Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

Algunas Cuestiones Sobre Las JB*-Algebras: Centroide, Centroide Extendido y Zócalo.

Armando Reyes Villena Muñoz

Universidad de Granada

1990

UNIVERSIDAD DE GRANADA

COMISION DE DOCTORADO

Referencia 88

ACTA DE GRADO DE DOCTOR

DOCTORANDO D. ARMANDO REYES VILLENA MUÑOZ

LICENCIADO EN CIENCIAS (MATEMATICAS) por la Universidad de GRANADA

PROGRAMA DE DOCTORADO ANALISIS MATEMATICO

DEPARTAMENTO RESPONSABLE ANALISIS MATEMATICO

TITULO DE LA TESIS "ALGUNAS CUESTIONES SOBRE LAS JB*-ALGEBRAS: CENTROIDE, CENTROIDE EXTENDIDO Y ZOCALO"

DIRECTOR/ES Dr. D. ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

TUTOR Dr. D. ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

TRIBUNAL

PRESIDENTE Dr. D. PERE MENAL BRUFAL

VOCALES Dr. D. JUAN MARTINEZ MORENO

Dr. D. ANTONIO FERNANDEZ LOPEZ

Dr. D. PERE ARA BERTRAN

SECRETARIO Dr. D. Fco. JAVIER PEREZ GONZALEZ

Reunido el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. ARMANDO REYES VILLENA MUÑOZ éste procede al acto de mantenimiento y defensa de la Tesis Doctoral.

Terminado dicho acto y contestadas las objecciones formuladas por el Tribunal, éste le calificó APTO CUM LAUDE POR UNANIMIDAD

Granada 19 de Diciembre de 1990

EL PRESIDENTE,

Fdo.: Pere Menal Brufal

El Secretario del Tribunal,

Fdo.: Fco. Javier Pérez González

EL VOCAL,

Fdo.: Juan Martínez Moreno

EL VOCAL,

Fdo.: Antonio Fernández López

EL VOCAL,

Fdo.: Pere Ara Bertran

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor D. Angel Rodríguez Palacios, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Armando Reyes Villena Muñoz el día 19 de Diciembre de 1990, ante el tribunal formado por los siguientes profesores: D. Pere Menal Brufal (Presidente), D. Juan Martínez Moreno, D. Pere Ara Bertran, D. Antonio Fernández López (Vocales) y D. Javier Pérez González (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto "cum laude" (por unanimidad).

A mis Padres y a Mari Angeles

CONTENIDO

INTRODUCCION

No se puede negar que el título de esta memoria, aunque aparatoso, ofrece, sin embargo, la ventaja de revelar por sí solo el contenido de la misma. Y antes de precisar dicho contenido quizás sea conveniente aclarar un poco (la claridad total se conseguirá, si acaso, al final de la memoria) el significado de los términos utilizados ya en el título.

Nos parece justo y obligado advertir al lector de que el ambiente en el que se desenvuelve esta memoria es el ambiente de las JB*-álgebras (y JB*-álgebras no conmutativas), y éste es el momento de recordar, al menos brevemente, qué es lo que significan estos términos (y seguramente el lector comprenda porqué nos vimos atraidos por este ambiente).

En este ambiente, digamos "JB*", se aunan dos grandes y, permítaseme la expresión, apasionantes mundos.

Por una parte se encuentra la teoría de las *C*-álgebras*, iniciada en 1943 por Gelfand y Naimark al caracterizar mediante sencillos axiomas intrínsecos las subálgebras cerradas y autoadjuntas de las álgebras de operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert complejo. Estas no resultaron ser otras que las álgebras de Banach complejas A dotadas con una involución $*$ (aplicación conjugado-lineal multiplicativa e involutiva de A en sí misma) verificando:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (\forall\ a \in A).$$

Por otra parte, a esta teoría puramente analítica, se une "armoniósamente" (ya se precisará más tarde cómo) la teoría de las álgebras de Jordan.

Las álgebras de Jordan tienen su origen en los trabajos de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner **[34]** cuyo propósito era formular una teoría matemática abstracta que axiomatizara el formalismo de la Mecánica Cuántica. Una tal álgebra no es más que un espacio vectorial A dotado de un "producto" conmutativo (notado clásicamente por "·") que verifica la identidad *"de Jordan"*

$$a^2\cdot(a\cdot b) = a\cdot(a^2\cdot b) \quad (\forall\ a,\ b \in A).$$

La teoría de las álgebras de Jordan pronto se convirtió en una sólida rama del Algebra, pero hubo que esperar hasta los años

60 para ver estas álgebras estudiadas sistemáticamente desde el punto de vista del Análisis Funcional.

Desde entonces ha sido desarrollada una teoría estrechamente ligada a la teoría de las C^*-álgebras, y que concierne a los análogos infinito-dimensionales de las álgebras originales de Jordan, von Neumann y Wigner. Estas álgebras son hoy llamadas *JB-álgebras*. La teoría tiene su origen en el estudio de las "subálgebras de Jordan" cerradas de operadores lineales continuos y autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo (las llamadas *JC-álgebras*) llevado a cabo por Topping [59] y Størmer [58] en 1965 desde diferentes puntos de vista. En el intento de caracterizar las JC-álgebras por axiomas intrínsecos, a la manera de las C^*-álgebras, E. M. Alfsen, F. W. Shultz y E. Størmer iniciaron el estudio de las JB-álgebras en los años 1976-78 [2], aunque algunas aproximaciones al tema habían sido ya hechas tempranamente por von Neumann y Segal.

Es inmediato comprobar que en una JC-álgebra A se verifica la desigualdad $\|a\|^2 \leq \|a^2+b^2\|$ $\forall$ $a, b \in A$, y es justamente esta desigualdad la que se elige para la axiomatización de las JC-álgebras (aunque después resultó que esta axiomatización caracterizaba una clase un "poquitín" más amplia que la clase de las JC-álgebras: las JB-álgebras). Concretamente, una JB-álgebra A es un álgebra de Jordan real normada (o sea, que A posee una norma "bien avenida" con el producto, en el sentido de que $\|a\cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$) completa cuya norma satisface adicionalmente la condición

$$\|a\|^2 \leq \|a^2+b^2\| \quad (\forall\ a,\ b \in A).$$

I. Kaplansky presentó en Julio de 1976 ante la "Edinburgh Mathematical Society" la versión compleja de las JB-álgebras, las llamadas JB*-álgebras. Estas surgieron en el intento de disponer de un tipo de álgebras de Jordan que jugase el papel análogo al desempeñado por las C*-álgebras.

Si A es un álgebra asociativa (cuyo producto notamos por yuxtaposición) sobre un cuerpo de característica distinta de dos, entonces A^+ (el álgebra obtenida al añadir al espacio vectorial de A el nuevo producto $a\cdot b := 1/2(ab+ba)$) es un álgebra de Jordan. Si A es ahora una C*-álgebra A^+ sigue siendo un álgebra (ahora de Jordan) compleja normada completa con una involución. Lo que ya no es cierto es que se cumpla la identidad (C*):

$$\|a^*\cdot a\| = \|a\| \quad (\forall\ a \in A).$$

El axioma "estelar" de la C*-álgebra A puede, sin embargo, expresarse en términos de su "producto de Jordan" (producto de A^+), pues equivale a

$$\|aa^*a\| = \|a\|^3 \quad (\forall\ a \in A),$$

y $aa^{\star}a$ no es otra cosa que $U_a(a^{\star})$, donde U denota el operador $U_a(b) := 2a\cdot(a\cdot b)-a^2\cdot b \quad \forall\ a,\ b \in A$.

Surgen así las JB*-álgebras como aquellas álgebras de Jordan complejas normadas completas dotadas con una involución * verificando la identidad

$$\|U_a(a^{\star})\| = \|a\|^3 \quad (\forall\ a \in A).$$

Wright en 1977 [61] comprobó que la correspondencia

$$A \longmapsto \mathrm{Sim}(A) \ (= \{a \in A : a^{\star} = a\})$$

establecía una biyección entre la clase de las JB*-álgebras y la clase de las JB-álgebras.

Aparte del interés intrínseco que estas álgebras presentan, como análogo Jordan de las C*-álgebras o como "complexificación" de las JB-álgebras, también resultan tener aplicación en la teoría de dominios simétricos acotados. Concretamente (ver [60] y [25]):

si A es una JB-álgebra y X un subespacio cerrado suyo tal que*

$$(x\cdot y^{\star})\cdot z + x\cdot(y^{\star}\cdot z) - (x\cdot z)\cdot y^{\star} \in X \quad (\forall\ x,\ y \in X),$$

entonces la bola unidad cerrada de X es un dominio simétrico acotado, y todos los dominios simétricos acotados de los espacios de Banach complejos son (biholomórficamente equivalentes a) uno de éstos.

En el intento de unificar la teoría de las C*-álgebras y la teoría de las JB*-álgebras, R. Payá, J. Pérez y A. Rodríguez introdujeron en 1982 [43] el concepto de *JB*-álgebra no conmutativa*. Esta nueva clase de álgebras son una generalización no asociativa de las C*-álgebras que incluye a las JB*-álgebras y, como A. Rodríguez comprobó en 1983, esta nueva clase constituye en realidad la más amplia generalización no asociativa de las C*-álgebras. La concreta definición de este tipo de álgebras no es nada sofisticada. Con la intención de unificar las teorías asociativa y Jordan se puede mantener la identidad de Jordan y debilitar el axioma de conmutatividad por la "*flexibilidad*"

$$a(ba) = (ab)a$$

obteniéndose así las llamadas *álgebras de Jordan no conmutativas*. Una JB*-álgebra no conmutativa no es más que un álgebra de Jordan no conmutativa compleja normada completa A dotada con una involución $*$ verificando

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \quad (\forall\ a \in A),$$

(donde el operador U sobre A^* no es otra cosa que el U-operador del álgebra de Jordan A^+).

Precisamente hemos dedicado el primer Capítulo de la memoria a establecer la precisa definición de todos estos conceptos (entre otros), al mismo tiempo que hemos tratado de ejemplificar al máximo todos ellos. Destaquemos también que, aunque nuestro objetivo han sido las JB*-álgebras, hemos preferido trabajar en el ambiente de las JB*-álgebras no conmutativas puesto que ésto no supone un gran esfuerzo adicional y de ésta manera trabajamos en en el ambiente unificador de las teorías "C*" y "JB*".

Una vez descrito el ambiente en el que nos desenvolveremos parece llegado el momento de aclarar el contenido del trabajo.

El *centroide* $\Gamma(A)$ de un álgebra no necesariamente asociativa A (y por tal podemos entender, por ahora, las ya conocidas álgebras asociativas o las ya también presentadas álgebras de Jordan, conmutativas o no) es, por definición, el conjunto de los operadores lineales f de A en sí misma verificando la propiedad

$$f(ab) = af(b) = f(a)b \quad (\forall\ a,\ b \in A).$$

$\Gamma(A)$ es, con la suma natural y la composición por producto, un álgebra asociativa con elemento unidad que, evidentemente, "contiene" al cuerpo base de A. Además nuestra álgebra A puede verse como un "álgebra sobre el anillo" $\Gamma(A)$. Si el lector es reacio a la consideración de álgebras sobre anillos que no sean cuerpos no debe preocuparse, pues cuando el álgebra A es *simple* (no es de producto cero y carece de *ideales* -subespacios invariantes por la multiplicación por cualquier lado- no triviales) $\Gamma(A)$ es un cuerpo. Precisamente las álgebras cuyo centroide se reduce al cuerpo base se conocen con el nombre de *álgebras centrales*, y si éstas son además simples se llamarán *álgebras centrales simples*. Cada álgebra simple puede considerarse como un álgebra central simple sobre su centroide y, al menos para las variedades más familiares de álgebras, las álgebras centrales simples finito-dimensionales presentan la ventaja de ser "fácilmente" clasificables (véase [33] y [41]).

