupoides y la de módulos cruzados (ver Proposición 3.1.9). Por esta equivalencia, dar el 2-grupoide \mathcal{G} es equivalente a dar el módulo cruzado $\text{xm}(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}_0, N, \delta)$, además el hecho de ser \mathcal{T} el grupoide de componentes conexas de \mathcal{G} es equivalente a decir $\mathcal{T} = \pi_1(\text{xm}(\mathcal{G}))$. Por otra parte el cociclo α es una equivalencia natural $\alpha : \text{End}_{\mathcal{G}} \rightarrow (\Pi q)$ que en términos de módulos cruzados es equivalente a dar una equivalencia $\alpha : \pi_2(\text{xm}(\mathcal{G})) \rightarrow \Pi$ de \mathcal{T} -módulos (es decir, $\pi_1(\text{xm}(\mathcal{G}))$ -módulos).

A partir de estas observaciones damos la siguiente definición:

Definición 4.2.15. *Una 2-extensión de un grupoide \mathcal{T} por un \mathcal{T} -módulo $\Pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$ es un par (\mathcal{C}, α) con $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ un módulo cruzado, llamado la fibra de la extensión, que tiene a \mathcal{T} como grupoide fundamental (i.e. $\pi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$) y $\alpha : \pi_2(\mathcal{C}) \rightarrow \Pi$ es una equivalencia natural de \mathcal{T} -módulos, llamada cociclo.*

Notemos que dada una extensión como en la definición anterior, para cada objeto $x \in \mathcal{G}$, se tiene una 2-extensión (singular) de grupos (ver definición en [27])

$$\mathbf{0} \rightarrow \Pi(x) \rightarrow C(x) \xrightarrow{\delta_x} \text{End}_{\mathcal{G}}(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{T}}(x) \rightarrow \mathbf{1}$$

donde el morfismo $\Pi(x) \rightarrow C(x)$ es la composición $\Pi(x) \xrightarrow{\alpha_x^{-1}} \pi_2(\mathcal{C})(x) \hookrightarrow C(x)$.

Un morfismo $\Phi : (\mathcal{C}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{C}', \alpha')$ de 2-extensiones de \mathcal{T} por Π es un morfismo de módulos cruzados $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ que hace conmutativos los triángulos:

$$\begin{array}{ccc} \text{base}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{pr} & \mathcal{T} \\ \text{base}(\Phi) \downarrow & & \uparrow pr \\ \text{base}(\mathcal{C}') & & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \pi_2(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi \\ \pi_2(\Phi) \downarrow & & \uparrow \alpha' \\ \pi_2(\mathcal{C}') & & \end{array}.$$

Denotaremos $Ext^2(\mathcal{T}, \Pi)$ a la correspondiente categoría de 2-extensiones de \mathcal{T} por Π y como $Ext^2[\mathcal{T}, \Pi]$ al correspondiente conjunto de componentes conexas. De forma inmediata podemos concluir:

Teorema 4.2.16. *Dado un grupoide \mathcal{T} y un \mathcal{T} -módulo $\Pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$, las categorías $\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$ y $Ext^2(\mathcal{T}, \Pi)$ son equivalentes.*

Es evidente que los resultados anteriores implican la siguiente interpretación de la cohomología del cotriple en grupoides en términos de extensiones

$$H_{1\mathbb{G}}^2(\mathcal{T}, \Pi) \cong Ext^2[\mathcal{T}, \Pi], \quad (4.29)$$

resultado que es bien conocido en el caso de grupos.

Analicemos ahora el caso general.

Sea \mathcal{C} un n -complejo cruzado, $n \geq 2$, Π un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo y (\mathcal{G}, α) un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$. Entonces \mathcal{G} es un grupoide interno en \mathbf{Crs}_n con $(n-1)$ -truncación el grupoide discreto con objetos $T_{n-1}(\mathcal{C})$, se tienen por tanto que \mathcal{G} es un objeto en \mathbf{GCrs}_n . Podemos aplicar el funtor $\mathbf{crs}_n : \mathbf{GCrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$, ver Proposición 3.4.1, y obtener un $(n+1)$ -complejo cruzado $\mathbf{crs}_n(\mathcal{G})$ que tiene las siguientes propiedades:

- $\mathbf{N}_n \mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$,
- $P_n(\mathbf{crs}_n(\mathcal{G})) = \pi_0(\mathcal{G}) = \mathcal{C}$, Proposición 3.4.2, y
- $\text{techo}_n \text{End}(\mathcal{G}) \cong \text{techo}_n \text{obj}(\mathcal{G}) \times (\pi_{n+1} \mathbf{crs}_n(\mathcal{G}) q)$, donde $q : \text{base}(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$ es la proyección canónica, Proposición 3.4.3.

Deducimos entonces que el cociclo α induce un isomorfismo de $\pi_1(\mathcal{G})$ -módulos $\pi_{n+1}(\mathbf{crs}_n(\mathcal{G})) \cong \Pi$. Estos hechos nos dan pie a la siguiente definición:

Definición 4.2.17. *Sea \mathcal{C} un n -complejo cruzado y Π un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo. Una 2-extension de \mathcal{C} sobre Π es un par (\mathcal{E}, α) formado por un $(n+1)$ -complejo cruzado \mathcal{E} tal que $P_n(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ y un isomorfismo $\alpha : \pi_{n+1}(\mathcal{E}) \cong \Pi$ de $\pi_1(\mathcal{E}) = \pi_1(\mathcal{C})$ -módulos.*

Notemos que para cada objeto $x \in \text{base}(\mathcal{E}) = \text{base}(\mathcal{C})$ se tiene una 2-extensión de grupos

$$0 \longrightarrow \Pi(x) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_x} \text{techo}(\mathcal{E}_{n+1})(x) \xrightarrow{(\partial_{n+1})_x} \text{techo}(\mathcal{E}_n)(x) \xrightarrow{(\partial_n)_x} \text{techo}_n(\mathcal{C})(x) \longrightarrow 0,$$

donde \mathcal{E}_n y \mathcal{E}_{n+1} denotan los módulos cruzados en dimensiones n y $n + 1$ respectivamente de \mathcal{E} y el morfismo $\tilde{\alpha}_x$ está definido en función de α_x de la forma obvia.

Un morfismo $\Phi : (\mathcal{E}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{E}', \alpha')$ de 2-extensiones de \mathcal{C} por Π es un morfismo de $(n + 1)$ -complejos cruzados $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ que hace conmutativos los triángulos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{E}}^{(n)}} & \mathcal{C} \\ \Phi \downarrow & & \nearrow \delta_{\mathcal{E}'}^{(n)} \\ \mathcal{E}' & & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\alpha} & \Pi \\ \pi_{n+1}(\Phi) \downarrow & & \nearrow \alpha' \\ \pi_{n+1}(\mathcal{E}') & & \end{array} .$$

Denotaremos $\text{Ext}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ a la correspondiente categoría de 2-extensiones de \mathcal{C} por Π y por $\text{Ext}^2[\mathcal{C}, \Pi]$ al correspondiente conjunto de componentes conexas. De forma inmediata podemos concluir:

Teorema 4.2.18. *Dado un n -complejo cruzado \mathcal{C} y un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo $\Pi : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ab}$, la categoría $\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ es equivalente a la categoría $\text{Ext}^2(\mathcal{C}, \Pi)$ de 2-extensiones de \mathcal{C} por Π .*

Como consecuencia del teorema anterior 4.2.18 y del teorema de interpretación 4.2.14 obtenemos

Teorema 4.2.19 (Interpretación de la cohomología del cotriple de n -complejos cruzados en términos de extensiones). *Para cada n -complejo cruzado \mathcal{C} y cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π existe un isomorfismo natural*

$$H_{n\mathbb{G}}^n(\mathcal{C}, \Pi) \cong \text{Ext}^2[\mathcal{C}, \Pi]$$

entre la cohomología del cotriple de \mathcal{C} con coeficientes locales y las clases de componentes conexas de 2-extensiones de \mathcal{C} por Π .

4.3 Representación de la cohomología singular en subcategorías de n -complejos cruzados simpliciales

Sea \mathbf{X} un conjunto simplicial y $\Pi : \pi_1(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ un sistema de coeficientes locales para \mathbf{X} . En la Sección 4.1.4, Teorema 4.1.5, representamos la cohomología singular

de \mathbf{X} con coeficientes en Π en términos de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales

$$H^m(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, L_{\pi_1(\mathbf{X})}(\Pi, n)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))}.$$

Ésta es una interpretación de la cohomología singular en la categoría $\mathbf{SSet} = \mathbf{Simpl}(\mathbf{Set}) = \mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_0)$. El objetivo de esta sección es representar esta cohomología singular en subcategorías de objetos simpliciales internos en \mathbf{Crs}_n . Más concretamente, representaremos la cohomología $H^{m+n}(\mathbf{X}, \Pi)$ como clases de homotopía de morfismos entre objetos simpliciales internos en \mathbf{Crs}_n .

Teniendo en cuenta las particularidades de las categorías $\mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd}$ y $\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm}$ trataremos estos dos casos por separado, al igual que hemos venido haciendo a lo largo de toda esta memoria.

Así, en primer lugar, representaremos la cohomología $H^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{Gd} que es una subcategoría de la categoría $\mathbf{SimplGpd}$, de objetos simpliciales en \mathbf{Gpd} . Después veremos cómo la cohomología $H^{m+2}(\mathbf{X}, \Pi)$ puede representarse en la subcategoría \mathbf{Sxm} de la categoría $\mathbf{Simpl}(\mathbf{Xm})$ de módulos cruzados simpliciales, que se obtiene imponiendo a los módulos cruzados simpliciales una restricción análoga a la que se le impone a los grupoides simpliciales para que determinen objetos de \mathbf{Gd} . Para $n > 2$ daremos una representación de la cohomología $H^{m+n}(\mathbf{X}, \Pi)$ en una subcategoría, \mathbf{SCrs}_n , de la categoría $\mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_n)$ de n -complejos cruzados simpliciales. Notemos que las restricciones impuestas sobre los n -complejos cruzados simpliciales (para todos los $n \geq 1$) para que sean objetos en \mathbf{SCrs}_n vienen determinadas por las particularidades de las resoluciones de los cotriples ${}^n\mathbf{G}$.

El mecanismo por el cual obtendremos estas representaciones consistirá en establecer una cadena de adjunciones

$$\mathbf{SSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}_1=G} \\ \xleftarrow{\overline{W}_1=\text{Ner}} \end{array} \mathbf{Gd} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \\ \xleftarrow{\overline{W}_2} \end{array} \mathbf{SCrs}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{SCrs}_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}_n} \\ \xleftarrow{\overline{W}_n} \end{array} \mathbf{SCrs}_n \quad \cdots$$

$\mathcal{F}_i \dashv \overline{W}_i$, que nos permitirá levantar la representación dada en el Teorema 4.1.5 hasta \mathbf{SCrs}_n .

Representación de la cohomología $H^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{Gd} .

En la Sección 2.3, introdujimos el par de funtores adjuntos

$$G : \mathbf{SSet} \rightleftarrows \mathbf{Gd} : \text{Ner}, \quad G \dashv \text{Ner},$$

que ya usaron Dwyer y Kan en [29] con el nombre de functor “complejo clasificador” \overline{W} y su adjunto izquierda “grupoide de lazos” y que extienden a los funtores clásicos $G : \mathbf{SSet}_* \rightleftarrows \mathbf{Gp}^{\Delta^{op}} : \overline{W}$ de [33] y [53].

En lo que sigue nos referiremos al funtor Ner (ver página 82) como $\overline{W}_1 : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{SSet}$.

Si \mathcal{G} es un grupoide visto como un grupoide simplicial constante, es evidente que los n -símplices de $\overline{W}_1(\mathcal{G})$ son precisamente los n -símplices de $\text{Ner}(\mathcal{G})$ y de hecho se tiene que $\overline{W}_1(\mathcal{G}) = \text{Ner}(\mathcal{G})$. Por tanto, \overline{W}_1 también induce un funtor

$$\overline{W}_1 : \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G}).$$

Corolario 4.3.1. *Sea \mathcal{G} un grupoide, $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un \mathcal{G} -módulo y $\tilde{\Pi}_1$ el objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} asociado a Π (ver Ejemplo 2.4.8 y también (4.20)). Entonces el objeto simplicial $K(\tilde{\Pi}_1, n) \in (\mathbf{Gpd}/\mathcal{G})^{\Delta^{op}} = \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op}}/\mathcal{G}$ realmente está en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} (donde \mathcal{G} lo vemos como el grupoide simplicial constante) y además se tiene un isomorfismo en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$,*

$$\overline{W}_1(K(\tilde{\Pi}_1, n)) \cong L_{\mathcal{G}}(\Pi, n+1). \quad (4.30)$$

Demostración: Es evidente que $K(\tilde{\Pi}_1, n) \in \mathbf{Gd}/\mathcal{G}$. Además se tiene que

$$\overline{W}_1(K(\tilde{\Pi}_1, n)) = \text{Ner}(\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{G})$$

por lo que el isomorfismo (4.30) es justamente el isomorfismo en la Proposición 2.4.9. \blacksquare

Una simple extensión del Teorema 3.3 en [29] nos proporciona sin dificultad la siguiente

Proposición 4.3.2. *El funtor $\overline{W}_1 : \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$ y el correspondiente adjunto izquierda que llamaremos \mathcal{F}_1 preservan fibraciones y equivalencias débiles y para cada par de objetos $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}/\mathcal{G}$ y $\mathbf{X} \in \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$ una aplicación $\mathbf{X} \rightarrow \overline{W}_1(\mathcal{G})$ es una equivalencia débil si y solo si su adjunta $\mathcal{F}_1(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{G}$ lo es.*

De lo anterior se tiene que la adjunción se mantiene en las correspondientes categorías de homotopía y como consecuencia el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $\mathbf{X} \rightarrow \overline{W}_1(\mathcal{G})$ en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$ es biyectivo con el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $\mathcal{F}_1(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{G}$ en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} , (ver [29], página 383).

Teorema 4.3.3 (Representación de la cohomología $H^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi)$ en \mathbf{Gd}). *Para cada conjunto simplicial \mathbf{X} y cada sistema de coeficientes locales Π para \mathbf{X} existe una biyección natural*

$$H^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}, K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\pi_1(\mathbf{X})}$$

donde $\tilde{\Pi}_1$ es el objeto grupo abeliano en $\mathbf{Gpd}/\pi_1(\mathbf{X})$ asociado a Π .

Demostración: El teorema de representación de la cohomología singular 4.1.5, el isomorfismo en la Proposición 4.3.1 y la Proposición 4.3.2 anterior nos determinan isomorfismos:

$$\begin{aligned} H^{m+1}(\mathbf{X}, \Pi) &= [\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, L_{\pi_1(\mathbf{X})}(\Pi, m+1)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))} \\ &= [\mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, \overline{W}_1 K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathbf{X}))} \\ &\cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\pi_1(\mathbf{X})}. \end{aligned}$$

■

Si tomamos como conjunto simplicial \mathbf{X} al nervio de un complejo cruzado \mathcal{C} , obtenemos

Corolario 4.3.4 (Representación de la cohomología singular $H_{\text{sing}}^{m+1}(\mathcal{C}, \Pi)$ en \mathbf{Gd}).
Para cada complejo cruzado \mathcal{C} y cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π se tiene una biyección natural

$$H_{\text{sing}}^{m+1}(\mathcal{C}, \Pi) \cong [\mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\pi_1(\mathcal{C})}.$$

Representación de la cohomología $H^{m+2}(\mathbf{X}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{Sxm}

En la categoría \mathbf{Xm} de módulos cruzados hemos considerado el cotriple ${}^2\mathbb{G}$. Observamos que para cada módulo cruzado \mathcal{C} , el módulo cruzado ${}^2\mathbb{G}(\mathcal{C})$ tiene como grupoide base al mismo que \mathcal{C} y además la counidad ϵ de la adjunción $U_2 \vdash F_2$ es la identidad a nivel de grupoides bases:

$$\text{base}(\epsilon) = \text{Id} : \text{base}({}^2\mathbb{G}(\mathcal{C})) \rightarrow \text{base}(\mathcal{C}).$$

Deducimos entonces que la resolución del cotriple ${}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$ es la identidad a nivel de grupoides base, esto es

$$\text{base}_*({}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}))$$

es un grupoide simplicial constante, donde $\text{base}_* : \mathbf{Xm}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op}}$ es el funtor inducido por el funtor $\text{base} : \mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Gpd}$.

La categoría \mathbf{Sxm} será la subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Xm}^{\Delta^{op}}$ de módulos cruzados simpliciales cuyos objetos son módulos cruzados simpliciales \mathcal{C}_\bullet tales que los morfismos cara y degeneración son la identidad a nivel de grupoides base. O equivalentemente, tales que $\text{base}_*(\mathcal{C}_\bullet)$ es un grupoide simplicial constante.

Podemos describir la categoría \mathbf{Sxm} desde los siguientes dos puntos de vista alternativos:

- Dar un objeto de \mathbf{Sxm} es equivalente a dar un par (\mathcal{G}, Σ) donde \mathcal{G} es un grupoide y $\Sigma \in (\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$ es un objeto simplicial en \mathcal{G} -módulos cruzados. Un morfismo de (\mathcal{G}, Σ) a (\mathcal{G}', Σ') en \mathbf{Sxm} vendrá dado por un par (F, α)

donde $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ es un funtor (cambio de base) y $\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es un morfismo simplicial que tiene en todas las dimensiones el mismo funtor cambio de base F .

- De forma alternativa podemos describir un objeto de **Sxm** como un par $(\mathcal{C}, \mathbf{C})$ con $\mathcal{C} = (\mathcal{G}, C, \delta)$ un módulo cruzado, y $\mathbf{C} \in (\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$ un \mathcal{G} -grupo simplicial tal que:

1. $C_0 = C$,
2. $\delta : C_0 = C \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}}$ coiguala los dos morfismos cara $d_0, d_1 : C_1 \rightarrow C_0$,
3. la terna $(\mathcal{G}, C_n, \delta)$, con $\delta : C_n \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}}$ el único morfismo dado por la composición de las caras $C_n \rightarrow C_0$ y $\delta : C_0 \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}}$, es un módulo cruzado (o equivalentemente, satisface la condición de Peiffer).

Según esta descripción, un morfismo de $(\mathcal{C}, \mathbf{C})$ en $(\mathcal{C}', \mathbf{C}')$ vendrá dado por un par $((F, \alpha), \beta)$ donde $(F, \alpha) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de módulos cruzados y $\beta : \mathbf{C} \rightarrow F^* \mathbf{C}'$ es un morfismo simplicial de \mathcal{G} -grupos donde $F^* : \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}'} \rightarrow \mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ es el funtor de la categoría de \mathcal{G}' -grupos en la categoría de \mathcal{G} -grupos inducido por F . Nótese que la componente en dimensión 0 del morfismo simplicial β coincide con la transformación α . De hecho podemos simplificar denotando un morfismo de $(\mathcal{C}, \mathbf{C})$ en $(\mathcal{C}', \mathbf{C}')$ como el par (F, β) .

Representaremos a un objeto de **Sxm** mediante un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_n} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \downarrow \delta \end{array} & \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_{n-1} & \cdots & \\
 & & & & & & \\
 \cdots & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \downarrow \delta \end{array} & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_0 \\
 & & & & & & \\
 \cdots & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \downarrow \delta \end{array} & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{1}_{\mathcal{G}}
 \end{array} \quad (4.31)$$

Vamos ahora a construir el par de funtores adjuntos

$$\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd} \xrightarrow{\quad} \mathbf{Sxm} : \overline{W}_2 \longleftarrow \quad .$$

Comenzaremos definiendo \overline{W}_2 .

Recordemos que en la Sección 2.6 habíamos visto la categoría **SGd** (de grupoides enriquecidos en conjuntos simpliciales dobles) como subcategoría plena de la categoría $\mathbf{SSimplGpd} = \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op} \times \Delta^{op}}$ de grupoides simpliciales dobles (ver página 119). Observamos ahora que el funtor diagonal de Artin-Mazur (1.18) lleva objetos de la categoría **SGd** en objetos de **Gd**,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{SGd} & \xrightarrow{\quad \overline{W} \quad} & \mathbf{Gd} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{SSimplGpd} & \xrightarrow{\quad \overline{W} \quad} & \mathbf{SimplGpd} .
 \end{array}$$

Por otro lado el Corolario 3.1.10 nos mostraba un isomorfismo de categorías

$$\mathbf{Xm} \xrightarrow{\cong} \mathbf{Gd}_2,$$

que al componerlo con la inclusión $\mathbf{Gd}_2 \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ induce un functor

$$\mathbf{Xm}^{\Delta^{op}} \longrightarrow \mathbf{Gd}^{\Delta^{op}}$$

cuya restricción a la categoría \mathbf{Sxm} cae dentro de la categoría \mathbf{SGd} ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sxm} & \xrightarrow{\Theta} & \mathbf{SGd} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Xm}^{\Delta^{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Gd}^{\Delta^{op}} \end{array} .$$

El functor \overline{W}_2 se define como la composición

$$\overline{W}_2 : \mathbf{Sxm} \xrightarrow{\Theta} \mathbf{SGd} \xrightarrow{\overline{W}} \mathbf{Gd}.$$

Vamos a describir la acción de este functor sobre un objeto $(\mathcal{G}, \Sigma) \in \mathbf{Sxm}$.

Para cada $n \geq 0$, supongamos $\Sigma_n = (\mathcal{G}, C_n, \delta_n)$.

El grupoide simplicial $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)$ tiene como objetos a los objetos de \mathcal{G} y como grupoide de 0-símplices al propio \mathcal{G} , esto es:

$$\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_0 = \mathcal{G}.$$

El grupoide $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_1$ de 1-símplices tiene como flechas entre dos objetos x e y a los pares $(f, (g, a_0))$ con $f \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$ y $(g, a_0) \in \text{Hom}_{\mathcal{G} \int_{C_0}}(x, y)$ tales que $d_0^v(f) = d_1^h(g, a_0)$, es decir, que $f = g$. Identificando el par $(f, (g, a_0))$ con (f, a_0) se tiene que

$$\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_1 = \mathcal{G} \int_{C_0}.$$

Con morfismos cara y degeneración dados por las fórmulas:

$$\begin{aligned} d_0(f, a_0) &\equiv d_0(f, (f, a_0)) = d_0^h(f, a_0) = (\delta_0)_y(a_0)f, \\ d_1(f, a_0) &\equiv d_1(f, (f, a_0)) = d_1^v(f) = f, \\ s_0(f) &= (s_0^v(f), s_0^h(f)) = (f, (f, 0_{C_0(y)})) \equiv (f, 0_{C_0(y)}). \end{aligned}$$

En dimensión 2, una flecha de x en y de $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_2$ estaría formada por una terna

$$(f, (g, a_1), ((h, a_0), ((\delta_0)_y(a_0)h, b_0)))$$

con f , (g, a_1) y $((h, a_0), ((\delta_0)_y(a_0)h, b_0))$ flechas de x en y en los grupoides \mathcal{G} , $\mathcal{G} \int C_1$ y $\mathcal{G} \int C_0 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{G} \int C_0$ respectivamente, satisfaciendo las identidades

$$\begin{aligned} d_0^v(f) &= d_1^h(g, a_1), \\ d_0^v(g, a_1) &= d_2^h((h, a_0), ((\delta_0)_y(a_0)h, b_0)) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$f = g \quad \text{y} \quad (g, d_0 a_1) = (h, a_0).$$

Podemos entonces identificar la terna $(f, (g, a_1), ((h, a_0), ((\delta_0)_y(a_0)h, b_0)))$ con la terna (f, a_0, a_1) con $f \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y)$, $a_0 \in C_0(y)$ y $a_1 \in C_1(y)$, es decir:

$$\text{Hom}_{\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_2}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y) \times C_0(y) \times C_1(y).$$

Escribiremos entonces

$$\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_2 = \mathcal{G} * C_0 * C_1,$$

donde el grupoide $\mathcal{G} * C_0 * C_1$ tiene como objetos los de \mathcal{G} , flechas las ternas (f, a_0, a_1) como antes y composición dada por la fórmula:

$$(g, b_0, b_1)(f, a_0, a_1) = (gf, b_0 + {}^{(\delta_1)_z(b_1)}g a_0, b_1 + {}^g a_1),$$

nótese que este grupoide es una especie de producto semidirecto. Con estas identificaciones, los operadores cara están dados por las fórmulas:

$$\begin{aligned} d_0(f, a_0, a_1) &\equiv d_0(f, (f, a_1), ((f, d_0 a_1), (\delta_1(a_1)f, a_0))) \\ &= (d_0^h(f, a_1), d_0^h((f, d_0 a_1), (\delta_1(a_1)f, a_0))) \\ &= ((\delta_1)_y(a_1)f, ((\delta_1)_y(a_1)f, a_0)) \equiv ((\delta_1)_y(a_1)f, a_0), \\ d_1(f, a_0, a_1) &\equiv d_1(f, (f, a_1), ((f, d_0 a_1), (\delta_1(a_1)f, a_0))) \\ &= (d_1^v(f), d_1^h((f, d_0 a_1), (\delta_1(a_1)f, a_0))) = (f, (f, a_0 + d_0 a_1)) \\ &\equiv (f, a_0 + d_0 a_1), \\ d_2(f, a_0, a_1) &\equiv d_2(f, (f, a_1), ((f, d_0 a_1), (\delta_1(a_1)f, a_0))) = (d_2^v(f), d_1^v(f, a_1)) \\ &= (f, (f, d_1 a_1)) \equiv (f, d_1 a_1), \end{aligned}$$

y los degeneración por:

$$\begin{aligned} s_0(f, a_0) &\equiv s_0(f, (f, a_0)) = (s_0^v(f), s_0^h(f), s_0^h(f, a_0)) \\ &= (f, (f, 0_{C_0(y)}), ((f, 0_{C_0(y)}), (f, a_0))) \equiv (f, a_0, 0_{C_0(y)}), \\ s_1(f, a_0) &\equiv s_1(f, (f, a_0)) = (s_1^v(f), s_0^v(f, a_0), s_1^h(f, a_0)) \\ &= (f, (f, s_0 a_0), ((f, a_0), ((\delta_0)_y(a_0)f, 0_{C_0(y)}))) \equiv (f, 0_{C_1(y)}, s_0 a_0). \end{aligned}$$

En general, para $n \geq 3$, es fácil comprobar que el conjunto de flechas de x a y del grupoide de n -símplices de $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)$ está dado por

$$\text{Hom}_{\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n}(x, y) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, y) \times C_0(y) \times \dots \times C_{n-1}(y). \quad (4.32)$$

Denotaremos entonces

$$\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n = \mathcal{G} * C_0 * \dots * C_{n-1}$$

al grupoide de n -símplices de $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)$. La composición en este grupoide está dada por la fórmula:

$$\begin{aligned} (g, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = & (gf, b_0 + (\delta_1)_z(b_1) \dots (\delta_{n-1})_z(b_{n-1})g a_0, \dots, \\ & b_{n-2} + (\delta_{n-1})_z(b_{n-1})g a_{n-2}, b_{n-1} + g a_{n-1}), \end{aligned}$$

obsérvese de nuevo que este grupoide es una especie de producto semidirecto. Los operadores cara y degeneración

$$(\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma))_{n+1} \xleftarrow{s_j} (\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma))_n \xrightarrow{d_i} (\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma))_{n-1}$$

están dados por:

$$\begin{aligned} d_0(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= ((\delta_{n-1})_y(a_{n-1})f, a_0, \dots, a_{n-2}), \\ d_i(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= (f, a_0, \dots, a_{n-i-2}, a_{n-i-1} + d_0 a_{n-i}, d_1 a_{n-i+1}, \dots, d_{i-1} a_{n-1}), \\ d_n(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= (f, d_1 a_1, \dots, d_{n-1} a_{n-1}), \\ s_j(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= (f, a_0, \dots, a_{n-j-1}, 0_{C_{n-j}(y)}, s_0 a_{n-j}, \dots, s_{j-1} a_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Notamos ahora que si \mathcal{G} es un grupoide visto como módulo cruzado simplicial que en cada dimensión tiene al módulo cruzado discreto $\text{discr}(\mathcal{G}) = \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, entonces $\overline{W}_2(\mathcal{G})$ es igual a $K(\mathcal{G}, 0)$, es decir, el grupoide \mathcal{G} visto como grupoide simplicial constante. Como consecuencia, el funtor \overline{W}_2 induce un funtor

$$\overline{W}_2 : \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gd}/\mathcal{G}.$$

Lema 4.3.5. *Supongamos que $(\mathcal{C}, \mathbf{C})$ representa un módulo cruzado simplicial en \mathbf{Sxm} y que \mathbf{C} es un \mathcal{G} -grupo simplicial ($\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$) cuyo complejo de Moore es trivial en dimensiones $\geq m$ (o equivalentemente, \mathbf{C} es el nervio de un $(m-1)$ -hipergroupoide de \mathcal{G} -grupos). Entonces $\overline{W}_2(\mathcal{C}, \mathbf{C}) \in \mathbf{Gd}_{m+1}$.*

Demostración:

Nótese primero que para un \mathcal{G} -grupo simplicial $\mathbf{C} \in (\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$, el que su complejo de Moore sea trivial en dimensiones $\geq m$ es equivalente a que para cualquier

objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, el grupo simplicial $\mathbf{C}(x) \in \mathbf{Gp}^{\Delta^{op}}$ tenga también complejo de Moore trivial en dimensiones $\geq m$ o equivalentemente que las proyecciones canónicas $K_n^i : C_n(x) \rightarrow \Lambda_n^i \mathbf{C}(x)$ sean isomorfismos para todo $n \geq m$ y $0 \leq i \leq n$.

Usando el Corolario 2.4.3, probar que $\overline{W}_2(\mathcal{C}, \mathbf{C}) \in \mathbf{Gd}_{m+1}$ es equivalente a demostrar que los funtores

$$K_n^i : \overline{W}_2(\mathcal{C}, \mathbf{C})_n \rightarrow \Lambda_n^i(\overline{W}_2(\mathcal{C}, \mathbf{C})), \quad 0 \leq i \leq n,$$

son isomorfismos para todo $n \geq m + 1$. Ahora bien, como los funtores K_n^i son la identidad en objetos, solo tenemos que ver que K_n^i es isomorfismo a nivel de flechas o lo que es equivalente, que cada flecha $\xi = (f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \overline{W}_2(\mathcal{C}, \mathbf{C})_n$, $n \geq m + 1$ está totalmente determinada por cualesquiera n de sus $n + 1$ caras. En efecto, supongamos $f : x \rightarrow y$, entonces:

1. Si conocemos todas las caras de ξ excepto la última, a partir de la cara

$$d_0(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = ((\delta_{n-1})_y(a_{n-1})f, a_0, \dots, a_{n-2}),$$

podemos determinar todas las componentes de ξ excepto $f \in \text{arr}(\mathcal{G})$ y $a_{n-1} \in C_{n-1}(y)$. Ahora bien,

$$d_1(f, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (f, a_0, \dots, a_{n-3}, a_{n-2} + d_0(a_{n-1}))$$

y por tanto podemos determinar f y, ya que conocemos a_{n-2} , también $d_0(a_{n-1})$. De forma análoga, las demás caras $d_i(\xi)$ con $2 \leq i \leq n - 1$ determinan también las caras $d_{i-1}(a_{n-1})$. Por tanto, hemos determinado todas las componentes de ξ menos el elemento $a_{n-1} \in C_{n-1}(y)$, pero de este elemento conocemos todas sus caras excepto $d_{n-1}(a_{n-1})$, es decir conocemos

$$(d_0(a_{n-1}), d_1(a_{n-1}), \dots, d_{n-2}(a_{n-1}), -) \in \Lambda_{n-1}^{n-1} \mathbf{C}(y)$$

que, por ser el morfismo $K_{n-1}^{n-1} : C_{n-1}(y) \rightarrow \Lambda_{n-1}^{n-1}(\mathbf{C}(y))$ un isomorfismo (por hipótesis), determina completamente a a_{n-1} .

Así, todas las caras de ξ salvo la última determinan unívocamente a ξ

2. Supongamos ahora que conocemos todas las caras de ξ excepto la cara i , con $1 \leq i \leq n - 1$, a partir de la cara $d_0(\xi)$ de nuevo podemos determinar todas las componentes de ξ excepto la flecha $f \in \text{arr}(\mathcal{G})$, que obtenemos a partir de la cara $d_n(\xi)$, y el elemento $a_{n-1} \in C_{n-1}(y)$. Ahora bien, de nuevo, a partir de las demás caras d_j con $1 \leq j \leq n$ y $j \neq i$ podremos determinar todas las caras $d_{j-1}(a_{n-1})$ (excepto la cara $(i - 1)$) y por tanto tenemos un elemento

$$(d_0(a_{n-1}), \dots, d_{i-2}(a_{n-1}), -, d_i(a_{n-1}), \dots, d_{n-1}(a_{n-1})) \in \Lambda_{n-1}^{i-1} \mathbf{C}(y)$$

que, por ser $K_{i-1}^{i-1} : C_{n-1}(y) \rightarrow \Lambda_{i-1}^{i-1}(\mathbf{C}(y))$ un isomorfismo, nos determina unívocamente a a_{n-1} y así a ξ .

3. Por último, si conocemos todas las caras de ξ excepto $d_0(\xi)$, la cara

$$d_1(f, a_0, \dots, a_{n-1}) = (f, a_0, \dots, a_{n-3}, a_{n-2} + d_0(a_{n-1})),$$

nos permite determinar todas las componentes de ξ excepto a_{n-2} y a_{n-1} . Además si conociéramos a_{n-1} a partir de $d_1(\xi)$ también tendríamos determinada la componente a_{n-2} . Ahora bien, las caras $d_i(\xi)$ con $2 \leq i \leq n$ determinan las caras $d_{i-1}(a_{n-1})$ y por tanto un elemento

$$(-, d_1(a_{n-1}), \dots, d_{n-1}(a_{n-1})) \in \Lambda_{n-1}^0 \mathbf{C}(y) (\cong C_{n-1}(y))$$

que de nuevo, por ser $K_0^{n-1} : C_{n-1} \rightarrow \Lambda_{n-1}^0(\mathbf{C}(y))$ un isomorfismo, determina unívocamente la componente a_{n-1} de ξ . ■

Ejemplo 4.3.6. Sea \mathcal{G} un grupoide y $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un \mathcal{G} -módulo, el módulo cruzado $\text{zero}(\Pi) = (\mathcal{G}, \Pi, 0)$ está dotado de una aplicación al módulo cruzado asociado al grupoide \mathcal{G}

$$\tilde{\Pi}_2 = \text{zero}(\Pi) \rightarrow i_1(\mathcal{G})$$

y la estructura de \mathcal{G} -módulo de Π convierte a este morfismo de módulos cruzados en un objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Xm}/\mathcal{G} (ver (4.20)). Podemos por tanto construir el objeto simplicial de Eilenberg-Mac Lane

$$K(\tilde{\Pi}_2, m) \in (\mathbf{Xm}/\mathcal{G})^{\Delta^{op}},$$

donde hemos identificado \mathcal{G} con el módulo cruzado $i_1(\mathcal{G})$. Es fácil comprobar que este objeto simplicial puede ser considerado como un objeto en \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} , donde ahora estamos identificando \mathcal{G} con el objeto $K(i_1(\mathcal{G}), 0)$ en \mathbf{Sxm} . Vamos a denotar $\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)$ al módulo cruzado simplicial en \mathbf{Sxm} dominio de $K(\tilde{\Pi}_2, m)$, esto es

$$K(\tilde{\Pi}_2, m) = \kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m) \rightarrow K(i_1(\mathcal{G}), 0).$$

Nótese que (según la segunda descripción de los objetos de \mathbf{Sxm}) $\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)$ está dado por el par $(\mathbf{0}_{\mathcal{G}}, K(\Pi, m))$, donde $K(\Pi, m)$ es el objeto simplicial (en \mathcal{G} -grupos) de Eilenberg-Mac Lane asociado al \mathcal{G} -módulo Π .

Puesto que $K(\Pi, m)$ es un \mathcal{G} -grupo simplicial cuyo complejo de Moore es trivial en dimensiones $\geq m+1$, el Lema 4.3.5 nos asegura que $\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)) \in \mathbf{Gd}_{m+2}$ por lo que $\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)) = \text{Cosk}^{m+2} \overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m))$. Para describir entonces completamente $\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m))$ bastará con que demos su $(m+2)$ -truncación. Un calculo directo nos permite describir esta truncación cómo sigue:

$$\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m))_n = \begin{cases} \mathcal{G} & \text{si } n \leq m, \\ \mathcal{G} \int \Pi & \text{si } n = m + 1, \\ \mathcal{G} \int \Pi^{m+2} & \text{si } n = m + 2, \end{cases}$$

con operadores cara y degeneración en la dimensión significativa:

$$\mathcal{G}f\Pi \xrightarrow{s_j} \mathcal{G}f\Pi^{m+2} \xrightarrow{d_i} \mathcal{G}f\Pi$$

dados por las formulas (4.33), que en este caso son

$$d_0(f, a_0, \dots, a_{m+1}) = (f, a_0),$$

$$d_1(f, a_0, \dots, a_{m+1}) = (f, a_0 + d_0(a_1, \dots, a_{m+1})) = (f, a_0 + a_1),$$

$$d_i(f, a_0, \dots, a_{m+1}) = (f, d_{i-1}(a_1, \dots, a_{m+1})) = (f, a_i), \quad 2 \leq i \leq m+1,$$

$$d_{m+2}(f, a_0, \dots, a_{m+1}) = (f, d_{m+1}(a_1, \dots, a_{m+1})) = (f, \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{m+i-1} a_i),$$

$$s_0(f, a) = (f, a, 0, \dots, 0),$$

$$s_j(f, a) = (f, s_{j-1}(a)) = (f, 0_{\Pi_1(y)}, \dots, 0, a, a, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$s_{m+1}(f, a) = (f, s_m(a)) = (f, 0, \dots, 0, a).$$

Nótese que el isomorfismo

$$K_{m+2}^{m+2} : \overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m))_{m+2} = \mathcal{G}f\Pi^{m+2} \longrightarrow \mathcal{G}f\Pi^{m+2} = \Lambda_{m+2}^{m+2}(\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)))$$

está dado por

$$K_{m+2}^{m+2}(f, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m+1}) = (f, a_0, a_0 + a_1, a_2, \dots, a_{m+1}).$$

Es inmediato entonces comprobar la siguiente proposición que es análoga a la Proposición 2.4.9.

Proposición 4.3.7. *Para cualquier grupoide \mathcal{G} , cualquier \mathcal{G} -módulo Π y cualquier $m > 1$ existe un isomorfismo natural*

$$\overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)) \cong \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, m+1).$$

Además dicho isomorfismo hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{W}_2(\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, m)) & \xrightarrow{\cong} & \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, m+1) \\ & \searrow pr & \swarrow pr \\ & & K(\mathcal{G}, 0). \end{array}$$

De forma análoga a la Proposición 4.3.1 y como consecuencia de la Proposición 4.3.7 anterior tenemos:

Corolario 4.3.8. *Para cualquier grupoide \mathcal{G} , cualquier \mathcal{G} -módulo Π y cualquier $m > 1$ si $\tilde{\Pi}_1$ el objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} y $\tilde{\Pi}_2$, el objeto grupo abeliano en la coma categoría \mathbf{Xm}/\mathcal{G} . Entonces existe un isomorfismo natural*

$$\overline{W}_2(K(\tilde{\Pi}_2, m)) \cong K(\tilde{\Pi}_1, m + 1) \tag{4.34}$$

en la coma categoría \mathbf{Gd}/\mathcal{G}

Vamos ahora a adaptar el funtor G “grupoide de lazos” a este contexto para obtener un funtor

$$\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd} \longrightarrow \mathbf{Sxm}$$

que sea el adjunto izquierda de \overline{W}_2 . Demos una descripción explícita de este funtor \mathcal{F}_2 .

