FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

SOBRE ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS COMPLETAS PRIMAS CON ZOCALO NO CERO

LUIS RICO ROMERO

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1988

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ACTA DEL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Curso de 1988 a 1989 Folio .... Número ....

Reunido en el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. Luis Rico Romero, el aspirante leyó un discurso sobre el siguiente tema, que libremente había elegido: "SOBRE ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS COMPLETAS PRIMAS CON ZOCALO NO CERO"

Terminada la lectura y contestadas objecciones formuladas por los Jueces del Tribunal, éste le calificó de APTO CUM LAUDE

Granada 19 de Noviembre de 1988.

EL PRESIDENTE, Javier Otal

El Secretario del Tribunal, Francisco Otal

El Vocal, El Vocal, El Vocal, Antonio Fernández

Firma del Graduando,

INVESTIDURA . . En el día de la fecha se ha conferido a D. .... el Grado de Doctor en la Facultad de .... conforme a lo prevenido en las disposiciones vigentes.

Granada .... de .... de 19....

EL DECANO,

CERTIFICO: Que el Acta que antecede concuerda con la del expediente del interesado remitida a la Secretaría de la Universidad.

Granada .... de .... de 19....

El Catedrático Secretario,

V.º B.º
EL DECANO

Memoria que presenta el licenciado D. Luis Rico Romero para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Departamento de Análisis Matemático.

Directores de la Tesis:

Dr. D. Angel Rodríguez Palacios, Catedrático de Análisis Matemático Facultad de Ciencias, Granada.	Dr. D. Javier Pérez González. Profesor Titular de Análisis Matemático. Facultad de Ciencias, Granada.

Granada, 18 de Octubre de 1988.

a Encarna

INDICE

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

Introducción y resumen de la Memoria

A manera de motivación.

Con esta introducción se pretende exponer los conceptos principales en torno a los cuales se vertebra la presente memoria, hacer un resumen de las ideas que en ella se desarrollan y enumerar los resultados más importantes que se alcanzan.

Iniciamos nuestra presentación dando el enunciado del Teorema con el que concluye este trabajo, y lo hacemos así porque en él converge gran parte del esfuerzo realizado. Se trata de un teorema de los llamados "de continuidad automática" y dice:

Teorema IV. 2.6. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutative compleja y $\mathcal{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma; sea φ un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ cuya imagen contenga al zócalo de $\mathcal{B}$, entonces φ es continuo.*

Pasamos a relatar cómo se conjeturó este Teorema, precisando al mismo tiempo los conceptos que en él intervienen. Esperamos que una vez hecho esto las hipótesis que en él se consideran aparezcan como las condiciones naturales del objetivo que se persigue. Pedimos mientras tanto la benevolencia del lector.

Un precedente lejano de este Teorema IV. 2.6., que sirvió de motivación inicial para nuestro trabajo posterior, se debe a B. Yood [Y; Theorem 2.3].

Yood considera un homomorfismo de anillos, φ, de una Q-álgebra asociativa $\mathcal{A}$ en el álgebra $BL(\mathfrak{X})$ de los operadores lineales continuos sobre un espacio de Banach $\mathfrak{X}$, tal que su imagen $\varphi(\mathcal{A})$ contiene a los operadores continuos de rango finito. Añadiendo la hipótesis de que φ disminuye radios espectrales (innecesaria cuando φ es un homomorfismo de álgebras), logra probar que φ es continuo.

El propósito de lograr una generalización apropiada de este resultado, dentro del contexto de la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas, nos llevó de forma natural a:

i) generalizar el concepto de Q-álgebra para álgebras de Jordan no conmutativas y estudiar las propiedades generales de las mismas.

ii) aislar aquellas propiedades abstractas (es decir, sin referencia espacial) del álgebra $BL(\mathfrak{X})$ que desempeñan un papel relevante en la demostración del Teorema citado de Yood, con el propósito de que, una vez traducidas convenientemente al lenguaje de las álgebras de Jordan normadas completas y exigidas adicionalmente a una tal algebra, permitan abordar con previsible éxito nuestro propósito.

Por lo que se refiere al punto i) no hay ninguna dificultad en la generalización deseada: una Q-álgebra asociativa es un álgebra asociativa normada en la cual el conjunto de los elementos casi-inversibles es abierto. Puesto que para álgebras de Jordan no conmutativas se dispone de una conveniente definición de elemento casi-inversible, que se reduce a la usual cuando el álgebra es de hecho asociativa, definimos una $\mathfrak{Q}$-álgebra de Jordan no conmutativa como un álgebra de Jordan no conmutativa normada en la cual el conjunto de sus elementos casi-inversibles es abierto. El Capítulo I lo hemos dedicado al estudio de algunas propiedades generales de tales álgebras. Más adelante volveremos sobre ello.

En lo que respecta al punto ii), de las muchas perfecciones puramente algebraicas de que gozan las álgebras $BL(\mathfrak{X})$, nos fijamos -porque Yood hacia uso de ello en la demostración de su teorema- en el hecho de que tales álgebras tienen ideales izquierdos minimales: si f es un elemento del dual topológico $\mathfrak{X}^*$ de $\mathfrak{X}$, y $\mathfrak{x}$ es un vector en $\mathfrak{X}$ tal que $f(\mathfrak{x})=1$, definiendo $T : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ por $Tz = f(z)\mathfrak{x}$ para todo z en $\mathfrak{X}$. es fácil ver que $BL(\mathfrak{X})T$ es un ideal izquierdo minimal de $BL(\mathfrak{X})$. Puesto que en la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas los ideales interiores desempeñan un papel análogo al que juegan los ideales unilaterales en la teoría de las álgebras asociativas, nos vimos llevados a la consideración de álgebras de Jordan no conmutativas con ideales interiores minimales. Tales álgebras habían sido estudiadas por A.Rodríguez y A. Fernández, [F-R] y [F-R3] apoyándose en el trabajo previo que habían realizado J. Osborn y M. Racine sobre las correspondientes álgebras de Jordan [O-R].

Por otro lado es bien sabido que el álgebra $BL(\mathfrak{X})$ es prima. Para un álgebra asociativa el ser prima y tener ideales izquierdos minimales tiene importantes consecuencias: por ejemplo, para una tal álgebra la representación regular izquierda asociada a un ideal izquierdo minimal es irreducible e inyectiva por lo que el álgebra en cuestión es primitiva. Es natural por ello considerar que las álgebras de Jordan no conmutativas que buscamos deban ser también álgebras primas.

Hasta aquí lo referente a perfecciones puramente algebraicas de BL($\mathfrak{X}$). Si consideramos ahora el punto de vista analítico, las álgebras BL($\mathfrak{X}$) son álgebras de Banach. Como nuestro objetivo es un teorema de continuidad automática cualquier perfección topológica del álgebra imagen podía ser interesante para nuestros propósitos; ello nos llevó a considerar el hecho de que las álgebras BL($\mathfrak{X}$) tienen minimalidad de la topología de la norma; es decir, cualquier norma de álgebra en BL($\mathfrak{X}$) que induzca una topología menos fina que la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados es, de hecho, equivalente a la norma de operadores y por tanto ambas topologías son la misma. Este hecho había sido demostrado por Bonsall [Bo.] (ver también [R.P.3; pág. 123]). Esta propiedad topológica de que gozan las álgebras BL($\mathfrak{X}$) nos pareció lo suficientemente importante como para mantenerla también en el contexto no asociativo.

En resumen, las reflexiones anteriores, nos llevan a considerar las álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas primas con ideales interiores minimales y con minimalidad de la topología de la norma como una primera aproximación a las álgebras que buscamos.

Tan sólo nos queda explicar ahora alguna cuestión de tipo técnico y de terminología. Para un álgebra asociativa el ser prima implica que carece de ideales no nulos de cuadrado cero, es decir, tal álgebra es semiprima. La existencia de ideales izquierdos minimales en un álgebra asociativa tiene su mayor interés y utilidad cuando el álgebra además es semiprima, por lo cual estas condiciones van frecuentemente unidas. En la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas la condición análoga a la "semiprimidad asociativa" se expresa diciendo que el álgebra es "no degenerada" pero, así como toda álgebra asociativa prima es semiprima, no es cierto que un álgebra de Jordan no conmutativa prima sea necesariamente no degenerada por lo cual esta condición debe ser adicionalmente impuesta. Esto por lo que se refiere al detalle técnico.

La cuestión de terminología es más corta de aclarar: un álgebra de Jordan no conmutativa no degenerada se dice que tiene zócalo no cero si tiene ideales interiores minimales; el zócalo de dicha álgebra es, por definición, la suma de todos ellos.

Llegamos así, finalmente, a la consideración de que las *álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas no degeneradas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma* parecen ser las candidatas a desempeñar el papel del álgebra imagen BL($\mathfrak{X}$) en la deseada generalización del Teorema de B. Yood. Dicha consideración quedó justificada cuando logramos demostrar, con bastante esfuerzo, nuestro teorema IV. 2.6.

No quisiéramos dejar la impresión de que el Teorema IV. 2.6 haya sido nuestro único objetivo a alcanzar. Sirvió de idea motivadora, pero en cuanto tuvimos fijada la anterior clase de álgebras dichas álgebras nos parecieron lo suficientemente interesantes para merecer un estudio por sí mismas. Esto nos llevo a intentar describir lo mejor posible las álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas no degeneradas primas con zócalo no cero y, eventualmente, con minimalidad de la topología de la norma (los capítulos II, III y parte del IV de esta memoria están dedicados a ello). De hecho tal descripción, contiene resultados intrínsecamente interesantes, no esperables a priori.

Entienda ahora el lector por qué hemos comenzado esta presentación enunciando su resultado final; en dicho enunciado se ponen de manifiesto conjuntamente todas las ideas fundamentales que se estudian en este trabajo:

i) el concepto de Q-álgebra en el caso Jordan no conmutativo.

ii) las álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas, no degeneradas primas con zócalo no cero.

iii) el concepto de minimalidad de la topología de la norma, y las perfecciones que se consiguen cuando se considera esta hipótesis adicional sobre tales álgebras.

iv) Teoremas de continuidad automática cuando en el álgebra de partida se debilita la hipótesis usual de complitud, y se reemplaza por la de ser Q-álgebra, y en el álgebra de llegada se refuerza la hipótesis usual de semisimplicidad con la adicional de minimalidad de la topología de la norma.

Breve historia de las Q-álgebras y nuestra aportación a las mismas.

Irving Kaplansky introduce en 1946 [K.3], como un concepto auxiliar útil en el estudio de los anillos topológicos compactos, el concepto de Q-anillo para referirse a un anillo topológico en el que el conjunto de sus elementos casi-inversibles es abierto. Más tarde, en 1949, extiende -en la manera obvia- dicho concepto para álgebras asociativas normadas dando así lugar al concepto de Q-álgebra [K.].

Desde entonces el estudio de las Q-álgebras ha recibido un tratamiento desigual, surgen aquí y allá esporádicamente [Y.], [Y.2], [Z.], pero no se las considera como un objeto merecedor de un estudio sistemático por derecho propio. Muy recientemente parece que las cosas están cambiando en este sentido; el pasado mes de Septiembre el profesor Theodore W. Palmer envió al profesor Rodríguez Palacios un "preprint" [P.] donde se establecen las bases para una teoría de las Q-álgebras asociativas. Cuando se recibió el citado trabajo ya teníamos concluido el Capítulo I de esta memoria, pero nos alegró que el profesor Palmer se interesara por el tema y, también, encontrar reflejadas en su escrito -a nivel asociativo, claro está- muchas de las ideas que habíamos madurado en nuestro estudio de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas.

Para nosotros hay una razón más próxima que justifica nuestro interés por las Q-álgebras. Procede de que, como hace notar el profesor Rodríguez Palacios en [R.P.], para tales álgebras permanece válida la demostración dada por B. Aupetit. [A.] de que el ideal separador de un epimorfismo entre álgebras de Banach complejas está contenido en el Radical de Jacobson .

En el trabajo citado de Rodríguez Palacios se idea un procedimiento para asociar a cada álgebra normada completa (no asociativa) una conveniente Q-álgebra (asociativa), de manera tal que isomorfismos entre álgebras normadas completas inducen isomorfismos entre las correspondeintes Q-álgebras asociadas, lo cual, junto con la extensión mencionada del resultado de Aupetit proporciona una potente herramienta que ha permitido abordar con éxito el problema de unicidad de la topología de la norma completa en álgebras no-asociativas.

Como ya se ha dicho, en el Capitulo I de esta memoria, se introduce el concepto de Q-álgebra de Jordan no conmutativa. Dicho concepto surge cuando se considera sobre un álgebra de Jordan no conmutativa una norma de álgebra para la que el conjunto de los elementos casi-inversibles es abierto. Como es sabido toda álgebra de Jordan no conmutativa normada completa es Q-álgebra. Pero también es fácil dar ejemplos de Q-álgebras no completas; como por ejemplo el álgebra m_0 de las sucesiones casi nulas con la norma del máximo.

De los resultados obtenidos queremos destacar el Teorema I. 3.10 en el que se caracterizan de muy distintas formas las Q-álgebras dentro de la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas. Particular importancia tiene la caracterización de las Q-álgebras como aquellas álgebras de Jordan no conmutativas normadas que son plenas en su completación normada pues de ella se sigue, como consecuencia inmediata, que el espectro de un elemento de una Q-álgebra de Jordan no conmutativa tiene exactamente las mismas propiedades que en el caso completo y, en particular, es válida la fórmula clásica de Gelfand-Beurling afirmando la igualdad entre el radio espectral geométrico y el algebraico.

Quizás, debido a estos hechos, Palmer llama a las Q-álgebras "álgebras espectrales", nombre que nos parece mejor que el tradicional, aunque sin embargo lo hemos mantenido.

La caracterización anterior responde negativamente (al igual que en [P.]) a la pregunta formulada por A. Wilansky en la sección "Letters to the Editor" de la revista American Mathematical Monthly (vol. 91. (1984)) acerca de la eventual existencia de alguna Q-álgebra (asociativa) que no fuera plena en su completación.

También se estudia la estabilidad de la estructura de Q-álgebra a través de las operaciones usuales de unitización, complexificación y paso a cociente por un ideal cerrado. Destacaremos porque su demostración hace uso de un resultado profundo de la Teoría de álgebras de Jordan, la Proposición 3.8 donde se establece una identidad, de apariencia ingenua pero que costó algún esfuerzo, y que permite probar que la complexificación normada de una Q-álgebra de Jordan no conmutativa es también una Q-álgebra.

Destacamos también, por el papel que juega en esta memoria, el Corolario I.3.13 que si $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra de Jordan no conmutativa, $\mathcal{B}$ es un álgebra de Jodan no conmutativa semisimple y $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un epimorfismo, entonces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es cerrado y $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ es una Q-álgebra con la norma cociente.

Igualmente nos parece interesante la Proposición I. 3.19 donde se prueba que el hecho de que los ideales interiores modulares maximales son cerrados caracteriza a las Q-álgebras dentro de la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas. En resumen, queda patente en nuestro estudio, que las Q-álgebras de Jordan no conmutativas tienen importantes perfecciones algébrico-topológicas que permiten extender para ellas -con mayor o menor esfuerzo- muchos de los resultados importantes para álgebras de Banach.

Nuestra aportación al estudio de las álgebras de Banach primas con ideales minimales.

Es conocida la estrecha relación que existe entre las álgebras primas con ideales izquierdos minimales y las parejas de espacios vectoriales en dualidad, debida a que toda álgebra prima con zócalo no cero se representa como subálgebra de un álgebra de operadores lineales con adjunto respecto de un par dual [Ka.2; Theorem 36], [J.2; pg. 75] y [H; Theorem 1.2.1]

El estudio de las álgebras de Banach con ideales izquierdos minimales ha sido tradicionalmente una parcela interesante dentro de la teoría general de las álgebras de Banach, quizás por el hecho de que incluyen como caso particular a las álgebras de operadores BL($\mathfrak{X}$). Por ello han servido como banco de pruebas para demostrar en primera instancia ciertas conjeturas como, por ejemplo, la unicidad de la topología de la norma completa en álgebras de Banach semisimples.

Para tales álgebras se dispone además de un buen teorema de representacion, pues una tal álgebra puede representarse de forma continua como un álgebra de operadores lineales con adjunto para un conveniente apareamiento Banach. [B-D; Theorem 31.6] y [R; Theorem 2.4.2]

Nuestra aportación principal al estudio de las álgebras de Banach primas con ideales minimales ha consistido en estudiar de qué manera la hipótesis adicional de minimalidad de la topología de la norma se traduce equivalentemente en ciertas perfecciones del apareamiento de Banach y en ver cómo éstas implican a su vez importantes propiedades en el álgebra de partida.

Destacamos por su importancia en todo el trabajo el Lema Fundamental II. 1.4

II. 1.4. LEMA FUNDAMENTAL. *Sea* $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle\, , \,\rangle)$ *un apareamiento de Banach,* $\mathfrak{B}$ *una subálgebra de* $BL(\mathfrak{X})$ *que contiene los operadores de rango finito con adjunto, y sea* $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ *una norma de álgebra en* $\mathfrak{B}$*; entonces existe un número* $k > 0$ *tal que* $|\langle Tx, y\rangle| \leq k\, |\!|\!| T |\!|\!|\, \|x\|\, \|y\|$, *para todo* $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ *y* $T \in \mathfrak{B}$.

Tal Lema se obtuvo después de analizar en profundidad un resultado que aparece en el libro de Rickart [R: Theorem 2.4.17], en cuya demostración aparece, aunque no de forma explícita. Digamos también que la demostración que damos nosotros del mismo, aunque inspirada en la original de Rickart, es formalmente diferente y creemos que bastante más diáfama y convincente.

Haciendo uso del Lema Fundamental se demuestran los importantes Teoremas II. 1.5. y II. 2.4. los cuales establecen, entre otras cosas, que para un apareamiento de Banach $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ el hecho de que la inmersión canónica $x \longrightarrow \hat{x}$ de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$ definida por la forma bilineal $\langle , \rangle$ sea un homeomorfismo sobre su imagen es equivalente a que toda subálgebra de $BL(\mathfrak{X})^+$ y, en particular, toda subálgebra de $BL(\mathfrak{X})$, que contenga a los operadores continuos de rango finito con adjunto tenga mínima topología de la norma. Haciendo uso de este resultado y del Teorema de estructura II. 2.1 llegamos a probar el siguiente Teorema:

II. 2.2. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, entonces toda subálgebra de $\mathcal{A}$ que contenga al zócalo tiene mínima topología de la norma.*

El capítulo concluye con una generalización del Teorema de Yood:

II. 2.5. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{Q}$-álbebra asociativa compleja, $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach compleja, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, y sea φ un homomorfismo Jordan entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ verificando $\varphi(\mathcal{A}) \supset soc(\mathcal{B})$, entonces φ es continuo.*

Nótese que el Teorema anterior generaliza en un doble sentido el

Teorema de Yood pues, de una parte se considera un homomorfismo Jordan y de otra porque las hipótesis sobre el álgebra de llegada $\mathfrak{B}$ que aquí se consideran son satisfechas por las álgebras $BL(\mathfrak{X})$

Nuestra aportación al estudio de las álgebras de Jordan primas con ideales minimales.

La relación antes aludida, entre las álgebras asociativas primas con zócalo no cero y los pares duales de espacios vectoriales permanece -con las lógicas modificaciones esperables- para las álgebras de Jordan no degeneradas primas con zócalo no cero, como se pone de manifiesto en el trabajo de Osborn-Racine [O-R]. Sin embargo el Teorema de representación para álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero, del cual hicimos uso en el Capítulo II carecía de una conveniente versión para el caso de álgebras de Jordan complejas normadas completas; el resultado más próximo del que disponíamos en este caso, tan sólo añadía como perfección al Teorema de representación algebraico que los apareamientos de espacios vectoriales (sobre álgebras de división) que allí aparecía eran, de hecho, apareamientos de espacios vectoriales complejos. Por ello nuestro primer objetivo en este capítulo fue establecer un Teorema de representación para álgebras de Jordan complejas normadas completas, no degeneradas primas con zócalo no cero análogo al correspondiente asociativo.

Un segundo objetivo consistió en analizar las perfecciones que, en la situación antes considerada, se deducen de añadir la hipótesis de minimalidad de la topología de la norma.

Nuestro primer objetivo queda cubierto con el Teorema III, 1.2.

III. 1.2. TEOREMA. *Sea* $(\mathcal{A}, \|.\|)$ *un álgebra de Jordan compleja normada completa no degenerada, prima con zócalo no cero. Entonces* $\mathcal{A}$ *está en alguna de las situaciones siguientes:*

i) Es un álgebra de Jordan compleja finito dimensional simple.

ii) Es el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no degenerada y continua sobre un espacio de Banach complejo infintio dimensional.

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ *tal que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra del álgebra de Jordan* $\mathrm{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)^{+}$ *que contiene a* $\mathrm{FL}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$, *y la inmersión de* $(\mathcal{A}, \|.\|)$ *en* $\left(\mathrm{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle), |.|_{d}\right)$ *es continua.*

iv) Existe un espacio de Banach complejo autodual, simétrico o antisimétrico, $(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)$ *tal que* $\mathcal{A}$ *es una subalgebra del álgebra de Jordan* $\mathrm{Sim}[\mathrm{L}(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ *que contiene a* $\mathrm{Sim}[\mathrm{FL}(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$, *y la inmersión de* $(\mathcal{A}, \|.\|)$ *en* $\mathrm{BL}(\mathfrak{X})$ *es continua.*

La complejidad técnica de la demostración de este Teorema se pone de manifiesto en la necesidad de estudiar separadamente el caso descrito en *iii)* y los dos casos descritos en *iv)*, lo que también influye en la mayor extensión que ocupa esta demostración.

Para lograr el segundo objetivo es necesario establecer previamente la correspondiente versión de los Teoremas II. 1.5 y II.

2.4 para un espacio de Banach autodual $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ en donde se establece que son condiciones equivalentes, entre otras, el hecho de que la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$, $x \longrightarrow \hat{x}$ inducida por la forma bilineal $\langle , \rangle$ sea homeomórfica, y el hecho de que toda subálgebra de $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$ que contenga a los operadores simétricos de rango finito tenga mínima topología de la norma. Esto es lo que se consigue probar en el Teorema III. 2.2.

Una consecuencia importante de este Teorema es que para un álgebra de Jordan cuadrática $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f)$, con $(\mathfrak{X}, f)$ espacio de Banach autodual simétrico, la hipótesis de tener $\mathcal{A}$ minimalidad de la topología de la norma equivale a que la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por f sea homeomórfica, lo cual se pone de manifiesto en el Corolario III. 2.3.

Se logra así demostrar el Teorema de representación Teorema III. 2.4 que establece los tipos a los que, salvo isomorfismos topológicos, se ajusta un álgebra de Jordan compleja no degenerada, normada completa prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma.

III. 2.4. TEOREMA. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan compleja no degenerada, normada completa, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, entonces salvo isomorfismos topológicos $\mathcal{A}$ responde a uno de los cuatro tipos siguientes:*

i) $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan compleja finito dimensional simple.

ii) $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f)$, *donde* $(\mathfrak{X}, f)$ *es un espacio de Banach complejo autodual simétrico infinito dimensional, tal que la inmersión canónica de* $\mathfrak{X}$ *en* $\mathfrak{X}^*$ *inducida por* f *es homeomórfica.*

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ *tal que las inmersiones canónicas de* $\mathfrak{X}$ *en* $\mathcal{Y}^*$ *y de* $\mathcal{Y}$ *en* $\mathfrak{X}^*$ *inducidas por la forma bilineal* $\langle, \rangle$ *son homeomórficas, de manera que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra cerrada de* $BL(\mathfrak{X})^+$, *contenida en* $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ *y conteniendo a* $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$.

iv) Existe un espacio de Banach complejo autodual $(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)$, *simétrico o antisimétrico, tal que la inmersión canónica de* $\mathfrak{X}$ *en* $\mathfrak{X}^*$ *inducida por la forma bilineal es homeomórfica, de manera que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra cerrada de* $BL(\mathfrak{X})^+$, *contenida en* $Sim[L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)]$ *y conteniendo a* $Sim[FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)]$.

El capítulo finaliza probando la correspondiente versión Jordan del Teorema II. 2.4 antes enunciado, y que dice que toda subálgebra $\mathcal{C}$ de un álgebra $\mathcal{A}$ en las condiciones del Teorema anterior, conteniendo al zócalo de $\mathcal{A}$ tiene mínima topología de la norma.

Un teorema de continuidad automática y nuestro estudio del caso Jordan no conmutativo.

El Capítulo IV empieza con un apartado en el cual se establece, haciendo uso de un importante resultado de Aupetit, un teorema de continuidad automática que responde a las ideas comentadas al principio de esta introducción:

IV. 1.1. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa compleja, $\mathcal{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, semisimple y con minimalidad de la topología de la norma, y f un epimorfismo de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}$; entonces f es continuo.*

Tal resultado se usa a continuación para probar que toda JB^*-álgebra no conmutativa tiene mínima topología de la norma (Teorema IV. 1.4), resultado que había sido establecido por Cleveland [Cl.] para $\mathcal{C}^*$-álgebras asociativas, si bien el nuestro es más fuerte, incluso en su particularización asociativa, pues implica que si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{C}^*$-álgebra su simetrizada $\mathcal{A}^+$ tiene mínima topología de la norma.