Así pues el centroide puede considerarse como una potente herramienta para la clasificación de las álgebras, al menos de las simples, y no podemos despreciar su interés en ambientes algebraicos menos "afortunados" que el de la simplicidad.

En el caso de que A sea una C*-álgebra el centroide de A tiene una estructura natural de C*-álgebra conmutativa. En este sentido Dauns y Hofmann nos ofrecen la siguiente descripción del centroide de una C*-álgebra:

Teorema de Dauns-Hofmann.

Para toda C-álgebra A existe un "*-isomorfismo" natural entre la C*-álgebra $\Gamma(A)$ y la C*-álgebra $C_b(\Pi_A)$, de todas las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre el "espectro primitivo" Π_A de A.*

El término "*-isomorfismo" deberá entenderse en adelante como isomorfismo de toda la estructura algebraica en juego: estructura de álgebra e involución (lo que fuerza automáticamente el carácter isométrico).

Justamente en esta línea se encuadra el segundo Capítulo de nuestra memoria. La utilidad de éste célebre teorema de Dauns y Hofmann en la teoría de las C^*-álgebras prácticamente nos hace desear un análogo en nuestro nuevo ambiente "JB*", conmutativo o no conmutativo. Como quiera que A. Rodríguez ya había observado que para una JB^*-álgebra no conmutativa su centroide, con la norma de operadores e involución natural, era un C^*-álgebra, este deseo no parecía muy descabellado. Sin embargo la traslación del resultado de Dauns y Hofmann al ámbito de las JB^*-álgebras pasa inevitablemente por establecer qué cabe entender por "espectro primitivo" en este nuevo contexto.

En 1981 L. Hogben y K. McCrimmon [30] introdujeron el concepto de *corazón de un ideal interno maximal-modular* de un álgebra de Jordan como el apropiado análogo del concepto de ideal primitivo de las álgebras asociativas (ver Definiciones 1.12, 1.14 y 1.17). Este concepto se extiende adecuadamente al ambiente de las álgebras de Jordan no conmutativas (Definición 1.21). Lamentablemente, en general, cuando un álgebra asociativa A se ve como un álgebra de Jordan no conmutativa, los corazones de sus ideales internos maximales-modulares no tienen porqué coincidir con sus ideales primitivos en el sentido asociativo. Afortunadamente si A es una C^*-álgebra este problema no se presenta (Proposición 3.26).

Notaremos por $Cor(A)$ al conjunto de los corazones del álgebra de Jordan (conmutativa o no) A y dicho conjunto se considerará, a semejanza con la famosa topología de Jacobson sobre el espectro primitivo, dotado con la topología cuyos conjuntos cerrados vienen dados por

$$\{J \in \mathrm{Cor}(A) : I \subset J\}$$

(para I ideal de A).

Desde un punto de vista puramente algebraico, para un álgebra de Jordan no conmutativa A, $\mathrm{Cor}(A)$ aparece como un apropiado sucedáneo de "espectro primitivo". No hay que olvidar tampoco que nuestras JB*-álgebras no conmutativas están dotadas, a semejanza con las C*-álgebras, de un marcado carácter "geométrico" (carácter del que se ha pretendido dejar constancia a lo largo de toda la memoria). Carácter que puede verse ilustrado por el hecho de que para una C*-álgebra A el concepto, puramente algebraico, de ideal primitivo equivalga al concepto, puramente geométrico, de *"M-ideal primitivo"* (del espacio de Banach subyacente). Recordemos que un L-sumando de un espacio de Banach X es un subespacio cerrado J de X de manera que $X = J \oplus I$ para conveniente subespacio cerrado I de X y tal que

$\|x\| = \|x_J\| + \|x_I\| \ \ \forall\, x \in X$. Un *M-ideal* de X es, por definición, un subespacio cerrado J de X tal que su polar J^o es un L-sumando del dual topológico X' de X, y si J es además el mayor M-ideal contenido en el núcleo de un punto extremo de la bola unidad de X' recibe el nombre de M-ideal primitivo. Es sabido que los M-ideales del espacio de Banach subyacente a una JB*-algebra no conmutativa son exactamente los ideales cerrados de la misma. Cabría pensar, por tanto, que el conjunto de los M-ideales primitivos de nuestra JB*-álgebra no conmutativa A, *Prim(A)*, dotado con la llamada topología estructural, está también llamado a desempeñar en este caso concreto el papel de "espectro primitivo".

Podríamos imaginarnos así dos traslaciones del teorema clásico de Dauns-Hofmann a nuestro ambiente "JB*", que vendrían a establecer que:

> *el centroide de una JB*-álgebra no conmutativa es "idéntico" al álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre Cor(A) (o bien sobre Prim(A)).*

Casualmente se dispone de un teorema del tipo Dauns-Hofmann en el ambiente puramente analítico de los espacios de Banach, que puede establecerse como sigue:

Teorema de Alfsen-Effros.

Para cada M-ideal primitivo J *de un espacio de Banach complejo* X *y cada elemento* f *en el centralizador de* X, *existe un único número complejo* $\tilde{f}(J)$ *tal que* $f(x) - \tilde{f}(J)x \in J$ *para todo* x *de* X, *y la aplicación* $f \longmapsto \tilde{f}$ *establece un* $*$*-isomorfismo del centralizador,* $Z(X)$, *de* X *sobre la* C^**-álgebra* $C_b(Prim(X))$ *de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre* $Prim(X)$ *dotado con la topología estructural.*

El lector no debe alarmarse por la aparición del nuevo "engendro" $Z(X)$ (aunque no se haya provisto de la definición, que puede consultarse en la Definición 2.20) pues ya nos ocupamos en el Teorema 2.26 de la memoria de demostrar que:

para una JB^**-álgebra no conmutativa* A, *el centralizador* $Z(A)$ *coincide con el centroide* $\Gamma(A)$.

Resultado ya demostrado por S. Dineen y R. M. Timoney en 1988 **[18]** en el caso conmutativo.

Notaremos por $Cor(A)$ al conjunto de los corazones del álgebra de Jordan (conmutativa o no) A y dicho conjunto se *si A es una JB*-álgebra no conmutativa, entonces las C*-álgebras $\Gamma(A)$ y $C_b(Prim(A))$ son *-isomorfas.*

Resultado que ya constituye una extensión del teorema clásico para C*-álgebras si se recuerda que Prim(A) coincide justamente con el espectro primitivo (en el sentido algebraico) cuando A es una C*-álgebra. Preferimos, sin embargo, disponer de un teorema, digamos, "algebraico", es decir preferiríamos poner $C_b(\mathrm{Cor}(A))$ donde antes poníamos $C_b(\mathrm{Prim}(A))$. Desafortunadamente no sabemos si para una JB*-álgebra (conmutativa o no) A, es

$$Prim(A) = Cor(A),$$

cuestión, no cabe duda, que muy sugestiva y razonable. Sin embargo, pese al mucho esfuerzo derrochado en el intento, no hemos sido capaces de comprobarlo (nos atreveríamos a asegurar que se trata de un duro problema).

Pero no nos lamentemos demasiado porque lo que sí hemos sido capaces de demostrar (no sin esfuerzo, dicho sea de paso) es que:

Proposición (2.20).

Para una JB-álgebra no conmutativa A tenemos que:*

$$Prim(A) \subset Cor(A).$$

Lo cual nos bastó para obtener la deseada versión algebraica para nuestras JB*-álgebras del teorema de Dauns-Hofmann. Eso sí, el camino seguido para esta obtención no pudo ser muy directo, pero, qué duda cabe, de que son justamente estas dificultades las que hacen atractivo (y hasta "divertido") un determinado problema.

Pero no dejemos al lector sin conocer este resultado:

Teorema (2.31).

Para una JB-álgebra no conmutativa A, las C*-álgebras $\Gamma(A)$ y $C_b(Cor(A))$ son *-isomorfas. Concretamente, para cada J en $Cor(A)$ y cada f en $\Gamma(A)$, existe un único número complejo $\tilde{f}(J)$ tal que $f(a) - \tilde{f}(J)a \in J$ para todo a en A, y la aplicación $f \longmapsto \tilde{f}$ es un *-isomorfismo de $\Gamma(A)$ sobre la C*-álgebra $C_b(Cor(A))$ de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre $Cor(A)$.*

El concepto de *centroide extendido*, objeto de estudio del tercer Capítulo, fue introducido en 1969 por W. S. Martindale III [36,37] para los anillos asociativos primos y posteriormente generalizado al ambiente de las álgebras no asociativas primas (el producto de dos ideales no nulos es no nulo) e incluso semiprimas (álgebras que carecen de ideales de cuadrado cero) por el propio Martindale y otros.

Los *centralizadores esencialmente definidos* de un álgebra semiprima A son, por definición, los operadores lineales f definidos sobre un ideal esencial de A (ideal cuya intersección con cualquier ideal no cero de A es no cero), llamado el dominio de f y denotado dom(f), con valores en A y verificando la propiedad algebraica siguiente:

$$f(ab) = af(b) \quad \text{y} \quad f(ba) = f(b)a \quad \forall\ a \in A,\ \forall\ b \in \mathrm{dom}(f).$$

En el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos de A se definen de manera natural operaciones suma y producto, y decimos que un centralizador esencialmente definido f extiende a otro g si $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$ y $g(a) = f(a)\ \ \forall\ a \in \mathrm{dom}(g)$. Podemos también definir una relación, que resulta ser de equivalencia, sobre el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos del álgebra semiprima A por

$$g \simeq f \Leftrightarrow g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}.$$

Clásicamente el *centroide extendido* de A se ha considerado como el conjunto cociente de los centralizadores esencialmente definidos de A bajo esta relación de equivalencia dotado con las operaciones inducidas. Sin embargo, para nuestras necesidades analíticas, hemos preferido evitar el paso a cociente mediante el procedimiento ideado por M. Cabrera y A. Rodríguez [15] de sustituir cada clase de equivalencia por el único *centralizador esencialmente definido "maximal"* en ella contenido (donde la maximalidad, como es obvio, se entenderá en el sentido de que no existan centralizadores esencialmente definidos que extiendan estrictamente a éste).

Nótese que el centroide extendido de un álgebra semiprima A contiene como subanillo al centroide de A: el anillo de los *centralizadores "totalmente" definidos* de A.

La utilidad del concepto de centroide extendido es realmente incuestionable. El propio Martindale concibió ya dicho concepto con el propósito de caracterizar los anillos primos verificando una identidad polinómica generalizada, y también lo utilizó en el estudio de los isomorfismos de Lie de los anillos asociativos primos.

El concepto de centroide extendido adquiere una especial relevancia en presencia de primidad (a la manera en que la simplicidad dotaba de importancia al centroide). En tal caso el centroide extendido es un cuerpo que extiende al cuerpo base y el hecho de que se reduzca al cuerpo base, en cuyo caso el álgebra se llama centralmente cerrada, tiene muchas e interesantes consecuencias. Destaquemos, por estar enmarcada en nuestro ambiente Jordan, la siguiente consecuencia [16] (si la benevolencia del lector nos permite utilizar los conceptos de no degeneración y zócalo, que serán introducidos pocas páginas más adelante):

Si A es un álgebra de Jordan no conmutativa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$ no degenerada prima centralmente cerrada y con zócalo no cero, entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones:

(i) *A es de división, en el sentido de que todo elemento no nulo del álgebra es "invertible" (véase la Pag. 111 para el concepto de invertibilidad).*

(ii) *A es cuadrática, en el sentido de que*

$$\forall\, a \in A \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : a^2 + \alpha a + \beta = 0.$$

(iii) *A es conmutativa.*

(iv) *A es una mutación de un álgebra asociativa, en el sentido de que existe un producto asociativo $\square$ sobre A y un λ en $\mathbb{K}$ tal que*

$$ab = \lambda a \square b + (1-\lambda) b \square a \quad \forall\, a, b \in A.$$

Destaquemos también que "agrandando" el cuerpo base (como se puede imaginar, al centroide extendido) y el álgebra, a la llamada *clausura central*, cada álgebra prima se convierte en un álgebra prima centralmente cerrada.