Dado un grupoide simplicial \mathcal{G} como el representado en (2.1)

$$\mathcal{G} = \begin{array}{ccccccc} & & \begin{array}{c} s_{n-1} \\ \curvearrowright \\ s_0 \\ \curvearrowright \\ d_n \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} & & \begin{array}{c} s_1 \\ \curvearrowright \\ s_0 \\ \curvearrowright \\ d_2 \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} & & \begin{array}{c} s_0 \\ \curvearrowright \\ d_1 \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} \\ \cdots & \mathcal{G}_n & \longrightarrow & \mathcal{G}_{n-1} & \cdots & \mathcal{G}_2 & \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{G}_0 \\ & & & & & & & & & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & \begin{array}{c} s_{n-1} \\ \curvearrowright \\ s_0 \\ \curvearrowright \\ d_n \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} & & \begin{array}{c} s_1 \\ \curvearrowright \\ s_0 \\ \curvearrowright \\ d_2 \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} & & \begin{array}{c} s_0 \\ \curvearrowright \\ d_1 \\ \longrightarrow \\ d_0 \end{array} & & & & \\ \cdots & \mathcal{G}_n & \longrightarrow & \mathcal{G}_{n-1} & \cdots & \mathcal{G}_2 & \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{G}_0 \\ & \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ t \end{array} & & \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ t \end{array} & & \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ t \end{array} & & \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ t \end{array} & & \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ t \end{array} \\ \cdots & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O} \end{array}$$

denotamos por \mathcal{K}_n a los grupoides totalmente desconexos definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &= \ker(d_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0), \\ \mathcal{K}_n &= \ker(d_1 d_2 \dots d_{n+1} : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \mathcal{G}_0), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Asociados a cada uno de estos grupoides tenemos \mathcal{G}_0 -grupos

$$K_n : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathbf{Gp}$$

que asocian a cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0) = \mathcal{O}$ el grupo $\text{End}_{\mathcal{K}_n}(x)$ con acción dada por conjugación vía $s_n s_{n-1} \dots s_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_{n+1}$. Además la transformación natural

$$\delta : K_n \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}$$

cuya componente en $x \in \mathcal{O}$ viene dada por

$$\delta_x : K_n(x) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}(x), \quad \delta_x(u) = d_0 d_2 \dots d_{n+1}(u)$$

determina un pre-módulo cruzado, que representaremos por la terna $(\mathcal{G}_0, K_n, \delta)$.

Si tenemos ahora en cuenta que, para cada objeto $x \in O$, la componente en x de los operadores cara d_i , $2 \leq i \leq n+1$, y degeneración s_j , $1 \leq j \leq n+1$, restringen a $K_n(x)$, es decir, para cada $u \in K_n(x)$, $d_i(u) \in K_{n-1}(x)$ y $s_j(u) \in K_{n+1}(x)$, observamos que tenemos un objeto simplicial aumentado y escindido de \mathcal{G}_0 -grupos

$$\cdots \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright s_n \\ \curvearrowright s_{n+1} \\ \curvearrowright d_{n+1} \\ \cdots \\ \curvearrowright d_2 \end{array} & \\ K_n & \xrightarrow{\quad} & K_{n-1} \\ & \begin{array}{c} \curvearrowleft s_1 \\ \curvearrowleft s_2 \\ \curvearrowleft s_3 \\ \cdots \\ \curvearrowleft s_{n+1} \end{array} & \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright s_2 \\ \curvearrowright s_3 \\ \curvearrowright d_3 \\ \cdots \\ \curvearrowright d_2 \end{array} & \\ K_2 & \xrightarrow{\quad} & K_1 \xrightarrow{\quad} K_0 \\ & \begin{array}{c} \curvearrowleft s_1 \\ \curvearrowleft s_2 \\ \curvearrowleft s_3 \\ \cdots \\ \curvearrowleft s_{n+1} \end{array} & \end{array}$$

Por otra parte, para $2 \leq i \leq n+1$ y $1 \leq j \leq n+1$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta_x(d_i u) &= d_0 d_2 \dots d_n d_i u = d_0 d_2 \dots d_i d_{n+1} u = d_0 d_2 \dots d_i d_i d_{i+2} \dots d_{n+1} u \\ &= d_0 d_2 \dots d_{n+1} u = \delta_x(u), \\ \delta_x(s_j u) &= d_0 d_2 \dots d_{n+2} s_j u = d_0 d_2 \dots s_j d_{n+1} u = d_0 d_2 \dots d_{j+1} s_j d_{j+1} \dots d_{n+1} u \\ &= d_0 d_2 \dots d_{n+1} u = \delta_x(u), \end{aligned}$$

para cada objeto $x \in O$ y cada $u \in K_n(x)$, es decir, los operadores cara y degeneración del diagrama anterior son morfismos de pre-módulos cruzados y por tanto dicho diagrama de \mathcal{G}_0 -grupos nos proporciona un diagrama simplicial aumentado y escindido de pre-módulos cruzados

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright \sigma_{n-1} \\ \curvearrowright \sigma_0 \\ \curvearrowright \delta_n \\ \cdots \\ \curvearrowright \delta_1 \end{array} & \\ K_n & \xrightarrow{\quad} & K_{n-1} \\ & \begin{array}{c} \curvearrowleft \delta \\ \curvearrowleft \delta \\ \curvearrowleft \delta \\ \cdots \\ \curvearrowleft \delta \end{array} & \end{array} & \cdots & \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \curvearrowright \sigma_1 \\ \curvearrowright \sigma_0 \\ \curvearrowright \delta_2 \\ \cdots \\ \curvearrowright \delta_1 \end{array} & \\ K_2 & \xrightarrow{\quad} & K_1 \xrightarrow{\quad} K_0 \\ & \begin{array}{c} \curvearrowleft \delta \\ \curvearrowleft \delta \\ \curvearrowleft \delta \\ \cdots \\ \curvearrowleft \delta \end{array} & \end{array} \\ \cdots & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \quad \equiv \quad \text{End}_{\mathcal{G}_0} & \cdots & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \quad \equiv \quad \text{End}_{\mathcal{G}_0} \quad \equiv \quad \text{End}_{\mathcal{G}_0}, \end{array} \tag{4.35}$$

donde $\delta_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ y $\sigma_j : K_{n-1} \rightarrow K_n$ son transformaciones naturales cuyas componentes para cada objeto $x \in O$ vienen dadas por restricciones de las componentes en x de las caras $d_{i+1} : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \mathcal{G}_n$ y de las degeneraciones $s_{j+1} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n+1}$ respectivamente.

Vamos a construir un módulo cruzado simplicial a partir del diagrama (4.35). Para ello haremos un cociente en cada \mathcal{G}_0 -módulo, eliminando elementos Peiffer y los que sean imágenes por s_0 . Más concretamente:

Para cada $n \geq 0$ consideremos el \mathcal{G}_0 subgrupo $\wp_n \subseteq K_n$ que a cada objeto $x \in O$ asocia el subgrupo $\wp_n(x) \subseteq K_n(x)$ generado por los elementos de la forma

$$\{u, v\} = \delta_x(u) v u v^{-1} u^{-1} \quad \text{y} \quad s_0 w,$$

con $u, v \in K_n(x)$ y $w \in K_{n-1}(x)$. Nótese que si $w \in K_{n-1}(x)$, entonces $s_0 w \in K_n(x)$ pues:

$$d_1 d_2 \dots d_{n+1}(s_0 w) = d_1 d_2 \dots s_0 d_n w = d_1 s_0 d_1 \dots d_n w = d_1 \dots d_n w = Id_x.$$

Además claramente la acción de las flechas de \mathcal{G}_0 sobre K_n restringe a \wp_n ya que

$$f\{u, v\} = \{f u, f v\} \quad \text{y} \quad f(s_0 w) = s_0(f w),$$

para toda flecha f en \mathcal{G}_0 con dominio x .

Por otro lado el subgrupo $\wp_n(x) \subseteq K_n(x)$ es normal pues:

- dados $\{u, v\} \in \wp_n(x)$ y $w \in K_n(x)$ se tiene:

$$w\{u, v\}w^{-1} = \{w, \delta_x(u) v\}^{-1}\{w u, v\} \in \wp_n(x),$$

- y dado $w \in K_{n-1}(x)$ y $u \in K_n(x)$ como

$$\delta_x(u) s_0(w) = s_0(s_{n-1} \dots s_0 \delta_x(u) w s_{n-1} \dots s_0 \delta_x(u)^{-1}) \in \wp_n(x),$$

se tiene:

$$\begin{aligned} u s_0(w) u^{-1} &= u s_0(w) u^{-1} (\delta_x(u) s_0(w))^{-1} (\delta_x(u) s_0(w)) \\ &= \{u, s_0(w)\}^{-1} (\delta_x(u) s_0(w)) \in \wp_n(x). \end{aligned}$$

Por tanto podemos construir el \mathcal{G}_0 -grupo cociente

$$\tilde{K}_n : \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathbf{Gp}, \quad x \mapsto \tilde{K}_n(x) = K_n(x) / \wp_n(x).$$

Notamos ahora que la transformación natural $\delta : K_n \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}_0}$ lleva \wp_n en el \mathcal{G}_0 -grupo trivial, en efecto:

Para cada objeto $x \in O$, cada $w \in K_{n-1}(x)$ y cada par $(v, w) \in K_n(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta_x(s_0 w) &= d_0 d_2 \dots d_{n+1}(s_0 w) = d_0 d_2 \dots s_0 d_n(w) = d_0 s_0 d_1 \dots d_n(w) \\ &= d_1 \dots d_n(w) = Id_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_x(\{v, w\}) &= \delta_x(\delta_x v w v w^{-1} v^{-1}) = \delta_x(\delta_x v w) \delta_x v (\delta_x w)^{-1} (\delta_x v)^{-1} \\ &= \delta_x((s_n \dots s_0 \delta_x v) w (s_n \dots s_0 \delta_x v)^{-1}) \delta_x v (\delta_x w)^{-1} (\delta_x v)^{-1} \\ &= \delta_x v \delta_x w (\delta_x v)^{-1} \delta_x v (\delta_x w)^{-1} (\delta_x v)^{-1} = Id_x. \end{aligned}$$

Así la transformación natural $\delta : K_n \rightarrow \mathbf{End}_{\mathcal{G}_0}$ induce otra en el cociente

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{End}_{\mathcal{G}_0} \\ & \searrow & \nearrow \exists! \delta \\ & \tilde{K}_n & \end{array}$$

Es fácil comprobar que la terna $(\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta)$ representa un módulo cruzado. Además cada morfismo δ_i y σ_j en el diagrama (4.35) lleva el sub \mathcal{G}_0 -grupo \wp_n en \wp_{n-1} y \wp_{n+1} respectivamente, en efecto, dado un objeto $x \in O$ y dados $\{u, v\}, s_0(w) \in \wp_n(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_i(\{u, v\}) &= \{d_{i+1}(u), d_{i+1}(v)\} \in \wp_{n-1}(x), \\ \sigma_j(\{u, v\}) &= \{s_{j+1}(u), s_{j+1}(v)\} \in \wp_{n+1}(x), \\ \delta_i(s_0(w)) &= d_{i+1}s_0(w) = s_0d_i(w) \in \wp_{n-1}(x), \\ \sigma_j(s_0(w)) &= s_{j+1}s_0(w) = s_0s_j(w) \in \wp_{n+1}(x), \end{aligned}$$

por tanto se tiene un diagrama de \mathcal{G}_0 -módulos cruzados

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & \begin{array}{ccc} \overset{\sigma_{n-1}}{\curvearrowright} & & \\ \delta_n \swarrow & & \searrow \sigma_0 \\ \tilde{K}_n & \xrightarrow{\delta_1} & \tilde{K}_{n-1} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \end{array} & & \begin{array}{ccc} \overset{\sigma_1}{\curvearrowright} & & \\ \delta_2 \swarrow & & \searrow \sigma_0 \\ \tilde{K}_2 & \xrightarrow{\delta_1} & \tilde{K}_1 \xrightarrow{\delta_1} \tilde{K}_0 \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \end{array} \\ \cdots & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \equiv \text{End}_{\mathcal{G}_0} & \cdots & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \equiv \text{End}_{\mathcal{G}_0} \equiv \text{End}_{\mathcal{G}_0}. & \end{array} \tag{4.36}$$

Vamos a completar el diagrama anterior (4.36) añadiendo en cada dimensión un nuevo morfismos de módulos cruzados

$$\delta_0 : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}_{n-1},$$

de manera que el diagrama resultante represente un módulo cruzado simplicial que será por definición $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$.

Para definir la transformación natural δ_0 comenzamos considerando la transformación

$$[d_0, d_1] : K_n \longrightarrow K_{n-1},$$

cuya componente en un objeto $x \in O$ está dada por la aplicación $[d_0, d_1]_x : K_n(x) \rightarrow K_{n-1}(x)$ dada por la fórmula

$$u \mapsto [d_0, d_1]_x(u) = [(d_0)_x(u), (d_1)_x(u)] = (d_1)_x(u) (d_0)_x(u)^{-1} (s_0 d_1 d_0)_x(u),$$

según la fórmula para el corchete en el Lema 2.2.1. Para simplificar notación eliminaremos el índice x , sobrentendiéndolo en cada momento.

Nótese que $[d_0, d_1]_x$ no es un morfismo de grupos y también que $[d_0, d_1]$ no es natural en x aunque si que lo es a nivel de los conjuntos subyacentes (ver la propiedad (P2) siguiente). Sin embargo esta transformación tiene las siguientes propiedades:

(P1) Para cada $u \in K_n(x)$ se tiene que efectivamente

$$[d_0, d_1](u) \in K_{n-1}(x).$$

(P2) Para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 y cada $u \in K_n(x)$ se tiene

$$[d_0, d_1](^f u) = ^f([d_0, d_1](u)).$$

(P3) Para cada par de elementos $u, v \in K_n(x)$ se tiene

$$[d_0, d_1](uv) [d_0, d_1](v)^{-1} [d_0, d_1](u)^{-1} \in \wp_{n-1}(x).$$

(P4) Cada generador de $\wp_n(x)$ es llevado por $[d_0, d_1]_x$ a un elemento de $\wp_{n-1}(x)$.

(P5) Para cada $u \in K_n(x)$ se tiene

$$([d_0, d_1]s_2(u))^{-1} s_1[d_0, d_1](u) \in \wp_n(x).$$

En efecto:

Demostración de (P1).-

$$\begin{aligned} d_1 d_2 \dots d_n([d_0, d_1](u)) &= d_1 d_2 \dots d_n(d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) \\ &= d_1 d_2 \dots d_n d_1 u (d_1 d_2 \dots d_n d_0 u)^{-1} d_1 d_2 \dots d_n s_0 d_1 d_0 u \\ &= d_1 d_1 d_3 \dots d_{n+1} u (d_1 d_0 d_3 \dots d_{n+1} u)^{-1} d_1 s_0 d_1 d_0 d_3 \dots d_{n+1} u \\ &= d_1 \dots d_{n+1} u (d_0 d_2 \dots d_{n+1} u)^{-1} d_0 d_2 \dots d_{n+1} u = Id_x. \end{aligned}$$

Demostración de (P2).-

$$\begin{aligned} [d_0, d_1](^f u) &= d_1(^f u) d_0(^f u)^{-1} s_0 d_1 d_0(^f u) = d_1(s_n \dots s_0(f) u s_n \dots s_0(f)^{-1}) \\ &\quad d_0(s_n \dots s_0(f) u s_n \dots s_0(f)^{-1})^{-1} s_0 d_1 d_0(s_n \dots s_0(f) u s_n \dots s_0(f)^{-1}) \\ &= s_{n-1} \dots s_0(f) d_1 u s_{n-1} \dots s_0(f)^{-1} (s_{n-1} \dots s_0(f) d_0 u s_{n-1} \dots s_0(f)^{-1})^{-1} \\ &\quad s_{n-1} \dots s_0(f) s_0 d_1 d_0 u s_{n-1} \dots s_0(f)^{-1} \\ &= s_{n-1} \dots s_0(f) d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u s_{n-1} \dots s_0(f)^{-1} \\ &= ^f(d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) = ^f([d_0, d_1](u)). \end{aligned}$$

Demostración de (P3).-

$$\begin{aligned} [d_0, d_1](uv) [d_0, d_1](v)^{-1} [d_0, d_1](u)^{-1} &= d_1(uv) d_0(uv)^{-1} s_0 d_1 d_0(uv) (d_1 v (d_0 v)^{-1} \\ &\quad s_0 d_1 d_0 v)^{-1} (d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u)^{-1} \\ &= d_1 u d_1 v (d_0 v)^{-1} (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u d_0 v \\ &\quad (d_1 v)^{-1} (s_0 d_1 d_0 u)^{-1} d_0 u (d_1 u)^{-1} \\ &= d_1 u \{a, b\}^{-1} (d_1 u)^{-1} \in \wp_{n-1}(x) \end{aligned}$$

pues $d_1u \in K_{n-1}(x)$ y $\{a, b\} \in \wp_{n-1}(x)$ que es un subgrupo normal de $K_{n-1}(x)$, donde $a, b \in K_{n-1}(x)$ son los elementos

$$\begin{aligned} a &= d_1v(d_0v)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v), \\ b &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v)^{-1}(d_0u)^{-1}s_0d_1d_0u(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v). \end{aligned}$$

Demostración de (P4).- Para cada $w \in K_{n-1}(x)$ y cada par $u, v \in K_n(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} [d_0, d_1](s_0w) &= d_1s_0w d_0s_0w^{-1}s_0d_1d_0s_0w = ww^{-1}s_0d_1w = s_0d_1w \in \wp_{n-1}(x), \\ [d_0, d_1](\{u, v\}) &= [d_0, d_1](\delta_x^u vuv^{-1}u^{-1}) = [d_0, d_1]((s_n\dots s_0\delta_xu)v(s_n\dots s_0\delta_xu)^{-1}uv^{-1}u^{-1}) \\ &= d_1((s_n\dots s_0\delta_xu)v(s_n\dots s_0\delta_xu)^{-1}uv^{-1}u^{-1}) \\ &= d_0((s_n\dots s_0\delta_xu)v(s_n\dots s_0\delta_xu)^{-1}uv^{-1}u^{-1})^{-1} \\ &= s_0d_1d_0((s_n\dots s_0\delta_xu)v(s_n\dots s_0\delta_xu)^{-1}uv^{-1}u^{-1}) \\ &= (s_{n-1}\dots s_0\delta_xu)d_1v(s_{n-1}\dots s_0\delta_xu)^{-1}d_1ud_1v^{-1}d_1u^{-1}d_0ud_0v d_0u^{-1} \\ &= (s_{n-1}\dots s_0\delta_xu)d_0v^{-1}(s_0d_1d_0v)(s_{n-1}\dots s_0\delta_xu)^{-1}(s_0d_1d_0u) \\ &= (s_0d_1d_0v)^{-1}(s_0d_1d_0u)^{-1} = \{c, d\}(d_1u)(d_0u)^{-1} \\ &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u)(d_1v)(d_0v)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v) \\ &= d_1(uv)^{-1}d_0(uv)s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}(uv)^{-1}\{a, b\}^{-1}s_0(a') \\ &= \{c, d\}(d_1u)\{e, f\}\{g, h\}(d_1u)^{-1}\{a, b\}^{-1}s_0(a') \in \wp_{n-1}(x), \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d, e, f, g, h \in K_{n-1}(x)$ son los elementos

$$\begin{aligned} a &= s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}(uv)d_0(uv)^{-1}d_1(uv), \\ b &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v)^{-1}(d_0v)(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u)^{-1}(d_0u), \\ c &= (d_1u)(d_0u)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u), \\ d &= d_1v, \\ e &= (d_1v)(d_0v)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v), \\ f &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v)^{-1}(d_0u)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u) \\ &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}v), \\ g &= (d_1u)(d_0u)^{-1}(s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u), \\ h &= (s_{n-1}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u)(d_0u)^{-1}, \end{aligned}$$

y $a' \in K_{n-2}(x)$ es el elemento

$$\begin{aligned} a' &= (s_{n-2}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u)(d_1d_0v)(s_{n-2}\dots s_0d_0d_2\dots d_{n+1}u)^{-1}(d_1d_0u) \\ &= (d_1d_0v)^{-1}(d_1d_0u)^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración de (P5).-

$$\begin{aligned}
([d_0, d_1]s_2(u))^{-1} s_1[d_0, d_1](u) &= (d_1s_2u(d_0s_2u)^{-1}s_0d_1d_0s_2u)^{-1} s_1(d_1u(d_0u)^{-1} \\
&\quad s_0d_1d_0u) = (s_0d_1d_0s_2u)^{-1}d_0s_2u(d_1s_2u)^{-1}s_1d_1u \\
&\quad (s_1d_0u)^{-1}s_1s_0d_1d_0u = (s_0d_1s_1d_0u)^{-1}s_0s_0d_1d_0u \\
&= s_0((d_0u)^{-1}s_0d_1d_0u) \in \wp_n(x)
\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
d_1\dots d_n((d_0u)^{-1}s_0d_1d_0u) &= (d_1\dots d_nd_0u)^{-1}d_1\dots d_ns_0d_1d_0u \\
&= (d_0d_2\dots d_{n+1}u)^{-1}d_0d_2\dots d_{n+1}u = Id_x,
\end{aligned}$$

es decir, $(d_0u)^{-1}s_0d_1d_0u \in K_{n-1}(x)$.

Estas propiedades de $[d_0, d_1]$ nos permiten construir una única transformación natural

$$\delta_0 : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}_{n-1}$$

haciendo, para cada objeto $x \in O$, conmutar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
K_n(x) & \xrightarrow{[d_0, d_1]_x} & K_{n-1}(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{K}_n(x) & \xrightarrow{(\delta_0)_x} & \tilde{K}_{n-1}(x),
\end{array}$$

a nivel de conjuntos subyacentes, siendo los morfismos verticales las proyecciones canónicas a los correspondientes cocientes.

Otras propiedades de la transformación $[d_0, d_1]$, que se deducen de las propiedades anteriores y de las propiedades del corchete dadas en los Lemas 2.2.1 y 2.2.2, son las siguientes (en las siguientes igualdades yuxtaposición indica composición de transformaciones):

- Para $1 \leq i \leq n$, se tiene

$$d_{i+1}[d_0, d_1] = [d_{i+1}d_0, d_{i+1}d_1] = [d_0d_{i+2}, d_1d_{i+2}] = [d_0, d_1]d_{i+2}$$

y por tanto $\delta_i\delta_0 = \delta_0\delta_{i+1}$.

- Para $1 \leq i \leq n$, se tiene

$$s_{i+1}[d_0, d_1] = [s_{i+1}d_0, s_{i+1}d_1] = [d_0s_{i+2}, d_1s_{i+2}] = [d_0, d_1]s_{i+2}$$

y por tanto $\sigma_i\delta_0 = \delta_0\sigma_{i+1}$.

- Además,

$$[d_0[d_0, d_1], d_1[d_0, d_1]] = [d_1d_0, d_1d_1] = [d_0d_2, d_1d_2] = [d_0, d_1]d_2$$

y por tanto $\delta_0\delta_0 = \delta_0\delta_1$.

- También

$$[d_0s_1, d_1s_1] = [s_0d_0, Id] = Id$$

y por tanto $\delta_0\sigma_0 = Id$.

- Además como consecuencia de (P5) se tiene $\sigma_0\delta_0 = \delta_0\sigma_1$.
- Por último,

$$\begin{aligned} d_0d_2 \dots d_n[d_0, d_1] &= d_0[d_2 \dots d_n d_0, d_2 \dots d_n d_1] \\ &= d_0[d_0d_3 \dots d_{n+1}, d_1d_3 \dots d_{n+1}] \\ &= d_1d_0d_3 \dots d_{n+1} = d_0d_2d_3 \dots d_{n+1} \end{aligned}$$

y por tanto el triángulo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_n & \xrightarrow{\delta_0} & \tilde{K}_{n-1} \\ & \searrow d_0d_2 \dots d_{n+1} = \delta & \swarrow \delta = d_0d_2 \dots d_n \\ & & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \end{array}$$

es conmutativo.

De esta forma obtenemos un diagrama simplicial en la categoría $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}_0}$

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \begin{array}{ccc} & \overset{\sigma_{n-1}}{\curvearrowright} & \\ & \overset{\sigma_0}{\curvearrowright} & \\ \tilde{K}_n & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{K}_{n-1} \\ \delta \downarrow & \xrightarrow{\delta_0} & \downarrow \delta \\ \text{End}_{\mathcal{G}_0} & \xlongequal{\quad} & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \end{array} & \cdots & \begin{array}{ccc} & \overset{\sigma_0}{\curvearrowright} & \\ & \overset{\delta_1}{\curvearrowright} & \\ \tilde{K}_1 & \xrightarrow{\delta_1} & K_0 \\ \delta \downarrow & \xrightarrow{\delta_0} & \downarrow \delta \\ \text{End}_{\mathcal{G}_0} & \xlongequal{\quad} & \text{End}_{\mathcal{G}_0} \end{array} & \cdots \end{array}$$

que representa un módulo cruzado simplicial $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$.

Es rutinario comprobar que la asociación $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{F}_2(\mathcal{G})$ es funtorial, además tenemos:

Proposición 4.3.9. *El funtor $\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Sxm}$ es el adjunto izquierda de \overline{W}_2 .*

Demostración: Dado un grupoide simplicial $\mathcal{G} \in \mathbf{Gd}$ como el representado en (2.1) y un módulo cruzado simplicial $(\mathcal{G}, \Sigma) \in \mathbf{Sxm}$ veamos que existe una biyección natural entre

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}_2(\mathcal{G})} \longrightarrow \frac{\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)}{(\mathcal{G}, \Sigma)}$$

Supongamos dado un morfismo de grupoide simpliciales

$$\mathbf{F} = \{F_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n, n \geq 0\}.$$

Llamemos $F = F_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_0 = \mathcal{G}$, además para $n \geq 0$ tenemos el functor

$$F_{n+1} : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_{n+1} = \mathcal{G} * C_0 * C_1 * \cdots * C_n.$$

Puesto que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{d_1 d_2 \cdots d_{n+1}} & \mathcal{G}_0 \\ F_{n+1} \downarrow & & \downarrow F=F_0 \\ \mathcal{G} * C_0 * C_1 * \cdots * C_n & \xrightarrow{pr} & \mathcal{G} \end{array}$$

es conmutativo, la composición

$$\mathcal{K}_n \hookrightarrow \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{F_{n+1}} \mathcal{G} * C_0 * C_1 * \cdots * C_n \xrightarrow{pr} \mathcal{G}$$

es trivial y por tanto (en vista de la definición de producto en $\mathcal{G} * C_0 * C_1 * \cdots * C_n$) la composición

$$\mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{F_{n+1}} \mathcal{G} * C_0 * C_1 * \cdots * C_n \xrightarrow{q_n} \hat{C}_n,$$

con q_n la proyección canónica (que no es functor ya que no conserva composiciones), induce un functor

$$\mathcal{K}_n \xrightarrow{q_n F_{n+1}} \hat{C}_n \quad (4.37)$$

que es la identidad en objetos y sobre flechas (que son siempre endomorfismos) $u \in \mathcal{K}_n$ actúa como

$$u \mapsto q_n F_{n+1}(u).$$

Además de la conmutación de F_{n+1} con las degeneraciones se deduce que, para cualquiera flechas $f \in \mathcal{G}_0$ y $u \in \mathcal{K}_n$ ambas con el mismo dominio, se tiene

$$q_n F_{n+1}(f u) = q_n F_{n+1}(s_n \cdots s_0(f) u s_n \cdots s_0(f)^{-1}) = F(f)(q_n F_{n+1}(u)),$$

nótese que $s_n \cdots s_0(f) = (F(f), 0, \cdots, 0)$. Por tanto el functor (4.37) induce una transformación natural

$$\alpha_n : \mathcal{K}_n \longrightarrow C_n F, u \mapsto (\alpha_n)_x(u) = q_n F_{n+1}(u),$$

para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ y $u \in K(x) = \text{End}_{\mathcal{K}_n}(x)$. De nuevo es rutinario probar que el par (F, α_n) establece un morfismo de pre-módulos cruzados

$$(F, \alpha_n) : (\mathcal{G}_0, K_n, \delta) \longrightarrow (\mathcal{G}, C_n, \delta).$$

Por otro lado, si $w \in \mathcal{K}_{n-1}$, entonces

$$q_n F_{n+1}(s_0 w) = q_n s_0 F_n(w) = 0_{F(x)},$$

por tanto α_n restringida a \wp_n es trivial (nótese que $(\mathcal{G}, C_n, \delta)$ es un módulo cruzado y por tanto cumple la identidad de Peiffer, de modo que el otro tipo de generadores de \wp_n son anulados por α_n), de donde α_n induce una transformación natural (a la que denotamos igual) $\alpha_n : \tilde{K}_n \rightarrow C_n F$, y un morfismo de módulos cruzados $(F, \alpha_n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}, C_n, \delta)$, el único que hace conmutativo el diagrama de pre-módulos cruzados

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_0, K_n, \delta) & \xrightarrow{\quad} & (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta) \\ & \searrow (F, \alpha_n) & \swarrow \exists!(F, \alpha_n) \\ & (\mathcal{G}, C_n, \delta) & \end{array}$$

Será de nuevo rutinario probar que la familia de morfismos de módulos cruzados

$$\{(F, \alpha_n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}, C_n, \delta_n), n \geq 0\},$$

todos con el mismo functor cambio de base, determina un morfismo de módulos cruzados simpliciales de $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$ en (\mathcal{G}, Σ) .

Recíprocamente, dado un morfismo de módulos cruzados simpliciales

$$(F', \beta) : \mathcal{F}_2(\mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G}, \Sigma),$$

es decir, una familia de morfismos de módulos cruzados

$$\{(F', \beta_n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}, C_n, \delta_n), n \geq 0\}$$

todos con el mismo functor cambio de base $F' : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}$, que satisfacen las correspondientes identidades simpliciales, consideramos la familia de funtores

$$\{F'_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n, n \geq 0\}$$

con:

- $F'_0 = F' : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}$,

- $F'_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_1 = \mathcal{G}fC_0$ el funtor que actúa como el funtor F' sobre objetos y sobre morfismos $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_1 actúa como sigue, teniendo en cuenta que d_1f es una flecha de \mathcal{G}_0 y que $f(s_0d_1f)^{-1} \in K_0(y)$, la imagen por F'_1 de f viene dada por

$$F'_1(f) = (F'(d_1f), (\beta_0)_y(\overline{f(s_0d_1f)^{-1}})).$$

donde \bar{k} indica la clase en $\tilde{K}_0(y)$ del elemento $k \in K_0(y)$.

Esta correspondencia es efectivamente funtorial, pues dados $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dos flechas componibles en \mathcal{G}_1 se tiene:

$$\begin{aligned} F'_1(gf) &= (F'd_1(gf), (\beta_0)_z(\overline{gf(s_0d_1(gf))^{-1}})) \\ &= (F'(d_1gd_1f), (\beta_0)_z(\overline{g(s_0d_1g)^{-1}(s_0d_1g)f(s_0d_1f)^{-1}(s_0d_1g)^{-1}})) \\ &= (F'(d_1g)F'(d_1f), (\beta_0)_z(\overline{g(s_0d_1g)^{-1}})) \\ &\quad + (\beta_0)_z(\overline{s_0d_1gf(s_0d_1f)^{-1}(s_0d_1g)^{-1}}) \\ &= (F'(d_1g)F'(d_1f), (\beta_0)_z(\overline{g(s_0d_1g)^{-1}}) + (\beta_0)_z(\overline{d_1gf(s_0d_1f)^{-1}})) \\ &= (F'(d_1g), (\beta_0)_z(\overline{g(s_0d_1g)^{-1}}))(F'(d_1f), (\beta_0)_y(\overline{f(s_0d_1f)^{-1}})) \\ &= F'_1(g)F'_1(f). \end{aligned}$$

- $F'_2 : \mathcal{G}_2 \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_2 = \mathcal{G} * C_0 * C_1$ actúa de nuevo como el funtor F' sobre objetos y sobre flechas $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_2 , d_1^2f es una flecha de \mathcal{G}_0 , teniendo en cuenta que $d_0f(s_0d_1d_0f)^{-1} \in K_0(y)$ y $f(s_0^2d_1^2f)^{-1} \in K_1(y)$, la imagen por F'_2 viene dada por

$$F'_2(f) = (F'(d_1^2f), (\beta_0)_y(\overline{d_0f(s_0d_1d_0f)^{-1}}), (\beta_1)_y(\overline{f(s_0^2d_1^2f)^{-1}})),$$

donde de nuevo barras indican clases en los correspondientes cocientes.

Esta correspondencia es también funtorial pues dados $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dos flechas

componibles en \mathcal{G}_2 se tiene:

$$\begin{aligned}
F'_2(gf) &= (F'd_1^2(gf), (\beta_0)_z(\overline{d_0(gf)(s_0d_1d_0(gf))^{-1}}), (\beta_1)_z(\overline{gf(s_0^2d_1^2(gf))^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^2gd_1^2f), \\
&\quad (\beta_0)_z(\overline{d_0g(s_0d_1d_0g)^{-1}(s_0d_1d_0g)d_0f(s_0d_1d_0f)^{-1}(s_0d_1d_0g)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_1)_z(\overline{g(s_0^2d_1^2g)^{-1}(s_0^2d_1^2g)f(s_0^2d_1^2f)^{-1}(s_0^2d_1^2g)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^2g)F'(d_1^2f), (\beta_0)_z(\overline{d_0g(s_0d_1d_0g)^{-1}}) \\
&\quad + (\beta_0)_z(\overline{(s_0d_1d_0g)d_0f(s_0d_1d_0f)^{-1}(s_0d_1d_0g)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_0)_z(\overline{g(s_0^2d_1^2g)^{-1}}) + (\beta_0)_z(\overline{s_0^2d_1^2gf(s_0^2d_1^2f)^{-1}(s_0^2d_1^2g)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^2g)F'(d_1^2f), (\beta_0)_z(\overline{d_0g(s_0d_1d_0g)^{-1}}) \\
&\quad + (\beta_0)_z(\overline{d_1d_0gd_0f(s_0d_1d_0f)^{-1}}), (\beta_1)_z(\overline{g(s_0^2d_1^2g)^{-1}}) \\
&\quad + (\beta_1)_z(\overline{d_1^2gf(s_0^2d_1^2f)^{-1}})) = (F'(d_1^2g), (\beta_0)_z(\overline{d_0g(s_0d_1d_0g)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_1)_z(\overline{g(s_0^2d_1^2g)^{-1}})) = (F'(d_1^2f), (\beta_0)_y(\overline{d_0f(s_0d_1d_0f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_1)_y(\overline{f(s_0^2d_1^2f)^{-1}})) = F'_2(g)F'_2(f).
\end{aligned}$$

- En general, para $n \geq 3$ el funtor $F'_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n = \mathcal{G} * C_0 * C_1 * \dots * C_{n-1}$ actúa de nuevo como el funtor F' sobre objetos y sobre flechas $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_n , teniendo en cuenta que $d_1^n f$ es una flecha de \mathcal{G}_0 y que $d_0^{n-i} f(s_0^i d_1^i d_0^{n-i} f)^{-1} \in K_{i-1}(y)$, su imagen por F'_n viene dada por

$$\begin{aligned}
F'_n(f) &= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0d_1d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{i-1})_y(\overline{d_0^{n-i} f(s_0^i d_1^i d_0^{n-i} f)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})),
\end{aligned}$$

de nuevo barras indican clases en los correspondientes cocientes.

