FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

SOBRE LA RESOLVENTE Y LA DESCOMPOSICION ESPECTRAL DE CIERTOS OPERADORES DEFINIDOS EN UN ESPACIO DE BANACH

Agripina Rubio Flores

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1989

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ACTA DEL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Curso de 19 89 a 19 90 Folio 19 Número 229

Reunido en el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D.ª Agripina Rubio Flores, el aspirante leyó un discurso sobre el siguiente tema, que libremente había elegido: Sobre la resolvente y la descomposición espectral de ciertos operadores definidos en un espacio de Banach

Terminada la lectura y contestadas las objecciones formuladas por los Jueces del Tribunal, éste le calificó de apto "cum laude"

Granada 22 de Febrero de 19 90

EL PRESIDENTE

El Secretario del Tribunal,

Carrillo

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

Angel Rodríguez

Firma del Graduando,

F. Rubio

INVESTIDURA . . . En el día de la fecha se ha conferido a D. .... el Grado de Doctor en la Facultad de .... conforme a lo prevenido en las disposiciones vigentes.

Granada ...... de .... de 19....

EL DECANO,

CERTIFICO: Que el Acta que antecede concuerda con la del expediente del interesado remitida a la Secretaría de la Universidad.

Granada ...... de .... de 19....

El Catedrático Secretario,

V.º B.º
EL DECANO

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El estudio realizado en esta memoria de la descomposición espectral de un operador, así como de la función de un operador, definido en un espacio de Banach o bien en un espacio de Hilbert, se basa en el uso de la analiticidad en teoría de operadores, por ello nos parece obligado hacer un resumen del desarrollo histórico del mismo. La dependencia analítica de un parámetro complejo aparece con frecuencia en el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales. Fredholm en 1903 presenta la solución de la ecuación

$$f(s)-\int_a^b k(s,t)f(t)dt=g(s)$$

en la forma

$$f(s)=g(s)+\frac{1}{d(\lambda)}\int_a^b D(s,t;\lambda)g(t)dt$$

supuesto que $d(\lambda)\neq 0$. Aquí f y g pertenecen a la clase de funciones $C[a,b]$. La función $d(\lambda)$ es una función analítica entera del parámetro complejo λ y $D(s,t;\lambda)$, que es una función continua de (s,t), es también una función analítica entera de λ. La presencia de analiticidad en la solución de la ecuación de Fredholm de segundo tipo es una primera señal del importante papel que la analiticidad estaba destinada a jugar en la teoría espectral. Anticipaciones de la teorría espectral pueden encontrarse hacia 1836 en los trabajos de Sturm y Liouville sobre problemas de contorno de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y los teoremas de desarrollo y autovalores asociados.

En 1904 Hilbert demuestra cómo transformar un problema diferencial con valores en la frontera en un problema de resolución de una ecuación integral. Además la función de Green del problema diferencial resulta ser bajo ciertas condiciones un núcleo del tipo Hilbert-Schmidt, de lo que se siguen una cantidad de hechos de interés.

La utilización de las funciones analíticas y el cálculo de residuos en relación con desarrollos en serie de funciones especiales se conoce como teoría de Cauchy.En 1894 Poincaré trata el problema de la membrana vibrante y relaciona los desarrollos de autovalores y autofunciones con el caracter meromorfo de la dependencia de la función de Green sobre el parámetro.En 1908 Birkhoff utiliza de forma explícita la aproximación meromorfa de la función de Green al tratar con problemas de desarrollo asociados con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como sabemos ahora,desde muchos puntos de vista,la teoría de autovalores y la teoría de desarrollos del problema clásico de Sturm-Liouville para un intervalo finito cerrado y acotado puede ser casi completamente considerado como una consecuencia del hecho de que el operador resolvente es meromorfo y tiene un desarrolllo de Mitag-Leffler de una forma muy simple.La formulación esencial es como sigue:Si T es un operador lineal simétrico en un espacio de Hilbert tal que T^{-1} existe y es compacto,entonces el espectro $\sigma(T)$ es un conjunto numerable $\{\mu_n\}$ donde $\mu_n \longrightarrow \infty$,y la resolvente $(\mu-T)^{-1}$ se expresa en la forma:

$$(\mu-T)^{-1}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y,x_k)}{\mu-\mu_k}\,x_k$$

para cada vector y.Aquí $\{x_n\}$,es un conjunto ortonormal completo y $Tx_k=\mu_k x_k$. En la aplicación a la teoría de Sturm-Liouville T es un operador diferencial tal que Tx=u,se expresa por:

$$\frac{-d}{dt}\,(p(t)x'(t))+q(t)x(t)=u(t)$$

donde las funciones p y q son reales y sujetas a ciertas restricciones y las condiciones de contorno se dan en la definición del dominio de T.

Como se ve el uso de la analiticidad en teoría de operadores fué apareciendo en el contexto clásico que no requería el reconocimiento de analiticidad en otro sentido que el relacionado con funciones analíticas complejas de una variable compleja.

Una etapa significativa en la progresión hacia un reconocimiento consciente del concepto de una función analítica con valores que no son ya números complejos sino,elementos de un espacio de funciones o de un espacio de operadores,o incluso de un espacio abstracto,se debe a F.Riesz.En su libro de 1913, "Les systèmes d´equations linéaires à une infinité d´inconnues",estudia "sustituciones lineales",en particular,sustituciones lineales completamente continuas que actuan en la clase l^2 de sucesiones infinitas (el prototipo clásico de un espacio de Hilbert).Riesz asegura que si A es una tal sustitución y E la sustitución identidad,entonces la sustitución inversa $(E-\lambda A)^{-1}$ es una función meromorfa de λ con valores en la clase de sustituciones lineales acotadas sobre l^2. Sin embargo no hace explícita la discusión de qué significa que una tal función sea analítica en un cierto punto o tenga un polo en otro.La discusión gira en torno al examen de ciertas sustituciones lineales dadas (y sus inversas) cuando se considera sólo un número finito de desconocidas.Estos sistemas se tratan utilizando determinantes de orden finito.

La monografía de Riesz esboza muchos desarrollos posteriores en la aplicación del método de teoría de funciones analíticas a la teoría de operadores. En particular,Riesz conoce la utilidad del cálculo de residuos aplicado a integrales de contorno que envuelven $(E-\lambda A)^{-1}$.
Hasta veinticinco años más tarde no se lograría formular y aplicar la analiticidad en la teoría abstracta de operadores.

Wiener en un artículo publicado en 1923 señala que el teorema integral de Cauchy y gran parte de la teoría clásica de funciones de una variable compleja es válida para funciones definidas en plano complejo con valores en un espacio normado complejo completo;sin embargo no aplica sus observaciones a la teoría espectral.

En 1935 Stone desarrolla en su libro la teoría espectral para operadores en espacios de Hilbert,y relacionando los resultados obtenidos por ambos,Taylor en 1938 logra demostrar considerando $R(\lambda,A)$ como una función con valores en un espacio de operadores y aplicando la teoría de funciones analíticas lo que Stone había demostrado para espacios de Hilbert,en un espacio de Banach general.

En particular demostró que si T es un operador lineal cerrado en un espacio de Banach complejo e I es el operador identidad,el inverso $(\lambda I-T)^{-1}$,si existe en un cierto sentido al menos para un λ,es una función analítica con valores en un espacio de operadores,sobre el conjunto de los λ para los que $(\lambda I-T)^{-1}$ existe en un cierto sentido.

Este conjunto abierto de λ se llama conjunto resolvente de T y $(\lambda I-T)^{-1}$ se llama resolvente de T.También demostró que si T es acotado y definido sobre un espacio de Banach no trivial,existe al menos un valor de λ para el que la resolvente de T no está definida;es decir el espectro de T es no vacio.

En este mismo año Dunford publica el teorema sobre analiticidad débil y fuerte:sin hacer referencia a la teoría de operadores,Dunford demuestra que si una función de λ con valores vectoriales es analíica en la topología débil es tambien analítica en la topología fuerte.

El hecho de que la resolvente $(\lambda I-T)^{-1}$ sea una función analítica con valores en un espacio de operadores es el punto de partida para el uso de la analiticidad en la teoría espectral del operador T.La teoría espectral de los operadores lineales en el estudio de estos desde el punto de vista de relacionar las propiedades de un operador con el análisis del carácter de su espectro y el desarrollo de la resolvente en el entorno de un punto del mismo.Si μ es un punto aislado de $\sigma(T)$ es una singularidad aislada de la resolvente como función analitica,y el desarrollo de la resolvente en el entorno de μ puede estudiarse mediante el desarrollo de Laurent de $(\lambda I-T)^{-1}$ en potencias de $\lambda-\mu$.El borde de $\sigma(T)$ es el borde natural de la resolvente como función analítica. Cuando el espacio de Banach es de dimensión finita el espectro del operador T es un conjunto finito de autovalores y $(\lambda I-T)^{-1}$ es una función racional de λ.En el caso general la naturaleza de $(\lambda I-T)^{-1}$ puede ser mucho mas complicada.En particular el espectro no tiene por qué tener puntos aislados.

Un instrumento importante de la teoría espectral es el cálculo operacional basado en la definición de un operador f(T) mediante la fórmula de Cauchy:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\,d\lambda$$

Cuando la integral se extiende sobre un contorno convenientemente situado respecto del espectro de T y f es una función compleja analítica en el entorno del espectro.

La fórmula de Cauchy define un homomorfismo de un anillo de funciones en el anillo de todos los operadores lineales acotados definidos en el espacio en que esta definido T.

Se puede decir que el uso sistemático del calculo operacional comienza con Riesz en 1913 y es desarrollado en años posteriores,entre otros,por Nagumo,Mazur,Guelfand y Lorch.

Los trabajos de Dunford y Taylor en 1943 están relacionados explícitamente con la teoría general de operadores y en 1951 Taylor logra adaptar la fórmula de Cauchy para construir un cálculo operacional para operadores cerrados no acotados.

Hacia 1960 Dunford junto con su discípulo Schwartz recogen en las dos primeras partes de su gran obra Linear Operators los resultados mas importantes obtenidos en este campo por ellos mismos y por otros hasta entonces.

También en la década de los años 60,Taylor y sus discípulos entre los que destaca Lay obtienen resultados en relación con la estructura fina del espectro,es decir,la clasificación de los puntos del espectro en relación con el hecho de que μ pertenezca a una determinada parte del espectro para ciertas cualidades de $\lambda I-T$ y $(\lambda I-T)^{-1}$ (si existe) cuando μ está próximo o coincide con λ .Por su parte Kato basándose en la teoría desarrollada por Taylor y Dunford obtiene entre los años 50 y 70 importantes resultados sobre perturbación que aparecen recogidos en su libro Perturbation Theory for Linear Operator cuya primera edición aparece en 1966.

A continuación vamos a esbozar la motivación de esta memoria.En 1978 como resultado de un trabajo sobre sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes,Rodríguez Cano obtiene una forma explícita para la resolvente de una matriz compleja nxn en función de la matriz y sus autovalores [19],[20].A partir de esto nos planteamos dos líneas de trabajo:la primera qué consecuencias pueden derivarse en la teoría espectral de operadores definidos sobre un espacio de Banach de dimensión finita del hecho de conocer una forma para su resolvente.La segunda,tratar de generalizar la expresión para ciertos operadores en espacios de dimensión infinita.Los resultados obtenidos se encuentran a lo largo de los cuatro capítulos de esta memoria que pasamos a resumir:

En el primer capítulo dedicado a operadores definidos en un espacio de Banach de dimensión finita se da en primer lugar una demostración puramente algebráica de la expresión de la resolvente en el teorema,I.1.En los teoremas I.3,I.4,I.5 y I.6 se consiguen expresiones analíticas para los operadores proyección P y nilpotentes D asociados a un operador T mediante la expresión de la resolvente y la fórmula integral de Cauchy.Estas expresiones dan una nueva dimensión a la representación espectral de f(T) como se pone de manifiesto en los teoremas I.7,I.8 y I.9.Concluimos el capítulo haciendo un estudio comparado de la descomposición espectral de un operador que hace Dunford en [6] y la que propone Kato en [16] de la que hacemos uso para obtener los resultados de este capítulo.

En el capítulo II se aplican las expresiones obtenidas en el I para f(T) a la resolución de sistemas diferenciales lineales de coeficientes contantes.Se comienza el capítulo recordando los métodos mas frecuentes para obtener la función de una matriz compleja nxn,a saber:el método de interpolación,la descomposición del espacio X en espacios propios generalizados de Dunford y la forma canónica de Jordan.A continuación se obtiene e^{At} para una matriz particular para comparar la dificultad que presenta cada uno de ellos a la hora de ponerlos en práctica,y finalmente se calcula e^{At} por el método propio que se deriva de los resultados del primer capítulo.Para poner de manifiesto las ventajas de éste se calcula e^{At} para una matriz de orden 5.Se completa este capítulo con interesante aplicación:la obtención de una expresión para la matriz de transformación Q que lleva una matriz compleja nxn a su forma canónica de Jordan.Tal matriz Q se expresa en función de los autovalores de A y de la matriz polinomial que resulta de multiplicar la resolvente de A por su polinomio característico.Este resultado se encuentra en Aplicación 2.En el capítulo III se hace un breve resumen de las propiedades espectrales de los operadores cerrados,acotados y compactos definidos en un espacio de Banach X de dimensión infinita con el propósito de generalizar las expresiones obtenidas para la resolvente,proyecciones y nilpotencias de operadores definidos en espacios de dimensión finita.Como resultado se logra tal propósito en los operadores con resolvente racional.La expresión obtenida para aquellos resulta seguir siendo válida y así la función de un operador con resolvente racional es análoga al caso de dimensión finita,con lo que el cálculo operacional obtenido allí sigue siendo válido también en este supuesto.Estos resultados aparecen enunciados en los teoremas III,5,III,6 y III,7.

Finalmente en el capítulo IV se estudian los operadores normales en espacios de Hilbert y en particular los compactos lográndose,gracias a las especiales características de su espectro,una expresión para la resolvente que generaliza la obtenida en el capítulo I.En el teorema IV,5 se demuestra este primer resultado.En el teorema IV,6 se obtiene una expresión para las proyecciones P_h de T en función de T y sus autovalores y en el IV,7 se logra una forma para f(T) que resulta ser muy similar a la obtenida en el teorema I,9 del capítulo I para operadores definidos en espacios de dimensión finita.

Finalmente sólo me queda expresar mi agradecimiento:

Al profesor José Juan Rodríguez Cano por sus múltiples aportaciones y conjeturas.

Al profesor Angel Rodríguez Palacios por sus importantes sugerencias y su labor crítica.

A los profesores Juan Francisco Mena y Antonio Cañadas por sus interesantes observaciones.

Al profesor Pablo Bobillo por su continuo estímulo.

CAPITULO I

CAPITULO I

TEORIA ESPECTRAL EN ESPACIOS DE DIMENSION FINITA

1.El álgebra de los operadores lineales

Por X se entenderá un espacio vectorial complejo de dimensión finita n,que se considerará normado cuando convenga.Llamamos T a un operador lineal de X en X.

Un operador T está representado por una matriz A nxn con respecto a la base $\{x_k\}$.

Sea A´ la matriz que representa a T respecto de otra base $\{x_k'\}$.La relación existente entre estas dos matrices es de la forma

$$A'=BAB^{-1}$$

y det A=det A´.Así el determinante de A depende del operador T y no de la base empleada para definirlo;por esta razón escribimos det T.De forma similar,la traza de A es independiente de la base y escribimos tr T.

Si S y T son operadores de X en X se define $\alpha S+\beta T$ en la forma

$$(\alpha S+\beta T)u=\alpha(Su)+\beta(Tu) \qquad \forall u\in X$$

y será también un operador lineal.

Definimos el producto TS

$$(TS)u=T(Su) \qquad \forall u\in X$$

y de nuevo será un operador de X en X.

Así el conjunto $\mathbf{B}(X)$ de todos los operadores lineales en X es un álgebra no conmutativa, puesto que, en general no se verifica ST=TS.

El elemento unidad de $\mathbf{B}(X)$ lo llamamos operador identidad I. Los operadores de la forma αI se llaman escalares y utilizaremos para ellos el símbolo α.

Para cada polinomio $p(z)=a_0+a_1z+...+a_mz^m$, definimos el operador

$$p(T)=a_0+a_1T+...+a_mT^m$$

La aplicación $p(z)\text{---}p(T)$ es un homomorfismo del álgebra de los polinomios en $\mathbf{B}(X)$.