Como ya comentábamos al referirnos al concepto de centroide, parece de una crucial importancia el disponer de una conveniente descripción del centroide extendido que permita dilucidar la eventual cerrabilidad central del álgebra. En este marco se encuadra el teorema de P. Ara [4]:

Teorema de Ara.

El centroide extendido de una C^*-álgebra A es $*$-isomorfo al límite algebraico directo $\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$, donde $\mathfrak{F}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espectro primitivo de A y $C(\Omega)$ denota el álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas sobre Ω.

Y, como consecuencia de esta descripción se obtiene el notable hecho de que las C^*-álgebras primas son centralmente cerradas.

Precisamente el tercer Capítulo de nuestra memoria está dedicado a la obtención de una extensión del teorema de Ara al ámbito de las JB*-álgebras. El enunciado de una tal extensión debiera de estar ya en la mente del lector, incluso en estas primeras páginas de la memoria:

Teorema.

El centroide extendido de una JB-algebra (no conmutativa) A es "idéntico" al límite algebraico directo $\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$, donde ahora $\mathfrak{F}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio de los corazones de los ideales internos maximales-modulares de A.*

Nuestro primer paso para la demostración consistirá en transferir la involución de la JB*-álgebra A a su centroide extendido. Y aunque éste no llega a ser una C*-álgebra como sucedia con el centroide, sí que posee "buenas" propiedades, que después de todo son justamente las que nos van a permitir obtener la descripción esperada. Las "buenas" propiedades del centroide extendido de una JB*-álgebra A se resumen diciendo que $C(A)$ es un anillo von Neumann regular dotado de una involución $*$ verificando

$$\sum_{j=1}^{n} f_j^* f_j = 0 \Rightarrow f_j = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, n,$$

y todas estas propiedades se codifican bajo el nombre de *anillo *-regular con involución definida positiva* (Lema 3.6).

Para un álgebra racional R con unidad e involución definida positiva definimos un orden parcial cuyo cono positivo viene dado por los elementos de la forma $\sum r_j^* r_j$, donde $\{r_j\}$ es un subconjunto finito de R. Los elementos acotados de R se definen como aquellos r de R tales que $r^*r \leq n$ para algún natural n. El conjunto de todos estos elementos acotados se denota por R_b y para r en R_b se define:

$$|r|_b^2 := \inf\{q \in \mathbb{Q} : r^*r \leq q\}.$$

Según observó D. Handelman en [H] $|\cdot|_b$ es una seminorma de álgebra sobre R_b que verifica $|r^*r|_b = |r|_b^2$ $(\forall\ r \in R)$.

Imitando la estrategia seguida por Ara para las C*-álgebras invocamos el siguiente resultado [28]:

Teorema de Handelman.

*Todo anillo R *-regular con involución definida positiva es el anillo clásico de cocientes de su anillo de elementos acotados R_b.*

El cual nos permite reducir nuestro problema de descripción de $C(A)$ a la descripción de su anillo de elementos acotados $C(A)_b$.

El primer avance en esa dirección lo logramos en la Proposición 3.14, estableciendo que:

para una JB-álgebra no conmutativa* $C(A)_b$ *es *-isomorfo al límite algebraico directo* $\lim_{I\in\mathfrak{J}} \Gamma(I)$, *donde* $\mathfrak{J}$ *denota la familia de los ideales esenciales cerrados de* A.

Destaquemos que a las dificultades presentes en esta cuestión ya en la teoría de C*-álgebras se ha sumado nuestra ausencia de asociatividad, lo cual ha requerido la utilización de técnicas de bidualización.

La descripción del centroide de una JB*-álgebra no conmutativa realizada en el segundo Capítulo vendría ahora en nuestra ayuda permitiéndonos, después de algún esfuerzo, comprobar (Lema 3.17 junto con Proposición 3.14) que:

para una JB-álgebra no conmutativa* A, $C(A)_b$ *es *-isomorfo al límite algebraico directo* $\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega)$, *siendo* $\mathfrak{F}$ *la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico* $Cor(A)$ *y* $C_b(\Omega)$ *denota el álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre* Ω.

La demostración de nuestro Teorema se concluye ahora fácilmente sin más que aplicar el teorema de Handelman antes citado.

Por otra parte, esa especial manera de ver el centroide extendido que hemos adoptado, como centralizadores esencialmente definidos maximales, nos permite describir de una forma particularmente precisa la parte acotada del centroide extendido de una JB*-álgebra no conmutativa. Concretamente:

Proposición (3.12).

Un elemento f del centroide extendido $C(A)$ de una JB-álgebra no conmutativa A es un elemento acotado de $C(A)$ si, y sólo si, su dominio $dom(f)$ es un ideal cerrado.*

Además, $|\cdot|_b$ es una norma sobre $C(A)_b$. Más concretamente: para f en $C(A)_b$ $|f|_b$ coincide con la norma de f visto como un elemento de la C-álgebra $\Gamma(dom(f))$.*

La esencia de nuestra prueba del anterior resultado reside en una idea que (asociativamente) Ara trabaja en **[5; Proposición 2.2]**.

Observemos que si, para un espacio topológico S, notamos por $\mathfrak{C}(S)$ al álgebra de las funciones complejo-valuadas y continuas sobre algún abierto denso de S que no puedan ser extendidas estrictamente, se tiene que que:

para el espacio topológico S, $\lim\limits_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$ (donde $\mathfrak{F}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio *topológico* S) *es "idéntico" al álgebra* $\mathfrak{C}(S)$.

Esta particular materialización de $\lim\limits_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$ nos permite hacer una muy precisa descripción de la identificación entre $C(A)_b$ y $\lim\limits_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega)$. Concretamente:

Proposición (3.25).

Sea A *una JB*-álgebra no conmutativa. Entonces para cada* f *en* $C(A)_b$ *y cada* J *en* $Cor(A)$ *con* $dom(f) \not\subset J$ *existe un único número complejo* $f^{\sim}(J)$ *tal que* $f(a) - f^{\sim}(J)a \in J$ *para todo* a *en* $dom(f)$. *La función complejo-valuada* $f^{\sim}$ *definida en* $\{J \in Cor(A) : dom(f) \not\subset J\}$ *está acotada y pertenece a* $\mathfrak{C}(Cor(A))$. *Además, la aplicación* $f \longmapsto f^{\sim}$ *es un *-isomorfismo de* $C(A)_b$ *sobre el álgebra de las funciones acotadas de* $\mathfrak{C}(Cor(A))$.

Parece razonable imaginar entonces que el *-isomorfismo entre $C(A)$ y $\mathfrak{C}(Cor(A))$ vencría dado de la siguiente manera:

para cada f *en el centroide extendido* $C(A)$ *de la JB*-álgebra no conmutativa* A *y cada* J *en* $Cor(A)$ *con* $dom(f) \subset J$ *existe un único número complejo* $f^{\sim}(J)$ *tal que* $f(a) - f^{\sim}(J)a \in J \ \forall\ a \in dom(f)$. *La función complejo-valuada*

$f^{\sim}$ *definida en* $\{J \in Cor(A) : dom(f) \not\subset J\}$ *pertenece a* $\mathfrak{C}(Cor(A))$ *y la aplicacion* $f \mapsto f^{\sim}$ *establece un* $\star$*-isomorfismo entre* $C(A)$ *y* $\mathfrak{C}(Cor(A))$.

Sin embargo, hemos sido incapaces de comprobar ésto.

LLegó el momento de tratar la última de las cuestiones prometidas sobre las JB*-álgebras: el *zócalo*. Esto lo hacemos en los dos últimos Capítulos.

El zócalo de un álgebra asociativa semiprima fue introducido en 1942 por J. Dieudonne [17] como la suma de sus *ideales izquierdos "minimales"*.

La traslación natural de la semiprimidad asociativa al ambiente Jordan no conmutativo es la llamada *no degeneración*:

$$U_a \neq 0 \quad \text{para cualquier} \quad a \neq 0.$$

Y el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada A se define como la suma de sus *ideales internos Jébiles* (subespacios I de A tales que $U_I(A) \subset I$) *"minimales"* y fue introducido por J. M. Osborn y M. L. Racine en 1979 [40]. Finalmente A. Fernández y A. Rodríguez [23] definen el zócalo de un álgebra de Jordan no conmutativa no degenerada A como el zócalo del álgebra de Jordan no degenerada A^+.

En el cuarto Capítulo se ha pretendido exponer la historia del concepto así como dar una pormenorizada relación de los teoremas de clasificación que, a lo largo de la historia, han sido obtenidos con este concepto. Finalizamos el Capítulo con un resultado de L. Rico que utilizamos como piedra angular en el último Capítulo:

Teorema de Rico.

Salvo isomorfismos topológicos, las álgebras de Jordan no degeneradas complejas normadas completas primas con zócalo no cero y "minimalidad de la topología de la norma" (cualquier norma de álgebra que minore la norma de A es, de hecho, equivalente a ésta) son las siguientes:

(i) *El álgebra de Jordan $M_3^8(\mathbb{C})$ (véanse los Ejemplos 1.11(vi) y 1.27(iii)).*

(ii) *Las álgebras $J(X, <\cdot,\cdot>)$ donde $(X, <\cdot,\cdot>)$ es un espacio de Banach complejo autodual regular simétrico con $dim(X) \geq 2$ (véanse el Ejemplo 1.11(v) y las Definiciones 4.6 y 4.12).*

(iii) *Las subálgebras de Jordan cerradas de $BL(X)$ contenidas en $L_Y(X)$ y que contienen a $FL_Y(X)$, donde $(X, Y, <\cdot,\cdot>)$ es un apareamiento de Banach complejo regular (véase la Definición 4.6).*

(iv) *Las subálgebras de Jordan cerradas de $BL(X)$ contenidas en $Sim(L_X(X))$ y que contienen a $Sim(FL_X(X))$, donde $(X, <\cdot,\cdot>)$ es un espacio de Banach complejo autodual regular (véanse las Definiciones 4.6 y 4.12).*

En el Capítulo V mostramos el funcionamiento del zócalo en nuestro ambiente "JB*". Nuestro deseo fue obtener una descripción "total" de las JB*-álgebras primas con zócalo no cero, en el sentido, perfectamente imaginable, de que deseabamos describir su producto, su involución y su norma. Como obviamente toda JB*-álgebra es no degenerada y se sabe tener minimalidad de la topología de la norma, una lectura "imaginativa" del teorema de Rico nos muestra que esta descripción no puede ser otra que la siguiente:

Teorema (una parte de **5.5**).

Salvo $\star$*-isomorfismos (automáticamente isométricos), las JB*-álgebras primas con zócalo no cero son las siguientes:*

(i) *El álgebra* $M_3^8(\mathbb{C})$ *con su estructura esencialmente única de JB*-álgebra.*

(ii) *Las JB*-álgebras simples cuadráticas cuya descripción era bien conocida (véase el Capítulo V, 5.2, Situación (ii))*

(iii) *Las subálgebras de Jordan cerradas y autoadjuntas de la C*-álgebra* $BL(H)$, *de los operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert complejo* H, *y que contienen a los operadores compactos* $KL(H)$.