Esta correspondencia también es funtorial pues dadas $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dos flechas

componibles en \mathcal{G}_n se tiene:

$$\begin{aligned}
F'_n(gf) &= (F' d_1^n(gf), (\beta_0)_z(\overline{d_0^{n-1}(gf)(s_0 d_1 d_0^{n-1}(gf))^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_z(\overline{gf(s_0^n d_1^n(gf))^{-1}})) = (F'(d_1^n g) F'(d_1^n f), \\
&\quad (\beta_0)_z(\overline{d_0^{n-1} g(s_0 d_1 d_0^{n-1} g)^{-1}}) \\
&\quad (\beta_0)_z(\overline{(s_0 d_1 d_0^{n-1} g) d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1} (s_0 d_1 d_0^{n-1} g)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_z(\overline{g(s_0^n d_1^n g)^{-1}}) + (\beta_{n-1})_z(\overline{(s_0^n d_1^n g) f(s_0^n d_1^n f)^{-1} (s_0^n d_1^n g)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n g) F'(d_1^n f), (\beta_0)_z(\overline{d_0^{n-1} g(s_0 d_1 d_0^{n-1} g)^{-1}}) \\
&+ (\beta_0)_z(\overline{d_1 d_0^{n-1} (g) d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_z(\overline{g(s_0^n d_1^n g)^{-1}}) + (\beta_{n-1})_z(\overline{d_1^n g f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n g), (\beta_0)_z(\overline{d_0^{n-1} g(s_0 d_1 d_0^{n-1} g)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-1})_z(\overline{g(s_0^n d_1^n g)^{-1}})) \\
&\quad (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= F'_n(g) F'_n(f).
\end{aligned}$$

Tenemos que comprobar que así definidos estos funtores conmutan con los operadores cara y degeneración, es decir, que los siguientes cuadrados conmutan:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{s_{n-1}} & & \\
& & \xrightarrow{s_0} & & \\
& & \xrightarrow{d_n} & & \\
\cdots & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{G}_{n-1} & \cdots \\
& \downarrow F'_n & & \downarrow F'_{n-1} & \\
& & \xrightarrow{s_{n-1}} & & \\
& & \xrightarrow{s_0} & & \\
& & \xrightarrow{d_n} & & \\
\cdots & \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n & \xrightarrow{d_0} & \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_{n-1} & \cdots
\end{array}$$

En efecto, a nivel de objetos está claro y dada una flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_n :

- para $i = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d_0 F'_n(f) &= d_0(F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) = ((\delta_{n-1})_y(\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}}) F'(d_1^n f), \\
&\quad (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-2})_y(\overline{d_0 f(s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_0 f)^{-1}})) \\
&= (F' \delta_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}}) F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y(\overline{d_0 f(s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_0 f)^{-1}})) = (F'(d_0 d_2 \dots d_n f), \\
&\quad (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-2})_y(\overline{d_0 f(s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_0 f)^{-1}})) \\
&= (F' d_1^{n-1}(d_0 f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-2} (d_0 f)(s_0 d_1 d_0^{n-2} (d_0 f))^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y(\overline{d_0 f(s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_0 f)^{-1}})) = F'_{n-1}(d_0 f) = F'_{n-1} d_0(f),
\end{aligned}$$

- para $0 < i < n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d_i F'_n(f) &= d_i(F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, (\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-i-2})_y(\overline{d_0^{i+1} f(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^{i+1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i-1})_y(\overline{d_0^i f(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1}}) \\
&+ d_0(\beta_{n-i})_y(\overline{d_0^{i-1} f(s_0^{n-i+1} d_1^{n-i+1} d_0^{i-1} f)^{-1}}), \\
&\quad d_1(\beta_{n-i+1})_y(\overline{d_0^{i-2} f(s_0^{n-i+2} d_1^{n-i+2} d_0^{i-2} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad d_{i-1}(\beta_{n-1})_y(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-i-2})_y(\overline{d_0^{i+1} f(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^{i+1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i-1})_y(\overline{d_0^i f(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1}}) \\
&+ (\beta_{n-i-1})_y \delta_0(\overline{d_0^{i-1} f(s_0^{n-i+1} d_1^{n-i+1} d_0^{i-1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i})_y \delta_1(\overline{d_0^{i-2} f(s_0^{n-i+2} d_1^{n-i+2} d_0^{i-2} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y \delta_{i-1}(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-i-2})_y(\overline{d_0^{i+1} f(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^{i+1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i-1})_y(\overline{d_0^i f(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1}}) \delta_0(\overline{d_0^{i-1} f(s_0^{n-i+1} d_1^{n-i+1} d_0^{i-1} f)^{-1}})), \\
&\quad (\beta_{n-i})_y \delta_1(\overline{d_0^{i-2} f(s_0^{n-i+2} d_1^{n-i+2} d_0^{i-2} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y \delta_{i-1}(\overline{f(s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-i-2})_y(\overline{d_0^{i+1} f(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^{i+1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i-1})_y(\overline{d_0^i f(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1}}) \\
&\quad (\beta_{n-i-1})_y(\overline{d_1 d_0^{i-1} f(d_0^i f)^{-1} s_0 d_1 d_0^i f(s_0^{n-i} d_1^{n-i+1} d_0^{i-1} f)^{-1}}), \\
&\quad (\beta_{n-i})_y(\overline{d_2 d_0^{i-2} f(d_2 s_0^{n-i+2} d_1^{n-i+2} d_0^{i-2} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y(\overline{d_i f(d_i s_0^n d_1^n f)^{-1}})) \\
&= (F'(d_1^n f), (\beta_0)_y(\overline{d_0^{n-1} f(s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1}}), \dots, \\
&\quad (\beta_{n-i-2})_y(\overline{d_0^{i+1} f(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^{i+1} f)^{-1}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta_{n-i-1})_y \overline{(d_1 d_0^{i-1} f (s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} s_0 d_1 d_0^i f (s_0^{n-i} d_1^{n-i+1} d_0^{i-1} f)^{-1})}, \\
& (\beta_{n-i})_y \overline{(d_2 d_0^{i-2} f (d_2 s_0^{n-i+2} d_1^{n-i+2} d_0^{i-2} f)^{-1})}, \dots, \\
& (\beta_{n-2})_y \overline{(d_i f (d_i s_0^n d_1^n f)^{-1})} \\
= & (F' d_1^{n-1} (d_i f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-2} d_i f (s_0 d_1 d_0^{n-2} d_i f)^{-1})}, \dots, \\
& (\beta_{n-i-2})_y \overline{(d_0^i d_i f (s_0^{n-i-1} d_1^{n-i-1} d_0^i d_i f)^{-1})}, \\
& (\beta_{n-i-1})_y \overline{(d_0^{i-1} (d_i f) (s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^{i-1} (d_i f))^{-1})}, \\
& (\beta_{n-i})_y \overline{(d_0^{i-2} d_i f (s_0^{n-i+1} d_1^{n-i+1} d_0^{i-2} d_i f)^{-1})}, \dots, \\
& (\beta_{n-2})_y \overline{(d_i f (s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_i f)^{-1})} = F_{n-1}(d_i f) = F_{n-1} d_i(f),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\overline{(d_0^i f) (s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} (d_1 d_0^{i-1} f) (d_0^i f)^{-1}} = \overline{(d_1 d_0^{i-1} f) (s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1}}$$

y que $\overline{(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} (s_0 d_1 d_0^i f)} = \overline{Id}$ pues

$$(s_0^{n-i} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} (s_0 d_1 d_0^i f) = s_0 ((s_0^{n-i-1} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} (d_1 d_0^i f))$$

con $(s_0^{n-i-1} d_1^{n-i} d_0^i f)^{-1} (d_1 d_0^i f) \in K_{n-i-2}(x)$, y por último

- para $i = n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
d_n F'_n(f) &= d_n (F' (d_1^n f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-1} f (s_0 d_1 d_0^{n-1} f)^{-1})}, \dots, (\beta_{n-1})_y \overline{(f (s_0^n d_1^n f)^{-1})}) \\
&= (F' (d_1^n f), d_1 (\beta_1)_y \overline{(d_0^{n-2} f (s_0^2 d_1^2 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad d_{n-1} (\beta_{n-1})_y \overline{(f (s_0^n d_1^n f)^{-1})}) \\
&= (F' (d_1^n f), (\beta_0)_y \delta_1 \overline{(d_0^{n-2} f (s_0^2 d_1^2 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y \delta_{n-1} \overline{(f (s_0^n d_1^n f)^{-1})}) = (F' (d_1^{n-1} d_n f), \\
&\quad (\beta_0)_y \overline{(d_2 d_0^{n-2} f (d_2 s_0^2 d_1^2 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, (\beta_{n-2})_y \overline{(d_n f (d_n s_0^n d_1^n f)^{-1})}) \\
&= (F' d_1^{n-1} (d_n f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-2} d_n f (s_0 d_1 d_0^{n-2} d_n f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-2})_y \overline{(d_n f (s_0^{n-1} d_1^{n-1} d_n f)^{-1})}) = F_{n-1}(d_n f) = F_{n-1} d_n(f).
\end{aligned}$$

Veamos que también conmutan con las degeneraciones. Para cada flecha f :

$x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_{n-1} se tiene:

$$\begin{aligned}
F_n s_j(f) &= (F'(d_1^n s_j f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-1} s_j f (s_0 d_1 d_0^{n-1} s_j f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-j-1})_y \overline{(d_0^j s_j f (s_0^{n-j} d_1^{n-j} d_0^j s_j f)^{-1})}, \\
&\quad (\beta_{n-j})_y \overline{(d_0^{j-1} s_j f (s_0^{n-j+1} d_1^{n-j+1} d_0^{j-1} s_j f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_y \overline{(s_j f (s_0^n d_1^n s_j f)^{-1})}) = \\
&= (F'(d_1^{n-1} f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-2} f (s_0 d_1 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-j-1})_y \overline{(s_0 d_0^j f (s_0^{n-j} d_1^{n-j-1} d_0^j f)^{-1})}, \\
&\quad (\beta_{n-j})_y \overline{(s_1 d_0^{j-1} f (s_1 s_0^{n-j} d_1^{n-j} d_0^{j-1} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_y \overline{(s_j f (s_j s_0^{n-1} d_1^{n-1} f)^{-1})}) \\
&= (F'(d_1^{n-1} f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-2} f (s_0 d_1 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-j-1})_y \overline{(I\bar{d})}, (\beta_{n-j})_y \sigma_0 \overline{(d_0^{j-1} f (s_0^{n-j} d_1^{n-j} d_0^{j-1} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad (\beta_{n-1})_y \sigma_{j-1} \overline{(f (s_0^{n-1} d_1^{n-1} f)^{-1})}) \\
&= (F'(d_1^{n-1} f), (\beta_0)_y \overline{(d_0^{n-2} f (s_0 d_1 d_0^{n-2} f)^{-1})}, \dots, 0, \\
&\quad s_0 (\beta_{n-j-1})_y \overline{(d_0^{j-1} f (s_0^{n-j} d_1^{n-j} d_0^{j-1} f)^{-1})}, \dots, \\
&\quad s_{j-1} (\beta_{n-2})_y \overline{(f (s_0^{n-1} d_1^{n-1} f)^{-1})}) = s_j F_{n-1}(f),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\overline{s_0 d_0^j f (s_0^{n-j} d_1^{n-j-1} d_0^j f)^{-1}} = \overline{I\bar{d}}$ pues

$$s_0 d_0^j f (s_0^{n-j} d_1^{n-j-1} d_0^j f)^{-1} = s_0 (d_0^j f (s_0^{n-j-1} d_1^{n-j-1} d_0^j f)^{-1})$$

con $d_0^j f (s_0^{n-j-1} d_1^{n-j-1} d_0^j f)^{-1} \in K_{n-j-2}(x)$.

Podemos entonces concluir que la familia de funtores $\{F'_n\}$ determina un morfismo simplicial $\mathbf{F}' : \mathcal{G} \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)$.

Finalmente dejamos como comprobación rutinaria que las asociaciones

$$\mathbf{F} \mapsto \{(F, \alpha_n), n \geq 0\} \quad \text{y} \quad (F', \beta) \mapsto \mathbf{F}'$$

que acabamos de definir son naturales y una es inversa de la otra. Ésto concluirá esta demostración. \blacksquare

Si consideramos ahora un grupoide \mathcal{G} primero como un grupoide simplicial constante y después como un módulo cruzado simplicial constante. Es fácil comprobar que $\mathcal{F}_2(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ y por tanto el par adjunto que acabamos de construir

$$\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd} \xrightleftharpoons{\quad} \mathbf{Sxm} : \overline{W}_2$$

induce un nuevo par adjunto, entre las correspondientes como categorías

$$\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \rightleftarrows \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} : \overline{W}_2 ,$$

Obsérvese las distintas interpretaciones que el símbolo \mathcal{G} adopta.

Nuestro próximo objetivo será ver como en algunos casos los funtores \mathcal{F}_2 y \overline{W}_2 conservan clases de homotopía.

Previamente particularizaremos la definición de homotopía a la categoría \mathbf{Sxm} .

Observamos primero que el funtor $\text{base}_* : \mathbf{Xm}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Gpd}^{\Delta^{op}}$ restringido a \mathbf{Sxm} lleva homotopías en homotopías. En particular si

$$\tilde{h} : (F, \alpha) \rightsquigarrow (G, \beta) : (\mathcal{G}, \Sigma) \rightarrow (\mathcal{G}', \Sigma')$$

es una homotopía, entonces $\text{base}_*(\tilde{h}) : F \rightsquigarrow G$ es una homotopía entre dos morfismos constantes entre grupoides simpliciales constantes (caras y degeneraciones identidades). Por tanto $\text{base}_*(\tilde{h})$ es una homotopía trivial, esto es

$$\text{base}_*(\tilde{h}) = F = G.$$

En otras palabras, para que dos morfismos en \mathbf{Sxm} sean homotópicos han de tener el mismo funtor a nivel de grupoides base. Representaremos entonces a una homotopía $\tilde{h} : (F, \alpha) \rightsquigarrow (F, \beta)$ como un par

$$\tilde{h} = (F, \mathbf{h})$$

con

$$\mathbf{h} = \{h_j^n : (\mathcal{G}, C_n, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}', C'_{n+1}, \delta'); 0 \leq j \leq n\} : \alpha \rightsquigarrow \beta : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

una homotopía entre morfismos de módulos cruzados simpliciales con la propiedad de que todos los morfismos de módulos cruzados h_j^n tienen a F como funtor cambio de base, escribiremos entonces

$$h_j^n = (F, \gamma_j^n).$$

Siendo la familia de transformaciones naturales

$$\gamma = \{\gamma_j^n : C_n \rightarrow C'_{n+1}F\}$$

una homotopía entre morfismos simpliciales en la categoría $(\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$. Además las identidades de homotopía para \tilde{h} reducen a las identidades de homotopía para la familia γ .

Podemos ahora probar

Lema 4.3.10. *El funtor \overline{W}_2 conserva clases de homotopía de morfismos simpliciales.*

Demostración: Sean $(F, \alpha), (F, \beta) : (\mathcal{G}, \Sigma) \rightarrow (\mathcal{G}', \Sigma')$ dos morfismos homotópicos en \mathbf{Sxm} y sea $\tilde{h} = (F, \mathbf{h})$ una homotopía entre ellos, con

$$\mathbf{h} = \{h_j^n : (\mathcal{G}, C_n, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}', C'_{n+1}, \delta'); 0 \leq j \leq n\} : \alpha \rightsquigarrow \beta : \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

donde $h_j^n = (F, \gamma_j^n : C_n \rightarrow C'_{n+1}F)$ como antes.

Denotemos $\mathbf{F} = \overline{W}_2(F, \alpha)$ y $\mathbf{F}' = \overline{W}_2(F, \beta)$, entonces las componentes de \mathbf{F} y \mathbf{F}' en dimensión 0 vienen dadas por el funtor $F_0 = F'_0 = F$ y en dimensión n por los funtores

$$F_n, F'_n : \mathcal{G} * C_0 * \dots * C_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}' * C'_0 * \dots * C'_{n-1}$$

que sobre objetos actúan como el funtor F y sobre una flecha (f, a_0, \dots, a_{n-1}) con codominio y actúan como:

$$F_n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-1})_y(a_{n-1})),$$

$$F'_n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) = (F(f), (\beta_0)_y(a_0), \dots, (\beta_{n-1})_y(a_{n-1})).$$

Vamos a definir una homotopía $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}' : \overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma) \rightarrow \overline{W}_2(\mathcal{G}', \Sigma')$ con

$$\mathbf{H} = \{H_j^n : \mathcal{G} * C_0 * \dots * C_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}' * C'_0 * \dots * C'_n; 0 \leq j \leq n\}.$$

Definimos $H_j^n : \mathcal{G} * C_0 * \dots * C_{n-1} \rightarrow \mathcal{G}' * C'_0 * \dots * C'_n$, para $0 \leq j \leq n$, como el funtor F sobre objetos y para cada flecha (f, a_0, \dots, a_{n-1}) con codominio y mediante

$$H_j^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, (\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-1})_y(a_{n-1})).$$

Como consecuencia de que $\gamma = \{\gamma_j^n : C_n \rightarrow C'_{n+1}F, 0 \leq j \leq n\}$ determina una homotopía entre morfismo simpliciales en $(\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$, vamos a deducir las identidades de homotopía para \mathbf{H} a partir de las identidades satisfechas por γ . En efecto, para cada flecha (f, a_0, \dots, a_{n-1}) en $\overline{W}_2(\mathcal{G}, \Sigma)_n$ con codominio y se tiene:

- $d_0 H_0^n = F_n,$

$$\begin{aligned} d_0 H_0^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) &= d_0(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-1})_y(a_{n-1}), 0) \\ &= (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-1})_y(a_{n-1})) \\ &= F_n(f, a_0, \dots, a_{n-1}), \end{aligned}$$

- $d_{n+1} H_n^n = F'_n,$

$$\begin{aligned} d_{n+1} H_n^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) &= d_{n+1}(F(f), 0, (\gamma_0^0)_y(a_0), \dots, (\gamma_{n-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) \\ &= (F(f), d_1(\gamma_0^0)_y(a_0), \dots, d_n(\gamma_{n-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) \\ &= (F(f), (\beta_0)_y(a_0), \dots, (\beta_{n-1})_y(a_{n-1})) \\ &= F'_n(f, a_0, \dots, a_{n-1}), \end{aligned}$$

- Además $d_i H_j^n = H_{j-1}^{n-1} d_i$, para $i < j$,

$$\begin{aligned}
d_i H_j^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) &= d_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \\
&\quad \dots, (\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, (\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, \\
&\quad (\gamma_{j-i-2}^{n-i-2})_y(a_{n-i-2}), (\gamma_{j-i-1}^{n-i-1})_y(a_{n-i-1}) \\
&\quad + d_0(\gamma_{j-i}^{n-i})_y(a_{n-i}), d_1(\gamma_{j-i+1}^{n-i+1})_y(a_{n-i+1}), \dots, \\
&\quad d_{i-1}(\gamma_{j-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, \\
&\quad (\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, (\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, \\
&\quad (\gamma_{j-i-2}^{n-i-2})_y(a_{n-i-2}), (\gamma_{j-i-1}^{n-i-1})_y(a_{n-i-1} + d_0 a_{n-i}), \\
&\quad (\gamma_{j-i}^{n-i})_y(d_1 a_{n-i+1}), \dots, (\gamma_{j-2}^{n-2})_y(d_{i-1} a_{n-1})) \\
&= H_{j-1}^{n-1}(f, a_0, \dots, a_{n-i-2}, a_{n-i-1} + d_0 a_{n-i}, d_1 a_{n-i+1}, \dots, \\
&\quad d_{i-1} a_{n-1}) = H_{j-1}^{n-1} d_i(f, a_0, \dots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

- $d_i H_i^n = d_i H_{i-1}^n$,

$$\begin{aligned}
d_i H_i^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) &= d_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-i})_y(a_{n-i}), \dots, (\gamma_{i-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \\
&\quad \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), d_0(\gamma_0^{n-i})_y(a_{n-i}), \dots, \\
&\quad d_{i-1}(\gamma_{i-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, \\
&\quad (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), (\alpha_{n-i})_y(a_{n-i}), \\
&\quad d_1(\gamma_0^{n-i+1})_y(a_{n-i+1}), \dots, d_{i-1}(\gamma_{i-2}^{n-1})_y(a_{n-1})) \\
&= d_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i})_y(a_{n-i}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-i+1})_y(a_{n-i+1}), \dots, (\gamma_{i-2}^{n-1})_y(a_{n-1})) \\
&= d_i H_{i-1}^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

- y $d_i H_j^n = H_j^{n-1} d_{i-1}$, para $i > j + 1$,

$$\begin{aligned}
d_i H_j^n(f, a_0, \dots, a_{n-1}) &= d_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), \\
&\quad (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), (\alpha_{n-i})_y(a_{n-i}) \\
&\quad + d_0(\alpha_{n-i+1})_y(a_{n-i+1}), d_1(\alpha_{n-i+2})_y(a_{n-i+2}), \dots, \\
&\quad d_{i-j-2}(\alpha_{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), 0, d_{i-j}(\gamma_0^{n-j})_y(a_{n-j}), \dots, \\
&\quad d_{i-1}(\gamma_{j-1}^{n-1})_y(a_{n-1})) = (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, \\
&\quad (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), (\alpha_{n-i})_y(a_{n-i} + d_0 a_{n-i+1}), \\
&\quad (\alpha_{n-i+1})_y(d_1 a_{n-i+2}), \dots, (\alpha_{n-j-2})_y(d_{i-j-2} a_{n-j-1}), \\
&\quad 0, (\gamma_0^{n-j-1})_y(d_{i-j-1} a_{n-j}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-2})_y(d_{i-2} a_{n-1})) \\
&= H_j^{n-1}(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), \\
&\quad a_{n-i} + d_0 a_{n-i+1}, d_1 a_{n-i+2}, \dots, d_{i-2} a_{n-1}) \\
&= H_j^{n-1} d_{i-1}(f, a_0, \dots, a_{n-1}),
\end{aligned}$$

- para las degeneraciones $s_i H_j^{n-1} = H_{j+1}^n s_i$, si $i \leq j$,

$$\begin{aligned}
s_i H_j^{n-1}(f, a_0, \dots, a_{n-2}) &= s_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-2})_y(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-2})_y(a_{n-2})) = (F(f), \\
&\quad (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-2})_y(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), \dots, (\gamma_{j-i-1}^{n-i-2})_y(a_{n-i-2}), 0, \\
&\quad s_0(\gamma_{j-i}^{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), \dots, s_{i-1}(\gamma_{j-1}^{n-2})_y(a_{n-2})) \\
&= (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-2})_y(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), \dots, (\gamma_{j-i-1}^{n-i-2})_y(a_{n-i-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_{j-i+1}^{n-i})_y(s_0(a_{n-i-1})), \dots, (\gamma_j^{n-1})_y(s_{i-1}(a_{n-2}))) \\
&= H_{j+1}^n(F(f), a_0, \dots, a_{n-i-2}, 0, s_0 a_{n-i-1}, \dots, s_{i-1} a_{n-2}) \\
&= H_{j+1}^n s_i(f, a_0, \dots, a_{n-2}),
\end{aligned}$$

- y $s_i H_j^{n-1} = H_j^n s_{i-1}$, si $i > j$,

$$\begin{aligned}
s_i H_j^{n-1}(f, a_0, \dots, a_{n-2}) &= s_i(F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-j-2})_y(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-2})_y(a_{n-2})), \\
&\quad (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), 0, \\
&\quad s_0(\alpha_{n-i})_y(a_{n-i}), \dots, s_{i-j-2}(\alpha_{n-j-2})_y(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad s_{i-j}(\gamma_0^{n-j-1})_y(a_{n-j-1}), \dots, s_{i-1}(\gamma_{j-1}^{n-2})_y(a_{n-2})) \\
&= (F(f), (\alpha_0)_y(a_0), \dots, (\alpha_{n-i-1})_y(a_{n-i-1}), 0, \\
&\quad (\alpha_{n-i+1})_y s_0(a_{n-i}), \dots, (\alpha_{n-j-1})_y s_{i-j-2}(a_{n-j-2}), 0, \\
&\quad (\gamma_0^{n-j})_y s_{i-j-1}(a_{n-j-1}), \dots, (\gamma_{j-1}^{n-1})_y s_{i-2}(a_{n-2})) \\
&= H_j^n(F(f), a_0, \dots, a_{n-i-1}, 0, s_0(a_{n-i}), \dots, s_{i-2}(a_{n-2})) \\
&= H_j^n s_{i-1}(f, a_0, \dots, a_{n-2}).
\end{aligned}$$

Por tanto podemos concluir asegurando que \mathbf{F} y \mathbf{F}' son homotópicos, con homotopía dada por \mathbf{H} . \blacksquare

No es cierto en general que el functor \mathcal{F}_2 se comporte como \overline{W}_2 respecto a homotopías, por ejemplo para que las imágenes por \mathcal{F}_2 de dos morfismos \mathbf{F} y \mathbf{F}' sean homotópicas al menos \mathbf{F} y \mathbf{F}' han de tener igual componente a nivel de cero símplex. Sin embargo, en ciertos casos si que es cierto que el functor \mathcal{F}_2 lleva morfismos homotópicos en morfismos homotópicos. Analizamos alguno de estos casos en el lema siguiente.

Lema 4.3.11. Sean $\mathbf{F}, \mathbf{F}' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ dos morfismos en \mathbf{Gd} tales que

$$F_0 = F'_0$$

y sea $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ una homotopía de \mathbf{F} a \mathbf{F}' tal que

$$H_0^0 = s_0 F_0 \quad y \quad H_i^j = s_i F_j \quad si \quad i < j$$

(nótese que H_j^j es arbitrario para $j > 0$), entonces los morfismos de módulos cruzados simpliciales $\mathcal{F}_2(\mathbf{F})$ y $\mathcal{F}_2(\mathbf{F}')$ en \mathbf{Sxm} son homotópicos.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ es una homotopía en las condiciones del enunciado.

Denotemos $\mathcal{F}_2(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}_0, \Sigma)$, con Σ el módulo cruzado simplicial que en dimensión n tiene $\Sigma_n = (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta_n)$ donde \tilde{K}_n es el \mathcal{G}_0 -grupo definido como en la construcción del functor \mathcal{F}_2 . Como en dicha construcción denotaremos también por δ_i y σ_j a las transformaciones naturales que determinan los operadores cara y degeneración, respectivamente, de Σ . Análogamente, denotaremos $\mathcal{F}_2(\mathcal{G}') = (\mathcal{G}'_0, \Sigma')$

con $\Sigma'_n = (\mathcal{G}'_0, \tilde{J}_n, \delta'_n)$ y \tilde{J}_n el \mathcal{G}'_0 -grupo cociente asociado al correspondiente \mathcal{G}'_0 -grupo J_n por el \mathcal{G}'_0 -subgrupo \wp'_n . También, δ'_i, σ'_j denotarán las correspondientes transformaciones naturales que determinan las caras y degeneraciones de Σ' .

Supongamos por otro lado que los morfismos de módulos cruzados simpliciales

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{F}), \mathcal{F}_2(\mathbf{F}') : \mathcal{F}_2(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}_0, \Sigma) \rightarrow \mathcal{F}_2(\mathcal{G}') = (\mathcal{G}'_0, \Sigma')$$

tienen como componente en dimensión n los morfismos de módulos cruzados

$$(F_0, \alpha_n), (F_0, \beta_n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta_n) \rightarrow (\mathcal{G}'_0, \tilde{J}_n, \delta'_n)$$

respectivamente, donde α_n y $\beta_n : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{J}_n F_0$ son las transformaciones naturales inducidas por las transformaciones naturales que también llamaremos α_n y $\beta_n : K_n \rightarrow J_n F_0$ cuyas componentes en $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ actúan sobre un objeto $u \in K_i(x)$ como $(\alpha_n)_x(u) = F_{n+1}(u)$ y $(\beta_n)_x(u) = F'_{n+1}(u)$ (nótese que si $u \in K_n(x)$ entonces $F_{n+1}(u), F'_{n+1}(u) \in J_n F_0(x)$). Estas transformaciones inducen a las primeras pues para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ llevan los generadores de $\wp_n(x)$ en elementos de $\wp'_n(F_0(x))$. En efecto, dados $w \in K_{n-1}(x)$ y $u, v \in K_n(x)$ se tiene:

- $(\alpha_n)_x(s_0(w)) = F_{n+1}s_0(w) = s_0F_n(w) \in \wp'_n(F_0(x))$, y
- $(\alpha_n)_x(\{u, v\}) = F_{n+1}(\{u, v\}) = \{F_{n+1}(u), F_{n+1}(v)\} \in \wp'_n(F_0(x))$.

Definimos $\mathbf{h} = (F_0, \mathbf{h}) : \mathcal{F}_2(\mathbf{F}) \rightsquigarrow \mathcal{F}_2(\mathbf{F}')$ con

$$\mathbf{h} = \{h_j^n = (F_0, \gamma_j^n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta_n) \rightarrow (\mathcal{G}'_0, \tilde{J}_{n+1}, \delta'_{n+1}), 0 \leq j \leq n\}$$

donde la transformación natural $\gamma_j^n : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{J}_{n+1}F_0$ viene dada por $\gamma_j^n = \sigma'_j \alpha_n$ si $0 \leq j < n$ y γ_n^n es la transformación natural inducida por la transformación natural $\gamma_n^n : K_n \rightarrow J_{n+1}F_0$ cuya componente en $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ actúa sobre un objeto $u \in K_n(x)$ mediante $(\gamma_n^n)_x(u) = H_{n+1}^{n+1}(u)$. De hecho, el morfismo de módulos cruzados h_j^n , para $0 \leq j < n$, viene dado por la composición de la componente n de $\mathcal{F}_2(\mathbf{F})$ y la degeneración j de módulo cruzado simplicial $\mathcal{F}_2(\mathcal{G}')$, es decir,

$$h_j^n = (Id, \sigma'_j)(F_0, \alpha_n).$$

Por otra parte, nótese que γ_n^n está bien definida pues para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ el funtor $H_{n+1}^{n+1} : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \mathcal{G}'_{n+2}$ lleva los elementos de $K_n(x) = \text{End}_{\mathcal{K}_n}(x)$ a $J_{n+1}F_0(x)$ pues si $u \in K_n(x)$, entonces

$$\begin{aligned} d_1 d_2 \dots d_{n+2} H_{n+1}^{n+1}(u) &= d_1 d_2 \dots d_{n+1} F'_{n+1}(u) = F'_0(d_1 \dots d_{n+1}(u)) = F_0(Id_x) \\ &= Id_{F_0(x)}, \end{aligned}$$

es decir, $H_{n+1}^{n+1}(u) \in J_{n+1}F_0(x)$. De esta forma podemos asegurar que existe una transformación $\gamma_n^n : K_n \rightarrow J_{n+1}F_0$ cuya componente en $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ viene dada por

$$(\gamma_n^n)_x : K_n(x) \rightarrow J_{n+1}F_0(x), (\gamma_n^n)_x(u) = H_{n+1}^{n+1}(u).$$

Además es natural, para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G}_0 y cada $u \in K_n(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\gamma_n^n)_y K_n(f)(u) &= (\gamma_n^n)_y (s_n \dots s_0(f) u s_n \dots s_0(f)^{-1}) = H_{n+1}^{n+1}(s_n \dots s_0(f) u s_n \dots s_0(f)^{-1}) \\ &= s_n \dots s_0 H_0^0(f) H_{n+1}^{n+1}(u) s_n \dots s_0 H_0^0(f)^{-1} \\ &= s_n \dots s_0 s_0 F_0(f) H_{n+1}^{n+1}(u) s_n \dots s_0 s_0 F_0(f)^{-1} \\ &= s_{n+1} \dots s_0 F_0(f) H_{n+1}^{n+1}(u) s_{n+1} \dots s_0 F_0(f)^{-1} =_{F_0(f)} H_{n+1}^{n+1}(u) \\ &= J_{n+1} F_0(f) (H_{n+1}^{n+1}(u)) = J_{n+1} F_0(f) (\gamma_n^n)_x(u), \end{aligned}$$

y de hecho, el par (F_0, γ_n^n) es un morfismo de pre-módulos cruzados pues para cada $u \in K_n(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \delta'_{n+1}(\gamma_n^n)_x(u) &= \delta'_{n+1}(H_{n+1}^{n+1}(u)) = d_0 d_2 \dots d_{n+2} H_{n+1}^{n+1}(u) = d_0 d_2 \dots d_{n+1} F'_{n+1}(u) \\ &= F_0(d_0 d_2 \dots d_{n+1} u) = \tilde{F}_0 \delta_n(u). \end{aligned}$$

y lleva el \mathcal{G}_0 -grupo \wp_n en \wp'_{n+1} , en efecto, dado un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ y dados $\{u, v\}$, $s_0(w) \in \wp_n(x)$ con $u, v \in K_n(x)$ y $w \in K_{n-1}(x)$ se tiene:

- $(\gamma_n^n)_x(u) = H_{n+1}^{n+1} s_0(w) = s_0(H_n^n(w)) \in \wp'_{n+1}(F_0(x))$, debido a que $H_n^n(w) \in J_n(F_0(x))$, y
- $(\gamma_n^n)_x(\{u, v\}) = H_{n+1}^{n+1}(\{u, v\}) = \{H_{n+1}^{n+1}(u), H_{n+1}^{n+1}(v)\} \in \wp'_{n+1}(F_0(x))$.

De esta forma podemos asegurar que este morfismo de pre-módulos cruzados induce un morfismo de módulos cruzados que llamamos

$$h_n^n = (F_0, \gamma_n^n) : (\mathcal{G}_0, \tilde{K}_n, \delta_n) \rightarrow (\mathcal{H}_0, \tilde{J}_{n+1}, \delta'_{n+1}).$$

Por último, como las identidades de homotopía para \tilde{h} se reducen a las identidades de homotopía para la familia $\gamma = \{\gamma_j^n : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{J}_{n+1} F_0, 0 \leq j \leq n\}$ en la categoría $(\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}_0})^{\Delta^{op}}$ bastará con ver que γ es una homotopía. En efecto, para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}_0)$ y cada $\bar{u} \in \tilde{K}_n(x)$ se tiene:

- $(\delta'_0)_x(\gamma_0^n)_x(\bar{u}) = (\delta'_0)_x(\sigma'_0)_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\alpha_n)_x(\bar{u})$,
- $(\delta'_{n+1})_x(\gamma_n^n)_x(\bar{u}) = (\delta'_{n+1})_x(\overline{H_{n+1}^{n+1}(u)}) = \overline{d_{n+2} H_{n+1}^{n+1}(u)} = \overline{F'_{n+1}(u)} = (\beta_n)_x(\bar{u})$,
- para $i < j$, se tiene que $\delta'_i \gamma_j^n = \gamma_{j-1}^{n-1} \delta_i$,

– Si $j < n$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\delta'_i)_x(\gamma_j^n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_i)_x(\sigma'_j)_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\sigma'_{j-1})_x(\delta'_i)_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) \\ &= (\sigma'_{j-1})_x(\alpha_{n-1})_x(\delta_i)_x(\bar{u}) = (\gamma_{j-1}^{n-1})_x(\delta_i)_x(\bar{u}), \end{aligned}$$

– si $i = 0$ y $j = n$,

$$\begin{aligned} (\delta'_0)_x(\gamma_n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_0)_x(\overline{H_{n+1}^{n+1}(u)}) \\ &= \overline{d_1 H_{n+1}^{n+1}(u) (d_0 H_{n+1}^{n+1}(u))^{-1} s_0 d_1 d_0 H_{n+1}^{n+1}(u)} \\ &= \overline{H_n^n d_1(u) (H_n^n d_0 u)^{-1} H_n^n s_0 d_1 d_0 u} \\ &= \overline{H_n^n (d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u)} = (\gamma_{n-1}^{n-1})_x(\delta_0)_x(\bar{u}), \end{aligned}$$

– y si $1 \leq i < j = n$,

$$\begin{aligned} (\delta'_i)_x(\gamma_n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_i)_x(\overline{H_{n+1}^{n+1}(u)}) = \overline{d_{i+1} H_{n+1}^{n+1}(u)} = \overline{H_n^n d_{i+1}(u)} \\ &= (\gamma_{n-1}^{n-1})_x \delta_i(\bar{u}), \end{aligned}$$

• Además $\delta'_{i+1} \gamma_i^n = \delta'_{i+1} \gamma_{i+1}^n$,

$$\begin{aligned} (\delta'_{i+1})_x(\gamma_i^n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_{i+1})_x(\sigma'_i)_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\alpha_n)_x(\bar{u}) \\ &= (\delta'_{i+1})_x(\sigma'_{i+1})_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\delta'_{i+1})_x(\gamma_{i+1}^n)_x(\bar{u}), \\ (\delta'_n)_x(\gamma_{n-1}^n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_n)_x(\sigma'_{n-1})_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\alpha_n)_x(\bar{u}) = \overline{F_{n+1}(u)} \\ &= \overline{d_{n+1} s_n F_{n+1}(u)} = \overline{d_{n+1} H_n^{n+1}(u)} = \overline{d_{n+1} H_{n+1}^{n+1}(u)} \\ &= (\delta'_n)_x(\overline{H_{n+1}^{n+1}(u)}) = (\delta'_n)_x(\gamma_n^n)_x(\bar{u}), \end{aligned}$$

• y si $i > j + 1$, $\delta'_i \gamma_j^n = \gamma_j^{n-1} \delta_{i-1}$,

$$\begin{aligned} (\delta'_i)_x(\gamma_j^n)_x(\bar{u}) &= (\delta'_i)_x(\sigma'_j)_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) = (\sigma'_j)_x(\delta'_{i-1})_x(\alpha_n)_x(\bar{u}) \\ &= (\sigma'_j)_x(\alpha_{n-1})_x(\delta_{i-1})_x(\bar{u}) = (\gamma_j^{n-1})_x(\delta_{i-1})_x(\bar{u}), \end{aligned}$$

• y para la degeneraciones, si $i \leq j$,

$$\begin{aligned} (\sigma'_i)_x(\gamma_j^{n-1})_x(\bar{u}) &= (\sigma'_i)_x(\sigma'_j)_x(\alpha_{n-1})_x(\bar{u}) = (\sigma'_{j+1})_x(\sigma'_i)_x(\alpha_{n-1})_x(\bar{u}) \\ &= (\sigma'_{j+1})_x(\alpha_n)_x(\sigma_i)_x(\bar{u}) = (\gamma_{j+1}^n)_x(\sigma_i)_x(\bar{u}), \\ (\sigma'_i)_x(\gamma_{n-1}^{n-1})_x(\bar{u}) &= (\sigma'_i)_x(\overline{H_n^n(u)}) = \overline{s_{i+1} H_n^n(u)} = \overline{H_{n+1}^{n+1} s_{i+1}(u)} \\ &= (\gamma_n^n)_x(s_{i+1}(u)) = (\gamma_n^n)_x(\sigma_i)_x(\bar{u}), \end{aligned}$$

• y para $i > j$,

$$\begin{aligned} (\sigma'_i)_x(\gamma_j^{n-1})_x(\bar{u}) &= (\sigma'_i)_x(\sigma'_j)_x(\alpha_{n-1})_x(\bar{u}) = (\sigma'_j)_x(\sigma'_{i-1})_x(\alpha_{n-1})_x(\bar{u}) \\ &= (\sigma'_j)_x(\alpha_n)_x(\sigma_{i-1})_x(\bar{u}) = (\gamma_j^n)_x(\sigma_{i-1})_x(\bar{u}). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que γ define una homotopía en $(\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}_0})^{\Delta^{op}}$. ■

Observamos ahora que los dos Lemas 4.3.10 y 4.3.11 anteriores pueden trasladarse al contexto de coma categorías. Más concretamente se tienen los siguientes resultados, cuyas demostraciones son análogas a las de los Lemas 4.3.10 y 4.3.11 respectivamente:

Lema 4.3.12. *Para cada grupoide \mathcal{G} , el funtor $\overline{W}_2 : \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gd}/\mathcal{G}$ conserva clases de homotopía de morfismos simpliciales en las correspondientes coma categorías.*

Lema 4.3.13. *Sea \mathcal{G} un grupoide, \mathbf{F} y \mathbf{F}' dos morfismos en \mathbf{Gd}/\mathcal{G}*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xrightarrow{\mathbf{F}'} \end{array} & \mathcal{G}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

tales que $F_0 = F'_0$ y sea $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ una homotopía en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} de \mathbf{F} a \mathbf{F}' tal que

$$H_0 = s_0 F_0 \quad \text{y} \quad H_i^j = s_i F_j, \quad \text{si } i < j.$$

Entonces los morfismos de módulos cruzados simpliciales $\mathcal{F}_2(\mathbf{F})$ y $\mathcal{F}_2(\mathbf{F}')$ en la coma categoría \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} son homotópicos.

Veamos ahora que si tomamos como \mathcal{G}' , en el Lema 4.3.13, el objeto

$$K(\tilde{\Pi}_1, n) : \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow \mathcal{G} \in \mathbf{Gd}/\mathcal{G}$$

asociado a cualquier \mathcal{G} -módulo Π , para cualesquiera dos morfismos homotópicos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{F}} \\ \xrightarrow{\mathbf{F}'} \end{array} & \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} siempre existe una homotopía \mathbf{H} en las condiciones de dicho Lema y por tanto podremos concluir que el funtor \mathcal{F}_2 conserva clases de homotopía de morfismos con codominio $K(\tilde{\Pi}_1, n)$.

Nota 4.3.14. *Observamos primero que un morfismo $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \equiv K(\mathcal{G}, 0)$ está totalmente determinado por un funtor $F : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}$, que coiguala a los operadores cara $d_0, d_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$. La componente en dimensión i de φ está dada por la composición*

$$\varphi_i = F d_0^i : \mathcal{G}_i \xrightarrow{d_0^i} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{F} \mathcal{G}.$$

Por otro lado, si \mathbf{F} ,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \\
 & \searrow \varphi & \swarrow \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array} \tag{4.38}$$

es un morfismo en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} con codominio $K(\tilde{\Pi}_1, n)$, entonces las componentes en dimensiones $i < n$ de \mathbf{F} coinciden con las componentes de φ , esto es

$$F_i = Fd_0^i : \mathcal{G}_i \xrightarrow{d_0^i} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{F} \mathcal{G} = \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)_i,$$

para todo $i < n$.

Así, usando la Proposición 1.4.6, tenemos que el morfismo \mathbf{F} está totalmente determinado por su componente en dimensión n ,

$$F_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi$$

que además cumple la siguiente condición de cociclo:

$$q(F_n d_{n+1}(f)) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} q(F_n d_i(f)), \tag{4.39}$$

para toda flecha f en \mathcal{G}_{n+1} , donde q es la función que asocia a cada flecha (f, a) en $\mathcal{G} \int \Pi$ la componente $a \in \Pi(d_0 f)$.

En resumen, dar un morfismo \mathbf{F} como el del diagrama (4.38) es equivalente a dar un functor $F_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi$ que hace conmutar el triángulo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_n & \xrightarrow{F_n} & \mathcal{G} \int \Pi \\
 & \searrow Fd_0^n & \swarrow \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

y que cumpla la condición de cociclo (4.39).

Nota 4.3.15. Supongamos ahora que tenemos dos morfismos en \mathbf{Gd}/\mathcal{G}

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \\
 & \xrightarrow{\mathbf{F}'} & \\
 & \searrow \varphi & \swarrow \\
 & & \mathcal{G}
 \end{array}$$

que están determinados por funtores F_n y F'_n que hacen conmutar los triángulos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{F_n} \\ \xrightarrow{F'_n} \end{array} & \mathcal{G} \int \Pi \\ & \searrow^{Fd_0^n} & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

y que $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ es una homotopía. Entonces las identidades de homotopía implican que las componentes de \mathbf{H} en dimensiones $< n - 1$ son triviales, esto es

$$H_i^j = Fd_0^j : \mathcal{G}_j \xrightarrow{d_0^j} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{F} \mathcal{G} = \kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)_{j+1},$$

para todo $j < n - 1$ y $0 \leq i \leq j$. Tenemos entonces, utilizando la Proposición 1.4.8, que la homotopía \mathbf{H} está totalmente determinada por una familia de funtores

$$H_i^{n-1} : \mathcal{G}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{G} \int \Pi, \quad 0 \leq i \leq n - 1,$$

que hacen conmutar los triángulos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{n-1} & \xrightarrow{H_i^{n-1}} & \mathcal{G} \int \Pi \\ & \searrow^{Fd_0^{n-1}} & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

y que además cumplen la siguiente condición de homotopía:

$$q(F'_n(f)) - q(F_n(f)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} q(H_{j-1}^{n-1} d_i f), \quad (4.40)$$

para cada flecha f en \mathcal{G}_n donde q es como antes la función que asocia a cada flecha (f, a) en $\mathcal{G} \int \Pi$ la componente $a \in \Pi(d_0 f)$.