Concluye este primer apartado del Capítulo IV con el único resultado de naturaleza geométrica que hay en todo el trabajo, probando que la norma de una JB^*-álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ es minimal entre las normas de álgebra sobre $\mathcal{A}$.

En el apartado segundo del capítulo IV se extiende el Teorema III. 2.4 a álgebras de Jordan no conmutativas (Teorema IV. 2.2) y se obtiene como consecuencia de los resultados principales hasta aquí obtenidos el siguiente importante Teorema.

IV. 2.4. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma. Toda subálgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} \supset$* soc($\mathcal{A}$)

tiene mínima topología de la norma

Como consecuencia sencilla del Teorema anterior se obtiene finalmente el Teorema IV. 2.6 con el que empezamos esta introducción.

Antes de concluir, quiero poner de manifiesto que este trabajo de investigación ha sido inspirado y dirigido en todo momento por el Dr. Angel Rodríguez Palacios y por el Dr. Javier Pérez González, a quienes quiero manifestar mi más sincero agradecimiento por su constante orientación y permanente ayuda, sin las cuales no habría sido posible la realización de esta Memoria.

Granada Octubre, 1988.

Luis Rico Romero.

CAPÍTULO I

1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS ALGEBRAICOS BASICOS
2. ALGEBRAS NORMADAS.
3. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE Q-ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS.

1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS ALGEBRAICOS BASICOS.

Esta sección se incluye para dotar de autonomía a nuestro trabajo y servir de referencia que facilite su lectura. Nos hemos limitado a exponer aquellos conceptos y resultados algebraícos de la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas que consideramos más relevantes para nuestro estudio. Las referencias básicas son [J], [M] y [H-M].

1.1. DEFINICION. Un algebra sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathcal{A}$ dotado de una aplicación bilineal de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ llamada producto. Si el producto es asociativo el álgebra se llama asociativa.

Las definiciones de álgebra con unidad, ideal izquierdo, ideal (bilátero), homomorfismo y de álgebra cociente son las mismas que en el caso asociativo.

Consideraremos solamente álgebras reales ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o complejas ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1.2 NOTACION. El producto en un álgebra se nota usualmente por yuxtaposición, $(a,b) \longrightarrow ab$, y se utilizan notaciones especiales para aquéllos casos en los que se considera más de un producto sobre un mismo espacio vectorial.

Salvo necesidad de mayores precisiones un álgebra se simboliza igual que su espacio vectorial subyacente.

Para elementos a, b, c de un álgebra $\mathcal{A}$ notaremos:

$[a,b] = ab - ba$ (conmutador de a y b);

$[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$ (asociador de a, b y c);

$L_a(x) = ax \quad (x \in \mathcal{A})$ (multiplicador izquierdo por a);

$R_a(x) = xa \quad (x \in \mathcal{A})$ (multiplicador derecho por a)

Dado un espacio vectorial $\mathfrak{X}$ se simboliza por $L(\mathfrak{X})$ el álgebra asociativa de los operadores lineales de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}$.

Es claro que para cada elemento a de un álgebra $\mathcal{A}$ se tiene que L_a y R_a están en $L(\mathcal{A})$, y las aplicaciones $a \longrightarrow L_a$, $a \longrightarrow R_a$ son lineales.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se nota $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ al álgebra cuyo espacio vectorial es el mismo de $\mathcal{A}$ y cuyo producto está definido por:

$$a_{\lambda} b = \lambda ab + (1-\lambda)\, ba$$

Este álgebra se llama *la mutación λ de $\mathcal{A}$*. Cuando $\lambda \neq 1/2$ el producto en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ se determinan mutuamente, pues si $\mu = \dfrac{\lambda}{2\lambda-1}$ se comprueba que $\mathcal{A}^{(\lambda)(\mu)} = \mathcal{A}$.

Por otra parte $\mathcal{A}^{(\lambda)(1/2)} = \mathcal{A}^{(1/2)}$, para todo escalar λ, por lo que el sólo conocimiento del producto en $\mathcal{A}^{(1/2)}$ no permite, en general, recuperar el producto de $\mathcal{A}$. El álgebra $\mathcal{A}^{(1/2)}$ se nota $\mathcal{A}^+$ y se llama *álgebra simetrizada de $\mathcal{A}$*, su producto se representa por

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Notaremos $L_a^+ = \dfrac{1}{2}(L_a + R_a) = R_a^+$ al operador de multiplicación por a en $\mathcal{A}^+$.

1.3 UNITIZACION DE UN ALGEBRA. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{K}$, con o sin unidad. Se llama unitización de $\mathcal{A}$ al álgebra $\mathcal{A}_1$, cuyo espacio vectorial es $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$ y cuyo producto viene dado por:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$$

para cualesquiera a, b en $\mathcal{A}$ y α, β en $\mathbb{K}$. El elemento $I = (0, 1)$ es la unidad de $\mathcal{A}_1$, y también es claro que $\mathcal{A} \times \{0\}$ es un ideal de $\mathcal{A}_1$ isomorfo a $\mathcal{A}$.

Si se identifica $\mathcal{A}$ con $\mathcal{A} \times \{0\}$ y $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K}I$, es fácil ver que todo elemento z de $\mathcal{A}_1$ se escribe de forma única como $z = a + \alpha$, con $a \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

1.4. COMPLEXIFICACION DE UN ALGEBRA. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, se llama complexificación de $\mathcal{A}$, y se nota $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, al conjunto $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dotado de las siguientes leyes:

adición: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

producto por números complejos: $(\alpha + i\beta)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$

producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

para todos a, b, c, d en $\mathcal{A}$ y α, β en $\mathbb{R}$.

Así, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es un álgebra compleja.

La aplicación $a \longrightarrow (a, 0)$ es un $\mathbb{R}$-monomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

Puesto que $(a, b) = (a, 0) + i(b, 0)$, si identificamos $\mathcal{A}$ con su imagen en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, cada elemento $z \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ puede escribirse de modo único en la forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathcal{A}$.

De este modo se puede considerar $\mathcal{A}$ como subálgebra real de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, y también se facilitan los cálculos.

Un álgebra $\mathcal{A}$ en la que para todo par de elementos a, b en $\mathcal{A}$ se verifica la igualdad $(ab)a = a(ba)$ (ley flexible) se llama álgebra flexible.

1.5. PROPOSICION. *Para elementos* a *y* b *de un álgebra flexible* $\mathcal{A}$ *se verifican las identidades:*

i) $L_{ab} - L_a L_b = R_{ba} - R_a R_b$

ii) $L_{a^2} - L_a^2 = R_{a^2} - R_a^2$

iii) $[L_a , R_b] = [R_a , L_b]$

iv) $[R_{a^2}, L_a] = [L_{a^2}, L_a] = [R_{a^2}, R_a] = [L_{a^2}, R_a]$

Demostración

i) La ley flexible se expresa $[a, b, a] = 0$; sustituyendo a por $a + c$:

$$0 = [a + c, b, a + c] = [a, b, c] + [c, b, a]$$

Expresando esta igualdad mediante operadores, y tomando c como variable, tenemos *i)*.

La identidad *ii)* se obtiene tomando $a = b$ en *i)*.

En términos de operadores la ley flexible se expresa: $[R_a , L_a] = 0$. Si sustituimos a por $a + b$, tenemos:

$0 = [R_{a+b} , L_{a+b}] = [R_a , L_b] + [R_b , L_a]$, de donde $[R_a , L_b] = -[R_b , L_a] = [L_a , R_b]$, y así tenemos la identidad *iii)*.

De la identidad *ii)* tenemos:

$[L_{a^2}, L_a] - [L_a^2 , L_a] = [R_{a^2}, L_a] - [R_a^2, L_a]$;

además $[L_a^2, L_a] = 0 = [R_a^2, L_a]$, por tanto:

$[L_{a^2}, L_a] = [R_{a^2}, L_a]$

Análogamente se obtiene $[L_{a^2}, R_a] = [R_{a^2}, L_a]$.

Finalmente, las dos identidades obtenidas, junto con *iii)* nos proporciona *iv)*

1.6. DEFINICION. Para cada elemento a de un álgebra $\mathcal{A}$ se define el operador $\mathcal{U}_a$ por $\mathcal{U}_a = (L_a + R_a)\, L_a - L_a{}^2$.

1.7. PROPOSICION. *En un álgebra flexible* $\mathcal{A}$ *se verifica que* $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}^+_a$ *donde* $\mathcal{U}^+_a = 2\, L^+_a\, L^+_a - L^+_a{}^2$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 1.5 - *ii)*, y la identidad $[R_a , L_a] = 0$, en un álgebra flexible se tiene: $(L_a + R_a)\, L_a - L_a{}^2 = (L_a + R_a)\, R_a - R_a{}^2$, y de aquí la demostración es inmediata.

1.8. DEFINICION. Un álgebra $\mathcal{A}$ en la que para todo par de elementos a y b de $\mathcal{A}$ se verifican las igualdades:

$$ab = ba \qquad \text{(conmutativa)}$$

$$(a^2 b)\, a = a^2\, (ba) \qquad \text{(identidad de Jordan)}$$

se llama *álgebra de Jordan*.

Un álgebra flexible y que verifica la identidad de Jordan se llama *álgebra de Jordan no conmutativa*.

Puesto que toda álgebra conmutativa es flexible, la clase de las álgebras de Jordan está contenida en la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas. También es claro que toda álgebra asociativa es un álgebra de Jordan no conmutativa.

1.9. PROPOSICION. *Un álgebra flexible* $\mathcal{A}$ *es de Jordan no conmutativa si y sólo si* $\mathcal{A}^+$ *es un álgebra de Jordan.*

Demostración. Para $a \in \mathcal{A}$ se tiene de acuerdo con la Proposición

1.5 - *iv)*, que:

$$[L^{+}_{a^2}, R^{+}_{a}] = \frac{1}{4}[L_{a^2} + R_{a^2}, L_a + R_a] = [L_{a^2}, R_a];$$

en consecuencia $[L_{a^2}, R_a] = 0$ si y sólo si $[L^{+}_{a^2}, R^{+}_{a}] = 0$

Como caso particular de la Proposición 1.9 tenemos que si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa, $\mathcal{A}^{+}$ es un álgebra de Jordan; en este caso se dice que $\mathcal{A}^{+}$ es el álgebra de Jordan subyacente a $\mathcal{A}$, y el producto de $\mathcal{A}^{+}$ se llama *producto Jordan de* $\mathcal{A}$. Cuando un álgebra de Jordan es una subálgebra de un álgebra $\mathcal{A}^{+}$, con $\mathcal{A}$ asociativa, se le llama *álgebra de Jordan especial*. Se sabe que existen álgebras de Jordan no especiales [J.; pg 11]; tales álgebras se llaman *álgebras de Jordan excepcionales*.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra flexible y λ un escalar, $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ también es flexible, y como $\mathcal{A}^{(\lambda)+} = \mathcal{A}^{+}$, se obtiene como consecuencia de la Proposición 1.9 que la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas es estable por λ - mutaciones. En particular se tiene que si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa $\mathcal{A}^{(\lambda)}$ es un álgebra de Jordan no conmutativa; a tales álgebras se les llama *casi-asociativas estrictas*. Conviene tener en cuenta también que la unitización $\mathcal{A}_1$ y la complexificación $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ de un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ (respectivamente de Jordan o asociativa) es también un álgebra de Jordan no conmutativa (respectivamente de Jordan, asociativa).

1.10. DEFINICION. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad I sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{A}$ se dice *cuadrática* si para todo x en $\mathcal{A}$ los elementos x^2, x e I son linealmente dependientes, es decir, existen α y β en $\mathbb{K}$ tales que: $x^2 + \alpha x + \beta I = 0$.

Si un álgebra cuadrática $\mathcal{A}$ es flexible, como x^2 es combinación lineal de x e I, se verifica que $(x^2 y)\, x = x^2\,(yx)$, $y \in \mathcal{A}$; luego se cumple también el axioma de Jordan, y en consecuencia $\mathcal{A}$ es de Jordan no conmutativa.

Las álgebras cuadráticas quedan caracterizadas, en general, por el siguiente Lema de Osborn [O]. Recuérdese que un álgebra $\mathcal{V}$ se llama *anticonmutativa* cuando $xy = -\,yx$, para todo x e y en $\mathcal{V}$.

1.11. LEMA. *Sea $\mathcal{V}$ una $\mathbb{K}$-álgebra anticonmutativa, cuyo producto notamos $x \wedge y$; sea* f *una forma bilineal sobre $\mathcal{V}$, y sea $\mathcal{A} = \mathcal{V}+\mathbb{K}I$ Entonces $\mathcal{A}$ con el producto:*

$$(*) \quad (x + \alpha)\,(y + \beta) = \alpha y + \beta x + x\wedge y + \alpha\beta + f(x,y),$$

es un álgebra cuadrática sobre $\mathbb{K}$.

Recíprocamente, toda álgebra cuadrática sobre $\mathbb{K}$ se obtiene a partir de una $\mathbb{K}$-álgebra anticonmutativa $\mathcal{V}$ y de una forma bilineal sobre $\mathcal{V}$, como se ha indicado anteriormente.

El siguiente Lema es debido también a Osborn [O]

1.12. LEMA. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra cuadrática; $\mathcal{V}$, $\wedge$,* f *son, respectivamente, el álgebra anticonmutativa, el producto en dicha álgebra y la forma bilineal sobre $\mathcal{V}$ asociados a $\mathcal{A}$, como se ha dicho en 1.11. Entonces:*

i) $\mathcal{A}$ es flexible (es decir de Jordan no conmutativa) si y sólo si f *es simétrica y se verifica que* $f(x,\, x \wedge y) = 0$ *para cualesquiera x, y en $\mathcal{V}$.*

ii) $\mathcal{A}$ es de Jordan si y sólo si f *es simétrica y* $x \wedge y = 0$, *para cualesquiera x, y en $\mathcal{V}$; el producto en $\mathcal{A}$ viene dado en este caso por:*

$$(**)\qquad (x + \alpha)(y + \beta) = \alpha y + \beta x + \alpha\beta + f(x, y).$$

Simbólicamente se escribe $\mathcal{A} = J(\mathcal{V}; f, \wedge)$ para denotar el álgebra de Jordan no conmutativa cuadrática cuyo espacio vectorial es $\mathcal{V} + \mathbb{K}I$ y cuyo producto viene dado como en *(*)*, para la forma bilineal simétrica f y el producto anticonmutativo $\wedge$. Análogamente notaremos $\mathcal{A} = J(\mathcal{V}, f)$ el álgebra de Jordan cuyo espacio vectorial es $\mathcal{V} + \mathbb{K}I$ y cuyo producto viene dado por *(**)*; dicha álgebra se llama álgebra de Jordan de la forma bilineal f sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}$. Es sabido que estas álgebras son simples si y sólo si dimensión de $\mathcal{V}$ es mayor o igual que 2, y f es no degenerada.

1.13. DEFINICION. [M]. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa con unidad; sea $a \in \mathcal{A}$. Se dice que a es *inversible*, con inverso b, si se verifican las siguientes igualdades:

$$ab = ba = I$$
$$a^2b = ba^2 = a$$

Evidentemente, si a es inversible en $\mathcal{A}$ entonces también es inversible en $\mathcal{A}^+$ con igual inverso. Recíprocamente, si a es inversible en $\mathcal{A}^+$ con inverso b, entonces se tiene que:

$$ab + ba = 2I \quad \text{y} \quad a^2b + ba^2 = 2a$$

de donde, debido a 1.5 - *ii)*,

$$(L_{a^2} - R_{a^2})(b) = (L_a^2 - R_a^2)(b) = (L_a + R_a)(L_a - R_a)(b) =$$
$$= 2(L_a - R_a)(I) = 0;$$

por tanto $a^2b = ba^2 = a$.

Además $ba = b(a^2b) = (ba^2)b = ab = I$. Luego a es inversible en $\mathcal{A}$ con inverso b.

Representamos por $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ al conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ que tienen inverso. Según acabamos de ver: $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) = \mathrm{Inv}(\mathcal{A}^+)$, y para $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ su inverso en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}^+$ coinciden. Estos hechos son importantes ya que nos permiten reducir el estudio de la relación "ser inverso de" al caso Jordan.

1.14. TEOREMA. [J; Theorem 13, Chap. I]. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan con unidad; a, b en $\mathcal{A}$, entonces*

i) Si a tiene como inverso b, b tiene como inverso a;

ii) Equivalen las siguientes condiciones:

a es inversible; $\mathcal{U}_a$ es inversible en $L(\mathcal{A})$; a^n es inversible para cualquier n en $\mathbb{N}$; $I \in \mathcal{U}_a(\mathcal{A})$.

iii) Si a es inversible su inverso es único, e igual a $\mathcal{U}_a^{-1}(a)$.

iv) a y b son inversibles si y sólo si $\mathcal{U}_a(b)$ es inversible.

Teniendo en cuenta las observaciones que preceden al Teorema 1.14 y el hecho de que $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_a^+$ tenemos que dicho Teorema es válido también en álgebras de Jordan no conmutativas con unidad.

La operación llamada casi-producto juega un papel importante en el estudio de la estructura de álgebra. En un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ el casi-producto de dos elementos a y b es el elemento $a \circ b$ de $\mathcal{A}$ definido por:

$$a \circ b = a + b - ab$$

Son propiedades conocidas del casi-producto: que el elemento neutro de esta operación es 0; y que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa o conmutativa, el casi-producto también es asociativo o conmutativo.

1.15. DEFINICION. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa, a, b elementos de $\mathcal{A}$; se dice que b es casi-inverso de a cuando:

$$a \circ b = b \circ a = 0$$

$$(a \circ a) \circ b = b \circ (a \circ a) = a$$

Si un elemento a tiene casi-inverso se le llama *casi-inversible*.
Al conjunto de todos los elementos casi-inversibles del álgebra $\mathcal{A}$ se le simboliza por q-inv($\mathcal{A}$).

Resumimos las propiedades inmediatas de los elementos casi-inversibles en la siguiente proposición de comprobación rutinaria.

1.16. PROPOSICION. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Jordan no conmutativa, entonces:*

i) Si $\mathcal{A}$ *tiene unidad* I, *un elemento* a *tiene como casi-inverso* b *si y sólo si* I - a *tiene como inverso* I - b.

ii) Un elemento a *tiene como casi-inverso* b *si y sólo si* $1-a$ *tiene como inverso* $1-b$ *en* $\mathcal{A}_1$.

iii) q-inv($\mathcal{A}$) = q-inv($\mathcal{A}^+$).

1.17. DEFINICION. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$; se dice que $\mathcal{B}$ es una *subálgebra plena* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ contiene a todos los casi-inversos de sus elementos casi-inversibles en $\mathcal{A}$, es decir:

$$\text{q-inv}(\mathcal{B}) = \text{q-inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$$

Son consecuencias de la definición de subálgebra plena que:

i) La intersección de subálgebras plenas de $\mathcal{A}$ es una subálgebra plena de $\mathcal{A}$.

ii) Si $\mathcal{B}$ es una subálgebra plena de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es un subálgebra plena de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{C}$ es subálgebra plena de $\mathcal{A}$.

iii) Si M es un ideal izquierdo o derecho de $\mathcal{A}$, entonces M es una subálgebra plena de $\mathcal{A}$.

iv) Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra plena en $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{C}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{B}$ es plena en $\mathcal{C}$.

v) $\mathcal{A}$ es plena en su complexificación $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$.

1.18. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa con unidad y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$, que contiene a la unidad de $\mathcal{A}$, entonces:* $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}) = \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ *si y sólo si* $\text{q-inv}(\mathcal{B}) = \text{q-inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 1.16.

Conviene indicar que, de acuerdo con la proposición anterior nuestro concepto de subálgebra plena es más amplio que el concepto clásico [B; Chap. I, 1.4]. Dicha proposición señala que ambos conceptos coinciden si $\mathcal{A}$ tiene unidad y $\mathcal{B}$ contiene a la unidad de $\mathcal{A}$.

1.19. DEFINICION. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, $a \in \mathcal{A}$; se llama *espectro* del elemento a al conjunto:

$$sp(a/\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \frac{a}{\lambda} \notin \text{q-inv}(\mathcal{A})\}$$

a es[te c]onjunto se le añade el elemento 0 si a no es inversible en $\mathcal{A}$.

Cuando el álgebra $\mathcal{A}$ tiene unidad, la definición anterior puede expresarse así:

$$sp(a/\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda I \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}$$

En un álgebra de Jordan no conmutativa real $\mathcal{A}$ se define el espectro de un elemento $a \in \mathcal{A}$ por $sp(a/\mathcal{A}) := sp(a/\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$, donde $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es la complexificación de $\mathcal{A}$.

1.20. DEFINICION. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa y a en $\mathcal{A}$; se llama *radio espectral algebraico* del elemento a al valor:

$$\rho(a/\mathcal{A}) := \sup\{ |\lambda| : \lambda \in sp(a/\mathcal{A}) \}$$

De las definiciones dadas y del estudio de propiedades hecho hasta aquí, podemos enunciar la siguiente proposición.

1.21. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, a un elemento de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{B}$ una subálgebra plena de $\mathcal{A}$. Se verifica:*

i) $sp(a/\mathcal{A}) = sp(a/\mathcal{A}^+)$

ii) Si $a \in \mathcal{B}$, $sp(a/\mathcal{B}) \cup \{0\} = sp(a/\mathcal{A}) \cup \{0\}$

iii) $\rho(a/\mathcal{A}) = \rho(a/\mathcal{A}^+)$; *y si* $a \in \mathcal{B}$ $\rho(a/\mathcal{A}) = \rho(a/\mathcal{B})$.

1.22. NOTA. Como se dirá más adelante todo elemento a de un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ está contenido en una subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que es asociativa, conmutativa y plena en $\mathcal{A}$. Como consecuencia de este hecho y de la proposición anterior resulta que el espectro de un elemento cualquiera de un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ puede calcularse en una conveniente subálgebra asociativa y conmutativa de $\mathcal{A}$.

1.23. DEFINICION. En toda álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ se demuestra la existencia de un más grande ideal casi-inversible [M; Theorem 10]. A este ideal se le denomina *radical de*

Jacobson-Mc.Crimmon de $\mathcal{A}$, y lo notaremos Rad($\mathcal{A}$).

Si Rad($\mathcal{A}$) = $\{0\}$ se dice que el álgebra es *semisimple*.

Es conocido que cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa el radical de $\mathcal{A}$ coincide con la intersección de los ideales primitivos de $\mathcal{A}$ [B-D; Proposition 14.24].

En [H-M] Hogben y Mc.Crimmon introducen un concepto de ideal primitivo en álgebras de Jordan. Pasamos a definir los conceptos necesarios para una versión Jordan no conmutativa de la anterior caracterización del radical de un álgebra asociativa.

1.24 DEFINICION. Un subespacio vectorial M de un álgebra de Jordan $\mathcal{A}$ se llama un *ideal interior* de $\mathcal{A}$ si $U_a(\mathcal{A}) \subset M$ para todo $a \in M$.

En un álgebra de Jordan con unidad todo ideal interior también es subálgebra; esto no es cierto en general si el álgebra no tiene unidad. Se define por ello el concepto de *ideal interior estricto* de un álgebra de Jordan $\mathcal{A}$: se llaman así los ideales interiores M de $\mathcal{A}$ que también son subálgebras de $\mathcal{A}$; ello es equivalente a afirmar que $M \subset \mathcal{A}$ es un ideal interior de la unitización $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$.

Para cada par de elementos a, b de un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ se define el operador $U_{a,b}$ por :

$$U_{a,b} = \frac{1}{2}\left(U_{a+b} - U_a - U_b\right)$$

Suele usarse la notación $\{a, x, b\}$ para designar el elemento $U_{a,b}(x)$.

1.25. DEFINICION. Un ideal interior estricto M de un álgebra de Jordan $\mathcal{A}$ se llama x-modular, para algún x de $\mathcal{A}$, cuando se cumple:

i) $U_{I-x}(\mathcal{A}) \subset M$

ii) $\{(I-\mathscr{x}), \mathscr{A}_1, M\} \subset M$, es decir, $\{(1-\mathscr{x}), z, m\} \in M$ para todo z en $\mathscr{A}_1$ y m en M.

iii) $\mathscr{x}^2 - \mathscr{x} \in M$.

En este caso se dice que $\mathscr{x}$ es unidad modular de M.

1.26. PROPOSICION. [H-M] *Un ideal interior (estricto) modular* M *de un álgebra de Jordan* $\mathscr{A}$ *es propio si y sólo si* $\mathscr{x}$ *no pertenece a* M.

1.27. DEFINICION. Un ideal interior estricto M de un álgebra de Jordan $\mathscr{A}$ se dice que es *$\mathscr{x}$-maximal* si es maximal entre todos los ideales interiores (estrictos) propios $\mathscr{x}$-modulares de $\mathscr{A}$. Se dice que M es *modular-maximal* si M es $\mathscr{x}$-maximal para algún $\mathscr{x}$ de $\mathscr{A}$.

1.28. DEFINICION. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Jordan y M un ideal interior modular-maximal. Al más grande ideal P de $\mathscr{A}$ contenido en M se le llama *ideal primitivo* de $\mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Jordan no conmutativa, un ideal P de $\mathscr{A}$ es primitivo si es el más grande ideal $P \subset M$, para M ideal interior modular-maximal de $\mathscr{A}^+$.