$T\in\mathbf{B}(X)$ se dice ser no singular si existe el inverso T^{-1} en $\mathbf{B}(X)$ verificando:

$$TT^{-1}=T^{-1}T=I$$

2. Proyecciones y Nilpotencias

Sean M,N subespacios vectoriales complementarios de X; $X=M\oplus N$

Cada $u\in X$ puede expresarse en forma única como:

$$u=u'+u'' \text{ con } u'\in M \text{ y } u''\in N$$

u' se llama la proyección de u sobre M.

Si $v=v'+v''$, de forma análoga, $u+v$ tiene proyección $u'+v'$ sobre M. Si elegimos $u'=Pu$, se sigue que P es un operador lineal de X en X. P se llama proyección sobre M y 1-P es la proyección sobre N.

Tenemos que

$$Pu=u \text{ si y sólo si } u\in M$$
$$Pu=0 \text{ si y sólo si } u\in N$$

Como Pu pertenece a M, PPu=Pu, es decir P es idempotente, $P^2=P$.

Recíprocamente, cada operador idempotente P es una proyección.

En el caso general en que existan varios subespacios vectoriales $M_1,...,M_s$ con $M_1\oplus...\oplus M_s=X$ cada $u\in X$ puede expresarse en la forma:

$$u=u_1+...+u_s \quad u_i\in M_i \quad i=1,...,s$$

de forma única. Los operadores P_j definidos por

$$P_j u = u_j$$

son proyecciones sobre M_j. Además se tiene

$$\sum_{j=1}^{s} P_j = I$$

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_k$$

Recíprocamente, sean $P_1,\ldots,P_s$ operadores sobre X que verifican las dos últimas igualdades y $M_j = R(P_j)$, entonces $X = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s$ y los P_j son las proyecciones antes definidas.

Un operador $T \in \mathbf{B}(X)$ se llama nilpotente si $T^m = 0$ para algún entero positivo m. Un nilpotente es necesariamente singular.

Si T es nilpotente es posible elegir una base en X de forma que la matriz asociada a T sea de la forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad N_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

3. El problema de los autovalores

Sea $T \in \mathbf{B}(X)$. Un número complejo λ se llama un autovalor de T si existe un vector $u \neq 0, u \in X$ tal que

$$Tu = \lambda u$$

u se llama autovector correspondiente al autovalor λ. (Al autovalor se le llama también valor propio y valor característico).

Al subespacio de X engendrado por los autovectores correspondientes a un autovalor λ, N_λ, se le llama autoespacio de T respecto a λ, y la dimensión de N se llama multiplicidad de λ. Autovectores de T pertenecientes a autovalores distintos son linealmente independientes, y por tanto, existen como máximo n autovalores de T. El conjunto de todos los autovalores de T se llama espectro de T y lo notamos por $\sigma(T)$.

4.La resolvente.

Sea $T\in\mathbb{B}(X), z\in\mathbb{C}$ y consideremos la ecuación lineal no homogenénea

$$(z-T)u=v \quad u,v\in X$$

Para que la ecuación anterior posea solución en u,para todo v en X,es necesario y suficiente que z-T sea no singular,es decir q... z no pertenezca a $\sigma(T)$. Entonces $(z-T)^{-1}$ existe y

$$u=(z-T)^{-1}v$$

Se llama resolvente de T a la función con valores en $\mathbb{B}(X)$:

$$R(z)=R(z,T)=(z-T)^{-1}$$

definida para $z\in\rho(T)$,siendo $\rho(T)$ el conjunto complementario del espectro de $T,\sigma(T)$,que llamaremos conjunto resolvente de T.

Los autovalores λ quedan así definidos por:

$$\det(\lambda-T)=0$$

$\sigma(T)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$ con multiplicidades $m_1,\dots,m_s$ tales que $m_1+\dots+m_s=n$.

Existe otra forma de denotar los autovalores que vamos a señalar por ser de interés especial en lo que sigue.En esta forma aparecen los n autovalores sin distinguir si son iguales o distintos

$$\sigma(T)=\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$$

La relación existente entre las dos anotaciones es:

$$\mu_1=\dots=\mu_{m_1}=\lambda_1$$
$$\mu_{m_1+1}=\dots=\mu_{m_1+m_2}=\lambda_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\mu_{n-m_s+1}=\dots=\mu_n=\lambda_s$$

Pretendemos probar a continuación que la resolvente de T puede expresarse explícitamente en función de T y de sus autovalores.

Teorema,I.1.-Sea $T\epsilon B(X)$,X espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números complejos,y $\sigma(T)=\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ el espectro de T.Entonces la resolvente $R(z,T)$ definida para $z\epsilon\rho(T)$ y con valores en $B(X)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$R(z,T)=(z-T)^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)} \qquad \text{donde por convenio} \qquad \prod_{1}^{0}=I$$

Demostración.

Con $z-T=(z-\mu_n)-(T-\mu_n)$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}\right)(z-T)=\sum_{k=1}^{n}\frac{z-\mu_n}{z-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}(T-\mu_n)=(1)-(2)$$

$$(2)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}(T-\mu_n)$$

ya que $\prod_{j=1}^{n}(T-\mu_j)=0$ por el T.de Hamilton Cayley

$$(1)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z-\mu_n}{z-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}+\prod_{j=1}^{n-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}$$

sumando -(2) y (1) de nuevo

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{z-T}{z-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}+\prod_{j=1}^{n-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}$$

y sustituyendo ahora $z-T=z-\mu_k-(T-\mu_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}-\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}+\prod_{j=1}^{n-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}-\sum_{k=2}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{T-\mu_j}{z-\mu_j}=I$$

en donde se ha sumado el primer y tercer término y se ha cambiado el índice del segundo.

Puesto que (z-T) conmuta con cada término de la suma, tendríamos como deseábamos

$$(z-T)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}\right)(z-T)=I$$

Corolario.-Sea A una matriz compleja nxn y $\psi(z)$ su polinomio minimal:

$$\psi(z)=(z-\lambda_1)^{p_1}\ldots(z-\lambda_s)^{p_s}$$

Entonces R(z,A) puede expresarse en la siguiente forma:

$$R(z,A)=\sum_{i=1}^{s}\prod_{k=1}^{i-1}\left(\frac{A-\lambda_k}{z-\lambda_k}\right)^{p_k}\sum_{j_i=0}^{p_i-1}\frac{(A-\lambda_i)^{j_i}}{(z-\lambda_i)^{j_i+1}}$$

Demostración.

$$R(z,A)(zI-A)=(1)(zI-A)+(2)(zI-A)+\ldots+(s)(zI-A)=$$

$$=(1)((z-\lambda_1)I-(A-\lambda_1I))+(2)((z-\lambda_2)I-(A-\lambda_2I))+\ldots+(s)((z-\lambda_s)I-(A-\lambda_sI))=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1-1}\left(\frac{A-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^{j_1}-\sum_{j_1=1}^{p_1}\left(\frac{A-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^{j_1}+\left(\frac{A-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^{p_1}\left(\sum_{j_2=0}^{p_2-1}\left(\frac{A-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right)^{j_2}-\sum_{j_2=1}^{p_2}\left(\frac{A-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right)^{j_2}\right)+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{(A-\lambda_1)^{p_1}\ldots(A-\lambda_{s-1})^{p_{s-1}}}{(z-\lambda_1)^{p_1}\ldots(z-\lambda_{s-1})^{p_{s-1}}}\left(\sum_{j_s=0}^{p_s-1}\left(\frac{A-\lambda_s}{z-\lambda_s}\right)^{j_s}-\sum_{j_s=1}^{p_s}\left(\frac{A-\lambda_s}{z-\lambda_s}\right)^{j_s}\right)=$$

$$=I-\left(\frac{A-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^{p_1}+\left(\frac{A-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right)^{p_1}\left(I-\left(\frac{A-\lambda_2}{z-\lambda_2}\right)^{p_2}\right)+\ldots+\frac{(A-\lambda_1)^{p_1}\ldots(A-\lambda_{s-1})^{p_{s-1}}}{(z-\lambda_1)^{p_1}\ldots(z-\lambda_s)^{p_{s-1}}}\left(I-\left(\frac{A-\lambda_s}{z-\lambda_s}\right)^{p_s}\right)=$$

$$=I-\frac{\psi(A)}{\psi(z)}=I$$

Como consecuencia de esta forma explícita se obtienen de forma inmediata las propiedades características de la resolvente de un operador T definido en un espacio de dimensión finita X,a saber:

$R(z,T)$ es una función analítica en $\rho(T)$ con polos en los autovalores λ de T de orden menor o igual que la multiplicidad de λ y que tiende a 0 cuando z tiende a ∞.

Es decir,$R(z,T)$ es una función meromorfa en el plano y regular en el infinito.

Otra propiedad importante de la resolvente es que satisface la llamada primera ecuación de la resolvente.

$$R(z,T)-R(w,T)=(w-z)R(z,T)R(w,T)$$

para cualesquiera valores complejos z,w.

El desarrollo de Laurent de $R(z,T)$ en el entorno de uno de sus polos $z=\lambda_h$ junto con la primera ecuación de la resolvente permite la siguiente descomposición de $R(z,T)$ en fracciones:

$$R(z,T)=\sum_{h=1}^{s}\left(\frac{P_h}{z-\lambda_h}+\sum_{k=1}^{m_h-1}\frac{D_h^k}{(z-\lambda_h)^{k+1}}\right)$$

donde

$$P_h=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(z,T)dz \quad \text{es una proyección y}$$

$$D_h=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(z-\lambda_h)R(z,T)dz \quad \text{es un operador nilpotente de orden } m_h.$$

Teorema,I.2.(Representación espectral de T).-

Cada operador $T\in\mathbf{B}(X)$ puede expresarse como suma de un operador diagonalizable S y de un nilpotente D que conmuta con S,siendo

$$S=\sum_{h=1}^{s}{}_{h}P_h \qquad \text{y} \qquad D=\sum_{h=1}^{s}D_h$$

$$T=S+D$$

Demostración.

Aplicando la definición de Dunford-Taylor de función de un operador al caso particular de $f(z)=z$, se tiene:

$$T=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} zR(z,T)dz$$

donde Γ es una circunferencia que encierra en su interior a todos los puntos de $\sigma(T)$. Si consideramos s circunferencias Γ_h contenidas en Γ de forma que no se corten entre si ni con Γ, y cada una contenga un sólo autovalor λ_h, por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} zR(z,T)dz=\sum_{h=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} zR(z,T)dz$$

y así

$$T=\sum_{h=1}^{s}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(z-\lambda_h)R(z,T)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}\lambda_h R(z,T)dz\right)=\sum_{h=1}^{s} D_h+\lambda_h P_h$$

Para demostrar los siguientes teoremas que proporcionan las expresiones analíticas de P_h y D_h desempeña un papel fundamental la Fórmula integral de Cauchy, que enunciamos en forma de lema.

Lema, I.1.-Sea f analítica en un dominio Ω $\mathbb{C}$ y sea γ la frontera de un disco cerrado contenido en Ω, orientada positivamente. Entonces para cada punto λ en el interior del disco se verifica:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\lambda}dz=f(\lambda)\qquad\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n}(\lambda)}{n!}$$

Teorema, I.3.-La proyección correspondiente al autovalor λ_1 de multiplicidad m_1 en la descomposición espectral de T tiene la representación analítica:

$$P_1=I+\frac{(T-\lambda_1)^{m_1}}{(m_1-1)!}\,\frac{d^{m_1-1}}{d\lambda_1^{m_1-1}}\left(\sum_{k=m_1+1}^{n}\frac{\prod_{j=m_1+1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=m_1+1}^{k}(\lambda_1-\mu_j)}\right)$$

Demostración.

Por definición de P_1 y teniendo en cuenta la forma explícita de la resolvente de T, siendo Γ_1 como en los casos anteriores:

$$P_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}dz=\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}$$

Descompongamos esta suma en dos partes, la primera con los m_1 primeros términos y la segunda con los restantes

$$P_1=\sum_{k=1}^{m_1}(T-\lambda_1)^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{(z-\lambda_1)^k}+$$

$$+\sum_{k=m_1+1}^{n}(T-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k-1}(T-\mu_j)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{(z-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k}(z-\mu_j)}$$

en donde se ha tenido en cuenta que los m_1 primeros autovalores μ_j coinciden con λ_1. Aplicando ahora la fórmula integral de Cauchy para calcular integrales:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z-\lambda_1}=1$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{(z-\lambda_1)^k}=0,k=2,3,\ldots,m_1$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{(z-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k}(z-\mu_j)}=\frac{1}{(m_1-1)!}\frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}}\left(\frac{1}{\prod_{j=m_1+1}^{k}(z-\mu_j)}\right)_{z=\lambda_1}$$

y sustituyendo estos valores,la primera suma se reduce al operador identidad y la segunda queda en la forma:

$$\sum_{k=m_1+1}^{n} ((T-\lambda_1)^{m_1} \prod_{j=m_1+1}^{k-1} (T-\mu_j) \frac{1}{(m_1-1)!} \frac{d^{m_1-1}}{d\lambda_1^{m_1-1}} \left(\frac{1}{\prod_{j=m_1+1}^{k} (\lambda_1-\mu_j)} \right)$$

Corolario 1.-La proyección P_h correspondiente al autovalor λ_h de multiplicidad m_h tiene la forma:

$$P_h = I + \frac{(T-\lambda_h)^{m_h}}{(m_h-1)!} \frac{d^{m_h-1}}{d\lambda_h^{m_h-1}} \sum_{k=m_h+1}^{n} \frac{\prod_{j=m_h+1}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=m_h+1}^{k} (\lambda_h-\mu_j)}$$

Demostración.

Basta con reordenar los autovalores de forma que λ_h quede en primer lugar.

Corolario 2.-Si se conoce el polinomio minimal de A:

$\psi(z)=(z-\lambda_1)^{p_1}\dots(z-\lambda_s)^{p_s}$ entonces:

$$P_h = I + \frac{(A-{}_h)^{p_h}}{(p_h-1)!} \frac{d^{p_h-1}}{d\lambda_h^{p_h-1}} R_h^*(\lambda_h, A)$$

$$R_h^*(\lambda_h,A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq h}}^{s} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq h}}^{i-1} \left(\frac{A-\lambda_k}{\lambda_h-\lambda_k}\right)^{p_k} \sum_{j_i=0}^{p_i-1} \frac{(A-\lambda_i)^{j_i}}{(\lambda_h-\lambda_i)^{j_i+1}}, h=1,2,\dots,s; \quad \prod_1^0 = 1$$

Teorema,I.4.-Si λ_h es un autovalor de T de multiplicidad 1,entonces la proyección correspondiente P_h puede expresarse en la forma:

$$P_h = \prod_{j=1}^{n}{}' \frac{T-\mu_j}{\lambda_h-\mu_j}$$

en donde ´ significa que j toma todos los valores salvo cuando $\mu_j=\lambda_h$.

Demostración.

Consideremos una reordenación de los autovalores de forma que λ_h ocupe el primer lugar, para simplificar la notación. Recordamos que

$$\lambda_1 = \mu_1 \qquad y \qquad \mu_j \neq \lambda_1, j=2,3,\ldots,n$$

Aplicando el teorema anterior a este caso concreto:

$$P_1 = I + (T-\lambda_1) \sum_{k=2}^{n} \frac{\prod_{j=2}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=2}^{k} (\lambda_1-\mu_j)} =$$

$$= I + \frac{T-\lambda_1}{\lambda_1-\mu_2} + \frac{(T-\lambda_1)(T-\mu_2)}{(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_1-\mu_3)} + \ldots + \frac{(T-\lambda_1)(T-\mu_2)\ldots(T-\mu_{n-1})}{(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_1-\mu_3)\ldots(\lambda_1-\mu_n)}$$

si ahora sumamos de izquierda a derecha teniendo en cuenta que

$$1 + \frac{T-\lambda_1}{\lambda_1-\mu_i} = \frac{T-\mu_i}{\lambda_1-\mu_i}$$

resulta la expresión deseada.

A continuación vamos a obtener expresiones analíticas para los operadores nilpotentes D_h análogas a las obtenidas para las proyecciones P_h.