Es entonces fácil comprobar, después de la nota 4.3.15, que a partir de una homotopía $\mathbf{H} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ como antes podemos construir otra $\mathbf{K} : \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}'$ que está determinada por los funtores $K_i^{n-1} : \mathcal{G}_{n-1} \rightarrow \mathcal{G} \int \Pi$ que sobre objetos actúan como F y que sobre flechas f en \mathcal{G}_{n-1} están dados por:

$$K_i^{n-1}(f) = \begin{cases} s_i F_{n-1}(f) = (F_{n-1}(f), 0) & \text{si } 0 \leq i \leq n - 1, \\ (F_{n-1}(f), \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} H_{i-1}^{n-1}(f)) & \text{si } i = n - 1. \end{cases}$$

En particular la homotopía \mathbf{K} está en las condiciones del Lema 4.3.13 y por tanto deducimos que el functor \mathcal{F}_2 conserva clases de homotopías de morfismos a $K(\tilde{\Pi}_2, n)$, $n \geq 1$.

Como consecuencia podemos probar:

Proposición 4.3.16. *Sea \mathcal{G} un grupoide, Π un \mathcal{G} -módulo y \mathcal{G} un grupoide simplicial en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} . Entonces la adjunción*

$$\mathcal{F}_2 : \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \rightleftarrows \mathbf{Sxm}/\mathcal{G} : \overline{W}_2$$

induce un isomorfismo

$$[\mathcal{F}_2(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\mathcal{G}} \cong [\mathcal{G}, \overline{W}_2(K(\tilde{\Pi}_2, m))]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}},$$

donde $[-, -]_{\mathbf{Sxm}/\mathcal{G}}$ y $[-, -]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}}$ denotan clases de homotopía de morfismos en las correspondientes coma categorías.

Demostración: La demostración de esta proposición es inmediata a partir del Lema 4.3.12, de la Nota 4.3.15 y del hecho de que los isomorfismos de la adjunción $\overline{W}_2 \dashv \mathcal{F}_2$ se obtienen aplicando los funtores \overline{W}_2 y \mathcal{F}_2 y componiendo con la unidad y counidad de dicha adjunción. ■

Consideremos ahora la composición de funtores

$$\mathfrak{F}_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 : \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathbf{Sxm}/\mathcal{G}.$$

Entonces, para cada objeto $\mathbf{X}_\varphi : \mathbf{X} \xrightarrow{\varphi} \text{Ner}(\mathcal{G})$ en la categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$, cada \mathcal{G} -módulo Π y cada $m > 1$, tenemos isomorfismos inducidos por las adjunciones $\mathcal{F}_2 \vdash \overline{W}_2$ y $\mathcal{F}_1 \vdash \overline{W}_1$ y los isomorfismos (4.30) y (4.34)

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}_2 \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\mathcal{G}} &\cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_2 K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \\ &\cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_1, m+1)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \\ &\cong [\mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_1 K(\tilde{\Pi}_1, m+1)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})} \\ &\cong [\mathbf{X}_\varphi, L_{\mathcal{G}}(\Pi, m+2)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})}, \end{aligned}$$

y como consecuencia:

Teorema 4.3.17 (Representación de la cohomología $H^{m+2}(\mathbf{X}, \Pi)$ en \mathbf{Sxm}). *Para cada conjunto simplicial \mathbf{X} y cada sistema de coeficientes locales Π para \mathbf{X} existe una biyección natural*

$$H^{m+2}(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_2 \mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathbf{X})}.$$

Y como corolario:

Corolario 4.3.18 (Representación de la cohomología singular $H_{\text{sing}}^{m+2}(\mathcal{C}, \Pi)$ en \mathbf{Sxm}). *Para cada complejo cruzado $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}$ y cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π , existe un isomorfismo natural*

$$H_{\text{sing}}^{m+2}(\mathcal{C}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})}.$$

Representación de la cohomología $H^{m+n}(\mathbf{X}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{SCrs}_n

En la categoría \mathbf{Crs}_n de complejos cruzados n -dimensionales con $n > 2$, hemos considerado el cotriple ${}^n\mathbb{G}$. Observamos que para cada complejo cruzado n -dimensional \mathcal{C} , el complejo cruzado n -dimensional ${}^n\mathbb{G}(\mathcal{C})$ tiene la misma $(n - 1)$ -truncación que \mathcal{C} y además la counidad ϵ de la adjunción $F_n \dashv U_n$ es la identidad a nivel de la $(n - 1)$ -truncación:

$$T_{n-1}(\epsilon) = Id : T_{n-1}({}^n\mathbb{G}(\mathcal{C})) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{C}).$$

Deducimos entonces que la resolución del cotriple ${}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$ es la identidad a nivel de la $(n - 1)$ -truncación, esto es

$$(T_{n-1})_* ({}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}))$$

es un $(n - 1)$ -complejo cruzado simplicial constante, donde $(T_{n-1})_* : \mathbf{Crs}_n^{\Delta op} \rightarrow \mathbf{Crs}_{n-1}^{\Delta op}$ es el functor inducido por el functor truncación $T_{n-1} : \mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n-1}$.

La categoría \mathbf{SCrs}_n será la subcategoría plena de la categoría $\mathbf{Crs}_n^{\Delta op}$ de n -complejos cruzados simpliciales cuyos objetos son n -complejos cruzados simpliciales \mathcal{C}_\bullet tales que los morfismos cara y degeneración son la identidad a nivel de la $(n - 1)$ -truncación. O equivalentemente, tales que $(T_{n-1})_*(\mathcal{C}_\bullet)$ es un $(n - 1)$ -complejo cruzado simplicial constante.

Representaremos a un objeto $\mathcal{C}_\bullet \in \mathbf{SCrs}_n$ mediante un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \mathcal{C}_n^i & \xrightarrow{d_i} & \mathcal{C}_n^{i-1} & \dots & \mathcal{C}_n^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{C}_n^0 & \dots \\
 & \curvearrowright^{s_{i-1}} & & \curvearrowleft^{s_0} & & \curvearrowright^{s_0} & & \curvearrowleft^{d_1} & \\
 & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & \\
 & \searrow^{\partial_n^{i-1}} & & \searrow^{\partial_n^1} & & \searrow^{\partial_n^0} & & \searrow^{\partial_n^0} & \\
 & \xrightarrow{\partial_n^i} & & \xrightarrow{\partial_n^0} & & \xrightarrow{\partial_n^0} & & \xrightarrow{\partial_n^0} & \\
 & & & \mathcal{C}_{n-1} & & & & & \\
 & & & \downarrow \partial_{n-1} & & & & & \\
 & & & \mathcal{C}_{n-2} & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & \vdots & & & & & \\
 & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & \mathcal{C}_2 & & & & & \\
 & & & \downarrow \partial_2 & & & & & \\
 & & & \mathbf{1}_{\mathcal{G}} & & & & &
 \end{array} \tag{4.41}$$

Observamos que dar tal objeto es equivalente a dar un $(n - 1)$ -complejo cruzado

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}})$$

junto con un complejo simplicial aumentado sobre $C_{n-1} = \text{techo}_{n-1}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$ -módulos

$$\mathbf{C}_n \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1}$$

tal que las composiciones

$$C_n^0 \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \quad \text{y} \quad \hat{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{G} \xrightarrow{C_n^0} \mathbf{Ab}$$

son triviales. Nótese que estas dos condiciones hacen que

$$\mathcal{C}_n^i = (C_n^i \xrightarrow{\partial_n^i} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{1}_{\mathcal{G}})$$

sea un n -complejo cruzado, donde $C_n^i = (\mathcal{G}, C_n^i, 0)$ y $\partial_n^i : C_n^i \rightarrow C_{n-1}$ es el morfismo dado por la composición $C_n^i \xrightarrow{d_0^i} C_n^0 \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1}$.

Representaremos al n -complejo simplicial anterior mediante un par $(\mathcal{C}, \mathbf{C}_n)$ o bien mediante una terna $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n)$ si queremos distinguir el grupoide base.

Un morfismo simplicial de $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n)$ a $(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)$ en \mathbf{SCrs}_n vendrá dado por una terna (F, \mathbf{f}, α) donde $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ es un funtor, $\mathbf{f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de $(n-1)$ -complejos cruzados con $F = \text{base}(\mathbf{f})$ y $\alpha : \mathbf{C}_n \rightarrow F^* \mathbf{C}'_n$ es un morfismo simplicial de \mathcal{G} -módulos donde $F^* : \mathbf{Ab}^{\mathcal{G}'} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ es el funtor de la categoría de \mathcal{G}' -módulos en la categoría de \mathcal{G} -módulos inducido por F .

Como se comento al principio de esta sección, el mecanismo necesario para obtener la representación de $H^{m+n}(\mathbf{X}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{SCrs}_n pasa por establecer una adjunción

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1} \xrightleftharpoons{\quad} \mathbf{SCrs}_n : \overline{W}_n .$$

La definición del funtor \overline{W}_n puede hacerse de forma análoga a como se definió el funtor \overline{W}_2 en la Sección 4.3, utilizando el funtor diagonal de Artin-Mazur, sin embargo es más fácil en este caso hacer una descripción explícita de este funtor sin necesidad de añadir la complejidad que supone el pasar por la categoría de n -complejos simpliciales dobles.

Dado entonces $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n) \in \mathbf{SCrs}_n$, definimos

$$\overline{W}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n) = (\mathcal{G}, T_{n-2}(\mathcal{C}), \mathbf{C}_{n-1}),$$

donde $\mathbf{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^0} C_{n-2}$ es el \mathcal{G} -módulo simplicial aumentado sobre $C_{n-2} = \text{techo}_{n-2}(\mathcal{C})$ dado por

$$C_{n-1}^0 = C_{n-1} \quad \text{y} \quad C_{n-1}^i = C_n^{i-1} \oplus \dots \oplus C_n^0 \oplus C_{n-1}, \quad \text{para } 1 \leq i,$$

con aumentación $\partial_{n-1}^0 = \partial_{n-1} : C_{n-1} \rightarrow C_{n-2}$ y operadores cara y degeneración

$$C_n^i \oplus \dots \oplus C_n^0 \oplus C_{n-1} \xleftarrow{s_j} C_n^{i-1} \oplus \dots \oplus C_{n-1} \xrightarrow{d_j} C_n^{i-2} \oplus \dots \oplus C_n^0 \oplus C_{n-1}$$

las transformaciones naturales cuyas componentes en $x \in \mathcal{G}$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 (d_0)_x(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= (u_{i-2}, \dots, u_0, \partial_n^{i-1}(u_{i-1}) + u), \\
 (d_i)_x(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= (d_{i-1}u_{i-1}, \dots, d_1u_1, u), \\
 (d_j)_x(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= (d_{i-1}u_{i-1}, \dots, d_1u_{i-j+1}, d_0u_{i-j} + u_{i-j-1}, \dots, u_0, u), \\
 &\quad \text{si, } 1 \leq j < i, \\
 (s_j)_x(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= (s_{j-1}u_{i-1}, \dots, s_0u_{i-j}, 0, u_{i-j-1}, \dots, u_0, u), \\
 &\quad \text{si, } 0 \leq j \leq i.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

La acción del functor \overline{W}_n sobre morfismos en \mathbf{SCrs}_n es clara.

Notamos ahora que cada grupoide \mathcal{G} determina un n -complejo cruzado simplicial, que identificaremos con el propio \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G} \equiv (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0)$$

donde \mathcal{G} en la segunda componente de la terna indica el $(n-1)$ -complejo cruzado $T_{n-1}(i_1(\mathcal{G}))$ y además se tiene

$$\overline{W}_n(\mathcal{G}) = \overline{W}_n(\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0) = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0) \equiv \mathcal{G}.$$

Entonces el functor \overline{W}_n induce un functor

$$\overline{W}_n : \mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G},$$

entre las correspondientes coma categorías.

El siguiente lema es análogo al Lema 4.3.5 y como tal mostrará su utilidad posteriormente.

Lema 4.3.19. *Si $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n)$ representa un n -complejo cruzado simplicial en \mathbf{SCrs}_n tal que el \mathcal{G} -módulo simplicial \mathbf{C}_n tiene complejo de Moore trivial en dimensiones $\geq m$ (o equivalentemente, \mathbf{C}_n es el nervio de un $(m-1)$ -hipergrupoide simplicial de \mathcal{G} -módulos) y $\overline{W}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n) = (\mathcal{G}, T_{n-2}(\mathcal{C}), \mathbf{C}_{n-1})$, entonces \mathbf{C}_{n-1} tiene complejo de Moore trivial en dimensión $\geq m+1$ (o equivalentemente, \mathbf{C}_{n-1} es el nervio de un m -hipergrupoide simplicial de \mathcal{G} -módulos).*

Demostración: La demostración de este lema es totalmente análoga a la del Lema 4.3.5 y no tiene complejidad adicional alguna por lo que la dejamos como un ejercicio. ■

Ejemplo 4.3.20. *Sea \mathcal{G} un grupoide y $\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ un \mathcal{G} -módulo, para cada $m \geq 1$ podemos entonces construir el n -complejo cruzado simplicial determinado por la terna*

$$(\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \in \mathbf{SCrs}_n,$$

donde, de nuevo, \mathcal{G} en la segunda componente de la terna indica $T_{n-1}(i_1(\mathcal{G}))$. Este n -complejo cruzado simplicial tiene una proyección canónica a \mathcal{G} y por tanto puede considerarse como un objeto en $\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}$. Es fácil comprobar (utilizando el Lema 4.3.19 anterior) que

$$\overline{W}_n(\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \cong (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m+1)),$$

nótese aquí, que la segunda componente de ambas ternas no representan al mismo objeto pues en la primera \mathcal{G} representa a $T_{n-1}(i_1(\mathcal{G}))$ y en la segunda a $T_{n-2}(i_1(\mathcal{G}))$.

Por otro lado, es inmediato comprobar que

$$K(\tilde{\Pi}_n, m) \equiv (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m))$$

vistos ambos como objetos en $\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}$ y por tanto se tiene el siguiente isomorfismo (en la coma categoría $\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}$):

$$\overline{W}_n(K(\tilde{\Pi}_n, m)) = \overline{W}_n(\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \cong (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m+1)) = K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m+1). \quad (4.43)$$

Vamos ahora a generalizar la definición del funtor \mathcal{F}_2 a este contexto, es decir, para $n > 2$ vamos a obtener un funtor

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1} \longrightarrow \mathbf{SCrs}_n$$

que sea el adjunto izquierda de \overline{W}_n . Demos una descripción explícita de este funtor \mathcal{F}_n .

Sea $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \in \mathbf{SCrs}_{n-1}$ con

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{n-2} \rightarrow \mathcal{C}_{n-3} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{G}}) \in \mathbf{Crs}_{n-2}$$

y $\mathbf{C}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}^0} \mathbf{C}_{n-2}$ un complejo simplicial aumentado de \mathcal{G} -módulos. Denotemos por K_i a los \mathcal{G} -módulos

$$K_0 = \ker(d_1 : C_{n-1}^1 \rightarrow C_{n-1}^0),$$

$$K_i = \ker(d_1 d_2 \dots d_{i+1} : C_{n-1}^{i+1} \rightarrow C_{n-1}^0), \quad i \geq 1.$$

Es claro que, para cada $i \geq 1$, los operadores cara $d_j : C_{n-1}^{i+1} \rightarrow C_{n-1}^i$ y degeneración $s_{j-1} : C_{n-1}^i \rightarrow C_{n-1}^{i+1}$, para $2 \leq j \leq i+1$, inducen operadores $d_j : K_i \rightarrow K_{i-1}$ y $s_{j-1} : K_{i-1} \rightarrow K_i$ de manera que tenemos un complejo simplicial aumentado y escindido de \mathcal{G} -módulos

$$\dots \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_n} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{d_{n+1}} \end{array} & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} & K_i & \xrightarrow{d_2} K_{i-1} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{d_3} \end{array} & \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_2} \end{array} & K_2 & \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_2} K_0 \end{array} \end{array} \quad (4.44)$$

Observamos además que la imagen por $s_0 : C_{n-1}^i \rightarrow C_{n-1}^{i+1}$ de K_{i-1} está contenida en K_i por lo que podemos considerar el \mathcal{G} -módulo cociente

$$\tilde{K}_i = K_i/s_0(K_{i-1}).$$

Es claro también que los operadores cara y degeneración del diagrama (4.44) inducen operadores cara y degeneración entre los correspondientes cocientes, de forma que obtenemos un complejo de \mathcal{G} -módulos

$$\cdots \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \sigma_{n-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sigma_0 \\ \delta_n \end{array} & \\ \tilde{K}_i & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{K}_{i-1} \\ & \begin{array}{c} \delta_1 \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \\ \cdots & & \cdots \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sigma_0 \\ \delta_2 \end{array} & \\ \tilde{K}_2 & \xrightarrow{\delta_2} & \tilde{K}_1 \\ & \begin{array}{c} \delta_1 \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \\ & & \tilde{K}_0 \end{array} .$$

donde hemos denotado δ_j y σ_j a los operadores inducidos en los correspondientes cocientes por los d_{j+1} y s_{j+1} respectivamente. Consideramos ahora la transformación natural

$$[d_0, d_1] : K_i \longrightarrow K_{i-1},$$

cuya componente en un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ está dada por la aplicación $[d_0, d_1]_x : K_i(x) \rightarrow K_{i-1}(x)$ dada por la fórmula

$$u \mapsto [d_0, d_1]_x(u) = [(d_0)_x(u), (d_1)_x(u)] = (d_1)_x(u) (d_0)_x(u)^{-1} (s_0 d_1 d_0)_x(u),$$

según la fórmula para el corchete en el Lema 2.2.1. Para simplificar notación eliminaremos el índice x , sobrentendiéndolo en cada momento.

Nótese que en este caso $[d_0, d_1]_x$ es un morfismo de grupos y también que $[d_0, d_1]$ es natural en x (ver (P2)). Por lo que tenemos una transformación natural de \mathcal{G} -módulos que además tiene las siguientes propiedades:

(P1) Para cada $u \in K_i(x)$ se tiene que efectivamente

$$[d_0, d_1](u) \in K_{i-1}(x).$$

(P2) Para cada flecha $f : x \rightarrow y$ en \mathcal{G} y cada $u \in K_n(x)$ se tiene

$$[d_0, d_1](^f u) = ^f([d_0, d_1](u)).$$

(P3) Cada elemento de $s_0(K_{i-1}(x))$ es llevado por $[d_0, d_1]_x$ a un elemento de $s_0(K_{i-2}(w))$.

(P4) Para cada $u \in K_i(x)$ se tiene

$$([d_0, d_1]s_2(u))^{-1} s_1[d_0, d_1](u)$$

pertenece a la imagen por $s_0 : C_{n-1}^i(x) \rightarrow C_{n-1}^{i+1}(x)$ de $K_{i-1}(x)$.

En efecto:

Demostración de (P1).-

$$\begin{aligned}
 d_1 d_2 \dots d_i ([d_0, d_1](u)) &= d_1 d_2 \dots d_i (d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) \\
 &= d_1 d_2 \dots d_i d_1 u (d_1 d_2 \dots d_i d_0 u)^{-1} d_1 d_2 \dots d_i s_0 d_1 d_0 u \\
 &= d_1 d_1 d_3 \dots d_{i+1} u (d_1 d_0 d_3 \dots d_{i+1} u)^{-1} d_1 s_0 d_1 d_0 d_3 \dots d_{i+1} (u) \\
 &= d_1 \dots d_{i+1} u (d_0 d_2 \dots d_{i+1} u)^{-1} d_0 d_2 \dots d_{i+1} u = 0.
 \end{aligned}$$

Demostración de (P2).-

$$\begin{aligned}
 [d_0, d_1](f u) &= d_1(f u) d_0(f u)^{-1} s_0 d_1 d_0(f u) = d_1(s_i \dots s_0(f) u s_i \dots s_0(f)^{-1}) \\
 &\quad d_0(s_i \dots s_0(f) u s_i \dots s_0(f)^{-1})^{-1} s_0 d_1 d_0(s_i \dots s_0(f) u s_i \dots s_0(f)^{-1}) \\
 &= s_{i-1} \dots s_0(f) d_1 u s_{i-1} \dots s_0(f)^{-1} (s_{i-1} \dots s_0(f) d_0 u s_{i-1} \dots s_0(f)^{-1})^{-1} \\
 &\quad s_{i-1} \dots s_0(f) s_0 d_1 d_0 u s_{i-1} \dots s_0(f)^{-1} \\
 &= s_{i-1} \dots s_0(f) d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u s_{i-1} \dots s_0(f)^{-1} \\
 &= f (d_1 u (d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) = f ([d_0, d_1](u)).
 \end{aligned}$$

Demostración de (P3).- Para cada $w \in K_{i-1}(x)$ se tiene

$$[d_0, d_1](s_0 w) = d_1 s_0 w d_0 s_0 w^{-1} s_0 d_1 d_0 s_0 w = w w^{-1} s_0 d_1 w = s_0 d_1 w \in s_0(K_{i-2}(x)).$$

Demostración de (P4).-

$$\begin{aligned}
 ([d_0, d_1]s_2(u))^{-1} s_1 [d_0, d_1](u) &= (d_1 s_2 u (d_0 s_2 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 s_2 u)^{-1} s_1 (d_1 u (d_0 u)^{-1} \\
 &\quad s_0 d_1 d_0 u) = (s_0 d_1 d_0 s_2 u)^{-1} d_0 s_2 u (d_1 s_2 u)^{-1} \\
 &\quad s_1 d_1 u (s_1 d_0 u)^{-1} s_1 s_0 d_1 d_0 u = (s_0 d_1 s_1 d_0 u)^{-1} \\
 &\quad s_0 s_0 d_1 d_0 u = s_0 ((d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) \in s_0(K_{i-1}(x)),
 \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
 d_1 \dots d_i ((d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u) &= (d_1 \dots d_i d_0 u)^{-1} d_1 \dots d_i s_0 d_1 d_0 u = (d_0 d_2 \dots d_{i+1} u)^{-1} \\
 &\quad d_0 d_2 \dots d_{i+1} u = 0,
 \end{aligned}$$

es decir, $(d_0 u)^{-1} s_0 d_1 d_0 u \in K_{i-1}(x)$.

Estas propiedades de $[d_0, d_1]$ nos permiten construir una transformación natural

$$\delta_0 : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}_{i-1},$$

la única haciendo conmutar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 K_i & \xrightarrow{[d_0, d_1]} & K_{i-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K}_i & \xrightarrow{\delta_0} & \tilde{K}_{i-1},
 \end{array}$$

siendo los morfismos verticales las proyecciones canónicas a los correspondientes cocientes.

Otras propiedades de la transformación $[d_0, d_1]$, que se deducen de las propiedades del corchete dadas en los Lemas 2.2.1 y 2.2.2, son las siguientes (en las siguientes igualdades yuxtaposición indica composición de transformaciones):

- Para $1 \leq j \leq i$, se tiene

$$d_{j+1}[d_0, d_1] = [d_{j+1}d_0, d_{j+1}d_1] = [d_0d_{j+2}, d_1d_{j+2}] = [d_0, d_1]d_{j+2}$$

y por tanto $\delta_j\delta_0 = \delta_0\delta_{j+1}$.

- Para $1 \leq j \leq i$, se tiene

$$s_{j+1}[d_0, d_1] = [s_{j+1}d_0, s_{j+1}d_1] = [d_0s_{j+2}, d_1s_{j+2}] = [d_0, d_1]s_{j+2}$$

y por tanto $\sigma_j\delta_0 = \delta_0\sigma_{j+1}$.

- Además,

$$[d_0[d_0, d_1], d_1[d_0, d_1]] = [d_1d_0, d_1d_1] = [d_0d_2, d_1d_2] = [d_0, d_1]d_2$$

y por tanto $\delta_0\delta_0 = \delta_0\delta_1$.

- También

$$[d_0s_1, d_1s_1] = [s_0d_0, Id] = Id$$

y por tanto $\delta_0\sigma_0 = Id$.

- Además como consecuencia de (P4) se tiene $\sigma_0\delta_0 = \delta_0\sigma_1$.

- Por último

$$\begin{aligned} d_0d_2 \dots d_i[d_0, d_1] &= d_0[d_2 \dots d_i d_0, d_2 \dots d_i d_1] \\ &= d_0[d_0d_3 \dots d_{i+1}, d_1d_3 \dots d_{i+1}] \\ &= d_1d_0d_3 \dots d_{i+1} \\ &= d_0d_2d_3 \dots d_{i+1}. \end{aligned}$$

Deducimos entonces que el diagrama

$$\tilde{\mathbf{K}}_n = \dots \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \sigma_{i-1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sigma_0 \\ \delta_i \end{array} & \\ \tilde{K}_i & \xrightarrow{\delta_0} & \tilde{K}_{i-1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sigma_0 \\ \delta_2 \end{array} & \\ \tilde{K}_2 & \xrightarrow{\delta_0} & \tilde{K}_1 \end{array} \xrightarrow{\delta_0} \begin{array}{c} \sigma_0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \delta_1 \end{array} \tilde{K}_0$$

representa un complejo simplicial de \mathcal{G} -módulos. Si además consideramos el operador cara $d_0 : C_{n-1}^1 \rightarrow C_{n-1}^0$, restringido a K_0 ,

$$K_0 \hookrightarrow C_{n-1}^1 \xrightarrow{d_0} C_{n-1}^0,$$

observamos que éste induce un morfismo $\partial_n^0 : \tilde{K}_0 \rightarrow C_{n-1}^0$ de forma que $\tilde{\mathbf{K}}_n \xrightarrow{\partial_n^0} C_{n-1}^0$ es un \mathcal{G} -módulo simplicial aumentado.

Definimos entonces

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}_n),$$

donde \mathcal{C}_{n-1}^0 como antes es el $(n-1)$ -complejo cruzado tal que $T_{n-1}(\mathcal{C}_{n-1}^0) = \mathcal{C}$ y $\text{techo}_{n-1}(\mathcal{C}_{n-1}^0) = C_{n-1}^0$.

Es rutinario comprobar que la asociación $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \mapsto \mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1})$ es funtorial, además tenemos:

Proposición 4.3.21. *El funtor $\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1} \rightarrow \mathbf{SCrs}_n$ es el adjunto izquierda de \overline{W}_n .*

Demostración: Supongamos que $(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1})$ y $(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)$ representan un $(n-1)$ -complejo y un n -complejo cruzado simplicial respectivamente. Veamos que existe una biyección natural

$$\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1})}{\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1})} \longrightarrow \frac{\overline{W}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)}{(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)}$$

Supongamos además

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}_n) \quad \text{y} \quad \overline{W}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n) = (\mathcal{G}', T_{n-2}(\mathcal{C}'), \mathbf{C}'_{n-1}).$$

Dado un morfismo de $(n-1)$ -complejos cruzados simpliciales

$$(F, \mathbf{f}, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \longrightarrow (\mathcal{G}', T_{n-2}(\mathcal{C}'), \mathbf{C}'_{n-1}) = \overline{W}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n).$$

Entonces

$$F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$$

es el funtor cambio de base del morfismo de $(n-2)$ -complejos cruzados

$$\mathbf{f} : \mathcal{C} \rightarrow T_{n-2}(\mathcal{C}'),$$

cuya componente j es

$$\mathbf{f}_j = (F, \alpha_j) : \mathcal{C}_j \rightarrow \mathcal{C}'_j, \quad 0 \leq j \leq n-2,$$

y

$$\alpha : \mathbf{C}_{n-1} \rightarrow \mathbf{C}'_{n-1}$$

es el morfismo simplicial de \mathcal{G} -módulos cuya componente i es

$$\alpha_{n-1}^i : C_{n-1}^i \longrightarrow C_n^{i-1}F \oplus \dots \oplus C_n^0F \oplus C'_{n-1}F, \quad i \geq 0.$$

Teniendo en cuenta que tanto $C_n'^i$, para $i \geq 0$, como C_{n-1}' son \mathcal{G}' -módulos, el producto $C_n'^i \oplus \dots \oplus C_n'^0 \oplus C_{n-1}'$ es de nuevo un \mathcal{G}' -módulo. Además las proyecciones a cualquiera de sus componentes

$$pr_j : C_n'^i \oplus \dots \oplus C_n'^0 \oplus C_{n-1}' \rightarrow C_n'^j, \quad 0 \leq j \leq i,$$

son morfismos de \mathcal{G}' -módulos. Por tanto, para cada $i \geq 0$, la composición

$$C_{n-1}^{i+1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}^{i+1}} C_n'^i F \oplus \dots \oplus C_n'^0 F \oplus C_{n-1} F \xrightarrow{pr_i} C_n'^i F,$$

es un morfismo de \mathcal{G} -módulos cuya restricción al \mathcal{G} -módulo K_i nos da una transformación natural asociada

$$\beta_n^i : K_i \rightarrow C_n'^i F$$

con componente en un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ dada por el morfismo

$$(\beta_n^i)_x : K_i(x) \rightarrow C_n'^i F(x), \quad u \mapsto (pr_i)_x(\alpha_{n-1}^{i+1})_x(u).$$

Por otro lado, si $w \in K_{i-1}(x)$, como s_0 actúa sobre un elemento de $C_n'^i(x) \oplus \dots \oplus C_n'^0(x) \oplus C_{n-1}'(x)$ añadiendo el elemento neutro del grupo $C_n'^{i+1}(x)$, es decir, $s_0(u_{i-1}, \dots, u_0, u) = (0, u_{i-1}, \dots, u_0, u)$ entonces

$$pr_i \alpha_{n-1}^{i+1}(s_0 w) = pr_i s_0 \alpha_{n-1}^{i+1}(w) = 0,$$

y por tanto la transformación natural β_n^i induce una transformación natural (a la que denotamos igual) $\beta_n^i : \tilde{K}_i \rightarrow C_n'^i F$, la única que hace conmutativo el diagrama de \mathcal{G} -módulos

$$\begin{array}{ccc} K_i & \xrightarrow{\quad} & \tilde{K}_i \\ & \searrow \beta_n^i & \swarrow \exists! \beta_n^i \\ & & C_n'^i \end{array}$$

Por lo anterior podemos definir una terna (F, \mathbf{g}, β) donde $\mathbf{g} : \mathcal{C}_{n-1}^0 \rightarrow \mathcal{C}'$ es un morfismo de $(n-1)$ -complejos cruzados tal que $T_{n-2}(\mathbf{g}) = \mathbf{f}$ y $\mathbf{g}_{n-1} = (F, \alpha_{n-1}^0)$ y β es un morfismo simplicial de \mathcal{G} -módulos cuya componente i viene dada por la transformación natural $\beta_n^i : \tilde{K}_i \rightarrow C_n'^i F$.

Será de nuevo rutinario probar que dicha terna (F, \mathbf{g}, β) determina un morfismo de n -complejos cruzados simpliciales de $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_{n-1})$ en $(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathcal{C}'_n)$.

Recíprocamente, dado un morfismo de n -complejos cruzados simpliciales

$$(G, \mathbf{g}, \beta) : \mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_{n-1}) = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}_n) \longrightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathcal{C}'_n),$$

con $\mathbf{g} : \mathcal{C}_{n-1}^0 \rightarrow \mathcal{C}'$ un morfismo de $(n-1)$ -complejos cruzados cuyo funtor cambio de base es $G = \text{base}(\mathbf{g})$ y cuya componente en dimensión j viene dada por el

morfismo de módulos cruzados $\mathbf{g}_j = (G, \beta_j)$, $2 \leq j \leq n-1$ y $\beta : \tilde{\mathbf{K}}_n \rightarrow G^* \mathbf{C}'_n$ es un morfismo simplicial de \mathcal{G} -módulos cuya componente i denotamos por $\beta_n^i : \tilde{K}_i \rightarrow C_n'^i G$, $i \geq 0$.

A partir de lo anterior construimos la terna (G, \mathbf{f}, α) con $\mathbf{f} : \mathcal{C} \rightarrow T_{n-2}(\mathcal{C}')$ el morfismo de $(n-2)$ -complejos cruzados dado por $T_{n-2}(\mathbf{g})$, la $(n-2)$ -truncación de \mathbf{g} , y α el morfismo simplicial de \mathcal{G} -módulos cuya componente i es la transformación natural

$$\alpha_{n-1}^i : C_{n-1}^i \rightarrow C_n'^{i-1} F \oplus \dots \oplus C_n'^0 F \oplus C_{n-1}' F$$

dada por:

- $\alpha_{n-1}^0 = \beta_{n-1} : C_{n-1}^0 \rightarrow C_{n-1}' F$,
- $\alpha_{n-1}^1 : C_{n-1}^1 \rightarrow C_n'^0 F \oplus C_{n-1}' F$ la transformación natural cuya componente en un objeto x de \mathcal{G} es el morfismo de grupos

$$C_{n-1}^1(x) \rightarrow C_n'^0 F(x) \oplus C_{n-1}' F(x)$$

que actúa sobre un elemento $u \in C_{n-1}^1(x)$, teniendo en cuenta que $d_1 u \in C_{n-1}^0(x)$ y que $u - s_0 d_1 u \in K_0(x)$, como

$$\alpha_{n-1}^1(u) = (\beta_n^0(\overline{u - s_0 d_1 u}), \beta_{n-1}(d_1 u)),$$

donde \bar{k} indica la clase en $\tilde{K}_0(x)$ del elemento $k \in K_0(x)$.

- $\alpha_{n-1}^2 : C_{n-1}^2 \rightarrow C_n'^1 F \oplus C_n'^0 F \oplus C_{n-1}' F$ la transformación natural cuya componente en un objeto x de \mathcal{G} actúa sobre cada elemento $u \in C_{n-1}^2(x)$, teniendo en cuenta que $d_1^2 u \in C_{n-1}^0(x)$, que $d_0 u - s_0 d_1 d_0 u \in K_0(x)$ y que $u - s_0^2 d_1^2 u \in K_1(x)$, mediante

$$\alpha_{n-1}^2(u) = (\beta_n^1(\overline{u - s_0^2 d_1^2 u}), \beta_n^0(\overline{d_0 u - s_0 d_1 d_0 u}), \beta_{n-1}(d_1^2 u)),$$

donde de nuevo barras indican clases en los correspondientes cocientes.

- En general, para $i \geq 3$, la transformación natural α_{n-1}^i tiene como componente en un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ el morfismo de grupos que asocia a cada elemento $u \in C_{n-1}^i(x)$, teniendo en cuenta que $d_1^i u \in C_{n-1}^0$ y que $d_0^{i-j} u - s_0^j d_1^j d_0^{i-j} u \in K_{j-1}(x)$, el elemento

$$\alpha_{n-1}^i(u) = (\beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^{j-1}(\overline{d_0^{i-j} u - s_0^j d_1^j d_0^{i-j} u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)),$$

donde de nuevo barras indican clases en los correspondientes cocientes.

Tenemos que comprobar que estas transformaciones naturales conmutan con las asociadas a los operadores cara y degeneración, es decir, que los siguientes cuadrados de transformaciones naturales conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{n-1}^i & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{i-1}} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{d_i} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & C_{n-1}^{i-1} \\
 \alpha_{n-1}^i \downarrow & & \downarrow \alpha_{n-1}^{i-1} \\
 C_n^{i-1}F \oplus \dots \oplus C_n^0F \oplus C_{n-1}'F & \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{i-1}} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{d_i} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} & C_n^{i-2}F \oplus \dots \oplus C_n^0F \oplus C_{n-1}'F .
 \end{array}$$

En efecto, para cada objeto x en \mathcal{G} y cada $u \in C_{n-1}^i(x)$, se tiene:

- Para $j = 0$,

$$\begin{aligned}
 d_0 \alpha_{n-1}^i(u) &= d_0(\beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
 &= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_0 u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_0 u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \\
 &\quad \partial_n^{i-1}(\beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}) + \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
 &= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_0 u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_0 u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} d_0 u - s_0 d_1 d_0^{i-2} d_0 u}), \\
 &\quad \beta_{n-1} \partial_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}) + \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
 &= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_0 u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_0 u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} d_0 u - s_0 d_1 d_0^{i-2} d_0 u}), \\
 &\quad \beta_{n-1}(d_0 d_2 \dots d_i(\overline{u - s_0^i d_1^i u}) + (d_1^i u))) \\
 &= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_0 u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_0 u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} d_0 u - s_0 d_1 d_0^{i-2} d_0 u}), \\
 &\quad \beta_{n-1}(\overline{d_1^{i-1} d_0 u - d_1^i u + d_1^i u})) = \alpha_{n-1}^{i-1} d_0 u ,
 \end{aligned}$$

- para $0 < j < i$,

$$\begin{aligned}
d_j \alpha_{n-1}^i(u) &= d_j(\beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (d_{j-1} \beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, d_1 \beta_n^{i-j+1}(\overline{d_0^{j-2} u - s_0^{i-j+2} d_1^{i-j+2} d_0^{j-2} u}), \\
&\quad d_0 \beta_n^{i-j}(\overline{d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u})) \\
&+ \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^{j+1} u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j-1} d_0^{j+1} u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (\beta_n^{i-2} \delta_{j-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^{i-j} \delta_1(\overline{d_0^{j-2} u - s_0^{i-j+2} d_1^{i-j+2} d_0^{j-2} u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-1} \delta_0(\overline{d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u})) \\
&+ \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^{j+1} u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j-1} d_0^{j+1} u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_j u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_j u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^{i-j}(\overline{d_0^{j-2} d_j u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-2} d_j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_1(d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u)})) \\
&- \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0(d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u)})) \\
&+ \beta_n^{i-j-1}(\overline{s_0 d_1 d_0(d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u)})) \\
&+ \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^{j+1} u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j-1} d_0^{j+1} u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) = (\beta_n^{i-2}(\overline{d_j u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_j u}), \\
&\quad \dots, \beta_n^{i-j}(\overline{d_0^{j-2} d_j u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-2} d_j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^{j-1} d_j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^{j-1} d_j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^j d_j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j-1} d_0^j d_j u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} d_j u - s_0 d_1 d_0^{i-2} d_j u}), \beta_{n-1}(d_1^{i-1} d_j u)) = \alpha_{n-1}^{i-1} d_j u,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que

$$s_0 d_1 d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u = s_0(d_1 d_0^j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j} d_0^j u),$$

con $d_1 d_0^j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j} d_0^j u \in K_{i-j-2}(x)$ por lo que su clase es trivial.