(iv) *Las subálgebras de Jordan cerradas y autoadjuntas de* $BL(H)$ *contenidas en* $\{ F \in BL(H) : V^{-1}F^{\star}V = F \}$ *y que*

contienen a $\{ F \in KL(H) : V^{-1}F \bullet V = F \}$, *donde* H *es un espacio de Hilbert complejo y* V *es una conjugación o una anticonjugación de* H.

Una aproximación a la estructura de nuestra JB*-álgebra la podemos conseguir por aplicación del teorema de Rico.

Si tenemos la fortuna de que nuestra JB*-álgebra se encuadra en el primero de los tipos del teorema de Rico, ésta responde evidentemente a nuestro primer apartado.

Si seguimos siendo afortunados y nuestra JB*-álgebra se encuadra ahora en el segundo de los apartados de Rico, el álgebra es entonces simple y cuadrática, en cuyo caso ya se ocuparon R. Payá, J. Pérez y A. Rodríguez de su descripción **[44]**.

Armémonos ahora de valor y paciencia porque:

si la fortuna nos abandona y caemos en el tercero de los apartados nos vemos obligados, en primer lugar a comprobar que el, en principio, Jordan-isomorfismo de anillos $F \longmapsto F^*$ de $\overline{\mathrm{FL}_Y(X)}$ en sí mismo es en realidad un antiautomorfismo involutivo de $\overline{\mathrm{FL}_Y(X)}$. En segundo lugar aplicamos "convenientemente" el teorema de los isomorfismos de Jacobson a dicho antiautomorfismo y, finalmente, analizando al máximo la repercusión sobre el apareamiento de la propiedad "estelar" de la norma de nuestra JB*-álgebra, conseguimos dotar al espacio X de un producto escalar que lo convierte en un espacio de Hilbert y encuadrar la

JB*-álgebra en nuestro tercer apartado.

Y si tenemos la desgracia de caer en el cuarto apartado, deberemos hacer una habilidosa aplicación de un teorema de Martindale (si el álgebra es infinito-dimensional) para conseguir extender el Jordan-homomorfismo de anillos $^* : \mathrm{Sim}(FL_X(X)) \longrightarrow FL_X(X)$ a un antiautomorfismo involutivo conjugado-lineal de $FL_X(X)$, y después, otra vez, de utilizar convenientemente el teorema de los isomorfismos de Jacobson y usar y abusar de la propiedad "estelar" obtenemos que la JB*-álgebra se encuentra en el cuarto de los apartados de nuestro teorema. Si el álgebra es en cambio de dimensión finita también se comprueba, ya fácilmente, que se encueatra en una de las situaciones descritas por el Teorema.

La descripción de las JB*-álgebras no conmutativa primas con zócalo no cero fue ya fácil. Por el teorema de A. Cobalea y A. Fernández, ya mencionado al referirnos al centroide extendido, pero esta vez en su versión para el ambiente normado, nuestra álgebra A estaría en una de las siguientes situaciones:

(i) A es simple y cuadrática y, por tanto ya descrita de manera plenamente satisfactoria por R. Payá, J. Pérez y A. Rodríguez.

(ii) A es conmutativa y en consecuencia ya descrita por el anterior Teorema.

(iii) A es la λ-mutación $B^{(\lambda)}$ (con λ en $\mathbb{C}$ y $\lambda\neq 1/2$) de un álgebra de Banach no conmutativa compleja prima con zócalo no cero. Gracias a un teorema de A. Rodríguez comprobamos que el álgebra B es, en realidad, una C^*-álgebra no conmutativa y $0\leq\lambda\leq 1$.

Finalmente no quiero dejar pasar la ocasión de dejar constancia de ese profundo agradecimiento que debo al Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios por su abnegada, paciente y desinteresada dirección, fruto de la cual esta memoria fue concebida, gestada y ahora a visto la luz.

Agradezco también a los restantes compañeros y amigos del Departamento de Análisis Matemático el estímulo y ayuda recibidos.

También quisiera dejar constancia y agradecer esa gran labor ejercida por mi familia, soportando pacientemente la elaboración de esta memoria.

CAPITULO I

DEFINICIONES BASICAS Y EJEMPLOS

Definición 1.1.

Por un *álgebra* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (que a lo largo de todo el trabajo se supondrá de característica cero) entenderemos un espacio vectorial A sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, junto con una aplicación bilineal

$$(a,b)\longmapsto ab$$

de $A \times A$ en A a la que llamaremos producto de A.

Un álgebra A sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en la que A sea, de hecho, un espacio normado con respecto a una norma $\|\cdot\|$ recibirá el nombre de *álgebra normada* si dicha norma verifica la propiedad

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

para cualesquiera a y b de A. Si el espacio normado subyacente al álgebra normada A es de Banach, A recibirá el nombre de *álgebra normada completa*, reservándonos el calificativo de *álgebra de Banach* para aquellas álgebras normadas y completas que sean además asociativas.

Podríamos hablar también de *álgebras normables*, entendiéndose por tales, aquellas álgebras A sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tales que su espacio vectorial subyacente es un espacio normado y el producto del álgebra es continuo con dicha norma. Es inmediato comprobar que conveniente múltiplo positivo de la norma de partida hace de A un álgebra normada.

Definición 1.2.

Sean A y B álgebras sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Un *homomorfismo* de A en B es una aplicación lineal f de A en B tal que

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

para cualesquiera a y b de A. Un *isomorfismo* de A sobre B es un homomorfismo biyectivo de A sobre B. Las álgebras A y B se dicen *isomorfas* si existe un isomorfismo de A sobre B.

En el caso de que adicionalmente las álgebras A y B sean normadas añadiremos al vocablo algebraico de homomorfismo o isomorfismo el vocablo analítico de continuo, topológico o isométrico, en un sentido perfectamente intuible por el lector:

el sustantivo indicará el comportamiento algebraico del morfismo mientras que el calificativo nos indicará el comportamiento topológico-analítico del mismo.

Una *derivación* del álgebra A es una aplicación lineal D de A en sí misma verificando

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

para cualesquiera a y b de A.

Ejemplos 1.3.

(i) El espacio vectorial $L(X)$ de todos los operadores lineales sobre el $\mathbb{K}$-espacio vectorial X es, con la composición por producto, un álgebra asociativa sobre $\mathbb{K}$.

(ii) Para un espacio normado X notaremos por $BL(X)$ al conjunto de los operadores lineales y continuos sobre X. $BL(X)$, con la composición por producto, es un álgebra normada asociativa, y si X es, de hecho, un espacio de Banach entonces $BL(X)$ es un álgebra de Banach.

(iii) <u>Complexificación de un álgebra real</u>.

Si A es un álgebra real se llama *complexificación* de A, y se nota $A_{\mathbb{C}}$, al conjunto $A \times A$ dotado de las siguientes operaciones

$$(a,b) + (c,d) = (a + c\ ,\ b + d)$$

$$(\alpha + i\beta)(a,b) = (\alpha a - \beta b\ ,\ \alpha b + \beta a)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd\ ,\ ad + bc)$$

para cualesquiera α y β en $\mathbb{R}$, y a,b,c,d en A. Es rutinario comprobar que $A_{\mathbb{C}}$ es un álgebra compleja, y que la aplicación $a \mapsto (a,0)$ es un homomorfismo inyectivo de A en $A_{\mathbb{C}}$ ($A_{\mathbb{C}}$ es visto, en este punto, como un álgebra real) con lo que identificamos A con su imagen en $A_{\mathbb{C}}$. Puesto que $(a,b) = (a,0) + i(b,0)$, con la anterior identificación cada elemento x de $A_{\mathbb{C}}$ se escribe de forma única como $x = a + ib$ con a y b en A. Si el álgebra real A es, de hecho, un álgebra normada su complexificación $A_{\mathbb{C}}$ también puede ser normada de la siguiente manera:

Sea $(A,\|\cdot\|)$ un álgebra normada real, sea $A_{\mathbb{C}}$ la complexificación de A, sea $U = \{a \in A\colon \|a\| < 1\}$, sea V la intersección de todos los subconjuntos absolutamente convexos de $A_{\mathbb{C}}$ conteniendo a $U \times \{0\}$, y sea p el funcional de Minkowski *de V. Entonces:*

a) $(A_{\mathbb{C}},p)$ es un álgebra normada,

b) $V = \{x \in A_{\mathbb{C}} : p(x) < 1\}$,

c) $p(a,0) = \|a\| \quad \forall\ a \in A$,

d) $(A_{\mathbb{C}},p)$ es completa cuando $(A,\|\cdot\|)$ lo es.

Demostración. Véase **[8; Proposición 13.3]** para el caso asociativo y obsérvese que en ningun momento se utiliza la asociatividad.

Por el apartado c) la aplicación $a \longmapsto (a,0)$ de A en $A_{\mathbb{C}}$ es un homomorfismo isométrico, que nos permite identificar plenamente A con su imagen en $A_{\mathbb{C}}$.

(iv) Unitización de un álgebra.

Un elemento e de un álgebra A es un *elemento unidad* si $e \neq 0$ y

$$ea = ae = a$$

para cualquier a de A. Decimos que A es un *álgebra con unidad* si tiene algún elemento unidad. Es inmediato comprobar que un álgebra tiene a lo sumo un elemento unidad que, caso de existir, se suele notar por 1.

Sea A un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con o sin unidad. Se llamará *unitización* de A al álgebra A_1 cuyo espacio vectorial es $\mathbb{K} \oplus A$ y cuyo producto viene dado por

$$(\alpha,a)(\beta,b) = (\alpha\beta \ , \ \alpha b + \beta a + ab)$$

para cualesquiera α,β en $\mathbb{K}$ y a,b en A.

El elemento $1=(1,0)$ es la unidad de A_1, y la aplicación $a \longmapsto (0,a)$ es un homomorfismo inyectivo de A en A_1, que nos permite identificar A con su imagen en A_1, a saber $\{0\} \times A$, y $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K}1$, escribiendo todo elemento x de A_1 de forma única como $x = \alpha + a$

con α en $\mathbb{K}$ y a en A.

Si A es un álgebra normada, su unitización A_1 puede ser normada con la norma

$$\|\alpha + a\| = |\alpha| + \|a\|$$

para cualesquiera α en $\mathbb{K}$ y a en A. La aplicación $a \longmapsto (a,0)$ de A en A_1 es entonces un homomorfismo isométrico, que nos permite identificar plenamente el álgebra normada A con su imagen en A_1.

(v) λ-mutaciones.

Dada un álgebra A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se nota $A^{(\lambda)}$ al álgebra cuyo espacio vectorial es el mismo de A y cuyo producto está definido por

$$a \cdot_{\lambda} b = \lambda ab + (1-\lambda)ba$$

para todo a y b en $A^{(\lambda)}$. Este álgebra se llama *λ-mutación* de A. A la $\frac{1}{2}$-mutación del álgebra A se le llamará *simetrizada* de A, se notará por A^+ y su producto se notará por $\cdot$.

Si A es un álgebra normada cualquier λ-mutación suya es un álgebra normable.

(vi) Límite algebraico directo.