Teorema,I.5.-El operador nilpotente D_1 correspondiente al autovalor λ_1 de multiplicidad $m_1, 2<m_1$ en la descomposición espectral de T tiene la representación analítica:

$$D_1 = T-\lambda_1 + \frac{(T-\lambda_1)^{m_1}}{(m_1-2)!} \frac{d^{m_1-2}}{d\lambda_1^{m_1-2}} \Big(\sum_{k=m_1+1}^{n} \frac{\prod_{j=m_1+1}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=m_1+1}^{k} (\lambda_1-\mu_j)} \Big)$$

Este resultado aparece como caso particular de otro mas general que enunciamos a continuación:

Teorema,I.6.-El operador D_1^p correspondiente al autovalor λ_1 de T de multiplicidad $m_1, 2<m_1$, siendo p un entero positivo tal que $p=1,2,\ldots,m_1-1$, tiene la representación analítica:

$$D_1^p=(T-\lambda_1)^p+\frac{(T-\lambda_1)^{m_1}}{(m_1-p-1)!}\frac{d^{m_1-p-1}}{d\lambda_1^{m_1-p-1}}\left(\sum_{k=m_1+1}^{n}\frac{\prod_{j=m_1+1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=m_1+1}^{k}(\lambda_1-\mu_j)}\right)$$

Demostración.

Sigue los mismos pasos que la realizada para P_1,no obstante la vamos a llevar a cabo.

Por definición:

$$D_1^p=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(z-\lambda_1)^pR(z,T)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(z-\lambda_1)^p\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}\right)dz=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_1}(T-\lambda_1)^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{(z-\lambda_1)^p}{(z-\lambda_1)^k}dz+$$

$$+\sum_{k=m_1+1}^{n}(T-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k-1}(T-\mu_j)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{(z-\lambda_1)^{m_1-p}\prod_{j=m_1+1}^{k}(z-\mu_j)}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\mu_1=\ldots=\mu_{m_1}=\lambda_1$.La primera suma tiene todos sus términos nulos salvo el correspondiente a $k=p+1$ en cuyo caso la integral vale 1 y la suma queda reducida a

$$(T-\lambda_1)^p$$

El valor $k=p+1$ se alcanza puesto que $p=1,2,\ldots,m_1-1$.En la segunda suma el valor de la integral aplicando la fórmula de Cauchy de nuevo será:

$$\frac{1}{(m_1-p-1)!}\frac{d^{m_1-p-1}}{d\lambda_1^{m_1-p-1}}\left(\frac{1}{\prod_{j=m_1+1}^{k}(\lambda_1-\mu_j)}\right)$$

y sustituyendo este valor,se obtiene la expresión propuesta para D_1^p.

Corolario.-Si λ_h es un autovalor de multiplicidad 2,entonces el nilpontente correspondiente D_h puede expresarse en la forma

$$D_h=(T-\lambda_h)\prod_{j=1}^{n}{}'\frac{T-\mu_j}{\lambda_h-\mu_j}\qquad\text{donde}\qquad\prod_{j=1}^{n}{}'=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n}$$

Corolario.-Si λ_h es un autovalor de T de multiplicidad m_h,entonces $D_h^{m_h-1}$ puede expresarse en la forma

$$D_h^{m_h-1}=(T-\lambda_h)^{m_h-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{T-\mu_j}{\lambda_h-\mu_j}=(T-\lambda_h)^{m_h-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{(T-\mu_j)^{m_j}}{(\lambda_h-\mu_j)^{m_j}}$$

Las expresiones analíticas obtenidas para P_h y D_h^p dan una nueva dimensión a la representación espectral de la función de un operador,f(T),particularmente cuando se requieren representaciones explícitas como mas adelante se comprobará.No obstante se darán otras dos expresiones distintas para la función de un operador T.Para comenzar se recuerda la definición de Dunford Taylor de función holomorfa de un operador T.

Teorema,I.7.-Sea p_h la multiplicidad de λ_h en el polinomio minimal de A. Entonces:

$$D_h^{p_h}=0 \qquad \text{y} \qquad D_h^{p_h-1}\neq 0$$

Demostración.

a)
$$D_h^{p_h}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(z-\lambda_h)^{p_h}R(z,A)dz$$

y
$$R(z,A)=\sum_{i=1}^{s}\prod_{k=1}^{i-1}\left(\frac{A-\lambda_k}{z-\lambda_k}\right)^{p_k}\sum_{j_i=0}^{p_i-1}\frac{(A-\lambda_i)^{j_i}}{(z-\lambda_i)^{j_i+1}}$$

en donde hemos ordenado los autovalores de forma que λ_h ocupe el último lugar,es decir:

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{h-1},\lambda_{h+1},\dots,\lambda_s,\lambda_h\}$$

Por tanto la función $(z-\lambda_h)^{p_h}R(z,A)$ es analítica en el interior de Γ_h y la integral es 0.

b)
$$D_h^{p_h-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(z-\lambda_h)^{p_h-1}R(z,A)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}\frac{(A-\lambda_1)^{p_1}\dots(A-\lambda_s)^{p_s}(A-\lambda_h)^{p_h-1}}{(z-\lambda_1)^{p_1}\dots(z-\lambda_s)^{p_s}}\frac{dz}{z-\lambda_h}=$$

$$=\frac{(A-\lambda_1)^{p_1}\dots(A-\lambda_h)^{p_h-1}\dots(A-\lambda_s)^{p_s}}{(\lambda_h-\lambda_1)^{p_1}\dots(\lambda_h-\lambda_s)^{p_s}}\neq 0$$

puesto que si $D_h^{p_h-1}=0$ el polonomio minimal no sería el propuesto,sino:

$$\psi(z)=(z-\lambda_1)^{p_1}\ldots(z-\lambda_h)^{p_h-1}\ldots(z-\lambda_s)^{p_s}$$

Corolario.-Los operadores nilpotentes D_h^p determinan el polinomio minimal de A.

Definición.-Sea Ω un entorno abierto de $\sigma(T)$ no necesariamente conexo,y $f:\Omega\text{---}\mathbb{C}$ holomorfa.Sea U abierto con $\sigma(T)$ U Ω y supongamos que δU está formado por un número finito de curvas de Jordan rectificables orientadas positivamente.Entonces se define f(T) mediante la integral de Dunford-Taylor en la forma:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta U} f(z)R(z,T)dz$$

Teorema,I.8 (Representación espectral de f(T)).-

Sean f y T como en la definición anterior.Si T posee una representación espectral de la forma:

$$T=\sum_{h=1}^{s} \lambda_h P_h+D_h$$

entonces

$$f(T)=\sum_{h=1}^{s} (f(\lambda_h)P_h+\sum_{k=1}^{m_h-1}\frac{f^{(k}(\lambda_h)}{k!}D_h^k)$$

Demostración.

Sustituímos en la definición de f(T),R(z,T) por su representación espectral y teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta U} f(z)R(z,T)dz=\sum_{h=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} f(z)R(z,T)dz$$

por el teorema de Cauchy,siendo $_h$ como en casos anteriores,así se tiene:

$$f(T)=\sum_{h=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} f(z)\Big(\sum_{k=1}^{s}\frac{P_k}{z-\lambda_k}+\sum_{j=1}^{m_k-1}\frac{D_k^j}{(z-\lambda_k)^{j+1}}\Big)dz=$$

$$=\sum_{h=1}^{s}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} P_h\frac{f(z)}{z-\lambda_h}\,dz+\sum_{j=1}^{m_h-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} D_h^j\frac{f(z)}{(z-\lambda_h)^{j+1}}dz\Big)=$$

$$=\sum_{h=1}^{s}\Big(f(\lambda_h)P_h+\sum_{j=1}^{m_h-1}\frac{f^{(j}(\lambda_h)}{j!}D_h^j\Big)$$

Sustituyendo en la definición de f(T) la forma explícita de R(z,T) en lugar de su representación espectral,obtenemos una expresión analítica para la función:

Teorema,I.9.-Sean f y T como en la definición de Dunford-Taylor.f(T) puede expresarse como sigue:

$$f(T)=\sum_{h=1}^{s}\Big(\sum_{k=1}^{m_h}\frac{f^{(k-1}(\lambda_h)}{(k-1)!}(T-\lambda_h)^{k-1}+\frac{(T-\lambda_h)^{m_h}}{(m_h-1)!}\frac{d^{m_h-1}}{d\lambda_h^{m_h-1}}f(\lambda_h)R_h(\lambda_h,T)\Big)$$

donde

$$R_h(z,T)=\sum_{k=m_h+1}^{n}\frac{\prod_{j=m_h+1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=m_h+1}^{k}(z-\mu_j)}$$

Demostración.

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta U} f(z)R(z,T)dz=\sum_{h=1}^{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} f(z)R(z,T)dz$$

Calculemos cada uno de los sumandos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(z)\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}dz=\sum_{k=1}^{m_1}(T-\lambda_1)^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{(z-\lambda_1)^k}dz+$$

$$+\sum_{k=m_1+1}^{n}(T-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k-1}(T-\mu_j)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{(z-\lambda_1)^{m_1}\prod_{j=m_1+1}^{k}(z-\mu_j)}dz$$

haciendo uso de nuevo de la fórmula de Cauchy, la primera suma es igual a

$$\sum_{k=1}^{m_1} \frac{f^{(k-1}(\lambda_1)}{(k-1)!}(T-\lambda_1)^{k-1}$$

y la segunda puesto que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-\lambda_1)^{m_1} \prod_{j=m_1+1}^{k} (z-\mu_j)} dz = \frac{1}{(m_1-1)!} \frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}} \left(\frac{f(z)}{\prod_{j=m_1+1}^{k} (z-\mu_j)} \right)_{z=\lambda_1}$$

por ser $\dfrac{f(z)}{\prod_{j=m_1+1}^{k} (z-\mu_j)}$ holomorfa en el interior de Γ_1 se obtiene el resultado propuesto.

Corolario.-Si los autovalores son todos distintos la expresión obtenida coincide con la dada por el polinomio de interpolación de Lagrange para la función de una matriz:

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\lambda_k)}{\prod_{j=1}^{n\prime} (\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{j=1}^{n\prime} (T-\lambda_j) \quad \text{donde} \quad \prod_{j=1}^{n\prime} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}$$

Demostración.

$$f(T) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \prod_{j=1}^{n\prime} \frac{T-\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

Sea A una matriz compleja nxn con autovalores $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ de multiplicidades $m_1,\dots,m_s$, respectivamente. La definición de $f(A)$ mediante el polinomio de interpolación de Hermite es la siguiente:

$$f(A) = \sum_{h=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_h-1} \sum_{p=0}^{k} \frac{f^{(m_h-k-1)}(\lambda_h)}{(m_h-k-1)!(k-p)!} \cdot \left[\frac{d^{k-p}}{dz^{k-p}} \frac{(z-\lambda_h)^{m_h}}{Q(z)} \right]_{z=\lambda_h} Q_h(A)(A-\lambda_h)^{m_h-p-1}$$

Donde $Q(z) = \prod_{j=1}^{s} (z-\lambda_j)^{m_j}$, es el polinomio caracteristico de A, y $Q_h(z) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{s} (z-\lambda_j)^{m_j}$.

El teorema anterior proporciona otra expresión de $f(A)$, en términos de la resolvente de A en lugar del polinomio caracteristico. Esta expresión puede suponer una simplicación del cálculo.

Por último se da otra expresión para f(T) que,quizás,sea la que resulta de cálculo mas simplificado.

Teorema,I.10(Representación intrínseca de f(T)).-
Se supone f(T) definida mediante la integral de Dunford-Taylor.Entonces se tiene:

$$f(T)=\sum_{k=1}^{n} \overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j) \prod_{j=1}^{k-1} (T-\mu_j),$$

donde
$$\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{k} (z-\mu_j)} dz$$

Demostración.
Si en la definición,I.1,de f(T),se sustituye R(z,T) por la representación íntrinseca obtenida en el teorema,I.1,se obtiene la representación propuesta de f(T).

Cálculo de $\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)$.

i) Si $\mu_i \neq \mu_j$,i,j,k=1,2,...,n.

$$\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)=\sum_{j=1}^{k} \frac{f(\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k} (\mu_j-\mu_i)}$$

ii) Si λ_h tiene multiplicidad p_h,h=1,2,...,q, $\sum_{h=1}^{q} p_h$=k.q=1,2,...,s.k=1,2,...,n.

$$\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\lambda_j)=\sum_{h=1}^{q} \frac{1}{(p_h-1)!} \frac{d^{p_h-1}}{d\lambda_h^{m_h-p-1}} \frac{f(\lambda_h)}{\prod_{j=1}^{q} (\lambda_h-\lambda_j)^{p_j}}$$

Demostración.
Se aplica el teorema de los residuos para el cálculo de las integrales y se obtienen los resultados propuestos.

Comentario.

Dunford en [6] llega a la expresión de $f(T)$ conocida como la integral de Dunford-Taylor en las etapas siguientes:

Define en primer lugar el espectro $\sigma(T)$ de un operador $T\in B(X)$, X espacio vectorial complejo de dimensión finita n,y el indice $\nu(\lambda)$ de un número complejo λ como el menor entero no negativo ν tal que $(\lambda I-T)^{\nu}x=0$ para cada x tal que $(\lambda I-T)^{\nu+1}x=0$ (a $\nu(\lambda)$ se le conoce también como ascendente de $T-\lambda$[23]).

Para cada entero n y cada número complejo λ se define la variedad lineal $M_{\lambda}^{n}=\{x/(T-\lambda I)^{n}x=0\}$ (a los M_{λ} se les llama espacios propios generalizados).Se observa que:

$$M_{\lambda}^{n}=M^{\nu(\lambda)} \qquad \forall n\in N/\nu(\lambda)\leq n$$

$M_{\lambda}^{0}\subset M_{\lambda}^{1}\subset\ldots\subset M_{\lambda}^{\nu(\lambda)}$ y $\nu(\lambda)\leq \dim X$ para cada $\lambda\in\sigma(T)$ si y sólo si $1<\nu(\lambda)$.

A continuación se demuestra que si P y Q son polinomios,entonces

$$P(T)=Q(T)$$

si y sólo si P-Q tiene un cero de orden $\nu(\lambda)$ en cada punto λ de $\sigma(T)$.Este resultado permite definir el operador $f(T)$ para una clase de funciones mayor que la de los polinomios.En efecto,sea $F(T)$ la clase de todas las funciones de variable compleja z que son analíticas en algún conjunto abierto que contiene a $\sigma(T)$.

Si $f\in F(T)$,y P es un polinomio tal que $f^{(m}(\lambda)=P^{(m}(\lambda)$, $m\leq\nu(\lambda)-1$ para cada $\lambda\in\sigma(T)$,se define

$$f(T)=P(T)$$

Esta definición se basa por tanto en la unicidad del polinomio de interpolación de grado n para una función analítica.

Llamando $F(T)$ al conjunto de las funciones $f(T)$ se demuestra que es un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y $f(T)=0$ si y sólo si $f^{(m}(\lambda)=0$ para cada $\lambda\in\sigma(T)$ $0\leq m\leq\nu(\lambda)-1$.

Si λ_{o} es un número complejo,sea $e_{\lambda_o}(\lambda)$ la función que es identicamente igual a 1 en un entorno de λ_{o} y cero en un entorno de cada uno de los restantes puntos de $\sigma(T)$.

Se define $E(\lambda_{o})=e_{\lambda_{o}}(T)$.

Esta función se comprueba que posee unas propiedades muy particulares,a saber:

a) $E(\lambda_o)\neq 0$ si y sólo si $\lambda_o \in \sigma(T)$

b) $E(\lambda_o)^2=E(\lambda_o)$ y $E(\lambda_o)E(\lambda_1)=0$ para $\lambda_o\neq\lambda_1$

c) $I=\sum_{\lambda\in\sigma(T)} E(\lambda)$

Sea $\sigma(T)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$,llamando $X_i=E(\lambda_i)X$,se tiene

$$X=X_1 \oplus\dots\oplus X_k$$

con $TX_i \; X_i$,ya que $TE(\lambda_i)=E(\lambda_i)T$.

En cada subespacio X_i el operador T es la suma de un múltiplo de la identidad y de un operador nilpotente $T-\lambda_i I$.

La relación existente entre el índice $\nu(\lambda)$ de un punto de $\sigma(T)$ y la correspondiente proyección $E(\lambda)$ es la siguiente

$$E(\lambda)X=M_\lambda^{\nu(\lambda)}=\{x/(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}x=0\}$$

La descomposición de X en suma directa de subespacios mediante las proyecciones $E(\lambda)$ permite dar la siguiente representación para $f\in F(T)$

$$f(T)=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1}\frac{(T-\lambda I)^i}{i!}f^{(i}(\lambda)E(\lambda)$$

A partir de expresión es posible calcular de forma explícita la función $(zI-T)^{-1}$ conocida como la resolvente de T

$$(zI-T)^{-1}=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1}\frac{(T-\lambda I)^i}{(z-\lambda)^{i+1}}E(\lambda)$$

y con ella puede demostrarse el teorema que proporciona la forma integral de f(T) que ha motivado este desarrollo y que se conoce como definición de Dunford-Taylor de función analítica de un operador T,como ya dijimos en un principio.