- para $j = i$,

$$\begin{aligned}
d_i \alpha_{n-1}^i(u) &= d_i(\beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} u - s_0 d_1 d_0^{i-1} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (d_{i-1} \beta_n^{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, d_1 \beta_n^1(\overline{d_0^{i-2} u - s_0^2 d_1^2 d_0^{i-2} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (\beta_n^{i-2} \delta_{i-1}(\overline{u - s_0^i d_1^i u}), \dots, \beta_n^0 \delta_1(\overline{d_0^{i-2} u - s_0^2 d_1^2 d_0^{i-2} u}), \beta_{n-1}(d_1^i u)) \\
&= (\beta_n^{i-2}(\overline{d_i u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} d_i u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} d_i u - s_0 d_1 d_0^{i-2} d_i u}), \\
&\quad \beta_{n-1}(d_1^{i-1} d_i u)) = \alpha_{n-1}^{i-1} d_i u.
\end{aligned}$$

Veamos que también conmutan con las degeneraciones. Para cada objeto x de \mathcal{G} y cada elemento $u \in C_{n-1}^{i-1}(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
s_j \alpha_{n-1}^{i-1}(u) &= s_j(\beta_n^{i-2}(\overline{u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} u - s_0 d_1 d_0^{i-2} u}), \beta_{n-1}(d_1^{i-1} u)) \\
&= (s_{j-1} \beta_n^{i-2}(\overline{u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} u}), \dots, s_0 \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u}), 0, \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} u - s_0 d_1 d_0^{i-2} u}), \beta_{n-1}(d_1^{i-1} u)) \\
&= (\beta_n^{i-1} \sigma_{j-1}(\overline{u - s_0^{i-1} d_1^{i-1} u}), \dots, \beta_n^{i-j} \sigma_0(\overline{d_0^{j-1} u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} u}), 0, \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-2} u - s_0 d_1 d_0^{i-2} u}), \beta_{n-1}(d_1^{i-1} u)) \\
&= (\beta_n^{i-1}(\overline{s_j u - s_0^i d_1^i s_j u}), \dots, \beta_n^{i-j}(\overline{d_0^{j-1} s_j u - s_0^{i-j+1} d_1^{i-j+1} d_0^{j-1} s_j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-1}(\overline{d_0^j s_j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j s_j u}), \\
&\quad \beta_n^{i-j-2}(\overline{d_0^{j+1} s_j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j-1} d_0^{j+1} s_j u}), \dots, \\
&\quad \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} s_j u - s_0 d_1 d_0^{i-1} s_j u}), \beta_{n-1}(d_1^i s_j u)) \\
&= (\beta_n^{i-1}(\overline{s_j u - s_0^i d_1^i s_j u}), \dots, \beta_n^0(\overline{d_0^{i-1} s_j u - s_0 d_1 d_0^{i-1} s_j u}), \beta_{n-1}(d_1^i s_j u)) \\
&= \alpha_{n-1}^i s_j(u),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$d_0^j s_j u - s_0^{i-j} d_1^{i-j} d_0^j s_j u = s_0(d_0^j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j} d_0^j s_j u),$$

con $d_1 d_0^j u - s_0^{i-j-1} d_1^{i-j} d_0^j u \in K_{i-j-2}(x)$ y por tanto su clase es trivial.

Podemos entonces concluir que la terna $(G, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ determina un morfismo de $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}_n)$ en $(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)$ en la categoría \mathbf{SCrs}_{n-1} .

Finalmente dejamos como comprobación rutinaria que las asociaciones que acabamos de definir son naturales y una es inversa de la otra. Ésto concluirá esta demostración. ■

Nota 4.3.22. *Se puede comprobar que el par de funtores anteriores establece una equivalencia entre las categorías \mathbf{SCrs}_n y \mathbf{SCrs}_{n-1} para $n > 3$ y como consecuencia, para $n > 3$, la categoría \mathbf{SCrs}_n es equivalente a \mathbf{SCrs}_3 .*

Si consideramos ahora un grupoide $\mathcal{G} = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0)$ primero como un $(n-1)$ -complejo cruzado simplicial y después como un n -complejo cruzado simplicial. Es fácil comprobar que $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ y por tanto el par adjunto que acabamos de construir

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{SCrs}_n : \overline{W}_n$$

induce un nuevo par adjunto, entre las correspondientes coma categorías

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G} : \overline{W}_n .$$

Obsérvese las distintas interpretaciones que adopta el símbolo \mathcal{G} .

Nuestro próximo objetivo será ver como en algunos casos los funtores \mathcal{F}_n y \overline{W}_n conservan clases de homotopía.

Previamente vamos a particularizar la definición de homotopía a la categoría \mathbf{SCrs}_n .

Observamos primero que el functor $(T_{n-1})_* : \mathbf{Crs}_n^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Crs}_{n-1}^{\Delta^{op}}$ restringido a \mathbf{SCrs}_n lleva homotopías en homotopías. En particular si

$$\hbar : (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) \rightsquigarrow (G, \mathbf{g}, \boldsymbol{\beta}) : (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)$$

es una homotopía entonces $(T_{n-1})_*(\hbar) : \mathbf{f} \rightsquigarrow \mathbf{g}$ es una homotopía entre dos morfismos constantes entre $(n-1)$ -complejos cruzados simpliciales constantes (caras y degeneraciones identidades). Por tanto $(T_{n-1})_*(\hbar)$ es una homotopía trivial, esto es

$$(T_{n-1})_*(\hbar) = \mathbf{f} = \mathbf{g},$$

así para que dos morfismos en \mathbf{SCrs}_n sean homotópicos han de tener el mismo morfismo a nivel de $(n-1)$ -complejos cruzados. Representaremos entonces a una homotopía $\hbar : (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) \rightsquigarrow (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ como un par

$$\hbar = (\mathbf{f}, \mathbf{h})$$

con

$$\mathbf{h} = \{h_j^i : C_n^i \rightarrow C_n'^{i+1}F; 0 \leq j \leq i\} : \boldsymbol{\alpha} \rightsquigarrow \boldsymbol{\beta} : \mathbf{C}_n \rightarrow F^* \mathbf{C}'_n$$

una homotopía entre morfismos simpliciales en la categoría $(\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$. Además las identidades de homotopía para \hbar reducen a las identidades de homotopía para \mathbf{h} .

Podemos ahora probar

Lema 4.3.23. *El functor \overline{W}_n conserva clases de homotopía de morfismos simpliciales.*

Demostración: Sean $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}), (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) : (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_n) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_n)$ dos morfismos homotópicos en \mathbf{SCrs}_n y sea $\bar{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{h})$ una homotopía entre ellos como antes.

Supongamos además que

$$\bar{W}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) = (F, T_{n-2}(\mathbf{f}), \boldsymbol{\alpha}') \quad \text{y} \quad \bar{W}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = (F, T_{n-2}(\mathbf{f}), \boldsymbol{\beta}'),$$

donde $\boldsymbol{\alpha}'$ y $\boldsymbol{\beta}'$ son morfismos simpliciales de \mathcal{G} -módulos que en dimensión i vienen dados por las transformaciones naturales

$$\alpha_{n-1}'^i, \beta_{n-1}'^i : C_n^{i-1} \oplus \dots \oplus C_n^0 \oplus C_{n-1} \longrightarrow C_n'^{i-1}F \oplus \dots \oplus C_n'^0F \oplus C_{n-1}'F$$

cuyas componentes en cada objeto x actúan sobre un elemento $(u_{i-1}, \dots, u_0, u) \in C_n^{i-1}(x) \oplus \dots \oplus C_n^0(x) \oplus C_{n-1}(x)$ mediante:

$$\alpha_{n-1}'^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) = (\alpha_n^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)),$$

$$\beta_{n-1}'^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) = (\beta_n^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \beta_n^0(u_0), \beta_{n-1}(u)).$$

Nótese que para simplificar notación eliminamos el índice x , sobrentendiendo en cada momento en la componente en la que trabajamos.

Vamos a definir una homotopía $\bar{h}' = (T_{n-2}(\mathbf{f}), \bar{\mathbf{h}})$ con $\bar{\mathbf{h}} : \boldsymbol{\alpha}' \rightsquigarrow \boldsymbol{\beta}'$ dada por la familia

$$\bar{\mathbf{h}} = \{\bar{h}_j^i : C_n^{i-1} \oplus \dots \oplus C_n^0 \oplus C_{n-1} \rightarrow C_n'^iF \oplus \dots \oplus C_n'^0F \oplus C_{n-1}'F; 0 \leq j \leq i\}.$$

Así pues, para $0 \leq j \leq i$, definimos \bar{h}_j^i como la transformación natural cuya componente en un objeto x de \mathcal{G} actúa, para cada elemento $(u_{i-1}, \dots, u_0, u) \in C_n^{i-1}(x) \oplus \dots \oplus C_n^0(x) \oplus C_{n-1}(x)$, mediante

$$\begin{aligned} \bar{h}_j^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) = & (h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \\ & \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)). \end{aligned}$$

Usando el hecho de que la familia $\mathbf{h} = \{h_j^i : C_n^i \rightarrow C_n'^{i+1}F, 0 \leq j \leq i\}$ determina una homotopía entre morfismo simpliciales en $(\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$, deducimos a continuación las identidades de homotopía para \bar{h}' las cuales, como hemos comentado antes, reducen a las identidades de homotopía para $\bar{\mathbf{h}} = \{\bar{h}_j^i, 0 \leq j \leq i\}$. En efecto, para cada objeto x en \mathcal{G} y cada elemento (u_{i-1}, \dots, u_0, u) en $C_n^{i-1}(x) \oplus \dots \oplus C_n^0(x) \oplus C_{n-1}(x)$ se tiene:

- $d_0 \bar{h}_0^i = \alpha_{n-1}'^i,$

$$\begin{aligned} d_0 \bar{h}_0^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= d_0(0, \alpha_n^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\ &= (\alpha_n^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \partial_n^{i-1}(0) + \alpha_{n-1}(u)) \\ &= \alpha_{n-1}'^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u), \end{aligned}$$

- $d_{i+1}\bar{h}_i^i = \beta'_{n-1}{}^i$,

$$\begin{aligned} d_{i+1}\bar{h}_i^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= d_{i+1}(h_{i-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^0(u_0), 0, \alpha_{n-1}(u)) \\ &= (d_i h_{i-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, d_1 h_0^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\ &= (\beta_n^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \beta_n^0(u_0), \beta_{n-1}(u)) \\ &= \beta'_{n-1}{}^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u), \end{aligned}$$

- Además $d_k\bar{h}_j^i = \bar{h}_{j-1}^{i-1}d_k$, para $k < j$,

$$\begin{aligned} d_k\bar{h}_j^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= d_k(h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \\ &\quad \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = (d_{k-1}h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \\ &\quad d_1 h_{j-k+1}^{i-k+1}(u_{i-k+1}), d_0 h_{j-k}^{i-k}(u_{i-k}) + h_{j-k-1}^{i-k-1}(u_{i-k-1}), \\ &\quad h_{j-k-2}^{i-k-2}(u_{i-k-2}), \dots, h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \\ &\quad \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\ &= (h_{j-2}^{i-2}d_{k-1}(u_{i-1}), \dots, h_{j-k}^{i-k}d_1(u_{i-k+1}), \\ &\quad h_{j-k-1}^{i-k-1}(d_0(u_{i-k}) + u_{i-k-1}), h_{j-k-2}^{i-k-2}(u_{i-k-2}), \dots, \\ &\quad h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \\ &\quad \alpha_{n-1}(u)) = \bar{h}_{j-1}^{i-1}(d_{k-1}(u_{i-1}), \dots, d_1(u_{i-k+1}), \\ &\quad d_0(u_{i-k}) + u_{i-k-1}, u_{i-k-2}, \dots, u_0, u) \\ &= \bar{h}_{j-1}^{i-1}d_k(u_{i-1}, \dots, u_0, u), \end{aligned}$$

- $d_j\bar{h}_j^i = d_j\bar{h}_{j-1}^i$,

$$\begin{aligned} d_j\bar{h}_j^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= d_j(h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \\ &\quad \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = (d_{j-1}h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \\ &\quad d_1 h_1^{i-j+1}(u_{i-j+1}), d_0 h_0^{i-j}(u_{i-j}) + 0, \\ &\quad \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\ &= (d_{j-1}h_{j-2}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, d_1 h_0^{i-j+1}(u_{i-j+1}), \alpha_n^{i-j}(u_{i-j}), \\ &\quad \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\ &= d_j(h_{j-2}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j+1}(u_{i-j+1}), 0, \alpha_n^{i-j}(u_{i-j}), \dots, \\ &\quad \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = d_j\bar{h}_{j-1}^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u), \end{aligned}$$

- y $d_k \bar{h}_j^i = \bar{h}_j^{i-1} d_{k-1}$, para $k > j + 1$,

$$\begin{aligned}
d_k \bar{h}_j^i(u_{i-1}, \dots, u_0, u) &= d_k(h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \\
&\quad \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = (d_{k-1} h_{j-1}^{i-1}(u_{i-1}), \dots, \\
&\quad d_{k-j} h_0^{i-j}(u_{i-j}), 0, d_{k-j-2} \alpha_n^{i-j-1}(u_{i-j-1}), \dots, \\
&\quad d_1 \alpha_n^{i-k+2}(u_{i-k+2}), d_0 \alpha_n^{i-k+1}(u_{i-k+1}) \\
&\quad + \alpha_n^{i-k}(u_{i-k}), \alpha_n^{i-k-1}(u_{i-k-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\
&= (h_{j-1}^{i-2} d_{k-2}(u_{i-1}), \dots, h_0^{i-j-1} d_{k-j-1}(u_{i-j}), \\
&\quad 0, \alpha_n^{i-j-2} d_{k-j-2}(u_{i-j-1}), \dots, \alpha_n^{i-k+1} d_1(u_{i-k+2}), \\
&\quad \alpha_n^{i-k}(d_0(u_{i-k+1}) + u_{i-k}), \alpha_n^{i-k-1}(u_{i-k-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \\
&\quad \alpha_{n-1}(u)) = \bar{h}_j^{i-1}(d_{k-2}(u_{i-1}), \dots, d_1(u_{i-k+2}), d_0(u_{i-k+1}) \\
&\quad + u_{i-k}, u_{i-k-1}, \dots, u_0, u) = \bar{h}_j^{i-1} d_{k-1}(u_{i-1}, \dots, u_0, u) ,
\end{aligned}$$

- para las degeneraciones $s_k \bar{h}_j^{i-1} = \bar{h}_{j+1}^i s_k$, si $k \leq j$,

$$\begin{aligned}
s_k \bar{h}_j^{i-1}(u_{i-2}, \dots, u_0, u) &= s_k(h_{j-1}^{i-2}(u_{i-2}), \dots, h_0^{i-j-1}(u_{i-j-1}), 0, \alpha_n^{i-j-2}(u_{i-j-2}), \\
&\quad \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = (s_{k-1} h_{j-1}^{i-2}(u_{i-2}), \dots, \\
&\quad s_0 h_{j-k}^{i-k-1}(u_{i-k-1}), 0, h_{j-k-1}^{i-k-2}(u_{i-k-2}), \dots, \\
&\quad h_0^{i-j-1}(u_{i-j-1}), 0, \alpha_n^{i-j-2}(u_{i-j-2}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \\
&\quad \alpha_{n-1}(u)) = (h_j^{i-1} s_{k-1}(u_{i-2}), \dots, h_{j-k+1}^{i-k} s_0(u_{i-k-1}), \\
&\quad 0, h_{j-k-1}^{i-k-2}(u_{i-k-2}), \dots, h_0^{i-j-1}(u_{i-j-1}), 0, \\
&\quad \alpha_n^{i-j-2}(u_{i-j-2}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\
&= \bar{h}_{j+1}^i(s_{k-1}(u_{i-2}), \dots, s_0(u_{i-k-1}), 0, u_{i-k-2}, \dots, u_0, u) \\
&= \bar{h}_{j+1}^i s_k(u_{i-2}, \dots, u_0, u) ,
\end{aligned}$$

- y $s_k \bar{h}_j^{i-1} = \bar{h}_j^i s_{k-1}$, si $k > j$,

$$\begin{aligned}
s_k \bar{h}_j^{i-1}(u_{n-2}, \dots, u_0, u) &= s_k(h_{j-1}^{i-2}(u_{i-2}), \dots, h_0^{i-j-1}(u_{i-j-1}), 0, \alpha_n^{i-j-2}(u_{i-j-2}), \\
&\quad \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) = s_{k-1}(h_{j-1}^{i-2}(u_{i-2}), \dots, \\
&\quad s_{k-j} h_0^{i-j-1}(u_{i-j-1}), 0, s_{k-j-2} \alpha_n^{i-j-2}(u_{i-j-2}), \dots, \\
&\quad s_0 \alpha_n^{i-k}(u_{i-k}), 0, \alpha_n^{i-k-1}(u_{i-k-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\
&= (h_{j-1}^{i-1} s_{k-2}(u_{i-2}), \dots, h_0^{i-j} s_{k-j-1}(u_{i-j-1}), 0, \\
&\quad \alpha_n^{i-j-1} s_{k-j-2}(u_{i-j-2}), \dots, \alpha_n^{i-k+1} s_0(u_{i-k}), 0, \\
&\quad \alpha_n^{i-k-1}(u_{i-k-1}), \dots, \alpha_n^0(u_0), \alpha_{n-1}(u)) \\
&= \bar{h}_j^i(s_{k-2}(u_{i-2}), \dots, s_0(u_{i-k}), 0, u_{i-k-1}, \dots, u_0, u) \\
&= \bar{h}_j^i s_{k-1}(u_{i-2}, \dots, u_0, u).
\end{aligned}$$

Por tanto podemos concluir asegurando que $\bar{W}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ y $\bar{W}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ son homotópicos, con homotopía dada por \bar{h}' . \blacksquare

En general no es cierto que el funtor \mathcal{F}_n se comporte como \bar{W}_n respecto a homotopías, por ejemplo para que las imágenes por \mathcal{F}_n de dos morfismos $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ y $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) : (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_{n-1})$ sean homotópicas al menos los morfismos simpliciales de \mathcal{G} -módulos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ han de tener igual componente a nivel del \mathcal{G} -módulo de cero símplexes, es decir, $\alpha_{n-1}^0 = \beta_{n-1}^0 : C_{n-1}^0 \rightarrow C'_{n-1}{}^0 F$. Sin embargo, en ciertos casos si que es cierto que el funtor \mathcal{F}_n lleva morfismos homotópicos en morfismos homotópicos. Analizamos alguno de estos casos en el lema siguiente.

Lema 4.3.24. Sean $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}), (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) : (\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_{n-1})$ dos morfismos en \mathbf{SCrs}_{n-1} tales que

$$\alpha_{n-1}^0 = \beta_{n-1}^0 : C_{n-1}^0 \rightarrow C'_{n-1}{}^0 F$$

y sea $\bar{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{h})$ con

$$\mathbf{h} = \{h_j^i : C_{n-1}^i \rightarrow C'_{n-1}{}^{i+1} F, 0 \leq j \leq i\}$$

una homotopía de $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ a $(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ tal que

$$h_0^0 = s_0 \alpha_{n-1}^0 \quad y \quad h_j^i = s_j \alpha_{n-1}^i \quad \text{si } j < i$$

(nótese que h_i^i es arbitrario para $i > 0$), entonces los morfismos de n -complejos cruzados simpliciales $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha})$ y $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ en \mathbf{SCrs}_n son homotópicos.

Demostración: Denotemos $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) = (\mathcal{G}, \mathcal{C}_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}_n)$, donde \mathcal{C}_{n-1}^0 es el $(n-1)$ -complejo cruzado con $T_{n-2}(\mathcal{C}_{n-1}^0) = \mathcal{C}$ y $\text{techo}_{n-1}(\mathcal{C}_{n-1}^0) = \mathcal{C}_{n-1}^0$ y $\tilde{\mathbf{K}}_n$ es el \mathcal{G} -módulo simplicial que en dimensión i tiene al \mathcal{G} -módulo \tilde{K}_i definido como en la construcción del functor \mathcal{F}_n . Como en dicha construcción denotaremos también por δ_i y σ_j a las transformaciones naturales que determinan los operadores cara y degeneración, respectivamente, de $\tilde{\mathbf{K}}_n$. Análogamente, denotaremos $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_{n-1}) = (\mathcal{G}', \mathcal{C}'_{n-1}^0, \tilde{\mathbf{K}}'_n)$ con \mathcal{C}'_{n-1}^0 es el $(n-1)$ -complejo cruzado que tiene $T_{n-2}(\mathcal{C}'_{n-1}^0) = \mathcal{C}'$ y $\text{techo}_{n-1}(\mathcal{C}'_{n-1}^0) = \mathcal{C}'_{n-1}^0$ y $\tilde{\mathbf{K}}'_n$ es el \mathcal{G}' -módulo simplicial cuya componente i viene dada por el \mathcal{G}' -módulo cociente \tilde{K}'_i del correspondiente \mathcal{G}' -módulo K'_i por la imagen por $s_0 : \mathcal{C}'_{n-1}{}^i \rightarrow \mathcal{C}'_{n-1}{}^{i+1}$ de los elementos de K'_{i-1} . También, δ'_i y σ'_j denotarán las correspondientes transformaciones naturales que determinan las caras y degeneraciones de $\tilde{\mathbf{K}}'_n$.

Por otro lado, denotaremos los morfismos de n -complejos cruzados simpliciales

$$\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}), \mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) : \mathcal{F}_n(\mathcal{G}, \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}', \mathbf{C}'_{n-1})$$

mediante $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) = (F, \mathbf{g}, \boldsymbol{\gamma})$ y $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}) = (F, \mathbf{g}, \boldsymbol{\mu})$ donde \mathbf{g} es el morfismo de $(n-1)$ -complejos cruzados con $T_{n-2}(\mathbf{g}) = \mathbf{f}$ y cuya componente en dimensión $n-1$ es el morfismo de módulos cruzados $\mathbf{g}_{n-1} = (F, \alpha_{n-1}^0) = (F, \beta_{n-1}^0)$ y los morfismos simpliciales $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\mu}$ tienen sus componentes i dadas por las transformaciones naturales γ_n^i y $\mu_n^i : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}'_i F$, respectivamente, las cuales son las transformaciones inducidas por las transformaciones naturales que llamaremos igual $\gamma_n^i, \mu_n^i : K_i \rightarrow K'_i F$ cuyas componentes en $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ actúan sobre un elemento $u \in K_i(x)$ como

$$(\gamma_n^i)_x(u) = (\alpha_{n-1}^{i+1})_x(u) \quad \text{y} \quad (\mu_n^i)_x(u) = (\beta_{n-1}^{i+1})_x(u)$$

(nótese que si $u \in K_i(x)$ entonces $(\alpha_{n-1}^{i+1})_x(u), (\beta_{n-1}^{i+1})_x(u) \in K'_i F(x)$). En lo que sigue para simplificar notación eliminaremos el índice x sobrentendiéndolo en cada caso. Estas transformaciones inducen a las primeras, pues para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, llevan las imágenes por s_0 de los elementos de $K_{i-1}(x)$ en imágenes por s_0 de elementos de $K'_{i-1} F(x)$. En efecto, dados $w \in K_{i-1}(x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma_n^i(s_0(w)) &= \alpha_{n-1}^{i+1} s_0(w) = s_0 \alpha_{n-1}^i(w) \in s_0(K'_{i-1} F(x)), \\ \mu_n^i(s_0(w)) &= \beta_{n-1}^{i+1} s_0(w) = s_0 \beta_{n-1}^i(w) \in s_0(K'_{i-1} F(x)), \end{aligned}$$

pues $\alpha_{n-1}^i(w)$ y $\beta_{n-1}^i(w)$ son elementos de $K'_{i-1} F(x)$.

Construimos $\bar{h}' = (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{h}}) : \mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) = (F, \mathbf{g}, \boldsymbol{\gamma}) \rightsquigarrow (F, \mathbf{g}, \boldsymbol{\mu}) = \mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ con

$$\bar{\mathbf{h}} = \{\bar{h}_j^i : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}'_{i+1} F, 0 \leq j \leq i\},$$

donde la transformación natural $\bar{h}_j^i : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}'_{i+1} F$ viene dada por $\bar{h}_j^i = \sigma'_j \gamma_n^i$ si $0 \leq j < i$ y \bar{h}_i^i es la transformación natural inducida por la transformación natural

$\bar{h}_i^i : K_i \rightarrow K'_{i+1}F$ cuya componente en $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ actúa sobre un objeto $u \in K_i(x)$ mediante $\bar{h}_i^i(u) = h_{i+1}^{i+1}(u)$.

Nótese que \bar{h}_i^i está bien definida pues, para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$, la componente en x de $h_{i+1}^{i+1} : C_{n-1}^{i+1} \rightarrow C'_{n-1}{}^{i+2}F$ lleva los elementos de $K_i(x)$ a $K'_{i+1}F(x)$. En efecto, si $u \in K_i(x)$, entonces

$$d_1 d_2 \dots d_{i+2} h_{i+1}^{i+1}(u) = d_1 d_2 \dots d_{i+1} \beta_{n-1}^{i+1}(u) = \beta_{n-1}^0(d_1 \dots d_{i+1}(u)) = \alpha_{n-1}^0(0) = 0,$$

es decir, $h_{i+1}^{i+1}(u) \in K'_{i+1}F(x)$. De esta forma podemos asegurar que existe una transformación $\bar{h}_i^i : K_i \rightarrow K'_{i+1}F$ cuya componente en $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ viene dada por

$$\bar{h}_i^i : K_i(x) \rightarrow K'_{i+1}F(x), \quad \bar{h}_i^i(u) = h_{i+1}^{i+1}(u).$$

Además es natural ya que h_{i+1}^{i+1} lo es y lleva las imágenes por $s_0 : C_{n-1}^i \rightarrow C_{n-1}^{i+1}$ de los elementos de $K_{i-1}(x)$ en imágenes por $s_0 : C_{n-1}^{i+1} \rightarrow C'_{n-1}{}^{i+2}$ de elementos de $K'_i F(x)$; en efecto, dado un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y dado $w \in K_{i-1}(x)$ se tiene:

$$\bar{h}_i^i(u) = h_{i+1}^{i+1} s_0(w) = s_0 h_i^i(w) \in s_0(K'_i F(x)),$$

pues $h_{i+1}^{i+1}(w) \in K'_i F(x)$.

Por último, como las identidades de homotopía para h' se reducen a las identidades de homotopía para la familia $\bar{h} = \{\bar{h}_j^i : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}'_{i+1}F, 0 \leq j \leq i\}$ bastará con ver que \bar{h} es una homotopía. En efecto, para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G})$ y cada $\bar{u} \in \tilde{K}_i(x)$ se tiene:

- $\delta'_0 \bar{h}_0^i(\bar{u}) = \delta'_0 \sigma'_0 \gamma_n^i(\bar{u}) = \gamma_n^i(\bar{u})$,
- $\delta'_{i+1} \bar{h}_i^i(\bar{u}) = \delta'_{i+1} \overline{(h_{i+1}^{i+1}(u))} = \overline{d_{n+2} h_{i+1}^{i+1}(u)} = \overline{\beta_{n-1}^{i+1}(u)} = \mu_n^i(\bar{u})$,
- para $k < j$, se tiene que $\delta'_k \bar{h}_j^i = \bar{h}_{j-1}^{i-1} \delta_k$,

– Si $j < i$ se tiene:

$$\delta'_k \bar{h}_j^i(\bar{u}) = \delta'_k \sigma'_j \gamma_n^i(\bar{u}) = \sigma'_{j-1} \delta'_k \gamma_n^i(\bar{u}) = \sigma'_{j-1} \gamma_n^{i-1} \delta_k(\bar{u}) = \bar{h}_{j-1}^{i-1} \delta_k(\bar{u}),$$

– si $k = 0$ y $j = i$,

$$\begin{aligned} \delta'_0 \bar{h}_i^i(\bar{u}) &= \delta'_0 \overline{(h_{i+1}^{i+1}(u))} = \overline{d_1 h_{i+1}^{i+1}(u) (d_0 h_{i+1}^{i+1}(u))^{-1} s_0 d_1 d_0 h_{i+1}^{i+1}(u)} \\ &= \overline{h_i^i d_1(u) (h_i^i d_0 u)^{-1} h_i^i s_0 d_1 d_0 u} = \overline{h_i^i (d_1 u (d_0 u))^{-1} s_0 d_1 d_0 u} \\ &= \bar{h}_{i-1}^{i-1} \delta_0(\bar{u}), \end{aligned}$$

– y si $1 \leq k < j = i$,

$$\delta'_k \bar{h}_i^i(\bar{u}) = \delta'_k(\overline{h_{i+1}^{i+1}(u)}) = \overline{d_{k+1} h_{i+1}^{i+1}(u)} = \overline{h_i^i d_{k+1}(u)} = \bar{h}_{i-1}^{i-1} \delta_k(\bar{u}),$$

- Además $\delta'_{k+1} \bar{h}_k^i = \delta'_{k+1} \bar{h}_{k+1}^i$,

$$\begin{aligned} \delta'_{k+1} \bar{h}_k^i(\bar{u}) &= \delta'_{k+1} \sigma'_k \gamma_n^i(\bar{u}) = \gamma_n^i(\bar{u}) = \delta'_{k+1} \sigma'_{k+1} \gamma_n^i(\bar{u}) \\ &= \delta'_{k+1} \bar{h}_{k+1}^i(\bar{u}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'_i \bar{h}_{i-1}^i(\bar{u}) &= \delta'_i \sigma'_{i-1} \gamma_n^i(\bar{u}) = \gamma_n^i(\bar{u}) = \overline{\alpha_{n-1}^{i+1}(u)} = \overline{d_{i+1} s_i \alpha_{n-1}^{i+1}(u)} \\ &= \overline{d_{i+1} h_i^{i+1}(u)} = \overline{d_{i+1} h_{i+1}^{i+1}(u)} = \delta'_i(\overline{h_{i+1}^{i+1}(u)}) = \delta'_i \bar{h}_i^i(\bar{u}), \end{aligned}$$

- y si $k > j + 1$, $\delta'_k \bar{h}_j^i = \bar{h}_j^{i-1} \delta_{k-1}$,

$$\begin{aligned} \delta'_k \bar{h}_j^i(\bar{u}) &= \delta'_k \sigma'_j \gamma_n^i(\bar{u}) = \sigma'_j \delta'_{k-1} \gamma_n^i(\bar{u}) = \sigma'_j \gamma_n^{i-1} \delta_{k-1}(\bar{u}) \\ &= \bar{h}_j^{i-1} \delta_{k-1}(\bar{u}), \end{aligned}$$

- y para la degeneraciones, si $k \leq j$,

$$\begin{aligned} \sigma'_k \bar{h}_j^{i-1}(\bar{u}) &= \sigma'_k \sigma'_j \gamma_n^{i-1}(\bar{u}) = \sigma'_{j+1} \sigma'_k \gamma_n^{i-1}(\bar{u}) = \sigma'_{j+1} \gamma_n^i \sigma_k(\bar{u}) \\ &= \bar{h}_{j+1}^i \sigma_k(\bar{u}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_k \bar{h}_{i-1}^{i-1}(\bar{u}) &= \sigma'_k(\overline{h_i^i(u)}) = \overline{s_{k+1} h_i^i(u)} = \overline{h_{i+1}^{i+1} s_{k+1}(u)} = \bar{h}_i^i(\overline{s_{k+1}(u)}) \\ &= \bar{h}_i^i \sigma_k(\bar{u}), \end{aligned}$$

- y para $k > j$,

$$\begin{aligned} \sigma'_k \bar{h}_j^{i-1}(\bar{u}) &= \sigma'_k \sigma'_j \gamma_n^{i-1}(\bar{u}) = \sigma'_j \sigma'_{k-1} \alpha_n^{i-1}(\bar{u}) = \sigma'_j \alpha_n^i \sigma_{k-1}(\bar{u}) \\ &= \bar{h}_j^i \sigma_{k-1}(\bar{u}). \end{aligned}$$

Por tanto, \bar{h} define una homotopía en $(\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}})^{\Delta^{op}}$. ■

Observamos ahora que los dos Lemas 4.3.23 y 4.3.24 anteriores pueden trasladarse al contexto de coma categorías. Más concretamente se tienen los siguientes resultados, cuyas demostraciones son análogas a las de los Lemas 4.3.23 y 4.3.24 respectivamente:

Lema 4.3.25. *Para cada grupoide \mathcal{G} , el funtor $\overline{W}_n : \mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$ conserva clases de homotopía de morfismos simpliciales en las correspondientes coma categorías.*

Lema 4.3.26. Sea \mathcal{G} un grupoide, (F, \mathbf{f}, α) y (F, \mathbf{f}, β) dos morfismos en la coma categoría $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{(F, \mathbf{f}, \alpha)} \\ \xrightarrow{(F, \mathbf{f}, \beta)} \end{array} & (\mathcal{G}'', \mathbf{C}', \mathbf{C}'_{n-1}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

tales que $\alpha_0 = \beta_0 : C_{n-1}^0 \rightarrow C_{n-1}^0 F$ y sea $\tilde{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{h}) : (F, \mathbf{f}, \alpha) \rightsquigarrow (F, \mathbf{f}, \beta)$ con

$$\mathbf{h} = \{h_j^i : C_{n-1}^i \rightarrow C_{n-1}^{i+1} F, 0 \leq j \leq i\}$$

una homotopía en $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$ de (F, \mathbf{f}, α) a (F, \mathbf{f}, β) tal que

$$h_0^0 = s_0 \alpha_{n-1}^0 \quad y \quad h_j^i = s_j \alpha_{n-1}^i \quad si \quad j < i.$$

Entonces los morfismos $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \alpha)$ y $\mathcal{F}_n(F, \mathbf{f}, \beta)$ en $\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}$ son homotópicos.

Si tomamos como $(\mathcal{G}'', \mathbf{C}', \mathbf{C}'_{n-1})$, en el Lema 4.3.26, el objeto

$$K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m) = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \in \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$$

asociado a cualquier \mathcal{G} -módulo Π para $m > 0$. Para cualquier par de morfismos en $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$ siempre existe una homotopía \tilde{h} en las condiciones de dicho Lema y por tanto podremos concluir que el funtor \mathcal{F}_n conserva clases de homotopía de morfismos con codominio $K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m)$.

Nota 4.3.27. Dado un $(n-1)$ -complejo cruzado $(\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1})$, observamos primero que un morfismo $(F, \mathbf{f}, \varphi) : (\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \rightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0)$ está totalmente determinado por un funtor $F : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$. Todas las componentes de \mathbf{f} están dadas por $\mathbf{f}_j = (F, 0) : \mathcal{C}_j \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, $2 \leq j \leq n-2$ y el morfismo simplicial $\varphi = 0$, luego podemos denotar a este morfismo por la terna $(F, F, 0)$.

Por otro lado, si (F, \mathbf{f}, α) ,

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1}) & \xrightarrow{(F, \mathbf{f}, \alpha)} & (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \\ & \searrow (F, F, 0) & \swarrow \\ & \mathcal{G} = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0) & \end{array} \quad (4.45)$$

es un morfismo en $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$ con codominio $K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m)$, entonces las componentes en dimensiones j de \mathbf{f} coinciden con las componentes del morfismo $\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{G}$ de $(n-1)$ -complejos cruzados asociado a $(F, F, 0) : (\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1}) \rightarrow \mathcal{G}$, esto es,

$\mathbf{f}_j = (F, 0) : \mathcal{C}_j \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}$, $0 \leq j \leq n - 2$, y la componente $i < m$ de α es nula, es decir, $\alpha_{n-1}^i = 0$ para $i < m$.

Así, usando la Proposición 1.4.6, tenemos que el morfismo $\alpha : \mathbf{C}_{n-1} \rightarrow F^*K(\Pi, m)$ de \mathcal{G}' -módulos simpliciales está totalmente determinado por su componente en dimensión m , es decir, de la transformación natural

$$\alpha_{n-1}^m : C_{n-1}^m \rightarrow \Pi F$$

y que además, para cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G}')$, se cumple la siguiente condición de cociclo:

$$\alpha_{n-1}^m d_{m+1}(u) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m+i} \alpha_{n-1}^m d_i(u), \quad (4.46)$$

para todo elemento u en $C_{n-1}^{m+1}(x)$.

En resumen, dar un morfismo (F, \mathbf{f}, α) como el del diagrama (4.45) es equivalente a dar una transformación natural $\alpha_{n-1}^m : C_{n-1}^m \rightarrow \Pi F$ de forma que para cada $x \in \text{obj}(\mathcal{G}')$ la componente en x de α_{n-1}^m cumpla la condición de cociclo (4.46).

Nota 4.3.28. Supongamos ahora que tenemos dos morfismos en $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathbf{C}, \mathbf{C}_{n-1}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{(F, \mathbf{f}, \alpha)} \\ \xrightarrow{(F, \mathbf{f}, \beta)} \end{array} & (\mathcal{G}, \mathcal{G}, K(\Pi, m)) \\ & \begin{array}{c} \searrow (F, F, 0) \\ \swarrow \end{array} & \\ & \mathcal{G}' = (\mathcal{G}, \mathcal{G}, 0) & \end{array}$$

que están determinados por las transformaciones naturales α_{n-1}^m y β_{n-1}^m , respectivamente, y que $\tilde{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{h}) : (F, \mathbf{f}, \alpha) \rightsquigarrow (F, \mathbf{f}, \beta)$ es una homotopía. Entonces las componentes de la homotopía \mathbf{h} en dimensiones $< m - 1$ son triviales, esto es

$$h_i^j = 0 : C_{n-1}^j \rightarrow \mathbf{0}_{\mathcal{G}}F,$$

para todo $j < m - 1$ y $0 \leq i \leq j$. Tenemos entonces, utilizando la Proposición 1.4.8, que la homotopía \mathbf{h} y por tanto \tilde{h} está totalmente determinada por una familia de transformaciones naturales

$$h_i^{m-1} : C_{n-1}^{m-1} \rightarrow \Pi F, \quad 0 \leq i \leq m - 1,$$

que satisfacen, para cada objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G}')$, la siguiente condición de homotopía:

$$\beta_{n-1}^m(u) - \alpha_{n-1}^m(u) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^m (-1)^{i+j} h_{j-1}^{m-1} d_i u, \quad (4.47)$$

para cada elemento $u \in C_{n-1}^m(x)$.

Es entonces fácil comprobar, después de la Nota 4.3.28, que a partir de una homotopía $\bar{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{h}) : (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) \rightsquigarrow (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ como antes podemos construir otra $\bar{h}' = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{h}}) : (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) \rightsquigarrow (F, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta})$ que está determinada por las transformaciones naturales $\bar{h}_i^{m-1} : C_{n-1}^{m-1} \rightarrow \Pi F$ cuyas componentes en un objeto $x \in \text{obj}(\mathcal{G}')$ asocian a cada $u \in C_{n-1}^{m-1}(x)$ el elemento

$$\bar{h}_i^{m-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq m-1, \\ \sum_{i=1}^m (-1)^{m+i} h_{i-1}^{m-1}(u) & \text{si } i = m-1. \end{cases}$$

En particular la homotopía \bar{h}' está en las condiciones del Lema 4.3.26 y por tanto deducimos que el funtor \mathcal{F}_n conserva clases de homotopías de morfismos a $K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m)$, $m \geq 1$.

Como consecuencia podemos probar:

Proposición 4.3.29. Sea \mathcal{G} un grupoide, Π un \mathcal{G} -módulo y $(\mathcal{G}', \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1})$ un objeto en $\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}$. Entonces la adjunción

$$\mathcal{F}_n : \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G} \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} \mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G} : \bar{W}_n$$

induce un isomorfismo

$$[\mathcal{F}_n(\mathcal{G}', \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}} \cong [(\mathcal{G}', \mathcal{C}, \mathbf{C}_{n-1}), \bar{W}_n(K(\tilde{\Pi}_n, m))]_{\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}},$$

donde $[-, -]_{\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}}$ y $[-, -]_{\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}}$ denotan clases de homotopía de morfismos en las correspondientes coma categorías.