Sea $\mathfrak{I}$ un conjunto dirigido y $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}$ una familia de álgebras sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Para cada par (α,β)

de índices de $\mathfrak{I}$ tales que $\alpha \leq \beta$, se supone que existe un homomorfismo $f_{\beta\alpha}$ del álgebra A_α en el álgebra A_β verificando las condiciones

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \Rightarrow f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha},$$

$$f_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_{A_\alpha} \quad \forall\ \alpha \in \mathfrak{I}.$$

El par $((A_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ es lo que se llama *sistema dirigido de álgebras.*

El *límite algebraico directo* de un tal sistema dirigido de álgebras $((A_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ se define como el par $(A, (f_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}})$ donde A es un álgebra sobre $\mathbb{K}$ y los f_α son homomorfismos del álgebra A_α en el álgebra A tales que

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha,$$

y de manera que, si $(B, (g_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}})$ es otro par, formado por un álgebra B sobre $\mathbb{K}$ y homomorfismos g_α de A_α, en B con la anterior propiedad, exista un único homomorfismo g de A en B tal que

$$g_\alpha = g \circ f_\alpha \quad \forall\ \alpha \in \mathfrak{I}.$$

La existencia de un tal par está garantizada por **[11; Capítulo I Proposiciones 1 y 2, y Capítulo III Pag. 9]** y lo notaremos simplemente por $\lim\limits_{\alpha \in \mathfrak{I}} A_\alpha$. Además, basta con observar los resultados de **[10; Capítulo 6]** para darse cuenta de que el homomorfismo de álgebras g que aparece verifica que:

(i) g es sobreyectivo si, y sólo si, $B = \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{I}} g_\alpha(A_\alpha)$

(ii) g es inyectivo si, y sólo si,

$$g_\alpha(a)=g_\alpha(b)\ (a,b\in A_\alpha) \Rightarrow \exists\ \beta\geq\alpha:\ f_{\beta\alpha}(a)=f_{\beta\alpha}(b).$$

Como consecuencia obtenemos también que:

si $((A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{I}},(f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ *y* $((B_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{I}},(g_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$ *son dos sistemas dirigidos de álgebras sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *y con el mismo conjunto de índices* $\mathfrak{I}$, *y* u_α *son homomorfismos del álgebra* A_α *en el álgebra* B_α *tales que, para* $\alpha\leq\beta$, *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & A_\beta \arrow[d, "u_\beta"] \\ B_\alpha \arrow[r, "g_{\beta\alpha}"'] & B_\beta \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Existe entonces un único homomorfismo u *del álgebra* $\lim_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha$ *en el álgebra* $\lim_{\alpha\in\mathfrak{I}} B_\alpha$ *que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & \lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha \\ {\scriptstyle u_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B_\alpha & \xrightarrow[g_\alpha]{} & \lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} B_\alpha \end{array}$$

Además, si cada u_α es inyectivo (resp. sobreyectivo) entonces u es inyectivo (resp. sobreyectivo).

(vii) <u>Producto de Arens</u>.

Para un espacio normado X notaremos por X' su *dual topológico* y por X'' ($= (X')'$) su *bidual topológico*. Sea A un álgebra normada. Si $f \in A'$ y $a \in A$ definimos $fa \in A'$ como

$$(fa)(x) = f(ax) \quad \forall\ x \in A.$$

Si $F \in A''$ y $f \in A'$ definimos $Ff \in A'$ como

$$(Ff)(a) = F(fa) \quad \forall\ a \in A.$$

Si F y $G \in A''$ definimos el *producto de Arens*, $FG \in A''$, de F y G como

$$(FG)(f) = F(Gf) \quad \forall\ f \in A'.$$

Es inmediato comprobar que

el producto de Arens hace de A'' un álgebra normada completa y la inmersión canónica de A en A'' es un *homomorfismo inyectivo de álgebras.*

(viii) ℓ_p-sumas.

Sea $\mathfrak{J}$ un conjunto no vacío. Si p es un número real con $1 \le p$, $\ell_p(\mathfrak{J})$ denotará, como es usual, el espacio de Banach de las familias de números reales $(a_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ tales que $\sum_{i\in\mathfrak{J}} |a_i|^p < \infty$ (con norma $\|(a_i)_{i\in\mathfrak{J}}\|_p = (\sum_{i\in\mathfrak{J}} |a_i|^p)^{1/p}$), y $\ell_\infty(\mathfrak{J})$ denotará, también como es usual, el espacio de Banach de las familias de números reales con índices en $\mathfrak{J}$ acotadas (con norma $\|(a_i)_{i\in\mathfrak{J}}\|_\infty = \sup\{\|a_i\| : i\in\mathfrak{J}\}$).

Si disponemos ahora para cada i de $\mathfrak{J}$ de un álgebra normada A_i (todas ellas reales o todas ellas complejas) con norma $\|\cdot\|_i$, podemos considerar el espacio normado

$$\overset{\ell_p}{\underset{i\in\mathfrak{J}}{\oplus}} A_i = \{ (a_i)_{i\in\mathfrak{J}} : a_i \in A_i \ \forall\ i\in\mathfrak{J} \text{ y } (\|a_i\|_i)_{i\in\mathfrak{J}}\in\ell_p(\mathfrak{J}) \},$$

cuya norma recordemos que viene dada por $\|(a_i)_{i\in\mathfrak{J}}\| = \| (\|a_i\|_i)_{i\in\mathfrak{J}} \|_p$. En el cual podemos definir un producto de manera obvia, para obtener un álgebra normada, que se llamará ℓ_p-suma de las álgebras A_i.

Definición 1.4.

Un *centralizador del álgebra A* es una aplicación lineal de A en sí misma verificando

$$f(ab) = af(b) = f(a)b$$

para cualesquiera a y b en A.

El conjunto de los centralizadores del álgebra A se llamará *centroide* de A y lo notaremos por $\Gamma(A)$. Claramente $\Gamma(A)$ es un álgebra con las operaciones que estarán en la mente del lector. Perfeccionamientos algebraicos sobre A repercutirán en prefeccionamientos del álgebra $\Gamma(A)$, como muestra el siguiente resultado:

Si A es un álgebra de anulador cero ($Ann(A):=\{a\in A\colon aA=Aa=0\} = \{0\}$), entonces $\Gamma(A)$ es un álgebra conmutativa.

Demostración. Sean f y g en $\Gamma(A)$ y a en A. Para b en A tenemos que

$$[(fg)(a) - (gf)(a)]b = f(g(a))b - g(f(a))b = f(g(ab)) - g(f(a)b) =$$

$$= f(ag(b)) - f(a)g(b) = f(a)g(b) - f(a)g(b) = 0.$$

De idéntica forma comprobaríamos que $b[(fg)(a) - (gf)(a)] = 0$, y así $(fg)(a) - (gf)(a) \in \mathrm{Ann}(A) = \{0\}$. Como consecuencia $(fg)(a) = (gf)(a)$, y ésto para cualquier a de A, lo que muestra que $fg = gf$. ■

De la misma forma el hecho de que el álgebra sea normada también repercutirá, cómo no, en los elementos del centroide de la misma, como muestra el siguiente resultado:

Si A es un álgebra normada completa de anulador cero, entonces todo centralizador del álgebra A es continuo.

Demostración. Sea f un centralizador del álgebra A y b un elemento de A tal que exista $\{a_n\} \to 0$ con $\{f(a_n)\} \to b$. Para a en A tenemos $ab = \lim af(a_n) = \lim f(aa_n) = \lim f(a)a_n = 0$. De idéntica forma se comprueba que $ba = 0$, y así $b \in \mathrm{Ann}(A) = 0$. El teorema de la gráfica cerrada nos garantiza entonces la continuidad de f. ■

Así, para un álgebra normada completa A de anulador cero, $\Gamma(A)$ tiene una estructura natural de álgebra de Banach conmutativa como subálgebra cerrada del álgebra de Banach de los operadores lineales y continuos sobre A.

Definición 1.5.

Si X es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, por una *involución lineal de espacio vectorial* sobre X entenderemos un operador lineal τ sobre X tal que

$$\tau^2(x) = x \quad \forall\, x \in X.$$

Si X es un espacio vectorial complejo. Una *involución de espacio vectorial* sobre X será una aplicación conjugado-lineal $*$ de X en si mismo verificando la propiedad

$$(x^*)^* = x \quad \forall\, x \in X.$$

Si A es un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una *involución lineal de álgebra* sobre A, o simplemente una *involución lineal* sobre A, será una involución de espacio vectorial sobre el espacio vectorial subyacente a A, τ, verificando la propiedad

$$\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$$

para cualesquiera a y b de A. Si A es ahora un álgebra compleja. Una *involución de álgebra*, o simplemente una *involución* sobre A será una involución de espacio vectorial sobre el espacio vectorial subyacente a A, $*$, verificando la propiedad

$$(ab)^* = b^* a^*$$

para cualesquiera a y b en A.

Los elementos a de un álgebra A con involución, lineal o conjugado-lineal, invariantes por ésta se llamarán simétricos, y se notará por $\mathrm{Sim}(A)$ el conjunto de todos ellos. $\mathrm{Sim}(A)$ será un álgebra, como subálgebra de A^+, sobre el mismo cuerpo que A, si la involución es lineal, o un álgebra real, si la involución es conjugado-lineal.

Nuestro interés estará justamente en las involuciones sobre álgebras complejas más que en las involuciones lineales.

Si A y B son álgebras complejas con involución, un homomorfismo f de A en B es llamado *$\star$-homomorfismo* si

$$f(a^{\bullet}) = (f(a))^{\bullet}$$

para cualquier a de A.

Si X es un espacio vectorial complejo con una involución de espacio vectorial $^{\bullet}$, podemos definir una involución de espacio vectorial sobre el álgebra compleja $\mathrm{L}(X)$ de los operadores lineales de X en si mismo por

$$f^{\bullet}(x) = (f(x^{\bullet}))^{\bullet}$$

para todo x de X y f de $\mathrm{L}(X)$.
Si f y g están en $\mathrm{L}(X)$ y x está en X se tiene que

$$(fg)^{\bullet}(x) = [(fg)(x^{\star})]^{\bullet} = [f(g(x^{\star}))]^{\bullet} = f^{\star}[(g(x^{\star}))^{\star}] = f^{\star}(g^{\star}(x)).$$

Y de este modo

$$(fg)^{\bullet} = f^{\star} g^{\star} \qquad \forall\ f,\ g \in \mathrm{L}(X).$$

Como quiera que el álgebra $\mathrm{L}(X)$ no es conmutativa (salvo que la dimensión de X sea uno), nuestra recién introducida involución de espacio vectorial no será una involución de álgebra sobre $\mathrm{L}(X)$, muy a pesar de que muy bien podría ser X un álgebra compleja y $^{\bullet}$ una involución de álgebra sobre X. Sin embargo, si A es un álgebra compleja de anulador cero con una involución $^{\bullet}$ es inmediato comprobar que $f^{\star} \in \Gamma(A)$ para cada f en $\Gamma(A)$. Y como quiera que $\Gamma(A)$ es un álgebra conmutativa tendremos que la involución antes introducida es una involución de álgebra sobre $\Gamma(A)$.

Si suponemos ahora que tenemos un sistema dirigido de álgebras complejas $((A_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ de manera que en cada álgebra A_α se dispone de una involución, con el correspondiente buen comportamiento respecto de los homomorfismos $f_{\beta\alpha}$, sería deseable poder obtener otra involución sobre el límite algebraico directo $\underset{\alpha\in\mathfrak{I}}{\ell im}\, A_\alpha$. Comprobaremos que efectivamente así sucede, para lo cual adoptaremos la siguiente notación. Si A es un álgebra compleja denotaremos por $A^{æ}$ la nueva álgebra compleja cuya suma coincide con la de A, el producto por escalares viene definido por

$$\lambda \cdot a = \bar{\lambda} a \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\ a \in A,$$

y su producto viene definido por

$$a \circ b = ba \quad \forall\ a,\ b \in A.$$

Es inmediato comprobar que si $((A_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ es un sistema dirigido de álgebras complejas entonces $((A^{æ}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \leq \beta})$ es un nuevo sistema dirigido de álgebras complejas y además

$$\underset{\alpha\in\mathfrak{I}}{\ell im}\, A^{æ}_\alpha = (\underset{\alpha\in\mathfrak{I}}{\ell im}\, A_\alpha)^{æ}.$$

Supongamos entonces que disponemos de involuciones $*$ sobre las álgebras A_α del sistema dirigido $((A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{I}}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha\leq\beta})$, y que los homomorfismos $f_{\beta\alpha}$ son, de hecho, $*$-homomorfismos. Tenemos de este modo un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"'] & A_\beta \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\
A_\alpha^{æ} \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"'] & A_\beta^{æ}
\end{tikzcd}
$$

y en consecuencia existirá un único homomorfismo del álgebra $\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha$ en el álgebra $(\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha)^{æ}$ haciendo conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[rr, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "f_\alpha"] \arrow[ddd, leftrightarrow, "*"'] & & A_\beta \arrow[dl, "f_\beta"'] \arrow[ddd, leftrightarrow, "*"] \\
& \lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha \arrow[d, leftrightarrow, "*"] & \\
& (\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha)^{æ} & \\
A_\alpha^{æ} \arrow[rr, "f_{\beta\alpha}"'] \arrow[ur, "f_\alpha"] & & A_\beta^{æ} \arrow[ul, "f_\beta"']
\end{tikzcd}
$$

que por tanto no es otra cosa que una involución sobre el álgebra $\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{I}} A_\alpha$.