Teorema (Dunford-Schwartz,[6],pag.560)

Sea f en F(T) analítica en un dominio que contiene la clausura de un conjunto abierto U que contiene $\sigma(T)$,y supongamos que el borde orientado de U, Γ,consiste en un número finito de curvas cerradas rectificables de Jordan orientadas en sentido positivo.Entonces f(T) puede expresarse como una integral de contorno de Riemann sobre Γ por la fórmula

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(ZI-T)^{-1}dz$$

Resultados semejantes a estos fueron obtenidos por Taylor como se pone de manifiesto en la introducción,razón por la cual la integral lleva el nombre de ambos.

Algunos años mas tarde Kato descompone el operador T en suma de proyecciones y operadores nilpotentes

$$T=\sum_h \lambda_h P_h+D_h$$

A esta descomposición se le llama forma canónica de T o también representación espectral de T,y viene a mostrar que cada operador $T\epsilon\mathbf{B}$ puede expresarse como la suma de un operador semisimple (o diagonalizable) y un operador nilpotente que conmuta con él.

Este resultado se enuncia como Teorema,I.2 en la memoria y la demostración que se da,está basada en la definición de la función f(T)=T,mediante la integral de Dunford-Taylor.

La forma original de Kato puede consultarse en [16],pag.41.

La descomposición espectral conduce a la forma canónica de Jordan de T.

Si $f\epsilon F(T)$ en [16] se define f(T) mediante la integral de Dunford-Taylor tal como se hace en el teorema 10,pag.560 de [6] que hemos recogido aquí,y en 5.6-3 pag.289 de [23].En esta memoria aparece como definición I.1.

La descomposición espectral de T se muestra mas conveniente que la descomposición de Dunford en el comportamiento de f(T),pues,para este operador se obtiene la descomposición espectral

$$f(T)=\sum_h f(\lambda_h)P_h+D_h'$$

que guarda estrecha relación con la de T, [16] pag.45.Nosotros enunciamos esta representación espectral en el teorema,I.8.Cuando λ_h es un polo simple $E(\lambda_h)=P_h$.Por nuestra parte damos una demostración algebraica del teorema,I.1 que simplifica la dada en [19] y aprovechamos la forma explícita de R(z,T) para obtener a partir de las definiciones de P_h y D_h dadas en [16],expresiones analíticas explícitas que se enuncian en forma de teorema,I.3,teorema,I.4, teorema,I.5 y teorema,I.6 y cuyo posible interés se encuentra en eliminar el uso de la integral de Cauchy y de la resolvente en la obtención de la descomposición espectral de T.

En el teorema,I.9,se da una expresión explícita para f(T) en términos de T y sus autovalores,que en el caso de valores propios simples coincide con la dada en el teorema 10 del capítulo VII de [6].Los polinomios de interpolación de Lagrange y Hermite que se citan con motivo del teorema,I.9,pueden consultarse en el capítulo I de [13].

Por último,en el teorema,I.9 se logra otra forma explícita de F(T) que parece ser la que hace mas breve el cálculo de todas las expuestas.

CAPITULO II

CAPITULO II

APLICACIONES Y EJEMPLOS

Aplicaciones

Hallar una forma conveniente para calcular f(T) es un importante problema en la práctica como muestran los siguientes ejemplos:

1.-En la teoría de sistemas lineales tiempo invariantes descritos por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x'(t)=Ax(t)+a(t)$$

donde A es una matriz compleja nxn y $a:[t_o,t_1]\dashrightarrow \mathbb{C}^n$ una función continua. Se busca una función $x:[t_o,t_1]\dashrightarrow \mathbb{C}^n$ (todos los vectores se escriben como vectores columnas) que sea derivable en $[t_o,t_1]$ y su derivada verifique la ecuación.Tal función $x(t)$ llamada solución del sistema se expresa en términos de la matriz e^{At},como es bien conocido.

2.-En la teoría de sistemas lineales discretos tiempo-invariantes descritos por

$$\{x_{k+1}\}=A\{x_k\}+\{a_k\}$$

donde A es una matriz compleja nxn y $\{a_k\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}^n$.La solucíon $\{x_k\}$ es una sucesión de $\mathbb{C}^n$ que se expresa en términos de $\{A^n\}$.

3.-En la teoría de cadenas de Markov estacionarias se está particularmente interesado en el límite de P^n,cuando $n\dashrightarrow\infty$,donde P es la matriz probabilidad de transición de la cadena.

Obtención de f(A).

Los métodos que com mas frecuencia se utilizan son:

a) El método de interpolación.

b) La descomposición de X en espacios propios generalizados $M_\lambda(A)$ de Dunford.

c) La forma canónica de Jordan.

a) El método de interpolación.

Sea A una matriz nxn y $f\epsilon F(A)$.Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ los valores propios de A de multiplicidades $m_1,\dots,m_s$ respectivamente.Construimos el polinomio de interpolación de grado n,p(z) de f(z) que satisface las siguientes condiciones:

$$f(\lambda_h)=p(\lambda_h) \qquad h=1,2,\dots,s$$
$$f^{(k}(\lambda_h)=p^{(k}(\lambda_h) \qquad k=1,2,\dots,m_h-1$$

Cuando la matriz A posee n valores propios distintos,el polinomio de interpolación es el polinomio de Lagrange:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\lambda_k)}{\prod\limits_{j=1}^{n\,\prime}(\lambda_k-\lambda_j)}\prod_{j=1}^{n\,\prime}(x-\lambda_j) \text{ donde } \prod_{j=1}^{n\,\prime}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}$$

Cuando la matriz A tiene valores propios $\lambda_1,\dots,\lambda_s$,con multiplicidades $m_1,\dots,m_s$,respectivamente el polinomio de interpolación correspondiente es el de Hermite:

$$f(x)=\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_h-1}\sum_{p=0}^{k}\frac{f^{(m_h-k-1}(\lambda_h)}{(m_h-k-1)!(k-p)!}\cdot\left[\frac{d^{k-p}}{dx^{k-p}}\frac{(x-\lambda_h)^{m_h}}{Q(x)}\right]_{x=\lambda_h}Q_h(x)(x-\lambda_h)^{m_h-p-1}$$

Donde $Q(x)=\prod\limits_{j=1}^{s}(x-\lambda_j)^{m_j}$es el polinomio característico de A,y $Q_h(x)=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{s}(x-\lambda_j)^{m_j}$.

Una vez obtenido el polinomio de interpolación,por el teorema de Hamilton-Cayley,[2],[11],

$$f(A)=p(A)$$

En el caso de autovalores distintos la expresión obtenida para f(A) se conoce como fórmula de Sylvester.[2]'[13][22]

b) El método de descomposición de X en espacios propios generalizados de Dunford.

Este método,mas elaborado,se basa en la expresión de Dunford para f(A), $f \in F(A)$ y $A \in \mathbb{B}(X)$,que se mencionado en el comentario del capítulo I:

$$f(A)=\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_h-1}(A-\lambda_h)^k\frac{f^{(k}(\lambda_h)}{k!}E(\lambda_h)$$

En efecto,sea $X=\mathbb{C}^n$ y A una matriz compleja nxn como en a) y $M_\lambda(A)$ el espacio propio generalizado de A,correspondiente al autovalor λ.La dimensión de $M_\lambda(A)$ es igual a la multiplicidad de λ como cero de la ecuación caracteristica,y se tiene la siguiente descomposición de X en subespacios invariantes con respecto de A:

$$X=M_{\lambda_1}(A)\oplus\ldots\oplus M_{\lambda_s}(A)$$

Se necesita conocer una base de $M_\lambda(A)$,para ello,teniendo en cuenta que la dimensión de $M_\lambda(A)$ es igual a la multiplicidad algebráica de λ y que

$$N(A-\lambda I)\subset N(A-\lambda I)^2\subset\ldots\subset N(A-\lambda I)^{\nu(\lambda)}=N(A-\lambda I)^{\nu(\lambda)+1}$$

podemos proceder en la forma siguiente.Obtenemos en primer lugar $N(A-\lambda I)$.Si $\dim N(A-\lambda I)=m_\lambda$,como $\dim N(A-\lambda I)^{\nu(\lambda)}=m_\lambda$ se tiene

$$N(A-\lambda I)=N(A-\lambda I)^{\nu(\lambda)}=M_\lambda(A)$$

Si $\dim N(A-\lambda I)<m_\lambda$ calculamos $N(A-\lambda I)^2$ y se procede con el mismo razonamiento,hasta obtener un subespacio de dimensión m_λ.

Una vez que tenemos una base para cada $M_\lambda(A)$ podemos expresar de forma única cada vector $x\in X$ como suma de vectores de M_λ:

$$x=\sum_{h=1}^{s}x_h \qquad x_h\in M_{\lambda_h}(A)$$

y así se define

$$f(A)=\sum_{h=1}^{s}\sum_{k=0}^{m_h-1}(A-\lambda_h)^k\frac{f^{(k}(\lambda_h)}{k!}E(\lambda_h)$$

donde $E(\lambda_h)$ es la proyección de X en $M_{\lambda_h}(A)$:

$$E(\lambda_h)x=x_h$$

Vamos a calcular a continuación las proyecciones $E(\lambda_h)$

Para facilitar la notación supongamos que A posee dos autovalores λ_1, λ_2 de multiplicidades p y n-p respectivamente. En esta situación $M_{\lambda_1}(A)$ tendrá una base:

$$\{e_1^*,\dots,e_p^*\}$$

y $M_{\lambda_2}(A)$ tendrá otra:

$$\{e_{p+1}^*,\dots,e_n^*\}$$

Cada vector x de X lo expresamos en función de la nueva base $\{e_i^*\}_1^n$ y lo descomponemos en suma de $x_1 \in M_{\lambda_1}(A)$ y $x_2 \in M_{\lambda_2}(A)$. En particular los vectores $\{e_1,\dots,e_n\}$ de la base original de X se expresarán cada uno así:

$$e_j=u_j+v_j \text{ donde } u_j \in M_{\lambda_1}(A) \text{ y } v_j \in M_{\lambda_2}(A)$$

Ahora bien, si

$$e_1^*=a_{11}e_1+\dots+a_{1n}e_n$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$e_n^*=a_{n1}e_1+\dots+a_{nn}e_n$$

llamemos

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{n1} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{1n}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculemos u_j y v_j para cada e_j. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn-1} \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

con $C=B^{-1}$, se obtiene a partir de

$$e_j=(c_{j1}e_1^*+\dots+c_{jp}e_p^*)+(c_{jp+1}e_{p+1}^*+\dots+c_{jn}e_n^*)=u_j+v_j$$

$$E(\lambda_1)e_j=u_j \qquad E(\lambda_2)e_j=v_j$$

las siguientes expresiones:

$$E(\lambda_1)e_j=u_j=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{p1} & 0\ldots 0\\ \cdots & \cdots \\ a_{1n}\cdots a_{pn} & 0\ldots 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{j1}\\ \cdot \\ c_{jn}\end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} I_p\ldots 0\\ 0\ldots 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{j1}\\ \cdot \\ c_{jn}\end{bmatrix}$$

$$E(\lambda_2)e_j=v_j=\begin{bmatrix} 0\ldots 0 & a_{p+1,1}\cdots a_{n1}\\ \cdots & \cdots \\ 0\ldots 0 & a_{p+1,n}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{j1}\\ \cdot \\ c_{jn}\end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{n-p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{j1}\\ \cdot \\ c_{jn}\end{bmatrix}$$

en donde I_p es la matriz identidad pxp e I_{n-p} la matriz identidad de orden n-p.

Finalmente,haciendo variar j de 1 a n se obtienen las siguientes expresiónes matriciales para $E(\lambda_1)$ y $E(\lambda_2)$

$$E(\lambda_1)=E(\lambda_1)I= B\begin{bmatrix} I_p\ldots 0\\ 0\ldots 0\end{bmatrix}B^{-1} \qquad E(\lambda_2)=E(\lambda_2)I= B\begin{bmatrix} 0\ldots 0\\ 0\ldots I_{n-p}\end{bmatrix}B^{-1}$$

siendo B la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores de la base correspondientes a la descomposición de X en suma de los espacios generalizados $M_\lambda(A)$.

En particular

$$e^{At}=\sum_{h=1}^{s} e^{\lambda_h t}\sum_{k=0}^{m_h-1}\frac{(A-\lambda_h I)^k}{k!}t^k E(\lambda_h)$$

Con

$$E(\lambda_h)=B\begin{bmatrix} O & & \\ & I_{m_h} & \\ & & O\end{bmatrix}B^{-1}$$

donde el primer 1 de I_{m_h} ocupa el lugar $m_1+\ldots+m_{h-1}+1$ de la diagonal principal.

La complejidad de la expresión es considerable cuando la matriz A es de orden mayor que 3 y cuando los valores propios no son reales.Aquí daremos un ejemplo de aplicación para una matriz 3x3.En [15] y [24] se pueden encontrar métodos de resolución de sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes basados en la descomposición de X en espacios generalizados debida a Dunford.La representación matricial de E(λ) no se ha encontrado en la bibliografía consultada y nos ha parecido del suficiente interés como para incluirla.

c) El tercer método se basa en la forma canónica de Jordan de una matriz A:

$$A=QJQ^{-1}$$

en donde J representa la forma canónica de Jordan de A,y Q la matriz del cambio de base,y en la siguiente propiedad

$$A^k=QJ^kQ^{-1}$$

que se corresponde con el hecho de ser A y J matrices que representan a un mismo operador $T:X \dashrightarrow X$,respecto de bases distintas.

Así,si p(z) es un polinomio en la variable compleja z,se tiene

$$p(A)=QP(J)Q^{-1}$$

y también

$$e^A=Qe^JQ^{-1}$$

La dificultad de este método,que puede consultarse en [14]y [24],se encuentra en la obtención de Q puesto que e^J y J^n se calculan con facilidad.

$$e^{At}=Qe^{Jt}Q^{-1}$$

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s t} \end{bmatrix} \qquad J_h=\begin{bmatrix} \lambda_h & & & \\ 1 & \lambda_h & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_h \end{bmatrix}$$

siendo

$$e^{J_h t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} e^{zt}R(z,J_h)dz$$

donde

$$R(z,J_h)=(zI-J_h)^{-1}=\begin{bmatrix} z-\lambda_h & & & \\ 1 & z-\lambda_h & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & z-\lambda_h \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (z-\lambda_h)^{-1} & & & \\ (z-\lambda_h)^{-2} & (z-\lambda_h)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ (z-\lambda_h)^{m_h-2} & \cdots & (z-\lambda_h)^{-2} & (z-\lambda_h)^{-1} \end{bmatrix}$$

Así se obtiene

$$e^{J_h t}=e^{\lambda_h t}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ t & 1 & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ \frac{t^{m_h-1}}{(m_h-1)!} & \frac{t^{m_h-2}}{(m_h-2)!} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Los dos métodos proporcionados en el capítulo I para la obtención de f(A), uno deducido de los teoremas I.3,I.4 y otro expresado en el teorema I.9 parece que pueden abreviar el cálculo.La elección de uno u otro está en función del problema que origina la necesidad de calcular f(A).

A continuación calculamos e^{At} para una matriz 3x3 utilizando cada uno de los métodos para poder compararlos,aunque las diferencias entre ellos se acentúan cuando n es grande.También se obtiene f(A) y e^{At} para una matriz 5x5 mediante los métodos propios de esta memoria.

Ejemplos

1.Obtención mediante el método de interpolación de e^{At} cuando

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico de $A: Q(z)=(z-1)^2(z+1)$

Valores propios de $A: \lambda_1$ con multiplicidad $m_1=2$ y $\lambda_2=-1$ con multiplicidad $m_2=1$.

$$Q_j(z)=\prod_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{s}(z-\lambda_h)^{m_h} \quad \text{así en nuestro caso:}$$

$$Q_1(z)=(z+1) \qquad Q_2(z)=(z-1)^2$$

y el polinomio de interpolación de Hermite nos proporciona la siguiente expresión para f(A):

$$f(A)=\sum_{k=0}^{1}\sum_{p=0}^{k}\frac{f^{(1-k)}(\lambda_1)}{(1-k)!(k-p)!}\left[\frac{d^{k-p}}{dz^{k-p}}\frac{1}{z-\lambda_2}\right]_{z=\lambda_1}(A-\lambda_2)(A-\lambda_1)^{1-p}+$$

$$+f(\lambda_2)\left[\frac{1}{(z-\lambda_1)^2}\right]_{z=\lambda_2}(A-\lambda_1)^2$$

$$e^{At}=\frac{1}{2}\,te^{t}(A^2-1)+\frac{1}{4}\,e^{t}(-A^2+2A+3)+\frac{1}{4}\,e^{-t}(A-1)^2=$$

$$=te^{t}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix}5&2&6\\2&2&3\\-4&-2&-5\end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix}-4&-2&-6\\-2&-1&-3\\4&2&6\end{bmatrix}$$

2.Obtención mediante el método de Dunford de e^{At},con A la matriz del ejemplo 1.