Demostración: La demostración de esta proposición es inmediata a partir del Lema 4.3.25, de la Nota 4.3.28 y del hecho de que los isomorfismos de la adjunción $\bar{W}_n \dashv \mathcal{F}_n$ se obtienen aplicando los funtores \bar{W}_n y \mathcal{F}_n y componiendo con la unidad y counidad de dicha adjunción. ■

Consideremos ahora la composición de funtores

$$\mathfrak{F}_n = \mathcal{F}_n \dots \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 : \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathbf{Gd}/\mathcal{G} \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \dots \rightarrow \mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G} \xrightarrow{\mathcal{F}_n} \mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}.$$

Entonces, para cada objeto $\mathbf{X}_\varphi : \mathbf{X} \xrightarrow{\varphi} \text{Ner}(\mathcal{G})$ en la categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$, cada \mathcal{G} -módulo Π y cada $m > 1$, tenemos isomorfismo inducidos por las adjunciones

$\mathcal{F}_i \vdash \overline{W}_i$, $1 \leq i \leq n$, y los isomorfismos (4.30), (4.34) y (4.43)

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{F}_n \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\mathcal{G}} &\cong [\mathfrak{F}_{n-1} \mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_n K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}} \\
 &\cong [\mathfrak{F}_{n-1} \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m+1)]_{\mathbf{SCrs}_{n-1}/\mathcal{G}} \\
 &\cong [\mathfrak{F}_{n-2} \mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_{n-1} K(\tilde{\Pi}_{n-1}, m+1)]_{\mathbf{SCrs}_{n-2}/\mathcal{G}} \\
 &\cong [\mathfrak{F}_{n-2} \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_{n-2}, m+2)]_{\mathbf{SCrs}_{n-2}/\mathcal{G}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_2 K(\tilde{\Pi}_2, m+n-2)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \\
 &\cong [\mathcal{F}_1 \mathbf{X}_\varphi, K(\tilde{\Pi}_1, m+n-1)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \\
 &\cong [\mathbf{X}_\varphi, \overline{W}_1 K(\tilde{\Pi}_1, m+n-1)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})} \\
 &\cong [\mathbf{X}_\varphi, L_{\mathcal{G}}(\Pi, m+n)]_{\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})},
 \end{aligned}$$

y como consecuencia:

Teorema 4.3.30 (Representación de la cohomología $H^{m+n}(X, \Pi)$ en \mathbf{SCrs}_n). *Para cada conjunto simplicial \mathbf{X} y cada sistema de coeficientes locales Π para \mathbf{X} existe una biyección natural*

$$H^{m+n}(\mathbf{X}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_n \mathbf{X}_{\eta_{\mathbf{X}}}, K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathbf{X})}.$$

Y como corolario:

Corolario 4.3.31 (Representación de la cohomología singular $H_{sing}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi)$ en \mathbf{SCrs}_n). *Para cada complejo cruzado $\mathcal{C} \in \mathbf{Crs}$ y cada $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π , existe un isomorfismo natural*

$$H_{sing}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})}.$$

4.3.1 Morfismo de conexión

El objetivo de esta sección es establecer una aplicación natural entre la cohomología del cotriple y la cohomología singular de un n -complejo cruzado \mathcal{C} con coeficientes en un $\pi_1(\mathcal{C})$ -módulo Π , es decir

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \rightarrow H_{sing}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi).$$

Para ello usaremos las representaciones de la cohomología singular dada en la Sección 4.3.

De nuevo, al igual que hemos hecho a lo largo de este capítulo, teniendo en cuenta las particularidades de las categorías $\mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd}$ y $\mathbf{Crs}_2 = \mathbf{Xm}$ trataremos estos dos casos por separado.

Así, en primer lugar, usando la representación de la cohomología $H_{sing}^{m+1}(\mathcal{C}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{Gd} dada por el Corolario 4.3.4, vamos a dar una aplicación natural entre la cohomología del cotriple y la cohomología singular de un grupoide \mathcal{G} con coeficientes en un \mathcal{G} -módulo Π , es decir,

$$H_{1\mathbb{G}}^m(\mathcal{G}, \Pi) \rightarrow H_{sing}^{m+1}(\mathcal{G}, \Pi). \quad (4.48)$$

El teorema de representación de la cohomología del cotriple (Corolario 4.2.11) para $n = 1$ nos asegura

$$H_{1\mathbb{G}}^m(\mathcal{G}, \Pi) \cong [{}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Gpd}/\mathcal{G})}.$$

Nótese que

$$[{}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Gpd}/\mathcal{G})} = [{}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}},$$

pues los grupoides simpliciales ${}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G})$ y $K(\tilde{\Pi}_1, m)$ realmente son objetos en la coma categoría \mathbf{Gd}/\mathcal{G} .

Por otra parte, el teorema de representación de la cohomología singular en \mathbf{Gd} (Corolario 4.3.4) nos dice

$$H_{sing}^{m+1}(\mathcal{G}, \Pi) \cong [\mathcal{F}_1\text{Ner}(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}}.$$

El morfismo de conexión (4.48) será el morfismo inducido por un morfismo simplicial

$$\lambda : \mathcal{F}_1\text{Ner}(\mathcal{G}) \longrightarrow {}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G})$$

en \mathbf{Gd}/\mathcal{G} .

En la sección anterior introducimos el par de funtores adjuntos

$$\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}_1=G} \\ \xleftarrow{\tilde{W}_1=\text{Ner}} \end{array} \mathbf{Gd}/\mathcal{G}.$$

Además el funtor inclusión $\mathbf{Gpd} \hookrightarrow \mathbf{Gd}$ que lleva cada grupoide en el grupoide simplicial constante que determina tiene como adjunto izquierda, el funtor grupoide de componentes conexas

$$\pi_0 : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gpd}$$

(ver página 80). Esta última adjunción también se puede establecer entre las coma categorías correspondientes:

$$\mathbf{Gd}/\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Gpd}/\mathcal{G},$$

donde en el dominio de π_0 , \mathcal{G} denota al grupoide simplicial $K(\mathcal{G}, 0)$.

La composición de estas dos adjunciones entre coma categorías nos proporciona otro par adjunto:

$$\pi_0 \mathcal{F}_1 : \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G}) \rightleftarrows \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} : \text{Ner},$$

donde el adjunto derecha coincide con el funtor inducido en las coma categorías por el funtor nervio de un grupoide usual. La counidad de dicha adjunción nos da para cada grupoide \mathcal{G} un morfismo $\lambda : \pi_0 \mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$ y podemos considerar el diagrama de objetos simpliciales aumentados en la coma categoría \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}) \\ & & \downarrow \lambda \\ {}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{G} . \end{array}$$

Veamos que el morfismo λ puede ser levantado a un morfismo de grupoides simpliciales $\lambda : \mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}) \rightarrow {}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G})$, para ello será suficiente que el grupoide simplicial $\mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G})$ sea libre respecto del cotriple ${}^1\mathbb{G}$. Recordemos pues esta definición:

Un grupoide simplicial $\mathcal{F} \in \mathbf{Gd}$ se dice *libre* respecto del cotriple ${}^1\mathbb{G}$ si todos los grupoides \mathcal{F}_n son libres, con bases grafos dados

$$X_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} O ,$$

y estos grafos son estables bajo todas las degeneraciones, es decir, toda degeneración s_j , $0 \leq j \leq n$, lleva vértices de X_n en vértices de X_{n+1} .

Por construcción es claro que para cada conjunto simplicial \mathbf{X} el grupoide simplicial $\mathcal{F}_1(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X})$ es un grupoide simplicial libre para el cotriple ${}^1\mathbb{G}$ (ver también [29], página 382). En particular $\mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G})$ es un grupoide simplicial libre respecto del cotriple ${}^1\mathbb{G}$. Así λ puede ser levantado (de forma única salvo homotopía) a un morfismo de grupoides simpliciales $\lambda : \mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}) \rightarrow {}^1\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{G})$ el morfismo de conexión (4.48) es el morfismo inducido

$$H_{1\mathbb{G}}^m(\mathcal{G}, \Pi) \cong [{}^1\mathbb{G}(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \xrightarrow{\lambda^*} [\mathcal{F}_1 \text{Ner}(\mathcal{G}), K(\tilde{\Pi}_1, m)]_{\mathbf{Gd}/\mathcal{G}} \cong H_{\text{sing}}^{m+1}(\mathcal{G}, \Pi).$$

Para establecer el siguiente morfismo de conexión

$$H_{2\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \longrightarrow H_{\text{sing}}^{m+2}(\mathcal{C}, \Pi), \tag{4.49}$$

que daremos para cada módulo cruzado \mathcal{C} y cada sistema de coeficientes locales Π para \mathcal{C} , utilizaremos la representación de la cohomología singular de un módulo cruzado en la categoría \mathbf{Sxm} (dada en el Corolario 4.3.18),

$$H_{\text{sing}}^{m+2}(\mathcal{C}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})},$$

y también el teorema de representación de la cohomología del cotriple (Corolario 4.2.11)

$$H_{2\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \cong [{}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C}))}.$$

Nótese también que como los objetos simpliciales ${}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$ y $K(\tilde{\Pi}_2, m)$ realmente están en la coma categoría $\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})$ al igual que en el caso anterior

$$[{}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C}))} = [{}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})}.$$

El morfismo de conexión (4.49) será el morfismo inducido por un morfismo simplicial

$$\lambda : \mathfrak{F}_2\text{Ner}(\mathcal{C}) \longrightarrow {}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$$

en $\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})$.

En la Sección 4.3.18 estudiamos el par de funtores adjuntos

$$\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathcal{C})) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{F}_2 = \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1} \\ \xleftarrow{\text{Ner} = \overline{W}_1 \overline{W}_2} \end{array} \mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C}).$$

Además el functor inclusión $\mathbf{Xm} \hookrightarrow \mathbf{Sxm}$ que lleva cada módulo cruzado en el módulo cruzado simplicial constante que éste determina tiene como adjunto izquierda, el functor

$$\pi_0 : \mathbf{Sxm} \rightarrow \mathbf{Xm},$$

que lleva cada módulo cruzado simplicial al módulo cruzado de sus componentes conexas. Esta adjunción pasa a las coma categorías, de manera que tenemos una adjunción

$$\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C}),$$

donde en el dominio y el codominio de π_0 , $\pi_1(\mathcal{C})$ denota el módulo cruzado simplicial constante y el módulo cruzado asociado al grupoide $\pi_1(\mathcal{C})$, respectivamente.

La composición de estas dos adjunciones nos proporciona otro par adjunto:

$$\pi_0 \mathfrak{F}_2 : \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathcal{C})) \rightleftarrows \mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C}) : \text{Ner} = \overline{W}_1 \overline{W}_2,$$

donde el adjunto derecha coincide con el functor inducido en las coma categorías por el functor nervio de un módulo cruzado. La counidad de dicha adjunción nos proporciona para cada módulo cruzado \mathcal{C} un morfismo $\lambda : \pi_0 \mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ y podemos considerar el diagrama de módulos cruzados simpliciales aumentados

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \pi_0 \mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}) \\ & & \downarrow \lambda \\ {}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}. \end{array}$$

Para poder levantar λ a un morfismo de módulos cruzados simpliciales será suficiente que $\mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C})$ sea libre respecto del cotriple ${}^2\mathbb{G}$. De forma análoga a la definición de grupoide simplicial libre respecto del cotriple, diremos que un módulo cruzado simplicial $(\mathcal{G}, \Sigma) \in \mathbf{Sxm}$ es un *módulo cruzado simplicial libre* respecto del cotriple ${}^2\mathbb{G}$ si:

- Cada módulo cruzado $\Sigma_n = (\mathcal{G}, C_n, \delta_n)$ es libre sobre una flecha $X_n \rightarrow \mathcal{G} \in \mathbf{AGpd}$ (las bases) y
- todas esas bases son estables bajo los operadores degeneración, es decir, todas las degeneraciones $s_j, 0 \leq j \leq n$, inducen un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_j} & X_{n+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

Nuestro siguiente objetivo será probar que para cada grupoide simplicial \mathcal{G} libre respecto de ${}^1\mathbb{G}$ el módulo cruzado simplicial $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$ es libre respecto al cotriple ${}^2\mathbb{G}$.

Comenzamos recordando el siguiente resultado de grupos libres, cuya demostración puede encontrarse en [26, Corollary 4.7]

Lema 4.3.32. *Sea $f : F(Z) \rightarrow F(Y)$ un morfismo de grupos libres y supongamos que se tiene una aplicación $s : Y \rightarrow Z$ cuyo morfismo de grupos inducido $s : F(Y) \rightarrow F(Z)$ es una sección para f . Entonces $\ker(f)$ es un grupo libre sobre los elementos de la forma*

$$s(w) z s f(z)^{-1} s(w)^{-1},$$

con $z \in Z \setminus s(Y)$ y $w \in Y$.

Una traslación inmediata de este resultado al contexto de grupoides nos daría

Corolario 4.3.33. *Supongamos \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 grupoides libres sobre los grafos*

$$Z \overset{\curvearrowright}{\rightrightarrows} O \quad \text{y} \quad Y \overset{\curvearrowright}{\rightrightarrows} O,$$

respectivamente. Sea $F : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un funtor (que es la identidad en objetos) y que tiene una sección inducida por un morfismo de grafos S . Entonces el grupoide totalmente desconexo $\ker(F)$ es libre generado por los endomorfismos de la forma

$$S(w) z S F(z)^{-1} S(w)^{-1},$$

con $z \in Z \setminus S(Y)$ y $w \in Y$ flechas tales que la composición anterior tenga sentido.

Si suponemos entonces que \mathcal{G} es un grupoide simplicial libre respecto de ${}^1\mathbb{G}$, con \mathcal{G}_i el grupoide libre sobre el grafo $X_i \rightrightarrows O, i \geq 0$, el morfismo

$$d_1 d_2 \cdots d_{n+1} : \mathcal{G}_{n+1} \rightarrow \mathcal{G}_0$$

está en las condiciones del Corolario 4.3.33 (con S dada por la composición $s_0^{n+1} : X_0 \rightarrow X_{n+1}$) y por tanto el grupoide totalmente desconexo

$$\mathcal{K}_n = \ker(d_1 d_2 \cdots d_{n+1})$$

(ver construcción de $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$, página 229) es libre. Deducimos entonces que el pre-módulo cruzado

$$\delta = d_0 d_2 \cdots d_{n+1} : K_n \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}$$

es libre sobre el objeto $(Z_n, \delta, \mathcal{G}_0) \in \mathbf{AGpd}$ con Z_n el conjunto de endomorfismos de \mathcal{G}_{n+1} de la forma

$$z s_0^{n+1} d_1 d_2 \cdots d_{n+1} (z)^{-1}$$

con $z \in X_{n+1} \setminus s_0^{n+1}(X_0)$. A partir de aquí obtenemos que el módulo cruzado

$$\delta : \widetilde{K}_n \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{G}_0}$$

es libre (respecto al cotriple ${}^2\mathbb{G}$) sobre $(Z_n \setminus s_0(Z_{n-1}), \delta, \mathcal{G}_0) \in \mathbf{AGpd}$ y concluimos

Corolario 4.3.34. *Para cada grupoide simplicial \mathcal{G} libre respecto de ${}^1\mathbb{G}$, el módulo cruzado simplicial $\mathcal{F}_2(\mathcal{G})$ es libre respecto al cotriple ${}^2\mathbb{G}$. En particular, para cada conjunto simplicial \mathbf{X} , el módulo cruzado simplicial $\mathfrak{F}_2(\mathbf{X})$ es libre respecto al cotriple ${}^2\mathbb{G}$.*

Así λ puede ser levantado (de forma única salvo homotopía) a un morfismo de módulos cruzados simpliciales $\lambda : \mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow {}^2\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$. El morfismo de conexión (4.49) es el inducido por este morfismo simplicial

$$H_{2\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \cong [{}^2\mathbb{G}(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})} \xrightarrow{\lambda^*} [\mathfrak{F}_2 \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_2, m)]_{\mathbf{Sxm}/\pi_1(\mathcal{C})} \cong H_{\text{sing}}^{m+2}(\mathcal{C}, \Pi).$$

Supongamos por último $n \geq 2$, para cada n -complejo cruzado \mathcal{C} y cada sistema local de coeficientes Π vamos a dar un morfismo de conexión

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \rightarrow H_{\text{sing}}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi). \quad (4.50)$$

De nuevo usaremos la representación de la cohomología $H_{\text{sing}}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi)$ en la categoría \mathbf{SCrs}_n dada en el Corolario 4.3.31,

$$H_{\text{sing}}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi) \cong [\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})},$$

y el teorema de representación de la cohomología del cotriple (Corolario 4.2.11) que en este caso nos asegura

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \cong [{}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}))}.$$

Nótese que aquí también

$$[{}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{Simpl}(\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}))} = [{}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C}), K(\widetilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})}$$

pues los objetos simpliciales ${}^n\mathbb{G}_\bullet(\mathcal{C})$ y $K(\widetilde{\Pi}_n, m)$ realmente son objetos en la coma categoría $\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$.

Consideremos el par de funtores adjuntos

$$\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathcal{C})) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{F}_n = \mathcal{F}_n \cdots \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1} \\ \xleftarrow{\overline{W}_1 \cdots \overline{W}_n} \end{array} \mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$$

y el functor inclusión $\mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{SCrs}_n$ que lleva cada n -complejo cruzado en el n -complejo cruzado simplicial constante que determina y tiene como adjunto izquierda al functor

$$\pi_0 : \mathbf{SCrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_n$$

que lleva cada n -complejo cruzado en el n -complejo cruzado de componentes conexas. Esta última adjunción también se puede establecer entre las coma categorías:

$$\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_0} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}) ,$$

donde en el dominio y codominio de π_0 , $\pi_1(\mathcal{C})$ denota el n -complejo cruzado simplicial constante y el n -complejo cruzado asociado al grupoide $\pi_1(\mathcal{C})$, respectivamente.

La composición de estas dos adjunciones nos proporciona otro par adjunto:

$$\pi_0 \mathfrak{F}_n : \mathbf{SSet}/\text{Ner}(\pi_1(\mathcal{C})) \rightleftarrows \mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C}) : \text{Ner} = \overline{W}_1 \cdots \overline{W}_n ,$$

donde el adjunto derecha coincide con el functor inducido en la coma categoría por el functor nervio de un n -complejo cruzado. La counidad de dicha adjunción nos da para cada n -complejo cruzado \mathcal{C} un morfismo $\lambda : \pi_0 \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ y podemos considerar el diagrama de objetos simpliciales aumentados en $\mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \pi_0 \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) \\ & & \downarrow \lambda \\ {}^n \mathbb{G}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C} . \end{array}$$

Para que λ pueda ser levantada a un morfismo de n -complejo cruzados simpliciales $\lambda : \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow {}^n \mathbb{G}(\mathcal{C})$ será suficiente que $\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{G})$ sea libre respecto del cotriple ${}^n \mathbb{G}$. No es difícil probar, siguiendo un procedimiento análogo al del caso $n = 2$, que si $\mathbf{C}_\bullet \in \mathbf{SCrs}_{n-1}$ es libre para el cotriple ${}^{n-1} \mathbb{G}$ entonces $\mathcal{F}_n(\mathbf{C}_\bullet)$ es libre respecto al cotriple ${}^n \mathbb{G}$. Inductivamente, tendremos entonces que $\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{G})$ es libre y por tanto que el morfismo λ puede ser levantado (de forma única salvo homotopía) a un morfismo de n -complejo cruzados simpliciales $\lambda : \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow {}^n \mathbb{G}(\mathcal{C})$ y el morfismo de conexión (4.50) es el inducido por éste

$$H_{n\mathbb{G}}^m(\mathcal{C}, \Pi) \cong [{}^n \mathbb{G}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})} \xrightarrow{\lambda^*} [\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\mathbf{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})} \cong H_{sing}^{m+n}(\mathcal{C}, \Pi).$$

4.4 Cohomologías en \mathbf{Gd}

4.4.1 Cohomología singular en \mathbf{Gd}_{n+1}

Un sistema de coeficientes locales Π para un $(n + 1)$ -grupoide simplicial \mathcal{G} será por definición un $P_1(\mathcal{G})$ -módulo, esto es, un funtor $\Pi : P_1(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{Ab}$. Puesto que $P_1(\mathcal{G}) = \pi_0(\mathcal{G}) = \pi_1(\mathbf{B}(\mathcal{G}))$ un sistema de coeficientes locales para \mathcal{G} es precisamente un sistema de coeficientes locales para su espacio clasificador $\mathbf{B}(\mathcal{G})$.

La cohomología singular de \mathcal{G} con coeficientes en Π se define como la cohomología singular del espacio clasificador de \mathcal{G} , $\mathbf{B}(\mathcal{G})$ (ver página 85), con coeficientes en Π ,

$$H_{\text{sing}}^m(\mathcal{G}, \Pi) := H^m(\mathbf{B}(\mathcal{G}), \Pi).$$

4.4.2 2-torsores con coeficientes locales sobre $(n + 1)$ -grupoides simpliciales. La cohomología algebraica en \mathbf{Gd}_{n+1}

En esta sección vamos a considerar una 2-cohomología algebraica en las categorías \mathbf{Gd}_{n+1} de $(n + 1)$ -grupoides simpliciales. Esta cohomología estará definida en términos de 2-torsores y los coeficientes para ella serán sistemas de coeficientes locales.

Sea \mathcal{G} un $(n + 1)$ -grupoide simplicial y Π un sistema de coeficientes locales para \mathcal{G} . Un 2-torsor sobre \mathcal{G} con coeficientes en Π será un 2-torsor en la coma categoría $\mathbf{Gd}_{n+1}/P_1(\mathcal{G})$ sobre el morfismo $\delta_{\mathcal{G}}^{(1)} : \mathcal{G} \rightarrow P_1(\mathcal{G})$ con coeficientes en un objeto grupo en $\mathbf{Gd}_{n+1}/P_1(\mathcal{G})$ que precisamos a continuación.

Si $n = 0$ y \mathcal{G} es un grupoide, el funtor $\delta_{\mathcal{G}}^{(1)}$ es la identidad. Por tanto, un coeficiente local para \mathcal{G} es precisamente un \mathcal{G} -módulo, el objeto grupo abeliano en \mathbf{Gpd}/\mathcal{G} asociado a éste será

$$\tilde{\Pi}_1 : \mathcal{G} \int \Pi \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{G},$$

ver ejemplo 2.4.8

Para $n > 1$, en el ejemplo 2.4.8 también construimos, para cada \mathcal{G} -módulo Π , un objeto grupo abeliano en $\mathbf{Gd}_{n+1}/\mathcal{G}$ que representamos

$$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow \mathcal{G},$$

hemos identificado aquí \mathcal{G} con $K(\mathcal{G}, 0)$. En particular, tomando $\mathcal{G} = P_1(\mathcal{G})$, cada sistema de coeficientes para \mathcal{G} determina el objeto grupo abeliano

$$\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow P_1(\mathcal{G}) \tag{4.51}$$

en $\mathbf{Gd}_{n+1}/P_1(\mathcal{G})$.

Los 2-torsores sobre un grupoide con coeficientes locales fueron ya estudiados al principio de la Sección 4.2.3, vimos es dicha sección que en la clase de cualquier 2-torsor sobre \mathcal{G} con coeficientes locales en Π existe uno en el que el grupoide fibra es un 2-grupoide.

Vamos ahora a hacer un estudio análogo para $(n + 1)$ -grupoide simpliciales con $n > 1$. Por un 2-torsor sobre un $(n + 1)$ -grupoide simplicial \mathcal{G} con coeficientes locales en Π entenderemos un 2-torsor en $\mathbf{Gd}_{n+1}/P_1(\mathcal{G})$ de $\delta_{\mathcal{G}}^{(1)} : \mathcal{G} \rightarrow P_1(\mathcal{G})$ con coeficientes en $\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\Pi, n) \rightarrow P_1(\mathcal{G})$. Denotaremos $Tor^2(\mathcal{G}, \Pi)$ a la correspondiente categoría de torsores sustituyendo paréntesis por corchetes para indicar componentes conexas.

Un 2-torsor en $Tor^2(\mathcal{G}, \Pi)$ consistirá por tanto en un par (\mathfrak{T}, α) con \mathfrak{T} un grupoide interno en \mathbf{Gd}_{n+1} y $\alpha : \text{End}(\mathfrak{T}) \rightarrow \kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\Pi, n)$ un morfismo en \mathbf{Gd}_{n+1} haciendo que el cuadrado en el siguiente diagrama sea un pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{End}(\mathfrak{T}) & \xrightarrow{\alpha} & \kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\Pi, n) & & (4.52) \\
 \downarrow S=T & & \downarrow & & \\
 \mathfrak{T} : \mathcal{T}^1 \times_{\mathcal{T}^0} \mathcal{T}^1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{T}^1 & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{G}}^{(1)}} & \mathcal{G} \longrightarrow P_1(\mathcal{G}), \\
 & & \begin{array}{c} \curvearrowright Id \\ \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & & \\
 & & \mathcal{T}^0 & &
 \end{array}$$

y satisfaciendo las condiciones (4.15) y (4.16) en la definición de 2-torsor. Si nos quedamos con la $(n - 1)$ -truncación del diagrama anterior obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 T_{n-1}(\text{End}(\mathfrak{T})) & \xrightarrow{T_{n-1}(\alpha)} & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow S=T & & \parallel \\
 T_{n-1}(\mathfrak{T}) : T_{n-1}(\mathcal{T}^1) & \xrightarrow{\quad} & T_{n-1}(\mathcal{G}) \xrightarrow{T_{n-1}(\delta_{\mathcal{G}}^{(1)})} P_1(\mathcal{G}), \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright Id \\ \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} & &
 \end{array}$$

en el que el cuadrado sigue siendo un pullback y por tanto el morfismo

$$\text{End}(T_{n-1}(\mathfrak{T})) = T_{n-1}(\text{End}(\mathfrak{T})) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{T}_0)$$

es una identidad. Deducimos entonces que $T_{n-1}(\mathfrak{T})$ es el grupoide asociado a una relación de equivalencia, concretamente a la relación de equivalencia asociada al par núcleo del morfismo $T_{n-1}(\mathcal{T}_0) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{G})$. A diferencia de lo que ocurre en el caso de complejos cruzados, no podemos ahora asegurar que en la clase de cualquier 2-torsor sobre \mathcal{G} exista uno (\mathfrak{T}, α) en el que el morfismo $\mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{G}$ tenga $(n - 1)$ -truncación la identidad.

Si desarrollamos ahora el diagrama (4.52) hasta dimensión n obtenemos el

siguiente diagrama en **Gpd**:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{End}(\mathbf{T}) & \xrightarrow{\alpha_n} & P_1(\mathcal{G}) \int \Pi & (4.53) \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathcal{T}_n^1 & \xleftarrow{Id_n} & \mathcal{T}_n^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_n & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow S_n & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_n^0 & \xrightarrow{T_n} & \mathcal{T}_n^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_n & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow Id_{n-1} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_{n-1}^0 \times \mathcal{G}_{n-1} & \xleftarrow{S_{n-1}} & \mathcal{T}_{n-1}^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_{n-1} & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow T_{n-1} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathcal{T}_1^0 & \xleftarrow{Id_1} & \mathcal{T}_1^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_1 & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow S_1 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_1^0 & \xrightarrow{T_1} & \mathcal{T}_1^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_1 & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow Id_0 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_0^0 \times \mathcal{G}_0 & \xleftarrow{S_0} & \mathcal{T}_0^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_0 & \rightarrow & P_1(\mathcal{G}) \\
 \downarrow & \swarrow T_0 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_0^0 & \xrightarrow{T_0} & \mathcal{T}_0^0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_0 & \rightarrow & P_1(\mathcal{G})
 \end{array}$$

donde $\text{End}(\mathbf{T}) \rightarrow \mathcal{T}_n^0$ es el grupo (sobre \mathcal{T}_n^0) de endomorfismos del grupoide (interno en grupoide)

$$\mathbf{T} : \mathcal{T}_n^1 \xleftarrow{Id_n} \mathcal{T}_n^0 \xrightarrow{T_n} \mathcal{T}_n^0$$

Notemos que las truncaciones representadas en el diagrama (4.53) tienen estructuras de n -hipergrupoide y que el funtor composición de \mathbf{T} respeta la estructura de n -hipergrupoide de \mathcal{T}^1 .

Puesto que \mathcal{G} es el $(n + 1)$ -grupoide simplicial de componentes conexas de \mathfrak{X} , la proyección $\mathcal{T}^0 \rightarrow \mathcal{G}$ es sobreyectiva en objetos. Podemos por tanto elegir una sección a nivel de objetos de esta proyección, utilizando ahora el Lema 2.4.2, podemos obtener un $(n + 1)$ -grupoide simplicial \mathcal{T}' con los mismos objetos que \mathcal{G} junto con un morfismo $s : \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}^0$ que a nivel de objetos sea la sección elegida anteriormente. Aplicando entonces la Proposición 4.2.4 concluimos que en la clase de cualquier 2-torsor sobre \mathcal{G} existe uno en el que todos los funtores que aparecen en el correspondiente diagrama (4.53) son la identidad en objetos. Denotaremos por $\mathbf{T}^2(\mathcal{G}, \Pi)$ a la subcategoría plena de $\text{Tor}^2(\mathcal{G}, \Pi)$ con objetos aquellos 2-torsosres que tienen la propiedad anterior (esto es, aquellos 2-torsosres (\mathfrak{X}, α) en los que todos los funtores cara y degeneración del grupoide fibra \mathfrak{X} son la identidad en objetos). Nótese que por el comentario anterior tenemos una igualdad entre los conjuntos

de componentes conexas

$$\text{Tor}^2[\mathcal{G}, \Pi] = \mathbf{T}^2[\mathcal{G}, \Pi].$$

A partir de ahora los 2-torsores con los que trabajemos estarán en $\mathbf{T}^2(\mathcal{G}, \Pi)$. Si nos fijamos ahora en el plano superior del diagrama (4.53)

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{End}(\mathbf{T}) & \xrightarrow{\alpha} & P_1(\mathcal{G}) \int \Pi & (4.54) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T} : \mathcal{T}_n^1 & \xleftarrow{Id} & \mathcal{T}_n^0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_n & \longrightarrow & P_1(\mathcal{G}), \\ & \xrightarrow[S]{T} & & & & & \end{array}$$

observamos que este representa un 2-torsor de $\mathcal{G}_n \rightarrow P_1(\mathcal{G})$ con coeficientes en $P_1(\mathcal{G}) \int \Pi \rightarrow P_1(\mathcal{G})$ en la coma categoría $\mathbf{Gpd}/P_1(\mathcal{G})$, cuyo grupoide fibra \mathbf{T} es un 2-grupoide (todos los funtores en el diagrama (4.54) son la identidad en objetos).

Si para cada objeto x de cualquiera de los grupoides \mathcal{T}_n^1 , \mathcal{T}_n^0 , \mathcal{G}_n o $P_1(\mathcal{G})$ en el diagrama (4.54) denotamos por $\text{End}_{\mathbf{T}}(x)$ al grupo de endomorfismos de la identidad $Id_x \in \mathcal{T}_n^0$ en el grupoide \mathbf{T} , esto es, las deformaciones de la identidad en x en el 2-grupoide \mathbf{T} , entonces la asociación:

$$x \mapsto \text{End}_{\mathbf{T}}(x)$$

nos define un funtor

$$\text{End}_{\mathbf{T}} : \mathcal{T}_n^0 \rightarrow \mathbf{Gp},$$

donde las flechas de \mathcal{T}_n^1 actúan por conjugación. Tenemos entonces una fibración escindida de grupoides

$$\text{End}(\mathbf{T}) \begin{array}{c} \xleftarrow{Id} \\ \xrightarrow[S=T} \end{array} \mathcal{T}_n^0,$$

aplicando entonces la Proposición 1.5.7 se tiene:

$$\text{End}(\mathbf{T}) \cong \mathcal{T}_n^0 \int \text{End}_{\mathbf{T}}.$$

Por lo que dar un funtor $\alpha : \text{End}(\mathbf{T}) \rightarrow P_1(\mathcal{G}) \int \Pi$ haciendo pullback el cuadrado del diagrama (4.54) es equivalente a dar una equivalencia natural

$$\alpha : \text{End}_{\mathbf{T}} \rightarrow \Pi \circ q_n : \mathcal{T}_n^0 \rightarrow \mathbf{Gp}, \quad (4.55)$$

donde q_n es el morfismo composición $q_n : \mathcal{T}_n^0 \rightarrow \mathcal{G}_n \rightarrow P_1(\mathcal{G})$.

Identificamos entonces los 2-torsor en $\mathbf{T}^2(\mathcal{G}, \Pi)$ con pares (\mathfrak{T}, α) tales que:

- \mathfrak{T} es un grupoide interno en \mathbf{Gd}_{n+1} ,
- el $(n + 1)$ -grupoide simplicial de componentes conexas de \mathfrak{T} es \mathcal{G} ,

- los funtores cara y degeneración de \mathfrak{T} son la identidad en objetos,
- la truncación $T_{n-1}(\mathfrak{T})$ es el grupoide asociado al par núcleo del morfismo $T_{n-1}(\text{obj}(\mathfrak{T})) \rightarrow T_{n-1}(\mathcal{G})$,
- $\alpha : \text{End}_{\mathbf{T}} \rightarrow \Pi \circ q_n : \mathcal{T}_n^0 \rightarrow \mathbf{Gp}$ es una equivalencia natural.

Denotaremos

$$H_{alg}^2(\mathcal{G}, \Pi) = \text{Tor}^2[\mathcal{G}, \Pi] = \mathbf{T}^2[\mathcal{G}, \Pi].$$

Capítulo 5

Los invariantes de Postnikov

Volvamos a situarnos en el contexto general que planteamos en la introducción, esto es, supongamos que tenemos una categoría \mathbb{T} de espacios y una categoría \mathbb{S} de modelos algebraicos para los espacios de \mathbb{T} , relacionadas por un par de funtores $\mathbf{\Pi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$, $\mathbf{B} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}$ en las condiciones apropiadas para el desarrollo de nuestra teoría. Llevando más lejos el proceso por el que la torre de Postnikov de un espacio $X \in \mathbb{T}$ se ha obtenido a partir de la torre de Postnikov de su modelo algebraico $\mathbf{\Pi}(X)$, el objetivo de este capítulo es obtener los invariantes de Postnikov de un espacio $X \in \mathbb{T}$ a partir de invariantes de Postnikov de $\mathbf{\Pi}(X)$. Al igual que hemos construido, lo que podríamos llamar, una *torre algebraica de Postnikov* para objetos de \mathbb{S} (para los casos $\mathbb{S} = \mathbf{Gd}$ y $\mathbb{S} = \mathbf{Crs}$) vamos a desarrollar, lo que podríamos llamar, una *teoría algebraica de invariantes de Postnikov*.

El esquema que seguiremos será el siguiente:

Para cada objeto $\mathcal{C} \in \mathbb{S}$ construiremos unos invariantes que llamaremos *algebraicos* $k_{n+1} = k_{n+1}(\mathcal{C})$; estos invariantes serán elementos de una 2-cohomología algebraica definida en la categoría \mathbb{S}_n de n -tipos. Haremos entonces efectiva la regla tácita mencionada en la introducción, obteniendo a partir de estos invariantes algebraicos otros $\mathbf{k}_{n+1} = \mathbf{k}_{n+1}(\mathcal{C})$, que vivirán en un grupo de cohomología singular de dimensión $n + 2$.

5.1 Los invariantes de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado

Sea X un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado, entonces el morfismo de conexión entre X y $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$ obtenido vía la counidad y la unidad de las adjunciones $|| \dashv S$ y $\pi \dashv \text{Ner}$, ver Sección 3.5,

$$X \sim \mathbf{B}\mathbf{\Pi}(X)$$

es una equivalencia homotópica débil. Los invariantes de Postnikov de X se obtendrán a partir de los invariantes de Postnikov de su complejo cruzado fundamental $\mathbf{\Pi}(X)$.

Veamos entonces como obtener los invariantes de Postnikov de un complejo cruzado.

Distinguiamos dos tipos de invariantes de Postnikov de un complejo cruzado \mathcal{C} :

- Los invariantes “*algebraicos*” que serán elementos de una cohomología algebraica, concretamente, de la cohomología del cotriple ${}^n\mathbb{G}$ en las categorías \mathbf{Crs}_n . Estos invariantes están totalmente determinados por las fibriciones $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} : P_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow P_n(\mathcal{C})$.
- Los invariantes “*topológicos*”. Éstos serán elementos de una cohomología singular y se obtendrán, a partir de los invariantes algebraicos, mediante los morfismos de conexión (construidos en la Sección 4.3.1) que nos conectaban la cohomología de los cotriples ${}^n\mathbb{G}$ con la cohomología singular.

5.1.1 Los invariantes de Postnikov algebraicos

Como hemos hecho a lo largo de toda esta memoria, destacaremos también aquí los dos primeros casos y trataremos de forma general el resto.

El primer invariante:

Sea \mathcal{C} un complejo cruzado, su primer invariante algebraico k_1 será un elemento en una cohomología algebraica definida en la categoría de 0-tipos, $\mathbf{Crs}_0 \equiv \mathbf{Set}$, y estará totalmente determinado por la primera fibrición $(\eta_1)_{\mathcal{C}}$ en la torre de Postnikov de \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccc}
 P_1(\mathcal{C}) : & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_1(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\pi_1(\mathcal{C})} \\
 \downarrow (\eta_1)_{\mathcal{C}} & & & \downarrow (q_0,0) & & \downarrow (q_0,0) \\
 P_0(\mathcal{C}) : & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{0}_{\pi_0(\mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\pi_0(\mathcal{C})} .
 \end{array}$$

Hemos identificado esta fibrición con el funtor

$$(\eta_1)_{\mathcal{C}} \equiv q_0 : \pi_1(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$$

desde el grupoide fundamental $\pi_1(\mathcal{C})$ en el grupoide discreto sobre el conjunto $\pi_0(\mathcal{C})$ (de sus componentes conexas).

La cohomología algebraica que vamos a usar es la cohomología del topos \mathbf{Set} . Esta categoría tiene muy poca estructura y su cohomología es muy simple, de hecho la cohomología en \mathbf{Set} es trivial en dimensiones ≥ 1 . Por lo tanto, el primer invariante de Postnikov del complejo cruzado \mathcal{C} es trivial y no sería necesario aplicar todo nuestro desarrollo para su obtención. Sin embargo, pensamos que

es interesante ver cómo se obtiene este primer invariante k_1 pues el método que usamos se puede aplicar a otras categorías de modelos algebraicos para las cuales el primer invariante podría no ser trivial, como por ejemplo categorías algebraicas que modelen G -espacios.

El primer invariante k_1 de \mathcal{C} debe ser un elemento en el segundo grupo de cohomología del conjunto

$$P_0(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0\pi_1(\mathcal{C}) = \pi_0P_1(\mathcal{C}),$$

donde $\mathcal{G} = \text{base}(\mathcal{C})$. En general, dado un objeto X en un topos \mathcal{E} , la cohomología de X se define como la cohomología de Id_X en el topos \mathcal{E}/X , así los coeficientes para esta cohomología han de ser objetos grupos en esta coma categoría. En particular, los coeficientes para la cohomología del conjunto $P_0(\mathcal{C})$ tienen que ser objetos grupo en $\mathbf{Set}/P_0(\mathcal{C})$, que se identifican con los $P_0(\mathcal{C})$ -grupos (viendo a $P_0(\mathcal{C})$ como un grupoide discreto).

Eligiendo entonces un representante $s\bar{x} \in \pi_1(\mathcal{C})$ en cada componente conexa $\bar{x} \in P_0(\mathcal{C})$ de $\pi_1(\mathcal{C})$, obtenemos un objeto grupo (no necesariamente abeliano)

$$\tilde{\pi}_1(\mathcal{C}) = \coprod_{\bar{x} \in P_0(\mathcal{C})} \text{End}_{\pi_1(\mathcal{C})}(s\bar{x}) \rightarrow P_0(\mathcal{C})$$

en la coma categoría $\mathbf{Set}/P_0(\mathcal{C})$, nótese que esta elección hace que la construcción de este grupo sobre $P_0(\mathcal{C})$ no sea funtorial. Notamos también que para cada elemento $\bar{x} \in P_0(\mathcal{C})$, la fibra del objeto grupo anterior en \bar{x} es $\text{End}_{\pi_1(\mathcal{C})}(s\bar{x})$ y por tanto $\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})$, como $P_0(\mathcal{C})$ -grupo, asocia a cada \bar{x} en $P_0(\mathcal{C})$ el grupo

$$\text{End}_{\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})}(s\bar{x}) = \text{End}_{\pi_1(\mathcal{C})}(s\bar{x}).$$

El primer invariante de \mathcal{C} será entonces un elemento

$$k_1 \in H^2(P_0(\mathcal{C}), \tilde{\pi}_1(\mathcal{C}))$$

del segundo conjunto de cohomología de $P_0(\mathcal{C})$ en \mathbf{Set} , con coeficientes en el objeto grupo $\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})$. Esta cohomología (no abeliana) se define (o interpreta) en términos de 2-torsores. En general, si \mathcal{E} es un topos, $X \in \mathcal{E}$ es un objeto y $G \rightarrow X$ es un objeto grupo en \mathcal{E}/X , el segundo conjunto de cohomología $H^2(X, G)$ se define (o interpreta) como

$$H^2(X, G) = \text{Tor}^2[X, G],$$

(ver [49]).