Definición 1.5.

Una *C^*-álgebra* es un álgebra de Banach compleja A con una involución * verificando

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall\ a \in A.$$

Si el espacio de Banach subyacente a la C^*-álgebra A es un espacio dual, A será llamada *W^*-álgebra*.

Ejemplo 1.6.

(i) Sea S un espacio topológico y denotemos por $C_b(S)$ el álgebra de todas las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre S. El álgebra $C_b(S)$ la convertimos en álgebra de Banach conmutativa compleja con la norma

$$\|\phi\| = \sup\{\ |\phi(s)|\ :\ s \in S\ \}$$

para cualquier ϕ de $C_b(S)$. Además, la involución

$$\phi^*(s) = \overline{\phi(s)} \qquad \forall\ s \in S,\ \forall\ \phi \in C_b(S),$$

hace de $C_b(S)$ una C^*-álgebra conmutativa.

(ii) Si H es un espacio de Hilbert complejo entonces $BL(H)$ es un álgebra de Banach compleja. Si $f \in BL(H)$ denotamos por f^* el operador adjunto de f, es decir, el único operador lineal y continuo sobre H verificando

$$(\ f(x)\ |\ y\ )\ =\ (\ x\ |\ f^*(y)\ ) \qquad \forall\ x,\ y \in H.$$

Si definimos

$$f^* = f^\bullet \qquad \forall\ f \in BL(H),$$

convertimos a $BL(H)$ en una C*-álgebra. Cada subálgebra cerrada y autoadjunta de $BL(H)$ será también una C*-álgebra. Además, el teorema de Gelfand-Naimark nos dice que esencialmente éstas son las únicas C*-álgebras **[8; Teorema 38.10]**:

si A es una C-álgebra, existen un espacio de Hilbert complejo H y un *-homomorfismo inyectivo (automáticamente isométrico) de A en $BL(H)$.*

(iii) Como consecuencia de **[8; Teorema 38.19]** obtenemos que:

si A es una C-álgebra, su bidual topológico A'' con el producto de Arens e involución la segunda traspuesta de la involución de A, es una W*-álgebra.*

Sea A una C*-álgebra y sean f en $\Gamma(A)$ y a en A, entonces

$$\|(f^*f)(a^*a)\| = \|(f(a))^*f(a)\| = \|f(a)\|^2$$

Así $\|f\|^2 \leq \|f^*f\|$, y como quiera que la desigualdad contraria es inmediata se tendrá que el centroide $\Gamma(A)$ de la C*-algebra A es una nueva C*-álgebra conmutativa.

De hecho, un famoso teorema de Dauns y Hofmann logra una descripción del centroide de una C*-álgebra que involucra el espectro primitivo de la C^*-álgebra en cuestión (para recordar el concepto de espectro primitivo de un álgebra asociativa véanse los comentarios anteriores a la Definición 1.17 o bien **[8; Capítulo 3.26]**).

Teorema 1.7 (Dauns-Hofmann **[45; Corolario 4.4.8]**).

Para toda C^*-álgebra A existe un $*$-isomorfismo natural entre la C^*-álgebra $\Gamma(A)$ y la C^*-álgebra $C_b(\Pi_A)$, de todas las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre el espectro primitivo Π_A de A.

Definición 1.8.

Un *ideal izquierdo* (resp. *derecho*) de un álgebra A es un subespacio vectorial I de A tal que

$$AI \subset I \quad (\text{resp. } IA \subset I).$$

Los ideales izquierdos o derechos se conocerán con el nombre común de *ideales unilaterales*. Un *ideal bilatero* o simplemente *ideal* será un subespacio vectorial que es a la vez ideal izquierdo e ideal derecho.

Si I es un ideal del álgebra A, podemos definir en el espacio vectorial cociente A/I un producto por

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

para cualesquiera a y b en A. El álgebra de este modo obtenida se llama *álgebra cociente de A módulo I*. La proyección $\pi: A \longrightarrow A/I$ es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras.

Definición I.9.

Un álgebra A se dice *semiprima* si $\{0\}$ es el único ideal I de A tal que $I^2 = \{0\}$ (donde $I^2=\{ab : a,b\in I\}$). El álgebra se dice *prima* si para cualesquiera ideales I y J de A tales que $IJ = \{0\}$ (donde $IJ=\{ab : a\in I,\ b\in J\}$) se tiene que $I = \{0\}$ o bien $J = \{0\}$. Es claro entonces que toda álgebra prima es semiprima. Decimos también que un álgebra A es *simple* si no es de producto cero y $\{0\}$ y A son sus únicos ideales, siendo evidente que cualquier álgebra simple es prima.

Un ideal I del álgebra A se dice *primo* si $I \neq A$ y el álgebra cociente A/I es prima.

Denotemos por $\Delta(A)$ el conjunto de los ideales primos del álgebra A, al que llamaremos espectro primo de A, y, a semejanza con la topología de Jacobson considerada sobre el espectro primitivo de un álgebra asociativa, consideraremos en $\Delta(A)$ la topología cuyos conjuntos cerrados son de la forma

$$\{ J \in \Delta(A) : I \subset J \}$$

para I ideal de A.

Si $E \subset \Delta(A)$ y $F \subset A$ definimos

$$\ker(E) = \bigcap \{ J \in \Delta(A) : J \in E \},\ \mathrm{hull}(F) = \{ J \in \Delta(A) : F \subset J \},$$

y se tiene que

$$\overline{E} = \mathrm{hull}(\ker(E))$$

para cualquier $E \subset \Delta(A)$. Es claro de ésto que

si $E \subset \Delta(A)$ *y* $\ker(E) = \{0\}$ *entonces* E *es denso en* $\Delta(A)$.

Definicion 1.10.

Un álgebra A se llamará *álgebra de Jordan* si satisface las dos identidades siguientes:

$$ab = ba \quad \forall\ a,b \in A \quad (\textit{conmutatividad}),$$

$$a^2(ba) = (a^2b)a \quad \forall\ a,b \in A \quad (\textit{identidad de Jordan}).$$

Ejemplos 1.11.

(i) Si A es un álgebra asociativa su simetrizada A^+, es un álgebra de Jordan. Por supuesto, cualquier subálgebra de A^+ (*subálgebra de Jordan* de A) también será un álgebra de Jordan, y tales álgebras son conocidas con el nombre de ***algebras de Jordan*** *especiales*.

(ii) Es inmediato comprobar que la unitización A_1 de un álgebra de Jordan A es también un álgebra de Jordan.

(iii) También es inmediato comprobar que la complexificación $A_{\mathbb{C}}$ de un álgebra de Jordan real A es también un álgebra de Jordan.

(iv) Si A es un álgebra asociativa sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y τ es una involución lineal sobre A, entonces $\mathrm{Sim}(A) = \{ a \in A : \tau(a) = a \}$ es un álgebra de Jordan sobre $\mathbb{K}$, como subalgebra que es de A^{+}. Si A es supuesta ahora compleja y $*$ es una involución sobre A, entonces $\mathrm{Sim}(A)$ es ahora un álgebra de Jordan real como subálgebra real de A^{+}.

(v) Sea X un espacio vectorial no cero sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y f una forma bilineal simétrica sobre X. Entonces el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $A = \mathbb{K}\oplus X$ dotado con el producto

$$(\alpha,x)(\beta,y) = (\alpha\beta + f(x,y),\alpha y + \beta x)$$

es un álgebra de Jordan sobre $\mathbb{K}$ **[32; I.4]** que se denotará por $J(X,f)$, la cual es también especial **[32; Teorema VII.1.1]**. Además

el álgebra de Jordan $J(X,f)$ es simple si, y sólo si, la forma bilineal f es no degenerada y $\dim_{\mathbb{K}}(X)\geq 2$.

Si recordamos que un álgebra A con unidad sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice cuadrática si

$$\forall a \in A \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad a^2 + \alpha a + \beta = 0,$$

es también inmediato comprobar que las álgebras de Jordan $J(X,f)$ son cuadráticas. Es más, cualquier álgebra cuadrática y conmutativa es de esta manera (**[56; Pag. 102]**).

Si X es, de hecho, un espacio normado y f es continua entonces $J(X,f)$ es un álgebra de Jordan normable (completa si X lo es).

(vi) Denotemos por $\mathbb{H}$ el álgebra de los cuaternios reales de división con su involución natural dada por

$$\overline{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k,$$

(véase **[8; Definición 1.14.3]**). El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$ con el producto

$$(a_1,a_2)(a_3,a_4) = (a_1a_3-a_4\overline{a_2},\overline{a_1}a_4+a_3a_2),$$

es un álgebra real con involución lineal

$$\overline{(a_1,a_2)} = (\overline{a_1},-a_2),$$

conocida con el nombre de *octoniones reales de división* y que denotaremos por $\mathbb{O}$.

Ahora, en el álgebra $M_3(\mathbb{O})$ de las matrices 3×3 sobre $\mathbb{O}$ se considera la involución lineal

$$\tau(a_{ij}) = (\overline{a_{ji}}).$$

Se demuestra en **[27; Teorema 2.7.5]** que

$\mathrm{Sim}(M_3(\mathbb{O}))$ *es un álgebra de Jordan real.*

Tal álgebra se denotará por M_3^8, mientras que su complexificación se denotará por $M_3^8(\mathbb{C})$.

Dichas álgebras presentan la curiosidad **[27; Corolario 2.8.5]** de ser *excepcionales* (es decir, de no ser especiales).

Como toda álgebra real de dimensión finita M_3^8 se puede normar, pero ésta álgebra se puede además normar con una norma que posee propiedades muy especiales como se verá más adelante.

(vii) La ℓ_p-suma de álgebras de Jordan normadas es una nueva álgebra de Jordan (por supuesto normada).

Definimos los U-operadores del álgebra de Jordan A como

$$U_a(b) = 2a(ab) - a^2b \quad \forall\ a,b \in A.$$

Definición 1.12.

Un subespacio I de un álgebra de Jordan A es llamado *ideal interno* si

$$U_I(A_1) \subset I\ .$$

Ejemplo 1.13.

Es inmediato comprobar que los ideales unilaterales de un álgebra asociativa A son ideales internos del álgebra de Jordan A^+ (obsérvese que para A^+ es $U_a(b)=aba \quad \forall a,b \in A$).

Recordemos que un ideal derecho (resp. izquierdo) I de un álgebra asociativa A se dica *modular* si existe un elemento x de A tal que

$$(1-x)A \subset I \quad (\text{resp. } A(1-x) \subset I).$$

Este concepto de modularidad fue convenientemente trasladado por Hogben y McCrimmon a las álgebras de Jordan en **[30]**.