Calculamos en primer lugar $M_{\lambda_1}(A)$ y $M_{\lambda_2}(A)$,en la forma descrita anteriormente:

$$(A-\lambda_1 I)x=0,\quad \lambda_1=1,\quad x=(x_1,x_2,x_3)$$

$$\dim N(A-\lambda_1 I)=1<2=\dim M_{\lambda_1}(A)$$

$(A-\lambda_1 I)^2x=0$ y $\dim N(A-\lambda_1 I)^2=2$ por tanto:

$$M_{\lambda_1}(A)=N(A-\lambda_1 I)^2=\{x\in C^3: 2x_1+x_2+3x_3=0\}$$

una base para $M_{\lambda_1}(A)$ puede ser:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$M_{\lambda_2}(A)=N(A-\lambda_2 I)$ y

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}\text{es una base de } M_{\lambda_2}(A)$$

La matriz B será en nuestro caso:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2\\-2&-3&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

y las proyecciones generalizadas de Dunford,$E(\lambda_1)$ y $E(\lambda_2)$ estarán dadas por las siguientes matrices:

$$E(\lambda_1)=E(1)=B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}B^{-1}=\begin{pmatrix}5&2&6\\2&2&3\\-4&-2&-5\end{pmatrix}$$

$$E(\lambda_2)=E(-1)=B\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}B^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-2&-6\\-2&-1&-3\\4&2&6\end{pmatrix}$$

La expresión de Dunford para f(A) nos permite escribir en nuestro caso:

$$e^{At}=e^{t}(I+t(A-I))E(1)+e^{-t}IE(-1)=$$

$$=te^{t}(A-I)E(1)+e^{t}E(1)+e^{-t}E(-1)$$

que nuevamente proporciona el resultado obtenido en el ejemplo 1,como era de esperar.

3.Obtención de e^{At} mediante la forma canónica de Jordan,con A la matriz del ejemplo 1.

Se calcula una matriz Q que verifique la igualdad:

$$Q^{-1}AQ=J$$

En nuestro ejemplo,puesto que los valores propios de A son $\lambda_1=1$,con multiplicidad $m_1=2$,y $\lambda_2=-1$,con multiplicidad $m_2=1$:

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad y \quad Q=\begin{pmatrix}2&11&-16\\2&5&-8\\-2&-9&16\end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$e^{At}=Qe^{Jt}Q^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&11&-16\\2&5&-8\\-2&-9&16\end{pmatrix}e^{Jt}\begin{pmatrix}2&8&2\\4&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(5+t)e^{t}-4e^{-t}&2e^{t}-2e^{-t}&(6+t)e^{t}-6e^{-t}\\(2+t)e^{t}-2e^{-t}&2e^{t}-e^{-t}&(3+t)e^{t}-3e^{-t}\\-(4+t)e^{t}+4e^{-t}&-2e^{t}+2e^{-t}&-(5+t)e^{t}+6e^{-t}\end{pmatrix}$$

4.Obtención de e^{At} mediante las expresiones analíticas de los operadores proyecciones y nilpontes correspondientes a la matriz A,obtenidas en el capítulo I de esta memoria,con A la matriz del ejemplo 1.

En primer lugar se calcula la resolvente de A:

$$R(z,A)=(zI-A)^{-1}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(A-\mu_j I)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}=\frac{I}{z-1}+\frac{A-I}{(z-1)^2}+\frac{(A-I)^2}{(z-1)^2(z+1)}$$

Puesto que $\sigma(A)=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}=\{1,1,-1\}$

A continuación calculamos $P_2=P(-1)$,por ser $\lambda_2=-1$,un valor propio de A con multiplicidad $m_2=1$:

$$P_2=\frac{(A-\lambda_1)^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -6\\ -2 & -1 & -3\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

De la igualdad $P_1+P_2=I$,se obtiene:

$$P_1=I-P_2=\begin{bmatrix}5 & 2 & 6\\ 2 & 2 & 3\\ -4 & -2 & -5\end{bmatrix}$$

Nilpotentes:D_1,correspondiente al valor propio $\lambda_1=1$.

$$D_1=\frac{1}{2}(A^2-I)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Se comprueba que efectivamente se verifica la relación:

$$A=P_1-P_2+D_1$$

Obteniendo asi la descomposición espectral de A de forma explícita,sin necesidad de realizar ningún cambio de base.

Se supone que A es la matriz de un sistema diferencial de la forma:

$$x'(t)=Ax(t) \qquad x(0)=I$$

Entonces la matriz fundamental de este sistema sería

$$e^{At}=e^{t}P_1+e^{-t}P_2+te^{t}D_1$$

La simplificación de cálculo que proporciona este último método respecto de los habituales,se pone tanto mas de manifiesto cuanto mayor es el orden de la matriz A considerada.A continuación damos un ejemplo de obtención de e^{At} para una matriz A de orden 5.

5.Obtención de e^{At} cuando A es la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)=0 \qquad \sigma(A)=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5\}=\{1,1,-1,1+i,1-i\}$

La resolvente de A tiene la siguiente expresión:

$$R(z,A)=(zI-A)^{-1}=\sum_{k=1}^{5}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(A-\mu_j I)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}=$$

$$=\frac{I}{z-1}+\frac{A-I}{(z-1)^2}+\frac{(A-I)^2}{(z-1)^2(z+1)}+\frac{(A-I)^2(A+I)}{(z-1)^2(z+1)(z-1-i)}+\frac{(A-I)^2(A+I)(A-(1+i)I)}{(z-1)^2(z+1)(z-1-i)(z-1+i)}$$

Por ser -1,1+i y 1-i valores propios simples de A,calculamos en primer lugar las proyecciones P_{-1},P_{1+i} y P_{1-i} haciendo uso de la fórmula correspondiente:

$$P_{-1}=\prod_{j=1}^{5}{}'\frac{A-\mu_j}{\mu_3-\mu_j}=\frac{(A-I)^2(A-(1+i)I)(A-(1-i)I)}{(-2)^2(-2-i)(-2+i)}$$

$$P_{1+i}=\prod_{j=1}^{5}{}'\frac{A-\mu_j}{\mu_4-\mu_j}=\frac{(A-I)^2(A+I)(A-(1-i)I)}{(1+i-1)^2(1+i+1)2i}$$

$$P_{1-i}=\prod_{j=1}^{5}{}'\frac{A-\mu_j}{\mu_5-\mu_j}=\frac{(A-I)^2(A+I)(A-(1+i)I)}{(1-i-1)^2(1-i+1)(-2i)}$$

Por último obtenemos P_1:

$$P_1=I-(P_{-1}+P_{1+i}+P_{1-i})$$

De forma análoga el operador nilpotente D_1 correspondiente al valor propio $\lambda_1=1$, con multiplicidad $m_1=2$, viene dado por la expresión:

$$D_1=(A-\lambda_1)\prod_{j=1}^{5}\frac{A-\mu_j}{\lambda_1-\mu_j}=\frac{(A-I)(A+I)(A-(1+i)I)(A-(1-i)I)}{2(-i)i}$$

Se obtienen así las siguientes matrices:

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&-1&1&-1\\0&1&-1&1&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\qquad P_{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P_{1+i}=\frac{1+2i}{10}\ (S+iT)\qquad P_{1-i}=\frac{1-2i}{10}\ (S-iT)$$

$$S=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-2&2&-2&3&-2\\-2&2&-2&3&-2\end{pmatrix}\qquad T=\begin{pmatrix}-2&2&-2&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$D_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Y así se obtiene para la siguiente descomposición espectral de A:

$$A=P_1-P_{-1}+(1+i)P_{1+i}+(1-i)P_{1-i}+D_1$$

la matriz e^{At}:

$$e^{At}=e^tP_1+e^{-t}P_{-1}+e^{(1+i)t}P_{1+i}+e^{(1-i)t}P_{1-i}+te^tD_1$$

o bien expresada en términos de funciones reales y de matrices reales:

$$e^{At}=e^t(P_1+tD_1)+e^{-t}P_{-1}+e^t(\ 1/5(S-2T)\cos t-\ 1/5(2S+T)\operatorname{sen} t)$$

6. Descomposición espectral y funciones de las posibles matrices de orden 4.

a). Matrices con 4 valores propios distintos. $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$

$$A=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\lambda_3 P_3+\lambda_4 P_4$$

donde

$$P_k=\prod_{i=1}^{4,}\frac{A-\lambda_i I}{\lambda_k-\lambda_i},\quad k=1,2,3,4$$

b). Matrices con un valor propio triple y otro sencillo.

$\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2\}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$

$$A=\lambda_1 P_1+D_1+\lambda_2 P_2$$

$$P_2=\prod_{i=1}^{4,}\frac{A-\mu_i I}{\lambda_2-\mu_i}=\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^3$$

$$P_1=I-P_2=I-\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^3$$

$$D_1=(A-\lambda_1 I)\left(I-\left(\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^2\right)$$

$$D_1^2=(A-\lambda_1 I)\,\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}$$

c). Matrices con dos valores propios dobles. $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2\}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$.

$$A=\lambda_1 P_1+D_1+\lambda_2 P_2+D_2$$

$$P_1=I+(A-\lambda_1 I)^2\frac{d}{d\lambda_1}\left(\frac{I}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{A-\lambda_2 I}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)=I+\frac{(A-\lambda_1 I)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}((A-\lambda_1 I)-3(A-\lambda_2 I)$$

$$P_2=I-P_1=\frac{A-\lambda_1 I}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}(3(A-\lambda_2 I)-(A-\lambda_1 I))$$

$$D_1=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}$$

$$D_2=\frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_1 I)^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}$$

d).Matrices con dos valores propios sencillos y uno doble.

$\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$.

$$A=\lambda_1 P_1+D_1+\lambda_2 P_2+\lambda_3 P_3$$

$$P_k=\prod_{j=1}^{4}{}' \frac{A-\mu_i I}{\mu_k-\mu_i},\ k=3,4$$

$$P_1=I-P_2-P_3=I-\frac{(A-\lambda_1 I)^2(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_2-\lambda_3)}-\frac{(A-\lambda_1 I)^2(A-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_3-\lambda_2)}$$

$$D_1=\frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

A partir de estos operadores se obtiene de forma inmediata f(A),siendo f(z) una función analítica en un conjunto abierto que contiene al espectro de A,como se precisa en el teorema ,I.7.

Aplicación 2

Forma canónica de Jordan de una matriz A: expresión de la matriz de transformación.

Vamos a obtener en lo que sigue, mediante la expresión de la resolvente $R(z,A)$ dada en el teorema, I.1, la matriz Q que transforma la matriz A en su forma canónica de Jordan, J:

$$Q^{-1}AQ=J$$

La expresión para esta matriz Q, escrita por columnas, es la siguiente:

$$Q=((A-\lambda_1)^{m_1-1}[C_1]_1,\dots,[C_1]_1,\dots,(A-\lambda_k)^{m_k-1}[C_k]_1,\dots,[C_k]_1)$$

con $C_i=\frac{1}{(m_i-1)!}C^{(m_i-1}(\lambda_i)$, $C(\lambda)$ la matriz polinomial $R(\lambda,A)\pi(\lambda)$ y $[\ ]_1$ indicando la primera columna de la matriz correspondiente.

Es bien sabido que cada matriz compleja nxn es semejante a una matriz en la forma canónica de Jordan. Entonces, si A es una tal matriz, existen una matriz Q invertible y una matriz J que es suma directa de bloques de Jordan:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

tal que $A=QJQ^{-1}$.Aquí $_i$ es un valor propio de A.Entonces,si

$$q_{11}\cdots q_{1m_1} q_{21}\cdots q_{2m_2}\cdots q_{k1}\cdots q_{km_k}$$

indican las columnas de Q,y un bloque J_i de J ocupa las columnas

$$m_1+\ldots+m_{i-1}+1,\ldots,m_1+\ldots+m_{i-1}+m_i$$

tenemos

$$\begin{array}{ll} Aq_{ij+1}= {}_i q_{ij+1}+q_{ij} & j=1,\ldots,m_i-1 \\ Aq_{i1}= {}_i q_{i1} & i=1,\ldots,k \end{array}$$

y $q_{i1},\ldots,q_{im_i}$ forman una cadena de Jordan correspondiente a $_i$.

En este apartado obtenemos una forma explícita de Q en función de la resolvente y el polinomio característico de A.

Sea A una matriz compleja de orden n.Sean $\mu_1,\ldots,\mu_n$ los n valores propios de A,numerados de acuerdo con su multiplicidad algebraica.Por ejemplo,λ_1 de multiplicidad m_1 se repite m_1 veces:

$$\mu_1=\ldots=\mu_{m_1}=\lambda_1$$
$$\mu_{m_1+1}=\ldots=\mu_{m_1+m_2}=\lambda_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mu_{m_1+\ldots+m_{k-1}+1}=\ldots=\mu_{m_1+\ldots+m_k}=\lambda_k$$

Nos referimos a la resolvente de A,en la forma habitual:

$$R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$$

el polinomio característico de A:

$$\pi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$$

y el polinomio matricial:

$$C(\lambda)=R(\lambda,A)\pi(\lambda)$$

Lema 1.-

$$C(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\ \prod_{j=k+1}^{n}(\lambda-\mu_j)\prod_{j=1}^{k-1}(A-\mu_j)$$

y

$$(1) \qquad (\lambda I-A)C(\lambda)=\pi(\lambda)I.$$

Lema 2.-(Forma canónica de Jordan)

Sea A una matriz compleja de orden n.Existe una matriz Q,con $\det Q\neq 0$, tal que

$$Q^{-1}AQ=J$$

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Teorema.Sea A una matriz compleja de orden n con valores propios $\lambda_1,\dots,\lambda_k$,y cada λ_i de multiplicidad m_i,$m_1+\dots+m_k=n$.Entonces una matriz de transformación Q puede expresarse:

$$Q=((A-\lambda_1)^{m_1-1}[C_1]_1,\dots,[C_1]_1,\dots,(A-\lambda_k)^{m_k-1}[C_k]_1,\dots,[C_k]_1)$$

con $C_i=\frac{1}{(m_i-1)!}C^{(m_i-1}(\lambda_i)$,$C(\lambda)$ el polinomio matricial $R(\lambda,A)\pi(\lambda)$ y $[\ ]_1$ indicando la primera columna de la matriz correspondiente.

Demostración.-Escribimos Q por columnas

$$Q=(q_{11}\dots q_{1m_1}q_{21}\dots q_{2m_2}\dots q_{k1}\dots q_{km_k})$$

teniendo en cuenta que los valores propios de A tienen multiplicidades $m_1,\dots,m_k$.Igualando las columnas de AQ y QJ correspondientes a λ_i tenemos:

$$\begin{cases} Aq_{i1}=\lambda_i q_{i1} \\ Aq_{i2}=\lambda_i q_{i2}+q_{i1} \\ \dots\dots \\ Aq_{im_i}=\lambda_i q_{im_i}+q_{im_i-1} \end{cases} \qquad i=1,\dots,k$$

$$(2)\quad \begin{cases} (A-\lambda_i)q_{i1}=0 \\ (A-\lambda_i)q_{i2}=q_{i1} \\ \dots\dots \\ (A-\lambda_i)q_{im_i}=q_{im_i-1} \end{cases} \qquad i=1,\dots,k$$

y $q_{i1}\dots q_{im_i}$ forman una cadena de Jordan relativa a λ_i.

Se comprueba primero que los vectores $q_{i1}\dots q_{im_i}$ definidos por estas ecuaciones,son independientes:

Supongamos que existen $\alpha_{i1},\dots,\alpha_{im_i}$ con:

$$q_i=\alpha_{i1}q_{i1}+\dots+\alpha_{im_i}q_{im_i}=0,\quad i=1,\dots,k$$

Entonces $(A-\lambda_i)^s q_i=0$ $s=1,\dots,m_i-1$,pero $(A-\lambda_i)^s q_i=0$ conduce a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_{i2}q_{i1}+\alpha_{i3}q_{i2}+\dots+\alpha_{im_i}q_{im_i-1}=0 & \\ \qquad \alpha_{i3}q_{i1}+\dots+\alpha_{im_i}q_{im_i-2}=0 & i=1,\dots,k \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots & \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{im_i}q_{i1}=0 & \end{cases}$$

y de estas $\alpha_{im_i}=\dots=\alpha_{i2}=\alpha_{i1}=0$,ya que cada columna q_{ij} es no nula.Por tanto el sistema (2) define las m_i columnas de Q correspondientes a λ_i.