1.29. TEOREMA. [H-M; Theorem 4.1] y [F-R; Theorem 1] *El radical de Jacobson-Mc.Crimmon de un álgebra de Jordan no conmutativa coincide con la intersección de sus ideales primitivos.*

1.30. DEFINICION. Un álgebra $\mathscr{A}$ de Jordan no conmutativa se dice *primitiva* cuando el ideal $\{0\}$ es primitivo.

De la definición y del Teorema anterior se desprende que, si $\mathscr{A}$ es primitiva, $\mathrm{Rad}(\mathscr{A}) = \{0\}$.

2. ALGEBRAS NORMADAS.

En esta sección se exponen, por razones de complitud, algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas. Para mayor información puede consultarse [Ma] y [K].

2.1. DEFINICION. Un álgebra $\mathcal{A}$ cuyo espacio vectorial está dotado de una norma $\|.\|$ se llama un *álgebra normada* cuando el producto es continuo; es decir, existe un número real positivo M tal que:

$$\| ab \| \leq M \| a \| \ \| b \| \quad (a, b \in \mathcal{A})$$

Cuando M puede tomarse menor o igual que 1, esto es, si $\| ab \| \leq \| a \| \ \| b \|$, para a y b en $\mathcal{A}$, se dice que la norma de $\mathcal{A}$ es *submultiplicativa* y también se dice que $\|.\|$ es una *norma de álgebra* en A. Siempre puede conseguirse una norma submultiplicativa, $|.|$, equivalente a la dada sin más que definir $| a |= M \| a \|$.

Un álgebra normada con unidad I tal que $\| I \| = 1$, y $\|.\|$ sea submultiplicativa, se dice que es *unital*.

Toda álgebra normada con unidad puede renormarse equivalentemente de forma que sea unital. En el caso asociativo se trata de un resultado clásico que puede verse en [B-D; Theorem 4.1]. En el caso general este resultado está probado en [Oc.].

Puesto que en lo que sigue sólo nos ocupamos de cuestiones algebraico-topológicas, la norma de un álgebra normada *siempre se supondrá submultiplicativa y unital si el álgebra tiene unidad*, salvo indicación en contrario.

Un álgebra normada cuyo espacio vectorial es un espacio de Banach se dice que es un *álgebra normada completa*; la denominación de *álgebra de Banach* se reserva para el caso de las álgebras *asociativas* normadas completas.

Si $\mathfrak{X}$ es un espacio normado se representa por $BL(\mathfrak{X})$ el algebra normada de los operadores lineales continuos sobre $\mathfrak{X}$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra normada y $a \in \mathcal{A}$, es claro que L_a, R_a, $\mathcal{U}_a$ están en $BL(\mathcal{A})$ y que $\| L_a \| \leq \| a \|$, $\| R_a \| \leq \| a \|$, $\| \mathcal{U}_a \| \leq 3\| a \|^2$. En consecuencia las aplicaciones $a \longrightarrow L_a$, $a \longrightarrow R_a$ y $a \longrightarrow \mathcal{U}_a$ son continuas.

2.2 UNITIZACION NORMADA. La unitización $\mathcal{A}_1$ de un álgebra normada $\mathcal{A}$ se considera siempre como álgebra normada unital con la norma definida por $\| a+\alpha \| = \| a \| + | \alpha |$, para $a \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Es claro que $\mathcal{A}_1$ es completa si y sólo si lo es $\mathcal{A}$ y que la restricción de la norma de $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}$ es la norma dada en $\mathcal{A}$.

La obtención de un resultado análogo al anterior para el caso de la complexificación de un álgebra normada no es tan inmediato.

2.3. TEOREMA. [B-D; Proposition 13.3]. *Sea $(\mathcal{A}, \|.\|)$ un álgebra normada; $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ la complexificación de $\mathcal{A}$; $U = \{a \in \mathcal{A} : \| a \| < 1\}$; V la envolvente absolutamente convexa de $U \times \{0\}$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, y p el funcional de Minkowski de V. Entonces se verifica:*

i) *p es una norma de álgebra sobre* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ *y* $p(a) = \| a \|$ $a \in \mathcal{A}$.

ii) $\max(\| a \|, \| b \|) \le p((a+bi)) \le \| a \| + \| b \|$, $a, b \in \mathcal{A}$.

iii) $(A_{\mathbb{C}}\ , p)$ *es completa si y sólo si* $(\mathcal{A}, \| \cdot \|)$ *lo es.*

2.4. DEFINICION. Sea $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un álgebra de Jordan no conmutativa normada; se define el *radio espectral geométrico* de un elemento a de $\mathcal{A}$, como el valor:

$$r(a) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \| a^n \|^{1/n} = \inf \{ \| a^n \|^{1/n} : n \in \mathbb{N} \}$$

Puesto que toda álgebra de Jordan no conmutativa es de potencias asociativas, es decir la subálgebra que engendra cada elemento es asociativa, la existencia del límite y la igualdad anteriores se sigue como en [B-D; Proposition 2.8].

Los resultados básicos relativos a inversos en álgebras de Banach con unidad [B-D; Proposition 2.6, Theorem 2.9, Corolario 2.10, Theorem 2.11] son válidos también para álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas con unidad. Así si $\mathcal{A}$ es una tal álgebra se demuestra que el conjunto Inv($\mathcal{A}$) es abierto, haciendo uso de la continuidad de la aplicación $x \xrightarrow{\Phi} U_x$ de $\mathcal{A}$ en BL($\mathcal{A}$) y de que, por el teorema 1.14 - ii), Inv($\mathcal{A}$) = Φ^{-1} [Inv(BL($\mathcal{A}$))].

La continuidad del paso a inverso se obtiene como consecuencia de que, para $x \in$ Inv($\mathcal{A}$), su inverso viene dado por:

$$x^{-1} = U_{x^{-1}}(x) = U_x^{-1}(x)$$

Estos hechos vienen demostrados en [Ma; Lema 3.1, Corolario 3.2, Teorema 3.3 y Lema 3.4, pg. 63 y sgs.]; y [K; Ch. 2 y 3].

Así mismo en un álgebra de Jordan no conmutativa normada y completa $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ el conjunto q-inv($\mathcal{A}$) también es abierto.

2.5. PROPOSICION. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Jordan no conmutativa normada con unidad. Equivalen:*

i) Inv($\mathcal{A}$) *es abierto.*

ii) Existe un número α *positivo tal que* $B(1,\alpha) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Demostración. Es inmediato que *i)* implica *ii)*. Probemos que *ii)* también implica *i)*. Para ello puede suponerse que $\mathcal{A}$ es conmutativa. Sea $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$; sabemos que el operador $\mathcal{U}_{a^{-1}}$ es continuo, es decir, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$\| \mathcal{U}_{a^{-1}}(x) - \mathcal{U}_{a^{-1}}(y) \| < \alpha$ siempre que $x, y \in \mathcal{A}$ con $\| x - y \| < \delta$

Ahora bien, como $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, se comprueba que tomando $\delta_1 = \min \{ 1, \frac{\delta}{2(1+\|a\|)} \}$ se verifica que $\| a^2 - b^2 \| < \delta$ siempre que $\| a - b \| < \delta_1$; en este caso tenemos:

$\| \mathcal{U}_{a^{-1}}(a^2) - \mathcal{U}_{a^{-1}}(b^2) \| = \| 1 - \mathcal{U}_{a^{-1}}(b^2) \| < \alpha$ siempre que $\| a-b \| < \delta_1$; esto implica que $\mathcal{U}_{a^{-1}}(b^2)$ es inversible en $\mathcal{A}$ y por el Teorema 1.14, b es inversible en $\mathcal{A}$.

Queda así justificado que $B(a, \delta_1) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, luego Inv($\mathcal{A}$) es abierto.

En la teoría de las álgebras de Jordan no conmutativas una técnica muy útil cosiste en localizar ciertos conceptos en subálgebras asociativas. El siguiente teorema es importante en este sentido.

2.6. TEOREMA. [Ma 2; Theorem 2.7] *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Jordan no conmutativa, para cada* a *en* $\mathcal{A}$ *existe una subálgebra* $\mathcal{B}$ *asociativa, conmutativa, plena, y cerrada si* $\mathcal{A}$ *es normada, tal que* $a \in \mathcal{B}$.

En la referencia indicada el teorema está probado para el caso con unidad pues allí se usa el concepto clásico de plenitud, pero es sencillo pasar de aquí al caso general mediante la unitización de $\mathcal{A}$.

El teorema 2.6 tiene importantes consecuencias. Así, se deduce de dicho teorema que, el espectro de un elemento en un álgebra de Jordan no conmutativa normada completa tiene las mismas propiedades que para el caso de álgebras de Banach. El teorema 2.6 tiene una pequeña historia que puede consultarse en [Ma], [K] y también [B-R].

2.7. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ un algebra de Jordan no conmutativa normada y con unidad; sea $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ tal que $\| 1-a \| < 1$, entonces*

$$a^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^n, \text{ y en consecuencia } \| a^{-1} \| \leq \frac{1}{1-\|1-a\|}.$$

Demostración. Tomemos $s_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (1-a)^k$; tenemos así que:

$s_n - (1-a)\, s_n = 1 - (1-a)^{n+1}$, con lo cual $a\, s_n = 1 - (1-a)^{n+1}$, de donde: $s_n = a^{-1}\,[1 - (1-a)^{n+1}]$.

Ahora bien $(1-a)^{n+1}$ tiende a 0 para $n \longrightarrow \infty$ luego s_n converge a a^{-1}; de ahí que $\| a^{-1}\| = \| 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)^k \| \leq \| 1 \| + \sum_{k=1}^{\infty} \|1-a\|^k = \frac{1}{1-\|1-a\|}$.

Nota: la demostración pone de manifiesto el hecho de que, bajo hipótesis de complitud, $\| 1-a \| < 1$ implica $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

2.8. PROPOSICION. *Salvo isomorfismos topológicos no hay más álgebras de Jordan no conmutativas cuadráticas normadas que las álgebras $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f, \wedge)$, donde $(\mathfrak{X}, \|.\|)$ es un espacio vectorial normado, f una forma bilineal simétrica continua sobre $\mathfrak{X}$, y $\wedge$ un producto anticonmutativo continuo en $\mathfrak{X}$ verificando $f(x \wedge y, z) = f(x, y \wedge z)$, y la norma en $\mathcal{A}$ viene dada por*

$$\| x + \alpha \| = \| x \| + | \alpha |, \text{ para todo elemento } x + \alpha \text{ en } \mathcal{A}.$$

Demostración. Sean $\mathfrak{X}$, f, $\wedge$ como en el enunciado y $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f, \wedge)$, entonces $\mathcal{A}$ con la norma definida es álgebra de Jordan no conmutativa cuadrática normada. En efecto:

$$\| (x + \alpha)(y + \beta) \| = \| \beta x + \alpha y + x\wedge y + \alpha\beta + f(x, y) \| =$$
$$= \| \beta x + \alpha y + x\wedge y \| + | \alpha\beta + f(x, y) | \leq$$
$$\leq |\beta| \| x \| + |\alpha| \| y \| + c \| x \| \| y \| + |\alpha| |\beta| + k \| x \| \| y \| \leq$$
$$\leq M (\| x \| + |\alpha|)(\| y \| + |\beta|) = M \| x+\alpha \| \| y+\beta \|,$$

donde c y k son las constantes de continuidad de $\wedge$ y f respectivamente, y $M = \max\{1, c, k\}$.

Recíprocamente, si $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es un álgebra de Jordan no conmutativa cuadrática normada, sabemos por el Lema 1.12 que $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f, \wedge)$. Veamos que $\mathfrak{X}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{A}$, siguiendo el razonamiento desarrollado en [P.P.R]. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de $\mathfrak{X}$ que converge a $x+\alpha$ en $\mathcal{A}$. Por la continuidad del producto en $\mathcal{A}$ se tiene que:

$\{x_n^2\} = \{f(x_n, x_n)\}$ converge a $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = f(x, x) + 2\alpha x + \alpha^2$. De aquí se sigue que $2\alpha x$ es límite de la sucesión $\{f(x_n, x_n) - f(x, x) - \alpha^2\}$, de elementos de $\mathbb{K}$, y en consecuencia $2\alpha x$ está en $\mathbb{K}$, lo cual implica que o bien $x = 0$ ó bien $\alpha = 0$.

Si $x = 0$, sea $y \in \mathfrak{X}$, $y \neq 0$, entonces $x_n y + y x_n = (x_n + y)^2 - x_n^2 - y^2$ está en $\mathbb{K}$, y además $\{x_n y + y x_n\}$ converge a $2\alpha y$, luego $\alpha y \in \mathbb{K}$, lo cual implica que $\alpha = 0$.

En consecuencia, la forma lineal de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{K}$ dada por $x+\alpha \longrightarrow \alpha$ es continua, es decir , existe un número $k > 0$ tal que $|\alpha| \leq k \| x+\alpha \|$. Pero entonces $\| x \| + |\alpha| \leq \| x+\alpha \| + 2|\alpha| \leq (2k + 1) \| x+\alpha \|$, y puesto que $\| x+\alpha \| \leq \| x \| + |\alpha|$ se concluye que la norma de $\mathcal{A}$ es equivalente a la norma considerada en el enunciado.

La continuidad de f y de $\wedge$ sobre $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ es consecuencia de ser

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(xy + yx), \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(xy - yx).$$

2.9 DEFINICION. Se dice que el álgebra normada $(\mathcal{A}, \|.\|)$ tiene la propiedad de *minimalidad de la topología de la norma* si para cualquier otra norma de álgebra en $\mathcal{A}$, $|.|$, cumpliendo que existe un número $\alpha > 0$ tal que:

$$|a| \leq \alpha \| a \|, \text{ para todo } a \text{ en } \mathcal{A}$$

entonces existe también otro número $\beta > 0$ tal que:

$$\| a \| \leq \beta |a|, \text{ para todo } a \text{ en } \mathcal{A}.$$

2.10. DEFINICION. Se dice que el álgebra normada $(\mathcal{A}, \|.\|)$ tiene *mínima topología de la norma* si para cualquier otra norma de álgebra en $\mathcal{A}$, $|.|$, se verifica que existe un número $k > 0$ tal que

$$\| a \| \leq k |a|, \text{ para todo } a \text{ en } \mathcal{A}.$$

3. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE Q-ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS.

En esta sección se introduce el concepto de Q-álgebra de Jordan no conmutativa, obteniéndose diversas caracterizaciones del mismo y estudiando su comportamiento frente a las operaciones de unitización, complexificación y paso a cociente por un ideal cerrado. Hemos incluido también algunos resultados de tipo algebraico-topológico que consideramos son de interés general.

3.1. DEFINICION. Una *Q-álgebra de Jordan no conmutativa* es un álgebra de Jordan no conmutativa normada en la que el conjunto de los elementos casi-inversibles es abierto.

Las álgebras de Banach y, más en general, las álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas, son según lo antes visto los primeros ejemplos naturales de Q-álgebras.

El concepto de Q-álgebra aparece así como un debilitamiento de la condición de complitud. La siguiente proposición es consecuencia inmediata de las definiciones dadas.

3.2. PROPOSICION. *Toda subálgebra plena de una Q-álgebra de Jordan no conmutativa es, con la norma inducida, una Q-álgebra de Jordan no conmutativa.*

Como caso particular de la proposición 3.2 se tiene que las subálgebras plenas de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas son Q-álgebras. Como se verá más adelante tales álgebras agotan la clase de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas. Tenemos también, como consecuencia de ser q-inv$(\mathcal{A})$ = q-inv$(\mathcal{A}^+)$, la siguiente Proposición.

3.3. PROPOSICION. *Sea $(\mathcal{A}, \|.\|)$ un álgebra de Jordan no conmutativa normada. Entonces $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es Q-álgebra si y sólo si $(\mathcal{A}^+, \|.\|)$ es una Q-álgebra de Jordan.*

Consecuencia de esta proposición es que en el estudio de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas podemos suponer siempre que el álgebra es conmutativa en todas aquellas cuestiones relativas al concepto de Q-álgebra.

3.4. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa normada y $\mathcal{A}_1$ su unitización normada, entonces $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra de Jordan no conmutativa si y sólo si lo es $\mathcal{A}_1$.*

Demostración. Supongamos que q-inv$(\mathcal{A})$ es abierto y sea r un número tal que $0 < r < 1$, cumpliendo que $B(0;\, r) \subset$ q-inv$(\mathcal{A})$. Tomemos $\delta := \frac{r}{2-r}$ y sea $a+\alpha \in \mathcal{A}_1$ tal que $\| 1-(a+\alpha) \| < \delta$. Se tiene así: $\| a \| + |1-\alpha| < \delta$, de donde en particular $\frac{1}{|\alpha|} \geq \frac{1}{\delta+1}$. Por tanto, como $1 \leq |1-\alpha| + |\alpha|$, también se tiene $\frac{\| a \|}{|\alpha|} < \frac{\delta-1}{|\alpha|} +1$, y como $\delta < 1$, $\frac{\| a \|}{|\alpha|} < \frac{\delta-1}{\delta+1} +1 = \frac{2\ \delta}{\delta+1} = r$.

Luego $\frac{-a}{\alpha} \in$ q-inv$(\mathcal{A})$, lo cual equivale a $1+ \frac{a}{\alpha} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A}_1)$ por la Proposición 1.16-*ii)*; de donde tenemos $a + \alpha \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A}_1)$. Por la Proposición 2.5 esto equivale a que $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}_1)$ es abierto y por tanto $\mathcal{A}_1$

es una Q-álgebra.

Recíprocamente si $\mathcal{A}_1$ es una Q-álgebra también lo es $\mathcal{A}$, ya que $\mathcal{A}$ es un ideal de $\mathcal{A}_1$ y por tanto $\mathcal{A}$ es plena en $\mathcal{A}_1$.

3.5. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa y $\mathcal{B}$ una subálgebra plena de $\mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{B}}$ también es una subálgebra plena de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Si $x \in$ q-inv$(\mathcal{A})$ y x° es el casi-inverso de x, tenemos en virtud de la Proposición 1.6 que $1-x^{\circ}$ es el inverso de $1-x$ en $\mathcal{A}_1$, y por el Teorema 1.14 es $1-x^{\circ} = \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(1-x)$, que podemos escribir como: $1-x^{\circ} = \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(1-x)^2 - \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(x^2 - x) = 1 - \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(x^2 - x)$, luego $x^{\circ} = \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(x^2 - x)$. Si suponemos que $x \in \overline{\mathcal{B}} \cap$ q-inv$(\mathcal{A})$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $\mathcal{B}$ que converge a x, y como $x \in$ q-inv$(\mathcal{A})$, que por hipótesis es abierto, podemos suponer que $x_n \in \mathcal{B} \cap$ q-inv$(\mathcal{A})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces, poniendo $z_n = \mathcal{U}^{-1}_{1-x_n}(x_n^{\,2} - x_n)$, se tiene que $z_n = x_n^{\circ} \in \mathcal{B}$ por ser $\mathcal{B}$ plena, y claramente $x^{\circ} = \lim(z_n)$, luego $x^{\circ} \in \overline{\mathcal{B}}$.

3.6. NOTA. Del Teorema 2.6 y de la Proposición 3.2 se sigue que *si $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra de Jordan no conmutativa y $a \in \mathcal{A}$, existe una subálgebra cerrada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{B}$ es una Q-álgebra asociativa y conmutativa con $a \in \mathcal{B}$.* De hecho también se sigue de la parte algebraica del Teorema 2.6 y de la Proposición anterior.

I. Kaplanski afirma en [Ka], sin demostración, que la complexificación de una Q-álgebra asociativa real, con una conveniente norma -que de hecho es equivalente a la norma p definida en el Teorema

2.3- es también una Q-álgebra.

La justificación de esta afirmación no ofrece dificultad puesto que si $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\ ,\ p)$ es la complexificación normada de una Q-álgebra asociativa $(\mathcal{A}, \|.\|)$, y $0 < r < 1$ es tal que $B(1, r) \subset Inv(\mathcal{A})$, se comprueba que dado $a + bi \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ tal que $p(1- (a + bi)) < r/3$, los elementos a y $c := a + ba^{-1}b$ son inversibles; y que si $d := \frac{-1}{2}(a^{-1}bc + cba^{-1})$, entonces $c+di$ es inverso de $a+bi$.

Puesto que en el producto Jordan de $\mathcal{A}$ tales elementos c y d se expresan por $c = a + U_{b}(a^{-1})$ y $d = -U_{a^{-1},c}(b)$, el resultado anterior sugiere que, en el caso general de ser $(\mathcal{A}, \|.\|)$ una Q-álgebra de Jordan, el elemento $c+di$, con c y d definidos como antes, debe ser el inverso de $a + bi$.

La dificultad radica en que no es sencillo probar que $c+di$ verifica las condiciones para ser inverso de $a+bi$, es decir:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = 1$$

$$(a+bi)^{2}\cdot(c+di) = a+bi.$$

Dificultades de este tipo son frecuentes en la teoría de las álgebras de Jordan. Naturalmente la obtención de identidades en álgebras de Jordan especiales se reduce a la comprobación de identidades en álgebras asociativas; el problema está en pasar de aquí al caso general. Dos Teoremas debidos a McDonald [J; pg. 41] y a Shirshov [J; pg. 48] resuelven en parte este problema y vienen a decir, hablando en términos intuitivos, que *toda identidad en tres elementos de grado cero o uno en uno de ellos, que sea válida en toda álgebra de Jordan especial es válida en toda álgebra de Jordan.*

De especial utilidad para nosotros es el siguiente Teorema debido a McCrimmon [M. 2]

3.7. TEOREMA. *(De Shirshov-Cohn con inversos). Sea J un álgebra de Jordan con unidad, la subálgebra de J engendrada por dos elementos de J y sus inversos (si existen) es especial.*

Con la ayuda de este teorema vamos a establecer el siguiente Lema, que nos permite resolver las dificultades anteriormente señaladas.

3.8. LEMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan real con unidad y $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ la complexificación de $\mathcal{A}$. Sea a un elemento inversible de $\mathcal{A}$. Entonces, para b en $\mathcal{A}$, se verifica la siguiente identidad:*

$$\mathcal{U}_{a+bi}\,[\mathcal{U}_{a^{-1}}\,(a-bi)^2] = [a + \mathcal{U}_b\,(a^{-1})]^2$$

Demostración. Puesto que los elementos que intervienen en la identidad que se pretende probar pertenecen a la subálgebra de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ engendrada por a, b y a^{-1}, y dicha subálgebra es especial debido al Teorema de Shirshov-Cohn con inversos, basta comprobar que la identidad es válida en álgebras de Jordan especiales. Lo cual se reduce a:

$$(a + bi)\, a^{-1}\, (a - bi)\, (a - bi)\, a^{-1}\, (a + bi) =$$
$$= (1 + ba^{-1}i)\, (a - bi)\, (a - bi)\, (1 + ba^{-1}i) =$$
$$= (a + ba^{-1}b)\, (a + ba^{-1}b) = (a + ba^{-1}b)^2\ ,$$

como se quería demostrar.

3.9. TEOREMA. *Un álgebra de Jordan no conmutativa normada $\mathcal{A}$ es Q-álgebra si y solamente si su complexificación normada $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es Q-álgebra.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{A}$ es plena en su complexificación $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, según lo dicho en el apartado *iv)* de 1.7, si $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ es Q-álgebra también lo es $\mathcal{A}$, de acuerdo con la Proposición 3.2.

Para demostrar el recíproco puede suponerse, de acuerdo con la Proposición 3.4, que $\mathcal{A}$ tiene unidad y, de acuerdo con la Proposición 3.3, que es conmutativa.

Sea $(\mathcal{A}, \|.\|)$ una Q-álgebra en tales condiciones y $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}, p)$ su complexificación normada.

Sea r un número tal que $0 < r < 1$ verificando $B(1, r) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Tomemos $\delta = r/3$, y sea $a + bi \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ tal que $p(1-(a+bi)) < \delta$, entonces $\max \{\| 1-a \|, \| b \|\} < \delta$, por lo cual -en particular- $\| 1-a \| < \delta < r$, y en consecuencia $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Teniendo en cuenta la Proposición 2.7 y que $\| U_b \| \le 3\| b \|^2$, tenemos $\| 1-(a+U_b(a^{-1})) \| \le \| 1-a \| + \dfrac{3 \quad \|b\|^2}{1-\| 1-a \|} < \delta + \dfrac{3\delta^2}{1-\delta} < r$.

De donde $a + U_b(a^{-1}) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathrm{Inv}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$.

Teniendo en cuenta el Lema 3.8 se sigue que

$$U_{a+bi}\,[U_{a^{-1}}((a-bi)^2)] \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$$

y por el Teorema 1.14 apartado *iv)*, esto implica en particular que $a + bi \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$ tal y como queríamos demostrar.

Este Teorema permite reducir ciertas cuestiones en el estudio de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas al caso complejo.

El siguiente Teorema, parcialmente conocido para Q-álgebras asociativas [Y], proporciona varias caracterizaciones del concepto de Q-álgebra.