El primer invariante k_1 de \mathcal{C} será entonces la componente conexa de un 2-torsor en $\text{Tor}^2(P_0(\mathcal{C}), \tilde{\pi}_1(\mathcal{C}))$. La obtención de este 2-torsor dependerá de nuevo de una elección.

El grupoide fibra de este 2-torsor es justo el grupoide fundamental $P_1(\mathcal{C}) = \pi_1(\mathcal{C})$, cuyo conjunto de componentes conexas es $P_0(\mathcal{C})$ con $(\eta_1)_{\mathcal{C}}$ la proyección canónica. La aplicación cociclo α ,

$$\begin{array}{ccc} \text{End}(P_1(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{\pi}_1(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1(\mathcal{C}) & \xrightarrow{(\eta_1)_{\mathcal{C}}} & P_0(\mathcal{C}) \end{array}$$

se obtiene eligiendo para cada objeto y en la componente conexa \bar{x} una flecha $s\bar{x} \rightarrow y$ que determina (vía conjugación) un isomorfismo

$$\alpha_y : \text{End}_{\pi_1(\mathcal{C})}(y) \longrightarrow \text{End}_{\pi_1(\mathcal{C})}(s\bar{x}) = \text{End}_{\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})}(s\bar{x}).$$

Es fácil comprobar que el par $(\pi_1(\mathcal{C}), \alpha)$ determina un torsor en $\text{Tor}^2(P_0(\mathcal{C}), \tilde{\pi}_1(\mathcal{C}))$ cuya componente conexa (la única que hay) nos dará el invariante k_1 . Nótese que el cociclo α no se obtiene de forma funtorial pues depende de una elección, pero claramente cada dos elecciones determinan torsores en la misma componente conexa (ya que sólo hay una componente conexa).

El segundo invariante:

El segundo invariante de un complejo cruzado \mathcal{C} , en realidad el primero no trivial, será un elemento

$$k_2 \in H_{1\mathbb{G}}^2(P_1(\mathcal{C}), \pi_2(\mathcal{C})),$$

de la cohomología del cotriple $1\mathbb{G}$ en la categoría $\mathbf{Crs}_1 = \mathbf{Gpd}$ de grupoides. Hemos interpretado esta cohomología en términos de extensiones, de manera que tenemos un isomorfismo

$$H_{1\mathbb{G}}^2(P_1(\mathcal{C}), \pi_2(\mathcal{C})) \cong \text{Ext}^2[P_1(\mathcal{C}), \pi_2(\mathcal{C})],$$

(ver 4.29). Por tanto, obtendremos el invariante k_2 como la clase de componentes conexas de una 2-extensión de $P_1(\mathcal{C})$ por $\pi_2(\mathcal{C})$, extensión que básicamente vendrá dada por la segunda fibración en la torre de Postnikov de \mathcal{C} , $(\eta_2)_{\mathcal{C}} : P_2(\mathcal{C}) \rightarrow P_1(\mathcal{C})$.

Más concretamente, el módulo cruzado $P_2(\mathcal{C})$ tiene a $P_1(\mathcal{C}) = \pi_1(\mathcal{C})$ como grupoide de componentes conexas, esto es, $\pi_1 P_2(\mathcal{C}) \cong \pi_1(\mathcal{C})$ (ver Proposición 3.3.2) siendo el morfismo proyección precisamente $(\eta_2)_{\mathcal{C}}$. Además la componente en \mathcal{C} de la unidad $\delta^{(2)}$ de la adjunción $\tilde{P}_2 \dashv i_2$ induce un isomorfismo natural

$$\delta_{\mathcal{C}}^{(2)} : \pi_2(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \pi_2 P_2(\mathcal{C})$$

(ver también Proposición 3.3.2). Por tanto el par

$$(P_2(\mathcal{C}), (\delta_{\mathcal{C}}^{(2)})^{-1})$$

determina una extensión en $Ext^2(P_1(\mathcal{G}), \pi_2(\mathcal{G}))$ cuya clase de componentes conexas representará el invariante k_2 de \mathcal{C} .

El $(n + 1)$ -ésimo invariante, $n \geq 2$:

En general, el $(n + 1)$ -ésimo invariante algebraico, k_{n+1} , de un complejo cruzado \mathcal{C} será un elemento

$$k_{n+1} \in H_{n\mathbb{G}}^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$$

de la cohomología del cotriple ${}^n\mathbb{G}$ en la categoría \mathbf{Crs}_n de n -complejos cruzados. Utilizaremos la interpretación de esta cohomología en términos de 2-extensiones

$$H_{n\mathbb{G}}^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C})) \cong Ext^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C})),$$

que dimos en el Teorema 4.2.19, de manera que obtendremos k_{n+1} como la clase de cohomología representada por una 2-extensión de $P_n(\mathcal{C})$ por $\pi_{n+1}(\mathcal{C})$ que estará totalmente determinada por la fibración $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}} : P_{n+1}(\mathcal{C}) \rightarrow P_n(\mathcal{C})$.

Más concretamente, el $(n + 1)$ -complejo cruzado $P_{n+1}(\mathcal{C})$ satisface $P_n P_{n+1}(\mathcal{C}) = P_n(\mathcal{C})$ (ver Proposición 3.3.1) siendo $(\eta_{n+1})_{\mathcal{C}}$ la proyección canónica. Además la componente en \mathcal{C} de la unidad $\delta^{(n+1)}$ de la adjunción $\tilde{P}_{n+1} \dashv i_{n+1}$ induce un isomorfismo natural

$$\delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)} : \pi_{n+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n+1} P_{n+1}(\mathcal{C}),$$

ver Proposición 3.3.2. Por tanto el par

$$(P_{n+1}(\mathcal{C}), (\delta_{\mathcal{C}}^{(n+1)})^{-1})$$

determina una extensión en $Ext^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$ cuya clase de componentes conexas representará el invariante k_{n+1} de \mathcal{C} .

5.1.2 Los invariantes de Postnikov topológicos

El $(n + 1)$ -ésimo *invariante de Postnikov topológico*

$$k_{n+1} \in H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$$

de un complejo cruzado \mathcal{C} se obtiene como la imagen por el morfismo de conexión (4.50)

$$H_{n\mathbb{G}}^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C})) \longrightarrow H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$$

del invariante algebraico k_{n+1} .

Nota 5.1.1. *Es claro que cada invariante algebraico $k_{n+1} \in H_{n\mathbb{G}}^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$ nos permite reconstruir el siguiente piso en la torre de Postnikov de \mathcal{C} . Bastaría*

con representar dicho elemento por una extensión, ésta nos determina un $(n+1)$ -complejo cruzado y una fibración a $P_n(\mathcal{C})$ cuya fibra, en cada objeto $x \in \pi_1(\mathcal{C})$, tiene el tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}(\mathcal{C})(x), n+1)$.

Sin embargo es un problema aún abierto para nosotros cómo reconstruir a partir del invariante topológico $\mathbf{k}_{n+1} \in H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$ el siguiente piso en la torre de Postnikov de \mathcal{C} . Nuestra conjetura es que el morfismo de conexión $H_{\mathbb{G}}^2(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C})) \rightarrow H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{C}), \pi_{n+1}(\mathcal{C}))$ es un isomorfismo. Pensamos que los morfismos $\lambda : \pi_0 \mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ son equivalencias homotópicas débiles y que a partir de esto se puede deducir que los morfismos inducidos

$$[{}^n\mathbb{G}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\text{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})} \xrightarrow{\lambda^*} [\mathfrak{F}_n \text{Ner}(\mathcal{C}), K(\tilde{\Pi}_n, m)]_{\text{SCrs}_n/\pi_1(\mathcal{C})}$$

son isomorfismos. Una vez probado ésto, estaría claro cómo reconstruir el siguiente piso en la torre de Postnikov de \mathcal{C} a partir de los invariantes topológicos de \mathcal{C} .

Los invariantes de Postnikov de un espacio con el tipo de homotopía de un complejo cruzado

Si X es un espacio tal que el morfismo de conexión entre X y $\mathbf{B}\Pi(X)$

$$X \sim \mathbf{B}\Pi(X)$$

es una equivalencia homotópica débil. Los *invariantes de Postnikov algebraicos* de X se definen como los invariantes algebraicos de su complejo cruzado fundamental $\Pi(X)$, serán por tanto elementos

$$k_{n+1} \in H_{\mathbb{G}}^2(P_n \Pi(X), \pi_{n+1}(X)).$$

Los *invariantes de Postnikov topológicos* de X se definen como los invariantes topológicos de su complejo cruzado fundamental $\Pi(X)$, serán por tanto elementos

$$\mathbf{k}_{n+1} \in H_{sing}^{n+2}(P_n \Pi(X), \pi_{n+1}(X)) = H^{n+2}(\mathbf{B}P_n \Pi(X), \pi_{n+1}(X)).$$

5.2 Los invariantes de Postnikov de cualquier espacio

Si X es cualquier espacio, un modelo algebraico para X es su grupoide simplicial fundamental $\Pi(X)$, de manera que cualquier invariante homotópico de X se puede obtener a partir de $\Pi(X)$. En la Sección 2.7 obtuvimos por ejemplo la torre de Postnikov de X a partir de la de $\Pi(X)$, en esta sección obtendremos los invariantes de Postnikov de X a partir de los de $\Pi(X)$.

Este problema no está totalmente cerrado pues sólo hemos obtenido invariantes algebraicos que viven en un grupo de 2-cohomología algebraica. Dejamos como problema abierto obtener los invariantes topológicos.

5.2.1 Los invariantes de Postnikov algebraicos de un grupoide simplicial

Dado un grupoide simplicial \mathcal{G} , vamos a asociar a cada fibración

$$(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : P_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$$

en su torre de Postnikov, ver diagrama (2.19), un 2-torsor en

$$Tor^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})),$$

cuya clase de componentes conexas determinará un elemento

$$k_{n+1} \in H_{alg}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})),$$

que será el $(n + 1)$ -invariante de Postnikov algebraico de \mathcal{G} .

Comenzamos considerando el funtor

$$TDec : \mathbf{SimplGpd} \longrightarrow \mathbf{SSimplGpd},$$

es claro que si aplicamos el funtor anterior a un grupoide simplicial (i.e. a un objeto de \mathbf{Gd}) obtenemos un objeto en \mathbf{SGd} , por tanto el funtor anterior induce, por restricción, otro

$$TDec : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{SGd}.$$

Recordar que \mathbf{Gd} y \mathbf{SGd} se identifican con las subcategorías plenas de $\mathbf{SimplGpd}$ y $\mathbf{SSimplGpd}$, respectivamente, con objetos los grupoides simpliciales y los grupoides simpliciales dobles con operadores cara y degeneración que son la identidad en objetos.

Sea \mathcal{G} un grupoide simplicial en \mathbf{Gd} , consideremos $TDec(\mathcal{G})$ como un objeto simplicial en \mathbf{Gd} aumentado sobre \mathcal{G} . Éste tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 TDec(\mathcal{G}) : \dots & & \text{Dec}^3(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} & \text{Dec}^2(\mathcal{G}) & \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} & \text{Dec}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G} & (5.1) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 \dots & & \mathcal{G}_5 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \end{array} & \mathcal{G}_4 & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} & \mathcal{G}_3 & \xrightarrow{d_3} \mathcal{G}_2 \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow \\
 \dots & & \mathcal{G}_4 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \end{array} & \mathcal{G}_3 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_3} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_2} \mathcal{G}_1 \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow \\
 \dots & & \mathcal{G}_3 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \\ \rightleftarrows \end{array} & \mathcal{G}_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}_0
 \end{array}$$

donde todos los funtores que aparecen en el diagrama (5.1) son la identidad en objetos y por tanto no sólo las columnas sino también las filas representan objetos de \mathbf{Gd} . En definitiva, $\text{TDec}(\mathcal{G}) \in \mathbf{SGd}$.

Podemos ahora aplicar el funtor

$$P_n^v : \mathbf{SGd} \longrightarrow \mathbf{SGd},$$

ver Sección 2.6, al objeto anterior para obtener

$$P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G}) \in \mathbf{SGd}_n^v.$$

Recordar que P_n^v actúa sobre cada columna de un grupoide simplicial doble como el funtor P_n . Observamos que cada uno de los grupoides simpliciales $\text{Dec}^i(\mathcal{G})$ tiene una degeneración extra y por tanto la Proposición 2.6.2 nos prueba que

$$P_n \text{Dec}^i(\mathcal{G}) = \text{Cosk}^{n-2} \text{Dec}^i(\mathcal{G}).$$

Así $P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \xleftarrow{\quad} & & \xleftarrow{\quad} & & \\
 \dots & \text{Cosk}^{n-2} \text{Dec}^3(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Cosk}^{n-2} \text{Dec}^2(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Cosk}^{n-2} \text{Dec}(\mathcal{G}) & \longrightarrow P_n(\mathcal{G}) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 \dots & \Delta_{n-1}^3(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & \Delta_{n-1}^2(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\cong} & \Delta_{n-1}^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow \frac{\mathcal{G}_{n-1}}{B_{n-1}(\mathcal{G})} \\
 & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & \\
 \dots & \mathcal{G}_{n+1} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{G}_{n-2} \\
 & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & \\
 \dots & \mathcal{G}_4 & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_3 & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_2} \mathcal{G}_1 \\
 & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & & \downarrow \text{v} & \\
 \dots & \mathcal{G}_3 & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}_0
 \end{array} \tag{5.2}$$

donde hemos denotado

$$\Delta_{n-1}^i(\mathcal{G}) = \Delta_{n-1}(\text{Dec}^i(\mathcal{G})),$$

al grupoide núcleo simplicial en dimensión $(n - 1)$ de $\text{Dec}^i(\mathcal{G})$. Las flechas de estos grupoides $\Delta_{n-1}^i(\mathcal{G})$ son n -uplas $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ de flechas de \mathcal{G}_{n+i-2} tales que $d_k f_j = d_{j-1} f_k$ para $0 \leq k < j \leq n - 2$.

Notamos de nuevo que en el diagrama (5.2) todos los funtores que aparecen son la identidad en objetos y por tanto las filas y las columnas en este diagrama son objetos de \mathbf{Gd} . Además, puesto que P_n conserva coigualadores (ver Corolario 2.6.4), el diagrama anterior representa un objeto simplicial en $\mathbf{Simpl}(\mathbf{Gd}_n)$ aumentado sobre $P_n(\mathcal{G})$. Observamos también que en el diagrama (5.2) hemos representado sólo la $(n-1)$ -truncación vertical de $P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ ya que en cada uno de los grupoides simpliciales truncados representados por las columnas del diagrama existe una estructura de grupoide enriquecido en $(n-1)$ -hipergrupoides y cada una de las columnas es el nervio del correspondiente grupoide enriquecido.

Apliquemos ahora el funtor

$$P_2^h : \mathbf{SGd} \longrightarrow \mathbf{SGd}$$

a $P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$. Como consecuencia de la Proposición 2.6.5, P_2^h se restringe a un endofunctor de \mathbf{SGd}_n^v y por tanto

$$P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G}) \in \mathbf{SGd}_2^h \cap \mathbf{SGd}_n^v.$$

El grupoide simplicial doble $P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ se obtiene aplicando el funtor P_2 a las filas del diagrama (5.2). Puesto que las $(n-2)$ -primeras filas de $P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ coinciden con las $(n-2)$ -primeras filas de $\text{TDec}(\mathcal{G})$ y éstas tienen una degeneración extra, las $(n-2)$ -primeras filas de $P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ serán un cosk^0 , esto es, serán los nervios de los grupoides simpliciales asociados a los pares núcleo de los morfismos $\mathcal{G}_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \mathcal{G}_i$. Además, puesto que el funtor P_2 conserva coigualadores de pares de morfismos que son la identidad en objetos, $P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$, como objeto simplicial en \mathbf{Gd} , vuelve a estar aumentado sobre $P_n(\mathcal{G})$.

Concluimos que $P_2^h P_n^{vTDec}(\mathcal{G})$ tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & (5.3) \\
 \dots & & \overline{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})} & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{n-1}^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \frac{\mathcal{G}_{n-1}}{B_{n-1}(\mathcal{G})} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \dots & & \mathcal{G}_{n-1} \times_{\mathcal{G}_{n-2}} \mathcal{G}_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \mathcal{G}_{n-2} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \dots & & \mathcal{G}_2 \times_{\mathcal{G}_1} \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}_1 \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 \dots & & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}_0
 \end{array}$$

donde $\overline{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})}$ representa al cociente del grupoide $\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})$ sobre el subgrupoide $d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n))$,

$$\overline{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})} = \frac{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})}{d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n))},$$

con $d_i : \Delta_{n-1}^3(\mathcal{G}) \rightarrow \Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})$, $i = n-1, n, n+1$. Esto es, $d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n))$ es un grupoide con los mismos objetos que cualquiera de los grupoides en el diagrama y con flechas n -uplas de la forma $(d_{n+1}u_0, \dots, d_{n+1}u_{n-1})$ con (u_0, \dots, u_{n-1}) una n -upla de elementos en \mathcal{G}_{n+1} tales que $d_i u_j = d_{j-1} u_i$, para $0 \leq i < j \leq n-2$, y $d_{n-1} u_i, d_n u_i$ son identidades en el grupoide \mathcal{G}_{n+1} . Además los funtores cara

$$D_0, D_1 : \overline{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})} \rightarrow \Delta_{n-1}^1(\mathcal{G})$$

están dados por

$$\begin{aligned}
 D_1(\overline{v_0, \dots, v_{n-1}}) &= (d_n v_0, \dots, d_n v_{n-1}), \\
 D_0(\overline{v_0, \dots, v_{n-1}}) &= (d_{n-1} v_0, \dots, d_{n-1} v_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Obsérvese que en el diagrama (5.3) hemos representado sólo la $(n-1)$ -truncación de cada columna y la 1-truncación de cada fila, ésta es la parte realmente representativa, el resto se obtiene aplicando la construcción de nervio y por tanto son caras abiertas o núcleos simpliciales.

Por ser $P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$ un objeto de $\mathbf{SGd}_2^h \cap \mathbf{SGd}_n^v$, podemos asegurar que es el nervio de un grupoide interno en \mathbf{Gd}_n que además tiene a $P_n(\mathcal{G})$ como n -grupoide simplicial de componentes conexas. Denotemos por \mathfrak{T} a este grupoide simplicial, esto es, \mathfrak{T} es el único grupoide interno en \mathbf{Gd}_n tal que $\text{Ner}(\mathfrak{T}) = P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$.

Vamos a denotar como \mathbf{T} al grupoide (interno en grupoides) que tiene \mathfrak{T} en dimensión $(n - 1)$, esto es, \mathbf{T} junto con su grupoide de componentes conexas está representado por el diagrama:

$$\mathbf{T} : \overline{\Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})} \rightrightarrows \Delta_{n-1}^1(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}_{n-1}/B_{n-1}(\mathcal{G}), \quad (5.4)$$

que es la fila superior del diagrama (5.3). Nótese que todos los funtores en el diagrama (5.4) son la identidad en objetos y por tanto \mathbf{T} es un 2-grupoide.

Estamos ya en disposición de asociar a cada fibración $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}} : P_{n+1}(\mathcal{G}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$, en la torre de Postnikov de un grupoide simplicial \mathcal{G} , un 2-torsor en

$$\mathbf{T}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})).$$

Para simplificar notaciones supondremos que \mathcal{G} es un $(n + 1)$ -grupoide simplicial, en cuyo caso $P_{n+1}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ y $(\eta_{n+1})_{\mathcal{G}}$ es la proyección canónica $\mathcal{G} \rightarrow P_n(\mathcal{G})$.

Por lo que hemos visto hasta ahora podemos construir un grupoide \mathfrak{T} interno en \mathbf{Gd}_n tal que $\text{Ner}(\mathfrak{T}) = P_2^h P_n^v \text{TDec}(\mathcal{G})$, además $P_n(\mathcal{G})$ es el objeto de componentes conexas de \mathfrak{T} . Así que, para probar que \mathfrak{T} es la fibra de un 2-torsor sobre $P_n(\mathcal{G})$ con coeficientes en $\pi_{n+1}(\mathcal{G})$, sólo nos resta calcular el grupo $\text{End}_{\mathbf{T}}(x)$, para cada objeto x de \mathcal{G} , y probar que este es isomorfo al grupo $\pi_{n+1}(\mathcal{G})(x)$ de forma natural.

Puesto que \mathcal{G} es un $(n - 1)$ -grupoide simplicial, los elementos de $\pi_{n+1}(\mathcal{G})(x)$ pueden identificarse con las flechas $u \in \mathcal{G}_n$ tales que $d_i(u)$ es la identidad en x del grupoide \mathcal{G}_{n-1} . El resultado que buscamos será consecuencia inmediata del siguiente

Lema 5.2.1. *En las condiciones anteriores se tiene que en la clase de cada endomorfismo en $\text{End}_{\mathbf{T}}(x)$ existe un único elemento de la forma (Id_x, \dots, Id_x, u) con $u \in \pi_{n+1}(\mathcal{G})(x)$.*

Demostración: Los endomorfismos en $\text{End}_{\mathbf{T}}(x)$ serán las clases, módulo el subgrupoide

$$d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n)),$$

de los elementos $(v_0, \dots, v_{n-1}) \in \Delta_{n-1}^2(\mathcal{G})$ tales que $d_n(v_i) = Id_x = d_{n-1}(v_i)$, $0 \leq i \leq n - 1$.

Dado entonces (v_0, \dots, v_{n-1}) en las condiciones anteriores, consideramos la flecha

$$[v_0, \dots, v_{n-2}] \in \mathcal{G}_n$$

(ver fórmula (2.4) en Lema 2.2.1), tenemos entonces que

$$d_i[v_0, \dots, v_{n-2}] = d_{n-2}v_i = d_iv_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n-2,$$

$$d_j[v_0, \dots, v_{n-2}] = [d_jv_0, \dots, d_jv_{n-2}] = [Id_x, \dots, Id_x] = Id_x, \quad j = n-1, n,$$

ver Lemas 2.2.1 y 2.2.2. Por tanto la composición

$$[v_0, \dots, v_{n-2}]v_{n-1}^{-1} \in \mathcal{G}_n$$

es un elemento en $\pi_{n+1}(\mathcal{G})(x)$, ya que $d_i([v_0, \dots, v_{n-2}]v_{n-1}^{-1}) = Id_x$ para todo $0 \leq i \leq n$.

Veamos ahora que (v_0, \dots, v_{n-1}) y $(Id_x, \dots, Id_x, [v_0, \dots, v_{n-2}]v_{n-1}^{-1})$ determinan el mismo elemento de $\mathbf{End}_{\mathbf{T}}(x)$. Para demostrar ésto bastará con que probemos que el elemento

$$(v_0, \dots, v_{n-2}, [v_0, \dots, v_{n-2}])$$

está en $d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n))$. Consideremos la composición en \mathcal{G}_{n+1}

$$w_i = (s_nv_i)(s_{n-1}v_i)^{-1}(s_{n-2}v_i), \quad 0 \leq i \leq n-2,$$

entonces $(w_0, \dots, w_{n-2}, [w_0, \dots, w_{n-2}])$ es una flecha en $\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n)$ tal que

$$(d_{n+1}w_0, \dots, d_{n+1}w_{n-2}, d_{n+1}[w_0, \dots, w_{n-2}]) = (v_0, \dots, v_{n-2}, [v_0, \dots, v_{n-2}]).$$

Para finalizar la demostración veamos que si tenemos $u \in \pi_{n+1}(\mathcal{G})(x)$ tal que $(Id_x, \dots, Id_x, u) \in d_{n+1}(\ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n))$, entonces $u = Id_x$. Ahora bien, si existe $(w_0, \dots, w_{n-1}) \in \ker(d_{n-1}) \cap \ker(d_n)$ tal que

$$(d_{n+1}w_0, \dots, d_{n+1}w_{n-1}) = (Id_x, \dots, Id_x, u),$$

tomando $w' = w_{n-1}[w_0, \dots, w_{n-2}]^{-1}$ tenemos que

- para $0 \leq i \leq n-2$,

$$d_iw' = (d_iw_{n-1})(d_i[w_0, \dots, w_{n-2}])^{-1} = (d_{n-2}w_i)(d_{n-2}w_i)^{-1} = Id_x,$$

- para $i = n-1$ e $i = n$,

$$\begin{aligned} d_iw' &= (d_iw_{n-1})(d_i[w_0, \dots, w_{n-2}])^{-1} = [d_iw_0, \dots, d_iw_{n-2}]^{-1} = \\ &= [Id_x, \dots, Id_x]^{-1} = Id_x, \end{aligned}$$

- y para $i = n+1$,

$$\begin{aligned} d_{n+1}w' &= (d_{n+1}w_{n-1})(d_{n+1}[w_0, \dots, w_{n-2}])^{-1} = \\ &= u[d_{n+1}w_0, \dots, d_{n+1}w_{n-2}]^{-1} = u[Id_x, \dots, Id_x]^{-1} = u, \end{aligned}$$

por tanto w' es un elemento del complejo de Moore de \mathcal{G} en dimensión $n+1$. Ahora bien, \mathcal{G} es un $(n+1)$ -grupoide simplicial y por tanto tiene complejo de Moore trivial en dimensión $n+1$, así $w' = Id_x$ y por ser $u = d_{n+1}(w')$ también $u = Id_x$. ■

Como consecuencia inmediata de los razonamientos anteriores, tenemos que \mathfrak{T} es el nervio de un 2-torsor en $\mathbf{T}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$. La componente conexa de este 2-torsor será el invariante algebraico

$$k_{n+1} \in \mathbf{T}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})) = H_{alg}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$$

buscado.

Nota 5.2.2. *Observemos ahora que el invariante k_{n+1} de \mathcal{G} nos permite reconstruir el siguiente piso de la torre de Postnikov de \mathcal{G} . Bastará con elegir un 2-torsor (\mathfrak{T}, α) que lo represente, considerar entonces el grupoide simplicial doble $\text{Ner}(\mathfrak{T}) \in \mathbf{SGd}$ obtenido tomando nervios en ambas direcciones de \mathfrak{T} y aplicar la diagonal de Artin-Mazur a éste. Obtenemos así un $(n+1)$ -grupoide simplicial $\overline{W}\text{Ner}(\mathfrak{T}) \in \mathbf{Gd}$ junto con una fibración canónica $\overline{W}\text{Ner}(\mathfrak{T}) \rightarrow P_n(\mathcal{G})$ cuya fibra en cada objeto $x \in \mathcal{G}$ es del tipo de homotopía de $K(\pi_{n+1}(\mathcal{G})(x), n+1)$.*

5.2.2 Los invariantes de Postnikov topológicos de cualquier espacio

En esta sección sólo haremos un avance de cómo creemos que se pueden obtener los invariantes de Postnikov topológicos de un espacio a partir de los invariantes algebraicos de su grupoide simplicial fundamental.

Será suficiente obtener, para cada grupoide simplicial \mathcal{G} , un invariante topológico

$$\mathbf{k}_{n+1} \in H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})),$$

a partir del invariante algebraico

$$k_{n+1} \in H_{alg}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})).$$

Si seguimos los pasos que hemos dado para el caso de complejos cruzados, primero tendríamos que identificar la cohomología algebraica H_{alg}^* , definida en \mathbf{Gd}_n , con una cohomología de un cierto cotriple ${}^n\mathbb{G}$. Este cotriple tendría que ser tal que los 2-torsores en $\mathbf{T}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$ sean nU -escindidos (nU el funtor de olvido que determina al cotriple). Las características de estos torsores nos hacen pensar que este funtor de olvido tomaría rango en la categoría de grafos simpliciales con conjunto simplicial de objetos discreto (algo más complejo que lo que ocurre en el caso de complejos cruzados). El concretar en el contexto de grupoides simpliciales un procedimiento análogo al dado para complejos cruzados sería al menos tan laborioso como el que hemos realizado en el Capítulo 4 para complejos cruzados.

Es posible, sin embargo, que se pueda conectar la cohomología algebraica $H_{alg}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$ con la singular $H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$ sin necesidad de identificar la primera con una cohomología de un cotriple. Un posible camino sería el siguiente:

Supongamos un 2-torsor $(\mathfrak{T}, \alpha) \in \mathbf{T}^2(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G}))$, éste tendrá coeficientes en el objeto grupo abeliano

$$\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1) \rightarrow P_1(\mathcal{G})$$

en la coma categoría $\mathbf{Gd}_n/P_1(\mathcal{G})$. Vamos a reinterpretar este 2-torsor a la manera de Duskin, esto es, como un morfismo simplicial en la categoría $\mathbf{Gd}_n/P_1(\mathcal{G})$. Para ello construimos el objeto simplicial

$$K \left(\begin{array}{c} \kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1) \\ \downarrow \\ P_1(\mathcal{G}) \end{array}, 2 \right)$$

en la categoría $\mathbf{Gd}_n/P_1(\mathcal{G})$. Entonces el cociclo α es equivalente a un morfismo simplicial

$$\alpha : \text{cosk}^1(\mathfrak{T}) \longrightarrow K \left(\begin{array}{c} \kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1) \\ \downarrow \\ P_1(\mathcal{G}) \end{array}, 2 \right).$$

en la categoría $\mathbf{Gd}_n/P_1(\mathcal{G})$. Consideramos ahora el funtor $(i_n)_* : \mathbf{Gd}_n^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Gd}^{\Delta^{op}}$ inducido por la inclusión $i_n : \mathbf{Gd}_n \rightarrow \mathbf{Gd}$ y se lo aplicamos al morfismo simplicial α , visto éste como morfismo en $\mathbf{Gd}_n^{\Delta^{op}}$ en lugar de en la coma categoría. Obtenemos entonces un morfismo de grupoides simpliciales dobles

$$(i_n)_*(\alpha) : (i_n)_*(\text{cosk}^1(\mathfrak{T})) \longrightarrow (i_n)_*(K(\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1), 2)),$$

que realmente está en \mathbf{SGd} , cuyo dominio es un grupoide simplicial doble que en la dirección horizontal es (un cosk^1) débilmente homotópicamente equivalente al constante $P_n(\mathcal{G})$ (la aumentación de \mathfrak{T}). Aplicamos ahora la diagonal de Artin-Mazur al morfismo anterior para obtener un morfismo de grupoides simpliciales

$$P_n(\mathcal{G}) \sim \overline{W}(i_n)_*(\text{cosk}^1(\mathfrak{T})) \xrightarrow{\overline{W}(i_n)_*(\alpha)} \overline{W}(i_n)_*(K(\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1), 2)),$$

que al aplicar el funtor nervio, una vez probado el isomorfismo

$$\text{Ner}\overline{W}(i_n)_*(K(\kappa_{P_1(\mathcal{G})}^{(1)}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n-1), 2)) \cong L_{P_1(\mathcal{G})}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n+2)$$

nos daría, en clases de homotopía, un elemento de

$$[\text{Ner}P_n(\mathcal{G}), L_{P_1(\mathcal{G})}(\pi_{n+1}(\mathcal{G}), n+2)]_{\text{SSet}/\text{Ner}P_1(\mathcal{G})} = H_{sing}^{n+2}(P_n(\mathcal{G}), \pi_{n+1}(\mathcal{G})).$$

Si el 2-torsor de partida es el asociado a la fibración η_{n+1} el elemento en la cohomología singular sería el invariante topológico \mathbf{k}_{n+1} .

Bibliografía

- [1] M. Artin y B. Mazur. *On the Van Kampen Theorem*. *Topology*, **Vol. 5**: 179–189, 1966.
- [2] M. Barr. *Exact categories*. *Lecture Notes in Math*, **236**. Springer-Verlag, 1971.
- [3] M. Barr. *Cohomology and Obstructions: Commutative Algebras*. *Seminar on Triples and Categorical Homotopy Theory*, Springer Lecture Notes in Math, **80**. Springer-Verlag, 1969.
- [4] M. Barr y J. Beck. *Homology and standard constructions*. *Seminar on Triples and Categorical Homotopy Theory*, Springer Lecture Notes in Math, **80**. Springer, New York, 1969.
- [5] M. Barr y C. Wells. *Toposes, triples and theories*. Springer-Verlag (**278**), 1985.
- [6] H.J. Baues. *Obstruction Theory*. *Lecture Notes in Math*, **628**. Springer-Verlag, 1977.
- [7] J. Baues. *Algebraic Homotopy*. Cambridge University Press, 1989.
- [8] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 2: Categories and structures*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **51**. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [9] A.K. Bousfield y D.M. Kan. *Homotopy Limits. Completions and localizations*. *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, 1972.
- [10] R. Brown y N.D. Gilbert. *Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules*. *Proc. Lond on Math. Soc.*, **59**: 51–73, 1989.
- [11] R. Brown y M. Goulasinski. *A model structure for the homotopy theory of crossed complexes*. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.*, **XXX-1**: 61–82, 1989.

- [12] R. Brown y P.J. Higgins. *On the algebra of cubes*. Journal of Pure and Applied Algebra, **21**: 233–260, 1981.
- [13] R. Brown y P.J. Higgins. *Colimit theorems for relative homotopy groups*. Journal of Pure and Applied Algebra, **22**: 11–41, 1981.
- [14] R. Brown y P.J. Higgins. *The classifying space of a crossed complex*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.: 95–119, 1991.
- [15] R. Brown y P.J. Higgins. *Crossed complexes and non-abelian extension*. In Proc. International Conference on Category Theory: Gummertsbach, 1981. Lecture Notes in Math. **962**. Springer-Verlag: 39–50, 1982.
- [16] R. Brown y J.H. Huebschmann. *Identities among relations*. In R. Brown and T.L. Thickstun, editors, Low-dimensional topology. London Math. Soc. Lecture Note Ser., **48**. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [17] M. Bullejos. *Cohomología no abeliana (La sucesión exacta larga)*. Tesis doctoral. 1987.
- [18] M. Bullejos, J.G. Cabello y E. Faro. *On the equivariant 2-type of a g -space*. J. Pures Appl. Algebra, **129**: 215–245, 1998.
- [19] M. Bullejos, A. M. Cegarra y J. Duskin. *On cat^n -groups and homotopy types*. J. Pures Appl. Algebra, **86**: 135–154, 1993.
- [20] M. Bullejos, E. Faro y M.A. García-Muñoz. *Homotopy colimits and cohomology with local coefficients*. Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég., **XLIV-1**: 63–80, 2003.
- [21] M. Bullejos, E. Faro y M.A. García-Muñoz. *An algebraic approach to Postnikov invariants*. Preprint, 2003.
- [22] P. Carrasco, A. M. Cegarra. *Group theory algebraic models for homotopy types*. J. Pures Appl. Algebra, **75**: 195–235, 1991.
- [23] P. Carrasco, A. M. Cegarra y A.R. Grandjean. *(Co)homology of crossed modules*. J. Pures Appl. Algebra, 2001.
- [24] A. Cegarra y E. Aznar. *An exact sequence in the first variable for torsor cohomology: The 2-dimensional theory of obstructions*. J. Pures Appl. Algebra, **39**: 197–250, 1986.
- [25] D. Conduché. *Modules croisés généralisés de longueur 2*. J. Pure Appl. Algebra **34**: 155–178, 1984.

- [26] E.B. Curtis. *Simplicial homotopy theory*. Advances in Math, **6**: 107–209, 1971.
- [27] P. Dedecker. *Les foncteurs Ext. H^2 et H^2 non-abeliens*. C.R. Acad. Sc. Paris, **258**: 1117–1120, 1964.
- [28] W.G. Dwyer y H.W. Henn. *Homotopy theoretic methods in group cohomology*. Advanced course in Mathematics CRM Barcelona. Birkhäuser-Velag, 2001.
- [29] W.G. Dwyer y D.M. Kan. *Homotopy theory and simplicial groupoids*. Proc. Konic. Neder. Akad. **87 (4)**: 379–389, 1984.
- [30] J. Duskin. *Simplicial methods and the interpretation of “triple” cohomology*. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol 3, **163**, 1975.
- [31] J. Duskin. *Simplicial matrices and the nerves of weak n -categories I. Nerves of bicategories*. Theory Appl. of Categories, **9**: 198–308, 2002.
- [32] S. Eilenberg y S. Mac Lane. *On the groups $h(\pi, n)$ I*. Annals of Math., **58**: 55–106, 1953.
- [33] S. Eilenberg y S. Mac Lane. *On the groups $h(\pi, n)$ II*. Annals of Math., **60**: 49–139, 1954.
- [34] S. Eilenberg y S. Mac Lane. *On the groups $h(\pi, n)$ III*. Annals of Math., **70**: 513–557, 1954.
- [35] G.J.Ellis. *Homology of 2-types*. J. London Math. Soc., (2) **46**: 1–27, 1991.
- [36] P. Gabriel y M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Berlin-Heidelberg-New York. Springer, 1967.
- [37] J. García Miranda. *Estructuras de modelos y teoría de homotopía en categorías de grupos y grupoides simpliciales*. Tesis doctoral, 1995.
- [38] A.R. Garzón, J.G. Miranda y R. Osorio. *A simplicial description of the homotopy category of simplicial groupoids*. Theory and Appl. of Categories, Vol 7, **14**: 263–283, 2000.
- [39] P. Glenn. *Realization of cohomology classes in arbitrary exact categories*. J. Pure Appl. Algebra **25**: 33–107, 1982.
- [40] S. Gitler. *Cohomology operations with local coefficients*. American Journal Mathematics, **85**: 156–188, 1963.
- [41] P.G. Goerss y J.F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Progress in Mathematics, **Vol. 174**. Birkhäuser, Basel, 1999.

- [42] J.W. Gray. *The categorical comprehension scheme*. Lecture Notes in Math, **99**. Springer-Verlag, 1969.
- [43] P.A. Griffiths y J. W. Morgan. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*. Progress in Mathematics, **Vol. 16**. Birkhäuser, Boston, 1981.
- [44] A. Grothendieck. *Catégories fibrées et descente*.(SGA I) Lecture Notes in Math, **224**. Springer-Verlag, 1971.
- [45] P.J. Higgins. *Notes on Categories and Groupoids*. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies **32**, 1971.
- [46] P.J. Hilton y Stammbach. *A course in homological algebra*. Springer-Verlang (GTM 4), 1970.
- [47] J. Howie. *Pullback functors and crossed complexess*. Cahiers Topologie Géom. Différ. Catégoriques, **20**: 281–295, 1970.
- [48] L. Illusie. *Complex cotangent et déformations II*. Lecture Notes in Math, **283**. Springer-Verlag, 1972.
- [49] P.T. Johnstone. *Topos Theory*. Academic Press, 1977.
- [50] D.M. Kan. *On homotopy theory and c.s.s. groups*. Annals of Mathematics, **68(1)**: 38–53, 1958.
- [51] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, **5**, 1971.
- [52] S. Mac Lane y I. Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*. Universitex, Springer-Verlag, 1956.
- [53] J.P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostran, Princeton, 1967.
- [54] G. Nan Tie. *A Dold-Kan theorem for crossed complexes*. J. Pure Appl. Algebra, **56**: 177–194, 1989.
- [55] G. Nan Tie. *Iterated \overline{W} and T -groupoids*. J. Pure Appl. Algebra, **56**: 195–209, 1989.
- [56] T. Porter. *N -types of simplicial groups and crossed n -cubes*. Topology, **32 (1)**: 5–24, 1993.
- [57] T. Porter. *Crossed modules, crossed n -cubes and simplicial groups*. Preprint, University College of North Wales, 1989.