A continuación calculamos estas columnas.A partir de la ecuación (1),derivando se obtiene:

$$\begin{cases} (\lambda-A)C(\lambda)=\pi(\lambda)I \\ (\lambda-A)C'(\lambda)+C(\lambda)=\pi'(\lambda)I \\ \quad \dots\dots \\ (\lambda-A)C^{(m_i-1}(\lambda)+(m_i-1)C^{(m_i-2}(\lambda)=\pi^{(m_i-1}(\lambda)I \end{cases}$$

De aquí,puesto que $\pi(\lambda_i)=\pi'(\lambda_i)=\dots=\pi^{(m_i-1}(\lambda_i)=0$

$$(3)\quad \begin{cases} (A-\lambda_i)C(\lambda_i)=0 & \\ (A-\lambda_i)C'(\lambda_i)=C(\lambda_i) & i=1,\dots,k \\ \quad\dots\dots & \\ (A-\lambda_i)C^{(m_i-1}(\lambda_i)=(m_i-1)C^{(m_i-2}(\lambda_i) & \end{cases}$$

De (2) y (3) se sigue

$$q_{i1}=[C(\lambda_i)]_1\ \ q_{i2}=[C'(\lambda_i)]_1,\dots,q_{im_i}=\frac{1}{(m_i-1)!}[C^{(m_i-1}(\lambda_i)]_1$$

o bien:

$$q_{i1}=(A-\lambda_i)^{m_i-1}[C_i]_1,q_{i2}=(A-\lambda_i)^{m_i-2}[C_i]_1,\dots,q_{im_i}=[C_i]_1$$

con

$$[C_i]_1=\frac{1}{(m_i-1)!}[C^{m_i-1}(\lambda_i)]_1\quad i=1,\dots,k$$

Observación.-La elección de la primera columna de $C(\lambda_i)$ para q_{i1} es arbitraria.Es posible elegir la columna de $C(\lambda_i)$ para cada bloque $q_{i1},\dots,q_{im_i}$ con independencia de los otros.

Teorema 2.-Sea P una matriz con $\det P \neq 0$ tal que

$$PA=JP$$

y A,J como se indican en el teorema 1.Entonces P puede ser expresada:

$$P=\begin{bmatrix} [C_1]^1 \\ \vdots \\ [C_1]^1(A-\lambda_1)^{m_1-1} \\ \vdots \\ [C_k]^1 \\ \vdots \\ [C_k]^1(A-\lambda_k)^{m_k-1} \end{bmatrix}$$

donde $[\ ]^1$ indica la primera fila de la matriz.

Demostración.-El método de demostración es análogo al que se emplea en el teorema 1.

La diversidad de formas para P son también semejantes a las encontradas para Q.La elección de la primera fila es arbitraria.

Sean P,Q dos matrices tales que

$$AQ=QJ \quad y \quad PA=JP$$

de la relación entre ellas,se observa que

$PAQ=JPQ \quad y \quad PAQ=PQJ$

y

$$AQP=QJP \quad y \quad QPA=QJP$$

Por tanto

$$A(QP)=(QP)A \quad y \quad (PQ)J=J(PQ)$$

Ejemplo.

Cálculo de Q.

$$A=\begin{pmatrix}10 & 4 & 13\\ 5 & 3 & 7\\ -9 & -4 & -12\end{pmatrix}\qquad AQ=QJ$$

$$\pi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1);\qquad \lambda_1=1,\quad m_1=2;\quad \lambda_2=-1,\quad m_2=1$$

$$C(\lambda)=A^2+(\lambda-1)A+(\lambda^2-\lambda-1)I\qquad C'(\lambda)=A+(2\lambda-1)I$$

$$[C_1]_1=[C'(1)]_1=[(A+I)]_1\qquad [C_2]_1=[C(-1)]_1=[(A-I)^2]_1$$

$$Q=(q_{11}q_{12}q_{21})=((A-I)[C_1]_1[C_1]_1\ [C_2]_1)$$

$$q_{11}=(A-I)[C_1]_1=(A-I)[(A+I)]_1\quad q_{12}=[C_1]_1=[(A+I)]_1\quad q_{21}=[C_2]_1=[C(-1)]_1=[(A-I)^2]_1$$

$$q_{11}=\begin{pmatrix}9 & 4 & 13\\ 5 & 2 & 7\\ -9 & -4 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 5\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\quad q_{12}=\begin{pmatrix}11\\ 5\\ -9\end{pmatrix}\quad q_{21}=\begin{pmatrix}9 & 4 & 13\\ 5 & 2 & 7\\ -9 & -4 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 5\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\ -8\\ 16\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}2 & 11 & -16\\ 2 & 5 & -8\\ -2 & -9 & 16\end{pmatrix}\qquad AQ=QJ\qquad J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Cálculo de P.

$$PA=JP$$

$$P=\begin{pmatrix}[C_1]^1\\ [C_1]^1(A-I)\\ [C_2]^1\end{pmatrix}$$

$$[C_1]^1=(11\quad 4\quad 13)\qquad [C_1]^1(A-I)=(11\quad 4\quad 13)\begin{pmatrix}9 & 4 & 13\\ 5 & 2 & 7\\ -9 & -4 & -13\end{pmatrix}=(2\quad 0\quad 2)$$

$$[C_2]^1=(9\quad 4\quad 13)\begin{pmatrix}9 & 4 & 13\\ 5 & 2 & 7\\ -9 & -4 & -13\end{pmatrix}=(-16\quad -8\quad -24)$$

$$P=\begin{pmatrix}11 & 4 & 13\\ 2 & 0 & 2\\ -16 & -8 & -24\end{pmatrix}\qquad PA=JP$$

CAPITULO III

CAPITULO III

OPERADORES EN ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo se consideran las propiedades espectrales de los operadores cerrados,acotados y compactos definidos en un espacio de Banach X de dimensión infinita,con el propósito de estudiar la posibilidad de encontrar expresiones para la resolvente,proyecciones y nilpotencias,semejantes a las obtenidas para operadores definidos en espacios de dimensión finita.Como resultado se logra tal propósito en el caso de los operadores con resolvente racional. La expresión obtenida hace posible que la función de un operador sea análoga al caso de dimensión finita,con lo que el cáculo operacional obtenido allí resulta ser válido también en este supuesto.Como aplicación inmediata se obtienen nuevas expresiones para la solución de problemas diferenciales lineales planteados en un espacio de Banach

$$\begin{cases} x'(t)=Tx(t) \\ x(0)=x_o \end{cases}$$

cuando el operador T tiene resolvente racional,así como en sistemas lineales discretos tiempo invariante descritos por:

$$\begin{cases} x_{k+1}=Tx_k+a_k \\ x(0)=x_o \end{cases}$$

$x_k,a_k \in X, k \in N, T:X \text{---} X$,T,con resolvente racional
y en la teoría de cadenas de Markov estacionarias,entre otras.

1. Resolvente y espectro de operadores: cerrados, acotados y compactos.

En este capítulo X es un espacio de Banach complejo. T pertenecerá a C(X) o a B(X).

Resolvente y espectro de un operador cerrado.

Si $T \in C(X)$, entonces para cada $z \in \mathbb{C}$, $T-z \in C(X)$.

Definición, III.1.-Conjunto resolvente de T. Resolvente y espectro de T.

El conjunto resolvente de T, $\rho(T)$:

$$\rho(T)=\{z\in\mathbb{C}:(T-z)^{-1}\in B(X)\}$$

La resolvente de T, R(z,T):

$$R(z)=R(z,T)=(z-T)^{-1}, \text{para } z\in\rho(T).$$

R(z,T) tiene dominio X y rango dom T, para cada $z\in\rho(T)$.

Cuando no exista ambigüedad, R(z,T) se anotará por R(z).

El espectro de T, $\sigma(T)$:

$$\sigma(T) \text{ es el complementario en } \mathbb{C} \text{ de } \rho(T).$$

Lema,III.1.-R(z,T),satisface las identidades siguientes,conocidas como primera y segunda ecuaciones de la resolvente:

$$(1)\qquad R(z_1,T)-R(z_2,T)=(z_1-z_2)R(z_1,T)R(z_2,T)=(z_1-z_2)R(z_2,T)R(z_1,T)$$

$$(2)\qquad R(z,T_1)-R(z,T_2)=R(z,T_1)(T_1-T_2)R(z,T_2)=R(z,T_2)(T_1-T_2)R(z,T_1)$$

$$z_1,z_2\in\rho(T);z\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2) \text{ y } \mathrm{Dom}\ T_1=\mathrm{Dom}\ T_2$$

Lema,III.2.-Se supone $\rho(T)$ no vacio.T conmuta con $A\in B(X)$ si:

$$R(z,T)A=AR(z,T) \qquad \text{para algún } z\in\rho(T)$$

Lema,III.3.-Para cada $|z-a|\|R(a,T)\|<1$,con $a,z\in\rho(T)$:

$$R(z,T)=\sum_{k=0}^{\infty}(a-z)^kR(a,T)^{k+1}$$

y por tanto R(z,T),es holomorfa en $z\in\rho(T)$. $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y $\sigma(T)$ cerrado y

$$1<\|R(a,T)\|\operatorname{dis}(a,\sigma(T))$$

Resolvente y espectro de un operador acotado.

El espectro de $T\in B(X)$,es acotado y no vacio ya que existe:

$$\lim_{k\to\infty}\|T^k\|^{1/k}=r_\sigma(T)$$

Lema,III.4.-Sea T acotado.Si $r_\sigma(T)<|z|$,la resolvente existe y esta definida por:

$$R(z,T)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-1}T^k$$

convergente en B(X).

Corolario,III.1.-Para un operador acotado T, $\rho(T)$ y $\sigma(T)$ son no vacios y $\sigma(T)$ es compacto.En este caso:

$$r_\sigma(T)=\max\{|\lambda|,\lambda\in\sigma(T)\}$$

De que R(z,T) sea una función analítica de z cuando T es cerrado y $z\in\rho(T)$,es posible hacer uso de la teoría de funciones analíticas de variable compleja con valores en un espacio de Banach (X o B(X)).

Resolvente y espectro de un operador compacto.

La teoría de Riesz-Schauder proporciona los siguiente resultados:

Lema,III.5.-Sea $T\in B(X)$ compacto.Entonces:

a) Si $\lambda\neq 0$,no es un autovalor de T,entonces $\lambda\in\rho(T)$.

b) El espectro (T) esta formado a lo mas por un conjunto numerable de puntos de $\mathbb{C}$,que no posee punto de acumulacvión salvo el cero.

c) Cada $\lambda\in\sigma(T)\lambda\neq 0$ es un autovalor de T de multiplicidad finita.

d) $\lambda\in\sigma(T)$, $\lambda\neq 0$ si y sólo si $\overline{\lambda}\in\sigma(T^*)$.Además las multiplicidades de λ y $\overline{\lambda}$ son iguales.

Teniendo en cuenta estos resultados,si $\lambda\neq 0,\lambda\in\sigma(T)$,$R(z,T)$ puede desarrollarse en serie de Laurent en un entorno de λ:

$$R(z,T)=\sum_{-\infty}^{\infty}(z-\lambda)^nA_n$$

$$\text{con } A_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-\lambda)^{-n-1}R(z,T)dz$$

Γ:una circunferencia de centro λ y radio suficientemente pequeño para que el dominio que encierra no contenga ningún otro autovalor de T.

Por verificarse la primera ecuación de la resolvente se tiene:

$$A_nA_m=(p_m+q_n-1)A_{n+m+1}$$

$$\text{donde } p_n=1,\text{si } 0<n \text{ y } p_n=0,\text{si } n<0$$

de lo cual resulta:

$$P=A_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(z,T)dz$$

es una proyección.

Lema,III.6.-La proyección P asociada al autovalor $\lambda\in\sigma(T),\lambda\neq 0$ es compacta si T es compacto.

Para comprobarlo basta tener en cuenta que:

$$R(z,T)-z^{-1}I=z^{-1}TR(z,T)$$

con lo cual:

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{-1}TR(z,\Gamma)dz$$

y TR(z,T) es compacto.

Corolario,III.2.-PX es de dimensión finita,y:

$$R(z,T)=\frac{P}{z-\lambda}+\sum_{n=1}^{m}\frac{D^n}{(z-\lambda)^{n+1}}+R_o(z,T)$$

donde:

$$D=(T-\lambda)P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(z-\lambda)R(z,T)dz$$

D nilpotente y DP=PD.$R_o(z,T)$ holomorfa en el dominio limitado por Γ.

Lema,III.7.-Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\sigma(T)$,R(z,T) admite un desarrollo de la siguiente forma:

$$R(z,T)=\sum_{h=1}^{s}\left(\frac{P_h}{z-\lambda_h}+\sum_{j=1}^{m_h}\frac{D_h^j}{(z-\lambda_h)^{n+1}}\right)+R_o(z,T)$$

$z\in D-\sigma(T)\cap\mathbb{C}$ D dominio limitado por Γ.$R_o(z,\Gamma)$ holomorfa en D.

Sean λ_h,h=1,2,...,n,autovalores de T;P_h,D_h las proyecciones y nilpotencias asociadas.

Sea $Q_n=P_1+\ldots+P_n$ y $Q_nX=M_n$.M_n es un subespacio de X finito dimensional, invariante con respecto a T,se puede obtener en él una representación espectral de T en sentido restringido:

$$TQ_n=\sum_{h=1}^{s}(\lambda_hP_h+D_h)$$

Puesto que la sucesión de espacios M_n verifica:

$$M_1\subset M_2\ldots\subset M_n$$

la representación sugiere para un operador compacto T,la representación espectral:

$$T = \sum_{h=1}^{\infty} (\lambda_h P_h + D_h)$$

pero esto no es correcto sin hipótesis suplementarias.Como contraejemplo se tiene los operadores cuasinilpotentes.

2.Operadores con resolvente racional

Una función f de la variable compleja λ ,con valores en X,se llama función racional si es expresable en la forma:

$$f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)}$$

donde p(z) es un polinomio en z con coeficientes en X y Q(z) es un polinomio con coeficientes complejos.Se supone que p(z) y Q(z) no se anulan nunca en el mismo punto.Una función racional también admite una representación en fracciones simples.Como en análisis clásico puede demostrarse con la ayuda del teorema de Liouville que,si la función f es holomorfa en todo el plano salvo en un número finito de polos y si f(1/z) tiene un polo o una singularidad evitable en z=0,entonces f es racional.En este caso puede expresarse f(z) como suma de un polinomio y la parte singular de sus desarrollos de Laurent en los distintos polos.

Se considera a continuación operadores T para los que la resolvente R(z,T) es una función racional de z,con valores en B(X).

Si $T \in B(X)$ y $\sigma(T)$ está constituido por un número finito de puntos,cada uno siendo polo de R(z,T),entonces R(z,T) es racional,pues $\|R(z,T)\| \to 0$ cuando $z \to \infty$.No es posible que R(z) sea racional si T es cerrado pero no acotado.

Teorema,III.1.-Se supone $T \in B(X)$ y sea P(z) un polinomio escalar de grado mayor o igual a 1.Entonces P(T)=0 si sólo si existe un polinomio q(z) con coeficientes en B(X) tal que:

$$P(z)R(z,T) = q(z), \text{cuando } z \in \rho(T)$$

Demostración.

Sea $Q(z,w)$ el polinomio en z y w tal que:

$$P(z)-P(w)=(z-w)Q(z,w)$$

Si se sustituye T en lugar de w,se tiene:

$$P(z)-P(T)=Q(z,T)(z-T)$$

Si se multiplica por $R(z,T)$,se obtiene:

$$P(z)R(z,T)-P(T)R(z,T)=Q(z,T)$$

Se supone que $P(T)=0$.Se obtiene el resultado con $q(z)=Q(z,T)$.
Por otra parte,si se verifica la hipótesis,resulta:

$$P(T)R(z,T)=q(z)-Q(z,T),\text{y de aquí:}$$

$$\|q(z)-Q(z,T)\|<\|P(T)\|.\|R(z,T)\|$$

Como $\|R(z,T)\|\longrightarrow 0$,cuando $z\longrightarrow\infty$,se concluye por el teorema de Liouville que $q(z)-Q(z,T)$ es un polinomio en z que es identicamente nulo.Se sigue que $P(T)R(z,T)=0$,y de aquí

$$P(T)=P(T)R(z,T)(z-T)=0$$

Teorema,III.2.-Se supone $T\epsilon B(X)$.Entonces existe un polinomio escalar $p(z)$ de grado mayor o igual que 1,tal que $P(T)=0$,si y sólo si $R(z,T)$ es racional.