3.10. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa normada.*

Equivalen:

i) 0 *es interior a* q-inv($\mathcal{A}$);

ii) $\mathcal{A}$ *es una Q-álgebra;*

iii) $\rho(x/\mathcal{A}) = \lim \| x^n \|^{1/n}$, *para todo* x *en* $\mathcal{A}$;

iv) $\rho(x/\mathcal{A}) \leq \| x \|$, *para todo* x *en* $\mathcal{A}$;

v) $\mathcal{A}$ *es una subálgebra plena en su completación normada;*

vi) $\mathcal{A}$ *es una subálgebra plena de algún álgebra de Jordan no conmutativa normada completa;*

vii) Si $\| a \| < 1$ *entonces* $a \in$ q-inv($\mathcal{A}$), *para* a *en* $\mathcal{A}$.

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ *ii)*. Sea $r > 0$ tal que $x \in$ q-inv($\mathcal{A}$) si $\| x \| < r$. Es fácil comprobar que si $0 < \delta < 1$ es tal que $\frac{\delta}{1-\delta} < r$ entonces para z en la unitización $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $z \in$ q-inv($\mathcal{A}_1$) siempre que $\| z \| < \delta$, o lo que es igual si $\| 1-z \| < \delta$ entonces $z \in$ Inv($\mathcal{A}_1$), así 1 es interior a Inv($\mathcal{A}_1$) y, por la Proposición 2.5, $\mathcal{A}_1$ es una *Q*-álgebra y, en consecuencia, también lo es $\mathcal{A}$.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)*. Como se indicó en la Proposición 3.3 podemos suponer que $\mathcal{A}$ es una álgebra de Jordan; por la Proposición 3.4 que $\mathcal{A}$ tiene unidad; y por la Proposición 3.9 que es compleja. Sea $r > 0$ tal que $B(1, r) \subset$ Inv($\mathcal{A}$). Sea $x \in \mathcal{A}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\frac{1}{r} \| x \| < |\lambda|$, en este caso como $\| \frac{x}{\lambda} \| < r$ tenemos:

$$1 - \frac{x}{\lambda} \in \text{Inv}(\mathcal{A}), \text{ con lo cual } \lambda \notin \text{sp}(x).$$

Tenemos en este caso que $\rho(x) \leq \frac{1}{r} \| x \|$, y al considerar que

$$\text{sp}(x^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \text{sp}(x)\} \quad [\text{Ma } 3], \text{ se sigue que}$$

$\rho(x^n) = \rho(x)^n \leq \frac{1}{r} \| x^n \|$, por tanto $\rho(x) \leq (r^{1/n})^{-1} \| x^n \|^{1/n}$, y de ahí $\rho(x) \leq \lim\limits_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta el Teorema 2.6 y [B-D; Theorem

5.7], obtenemos $\lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \leq \rho(x)$; y por tanto la igualdad.

iii) $\Longrightarrow$ *iv)*. Basta notar que $\| x^n \| \leq \| x \|^n$ para todo natural n, por ello $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n} \leq \| x \|$.

iv) $\Longrightarrow$ *v)*. Puesto que para $z = x+\alpha$ en la unitización $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $\rho(z/\mathcal{A}_1) = \rho(x/\mathcal{A}) + |\alpha|$, la hipótesis hecha es válida simultáneamente en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}_1$ por lo que podemos suponer que $\mathcal{A}$ tiene unidad.

Llamemos $\hat{\mathcal{A}}$ a la completación normada de $\mathcal{A}$ y sea a en $\mathcal{A}$. Si suponemos $a \in \mathrm{Inv}(\hat{\mathcal{A}})$ entonces $\mathcal{U}_a \in \mathrm{Inv}[\mathrm{BL}(\hat{\mathcal{A}})]$, luego $\mathcal{U}_a(\mathcal{A})$ es densa en $\mathcal{A}$, por tanto existe un b en $\mathcal{A}$ tal que $\| 1-\mathcal{U}_a(b) \| < 1$. Esto implica, por hipótesis, que $\rho[\mathcal{U}_a(b) -1] < 1$, de donde $\mathcal{U}_a(b)$ es inversible en $\mathcal{A}$, y por ello a y b también son inversibles en $\mathcal{A}$; luego

$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) = \mathrm{Inv}(\hat{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{A}$, y $\mathcal{A}$ es plena en su completación normada.

v) $\Longrightarrow$ *vi)*. Es inmediato.

vi) $\Longrightarrow$ *vii)*. Supónemos $\mathcal{A}$ subálgebra plena de algún álgebra de Jordan no conmutativa normada completa, y sea J un de estas álgebras. Por ser J completa: $B(0, 1) \subset$ q-inv(J), según se vio en la Nota 2.7, y tenemos $B(0, 1) \cap \mathcal{A} \subset$ q-inv$(J) \cap \mathcal{A} =$ q-inv$(\mathcal{A})$.

Por tanto $\| a \| < 1$, con $a \in \mathcal{A}$, implica $a \in$ q-inv$(\mathcal{A})$.

vii) $\Longrightarrow$ *i)*. Inmediato.

La caracterización *iii)* nos permite abandonar la distinción entre radio espectral geométrico y radio espectral algebraico en el ambiente de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas.

Notemos también que, como consecuencia de *v)* o *vi)* y del comentario que se hizo al Teorema 2.6, el espectro de un elemento en una Q-álgebra de Jordan no conmutativa es un conjunto compacto (no vacío) de $\mathbb{C}$.

3.11. PROPOSICION. *El cociente de una Q-álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ respecto de un ideal cerrado, también es una Q-álgebra.*

Demostración. Sea J un ideal cerrado de $\mathcal{A}$, y consideramos $\mathcal{A}/J$ con la norma cociente.

Tenemos $sp(x+J) \subset sp(x+m)$, $m \in J$, ya que los homomorfismos disminuyen espectros.

Por ello $\rho(x+J) \leq \rho(x+m)$, $m \in J$; pero $\rho(x+m) \leq \| x+m \|$ por ser $\mathcal{A}$ Q-álgebra, según equivalencia entre *ii)* y *iv)* del Teorema 3.10.

Por tanto $\rho(x+J) \leq \| x+m \|$, $m \in J$, luego $\rho(x+J) \leq \| x+J \|$, y de aquí se sigue $\mathcal{A}/J$ es una Q-álgebra con la norma cociente.

3.12. PROPOSICION. *Sean $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa, $\mathcal{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa semisimple y $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un epimorfismo; entonces* $Ker(\varphi)$ *es un ideal cerrado.*

Demostración. Sea $x \in \overline{Ker(\varphi)}$, esto supone que existe un elemento a en $Ker(\varphi)$ tal que $\| x-a \| < 1$; en este caso $x-a \in$ q-inv$(\mathcal{A})$ con lo cual $\varphi(x-a) = \varphi(x) \in$ q-inv$(\mathcal{B})$. Tenemos así que $\varphi[\ \overline{Ker(\varphi)}\ ]$ es un ideal formado por elementos casi-inversibles de $\mathcal{B}$, luego

$\varphi[\ \overline{Ker(\varphi)}\ ] \subset Rad(\mathcal{B})$, de donde por ser $\mathcal{B}$ semisimple

$\varphi[\ \overline{Ker(\varphi)}\ ] = \{0\}$, y por tanto $\overline{Ker(\varphi)} = Ker(\varphi)$.

3.13. COROLARIO. *Si $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra de Jordan no conmutativa, $\mathcal{B}$ es un álgebra de Jordan no conmutativa semisimple y $\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un epimorfismo, entonces* $Ker(\varphi)$ *es cerrado y* $\mathcal{A}/Ker(\varphi)$ *es una Q-álgebra con la norma cociente.*

3.14. PROPOSICION. *Sea a un elemento de una Q-álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ con unidad; equivalen:*

i) $\sum_{n\geq 0} a^n$ *converge;*

ii) $\rho(a) < 1$;

en cuyo caso $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1-a)^{-1}$.

Demostración. Si $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} \| a^n \| = 0$, en este caso $\rho(a) = \inf\{ \| a^n \|^{1/n} : n \in \mathbb{N} \} < 1$.

Recíprocamente, si $\rho(a) < 1$ como $1 \notin sp(a)$ tenemos que $a-1 \in inv(\mathcal{A})$. Ahora bien $\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \| a^n \|^{1/n}$ lo cual implica que: existe un número $0 < \alpha < 1$ y un natural n_0 tales que $n \geq n_0$ implica que $\| a^n \|^{1/n} < \alpha$; esto supone que $\| a^n \|$ tiende a 0.

Tomemos $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$, luego $(1-a)\, s_n = 1-a^{n+1}$, de donde $s_n = (1-a^{n+1})\, (1-a)^{-1}$, que converge a $(1-a)^{-1}$.

Recordamos que un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ se dice *algébrica* cuando todo elemento $a \in A$ satisface una ecuación polinómica con coeficientes en el cuerpo base de A.

La siguiente Proposición establece que con tales condiciones un álgebra de Jordan no conmutativa normada es una Q-álgebra.

3.15. PROPOSICION. *Toda álgebra de Jordan no conmutativa normada y algébrica $\mathcal{A}$ es Q-álgebra.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ la subálgebra (asociativa y conmutativa) engendrada por x y la unidad; probaremos que $\mathcal{B}$ es plena en $\mathcal{A}$. Sea $a \in \mathcal{B} \cap Inv(\mathcal{A})$, $a \notin \mathbb{K}1$; sea n el menor de los grados de los polinomios p tales que $p(a) = 0$; y supongamos que:

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 a + \dots + \lambda_n a^n = 0$$

En este caso $\lambda_0 \neq 0$ pues, en caso contrario,

$(\lambda_1 + \lambda_2 a + \dots + \lambda_n a^{n-1})\, a = 0$, lo cual, por ser a inversible, implica que $\lambda_1 + \lambda_2 a + \dots + \lambda_n a^{n-1} = 0$, en contra de la elección de n.

Tenemos así que $1 = a \left(- \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} a^{k-1} \right)$, de donde se sigue que:

$a^{-1} = - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_0} a^{k-1}$, pertenece a $\mathcal{B}$.

En consecuencia $\rho(x/\mathcal{A}) = \rho(x/\mathcal{B}) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{1/n}$, donde la última igualdad es debida a que $\mathcal{B}$ es finito dimensional. Luego por la caracterización *iii)* del Teorema 3.10, $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra, como se quería demostrar.

3.16. PROPOSICION. *El cierre de un ideal interior x-modular propio M de una Q-álgebra de Jordan $\mathcal{A}$ es un ideal interior x-modular propio.*

Demostración. Es inmediato que $\overline{M}$ es un ideal interior estricto; además $\overline{M}$ es x-modular pues, por la continuidad del producto se tiene que: $\{ (1-x), \mathcal{A}_1, \overline{M} \} \subset \overline{M}$, y las otras dos condiciones de la definición 1.25 se verifican claramente para $\overline{M}$.

Veamos que es propio. Dado $m \in M$, sea $z := x - m$, y supongamos que $\| z \| < 1$. Por ser $\mathcal{A}$ Q-álgebra según el Teorema 3.10- *vii)* se verifica que $z \in$ q-inv$(\mathcal{A})$. Sea $z^\circ \in \mathcal{A}$ el casi-inverso de z, según lo visto en la demostración de la Proposición 3.5 tenemos que:

$$z = U_{1-z}(b) \quad \text{con } b = (z^\circ)^2 - z^\circ \in \mathcal{A}.$$

Ahora bien:

$$U_{1-z}(b) = U_{1-x+m}(b) = U_{1-x}(b) + U_m(b) + 2\, U_{1-x,m}(b)$$

de donde se sigue que $z = u_{1-z}(b)$ pertenece a M, y en consecuencia $x \in M$, lo cual está en contradicción con que M sea propio, según la Proposición 1.26. Por tanto debe ser $\| x-m \| \geq 1$ para todo $m \in M$, y de ahí que $x \notin \overline{M}$.

3.17. DEFINICION. Un subconjunto M de un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ se llama un *ideal interior modular maximal* de $\mathcal{A}$ si M es un ideal interior modular maximal de $\mathcal{A}^+$.

3.18. COROLARIO. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa. Se verifica:*

i) Los ideales interiores modulares maximales de $\mathcal{A}$ son cerrados.

ii)Los idealess primitivos de $\mathcal{A}$ son cerrados.

iii) El radical de Jacobson-Mc. Crimmon de $\mathcal{A}$ es cerrado.

∎

La propiedad de las Q-álgebras de Jordan no conmutativas expresada en el apartado *i)* del Corolario caracteriza de hecho a dichas álgebras dentro de la clase de las álgebras de Jordan no conmutativas normadas. Esto es lo que se prueba en la siguiente Proposición.

3.19. PROPOSICION. *En un álgebra de Jordan no conmutativa normada $\mathcal{A}$ equivalen:*

i) $\mathcal{A}$ es Q-álgebra.

ii) Los ideales interiores modulares maximales de $\mathcal{A}$ son cerrados.

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{A}$ es conmutativa.

Veamos que *ii)* implica *i)*. Sea $\hat{\mathcal{A}}$ la completación de $\mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{A} \cap$ q-inv$(\hat{\mathcal{A}})$, entonces $1-x$ es inversible en $\hat{\mathcal{A}}_1$ por lo que $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A}_1)$ es denso en $\mathcal{A}_1$. Se comprueba entonces fácilmente que $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{A}$.

Si suponemos que $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$ entonces se sigue de lo afirmado en [H-M; Remark 2.8] que existe un ideal interior modular maximal -y por tanto propio- M de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A}) \subset$ M, con lo que, siendo M cerrado por hipótesis, se contradice la densidad de $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{A}$. Tenemos pues que $\mathcal{U}_{1-x}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, con lo cual el casi-inverso x° de x, $x^{\circ} = \mathcal{U}^{-1}_{1-x}(x^2 - x)$ pertenece a $\mathcal{A}$. De este modo $\mathcal{A}$ es plena en $\hat{\mathcal{A}}$ y, por el Teorema 3.10 - *v)*, $\mathcal{A}$ es *Q*-álgebra, como se quería demostrar.

Para concluir este capítulo vamos a dar una versión para *Q*-álgebras de un resultado para álgebras de Jordan no conmutativas normadas completas, que aparece en [F-R 2; Theorem 17].

Recordemos que un álgebra $\mathcal{A}$ se llama *semiprima* si el único ideal M de $\mathcal{A}$ verificando $M^2 = \{0\}$ es el ideal $M = \{0\}$. Para ideales M y N de un álgebra semiprima $\mathcal{A}$ equivalen las condiciones:

$$MN = \{0\}, \ NM = \{0\}, \ M \cap N = 0,$$

y se llama *anulador de* M al más grande ideal N de $\mathcal{A}$ que las verifica. Dicho ideal se representa por An(M).

Un álgebra $\mathcal{A}$ se llama *anuladora generalizada* si es semiprima y se verifica que $An(M) \neq \{0\}$ para todo ideal cerrado propio M de $\mathcal{A}$.

Un álgebra normada $\mathcal{A}$ se llama *topológicamente simple* si $\{0\}$ es el único ideal cerrado propio de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^2 \neq \{0\}$.

Un ideal P de un álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es *primo* cuando para M y N ideales de $\mathcal{A}$ tales que $MN \subset P$ tenemos que $M \subset P$ o bien $N \subset P$. Cuando el ideal cero es primo se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra prima*.

3.20. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa semisimple y anuladora generalizada, entonces $\mathcal{A}$ es el cierre topológico de la suma directa de sus ideales cerrados minimales, los cuales son Q-álgebras de Jordan no conmutativas primitivas y topológicamente simples.*

Demostración. El argumento de la demostración está esencialmente descrito en [F-R 2; Remark 18], y puede resumirse como sigue:

Sea $\{M_i : i \in I\}$. La familia de todos los ideales minimales cerrados de $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{B} = \overline{\sum_{i\in I} M_i}$. Si $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ entonces $\mathcal{C} := An(\mathcal{B})$ es distinto de $\{0\}$, y por tanto, del Teorema 1.29 se deduce que existe un ideal primitivo P de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C}$ no está contenido en P. Ahora bien, según lo visto en el Corolario 3.18, P es cerrado y también es sabido que es primo [H-M; Proposition 5.5], luego P es un ideal cerrado maximal de $\mathcal{A}$ [F-R 2; Proposition 4], por tanto $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{C}+P}$ y entonces $An(P)\ \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Ahora bien por [F-R 2; Lemma 3] $\overline{An(P)\ \mathcal{A}}$ es un ideal cerrado minimal de $\mathcal{A}$, lo cual es contradictorio con la definición de $\mathcal{C}$.

Por tanto necesariamente $\mathcal{A} = \overline{\sum_{i\in I} M_i}$, y dicha suma es directa por ser $\mathcal{A}$ semiprima. Luego $\mathcal{A} = \overline{\oplus M_i}$.

Claramente cada M_i, $i \in I$, es una Q-álgebra de Jordan no conmutativa topológicamente simple.

Finalmente, por el corolario 3.18 - *iii)*, como $Rad(M_i)$ es un ideal cerrado de M_i sólo puede ocurrir que $Rad(M_i) = \{0\}$ o bien $Rad(M_i) = M_i$, pero esta segunda posibilidad contradice que $Rad(\mathcal{A})=\{0\}$. Luego $Rad(M_i) = \{0\}$, y esto implica por ser M_i topológicamente simple, que $\{0\}$ es un ideal primitivo de M_i.

3.21. DEFINICION. Sean $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales normados y $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ una aplicación lineal. Se define el conjunto separador para f como

$$S(f) := \{y \in \mathcal{Y} \text{ tales que existe una sucesión } \{x_n\} \subset \mathfrak{X} \text{ tal que } \{x_n\} \longrightarrow 0 \text{ y } \{f(x_n)\} \longrightarrow y\}$$

Son propiedades conocidas:

i) $S(f)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{Y}$.

ii) Cuando $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach, f es continuo si y sólo si $S(f) = \{0\}$.

iii) Si $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{Y}$ son álgebras normadas y f es un homomorfismo con imagen densa, entonces $S(f)$ es un ideal.

El concepto de ideal separador ha sido ampliamente usado por Rickart y otros autores en conexión con el problema de la unicidad de la topología de la norma completa en álgebras de Banach. Más recientemente B.Aupetit estableció un importante resultado que, para nuestros propósitos conviene enunciar como sigue.

3.22. TEOREMA. [A.] *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Jordan no conmutativas complejas normadas y* F *una aplicación lineal de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ tal que para todo a en $\mathcal{A}$ se verifica que* $r(F(a)) \leq r(a)$. *Entonces* $r(b) = 0$ *para todo* $b \in F(\mathcal{A}) \cap S(F)$.

Como consecuencia de este Teorema, que nos será útil más adelante, a continuación se enuncia, con terminología de Q-álgebras, un resultado ya conocido relativo al ideal separador de un homomorfismo [RP.].

3.23. PROPOSICION. *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *Q-álgebras de Jordan no conmutativas complejas,* f *un epimorfismo de* $\mathcal{A}$ *sobre* $\mathcal{B}$. *Entonces el ideal separador de* f *está contenido en el radical de Jacobson - Mc.Crimmon de* $\mathcal{B}$.

Demostración. Por ser f un homomorfismo se tiene que

$$\mathrm{sp}(f(a)/\mathcal{B}) \subset \mathrm{sp}(a/\mathcal{A}), \text{ para cada } a \text{ en } \mathcal{A}.$$

En consecuencia:

$$r(f(a)) = \rho(f(a)) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(f(a)/\mathcal{B})\} \leq$$
$$\leq \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(a/\mathcal{A})\} = \rho(a) = r(a),$$

en donde la primera y última igualdades son ciertas por ser $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ Q-álgebras de Jordan no conmutativas.

Tenemos así que $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una aplicación lineal sobreyectiva cumpliendo $r(f(a)) \leq r(a)$, para todo a en $\mathcal{A}$; en estas condiciones tenemos, por el Teorema anterior, que $r(b) = 0$ para todo b en el ideal separador S(f) de f.

En consecuencia $\mathrm{sp}(b/\mathcal{B}) = \{0\}$ por ser $\mathcal{B}$ Q-álgebra, y b es casi-inversible en $\mathcal{B}$. Luego S(f) es un ideal casi-inversible de $\mathcal{B}$, y por la definición 1.23, está contenido en el radical de Jacobson - Mc.Crimmon de $\mathcal{B}$.

3.24. COROLARIO. *Todo epimorfismo entre Q-álgebras de Jordan no conmutativas, complejas, en donde la segunda de ellas es semisimple, es cerrado.*

CAPÍTULO II

1. ALGEBRAS DE OPERADORES LINEALES CON ADJUNTO.

2. TEOREMA DE ESTRUCTURA PARA ALGEBRAS DE BANACH COMPLEJAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO Y MINIMALIDAD DE LA TOPOLOGIA DE LA NORMA.

1. ALGEBRAS DE OPERADORES LINEALES CON ADJUNTO.

Esta sección está dedicada a la obtención de un resultado [Teorema 1.5] que, además de su interés propio, tiene gran importancia en nuestro trabajo. Dicho Teorema nos proporciona una caracterización intrínseca de aquellos apareamientos de Banach $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ para los cuales ocurre que las subálgebras de $BL(\mathfrak{X})$ que contienen a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ tienen mínima topología de la norma. Comenzamos precisando los conceptos y notaciones utilizados.

1.1 DEFINICION. Un apareamiento es una terna $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ en donde $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{Y}$ son dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\langle , \rangle$ es una forma bilineal $\langle , \rangle: \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{K}$ no degenerada, es decir, para cualesquiera x en $\mathfrak{X}$ e y en $\mathcal{Y}$

$$\langle x, \mathcal{Y} \rangle = \{0\} \text{ implica } x = 0, \text{ y}$$

$$\langle \mathfrak{X}, y \rangle = \{0\} \text{ implica } y = 0.$$

Dado un apareamiento $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ todo elemento x en $\mathfrak{X}$ define una forma lineal $\hat{x}$ sobre $\mathcal{Y}$ por:

$$\hat{x}(y) := \langle x, y \rangle, \ y \in \mathcal{Y}$$

Análogamente, para cada $y \in \mathcal{Y}$, $\hat{y}$ denota la forma lineal sobre $\mathfrak{X}$ definida por $\hat{y}(x) := \langle x, y \rangle$, $x \in \mathfrak{X}$.

Las aplicaciones:

$$x \longrightarrow \hat{x}, \text{ de } \mathfrak{X} \text{ en el dual algebraico de } \mathcal{Y}$$

$$y \longrightarrow \hat{y}, \text{ de } \mathcal{Y} \text{ en el dual algebraico de } \mathfrak{X}$$

son lineales. Además, la no degeneración de la forma bilineal $\langle , \rangle$ se traduce en que dichas aplicaciones son inyectivas, y se llaman las *inmersiones canónicas inducidas por la forma bilineal* $\langle , \rangle$.

Un apareamiento $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un *apareamiento normado* cuando $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios vectoriales normados y la forma bilineal es continua, es decir, existe un número $k > 0$ tal que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq k \, \| x \| \, \| y \|, \text{ para todo } x \in \mathcal{X} \text{ y todo } y \in \mathcal{Y}.$$

Si además $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach, el apareamiento $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ se llama *apareamiento de Banach*.

Cuando $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento normado las inmersiones canónicas inducidas por la forma bilineal $\langle , \rangle$ $x \longrightarrow \hat{x}$ $(x \in \mathcal{X})$, $y \longrightarrow \hat{y}$ $(y \in \mathcal{Y})$, están respectivamente valuadas en los duales topológicos $\mathcal{Y}^*$ de $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$, y además son continuas.

1.2. DEFINICION. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ un apareamiento. Dos operadores lineales

$$S: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}, \qquad T: \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$$

se llaman adjuntos respecto a $\langle , \rangle$ si $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$.

Por cada $S \in L(\mathcal{X})$ existe a lo sumo un único $T \in L(\mathcal{Y})$ tal que S y T son adjuntos respecto de $\langle , \rangle$.

Al operador T, cuando existe, se le llama el *adjunto de* S respecto de $\langle , \rangle$, y se nota por S^*. De igual modo, cada $T \in L(\mathcal{Y})$ tiene a lo más un adjunto $T^* \in L(\mathcal{X})$ respecto de $\langle , \rangle$.

Dado un apareamiento $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ se representa por $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ al conjunto de los operadores en $L(\mathcal{X})$ que tienen adjunto respecto de $\langle , \rangle$. Respectivamente $L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$ denota al conjunto de los operadores en $L(\mathcal{Y})$ que tienen adjunto respecto de

$\langle , \rangle$.

Se comprueba sin dificultad que $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es una subálgebra de $L(\mathfrak{X})$ y que $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es una subálgebra de $L(\mathcal{Y})$; la aplicación $S \longrightarrow S^*$ es un antiisomorfismo de dichas álgebras.

Cuando el apareamiento $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento de Banach un operador S que admite adjunto es continuo, como consecuencia del Teorema de la Gráfica Cerrada, es decir $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es una subálgebra de $BL(\mathfrak{X})$ y análogamente $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es subálgebra de $BL(\mathcal{Y})$.

Sin embargo no está garantizado que dichas álgebras sean completas, esto es, cerradas en las respectivas álgebras de operadores; es por ello que en dichas álgebras se considera una norma más fina que la norma de operadores, notada $\|.\|_d$, y definida por $\| S \|_d = \text{Máx}\{ \| S \|, \| S^* \|\}$ para S en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ o en $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$. Es claro que con dicha norma el antiisomorfismo $S \longrightarrow S^*$ es también una isometría. El siguiente resultado justifica la introducción de la norma $\|.\|_d$.