- [58] T. Porter. *Abstract homotopy theory. The interaction of category theory and homotopy theory*. Preprint, University College of North Wales, 1992.
- [59] M.M. Postnikov. *Determination of the homology groups of a space by means of homotopy invariants*. Doklady Akad. Nauk SSSR, **Tom. 76, 3**: 359–362, 1951.
- [60] M.M. Postnikov. *On the homotopy type of a polyhedra*. Doklady Akad. Nauk SSSR, **Tom 76, 3**: 789–791, 1951.
- [61] D. Quillen. *Rational homotopy theory*. Annals of Math. **90**: 205–295, 1969.
- [62] D. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Math., **43**. Springer, New York, 1967.
- [63] J. Siegel. *Higher order cohomology operations in local coefficient theory*. American Journal Mathematics, **89**: 909–931, 1967.
- [64] N. D. Steenrod. *Homology with local coefficient*. Anals of Mathematics, **44 (4)**: 610–627, 1943.
- [65] N. E. Steenrod. *A convenient category of topological spaces*. Michigan Math., **14**: 133–152, 1967.
- [66] R.W. Thomason. *Homotopy colimits in the category of small categories*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85**: 91–109, 1979.
- [67] A. Tonks. *Theory and Applications of Crossed Complexes*. U.C.N.W. Maths Preprints, 1993.
- [68] J.H.C. Whitehead. *Combinatorial Homotopy I*. Bull. Amer. Math. Soc., **55**: 231–245, 1949.
- [69] J.H.C. Whitehead. *Combinatorial Homotopy II*. Bull. Amer. Math. Soc., **55**: 453–496, 1949.
- [70] J.H.C. Whitehead. *A certain exact sequence*. Ann. of Math., **52 (1)**: 51–110, 1950.
- [71] G.W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*. G.T.M. Springer, 1978.

Índice de símbolos

Categorías

Δ	=	categoría simplicial	pg. 17
Δ^{op}	=	categoría simplicial opuesta	pg. 18
Δ_n	=	subcategoría plena de Δ	pg. 20
Δ_*	=	$\Delta \cup \{\emptyset\}$	pg. 30
\mathbf{Ab}	=	categoría de grupos abelianos	pg. 8
$\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$	=	cat. de \mathcal{G} -módulos internos	pg. 38
$\mathbf{Ab}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$	=	cat. de \mathcal{G} -módulos internos en \mathcal{E}	pg. 8
\mathbf{ACrs}_n	=	categoría de “flechas a n -complejos cruzados”	pg. 160
\mathbf{AGpd}	=	categoría de “flechas a grupoides”	pg. 143
$\mathbf{AuSimpl}(\mathcal{E})$	=	categoría de objetos simpliciales aumentados en \mathcal{E}	pg. 30
\mathcal{C}	=	categoría pequeña	pg. 24
\mathcal{C}	=	categoría interna en \mathcal{E}	pg. 1
$\mathcal{C} \int F$	=	categoría producto semidirecto de Grothendieck	pg. 62
\mathbf{Cat}	=	categoría de categorías pequeñas	pg. 4
$\mathbf{Cat}^{\mathcal{C}}$	=	cat. de funtores de \mathcal{C} en \mathbf{Cat}	pg. 62
$\mathbf{Cat}(\mathcal{E})$	=	cat. de categorías internas en \mathcal{E}	pg. 3
\mathbf{CGHaus}	=	categoría de espacios Hausdorff compactamente generados	pg. 39
$\mathbf{CoherAuSimpl}(\mathcal{E})$	=	cat. de objetos simpliciales aumentados y escindidos en \mathcal{E}	pg. 31
\mathbf{Crs}	=	categoría de complejos cruzados	pg. 155
$\mathbf{Crs}_{\mathcal{G}}$	=	categoría de complejos cruzados sobre \mathcal{G}	pg. 155
$\mathbf{Crs}_{\mathcal{C}}$	=	categoría de complejos cruzados con módulo cruzado base \mathcal{C}	pg. 155
\mathbf{Crs}_n	=	categoría de n -complejos cruzados	pg. 158
$\mathbf{Crs}_{n,\mathcal{G}}$	=	cat. de n -complejos cruzados sobre \mathcal{G}	pg. 158
\mathcal{E}	=	categoría base	pg. 1
\mathcal{E}/O	=	categoría coma	pg. 7

$Ext^2(\mathcal{T}, \Pi)$	=	cat. de 2-extensiones de \mathcal{T} por Π	pg. 217
$Ext^2(\mathcal{C}, \Pi)$	=	cat. de 2-extensiones de \mathcal{C} por Π	pg. 218
Filt	=	categoría de espacios filtrados	pg. 184
\mathcal{G}	=	grupoides interno en \mathcal{E}	pg. 4
Gd	=	categoría de grupoides simpliciales	pg. 69
Gd_n	=	categoría de grupoides simpliciales n -dimensionales	pg. 89
G1H	=	categoría de 2-grupoides	pg. 88
GnH	=	cat. de grupoides enriquecidos en Hyper_n	pg. 86
Gp	=	categoría de grupos	pg. 7
Gp(\mathcal{E}/O)	=	categoría de grupos internos en la categoría coma \mathcal{E}/O	pg. 7
Gp^{\mathcal{G}}	=	cat. de \mathcal{G} -grupos o categoría de funtores de \mathcal{G} en Gp	pg. 7
Gp(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}	=	cat. de \mathcal{G} -grupos internos en \mathcal{E}	pg. 7
Gpd	=	categoría de grupoides pequeños	pg. 4
Gpd(\mathcal{E})	=	cat. de grupoides internos en \mathcal{E}	pg. 4
Gpd_O	=	categoría de grupoides con objeto de objetos O	pg. 11
Gpd(Crs_n)	=	cat. de grupoides internos en Crs_n	pg. 175
GCrs_n	=	subcategoría de Gpd(Crs_n)	pg. 175
Hiper₁	=	categoría de 1-hipergrupoides	pg. 41
Hiper₁(\mathcal{E})	=	categoría de 1-hipergrupoides internos en \mathcal{E}	pg. 41
Hyper_n	=	categoría de n -hipergrupoides	pg. 46
Hyper_n(\mathcal{E})	=	categoría de n -hipergrupoides internos en \mathcal{E}	pg. 46
Iso(\mathcal{C})	=	categoría de isomorfismo de \mathcal{C}	pg. 4
O	=	categoría discreta con objeto de objetos O	pg. 7
Pxm	=	categoría de pre-módulos cruzados	pg. 129
Pxm_{\mathcal{G}}	=	categoría de pre-módulos cruzados sobre \mathcal{G}	pg. 127
S	=	categoría	pg. 15
S^T	=	categoría de T -álgebras	pg. 16
Set	=	categoría de conjuntos	pg. 5
Simpl(\mathcal{E})	=	cat. de objetos simpliciales en \mathcal{E}	pg. 18
Simpl_n(\mathcal{E})	=	categoría de objetos simpliciales n -truncados en \mathcal{E}	pg. 20

\mathbf{SCrs}_n	= subcategoría de $\mathbf{Crs}_n^{\Delta^{op}}$	pg. 257
\mathbf{SGd}	= subcategoría de $\mathbf{SSimplGpd}$	pg. 119
\mathbf{SGd}_n^h	= subcategoría de \mathbf{SGd}	pg. 119
\mathbf{SGd}_n^v	= subcategoría de \mathbf{SGd}	pg. 119
$\mathbf{SimplGpd}$	= categoría de objetos simpliciales sobre grupoides	pg. 18
$\mathbf{SSimplGpd}$	= categoría de objetos simpliciales dobles sobre grupoides	pg. 119
\mathbf{SSet}	= categoría de conjuntos simpliciales	pg. 18
$\mathbf{SSimpl}(\mathbf{Set})$	= cat. de conjuntos simpliciales dobles	pg. 81
$\mathbf{SSimpl}(\mathcal{E})$	= categoría de objetos simpliciales dobles en \mathcal{E}	pg. 32
\mathbf{Sxm}	= subcategoría de $\mathbf{Xm}^{\Delta^{op}}$	pg. 221
$\mathbf{TdGpd}(\mathcal{E})$	= categoría de grupoides internos en \mathcal{E} totalmente desconexos	pg. 5
$\mathbf{TdGpd}_O(\mathcal{E})$	= categoría de grupoides totalmente desconexos con objeto de objetos O	pg. 5
\mathbf{Top}	= categoría de espacios topológicos	pg. 37
$Tor^2(X, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre X	pg. 196
$Tor_U^2(X, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores U -escindidos sobre X	pg. 198
$\underline{Tor}_U^2(X, \Pi)$	= subcategoría de $Tor_U^2(X, \Pi)$	pg. 203
$Tor^2(\mathcal{T}, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre \mathcal{T}	pg. 209
$\mathbf{T}^2(\mathcal{T}, \Pi)$	= subcategoría de $Tor^2(\mathcal{T}, \Pi)$	pg. 209
$Tor^2(\mathcal{C}, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre \mathcal{C}	pg. 212
$\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$	= subcategoría de $Tor^2(\mathcal{C}, \Pi)$	pg. 212
$Tor^2(\mathcal{C}, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre \mathcal{C}	pg. 214
$\mathbf{T}^2(\mathcal{C}, \Pi)$	= subcategoría de $Tor^2(\mathcal{C}, \Pi)$	pg. 214
$Tor^2(\mathcal{G}, \Pi)$	= cat. de $(\Pi, 2)$ -torsores sobre \mathcal{G}	pg. 290
$\mathbf{T}^2(\mathcal{G}, \Pi)$	= subcategoría de $Tor^2(\mathcal{G}, \Pi)$	pg. 290
x/\mathcal{C}	= categoría coma	pg. 55
\mathbf{Xm}	= categoría de módulos cruzados	pg. 131
$\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$	= cat. de módulos cruzados sobre \mathcal{G}	pg. 131

Funtores

$\widehat{(\)}$	= funtor olvido de $\mathbf{Gp}(\mathcal{E})^{\mathcal{G}}$ en $\mathbf{TdGpd}(\mathcal{E})$	pg. 8
ι	= funtor inclusión $\Delta \hookrightarrow \Delta^+$	pg. 31
ι^*	= funtor de $\mathbf{AuSimpl}(\mathcal{E})$ en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ inducido por ι	pg. 31
i_n	= funtor inclusión $\mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$	pg. 89
i_n	= funtor inclusión $\mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$	pg. 158
j_n	= funtor inclusión $\mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}_{n+1}$	pg. 109
j_n	= funtor inclusión $\mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$	pg. 167
π	= funtor complejo cruzado fundamental de \mathbf{SSet} en \mathbf{Crs}	pg. 156
$\pi_n(\mathbf{X})$	= funtor n -ésimo grupo de homotopía	pg. 36
Π	= funtor grupoide simplicial fundamental de un espacio	pg. 85
Π	= funtor complejo cruzado fundamental	pg. 157
π_0	= funtor grupoide de componentes conexas	pg. 80
π_1	= adjunto izquierda de $\text{discr} : \mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Pxm}$	pg. 129
π_1	= funtor grupoide fundamental de un módulo cruzado	pg. 142
$ $	= funtor realización geométrica	pg. 38
$(-)/\mathcal{C}$	= funtor asociado a la construcción de coma categoría	pg. 55
$+_{or}$	= funtor suma ordinal de $\Delta \times \Delta$ en Δ	pg. 33
$2gd$	= funtor de \mathbf{Xm} en $\mathbf{G1H}$	pg. 137
arr	= funtor flechas de un grupoide	pg. 91
\mathbf{B}	= funtor espacio clasificador de un grupoide simplicial	pg. 85
\mathbf{B}	= funtor espacio clasificador de un módulo cruzado	pg. 157
base	= funtor grupoide base de un pre-módulo cruzado	pg. 129
base	= funtor grupoide base de un módulo cruzado	pg. 141
base	= funtor grupoide base de un complejo cruzado	pg. 155
c	= funtor categorización	pg. 27
$\mathcal{C}f(-)$	= funtor inducido por const. Grothedieck	pg. 62
codiscr	= adjunto derecha de $\text{base} : \mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{Gpd}$	pg. 129
codiscr	= funtor adjunto derecha obj	pg. 141

cosk^n	=	funtor n -coesqueleto	pg. 21
Cosk^n	=	$\text{cosk}^n \text{tr}_n$	pg. 21
cosk_n	=	adjunto derecha de T_n	pg. 174
crs_n	=	funtor $\mathbf{GCrs}_n \rightarrow \mathbf{Crs}_{n+1}$	pg. 175
D	=	funtor diagonal de Δ en	pg. 33
Dec	=	funtor cotriple de la adjunción $\iota^* \dashv \text{Dec}^+$	pg.32
Dec^+	=	funtor “decalage” de Illusie de $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$ en $\mathbf{CoherAuSimpl}(\mathcal{E})$	pg. 31
Diag	=	funtor diagonal $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$	pg. 19
Diag	=	D^* , funtor diagonal	pg. 33
discr	=	adjunto izquierda de obj	pg. 141
discr	=	adjunto izquierda de base	pg. 129
F	=	funtor entre categorías internas	pg. 3
F_{gp}	=	funtor grupo libre	pg. 144
F_{ab}	=	funtor grupo abeliano libre	pg. 162
\overline{F}	=	adjunto izquierda del olvido U	pg. 145
F_2	=	adjunto izquierda del olvido U_2	pg. 148
F_n	=	adjunto izquierda del olvido U_n	pg. 161
\mathcal{F}_1	=	adjunto izquierda de \overline{W}_1	pg. 220
\mathcal{F}_2	=	funtor $\mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Sxm}$	pg. 229
\mathcal{F}_n	=	funtor $\mathbf{SCrs}_{n-1} \rightarrow \mathbf{SCrs}_n$	pg. 260
\mathfrak{F}_2	=	$\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$	pg. 256
\mathfrak{F}_n	=	$\mathcal{F}_n \dots \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$	pg. 280
fib	=	funtor olvido $\text{Tor}^2(\mathbf{X}, \Pi) \rightarrow \mathbf{Gpd}(\mathcal{E})$	pg. 199
G	=	funtor grupoide de lazos	pg. 84
G	=	funtor adjunto izquierda del funtor olvido de $\mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{Pxm}$	pg. 133
\mathbf{G}	=	$(\mathbb{G}, \epsilon, \delta)$, cotriple	pg. 16
\mathbb{G}	=	endofuntor asociado al cotriple \mathbf{G}	pg. 16
\mathbf{i}	=	funtor encaje canónico de Δ en \mathbf{Cat}	pg. 24
ins_2	=	funtor $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{Xm}/\pi_1(\mathcal{C})$	pg. 205
ins_n	=	funtor $\mathbf{Ab}^{\pi_1(\mathcal{C})} \rightarrow \mathbf{Crs}_n/\pi_1(\mathcal{C})$	pg. 206
Φ	=	funtor de comparación de Eilenberg-Moore	pg. 17
ker	=	funtor adjunto derecha de zero	pg. 128
$N_{\mathcal{C}}$	=	$\text{Ner}(-)/\mathcal{C} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$	pg. 55
\mathbf{N}_n	=	cuasi-inverso de crs_n	pg. 175
Ner	=	funtor nervio de \mathbf{Cat} en \mathbf{SSet}	pg. 24
Ner	=	funtor nervio de $\mathbf{Cat}(\mathcal{E})$ en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$	pg. 27
Ner	=	funtor nervio de \mathbf{Gpd} en \mathbf{SSet}	pg. 27
Ner	=	funtor nervio de $\mathbf{Hiper}_1(\mathcal{E})$ en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$	pg. 41
Ner	=	funtor nervio de $\mathbf{Hyper}_n(\mathcal{E})$ en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$	pg. 48

Ner	=	funtor nervio de \mathbf{Gd} en \mathbf{SSet}	pg. 82
Ner	=	funtor nervio de \mathbf{Xm} en \mathbf{SSet}	pg. 138
Ner	=	funtor nervio de \mathbf{Crs} en \mathbf{SSet}	pg. 156
Ner _*	=	funtor de $\mathbf{SimplGpd}$ en $\mathbf{SSimpl}(\mathbf{Set})$ inducido por el funtor $\text{Ner} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SSet}$	pg. 82
obj	=	funtor objetos de un grupoide	pg. 141
P	=	funtor proyección canónica $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$	pg. 10
P_n	=	$i_n \tilde{P}_n : \mathbf{Gd} \rightarrow \mathbf{Gd}$	pg. 107
P_n	=	$i_n \tilde{P}_n : \mathbf{Crs} \rightarrow \mathbf{Crs}$	pg. 167
\tilde{P}_n	=	funtor reflector de $i_n : \mathbf{Gd}_n \hookrightarrow \mathbf{Gd}$	pg. 105
\tilde{P}_n^h	=	funtor reflector de $\mathbf{SGd} \hookrightarrow \mathbf{SGd}_n^h$	pg. 119
\tilde{P}_n^v	=	funtor reflector de $\mathbf{SGd} \hookrightarrow \mathbf{SGd}_n^v$	pg. 120
\tilde{P}_n	=	funtor reflector de $i_n : \mathbf{Crs}_n \hookrightarrow \mathbf{Crs}$	pg. 159
P_n^h	=	endofuntor $\mathbf{SGd} \rightarrow \mathbf{SGd}$	pg. 120
P_n^v	=	endofuntor $\mathbf{SGd} \rightarrow \mathbf{SGd}$	pg. 120
S	=	funtor complejo singular total	pg. 38
sk^n	=	funtor n -esqueleto	pg. 21
Sk^n	=	$sk^n \text{tr}_n$	pg. 21
T_n	=	funtor truncación de \mathbf{Crs} en \mathbf{Crs}_n	pg. 161
T_n	=	funtor truncación de \mathbf{Crs}_n en \mathbf{Crs}_m para $m < n$	pg. 175
tr_n	=	funtor truncación a nivel n	pg. 20
techo	=	funtor $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Gd}^{\mathcal{G}}$	pg. 173
techo _{n}	=	funtor $\mathbf{Crs}_{n,\mathcal{G}} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$	pg. 173
TDec	=	$+_{or}^*$, funtor total dec	pg. 33
triv	=	adjunto derecha de base	pg. 141
U	=	funtor olvido $\mathbf{Pxm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$	pg. 144
U_2	=	funtor olvido $\mathbf{Xm} \rightarrow \mathbf{AGpd}$	pg. 148
U_n	=	funtor olvido $\mathbf{Crs}_n \rightarrow \mathbf{ACrs}_{n-1}$	pg. 161
vert	=	adjunto derecha de Diag	pg. 20
\overline{W}	=	funtor diagonal de Artin-Mazur	pg. 33
\overline{W}_1	=	\overline{W}	pg. 220
\overline{W}_2	=	adjunto derecha de \mathcal{F}_2	pg. 223
\overline{W}_n	=	adjunto derecha de \mathcal{F}_n	pg. 258
xm	=	funtor de $\mathbf{G1H}$ en \mathbf{Xm}	pg. 136
y	=	encaje de Yoneda	pg. 24
zero	=	funtor de $\mathbf{Gp}^{\mathcal{G}}$ en $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$	pg. 128
zero	=	funtor de $\mathbf{Ab}^{\mathcal{G}}$ en $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$	pg. 132

Objetos y morfismos

\sim	=	relación de homotopía de n -símplices	pg. 35
\approx	=	relación de equiv. de la realización geométrica	pg. 38
\emptyset	=	conjunto vacío	pg. 30
δ	=	operador coborde	pg. 184
δ_i, σ_j	=	morfismos de Δ	pg. 17
$\delta^{(n)}$	=	unidad de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$ en Gd	pg. 106
$\delta^{(n)}$	=	unidad de la adjunción $\tilde{P}_n \dashv i_n$ en Crs	pg. 168
$\Delta[n]$	=	n -símplice estándar (simplicial)	pg. 36
$\Delta_n(\mathbf{X})$	=	n -ésimo núcleo simplicial de \mathbf{X}	pg. 20
ϵ	=	counidad de un cotriple	pg. 16
ϵ	=	counidad de una adjunción $F_n \dashv U_n$	pg. 166
η	=	unidad del triple	pg. 16
η	=	unidad de una adjunción $F_n \dashv U_n$	pg. 166
η_{n+1}	=	transformación natural $P_{n+1}\delta^{(n)}$	pg. 111
η_{n+1}	=	transformación natural $P_{n+1}\delta^{(n)}$	pg. 168
$\eta_{\mathbf{X}}$	=	componente en \mathbf{X} de la unidad de la adjunción $\pi_1 \dashv \text{Ner}$	pg. 185
$\Lambda_n^i(\mathbf{X})$	=	i -ésima cara abierta en dimensión n de \mathbf{X}	pg. 21
$\Lambda_n^i\mathcal{G}$	=	grupoide de cara abiertas en dimensión n de \mathcal{G}	pg. 72
$\kappa_{\mathcal{G}}^{(1)}(\Pi, n)$	=	dominio de $K(\tilde{\Pi}_1, n)$	pg. 93
$\kappa_{\mathcal{G}}^{(2)}(\Pi, n)$	=	dominio del módulo cruzado simplicial $K(\tilde{\Pi}_2, n)$	pg. 227
λ^*	=	morfismo de conexión de cohomologías en Gpd	pg. 283
λ^*	=	morfismo de conexión de cohomologías en Xm	pg. 286
λ^*	=	morfismo de conexión de cohomologías en SCrs_n	pg. 287
ν	=	multiplicación de un triple	pg. 16
μ	=	comultiplicación de un cotriple	pg. 16
∂	=	operador coborde de $C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$	pg. 184
∂_n	=	funtor inducido por d_n de $\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$ en $\mathcal{N}_{n-1}(\mathcal{G})$	pg. 72

∂_n	= transformación natural inducida de $N_n(\mathcal{G})$ en $N_{n-1}(\mathcal{G})$	pg. 73
∂_n	= aplicación diferencial de $C_{\mathbb{G}}^{n-1}(X, \Pi)$ en $C_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi)$	pg. 192
$\partial\Delta[n]$	= subobjeto de $\Delta[n]$	pg. 36
$\Psi(F)$	= conjunto simplicial doble “reemplazo simplicial”	pg. 55
ϕ	= morfismo de complejos cruzados	pg. 154
Π	= objeto grupo (abeliano) en \mathcal{E}	pg. 46
Π	= \mathcal{G} -módulo	pg. 59
$\tilde{\Pi}_1$	= objeto grupo abeliano en \mathbf{Gpd}/\mathcal{G}	pg. 93
$\tilde{\Pi}_2$	= $\text{ins}_2(\Pi)$	pg. 206
$\tilde{\Pi}_n$	= $\text{ins}_n(\Pi)$	pg. 206
$\pi(X_*)$	= complejo cruzado fundamental de un espacio filtrado	pg. 156
$\pi_0(\mathcal{C})$	= objeto de componentes conexas de un módulo cruzado \mathcal{C}	pg. 142
$\pi_0(\mathcal{C})$	= objeto de componentes conexas de un complejo cruzado \mathcal{C}	pg. 155
$\pi_0(\mathcal{G})$	= objeto de componentes conexas de un grupoide \mathcal{G}	pg. 5
$\pi_0(\mathcal{G})$	= grupoide de componente conexas de \mathcal{G}	pg. 80
$\pi_0(\mathbf{X})$	= objeto de componentes conexas de \mathbf{X}	pg. 19
$\pi_1(\mathbf{X})$	= grupoide fundamental de \mathbf{X}	pg. 35
$\pi_1(\mathcal{C})$	= grupoide fundamental de un módulo cruzado \mathcal{C}	pg. 142
$\pi_1(\mathcal{C})$	= grupoide fundamental de un complejo cruzado \mathcal{C}	pg. 155
$\pi_2(\mathcal{C})$	= segundo “grupo de homotopía” de un módulo cruzado \mathcal{C}	pg. 143
$\pi_n(\mathbf{X}, x_0)$	= n -ésimo grupo de homotopía de \mathbf{X} en x_0	pg. 36
$\pi_n(\mathcal{C})$	= n -ésimo grupoide de homotopía del complejo cruzado \mathcal{C}	pg. 155
$\pi_n(\mathcal{G})$	= n -ésimo grupoide de homotopía de \mathcal{G}	pg. 81
$[\]$	= operación corchete de un 1-hipergrupoide	pg. 40
$[\]$	= operación corchete de un n -hipergrupoide	pg. 45
$[n]$	= objeto de $\mathbf{\Delta}$	pg. 17
$\mathbf{0}$	= aplicación simplicial cero de X_φ en $L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$ en $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$	pg. 188

$\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$	= objeto cero en la categoría de \mathcal{G} -grupos	pg. 7
$\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$	= objeto inicial de $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$	pg. 128
$\mathbf{0}_{\mathcal{G}}$	= objeto inicial de $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$	pg. 131
1_O	= morfismo en \mathcal{E} de O en O	pg. 2
$\mathbf{1}$	= objeto simplicial terminal en $\mathbf{Simpl}(\mathcal{E})$	pg. 22
$\mathbf{1}$	= objeto terminal en \mathcal{E}	pg. 47
$\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$	= objeto final de $\mathbf{Pxm}_{\mathcal{G}}$	pg. 128
$\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$	= objeto final de $\mathbf{Xm}_{\mathcal{G}}$	pg. 131
A	= objeto de flechas de \mathcal{C}	pg. 1
A_{iso}	= objeto de pares de isomorfía de \mathcal{C}	pg. 4
$B_n(\mathcal{G})$	= $d_{n+1}(\mathcal{N}_{n+1}(\mathcal{G}))$	pg. 103
c	= morfismo composición de \mathcal{C}	pg. 2
c	= (φ, n) -cocadena singular	pg. 184
C	= \mathcal{G} -grupo	pg. 126
\mathcal{C}	= módulo cruzado (\mathcal{G}, C, δ)	pg. 131
\mathcal{C}	= complejo cruzado	pg. 152
$\overline{\mathcal{C}}$	= complejo de cadenas en $\mathbf{Ab}^{\pi_1(C_2)}$ asociado al complejo cruzado \mathcal{C}	pg. 154
$\widehat{\mathcal{C}}$	= grupoide totalmente desconexo asociado al \mathcal{G} -grupo C	pg. 126
$C_{\varphi}^n(\mathbf{X}, \Pi)$	= conjunto de (φ, n) -cocadenas singulares normalizadas	pg. 184
$C_{\mathbb{G}}^n(X, \Pi)$	= conjunto de n -cocadenas de $\mathbb{G}(X)$	pg. 192
d_i, s_j	= morfismo cara y degeneración de \mathbf{X}	pg. 17
d_i^h, s_j^h	= morfismo cara y degeneración en la dirección horizontal de \mathbb{X}	pg. 32
d_i^h, s_j^h	= morfismo cara y degeneración en la dirección vertical de \mathbb{X}	pg. 32
D_n	= morfismo canónico de X_n en $\Delta_n(\mathbf{X})$	pg. 22
Δ^n	= n -símplice estándar (topológico)	pg. 38
$\text{Dec}(\mathbf{X})$	= $i^* \text{Dec}^+(\mathbf{X})$	pg. 32
$\text{End}(\mathcal{G})$	= grupo de endomorfismos del grupoide \mathcal{G}	pg. 5
$\mathbf{End}(\mathcal{G})$	= grupoide totalmente desconexo asociado al grupo $\text{End}(\mathcal{G})$	pg. 5
$\text{End}_{\mathcal{G}}(x)$	= fibra de $\text{End}(\mathcal{G})$ en x	pg. 5
$\text{Ext}^2[\mathcal{T}, \Pi]$	= conjunto de componentes conexas de 2-extensiones	pg. 217
$\text{Ext}^2[\mathcal{C}, \Pi]$	= conjunto de componentes conexas de 2-extensiones	pg. 218
$fbr(f, v)$	= fibra de $f : X \rightarrow \text{End}(\mathcal{G})$ sobre el endomorfismo v	pg. 144

$\mathbf{f}, \mathbf{g}, \dots$	= morfismos simpliciales	pg. 19
\mathbf{f}^+	= morfismos de objetos simpliciales aumentados	pg. 13
\mathcal{G}/\mathcal{H}	= grupoide cociente	pg. 9
$\mathcal{G}(\mathbf{X}, \xi)$	= grupoide fibra del 2-torsor (\mathbf{X}, ξ)	pg. 194
\mathbf{G}	= objeto de flechas de un grupoide simplicial \mathcal{G}	pg. 70
\mathbf{G}	= $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \xi)$ fibra del $(\Pi, 2)$ -torsor	pg. 194
\mathcal{G}	= grupoide simplicial	pg. 69
$\mathcal{G}(x, y)$	= conjunto simplicial de flechas de x a y de \mathcal{G}	pg. 70
\mathcal{G}_n	= grupoide de n -símplices de \mathcal{G}	pg. 70
G_n	= conjunto de flechas de \mathcal{G}_n	pg. 70
$\overline{\mathcal{G}}_n$	= grupoide cociente $\mathcal{G}_n/B_n(\mathcal{G})$	pg. 103
$\tilde{\mathcal{G}}_{n+1}$	= grupoide cociente $\mathcal{G}_{n+1}/\bigcap_{i=0}^n d_i^{-1}(B_n(\mathcal{G}))$	pg. 103
\mathcal{G}_n	= grupoide simplicial n -truncado	pg. 100
\mathbb{G}	= grupoide simplicial doble	pg. 119
$\mathcal{G}_{p,q}$	= grupoide de (p, q) -símplices de \mathbb{G}	pg. 119
\mathcal{G}_n^h	= grupoide simplicial en la dirección horizontal de \mathbb{G}	pg. 119
\mathcal{G}_n^v	= grupoide simplicial en la dirección vertical de \mathbb{G}	pg. 119
${}^1\mathbb{G}$	= cotriple asociado a la adjunción $F_1 \dashv U_1$	pg. 204
${}^2\mathbb{G}$	= cotriple asociado a la adjunción $F_2 \dashv U_2$	pg. 151
${}^n\mathbb{G}$	= cotriple asociado a la adjunción $F_n \dashv U_n$	pg. 167
$\mathbb{G}_\bullet(\mathbf{X})$	= resolución del cotriple	pg. 192
\mathbf{h}	= homotopía	pg. 19
\tilde{h}	= (F, \mathbf{h}) homotopía en \mathbf{Sxm}	pg. 245
\tilde{h}	= (F, \mathbf{h}) homotopía en \mathbf{SCrs}_n	pg. 270
H_n^i	= morfismo canónico de $\Delta_n(\mathbf{X})$ en $\Lambda_n^i(\mathbf{X})$	pg. 22
$\text{hocolim}_{\mathcal{C}} F$	= colímite homotópico de $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$	pg. 55
$H^*(\mathbf{X}, \Pi)$	= grupos de cohomología singular de \mathbf{X} con coeficientes en Π	pg. 185
$H_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$	= grupos de cohomología del complejo $C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$	pg. 185
$H_{\mathbb{G}}^*(X, \Pi)$	= grupos de cohomología del cotriple de X con coeficientes en Π	pg. 192
$H_{\text{sing}}^*(\mathcal{C}, \Pi)$	= grupos de cohomología singular de \mathcal{C} con coeficientes en Π	pg. 190
$H_{n\mathbb{G}}^*(\mathcal{C}, \Pi)$	= grupos de cohomología del cotriple ${}^n\mathbb{G}$ con coeficientes en Π	pg. 206

$H_{sing}^*(\mathcal{G}, \Pi)$	= grupos de cohomología singular de \mathcal{G} con coeficientes en Π	pg. 288
$H_{alg}^2(\mathcal{G}, \Pi)$	= 2-cohomología algebraica en \mathbf{Gd}_n	pg. 292
id	= identidad de \mathcal{C}	pg. 1
$im(F)$	= imagen de un funtor	pg. 14
k_{n+1}	= invariante algebraico	pg. 293
\mathbf{k}_{n+1}	= invariante topológico	pg. 293
K_n^i	= morfismo canónico de X_n en $\Lambda_n^i(\mathbf{X})$	pg. 22
$K(\Pi, n)$	= n -ésimo objeto simplicial de Eilenberg- -Mac Lane asociado a Π	pg. 53
$K(X, 0)$	= objeto simplicial constante determinado por X	pg. 30
$\ker(F)$	= núcleo de un funtor $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$	pg. 8
ℓ	= aplicación simplicial canónica de $hocolim_{\mathcal{C}} F \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{C})$	pg. 55
$L_{\mathcal{G}}(\Pi, n)$	= n -ésimo conjunto simplicial de Eilenberg- -Mac Lane generalizado	pg. 59
$N(\mathcal{G})$	= complejo de Moore del grupoide simplicial \mathcal{G} (sucesión de \mathcal{G}_0 -grupos)	pg. 73
$N_n(\mathcal{G})(x)$	= \mathcal{G}_0 -grupo asociado al grupo $\text{End}_{\mathcal{N}_n(\mathcal{G})}(x)$	pg. 73
$\mathcal{N}_n(\mathcal{G})$	= grupoide núcleo del funtor canónico $K_n^n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Lambda_n^n \mathcal{G}$	pg. 72
$\mathcal{N}(\mathcal{G})$	= complejo de Moore del grupoide simplicial \mathcal{G} (sucesión de grupoides)	pg. 72
O	= objeto de objetos de \mathcal{C}	pg. 1
\mathbf{O}	= objeto simplicial n -truncado constante O	pg. 46
\mathbf{O}	= objeto simplicial de objetos de \mathcal{G}	pg. 71
$\text{obj}(\mathcal{C})$	= objeto de objetos de la categoría \mathcal{C}	pg. 8
s	= dominio de \mathcal{C}	pg. 1
t	= codominio de \mathcal{C}	pg. 1
${}^t u$	= $C(t)(u)$ acción de (las flechas de) \mathcal{G} en (las flechas de) \widehat{C}	pg. 126
\mathbf{T}	= (\mathbb{T}, η, μ) triple	pg. 15
\mathbb{T}	= endofuntor del triple \mathbf{T}	pg. 15
$\text{TDec}(\mathbf{X})$	= resolución del cotriple Dec en \mathbf{X}	pg. 34
$\text{Tor}^2[X, \Pi]$	= conjunto de componentes conexas de $(\Pi, 2)$ -torsores	pg. 196
X_*	= espacio filtrado $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$	pg. 152
X_n	= conjunto de n -símplices de \mathbf{X}	pg. 18
$X_{p,q}$	= conjunto de (p, q) -símplices de \mathbb{X}	pg. 32

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots$	=	objetos simpliciales	pg. 18
\mathbf{X}_φ	=	objeto en la coma categoría $\mathbf{SSet}/\text{Ner}(\mathcal{G})$	pg. 184
\mathbb{X}	=	objeto simplicial doble	pg. 32
\mathbf{X}^+	=	objeto simplicial aumentado	pg. 30
(\mathbf{X}, ξ)	=	$(\Pi, 2)$ -torsk sobre X	pg. 193
$Z_\varphi^n(\mathbf{X}, \Pi)$	=	conjunto de n -cociclos del complejo	
$C_\varphi^*(\mathbf{X}, \Pi)$			pg. 185

Índice

- 2-torsor, 193, 195
- 2-torsor
 - U -escindido, 198
 - de un \mathbf{Crs}_n , 207
 - de un \mathbf{Crs}_n , 214
 - de un \mathbf{Gpd} , 208
 - de un \mathbf{Xm} , 211
- \mathbb{T} -álgebra
 - morfismo, 16
- \mathcal{G} -complejo cruzado
 - morfismo, 154
- \mathbf{Gd}_n , 89
- \mathbf{T} -álgebra, 16
- n -hipergrupoide, 45
- n -hipergrupoide
 - constante, 46
- \mathcal{G} -complejo cruzado, 152
- \mathcal{G} -grupo, 6
- \mathcal{G} -grupo
 - morfismo, 7
- \mathcal{G} -módulo, 8
- 2-extensión
 - de grupoides, 216
 - de un n -complejo cruzado, 217
- cara
 - abierta, 21
- categoría
 - de elementos, 55
 - de objetos simpliciales, 18
 - de pre-módulos cruzados, 129
 - de pre-módulos cruzados sobre un grupoide, 127
 - interna, 1
 - simplicial, 17
- cocadena singular, 184
- cocadena singular
 - normalizada, 184
- cociclo, 184
- cociclo
 - condición de, 51
 - de un 2-torsor, 196
- cohomología
 - del cotriple, 191
- cohomología del cotriple, 192
- cohomología del cotriple
 - en \mathbf{Crs}_n , 206
- cohomología singular, 185
- cohomología singular
 - en \mathbf{Crs} , 190
 - en \mathbf{Crs}_n , 191
- colímite homotópico, 55
- complejo
 - de Moore, 72
- complejo cruzado, 155
 - módulo cruzado base, 152
- complejo cruzado
 - n -dimensional, 158
 - grupoide base, 152
 - componentes conexas, 155
 - espacio clasificador, 157
 - fibración, 155
 - fundamental, 156, 157
 - grupoide fundamental, 155
 - grupos de homotopía, 155
 - simplicial n -dimensional, 257

- complejo singular total, 38
- componentes conexas
 - de un conjunto simplicial, 19
 - de un grupoide, 5
 - de un módulo cruzado, 142
- condición de Kan, 22
- conjunto simplicial, 35
- conjunto simplicial
 - componentes conexas, 36
 - conexo, 36
 - de Eilenberg-Mac Lane generalizado, 59
 - grupoide fundamental, 35
 - grupos de homotopía, 36
- contracción homotópica, 31
- cotriple, 16
- encaje de Yoneda, 24
- equivalencia homotópica, 19
- equivalencia homotópica débil
 - de complejos cruzados, 157
- espacio clasificador
 - de un grupoide simplicial, 85
- fibra, 65
- fibración
 - de categorías, 65
 - de Eilenberg-Mac Lane generalizadas, 59
 - de grupoides, 66
 - de grupoides escindida, 66
 - de grupoides simpliciales, 84
 - de Kan, 22
- funtor
 - Dec, 32
 - coesqueleto, 20
 - comparación de Eilenberg-Moore, 17
 - decalage, 31
 - diagonal de Artin-Mazur, 34
 - esqueleto, 20
 - fibra de una fibración, 66
 - interno, 3
 - total dec, 33
 - tripleable, 17
 - truncación, 20
- Grothendieck
 - producto semidirecto de, 62
- grupo
 - de homotopía de un grupoide simplicial, 81
- grupo de endomorfismos, 7
- grupoide
 - base de un pre-módulo cruzado, 128
 - cociente, 9
 - conexo, 5
 - de componentes conexas de un grupoide simplicial, 80
 - de lazos, 84
 - enriquecido en n -hiper, 86
 - fibra, 195
 - simplicial, 69
 - simplicial fundamental, 85
 - sobre un objeto, 5
 - totalmente desconexo, 5
- grupoide fundamental
 - de un pre-módulo cruzado, 129
- grupoide simplicial
 - n -dimensional, 89
 - libre, 283
- grupos de homotopía, 36
- hipergrupoide, 40
- homotopía, 19
- homotopía
 - en \mathbf{SCrs}_n , 270
 - condición de, 52
- identidad de Peiffer, 131
- identidades
 - de homotopía, 19
 - simpliciales, 18
- invariantes algebraicos
 - de un complejo cruzado, 294

- invariantes topológicos
 - de un complejo cruzado, 294
- inverso homotópico, 19
- módulo cruzado, 131
- módulo cruzado
 - componentes conexas, 142
 - grupoide fundamental, 142
 - nervio, 138
- módulo cruzado simplicial, 221
- módulo cruzado simplicial
 - libre, 284
- morfismo
 - cara, 18
 - cartesiano, 65
 - de conexión, 127
 - degeneración, 18
 - simplicial, 19
- morfismo de conexión
 - cohomologías en \mathbf{Crs}_n , 287
 - cohomologías en \mathbf{Gpd} , 283
 - cohomologías en \mathbf{Xm} , 286
- núcleo simplicial, 20
- nervio
 - de un complejo cruzado, 156
 - de un n -hipergrupoide, 48
 - de un 1-hipergrupoide, 41
 - de un grupoide simplicial, 82
 - de una categoría, 24
- objeto simplicial
 - asférico, 22
 - aumentado, 30
 - de Eilenberg-Mac Lane, 53
 - doble, 32
 - escindido, 31
 - truncado a nivel n , 20
- pre-módulo cruzado, 127
- pre-módulo cruzado
 - morfismo, 128
- realización
 - categoría, 26
 - geométrica, 39
- reemplazo simplicial, 55
- resolución del cotriple, 192
- símplice, 18
- símplice
 - degenerado, 18
 - estándar (simplicial), 36
 - estándar topológico, 38
 - singular, 38
- símplices
 - homotópicos, 35
- subgrupoide
 - normal, 8
- triple, 15