Este teorema respecto del anterior,asegura además que si $p(z)$ o $q(z)$ se anulan para $z=z_o\epsilon\sigma(T)$,ambos se anulan simultaneamente y la multiplicidad del cero z_o es la misma para ambos,de tal forma que:

$$R(z,T)=\frac{q_o(z)}{P_o(z)}\text{ si } z\epsilon\rho(T)$$

siendo $P_o(z)$ y $q_o(z)$ los polinomios obtenidos a partir de $q(z)$ y $P(z)$por eliminación de los factores que originan los ceros comunes en $\rho(T)$.

Por otra parte los ceros de $P_o(z)$ forman el conjunto $\sigma(T)$.Puede ocurrir que existan ceros comunes a $P_o(z)$ y $q_o(z)$ que no esten en $\rho(T)$.Sin embargo la multiplicidad de un tal cero en $P_o(z)$ debe de ser mayor que para $q_o(z)$, puesto que en caso contrario,z_o no pertenecerá a $\rho(T)$.Para cada uno de tales ceros,dividimos $P_o(z)$ y $q_o(z)$ por $(z-z_o)^n$,siendo n la multiplicidad de z_o,como cero de $q_o(z)$.

Sean $P_1(z)$ y $q_1(z)$ los polinomios que resultan de $P_o(z)$ y $q_o(z)$ después de eliminar tales factores.Entonces $P_1(z)$ y $q_1(z)$ no tienen ningún cero en común,$\sigma(T)$ es precisamente el conjunto de ceros de $P_1(z)$ y:

$$R(z,T)=\frac{q_1(z)}{P_1(z)}$$

Así pues si $R(z,T)$ es racional con distintos polos $\lambda_1,\dots,\lambda_s$,de orden de multiplicidad $m_1,\dots,m_s$,de todos los polinomios $P(z)$ de grado mayor o igual que 1, tales que $P(T)=0$,existe uno único de grado mínimo con coeficiente 1 en el término de mayor grado,y éste es:

$$(z-\lambda_1)^{m_1}\dots(z-\lambda_s)^{m_s}$$

Este polinomio se llama polinomio minimal asociado con T.

Teorema,III,3.-Sea un operador con resolvente racional y $\sigma(T)=\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$,el espectro de T.Entonces la resolvente $R(z,T)$ definida para $z\in\rho(T)$ y con valores en $B(X)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$R(z,T)=(z-T)^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}\qquad \prod_{1}^{0}=I\qquad \mu_j\in\sigma(T)\qquad z\in\rho(T)$$

Demostración.

La anotación utilizada para los autovalores responde al criterio ya utilizado en el primer capítulo,es decir:

$$\mu_1=\dots=\mu_{m_1}=\lambda_1$$

$$\mu_{m_1+1}=\dots=\mu_{m_1+m_2}=\lambda_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mu_{n-m_s+1}=\dots=\mu_n=\lambda_s$$

Teniendo esto en cuenta,y según el teorema anterior,el polinomio minimal de T será:

$$P(T)=\prod_{j=1}^{n}(T-\mu_j)=0$$

Así la demostración es completamente análoga a la del teorema,I.1,sin mas que hacer uso de la propiedad de existencia de este polinomio minimal en lugar del teorema de Hamilton-Cayley,que nos permitía concluir allí que:

$$\prod_{j=1}^{n}(T-\mu_j)=0$$

La forma explícita obtenida para R(z,T) en función de T y sus autovalores,permite hacer un desarrollo semejante al del caso de espacios de dimensión finita en lo que se refiere a la descomposición espectral de T y las distintas formas obtenidas allí,para f(T).

Teorema,III.4.-Representación espectral de R(z,T),T∈B(X) con resolvente racional.

En las mismas condiciones del teorema anterior,se tiene:

$$R(z,T)=(zI-T)^{-1}=\sum_{h=1}^{s}\left(\frac{P_h}{z-\lambda_h}+\sum_{k=1}^{m_h-1}\frac{D_h^k}{(z-\lambda_h)^{k+1}}\right)$$

siendo para cada P_h una proyección y D_h un operador nilpotente pertenecientes a B(X),que verifican las siguientes propiedades:

a) $P_iP_j=P_jP_i=\delta_{ij}P_i$ $(i,j=1,2,\dots,s)$

b) $D_iD_j=D_jD_i=0$ $(i\neq j)$

c) $P_iD_j=D_jP_i=\delta_{ij}D_i$

d) $D_h^{m_h}=0$ $(h=1,2,\dots,s)$

Demostración.

Puede encontrarse en 16.

Como consecuencia de los teoremas,III.3 y III.4 que proporcionan una caracterización de la resolvente totalmente similar a la de operadores en espacios de dimensión finita,se logran los resultados relativos a la descomposición espectral de T,que a continuación se enuncian en forma de teoremas.Las demostraciones de estos son análogas a las realizadas en los teoremas,I.3,I.4,I.5 y I.7 por lo que se ha prescindido de ellas.

Descomposición espectral de un operador T∈B(X) con resolvente racional. Expresión analítica de proyecciones y nilpotencias.

Teorema,III.5.-Con las mismas hiótesis del teorema anterior se tiene:

$$T=\sum_{h=1}^{s} \lambda_h P_h + D_h$$

P_h, D_h verificando:

$$\sum_{h=1}^{s} P_h = I$$

$$P_h T = T P_h \qquad h=(1,2,\dots,s)$$

$$D_h T = T D_h$$

Además se tienen para P_h y D_h las siguientes expresiones:

$$P_h = I + \frac{(T-\lambda_h)^{m_h}}{(m_h-1)!} \frac{d^{m_h-1}}{d\lambda_h^{m_h-1}} \sum_{k=m_h+1}^{n} \frac{\prod_{j=m_h+1}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=m_h+1}^{k} (\lambda_h-\mu_j)}$$

$$D_h = T-\lambda_h + \frac{(T-\lambda_h)^{m_h}}{(m_h-2)!} \frac{d^{m_h-2}}{d\lambda_h^{m_h-2}} \Big(\sum_{k=m_h+1}^{n} \frac{\prod_{j=m_h+1}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=m_h+1}^{k} (\lambda_h-\mu_j)} \Big)$$

Representación espectral de f(T).

Teorema,III.6.-Sea f analfica en Ω. I y $\sigma(T)\subset\Omega$,siendo T un operadore lineal con resolvente racional,definido en un espacio de Banach complejo X con espectro $\sigma(T)$,como en los casos anteriores.Entonces:

$$f(T) = \sum_{h=1}^{s} \Big(f(\lambda_h) P_h + \sum_{k=1}^{m_h-1} \frac{f^{(k}(\lambda_h)}{k!} D_h^k \Big)$$

con $$D_h^p = (T-\lambda_h)^p + \frac{(T-\lambda_h)^{m_h}}{(m_h-p-1)!} \frac{d^{m_h-p-1}}{d\lambda_h^{m_h-p-1}} \Big(\sum_{k=m_h+1}^{n} \frac{\prod_{j=m_h+1}^{k-1} (T-\mu_j)}{\prod_{j=m_h+1}^{k} (\lambda_h-\mu_j)} \Big)$$

Representación intrínseca de f(T).

Teorema,III.7.-En las mismas hipótesis del teorema anterior,se tiene la siguiente expresión para f(T):

$$f(T)=\sum_{k=1}^{n}\ \overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)\ \prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)$$

con

$$\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}dz$$

Demostración.

Por definición:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)R(z,T)dz$$

siendo Γ una curva cerrada simple de Jordan que encierra en su interior a $\sigma(T)$.Teniendo en cuenta la expresión racional de $R(z,T)$,se obtiene un resultado totalmente similar al del teorema,I.10 para operadores lineales definidos en un espacio de Banach de dimensión finita.El cálculo de $\overset{k}{\underset{j=1}{*}} f(\mu_j)$ es también el mismo del caso finito.

Aplicaciones

Ejemplo,1.

Se considera el espacio de Banach de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado $I=[a,b]$ de R,con valores complejos:$\mathbb{B}=C([a,b]\subset R,\mathbb{C})$,y sea T el operador lineal acotado de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{B}$,definido por:

$$\forall x\in\mathbb{B},\forall t\in I,Tx(t)=\int_a^b\sum_{i=1}^{n}a_i(t)a_i(s)x(s)ds$$

Los valores propios y las funciones propias de T,verifican la ecuación:

$$(1)\qquad Tx(t)=\lambda x(t)$$

Las soluciones de esta ecuación,se elejirán entre las funciones de $\mathbb{B}$,de la forma:

$$x(t)=C_1a_1(t)+\ldots+C_na_n(t),C_i\in C,i=1,2,\ldots,n$$

que sustituidas en (1), teniendo en cuenta la linealidad de T, y anotando:

$$a_{ij}=a_{ji}=\int_a^b a_i(s)a_j(s)ds; a_{ij}\in\mathbb{C}, i,j=1,2,\dots,n;$$

se sigue:

$$a_1(t)(C_1a_{11}+\dots+C_na_{1n})+\dots+a_n(t)(C_1a_{n1}+\dots+C_na_{nn})=\lambda(C_1a_1(t)+\dots+C_na_n(t))$$

es decir

$$AC=\lambda C \qquad A=(a_{ij}), C=(C_i); i,j=1,2,\dots,n$$

A matriz simétrica y C matriz columna, por lo que los valores propios de T, coinciden con los valores propios de A, y por tanto verifican la ecuación polinómica

$$\det(A-\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}; m_1+\dots+m_s=n$$

Por otra parte T satisface la siguiente ecuación:

$$(\alpha_nT^n+\dots+\alpha_1T+\alpha_o)x(t)=0, \forall x\in\mathbb{B}, \alpha_i\in\mathbb{C}, i=0,1,\dots,n$$

por lo que existe un polinomio anulador de grado menor o igual que n. Dicho polinomio tiene por raices los valores propios de A, λ_i, con multiplicidad menor o igual que m_i, $i=1,2,\dots,s$. De que T se expresa mediante n elementos independientes, permite asegurar que dicho polinomio es de grado n, y la multiplicidad de λ_i, es m_i. De lo cual se obtiene que T es de resolvente racional.

$$(zI-T)^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}, \mu_j\in\sigma(T)$$

$\sigma(T)=(\mu_1,\dots,\mu_n)=(\lambda_1,\dots\lambda_1,\dots,\lambda_s,\dots\lambda_s), \lambda_i$ de multiplicidad m_i

Además T admite la siguiente descomposición espectral:

$$T=\sum_{i=1}^{s}\lambda_iP_i, \qquad \sum_{i=1}^{s}P_i=I$$

Donde cada P_i es de la forma:

$$P_ix(t)=\int_a^b\sum_{j=1}^{n}p_{ij}a_j(s)a_j(s)x(s)ds, p_{ij}\in\mathbb{C}, i=1,2,\dots,s$$

Comentario.

El apartado 1 de este capítulo es un breve resumen del estudio de las propiedades de la resolvente y el espectro de operadores cerrados,acotados y compactos definidos en un espacio de Banach,que hace Kato en [16].En el apartado 2 se caracterizan los operadores con resolvente racional siguiendo la línea de Taylor en [23].Los teoremas,III.1 y III.2 corresponden a Taylor[23],el III.4 a Kato[16] y en el III.3 se generaliza el teorema,I.1 del primer capítulo y se logra una forma explícita para la resolvente de un operador con resolvente racional,semejante a la obtenida para operadores definidos en espacios de dimensión finita.Este resultado hace posible de nuevo la obtención de expresiones analíticas para los operadores proyección y nilpotente como se pone de manifiesto en los teoremas,III.5 y III.6.Finalmente en el teorema,III.7 se expresa f(T) de forma semejante a como se hizo en el teorema,I.9.

CAPITULO IV

CAPITULO IV

OPERADORES NORMALES EN ESPACIOS DE HILBERT

Los operadores T lineales,normales compactos,definidos en un espacio de Hilbert H,poseen un espectro formado por un conjunto numerable de autovalores $\{\lambda_n\}$,cada uno de multiplicidad finita,siendo $\{\lambda_n\}$ una sucesión infinitesimal.Con esta característica del espectro $\sigma(T)$,cabía esperar que la resolvente $R(z,T)$,se pudiera expresar de forma parecida a la obtenida para operadores definidos en espacios de dimensión finita.Lograr tal expresión,así como las correspondientes a las proyecciones,en la descomposición espectral de T y a una función analítica de T,son los objetivos de este capítulo.

Se comienza recordando las propiedades fundamentales de los operadores normales.

1.Operadores normales

Sea H un espacio de Hilbert complejo y B(H),el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados sobre el espacio de Hilbert H.

Definición,IV.1.-Un operador $T\in B(H)$ se dice que es normal si conmuta con su adjunto:

$$TT^{*}=T^{*}T$$

En el siguiente teorema se resumen las propiedades mas importantes de los operadores normales.

Teorema,IV,1.-Sea $T\in B(H)$

i) T es normal si y sólo si

$$\forall x\in H \qquad \|Tx\|=\|T^{*}x\|$$

ii) Si T es normal,entonces

$$N(T)=N(T^{*})=R(T)$$

iii) Si T es normal y $Tx=\alpha x$ para algún $x\in H$ y algún $\alpha\in\mathbb{C}$ entonces

$$T^{*}x=\bar{\alpha}x$$

es decir el espectro del adjunto T^{*},es el conjunto conjugado del espectro de T.

v) Si T es normal y si α,β son autovalores distintos de T entonces los autoespacios correspondientes son ortoganales.

v) $$\|T^{n}\|=\|T\|^{n},n\in N$$

En particular esta última propiedad implica que el radio espectral de T,sprT coincide con la norma de T

$$sprT=\lim\|T^{n}\|^{1/n}=\|T\|$$

y como consecuencia,un operador normal cuasinilpotente es cero.

Teorema,IV,2.-La resolvente $R(z,T)$ de $T\in B(H)$ normal,es un operador normal.

Demostración.

Como T y T^{*} conmutan,se tiene:

$$(z-T)(z'-T^{*})=(z'-T^{*})(z-T)$$

Si z no es autovalor de T y z' no es autovalor de T^{*},existen inversos y se tiene:

$$R(z',T^{*})R(z,T)=R(z,T)R(z',T^{*})$$

y como

$$R(z,T^*)=R^*(\bar{z},T) \text{ para } z\epsilon\sigma(T)$$

puesto que:

$$<(z-T)x,y>=<x,(\bar{z}-T^*)y>$$

se obtiene

$$R^*(z,T)R(z,T)=R(\bar{z},T^*)R(z,T)=R(z,T)R(\bar{z},T^*)=R(z,T)R^*(z,T)$$

Teorema,IV,3.-Sea $T\epsilon B(H)$ normal y $\lambda\neq 0$ un autovalor de T.

a) Las proyecciones P_λ y $P^*_{\bar{\lambda}}$ conmutan y por tanto P_λ es un operador normal.

b) Los operadores cuasinilpotentes D y D^* también conmutan y D es normal.

Demostración.

Teniendo en cuenta las definiciones de P_λ y $P^*_{\bar{\lambda}}$ y el teorema,III.3 resulta inmediato comprobar que

$$P_\lambda P^*_\lambda=P^*_\lambda P_\lambda$$

Sea ahora $T\epsilon B(H)$ un operador compacto.

La teoría de Riesz-Schauder nos proporciona los siguientes resultados en relación con el espectro de $T,\sigma(T)$:

a) Si $\lambda\neq 0$ no es un autovalor de T,entonces λ esta´en el conjunto resolvente de $T,\sigma(T)$.

b) El espectro $\sigma(T)$ está formado por un conjunto numerable de puntos del plano complejo que no poseen punto de acumulación salvo posiblemente $\lambda=0$.

c) Cada número distinto de cero perteneciente a $\sigma(T)$ es un autovalor de T de multiplicidad finita.

Como consecuencia de estas propiedades,se puede concluir para un operador normal compacto T,lo siguiente:

El espectro de $T,\sigma(T)$ es un conjunto numerable de autovalores $\{\lambda_n\}$ de multiplicidad finita,salvo posiblemente el cero,y $\{\lambda_n\}$ es una sucesión infinitesimal.

$$\sigma(T)=\{\lambda_n : n\epsilon N\}\cup\{0\}$$

Teorema,IV,4.-Descomposición espectral de operadores normales compactos.