1.3. LEMA. [B-D; Lemma 27.5] *Sea* $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *un apareamiento de Banach; entonces* $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *y* $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ *con la norma* $\|.\|_d$ *son álgebras de Banach.*

Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ un apareamiento; el conjunto de los operadores en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ que tienen rango finito -es decir, imagen finito dimensional- se simboliza por $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$. Este conjunto constituye un ideal del álgebra $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

Igual significado tiene el conjunto $FL(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ respecto del álgebra $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$.

Dados $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$ simbolizamos por $u \otimes v$ el operador sobre $\mathfrak{X}$ dado por $u \otimes v\,(x) = \langle x, v \rangle u$, para todo $x \in \mathfrak{X}$.

Igualmente $v \otimes' u$ es el operador sobre $\mathcal{Y}$ dado por:

$$v \otimes' u\,(y) = \langle u, y \rangle v, \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}.$$

Es claro que $u \otimes v \in FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, ya que se trata de un operador con rango finito y tiene adjunto, que viene dado por: $(u \otimes v)^* (y) = \langle u, y \rangle v$, para todo $y \in \mathcal{Y}$; es decir: $(u \otimes v)^* = v \otimes' u$.

Es conocido que si $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento entonces $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es el conjunto de todos los operadores de la forma $T = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i$, con $u_i \in \mathfrak{X}$, $v_i \in \mathcal{Y}$. [B-D; Lemma 31.5].

Analizando con detalle un Teorema que aparece en el libro de Rickart [R; Theorem 2.4.17] obtuvimos un resultado que nos pareció interesante, que establecemos en el siguiente Lema y que, como se verá de inmediato resulta de gran utilidad.

1.4. LEMA FUNDAMENTAL. *Sea* $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *un apareamiento de Banach,* $\mathcal{B}$ *una subálgebra de* $BL(\mathfrak{X})$ *tal que* $u \otimes v \in \mathcal{B}$ *para cualesquiera* $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, *y sea* $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ *una norma de álgebra en* $\mathcal{B}$; *entonces existe un número* $k > 0$ *tal que* $\| \widehat{Tx} \| \le k\, |\!|\!|T|\!|\!|\, \|x\|$, *para todo* $x \in \mathfrak{X}$ *y* $T \in \mathcal{B}$.

Demostración. Si $T \in \mathcal{B}$ se tiene $T\circ(u \otimes v) = Tu \otimes v$, que también pertenece a $\mathcal{B}$; por ello:

$$(Tu \otimes v)^2 = \langle Tu, v \rangle\, Tu \otimes v, \text{ que también está en } \mathcal{B};$$

por tanto:

$|\langle Tu, v \rangle|\ |\!|\!| Tu \otimes v |\!|\!| = |\!|\!| (Tu \otimes v)^2 |\!|\!| \le |\!|\!| Tu \otimes v |\!|\!|\ |\!|\!| Tu \otimes v |\!|\!|$, de donde:

$|\langle Tu, v \rangle| \le |\!|\!| Tu \otimes v |\!|\!| = |\!|\!| T\circ(u \otimes v) |\!|\!| \le |\!|\!| T |\!|\!|\ |\!|\!| u \otimes v |\!|\!|$, y por tanto

$|\langle Tu, v \rangle| \le |\!|\!| T |\!|\!|\ |\!|\!| u \otimes v |\!|\!|$, para $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, $T \in \mathcal{B}$ [*].

Por cada $u \in \mathfrak{X}$, el conjunto

$\{\widehat{Tu} : T \in \mathcal{B}, |||T||| \leq 1\}$ es un subconjunto de $\mathcal{Y}^*$ que, por la desigualdad [*] anterior, está puntualmente acotado.

Por el Principio de Acotación Uniforme, existe un número positivo $M_u > 0$ tal que: $\|\widehat{Tu}\| \leq M_u$, para todo $T \in \mathcal{B}$ con $|||T||| \leq 1$.

Si ahora $T \in \mathcal{B}$, $T \neq 0$, se tiene para $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, que:

$|\langle Tu, v\rangle| = |||T||| \left|\langle \frac{T}{|||T|||}u, v\rangle\right| \leq |||T|||\, M_u \|v\|$, de donde

$\|\widehat{Tu}\| \leq |||T|||\, M_u$, con $T \in B$ y $u \in \mathfrak{X}$ [**]

Considérese la aplicación bilineal:

$\phi : (B, |||\cdot|||) \times (\mathfrak{X}, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathcal{Y}^*, \|\cdot\|)$, definida por

$(T, u) \longrightarrow \widehat{Tu}$.

Por la última desigualdad [**] que hemos visto, tenemos que la aplicación ϕ es continua en la primera variable; además, por ser $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle,\rangle)$ un apareamiento normado existe $M > 0$ tal que:

$\|\widehat{Tu}\| \leq M \|Tu\| \leq M \|T\| \|u\|$, para $T \in \mathcal{B}$, $u \in \mathfrak{X}$, desigualdad que nos da la continuidad en la segunda variable. De aquí se sigue, por aplicación del Principio de Acotación Uniforme [Ru; Theorem 2.17] que dicha aplicación es continua; es decir, existe un número $k > 0$ tal que: $\|\widehat{Tu}\| \leq k\, |||T|||\, \|u\|$ para todo $T \in \mathcal{B}$ y $u \in \mathfrak{X}$, como se pretendía demostrar.

1.5. TEOREMA. *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle,\rangle)$ un apareamiento de Banach. Equivalen:*

i) Existe un número $k > 0$ *tal que*

$$\|T\| \leq k \|T^*\|, \text{ para } T \in L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle,\rangle)$$

ii) Existe un número $\alpha > 0$ *tal que*

$$\|u \otimes v\| \leq \alpha \|v \otimes' u\| \quad \text{para } u \in \mathfrak{X},\ v \in \mathcal{Y}$$

iii) La inmersión canónica $x \longrightarrow \hat{x}$ de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$, definida por $\langle,\rangle$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

iv) Toda subálgebra $\mathfrak{B}$ *de* $BL(\mathfrak{X})$, *tal que* $u \otimes v \in \mathfrak{B}$ *para cualesquiera* $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, *tiene mínima topología de la norma.*

v) El álgebra $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)$ *es cerrada en* $BL(\mathcal{Y})$.

Demostración.

Es claro que *i)* implica *ii)*. Veamos que *ii)* implica *iii)*.

Tenemos que $\| u \otimes u \| = \| u \| \, \| \hat{v} \|$ y $\| v \otimes' u \| = \| v \| \, \| \hat{u} \|$, por ello la desigualdad de la hipótesis en *ii)* puede escribirse:

$\| u \| \, \| \hat{v} \| \leq \alpha \, \| v \| \, \| \hat{u} \|$, para todo $u \in \mathfrak{X}$ y todo $v \in \mathcal{Y}$.

Fijemos $v_0 \in \mathcal{Y}$ con $\| v_0 \| = 1$; si se hace uso de la desigualdad anterior, tenemos: $\| u \| \, \| \hat{v}_0 \| \leq \alpha \, \| \hat{u} \|$, $u \in \mathfrak{X}$

y, en consecuencia, la aplicación continua $u \longrightarrow \hat{u}$, $u \in \mathfrak{X}$, tiene inversa continua, y por ello es un homeomorfismo.

iii) implica *iv)*. Como la inmersión $x \longrightarrow \hat{x}$ de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$ es homeomórfica por hipótesis, tenemos que existe un número $\rho > 0$ tal que

$$\rho \, \| x \| \leq \| \hat{x} \| \text{ para } x \in \mathfrak{X}.$$

Si se considera en $\mathfrak{B}$ otra norma $|||\,.\,|||$ de álgebra, podemos hacer uso del Lema 1.4 para obtener la existencia de una constante $k > 0$ tal que $\| \widehat{Tu} \| \leq k \, |||T||| \, \| u \|$ para todo $u \in \mathfrak{X}$ y todo $T \in \mathfrak{B}$, lo cual junto con la desigualdad anterior da

$$\rho \, \| Tu \| \leq k \, |||T||| \, \| u \|, \text{ luego } \| T \| \leq \frac{k}{\rho} \, |||T|||, \; T \in \mathfrak{B}$$

lo cual prueba que $(\mathfrak{B}, \|\,.\,\|)$ tiene mínima topología de la norma.

iv) implica *v)*. Definamos para T en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle\,,\,\rangle)$ la norma $|T| := \|T^*\|$; se obtiene así una norma de álgebra en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle\,,\,\rangle)$. Por la hipótesis existe un número $k > 0$ tal que $\| T \| \leq k \, \| T^* \|$, para T en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle\,,\,\rangle)$, o lo que es lo mismo: $\| S^* \| \leq k \, \| S \|$ para todo $S \in L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)$. Consideremos en $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)$ la norma

$$\| S \|_d = \text{Máx} \{ \| S \|, \| S^* \| \}, \; S \in L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle);$$

Sabemos que $\left(L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle), \|\cdot\|_d\right)$ es un espacio de Banach por Lema 1.3.

Ahora bien $\| S \|_d = \text{Máx} \{\| S \|, \| S^* \|\} \leq \text{Máx} \{\| S \|, k\| S \|\} = \| S \| \text{Máx} \{1, k\}$; es decir, existe $\alpha > 0$ tal que $\| S \|_d \leq \alpha \| S \|$ para $S \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$. Por esto la norma $\|\cdot\|_d$ es equivalente a la norma de operadores $\|\cdot\|$ en $L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$; en consecuencia $\left(L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle), \|\cdot\|\right)$ es un subespacio completo de $BL(\mathcal{Y})$ y por tanto es cerrado en $BL(\mathcal{Y})$.

v) implica *i)*. Tenemos que $\left(L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle), \|\cdot\|\right)$ es un espacio de Banach por hipótesis; y $\|\cdot\|_d$ es también una norma completa en $L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$. En virtud del Teorema de los isomorfismos de Banach ambas normas son equivalentes y por tanto se deduce que existe un número $k > 0$ tal que $\| S^* \| \leq k \| S \|$ para todo $S \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$, o lo que es igual $\| T \| \leq \| T^* \|$ para todo $T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

2. TEOREMA DE ESTRUCTURA DE LAS ALGEBRAS DE BANACH COMPLEJAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO Y MINIMALIDAD DE LA TOPOLOGIA DE LA NORMA.

En esta sección se describen las álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma (Teorema 2.1) obteniendo que, en cierto sentido, dichas álgebras están "parametrizadas" por apareamientos de Banach "especialmente buenos". Ello nos permite obtener, haciendo uso del Teorema principal de la sección anterior, que dichas álgebras y sus subálgebras que contienen al zócalo tienen mínima topología de la norma (Teorema 2.2) de lo cual deducimos un teorema de continuidad automática (Teorema 2.3). Finalmente damos una versión Jordan del Teorema 1.5 de la sección anterior que va a resultarnos de utilidad en el siguiente capítulo.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa. Un idempotente $e \in \mathcal{A}$ se llama un *idempotente de división* si el álgebra $e\mathcal{A}e$ es un álgebra de división. Cuando $\mathcal{A}$ es semiprima el ideal engendrado por todo idempotente de división es un álgebra simple.

Es sabido que en un álgebra asociativa semiprima, cuando existen ideales izquierdos minimales también hay ideales derechos minimales y la suma de los primeros coincide con la suma de los segundos, que por tanto es un ideal de $\mathcal{A}$ llamado el zócalo de $\mathcal{A}$ y notado por $soc(\mathcal{A})$ [B-D; 30]. Dicho ideal coincide también con la suma de los ideales simples de $\mathcal{A}$ que contienen idempotentes de división. Las condiciones anteriores se expresan abreviadamente diciendo que $\mathcal{A}$ tiene zócalo no cero. Se conviene que $soc(\mathcal{A}) = \{0\}$ cuando $\mathcal{A}$ no tiene idempotentes de división.

Es sabido que si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de un álgebra $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ y $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ está contenido en $\mathcal{A}$ entonces $soc(\mathcal{A}) = FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

Es conveniente recordar que para un álgebra asociativa semiprima con zócalo no cero las condiciones de ser prima y de ser primitiva son equivalentes [O-R; Theorem 1].

Si suponemos que en un apareamiento de Banach $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$ inducida por $\langle , \rangle$ es homeomórfica, entonces como consecuencia parcial del Teorema II. 1.5 se sigue que toda subálgebra cerrada $\mathcal{R}$ de $BL(\mathfrak{X})$ contenida en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ y que contenga a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma.

El siguiente Teorema muestra que este tipo de álgebras se agota en el ejemplo mencionado.

2.1. TEOREMA DE ESTRUCTURA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma. Entonces existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, tal que las inmersiones canónicas inducidas por la forma bilineal $\langle , \rangle$ son homeomórficas, de manera que $\mathcal{A}$ es topológicamente isomorfa a una subálgebra cerrada de $BL(\mathfrak{X})$ contenida en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ y que contiene a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{X}$ un ideal izquierdo minimal de $\mathcal{A}$. Es sabido que $\mathfrak{X} = \mathcal{A}e$, donde $e \in \mathcal{A}$ es un idempotente de división. Sea $\mathcal{Y} = e\mathcal{A}$, es claro que $\mathfrak{X}$ e $\mathcal{Y}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{A}$. Para x en $\mathfrak{X}$ e y en $\mathcal{Y}$ el producto $y x$ está en $e\mathcal{A}e$, que es un álgebra de división compleja normada, por lo que $e\mathcal{A}e = \mathbb{C}e$.

La terna $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, donde $\langle , \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ está definida por $y x := \langle x, y \rangle e$ para todo $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, es un apareamiento de Banach; la aplicación $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ definida por $\varphi(x)(z) := xz$, para todo $z \in \mathcal{X}$, $x \in \mathcal{A}$, es un homomorfismo inyectivo con $\varphi\,[\mathrm{soc}(\mathcal{A})] = FL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

Todos estos argumentos son conocidos y pueden verse en [B-D; Theorem 31.6].

La aplicación $x \longrightarrow \| \varphi(x) \|$ es una norma de álgebra en $\mathcal{A}$, y también $\| \varphi(x) \| \leq \| x \|$ para todo x en $\mathcal{A}$; además se sigue de la minimalidad de la topología de álgebra normada en $\mathcal{A}$ que existe un número $\beta > 0$ tal que: $\| x \| \leq \beta \| \varphi(x) \|$, $x \in \mathcal{A}$; y, por tanto, φ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B} := \varphi(\mathcal{A})$.

Consideremos ahora $\varphi^{*}(x)(z) = zx$, para todo $z \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{A}$; también tenemos $\| \varphi^{*}(x) \| \leq \| x \|$, $x \in \mathcal{A}$; y junto con el hecho de que $x \longrightarrow \| \varphi^{*}(x) \|$ es también una norma de álgebra en $\mathcal{A}$ se puede afirmar -igual que anteriormente- la existencia de un número positivo $\alpha > 0$ tal que: $\alpha \| x \| \leq \| \varphi^{*}(x) \|$, $x \in \mathcal{A}$.

Combinando las desigualdades anteriores, resulta:

$$\alpha \| \varphi(x) \| \leq \| \varphi^{*}(x) \| \leq \beta \| \varphi(x) \|, \ x \in \mathcal{A}; \text{ o bien:}$$

$$\alpha \| T \| \leq \| T^{*} \| \leq \beta \| T \| \quad \text{para } T \in \mathcal{B}.$$

Como $u \otimes v \in \mathcal{B}$ para todo $u \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, tenemos que, al considerar sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \langle , \rangle)$ la implicación *ii)* $\Longrightarrow$ *iii)* del Teorema 1.5, las inmersiones canónicas inducidas por la forma bilineal son homeomórficas, como se quería demostrar.

Hemos probado que, salvo isomorfismos topológicos, no hay más álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma que las subálgebras cerradas $\mathcal{B}$ de un álgebra $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ con $FL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle) \subset \mathcal{B}$, donde $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento de Banach tal que las inmersiones canónicas son homeomórficas.

También sabemos, por el Teorema 1.5, que tales álgebras $\mathcal{B}$, y todas sus subálgebras que contienen a $FL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, tienen mínima topología de la norma. Obtenemos así el siguiente Teorema.

2.2. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, entonces toda subálgebra de $\mathcal{A}$ que contenga al zócalo tiene mínima topología de la norma.*

Podemos ahora generalizar un Teorema de B. Yood [Y; Theorem 2.3] en el que se establece una condición para que un homomorfismo de una Q-álgebra asociativa $\mathcal{A}$ en el álgebra $BL(\mathcal{X})$, con $\mathcal{X}$ espacio de Banach sea continuo.

2.3. TEOREMA. *Todo homomorfismo φ de una Q-álgebra compleja $\mathcal{A}$ en un álgebra de Banach $\mathcal{B}$ compleja, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, verificando que* $soc(\mathcal{B}) \subset \varphi(\mathcal{A})$, *es continuo.*

Demostración. Notemos $M = soc(\mathcal{B})$, $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{A})$. Por ser $\mathcal{B}$ prima M es un ideal simple de $\mathcal{B}$ y también de $\mathcal{C}$. Sea P un ideal de $\mathcal{C}$. Es claro que $P \cap M = \{0\}$ o $P \cap M = M$. En el primer caso $P \subset An(M) = \{0\}$ por ser $\mathcal{B}$ prima. Así, todo ideal no nulo de $\mathcal{C}$ contiene a M y, en consecuencia,

$\mathcal{C}$ es prima.

Sea $e \in M$ un idempotente de división en $\mathcal{B}$. Tenemos $eMe \subset e\mathcal{C}e \subset e\mathcal{B}e$, pero por ser M ideal de $\mathcal{B}$, $e\mathcal{B}e \subset M$ y deducimos que: $eMe = e\mathcal{C}e = e\mathcal{B}e$, así e es también un idempotente de división en $\mathcal{C}$. Se ha probado así que $\mathcal{C}$ es prima con zócalo no cero, en consecuencia $\mathcal{C}$ es primitiva [O-R], y por tanto semisimple.

Viendo φ como un epimorfismo de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{C}$, sabemos por la Proposición I. 3.12, que $Ker(\varphi)$ es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$.

Sea $\hat{\varphi} : \mathcal{A}/Ker(\varphi) \longrightarrow \mathcal{C}$, definido por $\hat{\varphi}(a + Ker(\varphi)) := \varphi(a)$, para todo a en $\mathcal{A}$. $\hat{\varphi}$ es un isomorfismo de álgebras, en consecuencia $x \longrightarrow \| \hat{\varphi}^{-1}(x) \|$ con $x \in \mathcal{C}$, es una norma de álgebra en $\mathcal{C}$.

Por hipótesis $soc(\mathcal{B}) \subset \mathcal{C}$, luego el álgebra $\mathcal{C}$ tiene según lo visto en el Teorema 2.2 mínima topología de la norma, y por tanto existe $\alpha > 0$ verificando $\| x \| \leq \alpha \| \hat{\varphi}^{-1}(x) \|$ para $x \in \mathcal{C}$, o lo que es igual: $\| \varphi(a) \| \leq \alpha \| a + Ker(\varphi) \|$ para $a \in \mathcal{A}$.

Pero $\| a + Ker(\varphi) \| \leq \| a \|$, luego $\| \varphi(a) \| \leq \alpha \| a \|$, $a \in \mathcal{A}$, y φ es continuo.

2.4. TEOREMA. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ un apareamiento de Banach. Las condiciones i), ii), iii), iv) y v) del Teorema II. 1.5 equivalen a:*

vi) Toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $BL(\mathcal{X})^+$, verificando que $u \otimes v \in \mathcal{B}$ para todo $u \in \mathcal{X}$ y $v \in \mathcal{Y}$, tiene mínima topología de la norma de álgebra de Jordan normada.

Demostración. Es claro que *vi)* implica *iv)* ya que el producto Jordan en un álgebra especial $\mathcal{A}^+$ es continuo para cualquier norma de álgebra en $\mathcal{A}$.

Veamos que *iii)* implica *vi)*. Sea $|\!|\!|.|\!|\!|$ una norma de álgebra de

Jordan en $\mathcal{B}$, es decir: $|\!|\!| T\cdot S |\!|\!| \le |\!|\!| T |\!|\!|\ |\!|\!| S |\!|\!|$, $T, S \in \mathcal{B}$, donde $T\cdot S$ denota el producto Jordan en $\mathcal{B}$.

Dados T en $\mathcal{B}$, u en $\mathfrak{X}$, v en $\mathcal{Y}$ tenemos que

$(u \otimes v)\ T\ (u \otimes v) = \mathcal{U}_{u \otimes v}(T)$ es un elemento de $\mathcal{B}$, y también:

$$(u \otimes v)\ T\ (u \otimes v) = \langle Tu, v \rangle\, u \otimes v.$$

Por tanto: $|\langle Tu, v \rangle|\ |\!|\!| u \otimes v |\!|\!| = |\!|\!| \mathcal{U}_{u \otimes v}(T) |\!|\!| \le 3 |\!|\!| u \otimes v |\!|\!|^2\ |\!|\!| T |\!|\!|$ de donde: $|\langle Tu, v \rangle| \le 3 |\!|\!| T |\!|\!|\ |\!|\!| u \otimes v |\!|\!|$, con $T \in \mathcal{B}$, $u \in \mathfrak{X}$, $v \in \mathcal{Y}$.

Apartir de esta desigualdad, siguiendo un razonamiento análogo al del Lema 1.4, tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$\| \widehat{Tx} \| \le M\ |\!|\!| T |\!|\!|\ \| x \|, \text{ para } T \text{ en } \mathcal{B} \text{ y } x \text{ en } \mathfrak{X}.$$

Como la inmersión $x \longrightarrow \hat{x}$ es homeomórfica por hipótesis, tenemos que existe un número $\rho > 0$ tal que: $\| \hat{x} \| \ge \rho\ \| x \|$, $x \in \mathfrak{X}$, que junto con la desigualdad anterior da: $\rho\ \| Tx \| \le M\ |\!|\!| T |\!|\!|\ \| x \|$, para $x \in \mathfrak{X}$, $T \in \mathcal{B}$, luego $\| T \| \le \frac{M}{\rho}\ |\!|\!| T |\!|\!|$, $T \in \mathcal{B}$; lo que prueba que $\mathcal{B}$ tiene mínima topología de la norma como álgebra de Jordan normada.

La equivalencia entre las condiciones *iii)* y *vi)* del Teorema 2.4 permite demostrar una primera generalización Jordandel Teorema 2.3. Previo al enunciado del Teorema recordemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos álgebras asociativas y $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación lineal, se dice que φ es un *homomorfismo Jordan* cuando cumple que: $\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, donde la notación $x\cdot y$ denota el producto de Jordan en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

2.5. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra asociativa compleja, $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach compleja, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, y sea φ un homomorfismo Jordan entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ verificando $\varphi(\mathcal{A}) \supset soc(\mathcal{B})$, entonces φ es continuo.*

Demostración. φ es un homomorfismo de la Q-álgebra de Jordan $\mathcal{A}^+$ sobre el álgebra de Jordan $\mathcal{C} := \varphi(\mathcal{A})$. $\mathcal{C}$ es semisimple (véase Nota al final), en consecuencia por la Proposición I. 3.12 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es cerrado. Como consecuencia del Teorema 2.1 y del Teorema 2.4 [*iii)* $\Longrightarrow$ *vi)*], $\mathcal{C}$ tiene mínima topología de la norma. Por tanto a partir de aquí la demostración puede concluirse igual que en el Teorema 2.3.

Nota. Puede probarse que el álgebra de Jordan $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{A})$ es semisimple como sigue. Por ser $\mathcal{B}$ prima, $M = \mathrm{soc}(\mathcal{B})$ es un ideal simple de $\mathcal{A}$. El álgebra de Jordan M^+ también es simple como consecuencia de [C-Y; Lemma 2.4]. Sea I un ideal del álgebra de Jordan $\mathcal{C}$. Por ser M ideal simple de $\mathcal{C}$ tenemos $I \cap M = \{0\}$ o bien $I \cap M = M$. Si $I \cap M = \{0\}$ entonces como $I \cdot M \subset I \cap M = \{0\}$ se tendría que $I \subset \mathrm{An}(M)$, por [C-Y; Lemma 2.4]; pero $\mathrm{An}(M) = \{0\}$ por ser $\mathcal{B}$ prima, luego si $I \cap M = \{0\}$ ha de ser $I = \{0\}$. Así, todo ideal de $\mathcal{C}$ no nulo contiene a M.

Si ahora suponemos que I es un ideal de $\mathcal{C}$, que es casi inversible en $\mathcal{C}$, entonces tenemos que $I \subset \text{q-inv}(\mathcal{B}^+) = \text{q-inv}(\mathcal{B})$, y en consecuencia deberá ser $I = \{0\}$, pues en caso contrario se tiene que $M \subset I \subset \text{q-inv}(\mathcal{B})$, lo que contradice la semisimplicidad de $\mathcal{B}$.

CAPÍTULO III

1. ALGEBRAS DE JORDAN NO DEGENERADAS COMPLEJAS, NORMADAS COMPLETAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO.

2. TEOREMA DE ESTRUCTURA PARA ALGEBRAS DE JORDAN NO DEGENERADAS, COMPLEJAS, NORMADAS COMPLETAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO Y MINIMALIDAD DE LA TOPOLOGIA DE LA NORMA.