Definición 1.14.

Decimos que un ideal interno I de un álgebra de Jordan A es *x-modular* para algún x de A si

$$U_{1-x}(A) \subset I,$$

$$x - x^2 \in I\ .$$

$$\{(1-x),A_1,I\} \subset I$$

(donde (a,b,c) denota el producto triple de Jordan

(a,b,c)=(ab)c+a(bc)-(ac)b)

Diremos que I es *x-maximal* si es maximal en el conjunto de los ideales internos x-modulares propios de A. Y diremos que I es *maximal-modular* si es x-maximal para algún x de A.

Ejemplo 1.15.

Es inmediato comprobar que los ideales unilaterales modulares de un álgebra asociativa A son ideales internos modulares del álgebra de Jordan A^+. Además se demostró en **[30; Ejemplo 3.3]** que

los ideales unilaterales modulares maximales de un álgebra asociativa A son ideales internos maximales-modulares del álgebra de Jordan A^+.

Nota 1.16 ([30; 3.5]).

Las correspondencias

$$I \longmapsto I_1 = I + \mathbb{K}(1-x) \quad \text{y} \quad I_1 \longmapsto I = I_1 \cap J$$

son isomorfismos de retículos, uno inverso del otro, entre los retículos L_x de todos los ideales internos x-modulares I de A y el retículo $(\mathrm{L}_x)_1$ de todos los ideales internos I_1 de A_1 que contienen a $1-x$. En particular

un ideal interno I del álgebra de Jordan A es x-maximal si, y sólo si, el ideal interno $I_1 = I + \mathbb{K}(1-x)$ es maximal en A_1.

Recordemos que un ideal P de un álgebra asociativa A se dice *primitivo* derecho (resp. izquierdo) si existe un ideal derecho (resp. izquierdo) modular maximal I tal que P es el mayor ideal de A contenido en I.

Los ideales primitivos de un álgebra asociativa son ideales primos, el conjunto de tales ideales se llamará *espectro primitivo* del álgebra y se considerará dotado con la topología de Jacobson heredada del espectro primo del álgebra.

En general el concepto de ideal primitivo de un álgebra asociativa no es jordanizable. L. Hogben y K. McCrimmon, sin embargo, introdujeron en [30] un sucedáneo de este concepto para álgebras de Jordan a través justamente del concepto de ideal interno maximal-modular. Este sucedáneo, además, evita la lateralidad presente en el concepto de ideal primitivo asociativo.

Definición 1.17.

Si A es un álgebra de Jordan definimos el *corazón* de un ideal interno I como el mayor ideal de A contenido en I.

Los *corazones de los ideales internos maximales-modulares* del álgebra de Jordan serán precisamente los ideales que desempeñen para las álgebras de Jordan el papel de los ideales primitivos para las álgebras asociativas.

Nota 1.18.

Se demostró en [30] que:

los corazones de los ideales internos maximales-modulares de *un álgebra de Jordan son ideales primos.*

El conjunto de tales "corazones" de un álgebra de Jordan A será denotado por $Cor(A)$ y en vista de lo anterior se considerará dotado con la topología de Jacobsen heredada de $\Delta(A)$.

Introducimos ahora una nueva clase de álgebras que incluye la clase de las álgebras asociativas y la clase de las álgebras de Jordan.

Definición 1.19.

Un álgebra A se llamará *álgebra de Jordan no conmutativa* si verifica las identidades:

$$a(ba) = (ab)a \quad \forall\ a,b \in A \quad (flexibilidad),$$

$$a^2(ba) = (a^2b)a \quad \forall\ a,b \in A.$$

Las álgebras de Jordan no conmutativas fueron introducidas con el objeto de ser un concepto unificador entre las álgebras asociativas (incluso alternativas) y las álgebras de Jordan. Estas álgebras nos permiten hacer un tratamiento algebraico conjunto de ambas clases de álgebras.

Ejemplos 1.20.

(i) Cualquier λ-mutación $A^{(\lambda)}$ de un álgebra de Jordan no conmutativa A, es un álgebra de Jordan no conmutativa. En particular, la mutación de un álgebra asociativa es un álgebra de Jordan no conmutativa.

(ii) Es inmediato de verificar que la unitización A_1 de un álgebra de Jordan no conmutativa A es también un álgebra de Jordan no conmutativa.

(iii) También es inmediato de comprobar que la complexificación $A_{\mathbb{C}}$ de un álgebra de Jordan no conmutativa vuelve a ser un álgebra de Jordan no conmutativa.

(iv) Sea X una $\mathbb{K}$-álgebra anticonmutativa, cuyo producto notamos $x \wedge y$ y sea f una aplicación bilineal simétrica sobre X tal que $f(x, x \wedge y) = 0 \quad \forall\ x, y \in X$. Entonces $A = \mathbb{K} \oplus X$ con el producto

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta + f(x,y)\ ,\ \alpha y + \beta x + x \wedge y)$$

para cualesquiera α, β en $\mathbb{K}$ y cualesquiera x, y en X, es un álgebra de Jordan no conmutativa. Si X es, de hecho, un espacio normado y las aplicaciones bilineales f y $\wedge$ son continuas entonces es un álgebra de Jordan no conmutativa normable.

(v) Es inmediato de comprobar que el álgebra simetrizada A^+ de un álgebra de Jordan no conmutativa A es un álgebra de Jordan.

(vi) Evidentemente las ℓ_p-sumas de álgebras de Jordan no conmutativas normadas son nuevas álgebras de Jordan no conmutativas normadas.

Definimos los U-operadores de un álgebra de Jordan no conmutativa A como

$$U_a(b) = a(ab + ba) - a^2b \quad \forall\ a,b \in A,$$

los cuales coinciden con los U-operadores del álgebra de Jordan A^+.

Definición 1.21.

Definimos los *ideales internos maximales-modulares* de un álgebra de Jordan no conmutativa A como los ideales internos maximales-modulares del álgebra de Jordan A^+, y definimos el *corazón* de un tal ideal interno maximal-modular I como el mayor ideal de A contenido en I.

En **[23; Sección 4]** se observó que

los corazones de los ideales internos maximales-modulares de *un álgebra de Jordan no conmutativa son ideales primos.*

El conjunto de los corazones de los ideales internos maximales-modulares de un álgebra de Jordan no conmutativa A se notará $Cor(A)$ y, por lo anterior, se considerará dotado de la topología de Jacobson heredada de $\Delta(A)$ (ya fue considerada esta topología en caso conmutativo en [22]).

Ejemplo 1.22.

Si J es un ideal primitivo (izquierdo, por ejemplo) de un álgebra asociativa A, es el corazón de un ideal izquierdo modular maximal que, por el Ejemplo 1.15, es un ideal interno maximal-modular de A^+ luego, por definición, el corazón de un ideal interno maximal-modular del álgebra de Jordan no conmutativa A.

Nota 1.23.

Como se advirtió anteriormente, los corazones de los ideales internos maximales-modulares de un álgebra de Jordan no conmutativa A son ideales primos. Por otra parte es bien sabido [22; Lema 6.5] que:

(i) *los ideales internos maximales-modulares de un álgebra de Jordan no conmutativa normada y completa son* *cerrados, y (en consecuencia)*

(ii) *los corazones de los ideales internos maximales-modulares de un álgebra de Jordan no conmutativa normada y completa son también cerrados.*

Así, si A es un álgebra de Jordan no conmutativa normada y completa se tendrá que $\mathrm{Cor}(A) \subset \beta(A)$, donde $\beta(A)$ denotará en adelante el conjunto de los ideales primos y cerrados del álgebra normada A.

Recientemente se ha dedicado un gran interés al estudio de las generalizaciones no asociativas de las C*-álgebras. Este tema tiene su origen en el estudio de las subálgebras de Jordan cerradas de operadores lineales continuos y autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo llevado a cabo por Topping **[59]** y Størmer **[58]** en 1965. Si A es una C*-álgebra (asociativa) sabemos muy bien que $\mathrm{Sim}(A) = \{ a \in A : a^* = a \}$ es un álgebra de Jordan real normada y completa. Cualquier subálgebra cerrada suya será, por tanto, un álgebra de Jordan real normada y completa, y tales álgebras son comunmente conocidas con el nombre de *JC-álgebras*. En el intento de encontrar un modelo abstracto para las JC-álgebras Alfsen, Shultz y Størmer introdujeron en los años 1976-78 las JB-álgebras en **[2]**. Es inmediato comprobar que en una JC-álgebra A se verifica la desigualdad

$$\|a\|^2 \leq \|a^2 + b^2\| \quad \forall\, a,\, b \in A.$$

Y es justamente esta desigualdad la que se exige para la axiomatización de las JC-álgebras.

Definición 1.24.

Una *JB-álgebra* es un álgebra de Jordan real normada y completa A cuya norma satisface adicionalmente la condición siguiente:

$$\|a\|^2 \leq \|a^2 + b^2\| \quad \forall\, a,b \in A.$$

Una *JBW-álgebra* será una JB-álgebra cuyo espacio de Banach subyacente sea un espacio de Banach dual.

Ejemplos 1.25.

(i) Cualquier JC-álgebra es, cómo no, una JB-álgebra.

(ii) Es por todos bien conocido el concepto de espacio de Hilbert, tanto real como complejo. Quizás no resulte ya tan conocido el concepto de *espacio de Hilbert cuaterniónico.* Por tal entenderemos un espacio vectorial H sobre $\mathbb{H}$ (será, por tanto, también un espacio vectorial real) dotado con una aplicación

$$(\cdot|\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{H}$$

verificando las propiedades que cabría pensar:

$$(x + y \mid z) = (x|z) + (y|z)$$

$$(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$$

$$\overline{(x|y)} = (y|x)$$

$$(x|x) \geq 0$$

$$(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

y de manera que la norma $\|\cdot\|$ obtenida al definir $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ $(x \in H)$ haga de H, como espacio real, un espacio de Banach.

Es inmediato comprobar que, al igual que ocurre con los operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert real o complejo, los operadores lineales y continuos F sobre un espacio de Hilbert cuaterniónico H poseen un único adjunto F^*, en el sentido de que

$$F^* \in BL_{\mathbb{H}}(H) \quad \text{y} \quad (F(x)|y) = (x|F^*(y)) \quad \forall\ x,\ y \in H.$$

Se puede comprobar sin dificultad que $\mathrm{Sim}(BL_{\mathbb{K}}(H))$, donde H es un espacio de Hilbert real sobre $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$, es una JC-álgebra.

(iii) M_3^8 es por **[27; Corolario 3.1.7]** una JB-álgebra que no es una JC-álgebra pues no es especial.

(iv) Si H es un espacio de Hilbert real el álgebra de Jordan $J(H,(\cdot|\cdot))$ es entonces una JB-álgebra con la norma $\|(\alpha,x)\| = |\alpha| + \|x\|$ (ver [27; Lema 6.1.3]). En el caso de que $\dim(H) \geq 2$ estas álgebras son conocidas con el nombre de factores spines.

(v) Se demuestra en [27; Teorema 4.4.3] que

si A es una JB-álgebra su bidual topológico A'' con el producto de Arens es una JBW-álgebra cuyo producto extiende al producto original de A y es separadamente w^*-continuo.

En el caso unital la demostración se debe a F. W. Shultz [57], con una simplificación posterior debida a H. Hanche-Olsen [26]. La extensión al caso sin unidad es la antes presentada.

(vi) La ℓ_∞-suma de cualquier familia de JB-álgebras es una nueva JB-álgebra.