Si $T\in B(H)$ es normal y compacto se tiene la siguiente representación espectral

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n P_n \qquad P_n=P_n^* \qquad \dim P_n<\infty$$

en el sentido de la convergencia en norma.

Las proyecciones P_n forman una familia ortogonal completa junto con la proyección ortogonal P_o sobre el espacio anulador $N(T)$.

Demostración.

Sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$ los autovalores distintos de cero ordenados de mayor a menor módulo,y sean $P_1,P_2,\ldots,P_n,\ldots$las proyecciones asociadas.

El radio espectral de T será $|\lambda_1|$ y como T es normal

$$\|T\|=|\lambda_1|$$

que por ser T normal son ortogonales y $\dim P_n H$ ∞,puesto que T es compacto y cada autovalor λ_n es de multiplicidad finita.

Además $D_n=0,n\in N$ por ser T normal.

Se elige $Q_n=P_1+\ldots+P_n$,entonces

$$TQ_n=\lambda_1 P_1+\ldots+\lambda_n P_n$$

y como Q_n conmuta con $T,T(I-Q_n)$ es también un operador normal y tiene los autovalores $\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\ldots,\lambda_{n+p},\ldots$ y posiblemente el cero.

Pero,por ser normal:

$$\|T(I-Q_n)\|=spr(T(I-Q_n))=|\lambda_{n+1}|\dashrightarrow 0,\text{cuando } n\dashrightarrow\infty$$

esto asegura que:

$$\|T-(\lambda_1 P_1+\ldots+\lambda_n P_n)\|\dashrightarrow 0,\text{cuando } n\dashrightarrow\infty$$

y el teorema queda demostrado.

2.Resolvente de un operador normal compacto

Teorema,IV.5.-Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T\in B(H)$ normal compacto.El espectro de $T,\sigma(T)$ consiste en una sucesión infinitesimal $\{\lambda_i\}$,en la que cada término λ_i es no nulo,y tiene multiplicidad finita,y el valor cero, y la resolvente $R(z,T)$,tiene la siguiente reprersentación:

$$R(z,T)=(zI-T)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\mu_j)} \quad ,z\in\rho(T)$$

siendo la convergencia en norma.Además,la convergencia es uniforme sobre compactos contenidos en $\rho(T)$.

Demostración.

Se hará en dos etapas.En la primera se prueba la convergencia de la serie y en la segunda,que la función definida por esta serie coincide con $R(z,T)$.

Primera etapa.

Lema,IV.1.-Si $T\in B(H)$ es un operador normal compacto y $\sigma(T)$ su espectro, entonces

$$\|T\|=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$$

Lema,IV.2.-Si S es un operador continuo definido en H y P es un polinomio, entonces:

$$\sigma(P(S))=P(\sigma(S))=\{P(\lambda):\lambda\in\sigma(S)\}$$

Proposición,IV.1.-Con las hipótesis del teorema:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\mu_j)}$$

converge en norma,y la convergencia es uniforme en cada compacto $K\subset\rho(T)$.

Demostración.

La función que a cada $z\in K$ le hace corresponder su distancia al espectro de T,es continua y por ser K compacto tiene un mínimo que es mayor que cero por ser $\sigma(T)$ cerrado.Sea δ este mínimo.

Para $z\in K$ y $n\in N$ se tiene para cada λ_j:

$$\delta\leqslant d(z,\sigma(T))\leqslant|z-\lambda_j|$$

y así:

$$\left\| \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)} \right\| \leqslant \frac{\left\| \prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)\right\|}{\delta^n}$$

aplicando los lemas 1 y 2 para calcular esta norma,resulta

$$\delta^{-n}\max\{|z|:z\in\sigma(\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j))\}=\delta^{-n}\max\{\prod_{j=1}^{n-1}|w-\lambda_j| : w\in\sigma(T)\}=$$

$$=\delta^{-n}\max\{\prod_{j=1}^{n-1}|\lambda_i-\lambda_j| : i\in N\}\cup\{\prod_{j=1}^{n-1}|\lambda_j|$$

Sea $\varepsilon\in R^+$,como $\{\lambda_n\}$ es una sucesión infinitesimal,existe $p\in N$,tal que $|\lambda_n|\leqslant\varepsilon$para todo $p\leqslant n$.Se considera pues $p<n$;entonces,si se elige

$$p<n\leqslant i$$

$$\prod_{j=1}^{n-1}|\lambda_i-\lambda_j|=(\prod_{j=1}^{p-1}|\lambda_i-\lambda_j|)(\prod_{j=p}^{n-1}|\lambda_i-\lambda_j|)<$$

$$\leqslant 2^{p-1}\|T\|^{p-1}2^{n-p}\varepsilon^{n-p}=2^{n-1}\|T\|^{p-1}\varepsilon^{n-p}$$

De forma análoga

$$\prod_{j=1}^{n-1}|\lambda_j|=(\prod_{j=1}^{p-1}|\lambda_j|)(\prod_{j=p}^{n-1}|\lambda_j|)\ \|T\|^{p-1}\varepsilon^{n-p}$$

Por tanto,anotando por T_n al término general de la serie

$$\|T_n\|<\delta^{-n}2^{n-1}\|T\|^{p-1}\varepsilon^{n-p}=2^{-1}\varepsilon^{-p}\|T\|^{p-1}(2\varepsilon\,\delta^{-1})^n$$

y tomando $\varepsilon=\delta/3$ por ejemplo,se obtiene

$$\|T_n\|\leqslant 2^{-1}\varepsilon^{-p}\|T\|^{p-1}(2/3)^n \qquad p\leqslant n$$

Por tanto la serie está mayorada por la serie geométrica $M\Sigma(2/3)^n$ para $p<n$ y por el criterio de Weierstrass converge en norma,uniformemente en cada compacto $K\subset\rho(T)$.

Segunda etapa.

Lema,IV.3.-Si $\mu_1,\dots,\mu_i$ son números complejos cualesquiera y $z\in\mathbb{C}$ es otro número distinto de $\mu_1,\dots,\mu_i$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\mu_j)} = \frac{1}{z-\mu_i}, \quad \text{en donde} \quad \prod_{j=1}^{0} = I$$

Demostración.

$$\sum_{k=1}^{i} \frac{\prod_{j=1}^{k-1}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{i-1}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{i}(z-\mu_j)} + \frac{\prod_{j=1}^{i-2}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{i-1}(z-\mu_j)} + \dots + \frac{1}{z-\mu_1}$$

Asociando los dos primeros términos:

$$\frac{\prod_{j=1}^{i-2}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{i-1}(z-\mu_j)}\left(1+\frac{\mu_i-\mu_j}{z-\mu_i}\right) = \frac{1}{z-\mu_i}\prod_{j=1}^{i-2}\frac{(\mu_i-\mu_j)}{(z-\mu_j)}$$

Asociando con el tercer sumando este resultado:

$$\frac{1}{z-\mu_i}\prod_{j=1}^{i-2}\frac{(\mu_i-\mu_j)}{(z-\mu_j)} + \frac{\prod_{j=1}^{i-3}(\mu_i-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{i-2}(z-\mu_j)} = \frac{1}{z-\mu_i}\prod_{j=1}^{i-3}\frac{\mu_i-\mu_j}{z-\mu_j}$$

y por recurrencia se obtiene que la suma de (i-1) términos:

$$\frac{1}{z-\mu_i}\,\frac{\mu_i-\mu_1}{z-\mu_1}$$

y la de los i términos:

$$\frac{1}{z-\mu_1} + \frac{1}{z-\mu_i}\,\frac{\mu_i-\mu_1}{z-\mu_1} = \frac{1}{z-\mu_i}$$

Lema, IV.4.-Si $\mu_1,\dots,\mu_i$ son i números complejos arbitrarios y $z\in\mathbb{C}$ es otro número distinto de ellos, $z\neq 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{i}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(-\mu_j)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\mu_j)}=\frac{1}{z}-\frac{\prod_{j=1}^{i}(-\mu_j)}{z\prod_{j=1}^{i}(z-\mu_j)}$$

Demostración.

Si se aplica el lema, IV.3 a i+1 números con $\mu_{i+1}=0$.

Proposición, IV.2.-Sea S la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n$$

a) Si $x\in H$ es tal que $Tx=\lambda_i x$, entonces:

$$Sx=\frac{x}{z-\lambda_i}$$

b) Si $x\in H$ con $Tx=0$, entonces

$$Sx=\frac{x}{z}$$

Demostración.

a) $$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}T_nx=\sum_{n=1}^{i}T_nx=\left(\sum_{n=1}^{i}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda_i-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}\right)x=\frac{x}{z-\lambda_i}$$

teniendo en cuenta el lema, IV.3.

b) $Sx=\sum_{n=1}^{\infty}T_nx$

Las sumas parciales de esta serie son de la forma:

$$\left(\sum_{n=1}^{i}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}\right)x=\frac{x}{z}-\frac{\prod_{j=1}^{i}(-\lambda_j)}{z\prod_{j=1}^{i}(z-\lambda_j)}\,x$$

de acuerdo con el lema, IV.3.

Cuando $i\to\infty$ el segundo término tiende a cero puesto que λ_j es una sucesión infinitesimal y $z\neq 0$ y por tanto:

$$Sx=\frac{x}{z}$$

como se quería probar.

Demostración del teorema.

Según la proposición,IV.1 la serie converge en norma,uniformemente sobre compactos contenidos en el conjunto resolvente $\rho(T)$.

Por otra parte

$$H=\overset{i}{\bigoplus} H_i \oplus H_o$$

y se puede elegir una base asociada a la descomposición en subespacios invariantes:

$\{e_o,e_1,\dots,e_i,\dots\}$con $Te_i=\lambda_i e_i$, $i\in N$ y $Te_o=0$ de forma que

$$x=\sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j$$

y por la proposicíñ,IV.2

$$Sx=\frac{x_o}{z}e_o+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{z-\lambda_j}e_j$$

Por tanto

$$(z-T)Sx=(z-T)\left(\frac{x_o}{z}e_o+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{z-\lambda_j}e_j\right)=x_oe_o+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{z-\lambda_j}(z-\lambda_j)e_j=x$$

De forma análoga

$$S(z-T)x=x$$

de lo que se concluye

$$S=R(z,T)=(z-T)^{-1}$$

3.Proyecciones de un operador $T\in B(H)$ normal y compacto.

Teorema,IV.6.-Con las hipótesis del teorema anterior,si P_h es la proyección asociada a λ_h se tiene:

$$P_h=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{\infty}\frac{T-\lambda_i}{\lambda_h-\lambda_i}$$

Demostración.

Se supone $h=1$, y por definición:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} R(z,T)\,dz$$

y sustituyendo $R(z,T)$ por su serie, eligiendo Γ_1 de forma que esté contenida en un compacto K contenido en el conjunto resolvente de T, para asegurar la convergencia uniforme de la serie cuando z varía en Γ_1, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}\,dz$$

y la serie del segundo miembro converge en norma. Por otra parte, por el teorema de los residuos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)} = \frac{1}{\prod_{j=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)} \quad \text{si } 2<n; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{dz}{z-\lambda_1}=1$$

puesto que Γ_1 sólo rodea el autovalor λ_1.

Asi resulta

$$P_i = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=2}^{n}(\lambda_1-\lambda_j)} = \prod_{i=2}^{\infty}\frac{T-\lambda_i}{\lambda_1-\lambda_i}$$

En general para h arbitrario se consigue la expresión deseada reordenando los autovalores de forma que λ_h ocupe el primer lugar.

4. Función de un operador T normal compacto.

Teorema, IV.7.- Sea f una función analítica definida en un dominio D del plano complejo que contiene todos los autovalores λ_j de T. Entonces f(T) puede expresarse en la forma:

$$f(T) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathop{*}_{h=1}^{n} f(\lambda_h)\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)$$

con

$$\mathop{*}_{h=1}^{n} f(\lambda_h) = \sum_{h=1}^{n}\frac{f(\lambda_h)}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_h-\lambda_j)}$$

Demostración.

En la definición de Dunford-Taylor de $f(T)$,se elige Γ de forma que encierre al conjunto de autovalores,sin pasar por ninguno de ellos,y esté contenida en un compacto K contenido a su vez en $\rho(T)$.(Esto es posible por ser $\sigma(T)$ acotado).Así se puede integrar término a término la serie que representa a la resolvente,y se tendrá asegurada la convergencia en norma de la serie resultante:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)R(z,T)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}dz=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}dz$$

Aplicando el teorema de los residuos para calcular cada una de estas integrales,se obtiene,teniendo en cuenta que   encierra a todos los autovalores:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)}dz=\sum_{h=1}^{n}\frac{f(\lambda_h)}{\prod_{j=1}^{n\prime}(\lambda_h-\lambda_j)}=\mathop{*}\limits_{h=1}^{n} f(\lambda_h)$$

y así:

$$f(T)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathop{*}\limits_{h=1}^{n} f(\lambda_h)\prod_{j=1}^{n-1}(T-\lambda_j)$$

Observación.

La expresión de $f(T)$ que proporciona este último resultado es una generalización de la obtenida en el teorema,I. 9, del primer capítulo para la función de una matriz,por ello se ha considerado conveniente utilizar la misma anotación que allí.

Los resultados obtenidos para operadores normales compactos ponen de manifiesto la similitud de su estructura con la de operadores definidos en espacios de dimensión finita.

BIBLIOGRAFIA

1. **Alhfors,L.V.**:Complex Analysis.3ª ed.McGraw-Hill,New York (1979).

2. **Bellmann,R.**:Introduction to Matrix Analysis.
2ª ed.McGraw-Hill,New York (1970).

3. **Bellmann,R.**:Methods of Nonlinear Analysis.
Vol.II.Academic Press,New York (1973).

4. **Coddington,E.A. and Levinson,N.**:Theory of Ordinary Differential Equations.
McGraw-Hill,New York (1955).

5. **Deimling,K.**:Ordinary Differential Equations in Banach Spaces.
Springer-Verlag,New York (1977).

6. **Dunford,N. and Schwartz,J.T.**:
Linear Operators.Part I:General Theory.Interscience,New York (1958).

7. **Dunford,N. and Schwartz,J.T.**:
Linear Operators.Part II:Spectral Theory.Interscience,Nee York (1963).

8. **Chatelin,F.**:Spectral Aproximation of Linear Operators.
Academic Press,New York (1983).

9. **Chatelin,F.**:Valeurs propes de matrices.Masson,Paris (1988).

10. **Erugin,N.P.**:Linear Systems of Ordinary Differential Equations.
Academic Press,New York (1966).

11. **Gantmacher,F.R.**:Theory of Matrices.Vol I,II.Chelsea,New York (1959).

12. **Gohberg,I Goldberg,S.**:Basic Operator Theory.Birkhäuser,Boston (1980).

13. **Guelfond,A.O.**:Calcul des differences finies.Dunod,Paris (1963).

14. **Guzman,M.**:Ecuaciones diferenciales ordinarias.Alhambra,Madrid (1975).

15. **Hale,J.K.**:Ordinary Differential Equations.Interscience,New York (1969).

16. **Kato,T.**:Perturbation Theory for Linear Operators.
Springer Verlag,New York (1976).

17. **Petroskii,I.G.**:Ordinary Differential Equations.
Prentice Hall,Englewood Cliffs,New Jersey (1966).

18. **Rodríguez Cano,J.J.**:Reolución de ecuaciones funcionales planteadas mediante operadores lineales.Tesis Doctoral.Univ. Sevilla (1970).

19. **Rodríguez Cano,J.J.**:Convolución y funciones analíticas de una variable matricial.V Jornadas Matemáticas Hispano Lusas.Aveiro.Portugal (1978).

20. **Rodríguez Cano,J.J.**:Convolución y funciones analíticas de un número finito de operadores lineales conmutativos de $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$.
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones.
Valldoreix,Barcelona (1979).

21. **Rudin,W.**:Functional Analysis.McGraw-Hill,New York (1973).

22. **Sconuarcec,Ch.**:Algebre Spectral.Publisud,Toulouse (1987).

23. **Taylor,A.**:Introduction to Functional Analysis.John Wiley,New York (1958).

24. **Valdivia,M.**:Analisis Matemático III.UNED,Madrid (1976).

25. **Yosida,K.**:Functional Analysis.3ª ed.Springer Verlag,New York (1971).

26. **Yosida,K.**:Equations differentielles et intégrales.Dunod,París (1970).