1. ALGEBRAS DE JORDAN NO DEGENERADAS COMPLEJAS, NORMADAS COMPLETAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO.

Aunque las álgebras de Jordan no degeneradas primas con zócalo no cero están convenientemente descritas [O-R; Theorem 18] no existe, que nosotros sepamos, un Teorema de representación satisfactorio para tales álgebras cuando se añade la hipótesis de ser complejas normadas completas. Conseguir ese Teorema es el objetivo de esta sección.

Nuestro punto de partida se encuentra en los trabajos de Osborn-Racine [O-R], y A. Fernández [F] que permiten clasificar en una primera aproximación las álgebras de Jordan no degeneradas complejas normadas primas, con zócalo no cero. Al añadir a las condiciones anteriores la hipótesis de complitud conseguimos un Teorema de representación para esta clase de álgebras que es un versión para álgebras de Jordan del Teorema de representación para álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero [B-D; Theorem 31.6] y [R; Theorem 2.4.17].

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan; un idempotente $e \in \mathcal{A}$ se llama un *idempotente de división* (o completamente primitivo) si $\mathcal{U}_e(\mathcal{A})$, que es un álgebra de Jordan con unidad e, es un álgebra de división. Se dice que $\mathcal{A}$ es un ***álgebra de Jordan no degenerada*** si para $a \neq 0$ se verifica que $\mathcal{U}_a \neq 0$. Se define el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada como la suma de los ideales interiores minimales de $\mathcal{A}$ y se nota por $soc(\mathcal{A})$. Por supuesto si $\mathcal{A}$ carece de ideales interiores minimales se entiende que $\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \{0\}$. En [O-R] se prueba que el ideal engendrado por un idempotente de división es un álgebra simple y $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$ coincide con la suma directa de los ideales simples de $\mathcal{A}$ que contienen idempotentes de división.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa; teniendo en cuenta que los idempotentes de división en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}^+$ son los mismos, que $\mathcal{A}$ es semiprima si y sólo si $\mathcal{A}^+$ es no degenerada y que todo ideal simple de $\mathcal{A}^+$ también es ideal simple de $\mathcal{A}$ [F-R; Proposition 6], deducimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^+$ tienen exactamente los mismos ideales simples que contienen idempotentes de división y, en consecuencia, $\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \mathrm{soc}(\mathcal{A}^+)$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan no degenerada prima es claro que $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$ es el único ideal simple de $\mathcal{A}$ que contiene idempotentes de división. En particular si $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento y $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^+$ que contiene a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan no degenerada prima, y tenemos que $\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa con involución $*$, el conjunto $\mathrm{Sim}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : a = a^*\}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}^+$ y si $\mathcal{A}$ es semiprima es sabido que [F 2; Proposition 2.6], $\mathrm{soc}(\mathrm{Sim}(\mathcal{A})) = \mathrm{Sim}(\mathrm{soc}(\mathcal{A}))$. En particular, la situación que pasamos a considerar es de interés para nosotros.

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio vectorial complejo y $\langle , \rangle$ una forma bilineal $\langle , \rangle : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, no degenerada; en este caso el apareamiento de $\mathfrak{X}$ consigo mismo respecto de $\langle , \rangle$ se representa por $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$, y se dice que $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es un *espacio autodual*; si además $\mathfrak{X}$ es normado y $\langle , \rangle$ es continua se dice que $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es un *espacio autodual normado.*

Un *espacio de Banach autodual* es un espacio autodual normado y completo.

Dado un espacio autodual $(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$, $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ representa al conjunto de los operadores de $L(\mathfrak{X})$ que tienen adjunto respecto a $\langle\, ,\,\rangle$; igualmente, $FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ representa el conjunto de los operadores en $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ que tienen rango finito. Nótese que $T \longrightarrow T^*$ es una involución en $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$.

Con $Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$ notamos el conjunto de los operadores en $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ que son simétricos, es decir, coinciden con su adjunto:

$$Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)] = \{ T \in L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle) : T = T^* \}.$$

Con la notación $Sim[FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$ representamos al conjunto de los operadores simétricos en $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ que tienen rango finito.

$Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$ se considera siempre como álgebra de Jordan, subálgebra de $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)^+$.

Según lo dicho antes:

$$soc\Big[Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)] \Big] = Sim[FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$$

Más en general, si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$ que contiene a $Sim[FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$ entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan no degenerada prima y $soc(\mathcal{A}) = Sim[FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)]$.

Cuando $(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ es un espacio de Banach autodual se tiene, como consecuencia del Teorema de la Gráfica Cerrada, que $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\,\rangle)$ es una subálgebra de $BL(\mathfrak{X})$.

Estaremos interesados en los espacios autoduales para los que:

i) La forma bilineal es simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para cualesquiera x e y en $\mathfrak{X}$.

ii) La forma bilineal es antisimétrica: $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$, para cualesquiera x e y en $\mathfrak{X}$.

En el primer caso se dice que el espacio autodual $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es *simétrico*, y en el segundo caso se dice que el espacio autodual $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es *antisimétrico*.

1.1. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan compleja normada no degenerada prima con zócalo no cero; entonces $\mathcal{A}$ está en uno de los siguientes casos:*

i) Es un álgebra de Jordan compleja finito dimensional simple.

ii) Es el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no degenerada y continua sobre un espacio vectorial complejo normado infinito dimensional.

iii) Existe un apareamiento de espacios vectoriales complejos $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ tal que $\mathcal{A}$ es (isomorfa a) una subálgebra del álgebra de Jordan $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^+$ *que contiene a* $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

iv) Existe un espacio vectorial complejo autodual, simétrico o antisimétrico, $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ *tal que $\mathcal{A}$ es (isomorfa a) una subálgebra del álgebra de Jordan* $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$ *que contiene a* $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$.

Demostración. Sea $J = \mathrm{soc}(\mathcal{A})$; tenemos que J es un álgebra de Jordan compleja simple normada que contiene un idempotente de división. Se verifica entonces que J responde a alguna de las siguientes descripciones: (véase [F; Lemma 1] y su demostración)

a) J está en alguna de las situaciones *i)* y *ii)* antes consideradas.

b) Existe un apareamiento de espacios vectoriales complejos $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ tal que J es (isomorfa a) $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^+$.

c) Existe un espacio vectorial complejo autodual, simétrico o antisimétrico, $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ tal que J es (isomorfa a) $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$.

Si J se encuentra en la situación descrita en el apartado a) entonces J tiene unidad por lo que $\mathcal{A} = J$ (véase [F 3; Corollary 7]) ; en consecuencia $\mathcal{A}$ responde al apartado *i)* o al apartado *ii)* del enunciado. Si J está en la situación descrita por los apartados b) y c), el isomorfismo en cuestión puede extenderse siguiendo el argumento de Osborn-Racine en [O-R; Theorem 18] a un homomorfismo inyectivo de $\mathcal{A}$ en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^+$ en el caso b), o de $\mathcal{A}$ en $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$ en el caso c); lo que conduce, respectivamente, a los apartados *iii)* y *iv)* para $\mathcal{A}$.

1.2. TEOREMA. *Sea* $(\mathcal{A}\ \|.\|)$ *un álgebra de Jordan compleja normada completa no degenerada, prima con zócalo no cero. Entonces* $\mathcal{A}$ *está en alguna de las situaciones siguientes:*

i) Es un álgebra de Jordan compleja finito dimensional simple.

ii) Es el álgebra de Jordan de una forma bilineal simétrica no degenerada y continua sobre un espacio de Banach complejo infinito dimensional.

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *tal que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra del álgebra de Jordan* $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^+$ *que contiene a* $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, *y la inmersión de* $(\mathcal{A}\ \|.\|)$ *en* $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle), |.|_d \right)$ *es continua.*

iv) Existe un espacio de Banach complejo autodual, simétrico o antisimétrico, $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ *tal que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra del álgebra de Jordan* $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$ *que contiene a* $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$, *y la inmersión de* $(\mathcal{A}\ \|.\|)$ *en* $BL(\mathfrak{X})$ *es continua.*

Demostración. Es suficiente considerar para la demostración de este Teorema, a la vista del Teorema 1.1 y la Proposición I. 2.8, que nuestra álgebra $\mathcal{A}$ se encuentra en una de las situaciones *iii)* o *iv)* descritas en dicho Teorema 1.1. El esquema de la demostración es el mismo para ambos casos, a saber: a partir de la norma de álgebra completa con que viene dotada $\mathcal{A}$ se trata de convertir el apareamiento complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ en un apareamiento de Banach y el espacio autodual complejo $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ en un espacio de Banach autodual, y comprobar que la inmersión de $\mathcal{A}$ en el correspondiente espacio $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle), |\cdot|_d \right)$ o, respectivamente, $BL(\mathfrak{X})$ es continua.

Sin embargo, hay diferencias técnicas que obligan a considerar separadamente cada una de las posibles situaciones para $\mathcal{A}$. En consecuencia realizaremos la demostración del Teorema 1.2 en tres apartados. En todos ellos $(\mathcal{A} \|\cdot\|)$ es un álgebra de Jordan compleja normada completa.

I. Se considera en este apartado $\mathcal{A}$ realizada como subálgebra de un álgebra de Jordan $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)^{+}$, conteniendo a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, donde $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento de espacios vectoriales complejos.

Dado x vector no nulo en $\mathfrak{X}$, sabemos que para todo y en $\mathcal{Y}$, $x \otimes y \in FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$, y por tanto $x \otimes y \in \mathcal{A}$. En consecuencia se puede considerar el operador $\mathcal{U}_{x \otimes y} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Si $T \in \mathcal{A}$ un sencillo cálculo da: $\mathcal{U}_{x \otimes y}(T) = \langle Tx, y \rangle\, x \otimes y$.

En virtud de la no degeneración de $\langle , \rangle$, y por ser $x \neq 0$ tenemos que $x \otimes y = 0$ si y sólo si $y = 0$. Deducimos que $\mathcal{U}_{x \otimes y}(T) = 0$ si y sólo si $\langle Tx, y \rangle = 0$. Haciendo uso una vez más de la no degeneración de $\langle , \rangle$ obtenemos:

$$\{T \in \mathcal{A} : Tx = 0\} = \{T \in \mathcal{A} : \langle Tx, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}\} =$$

$$= \bigcap_{y \in \mathcal{Y}} \operatorname{Ker} \mathcal{U}_{x \otimes y} .$$

Teniendo en cuenta que, para a en $\mathcal{A}$, el operador $\mathcal{U}_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ es continuo, de la igualdad anterior se sigue que el conjunto $\{T \in \mathcal{A} : T\mathfrak{x} = 0\}$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

En lo que sigue u será un vector no nulo fijo en $\mathfrak{X}$. La aplicación de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{X}$ dada por $T \longrightarrow Tu$ es lineal. Tomando y en $\mathcal{Y}$ de manera que $\langle u, y \rangle = 1$ tenemos que, para $\mathfrak{x}$ en $\mathfrak{X}$, es $(\mathfrak{x} \otimes y)\, u = \mathfrak{x}$, por lo que la aplicación anterior también es sobreyectiva, y su núcleo el subespacio vectorial $M = \{T \in \mathcal{A} : Tu = 0\}$; en consecuencia, dicha aplicación induce un isomorfismo del espacio vectorial cociente $\mathcal{A}/M$ sobre $\mathfrak{X}$.

M es cerrado en $\mathcal{A}$, según se ha visto, por lo que $\mathcal{A}/M$ con la norma cociente es un espacio normado y completo, por ser $\mathcal{A}$ completa. Al trasladar mediante el isomorfismo anterior la norma de $\mathcal{A}/M$ a $\mathfrak{X}$ se obtiene una norma completa en $\mathfrak{X}$, que notamos $|.|$, y que viene dada por: $|\mathfrak{x}| := \inf\{\| T \| : T \in \mathcal{A},\ Tu = \mathfrak{x}\}$.

Notaremos $\mathcal{B}$ la subálgebra de $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)^+$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{T^* : T \in \mathcal{A}\}.$$

Definiendo para S en $\mathcal{B}$ $\| S \| := \| S^* \|$, tenemos que $(\mathcal{B}, \|.\|)$ es un álgebra de Jordan compleja normada completa. Por otra parte es claro que $FL(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle) \subset \mathcal{B}$. En lo que sigue v es un vector no nulo fijo en $\mathcal{Y}$. Por analogía con la situación antes considerada, es fácil ver que, definiendo para y en $\mathcal{Y}$

$$|y| := \inf\{ \| S \|,\ S \in \mathcal{B},\ Sv = y \} = \inf\{ \| T \| : T \in \mathcal{A},\ T^*v = y\}$$

se obtiene que $(\mathcal{Y}, |.|)$ es un espacio de Banach.

Vamos a probar ahora que la forma bilineal $\langle , \rangle$ de $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ en $\mathbb{C}$ es continua. Será suficiente probar que $\langle , \rangle$ es separadamente continua pues entonces, al ser $(\mathfrak{X}, |.|)$ e $(\mathcal{Y}, |.|)$ espacios de Banach, una aplicación del principio de acotación uniforme permite concluir la continuidad de $\langle , \rangle$.

Tomando normas en la igualdad $\mathcal{U}_{x \otimes y}(T) = \langle Tx, y \rangle\, x \otimes y$ se obtiene $|\langle Tx, y \rangle|\ \| x \otimes y \| \le \| \mathcal{U}_{x \otimes y} \|\ \| T \| \le 3 \| x \otimes y \|^2\ \| T \|$ y, simplificando, resulta:

$|\langle Tx, y \rangle| \le 3 \| x \otimes y \|\ \| T \|$, para todo x en $\mathfrak{X}$, y en $\mathcal{Y}$, T en $\mathcal{A}$.

En particular $|\langle Tu, y \rangle| \le 3 \| u \otimes y \|\ \| T \|$.

Si ahora x es un vector de $\mathfrak{X}$, para cualquier T en $\mathcal{A}$ tal que $Tu=x$ se obtiene que $|\langle x, y \rangle| \le 3 \| u \otimes y \|\ \| T \|$, para todo y en $\mathcal{Y}$, T en $\mathcal{A}$ tal que $Tu = x$. De donde tomando ínfimos en la variable T de esta desigualdad, tenemos: $|\langle x, y \rangle| \le 3 \| u \otimes y \|\ |x|$, para x en $\mathfrak{X}$, y en $\mathcal{Y}$.

Análogamente se prueba la desigualdad $|\langle x, y \rangle| \le 3 \| x \otimes v \|\ |y|$, x en $\mathfrak{X}$, y en $\mathcal{Y}$.

La primera de las desigualdades da la continuidad de $\langle , \rangle$ en la primera variable, mientras que la segunda desigualdad nos da la continuidad de $\langle , \rangle$ en la segunda variable.

Se ha demostrado así que $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ es un apareamiento de Banach.

Consecuencia de lo que acabamos de ver es que $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ está contenida en $BL(\mathfrak{X})$ y $L(\mathcal{Y}, \mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ está incluida en $BL(\mathcal{Y})$. Simbolizamos por $|.|$ la norma de operadores en $BL(\mathfrak{X})$ y en $BL(\mathcal{Y})$, y para T en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ escribimos $|T|_d = \text{Máx} \{ |T|, |T^*| \}$.

Para concluir esta apartado I falta probar que la inmersión de $(\mathcal{A}, \|.\|)$ en $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle), |.|_d \right)$ es continua.

Puesto que ambos espacios normados son completos podemos aplicar el Teorema de la gráfica cerrada. Sea $\{T_n\}$ una sucesión convergente a 0 en $(\mathcal{A}, \|.\|)$ y tal que $\{T_n\}$ converge a F en $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle), |.|_d \right)$.

En virtud de la acotación $|\langle Tx, y \rangle| \le 3 \| x \otimes y \|\ \| T \|$ y del hecho que de $\{T_n\} \longrightarrow 0$ en $(\mathcal{A}, \|.\|)$, se sigue que $\{\langle T_n x, y \rangle\} \longrightarrow 0$

para todo x en $\mathfrak{X}$ y todo y en $\mathcal{Y}$.

Por otra parte, la convergencia de $\{T_n\}$ a F en $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle), |\cdot|_d\right)$ implica que $\{T_n\}$ converge a F en $BL(\mathfrak{X})$ por lo cual, en particular, para todo x en $\mathfrak{X}$ se tiene que $\{T_n x\}$ converge a Fx en $(\mathfrak{X}, |.|)$ y, por la continuidad de $\langle , \rangle$ tenemos que $\{\langle T_n x, y \rangle\}$ converge a $\langle Fx, y \rangle$ para cada x en $\mathfrak{X}$ e y en $\mathcal{Y}$. Se concluye así que $\langle Fx, y \rangle = 0$ para todo x en $\mathfrak{X}$ e y en $\mathcal{Y}$, luego por la no degeneración de la forma bilineal, se sigue que $F = 0$.

II. En este apartado consideramos $\mathcal{A}$ realizada como subálgebra de un álgebra de Jordan $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$ y conteniendo a $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$, donde $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es un espacio vectorial complejo autodual simétrico. Para x e y en $\mathfrak{X}$ sabemos que $(x \otimes y)^* = y \otimes' x$, donde $y \otimes' x$ es el operador sobre $\mathfrak{X}$ definido por $(y \otimes' x)(z) = \langle x, z \rangle y$.

Como la forma bilineal $\langle , \rangle$ es simétrica tenemos que $(y \otimes' x)(z) = \langle z, x \rangle y = (y \otimes x)(z)$. Así $(x \otimes y)^* = y \otimes x$, por lo cual $x \otimes y + y \otimes x$ es simétrico, y como también es de rango finito resulta que este operador está en $\mathcal{A}$. En particular, el operador $x \otimes x$ está en $\mathcal{A}$ para todo x en $\mathfrak{X}$. Además, por la no degeneración de $\langle , \rangle$, $x \otimes x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Para S en $\mathcal{A}$ se puede considerar el operador $U_S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Es fácil calcular que $U_S(x \otimes x) = Sx \otimes Sx$, por lo cual $U_S(x \otimes x) = 0$ si y sólo si $Sx = 0$.

Dado un vector $x \neq 0$ en $\mathfrak{X}$ y una sucesión $\{S_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$ que converge en $(\mathcal{A}, \|.\|)$ hacia un elemento S de $\mathcal{A}$ y verificando que $S_n x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos por la continuidad de la aplicación $a \longrightarrow U_a$ de $\mathcal{A}$ en $BL(\mathcal{A})$, que $U_S = \lim U_{S_n}$; en particular $\lim U_{S_n}(x \otimes x) = U_S(x \otimes x)$. Ahora bien, $U_{S_n}(x \otimes x) = 0$ para todo n, y en consecuencia $\mathcal{U}_S(x \otimes x) = 0$, es decir $Sx = 0$. Se prueba así que el conjunto $\{S : S \in \mathcal{A},\ Sx = 0\}$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

En lo que sigue u va a ser un vector no nulo, fijo en $\mathfrak{X}$. La aplicación $T \longrightarrow Tu$ de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{X}$ es lineal y es sobreyectiva, ya que, si $x \in \mathfrak{X}$ es tal que $\langle x, u \rangle \neq 0$ entonces $S = \dfrac{x \otimes x}{\langle x, u\rangle}$ pertenece a $\mathcal{A}$ y $S(u) = x$; pero si $\langle x, u \rangle = 0$, tomando z en $\mathfrak{X}$ tal que $\langle z, u \rangle = 1$, se tiene que $T = x \otimes z + z \otimes x$ está en $\mathcal{A}$, y $Tu = \langle u, z \rangle x + \langle u, x \rangle z = x$.

El núcleo de esta aplicación lineal es el subespacio vectorial de $\mathcal{A}$ dado por $\{S : S \in \mathcal{A},\ Su = 0\}$, que ya hemos visto que es cerrado en $\mathcal{A}$.

Con un razonamiento igual al empleado en el apartado I anterior, se tiene que, definiendo para x en $\mathfrak{X}$

$$|x| = \inf\{\| S \| : S \in \mathcal{A},\ Su = x\},$$

resulta que $(\mathfrak{X}, |.|)$ es un espacio de Banach.

Veamos la continuidad de la forma bilineal $\langle , \rangle$ respecto de la norma anteriormente definida.

Tomando normas en la igualdad $\mathcal{U}_S(x \otimes x) = Sx \otimes Sx$, se tiene: $\| Sx \otimes Sx \| \leq 3 \| S \|^2 \| x \otimes x \|$ para x en $\mathfrak{X}$, S en $\mathcal{A}$.

Por otro lado, si z está en $\mathfrak{X}$ $(z \otimes z)^2 = \langle z, z \rangle z \otimes z$ está en $\mathcal{A}$, de donde tomando normas y simplificando resulta

$$|\langle z, z \rangle| \leq \| z \otimes z \| \text{ para } z \text{ en } \mathfrak{X}.$$

De las desigualdades anteriores se tiene que:

$|\langle Sx, Sx \rangle| \leq 3\| S \|^2 \| x \otimes x \|$, para x en $\mathfrak{X}$ y S en $\mathcal{A}$. En particular $|\langle Su, Su \rangle| \leq 3\| S \|^2 \| u \otimes u \|$, S en $\mathcal{A}$.

Dado x en $\mathfrak{X}$ y S en $\mathcal{A}$ tales que $Su = x$, se tiene de la desigualdad anterior que: $|\langle x, x \rangle| \leq 3\| S \|^2 \| u \otimes u \|$, S en $\mathcal{A}$ y x en $\mathfrak{X}$, $Su = x$.

Tomando ínfimos en la variable S en la última desigualdad resulta que: $|\langle x, x\rangle| \leq 3\| u \otimes u \| \, |x|^2$.

Puesto que $\langle\, ,\, \rangle$ es simétrica se tiene

$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle \Big)$, y por tanto fácilmente tenemos: $|\langle x, y\rangle| \leq 6 \| u \otimes u \| \, |x| \, |y|$. Se ha demostrado que $(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle)$ es un espacio de Banach autodual.

De lo anterior se deduce que $L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle) \subset BL(\mathfrak{X})$ y, en particular $\mathcal{A} \subset BL(\mathfrak{X})$.

Veamos que la inmersión de $(\mathcal{A}, \|.\|)$ en $(BL(\mathfrak{X}), |.|)$ es continuo. Como ambos espacios son completos se puede aplicar el Teorema de la gráfica cerrada. Sea $\{S_n\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ que converge a 0 en $(\mathcal{A}, \|.\|)$ y a S en $(BL(\mathfrak{X}), |.|)$. Para x en $\mathfrak{X}$ y T en $\mathcal{A}$, y al tomar normas en la igualdad $U_{x\otimes x}(T) = \langle Tx, x\rangle x \otimes x$ y simplificar, se obtiene que $|\langle Tx, x\rangle| \leq 3\| T \| \, \| x \otimes x \|$. De donde se deduce que $\langle S_n x, x\rangle \longrightarrow 0$ para todo x en $\mathfrak{X}$.

Por otra parte, para x en $\mathfrak{X}$ tenemos que $\{S_n x\}$ converge a Sx en $(\mathfrak{X}, |.|)$, y por la continuidad de $\langle\, ,\, \rangle$ se sigue $\langle S_n x, y\rangle$ converge a $\langle Sx, y\rangle$ para x e y en $\mathfrak{X}$.

Teniendo en cuenta que $\langle S_n x, y\rangle = \langle x, S_n y\rangle = \langle S_n y, x\rangle$, se obtiene que $\langle Sx, y\rangle = \langle Sy, x\rangle = \langle x, Sy\rangle$, para todo x e y en $\mathfrak{X}$; luego $S = S^*$, y S es un operador simétrico.

Como $\langle Sx, x\rangle = \lim \langle S_n x, x\rangle = 0$, para todo x en $\mathfrak{X}$, obtenemos que la forma bilineal simétrica $(x, y) \longrightarrow \langle Sx, y\rangle$ se anula en la diagonal, y en consecuencia es nula: $\langle Sx, y\rangle = 0$ para todo x en $\mathfrak{X}$ e y en $\mathcal{Y}$; luego en virtud de la no degeneración de $\langle\, ,\, \rangle$, se tiene que $S = 0$.

III. En este apartado se considera $\mathcal{A}$ realizada como subálgebra de un álgebra de Jordan $Sim[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle)]$ y conteniendo a $Sim[FL(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle)]$, donde $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es un espacio vectorial complejo autodual antisimétrico.

Para x e y en $\mathfrak{X}$ se tiene que $(x \otimes y)^*(z) = (y \otimes' x)(z) = = \langle x, z \rangle y = -\langle z, x \rangle y = -(y \otimes x)(z)$, luego $(x \otimes y)^* = -(y \otimes x)$, por lo cual $x \otimes y - y \otimes x$ es un operador simétrico y, como es de rango finito, resulta que está en $\mathcal{A}$.

Notemos también que, dado x en $\mathfrak{X}$ y S en $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)]$, se tiene $\langle x, Sx \rangle = \langle Sx, x \rangle = -\langle x, Sx \rangle$, por lo que $\langle Sx, x \rangle = 0$.

Para x e y en $\mathfrak{X}$ y S en $\mathcal{A}$, un cálculo sencillo permite obtener $\mathcal{U}_{x \otimes y - y \otimes x}(S) = \langle Sx, y \rangle (x \otimes y - y \otimes x)$, y como $x \otimes y - y \otimes x = 0$ si y sólo si x e y son linealmente dependientes se deduce que $\mathcal{U}_{x \otimes y - y \otimes x}(S) = 0$ si y sólo si $\langle Sx, y \rangle = 0$; de aquí se deduce, de forma análoga a como en el apartado I, que el conjunto $\{S \in \mathcal{A} : Sx = 0\} = \bigcap_{y \in \mathfrak{X}} \mathrm{Ker}\, \mathcal{U}_{x \otimes y - y \otimes x}$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

En lo que sigue, u denota un vector fijo no nulo en $\mathfrak{X}$. La imagen de la aplicación lineal $T \longrightarrow Tu$ de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{X}$ es el subespacio vectorial de $\mathfrak{X}$ definido por $W = \{x \in \mathfrak{X} : \langle x, u \rangle = 0\}$. Esto es así porque, si x en $\mathfrak{X}$ es tal que $\langle x, u \rangle = 0$, tomando z en $\mathfrak{X}$ tal que $\langle z, u \rangle = 1$ resulta que $(x \otimes z - z \otimes x)(u) = x$; y por otra parte, si x es de la forma Tu para algún T en $\mathcal{A}$, entonces según se ha visto antes, es $\langle x, u \rangle = 0$.

Sea v en $\mathfrak{X}$ tal que $\langle v, u \rangle = 1$, y mantenemos fijo este elemento en lo que sigue. Dado x en $\mathfrak{X}$, el vector $z = x - \langle x, u \rangle v$ está en W y $x = z + \langle x, u \rangle v$; se deduce que $\mathfrak{X} = W \oplus \mathbb{C}v$.

El núcleo de la aplicación lineal $T \longrightarrow Tu$ es el subespacio de $\mathcal{A}$ dado por $\{S \in \mathcal{A} : Su = 0\}$ que, según se ha visto, es cerrado en $\mathcal{A}$.

Razonando como en los casos anteriores resulta que, definiendo para z en W $|z| := \mathrm{Inf}\{\| S \| : S \in \mathcal{A}, Su = z\}$ se obtiene que

$(W, |.|)$ es un espacio de Banach; por tanto si se define en $\mathfrak{X}$ $|z + \lambda v| := |z| + |\lambda|$, para z en W y λ en $\mathbb{C}$, se tiene que $(\mathfrak{X}, |.|)$ también es un espacio de Banach.

Vamos a probar la continuidad de la forma bilineal $\langle , \rangle$. Para x e y en $\mathfrak{X}$ un cálculo sencillo nos permite obtener la igualdad $(x \otimes y - y \otimes x)^2 = \langle x, y \rangle (x \otimes y - y \otimes x)$, de donde tomando normas se sigue: $|\langle x, y \rangle| \leq \| x \otimes y - y \otimes x \|$ para x e y en $\mathfrak{X}$.

De otra parte, tomando normas en la igualdad

$\mathcal{U}_{x \otimes y - y \otimes x}(S) = \langle Sx, y \rangle (x \otimes y - y \otimes x)$, se obtiene que $|\langle Sx, y \rangle| \leq 3 \| S \| \| x \otimes y - y \otimes x \|$, x e y en $\mathfrak{X}$, S en $\mathcal{A}$.

Sea $z \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x = z + \lambda v$. Para todo S en $\mathcal{A}$ tal que $Su = z$ tenemos, haciendo uso de la última desigualdad que

$|\langle z, y \rangle| \leq 3 \| S \| \| u \otimes y - y \otimes u \|$ para y en $\mathfrak{X}$, S en $\mathcal{A}$, con $Su = z$. Tomando ahora ínfimos en la variable S en esta desigualdad se obtiene que $|\langle z, y \rangle| \leq 3 |z| \| u \otimes y - y \otimes u \|$.

En consecuencia:

$$|\langle x, y \rangle| \leq |\langle z, y \rangle| + |\lambda| |\langle v, y \rangle| \leq 3 |z| \| u \otimes y - y \otimes u \| +$$
$$+ \| v \otimes y - y \otimes v \| |\lambda| \leq$$
$$\leq \left(3 \| u \otimes y - y \otimes u \| + \| v \otimes y - y \otimes v \| \right) \left(|z| + |\lambda| \right)$$

Esto es: $|\langle x, y \rangle| \leq \left(3 \| u \otimes y - y \otimes u \| + \| v \otimes y - y \otimes v \| \right) |x|$.

De esta desigualdad se sigue la continuidad de $\langle , \rangle$ en la primera variable, y como $\langle , \rangle$ es antisimétrica resulta que $\langle , \rangle$ es separadamente continua, y en consecuencia es continua.

Se ha probado así que $(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ es un espacio de Banach autodual. Consecuencia de esto es que $L(\mathfrak{X}, \langle , \rangle)$ está incluido en $BL(\mathfrak{X})$, y en particular $\mathcal{A} \subset BL(\mathfrak{X})$.

Para probar la continuidad de la inmersión de $(\mathcal{A}, \|.\|)$ en $(BL(\mathfrak{X}), |.|)$ se razona como en el apartado I haciendo uso de la continuidad de $\langle\, , \,\rangle$ y de la desigualdad

$$|\langle Sx, y \rangle| \leq 3 \, \| S \| \, \| x \otimes y - y \otimes x \| .$$

Queda así concluida la demostración del Teorema 1.2.

2. TEOREMA DE ESTRUCTURA PARA ALGEBRAS DE JORDAN NO DEGENERADAS COMPLEJAS, NORMADAS COMPLETAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO Y MINIMALIDAD DE LA TOPOLOGIA DE LA NORMA.

El objetivo de esta sección es mostrar que, cuando en el Teorema 1.2 se impone adicionalmente al álgebra $\mathcal{A}$ tener minimalidad de la topología de la norma, entonces los parámetros de representación de $\mathcal{A}$ en dicho Teorema están obligados a ajustarse a condiciones restrictivas, que obligarán finalmente a $\mathcal{A}$ a tener, de hecho, mínima topología de la norma.

2.1 LEMA [B-D; Theorem 37.19 y Lemma 37.21] *Dado un espacio normado autodual* $(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle)$ *tal que* $|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \, \| y \|$ *y* $|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle|$ *para todo* x *e* y *en* $\mathfrak{X}$, *existe una norma* q *sobre* $\mathfrak{X}$ *que verifica:*

i) $q(x) \leq \| x \|$, x *en* $\mathfrak{X}$.

ii) $q(x) = \sup\{ |\langle x, y\rangle| : y \in \mathfrak{X},\ q(y) \leq 1 \}$, x *en* $\mathfrak{X}$; *en particular* $|\langle x, y\rangle| \leq q(x)\, q(y)$, *para* x *e* y *en* $\mathfrak{X}$.

iii) dado $T \in \mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle\, ,\, \rangle)]$ *y tal que* $T \in BL(\mathfrak{X}, \|.\|)$ *también se verifica que* $T \in BL(\mathfrak{X}, q)$ *y además* $q(T) \leq \| T \|$, *donde se ha notado igual una norma en* $\mathfrak{X}$ *y la correspondiente norma de operadores.*

Conviene precisar que, en las referencias antes citadas del libro de Bonsall-Duncan, las hipótesis que se consideran no coinciden exactamente con las del Lema 2.1; sin embargo, un breve análisis de los argumentos allí expuestos es suficiente para ver que los resultados siguen siendo válidos en la situación arriba considerada.

2.2 TEOREMA. *Sea* $((\mathfrak{X}, \|.\|), \langle, \rangle)$ *un espacio de Banach autodual, simétrico o antisimétrico. Equivalen:*

i) La topología de $\mathfrak{X}$ *es minimal entre las normables que hacen continua a la forma bilineal* $\langle, \rangle$.

ii) La inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ *en* $\mathfrak{X}^*$, $x \longrightarrow \hat{x}$, *inducida por la forma bilineal* $\langle, \rangle$ *es homeomórfica.*

iii) La topología de $\mathfrak{X}$ *es mínima entre las normables que hacen continua a la forma bilineal* $\langle, \rangle$.

iv) La aplicación $T \longrightarrow T^*$ *es un homeomorfismo sobre* $L(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)$.

v) Toda subálgebra $\mathfrak{B}$ *de* $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ *que contenga a* $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ *tiene mínima topología de la norma.*

vi) Alguna subálgebra $\mathfrak{B}$ *de* $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ *que contiene a* $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ *tiene minimalidad de la topología de la norma.*

Demostración. Salvo renormación equivalente de $\mathfrak{X}$, podemos suponer cuando sea conveniente que $|\langle x, y \rangle| \le \| x \| \, \| y \|$. Como consecuencia del Teorema II. 1.5, para el caso particular en que $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}$, sabemos que *ii)* es equivalente a *iv)*. También es claro que *iii)* implica *i)* y que *v)* implica *vi)*. Vamos a demostrar que *i)* implica *ii)* y que *ii)* implica *iii)*, con lo cual resultan equivalentes las cuatro primeras condiciones. Se va a concluir la demostración viendo que *ii)* implica *v)* y que *vi)* implica *ii)*. En toda la demostración q denotará la norma sobre $\mathfrak{X}$ cuya existencia garantiza el Lema anterior. Notamos igual una norma en $\mathfrak{X}$ y su correspondiente norma dual y norma de operadores.

i) implica *ii)*. Puesto que q hace continua a la forma bilineal $\langle , \rangle$ y además $q(x) \leq \| x \|$, tenemos por la hipótesis hecha que la norma q ha de ser equivalente a $\|.\|$. En consecuencia existe un número positivo α tal que $\| x \| \leq \alpha\, q(x)$ para todo x en $\mathfrak{X}$.

$$\text{Por tanto: } \| \hat{x} \| := \sup\{ |\langle x, y \rangle| : \| y \| \leq 1\} \geq$$

$$\geq \sup\{ |\langle x, y \rangle| : \alpha\, q(y) \leq 1\} = \frac{1}{\alpha}\, q(x) \geq \frac{1}{\alpha^2} \| x \|,$$

en donde se ha utilizado el Lema 2.1 - *ii)* para la última igualdad.

Así pues $\| x \| \leq \alpha^2 \| \hat{x} \|$ para todo x en $\mathfrak{X}$, con lo cual la inmersión (continua) de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por $\langle , \rangle$ resulta ser bicontinua.

ii) implica *iii)*. Sea $|.|$ una norma en $\mathfrak{X}$, y supongamos que existe $M > 0$ tal que $|\langle x, y \rangle| \leq M\, |x|\, |y|$ para todo x e y en $\mathfrak{X}$. Queremos probar la continuidad de la identidad de $(\mathfrak{X}, |.|)$ en $(\mathfrak{X}, \|.\|)$.

Consideremos la aplicación $y \longrightarrow \hat{y}$ de $(\mathfrak{X}, \|.\|)$ en $(\mathfrak{X}, |.|)^*$; la continuidad de esta aplicación se obtiene fácilmente haciendo uso del Teorema de la gráfica cerrada. Por tanto existe un número $\beta > 0$ tal que $|\hat{y}| \leq \beta \| y \|$ para todo y en $\mathfrak{X}$.

Tenemos así $|\langle x, y \rangle| \leq |\hat{y}|\, |x| \leq \beta \| y \|\, |x|$, y por tanto $\| \hat{x} \| \leq \beta\, |x|$.

Como por hipótesis existe $k > 0$ verificando que $\| \hat{x} \| \geq k \| x \|$ para x en $\mathfrak{X}$ se sigue que existe un número positivo $\gamma = \frac{\beta}{k}$ tal que $\| x \| \leq \gamma\, |x|$ para todo x en $\mathfrak{X}$, como se quería demostrar.

Queda así probada la equivalencia entre los cuatro primeros enunciados del Teorema.

ii) implica *v)*. Sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)]$ que contiene a $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)]$, y sea $|.|$ una norma de álgebra en $\mathfrak{B}$. Se consideran entonces las siguientes desigualdades:

$$|\langle T x, y \rangle| \le \frac{3}{4} |T| \left(|(x+y) \otimes (x+y)| + |(x-y) \otimes (x-y)| \right)$$

para el caso simétrico, y

$|\langle Tx, y \rangle| \le 3 \; |T| \; |x \otimes y - y \otimes x|$, para el caso antisimétrico, donde x e y están en $\mathfrak{X}$ y T en $\mathfrak{B}$.

La segunda de estas desigualdades ya se obtuvo en la demostración del Teorema 1.2. La primera se deduce de la desigualdad ya conocida $|\langle Tx, x \rangle| \le 3 \; |T| \; |x \otimes x|$ sin más que tener en cuenta que, al ser $(x, y) \longrightarrow \langle Tx, y \rangle$ una forma bilineal simétrica, se verifica que $\langle Tx, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle T(x + y), x + y \rangle - \langle T(x - y), x - y \rangle \right)$.

De acuerdo con las anteriores desigualdades se concluye la demostración como en el apartado *iii)* $\Longrightarrow$ *vi)* del Teorema II. 2.4.

Finalmente veamos que *vi)* implica *ii)*. Sea $\mathfrak{B}$ una subálgebra de $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)]$ que contiene a $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle\,,\,\rangle)]$ y que tiene minimalidad de la topología de la norma. Por la condición *iii)* del Lema 2.1 tenemos que $\mathfrak{B}$ es una subálgebra de $BL(\mathfrak{X}, q)^+$, y por tanto q es una norma de álgebra sobre $\mathfrak{B}$. Como además se verifica que $q(T) \le \| T \|$ para T en $\mathfrak{B}$, por la hipótesis hecha existe un número $k>0$ tal que $\| T \| \le k\, q(T)$ para todo T en $\mathfrak{B}$.

Fijemos u y v en $\mathfrak{X}$ verificando que $\langle v, u \rangle = 1$. En el caso antisimétrico tenemos, para cualquier x en $\mathfrak{X}$ que

$$(x \otimes u - u \otimes x)(v) = x - \langle v, x \rangle u, \text{ de donde se sigue}$$

$$\| x \| \le \| x \otimes u - u \otimes x \| \; \| v \| + |\langle v, x \rangle| \; \| u \| \le$$

$$\le k\, q(x \otimes u - u \otimes x) \; \| v \| + q(v)\, q(x) \; \| u \|.$$

Como consecuencia de la desigualdad $|\langle x, y \rangle| \leq q(x)\, q(y)$ se tiene que dados s y t en $\mathfrak{X}$, $s \otimes t \in BL(\mathfrak{X}, q)$ y $q(s \otimes t) \leq q(s)\, q(t)$. Haciendo uso de ello y de que $q(z) \leq \| z \|$ obtenemos:

$$\| x \| \leq 2k\, q(x)\, q(u)\, \| v \| + q(v)\, \| u \|\, q(x) \leq$$
$$\leq \| u \|\, \| v \|\, (1 + 2k)\, q(x),$$

o bien $\| x \| \leq M\, q(x)$ para x en $\mathfrak{X}$, donde $M = \| u \|\, \| v \|\, (1 + 2k)$. De esto se sigue, haciendo uso de la condición *ii)* del Lema 2.1, que

$$q(x) = \sup\{|\langle x, y \rangle| : q(y) \leq 1\} \leq \sup\{|\langle x, y \rangle| : \| y \| \leq M\} =$$
$$= M \sup\{|\langle x, z \rangle| : \| z \| \leq 1\} = M\, \| \hat{x} \|,$$

de donde, finalmente resulta que $\| x \| \leq M^2\, \| \hat{x} \|$ para todo x en $\mathfrak{X}$, lo cual prueba que la aplicación $x \longrightarrow \hat{x}$ tiene inversa continua y por tanto es homeomórfica.

En el caso simétrico se razona igual que antes partiendo de la iguaidad: $(x \otimes u + u \otimes x)(v) = x + \langle v, x \rangle u$, y se llega igualmente a que $\| x \| \leq M^2\, \| \hat{x} \|$ para x en $\mathfrak{X}$.

Con lo cual queda concluida la demostración del Teorema.

Teniendo en cuenta que para un álgebra de Jordan cuadrática $\mathcal{A} = (\mathfrak{X}, f)$ las normas sobre $\mathcal{A}$ que hacen continuo el producto inducen, por restricción, normas sobre $\mathfrak{X}$ que hacen continua a la forma bilineal f; y que, recíprocamente, toda norma sobre $\mathfrak{X}$ que hace continua a f determina, salvo equivalencias, una única norma en $\mathcal{A}$ que hace continuo el producto y cuya restricción a $\mathfrak{X}$ coincide con la norma de partida, podemos enunciar como consecuencia del Teorema anterior el siguiente Corolario.

2.3. COROLARIO. *Sea $(\mathfrak{X}, f)$ un espacio de Banach autodual simétrico y* consideremos el álgebra de Jordan $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f)$; entonces equivalen:

i) $\mathcal{A}$ tiene minimalidad de la topología de la norma.

ii) $\mathcal{A}$ tiene mínima topología de la norma.

iii) La inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por f es homeomórfica.

Los resultados hasta aquí obtenidos permiten enunciar el siguiente Teorema.

2.4. TEOREMA. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan compleja no degenerada, normada completa, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma, entonces salvo isomorfismos topológicos $\mathcal{A}$ responde a uno de los cuatro tipos siguientes:*

i) $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan compleja finito dimensional simple.

ii) $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f)$, donde $(\mathfrak{X}, f)$ es un espacio de Banach complejo autodual simétrico infinito dimensional, tal que la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por f es homeomórfica.

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ tal que las inmersiones canónicas de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$ y de $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducidas por la forma bilineal $\langle, \rangle$ son homeomórficas, de manera que $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de $BL(\mathfrak{X})^+$, contenida en $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ y conteniendo a $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$.

iv) Existe un espacio de Banach complejo autodual $(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)$, simétrico o antisimétrico, tal que la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por la forma bilineal es homeomórfica, de manera que $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de $BL(\mathfrak{X})^+$, contenida en $Sim[L(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ y *conteniendo* a $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$.

Demostración. Estamos bajo las hipótesis del Teorema 1.2 con la condición adicional de minimalidad de la topología de la norma. En la situación descrita en el apartado *i)* de dicho Teorema la condición adicional no aporta nueva información. En la situación *ii)* la hipótesis adicional, a la vista del Corolario 2.3, se concreta en que la inmersión canónica de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por f es homeomórfica. En la situación *iii)* del mismo Teorema 1.2, la hipótesis adicional de minimalidad de la topología de la norma implica, por una parte, que la inmersión continua de $\mathcal{A}$ en $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)^+, |.|_d \right)$ cuya existencia allí se prueba es bicontinua; además es fácil ver que $|T|$, $|T^*|$ y $|T|_d$ son normas equivalentes en $\mathcal{A}$, en particular existen $M > 0$ y $k > 0$ tales que $k\ |T^*| \leq |T| \leq M\ |T^*|$. Puesto que $u \otimes v \in \mathcal{A}$, para todo u en $\mathfrak{X}$, v en $\mathcal{Y}$, se puede hacer uso del Teorema II. 1.5 y se obtiene que las inmersiones canónicas de $\mathfrak{X}$ en $\mathcal{Y}^*$ y de $\mathcal{Y}$ en $\mathfrak{X}^*$, inducidas por la forma bilineal $\langle, \rangle$, son homeomórficas.

Finalmente, si nuestra álgebra está en la situación *iv)* del Teorema 1.2, la hipótesis adicional nos da -de una parte- que salvo renormación equivalente $\mathcal{A}$ es subálgebra cerrada de $\mathrm{Sim}[L(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$ que tiene minimalidad de la topología de la norma y que contiene a $\mathrm{Sim}[FL(\mathfrak{X}, \langle, \rangle)]$, en consecuencia el Teorema 2.2 se aplica para obtener que la inmersión de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{X}^*$ inducida por la forma bilineal es homeomórfica.

También se obtiene como consecuencia el siguiente resultado importante.

2.5. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan compleja no degenerada, normada completa, prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma. Toda subálgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} \supset$ soc($\mathcal{A}$), tiene mínima topología de la norma.*

Demostración. Estamos bajo las hipótesis del Teorema 2.4; en consecuencia nuestra álgebra responde a alguna de las cuatro situaciones allí descritas.

Si $\mathcal{A}$ está en la situación *i)*, la tesis de nuestro Teorema es consecuencia obvia de la finito dimensionalidad de $\mathcal{A}$.

En la situación *ii)* soc($\mathcal{A}$) = $\mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ simple y soc($\mathcal{A}$) un ideal no nulo; luego la afirmación del Teorema es consecuencia del Corolario 2.3 [*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*].

Si $\mathcal{A}$ está en la situación *iii)*, entonces se aplica el Teorema II. 2.4 que, directamente, justifica la Tesis del Teorema.

Y, finalmente, si $\mathcal{A}$ está en la situación *iv)*, el Teorema 2.2 [*ii)* $\Longrightarrow$ *v)*] demuestra nuestra Tesis.

CAPÍTULO IV

1. UN RESULTADO SOBRE CONTINUIDAD AUTOMATICA.

2. ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS COMPLEJAS NO DEGENERADAS, NORMADAS COMPLETAS, PRIMAS CON ZOCALO NO CERO.

1. UN RESULTADO SOBRE CONTINUIDAD AUTOMATICA.

En este apartado vamos a establecer un resultado acerca de la continuidad automática de epimorfismos, en el que intervienen los conceptos de Q-álgebra y de minimalidad de la topología de la norma. Aparte de su interés intrínseco, este resultado se utilizará en la próxima sección, mientras que aquí, como una consecuencia interesante del mismo, obtendremos que las JB^*-álgebras no conmutativas tienen mínima topología de la norma.

1.1. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa compleja, $\mathcal{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, semisimple y con minimalidad de la topología de la norma, y f un epimorfismo de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}$; entonces f es continuo.*

Demostración. Sabemos por el Corolario I. 3.13 que Ker(f) es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$ y que el álgebra normada cociente $\mathcal{A}$/Ker(f) es una Q-álgebra.

Sea π el isomorfismo de $\mathcal{A}$/Ker(f) sobre $\mathcal{B}$ inducido por f, y definamos para b en $\mathcal{B}$ $|b| := \| \pi^{-1}(b) \|$; así π resulta ser un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$/Ker(f) sobre $(\mathcal{B}, |.|)$, y por ello $(\mathcal{B}, |.|)$ también es una Q-álgebra.

Sea $(\mathcal{C}, |.|)$ la completación del álgebra normada $(\mathcal{B}, |.|)$, y notemos F la inmersión de $(\mathcal{B}, \|.\|)$ en $(\mathcal{C}, |.|)$, $F(x) = x$ para x en $\mathcal{B}$.

Como F es un homomorfismo con imagen densa, el subespacio separador de F, $S(F)$, es un ideal cerrado de $(\mathcal{C}, |.|)$. Una sencilla aplicación del Teorema de la gráfica cerrada (ver [S; Lemma 1.3 (i)]) permite probar que la aplicación $x \longrightarrow x + S(F)$ de $(\mathcal{B}, \|.\|)$ en el álgebra normada cociente $(\mathcal{C}/S(F), |.|)$ es continua, es decir, existe un número positivo M tal que $|x + S(F)| \leq M\| x \|$, para todo x en $\mathcal{B}$.

Por otro lado, y por el Teorema I.3.22 se verifica que $r_{|.|}(x) = 0$ para todo x en $\mathcal{B} \cap S(F)$; como $(\mathcal{B}, |.|)$ es una Q-álgebra, por el Teorema I.3.10 se tiene que $sp(x/\mathcal{B}) = \{0\}$, y en consecuencia x es casi inversible en $\mathcal{B}$; se tiene así que $\mathcal{B} \cap S(F)$ es un ideal de $\mathcal{B}$, formado por elementos casi-inversibles y por tanto:

$$\mathcal{B} \cap S(F) \subset \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$$

Se puede así definir una nueva norma de álgebra $|\!|\!|.|\!|\!|$ sobre $\mathcal{B}$ por $|\!|\!| b |\!|\!| := |b + S(F)|$, y, según acabamos de ver, tenemos que $|\!|\!| b |\!|\!| \leq M \| b \|$ para todo b en $\mathcal{B}$.

Puesto que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de minimalidad de la topología de la norma se sigue que existe un número positivo k tal que $\| b \| \leq k |\!|\!| b |\!|\!|$ para todo b en $\mathcal{B}$, pero entonces

$$\| b \| \leq k|b + S(F)| \leq k|b| = k\| \pi^{-1}(b) \|, \text{ o lo que es igual:}$$

$$\| f(a) \| \leq k\| a + \mathrm{Ker}(f) \| \leq k\| a \|, \text{ para todo } a \text{ en } \mathcal{A},$$

lo que prueba la continuidad de f.

Una JB^*-álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan no conmutativa compleja normada completa, dotada de una involución $x \longrightarrow x^*$ (antiautomorfismo conjugado lineal de periodo dos) verificando que $\| U_a(a^*) \| = \| a \|^3$ para todo a en $\mathcal{A}$.

El siguiente Lema generaliza un resultado debido a Rickart [R 2].

1.2. LEMA. *Sea $\mathcal{A}$ una JB^*-álgebra no conmutativa y $|.|$ una norma de álgebra en $\mathcal{A}$, entonces $(\mathcal{A}, |.|)$ es una Q-álgebra.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es la completación de $(\mathcal{A}, |.|)$ tenemos que $r_{|.|}(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp(a/\mathcal{C})\} \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp(a/\mathcal{A})\} = r_{\|.\|}(a)$ para todo a en $\mathcal{A}$.

Por otra parte, es sabido que todo elemento simétrico ($x = x^*$) de una JB^*-álgebra no conmutativa engendra una C^*-álgebra conmutativa, y un resultado debido a Kaplansky [Sa] afirma que la norma de una C^*-álgebra conmutativa $\mathcal{B}$ es mínima entre las normas de álgebra sobre $\mathcal{B}$. Dado a en $\mathcal{A}$ podemos aplicar este resultado a la C^*-álgebra conmutativa $\mathcal{B}$ engendrada por el elemento simétrico $a^*\cdot a = \frac{1}{2}(a^*a + aa^*)$, para obtener que $\| a^*\cdot a \| \leq |a^*\cdot a|$.

También es sabido que $\frac{1}{2} \| a \|^2 \leq \| a^*\cdot a \|$ [P.P.R.; Proposition 2.2];

En consecuencia obtenemos que $\| a \|^2 \leq 2|a^*\cdot a| \leq 2|a^*|\ |a|$, para todo a en $\mathcal{A}$. Por tanto $\| a^n\|^2 \leq 2|a^{*\,n}|\ |a^n|$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Extrayendo raíces enésimas y tomando límites, se sigue que $\left(r_{\|.\|}(a)\right)^2 \leq r_{|.|}(a^*)\ r_{|.|}(a)$, y haciendo uso de que $r_{|.|} \leq r_{\|.\|}$ tenemos $\left(r_{\|.\|}(a)\right)^2 \leq r_{\|.\|}(a^*)\ r_{|.|}(a) = r_{\|.\|}(a)\ r_{|.|}(a)$, con lo cual $r_{\|.\|}(a) \leq r_{|.|}(a)$ para todo a en $\mathcal{A}$, y en consecuencia:

$r_{|.|}(a) = r_{\|.\|}(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp(a/\mathcal{A})\}$, y por el Teorema I. 3.10 concluimos que $(\mathcal{A}, |.|)$ es una Q-álgebra.

1.3. LEMA. *Toda JB^*-álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ tiene minimalidad de la topología de la norma.*

Demostración. Sea $|.|$ una norma de álgebra en $\mathcal{A}$, según se ha visto antes se tiene que: $\| a \|^2 \leq 2|a^*|\ |a|$ para todo a en $\mathcal{A}$.

Si suponemos que existe $M > 0$ tal que $|a| \leq M \| a \|$, para todo a en $\mathcal{A}$, se deduce de la desigualdad anterior que $\| a \|^2 \leq 2M\| a^* \|\ |a|$, y como la involución de $\mathcal{A}$ es isométrica, concluimos que $\| a \| \leq 2M|a|$, y en consecuencia $|.|$ y $\|.\|$ son normas equivalentes.

Notemos que toda JB^*-álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ es semisimple, pues si $a \in Rad(\mathcal{A})$ entonces $a^*\cdot a \in Rad(\mathcal{A})$ y en consecuencia $\lambda a^*\cdot a$ es casi inversible para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, luego $r(a^*\cdot a) = 0$; ahora bien, para elementos simétricos de $\mathcal{A}$ el radio espectral coincide con la norma, luego $\| a^*\cdot a \| = 0$ lo que en virtud de la desigualdad antes usada $\frac{1}{2} \| a \|^2 \leq \| a^*\cdot a \|$ implica que $a = 0$.

En el siguiente Teorema se generaliza un resultado debido a Cleveland [Cl.] que afirma que toda C^*-álgebra tiene mínima topología de la norma. De hecho nuestro Teorema cuando se particulariza a una álgebra $\mathcal{A}^+$, simetrizada de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, nos di e que toda norma de álgebra en $\mathcal{A}^+$ induce una topología más fina que la de partida, y es en consecuencia, más fuerte que el resultado citado de Cleveland.

1.4. TEOREMA. *Toda* JB^**-álgebra no conmutativa* $\mathcal{A}$ *tiene mínima topología de la norma.*

Demostración. Sea $|.|$ una norma de álgebra en $\mathcal{A}$. En virtud de los dos lemas anteriores, se puede aplicar el Teorema 1.1 a la identidad de $(\mathcal{A}, |.|)$ en $(\mathcal{A}, \|.\|)$ obteniendo así que existe un número positivo M verificando que $\| a \| \leq M|a|$ para todo a en $\mathcal{A}$.

El resultado que vamos a probar a continuación es de naturaleza geométrica y afirma que toda JB^*-álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ tiene *minimalidad de la norma*, es decir, si $|.|$ es una norma de álgebra en $\mathcal{A}$ tal que $|.| \leq \|.\|$ entonces $|.| = \|.\|$. Usaremos para ello el Teorema de Vidav-Palmer para JB^*-álgebras no conmutativas.

Recordemos que, dada un álgebra compleja normada completa y unital $\mathcal{A}$, se define el conjunto de los elementos *hermitianos* de $\mathcal{A}$ por: $H(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : V(a) \subset \mathbb{R}\}$, donde para $a \in \mathcal{A}$ notamos por $V(a)$ el *rango numérico* del elemento a, es decir, el subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por $V(a) = \{f(a) : f \in \mathcal{A}^*, f(I) = 1 = \| f \|\}$. Cuando se verifica que $\mathcal{A} = H(\mathcal{A}) + i\, H(\mathcal{A})$ se dice que $\mathcal{A}$ es una *V-álgebra*. No es difícil ver que toda JB^*-álgebra no conmutativa unital $\mathcal{A}$ es una V-álgebra y $H(\mathcal{A}) = Sim(\mathcal{A})$.

El Teorema de Vidav-Palmer no asociativo afirma que toda V-álgebra es un álgebra de Jordan no conmutativa, que con su norma y la involución definida por $h + ik \longrightarrow h - ik$ $(h, k \in H(\mathcal{A}))$, es una JB^*-álgebra no conmutativa [RP. 2; Theorem 12].

Usaremos que el bidual de toda álgebra normada con el producto de Arens [B-D; pág 50] es también un álgebra normada. Si $\mathcal{A}$ es una JB^*-álgebra no conmutativa entonces su bidual $\mathcal{A}^{**}$ con dicho producto de Arens y una involución que extiende la dada en $\mathcal{A}$ es de hecho una JB^*-álgebra no conmutativa unital. [P.P.R.; Theorem 1.7].

1.5. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A}$ una JB^*-álgebra no conmutativa, $|.|$ una norma de álgebra en $\mathcal{A}$ verificando que $|.| \leq \|.\|$. Entonces $|.| = \|.\|$.*

Demostración. En virtud del Lema 1.3 sabemos que $\mathcal{A}$ tiene minimalidad de topología de la norma, en consecuencia existe $M > 0$ verificando que $\|.\| \leq M|.|$. Así ambas normas son equivalentes, y por tanto el bidual $\mathcal{A}^{**}$ de $\mathcal{A}$ es el mismo para ambas normas.

Notaremos también por $|.|$ y $\|.\|$ las correspondientes normas biduales.

Es claro que $|.| \leq \|.\|$ en $\mathcal{A}^{**}$. Como $(\mathcal{A}^{**}, \|.\|)$ es una JB^*-álgebra no conmutativa unital, también es una V-álgebra. De otra parte la aplicación identidad $(\mathcal{A}^{**}, \|.\|)$ en $(\mathcal{A}^{**}, |.|)$ disminuye normas y conserva la unidad, por lo que también disminuye rangos numéricos, en consecuencia $(\mathcal{A}^{**}, |.|)$ es una V-álgebra y, por el Teorema de Vidav-Palmer no asociativo, $(\mathcal{A}^{**}, |.|)$ es una JB^*-álgebra no conmutativa.

Es sabido que la norma de una JB^*-álgebra no conmutativa es única [W], luego $|.| = \|.\|$ en $\mathcal{A}^{**}$, y con más razón $|.| = \|.\|$ en $\mathcal{A}$.

2. ALGEBRAS DE JORDAN NO CONMUTATIVAS COMPLEJAS, NORMADAS COMPLETAS, NO DEGENERADAS PRIMAS CON ZOCALO NO CERO.

Cuando se trata de clasificar un determinado tipo de álgebras de Jordan no conmutativas es usual que la dificultad principal se centre en el caso conmutativo, es decir, en clasificar las álgebras de Jordan del tipo considerado. Un ejemplo lo tenemos en este apartado, donde vamos a dar un Teorema de representación para álgebras de Jordan no conmutativas complejas, normadas completas, no degeneradas primas y con zócalo no cero; esto va a hacerse apoyándonos en un resultado de A.Cobalea y A.Fernández que, en esencia, nos permite limitar nuestro estudio a los casos conmutativo, ya considerado en el Capítulo III, y asociativo ya estudiado en el Capítulo II.

Un álgebra de Jordan no conmutativa $\mathcal{A}$ se dice no degenerada si el álgebra de Jordan $\mathcal{A}^+$ es no degenerada. Se define el zócalo de un álgebra de Jordan no conmutativa no degenerada $\mathcal{A}$ como el zócalo del álgebra de Jordan $\mathcal{A}^+$.

Según lo visto en el Capítulo III, estas definiciones son coherentes con las ya vistas en el Capítulo II para álgebras asociativas. Se demuestra en [F-R] que todo ideal simple de $\mathcal{A}^+$ es un ideal de $\mathcal{A}$; en consecuencia soc($\mathcal{A}$) es un ideal de $\mathcal{A}$.

El siguiente Teorema es una reformulación del resultado anteriormente citado de Cobalea-Fernández.

2.1. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero; entonces $\mathcal{A}$ responde a una de las siguientes situaciones:*

i) $\mathcal{A}$ es un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, cuadrática simple.

ii) $\mathcal{A}$ es conmutativa. (estudiada en el Teorema III. 1.1.)

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ y un número complejo $\lambda \neq \frac{1}{2}$ tal que $\mathcal{A}$ puede realizarse como subálgebra de $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)^{(\lambda)}$ *que contiene a* $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ *y la inmersión de $\mathcal{A}$ en* $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle), |\cdot|_d\right)$ *es continua.*

Demostración. Teniendo en cuenta que toda álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero $\mathcal{B}$ puede realizarse, para un conveniente apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$, como subálgebra de $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ con $\mathcal{B} \supset FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle)$ de manera que la inmersión de $\mathcal{B}$ en $\left(L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle, \rangle), |\cdot|_d\right)$ es continua (véase la demostración del Teorema II. 2.1), este Teorema es consecuencia de [C-F; Theorem 2] según el cual nuestra álgebra $\mathcal{A}$ es o bien cuadrática flexible simple -es decir como en el caso *i)*-, o es conmutativa -como en el caso *ii)*-, o bien es de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(\lambda)}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, y $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero.

Al añadir a las hipótesis del Teorema anterior la de minimalidad de la topología de la norma estamos en condiciones de enunciar el siguiente Teorema de representación.

2.2. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero y minimalidad* de la topología de la norma. Entonces, salvo isomorfismos topológicos, $\mathcal{A}$ es como se indica en alguno de los apartados siguientes:

i) $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f, \wedge)$ *donde* $\mathfrak{X}$ *es un espacio de Banach complejo de dimensión mayor o igual que dos,* f *una forma bilineal simétrica no degenerada continua en* $\mathfrak{X}$ *y* $\wedge$ *un producto anticonmutativo continuo en* $\mathfrak{X}$ *tal que* $f(x \wedge y, z) = f(x, y \wedge z)$ *para todo* x, y, z *en* $\mathfrak{X}$*. Ademas la topología de la norma de* $\mathfrak{X}$ *es minimal entre las topologías normables en* $\mathfrak{X}$ *que hacen continuos a* f *y* $\wedge$.

ii) $\mathcal{A}$ *responde a uno de los cuatro tipos descritos en el Teorema* III. 2.4.

iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *tal que las inmersiones canónicas de* $\mathfrak{X}$ *en* $\mathcal{Y}^*$ *y de* $\mathcal{Y}$ *en* $\mathfrak{X}^*$ *inducidas por la forma bilineal* $\langle , \rangle$ *son homeomórficas, y un número complejo* $\lambda \neq \frac{1}{2}$ *de manera que* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra cerrada de* $BL(\mathfrak{X})^{(\lambda)}$ *contenida en* $L(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$ *y conteniendo a* $FL(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \langle , \rangle)$.

Demostración. Estamos bajo las hipótesis del Teorema 2.1 con la condición adicional de minimalidad de la topología de la norma. Si nuestra álgebra responde a la situación descrita en el primer apartado de dicho Teorema 2.1, entonces la veracidad de las afirmaciones hechas en el punto *i)* del Teorema que estamos demostrando se sigue de lo dicho en la Proposición I. 2.8 teniendo en cuenta además que, en esta situación, hay una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre las topologías normables de $\mathfrak{X}$ que hacen continuos a f y $\wedge$ y las topologías normables de $\mathcal{A}$ que hacen continuo el producto de $\mathcal{A}$.

Si nuestra álgebra responde a la situación descrita en el segundo apartado del Teorema 2.1 es porque $\mathcal{A}$ es conmutativa y, en consecuencia, es aplicable a ella el Teorema III. 2.4 lo que justifica la afirmación hecha sobre $\mathcal{A}$.

Finalmente si nuestra álgebra responde a la situación descrita en el apartado tercero del Teorema 2.1, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(\lambda)}$ donde λ es un número complejo, $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero (véase final de la demostración del Teorema 2.1). Puesto que $\lambda \neq \frac{1}{2}$, las normas que hacen continuo el producto en $\mathcal{A}$ son las mismas que hacen continuo el producto en $\mathcal{B}$ y, en consecuencia, la hipótesis de tener minimalidad de la topología de la norma se verifica simultáneamente en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(\lambda)}$ la veracidad de lo afirmado en el apartado *iii)* del presente Teorema se sigue ahora de aplicar a $\mathcal{B}$ el Teorema II. 2.1.

2.3. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{A} = J(\mathfrak{X}, f, \wedge)$ un álgebra de Jordan no conmutativa cuadrática compleja, normada completa. Equivalen las siguientes condiciones:*

i) $\mathcal{A}$ tiene minimalidad de la topología de la norma

ii) $\mathcal{A}$ tiene mínima topología de la norma.

iii) La topología de la norma en $\mathfrak{X}$ es mínima entre las topologías normables de $\mathfrak{X}$ que hacen continuas a f y a $\wedge$.

Demostración. Es claro que *ii)* implica *i)*, y que por lo dicho en la Proposición I. 2.8, *iii)* es una reformulación equivalente de *ii)*. Para probar que *i)* implica *ii)* hay que tener en cuenta que por la Proposición I. 3.15, $(\mathcal{A}, |.|)$ es una Q-álgebra, cualquiera que sea la norma de álgebra $|.|$ que se considere en $\mathcal{A}$; además, puesto que $\mathcal{A}$ es simple con unidad (salvo que dimensión de $\mathcal{A}$ sea igual a 2), $\mathcal{A}$ es semisimple y en consecuencia por el Teorema 1.1 la identidad de

$(\mathcal{A}, |.|)$ sobre $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es continua.

2.4. TEOREMA. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma. Toda subálgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} \supset$ soc($\mathcal{A}$) tiene mínima topología de la norma.*

Demostración. Si el álgebra $\mathcal{A}$ es de hecho un álgebra de Jordan la veracidad de lo afirmado en el Teorema se ha demostrado en el Teorema III. 2.5. En otro caso, en virtud del Teorema 2.1 se sigue que, o bien $\mathcal{A}$ es cuadrática simple en cuyo caso soc($\mathcal{A}$) = $\mathcal{A}$ y lo afirmado en el Teorema se obtiene como consecuencia de la Proposición 2.3, o bien $\mathcal{A}$ responde a la situación descrita en el punto tercero de dicho Teorema 2.1 es decir, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{(\lambda)}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$, y $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero. Como antes se ha razonado, la hipótesis de tener minimalidad de la topología de la norma se verifica simultáneamente para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, como además $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen las mismas subálgebras e igual zócalo, lo afirmado en el Teorema se obtiene ahora como consecuencia del Teorema II. 2.2.

2.5. PROPOSICION. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa no degenerada prima con zócalo no cero, y sea $\mathcal{C}$ una subálgebra de $\mathcal{B}$ que contiene a soc($\mathcal{B}$); entonces $\mathcal{C}$ es primitiva.*

Demostración. Es claro que, por ser $\mathcal{B}$ prima, M = soc($\mathcal{B}$) es un ideal simple de $\mathcal{B}$ y por tanto de $\mathcal{C}$. Probemos que $\mathcal{C}$ es prima.

Sea P un ideal de $\mathcal{C}$. Tenemos que $P \cap M$ es un ideal de M, luego $P \cap M = \{0\}$, o $P \cap M = M$. En el primer caso se tiene que $PM = MP = \{0\}$

y, se deduce de aquí, usando un resultado que aparece en [F3; Corollary 4], según el cual

$$\mathrm{An}(M) = \{\mathscr{x} \in \mathscr{B} : \mathscr{x}\mathscr{z} + \mathscr{z}\mathscr{x} = 0, \text{ para todo } \mathscr{z} \text{ en } M\},$$

que $P \subset \mathrm{An}(M)$; pero $\mathrm{An}(M) = \{0\}$ por ser $\mathscr{B}$ prima, luego $P = \{0\}$. Así todo ideal no nulo P de $\mathscr{C}$ ha de contener a M y se sigue, por ser $M^2 = M \neq \{0\}$ que $\mathscr{C}$ es prima. Como además $\mathscr{C}$ contiene un ideal minimal, M, que contiene idempotentes no nulos, se sigue [F-R; Proposition 11], que $\mathrm{An}(M) = \{0\}$ es un ideal primitivo de $\mathscr{C}$, luego $\mathscr{C}$ es primitiva como se quería probar.

2.6. TEOREMA. *Sea $\mathscr{A}$ una Q-álgebra de Jordan no conmutativa compleja y $\mathscr{B}$ un álgebra de Jordan no conmutativa compleja, normada completa, no degenerada prima con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma; sea φ un homomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ con $\varphi(\mathscr{A}) \supset \mathrm{soc}(\mathscr{B})$; entonces φ es continuo.*

Demostración. En virtud de la proposición anterior sabemos que $\varphi(\mathscr{A})$ es primitiva y por tanto semisimple. Si se considera φ como un epimorfismo de $\mathscr{A}$ sobre $\varphi(\mathscr{A})$ se puede aplicar la Proposición I. 3.12 y se obtiene que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es cerrado. Además, en virtud del Teorema anterior, $\varphi(\mathscr{A})$ tiene mínima topología de la norma. Si se define para $\mathscr{x}$ en $\mathscr{A}$ $|\!|\!| \varphi(\mathscr{x}) |\!|\!| := \| \mathscr{x} + \mathrm{Ker}(\varphi) \|$, se obtiene una norma de álgebra en $\varphi(\mathscr{A})$, de donde se sigue que ha de existir un número $M > 0$ verificando que $\| \varphi(\mathscr{x}) \| \leq M \| \mathscr{x} + \mathrm{Ker}(\varphi) \|$ para todo $\mathscr{x}$ en $\mathscr{A}$, pero entonces también se verifica que $\| \varphi(\mathscr{x}) \| \leq M \| \mathscr{x} \|$, $\mathscr{x} \in \mathscr{A}$, lo que prueba la continuidad de φ.

BIBLIOGRAFÍA

[A.] AUPETIT, B.: *The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras.* J. Funct. Anal. 47, (1982), 7-25.

[B.] BOURBAKI, N.: *Elements de mathematique.* Fasc. XXXII. *Theories Spectrals.* Editorial Hermann. Paris. (1967)

[Bo.] BONSALL, F.F.: *A minimal property of the norm in some Banach algebras.* J. London Math. Soc. 29, (1954), 156-164.

[B-D] BONSALL, F.F y DUNCAN, J. *Complete normed algebras.* Springer-Verlag, New York/Berlín. (1973).

[B-R] BENSLIMANE, M y RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *Caracterisation Spectrale des algebras de Jordan Banach noncommutatives complexes modulaires annihilatrices.* Preprint.

[Cl.] CLEVELAND, S.B.: *Homomorphisms on non-commutative *-Agebras.* Pacific J. Math, 13, (1963). 1097-1109.

[C-F] COBALEA, A. y FERNANDEZ, A.: *Prime noncommutative Jordan algebras with nonzero socle and central closure.* Algebra, groups and geometries. 5 (2), (1988), 129-136.

[C-Y] CIVIN, P y YOOD, P.: *Lie and Jordan structures in Banach algebras.* Pacific J. Math 15, (1965). 775-797.

[F.] FERNANDEZ, A.: *Nonconmmutative Jordan Riesz Algebras.* Quart. J. Math. Oxford(2). 39 (1988). 67-80.

[F2] FERNANDEZ, A.: *Modular Annihilator Jordan Algebras.* Communications in Algebra, 13 (12), (1985) 2597-2613.

[F3] FERNANDEZ, A: *Ideals in nondegenerate nonconmmutative Jordan Algebras.* Communications in Algebra, 14 (6), (1986), 1111-1116.

[F-R] FERNANDEZ, A. y RODRIGUEZ PALACIOS A.: *Primitive noncommutative Jordan algebras with nonzero socle.* Proc. Amér. Math. Soc., 96 (2), (1986), 199-206.

[F-R2] FERNANDEZ, A. y RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *Wedderburn theorem for non-associative complete normed algebras.* J. London Math. Soc. 33 (2) (1986), 328-338.

[F-R3] FERNANDEZ, A. y RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *On the socle of a noncommutative Jordan algebra.* Manuscripta Math. 56, (1986) 269-278.

[H.] HERSTEIN, I.N.: *Rings with involution.* The University of Chicago Press. Chicago and London 1976.

[H-M] HOGBEN, L. y McCRIMMON, K.: *Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra.* Journal of Algebra. 68, (1981) 155-169.

[J.] JACOBSON, N.: *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 39, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1986)

[J.2] JACOBSON, N.: *Structure of rings* (2nd ed.), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1964), (1964)

[K.] KAIDI, A. M.: *Bases para una teoría de las álgebras no-asociativas normadas.* Tesis. Universidad de Granada, (1977).

[Ka.] KAPLANSKY, I.: *Normed algebras*. Duke Math. J. 16, (1949), 399-418.

[Ka.2] KAPLANSKY, I.: *Fields and Rings*. The University of Chicago Press. Chicago and London (1972).

[Ka.3] KAPLANSKY, I.: *Topological Rings*. Amer. J. Math. 69. (1947). 153-183

[M.] McCRIMMON, K.: *Noncommutative Jordan rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 158, (1971), 1-33.

[M.2] McCRIMMON, K.: *Mc Donald's Theorem with inverses*. Pacific J. Math. 21 (2), (1967), 315-321.

[Ma.] MARTINEZ MORENO, J.: *Sobre álgebras de Jordan normadas completas*. Tesis. Universidad de Granada. (1977)

[Ma.2] MARTINEZ MORENO, J.: *Holomorphic functional Calculus in Jordan Banach Algebras*. Colloque sur les algèbres de Jordan, Montpellier, France, (Octubre, 1985).

[Ma.3] MARTINEZ MORENO, J.: *JV-algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87, (1980), 671-678.

[O.] OSBORN, J. M.: *Quadratic Division Algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. (1962), 202-221.

[O-R] OSBORN, J. M. y RACINE, M. L. *Jordan rings with nonzero socle*. Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979) 375-387.

[Oc.] OCAÑA, F.: *Un teorema sobre álgebras o asociativas M-convexas con unidad*. Revista Academia Ciencias Granada, 1, (1981), 66-70.

[P.] PALMER, T. W.: *Spectral algebras*. Preprint

[P-P-R] PAYA, R.; PEREZ, J. y RODRIGUEZ, A.: *Type I Factor representations of noncommutative JB^*-algebras*. Proc. London. Math. Soc. 48 (3), (1984), 428-444.

[R.] RICKART, C. E.: *General Theory of Banach algebras.* Krieger, New York, 1974.

[R.2] RICKART, C. E.: *Spectral permanence for certain Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 4, (1953), 191-196.

[R.P.] RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras.* J. Funct. Anal 60 (1) (1985) 1-15.

[R.P.2] RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *Nonassociative normed algebras spanned by hermitian elements.* Proc. London. Math. Soc. 47 (3), (1983), 258-264.

[R.P.3] RODRIGUEZ PALACIOS, A.: *Contribución a la teoría de las C^*-álgebras con unidad.* Tesis. Universidad de Granada. (1974).

[Ru.] RUDIN, W.: *Functional Analysis.* McGraw - Hill. New York (1973).

[S.] SINCLAIR, A. M.: *Automatic continuity of linear operators.* Cambridge University Press, Cambridge (1976).

[Sa.] SAKAY, S.: *C^*-algebras and W^*-algebras.* Springer-Berlag, Vol. 60 (1971).

[W.] WRIGHT, J. D. M.: *Jordan C^*-algebras.* Michigan Math. J. 24, (1977), 11-56.

[Y.] YOOD, B.: *Homomorphisms on normed algebras.* Pacific J. Math. 8, (1958), 373-381.

[Y.2] YOOD, B.: *Ideals in topological rings.* Canadian J. Math. 16, (1964) 28-45.

[Z.] ZELASKO, W.: *Selected topics in topological algebras.* Lectures Notes. Series, 31, (1971) Aarhus University.