La versión compleja de las JB-álgebras son las llamadas JB*-algebras; introducidas por I. Kaplansky ante la "Edinburgh Mathematical Society" en Julio de 1976 (ver [61]). Estas álgebras tienen aplicación en la teoría de dominios simétricos acotados ([60], [25]). Concretamente *si A es una JB*-álgebra y X es un subespacio cerrado suyo tal que $\{X,X^*,X\} \subset X$, entonces la bola unidad cerrada de X, B_X, es un dominio simétrico acotado, y todos los dominios simétricos acotados de los espacios de Banach complejos son (biholomórficamente equivalentes a) uno de los descritos.*

Su definición formal es como sigue:

Definición 1.26.

Una *JB*-álgebra* es un álgebra de Jordan compleja normada completa A con una involución * verificando

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \quad \forall\, a \in A.$$

Notemos que en la definición original de JB*-álgebra se incluía además el axioma

$$\|a^*\| = \|a\| \quad \forall\, a \in A.$$

Sin embargo, M. A. Youngson comprobó [62; Lema 4] que esta propiedad se deducía de los restantes axiomas.

C. M. Edwards introdujo en [19] las álgebras conocidas hoy con el nombre de JBW*-álgebras, que no son otra cosa que las JB*-álgebras cuyo espacio de Banach subyacente es un espacio de Banach dual.

Ejemplos 1.27.

(i) Si A es una C^*-álgebra el álgebra simetrizada A^+ de A es, de manera natural, una JB*-álgebra. Cualquier subálgebra cerrada y autoadjunta de A^+ será también, en consecuencia, una JB*-álgebra. Estos ejemplos de JB*-álgebras son conocidos como JC*-álgebras.

(ii) A través de los resultados de Wright **[61]** sobre la complexificación de una JB-álgebra tenemos que

la correspondencia $A \longmapsto Sim(A)$ es una biyección de la clase de las JB-álgebras sobre la clase de las JB-álgebras.*

(iii) La aportación fundamental de Wright consistió sin duda en dotar a $M_3^8(\mathbb{C})$ de una norma de JB*-álgebra, como complexificación de la JB-álgebra M_3^8. Además, esta estructura es, según puede comprobarse en **[43; Corolario 2.10]**, esencialmente única.

(iv) La ℓ_∞-suma de cualquier familia de JB*-álgebras es una nueva JB*-álgebra.

(v) Edwards comprobó **[19; Teoremas 3.2 y 3.4]** que la correspondencia natural de Wright entre JB*-álgebras y

JB-álgebras establece una biyección entre la clase de las JBW*-álgebras y la clase de las JBW-álgebras.

Ya se dijo anteriormente que las álgebras de Jordan no conmutativas pretendían ser un concepto unificador de las álgebras asociativas y las álgebras de Jordan. Con esta misma filosofía fueron introducidas las JB*-álgebras no conmutativas en **[43]**. Pretendían ser un concepto unificador de las C*-álgebras (asociativas) y las JB*-álgebras (conmutativas). Efectivamente así sucede y, en un sentido que más adelante quedará perfectamente precisado (véase **[50]**), son la más amplia generalización no asociativa de las C*-álgebras. Su definición formal es como sigue:

Definición 1.28.

Una *JB*-álgebra no conmutativa* es un álgebra de Jordan no conmutativa compleja normada completa A con una involución $*$ verificando

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \quad \forall\, a \in A.$$

Una JB*-álgebra no conmutativa cuyo espacio de Banach subyacente sea un espacio de Banach dual se llamará *JBW*-álgebra no conmutativa*.

Ejemplos 1.29.

(i) Según se vió en **[43; Proposición 1.3]**

las C-álgebras son justamente aquellas JB*-álgebras no conmutativas que son asociativas.*

(ii) No es difícil comprobar que

si A es una JB-álgebra no conmutativa y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces la λ-mutación $A^{(\lambda)}$ con la misma norma e involución de A es una nueva JB*-álgebra no conmutativa.*

En particular las λ-mutaciones (para $0 \leq \lambda \leq 1$) de las C*-álgebras son también JB*-álgebras no conmutativas.

(iii) A partir de una JB*-álgebra no conmutativa A se pueden construir nuevas JB*-álgebras no conmutativas de la siguiente forma. En **[43; Corolario 1.11]** se demostró que

cada ideal cerrado de una JB-álgebra no conmutativa es *-invariante (y por tanto es una nueva JB*-álgebra no conmutativa) y A/J con la norma e involución cociente es una nueva JB*-álgebra no conmutativa.*

(iv) Por **[43; Teorema 1.7]** tenemos que *el bidual A'' de una JB*-álgebra no conmutativa A con el producto de Arens e involución la segunda traspuesta de la involución de A es una JBW*-álgebra no conmutativa con unidad.*

y como consecuencia **[43; Corolario 1.10]**

la unitización de una JB-álgebra no conmutativa con conveniente norma es una JB*-álgebra no conmutativa.*

(v) Cualquier subálgebra w*-cerrada y autoadjunta de una JBW*-álgebra no conmutativa es evidentemente una JBW*-álgebra no conmutativa.

(vi) La ℓ_∞-suma de cualquier familia de JB*-álgebras no conmutativas es una nueva JB*-álgebra no conmutativa (y es JBW*-álgebra no conmutativa si lo son todos los sumandos).

(vii) Es claro que:

si A es una JB-álgebra no conmutativa, entonces su* *simetrizada* A^{+} *es una JB*-algebra con la misma norma e involución.*

CAPITULO II

CENTROIDE DE LAS JB*-ALGEBRAS

El célebre teorema de Dauns-Hofmann asegura que el centroide de cualquier C*-álgebra A es isomorfo de una forma natural al álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre el espectro primitivo de A. La utilidad de este teorema en la teoría de las C*-álgebras sugiere la conveniencia de obtener un resultado similar para el análogo Jordan de las C*-álgebras, a saber las JB*-álgebras y JB*-álgebras no conmutativas. En este Capítulo obtenemos un tal teorema.

Recordemos como L. Hogben y K. McCrimmon introdujeron el concepto de corazón de un ideal interno maximal-modular de un álgebra de Jordan como un apropiado sucedáneo del concepto de ideal primitivo para álgebras asociativas. El conjunto de tales corazones puede ser dotado con la topología de Jacobson heredada del espectro primo del álgebra puesto que éstos son ideales primos. Por otra parte en [52; **Proposición 2.1**] se obtiene que el centroide $\Gamma(A)$ de una JB*-álgebra no conmutativa, con la norma de operadores e involución natural, es una C*-álgebra conmutativa con unidad. Es tentador entonces pensar que el teorema que buscamos debería establecer que:

> *para una JB*-álgebra A existe un isomorfismo natural entre su centroide y el álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre el conjunto de los corazones de los ideales internos maximales-modulares de A dotado de la topología de Jacobson.*

Una de las principales herramientas en nuestra demostración será la teoría de M-estructura en un espacio de Banach, por lo que destacaremos a continuación los resultados de esta teoría que posteriormente utilizaremos. Trataremos en todo momento de dejar constancia del especial significado que esta teoría adquiere cuando el espacio de Banach objeto de estudio es, de hecho, el espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra no conmutativa.

Definición 2.1.

Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal y continuo π de X en sí mismo tal que $\pi^2 = \pi$ se llamará *L-proyección* si

$$\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| \qquad \forall\ x \in X.$$

Un subespacio cerrado, Y, de X se llamará *L-sumando* de X si existe una L-proyección de X cuya imagen es Y.

El álgebra de Banach engendrada por las L-proyecciones del espacio de Banach X en el álgebra de los operadores lineales y continuos de X, $BL(X)$, recibirá el nombre de *álgebra de Cunningham* de X y se notará $\mathfrak{C}(X)$. $\mathfrak{C}(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa ya que por **[7; Proposición 1.7]**

las L-proyecciones de un espacio de Banach conmutan entre sí.

Definición 2.2.

Sea X un espacio de Banach y $u \in X$ con $\|u\| = 1$. El par (X,u) se llamará *espacio de rango numérico*. Un *estado* de (X,u) (estado de X si no hay lugar a confusión) es un funcional lineal y continuo x' sobre X de norma uno tal que $x'(u) = 1$. Denotaremos por $D(X)$ el subconjunto de X' formado por todos los estados de (X,u), el cual es un subconjunto no vacío, convexo y w^*-compacto de X'. Un *estado puro* es un punto extremo de $D(X)$.

Dado x en X definimos el *rango numérico* de x como el conjunto

$$V(x) = \{ x'(x) : x' \in D(X) \}$$

el cual es un subconjunto no vacío, convexo y compacto del cuerpo base. Para X complejo diremos que x es *hermitiano* si $V(x) \subset \mathbb{R}$.

Las álgebras *normadas unitales* (álgebras normadas con unidad de norma uno) se verán siempre como espacios de rango numérico, con elemento distinguido la unidad.

Notas 2.3.

(i) Desde un punto de vista geométrico el modo en que aparecieron las JB*-álgebras no conmutativas es a partir del concepto de V-álgebra. Un álgebra compleja normada completa unital A se llama *V-álgebra* si $A = H(A) + iH(A)$ donde $H(A)$ denota el conjunto de los elementos hermitianos de A. Si A es una V-álgebra, la aplicación $h+ik \longmapsto h-ik$ $(h,k \in H(A))$ es una involución de espacio vectorial sobre A. Es bien conocido el teorema de Vidav-Palmer [9] asegurando que:

la clase de las C-álgebras con unidad coincide con la clase de las V-álgebras asociativas.*

Este resultado sigue siendo cierto si cambiamos "C*-álgebras" por "JB*-álgebras" y "asociativas" por "Jordan" [38], [53] y [62]. De este modo el concepto de V-álgebra proporciona un punto de vista unificador para el estudio de C*-álgebras y JB*-álgebras. La siguiente cuestión se plantea naturalmente: ¿es la involución natural de una V-álgebra multiplicativa? La respuesta es dada en [50] probándose que:

la clase de las V-álgebras no-asociativas coincide con *la clase de las JB*-álgebras no conmutativas con unidad.*

Es claro entonces que las JB*-álgebras no conmutativas son la más amplia y natural generalización de las C*-álgebras, que incluye tambien a las JB*-álgebras.

(ii) Si A es una JB*-álgebra no conmutativa unital, según lo visto anteriormente, será una V-álgebra y, por tanto, si $a \in \mathrm{Sim}(A)$ será $a \in \mathrm{H}(A)$. Como quiera que las aplicaciónes $x \longmapsto \mathrm{L}_x$ y $x \longmapsto \mathrm{R}_x$ (donde L_x y R_x denotan, respectivamente, los operadores de multiplicación izquierdo y derecho por x) son isometrias de A en $\mathrm{BL}(A)$ que conservan la unidad, para a en $\mathrm{Sim}(A)$ podremos concluir que tanto L_a como R_a son operadores hermitianos. Si ahora no suponemos que A tenga unidad, podemos considerar su unitización A_1, que si que será una JB*-álgebra no conmutativa unital (ver Ejemplo 1.29(iv)). Si $a \in \mathrm{Sim}(A)$ entonces $a \in \mathrm{Sim}(A_1)$ y en consecuencia L_a y R_a son operadores hermitianos sobre A_1 y, por tanto, sobre A. Así

si A es cualquier JB-álgebra no conmutativa y a es un elemento simétrico de A los operadores de multiplicación por a son operadores hermitianos.*

Proposición 2.4 (**[42; Teorema 6]**).

Sea X un espacio de Banach complejo, π una L-proyección de X y T un operador hermitiano sobre X. Entonces $\pi T = T\pi$.

Definición 2.5.

Si M es un subespacio de un espacio de Banach X, M° denotará su subespacio anulador, es decir

$$M^\circ = \{ x' \in X' : x'(m) = 0 \quad \forall\, m \in M \}$$

Un subespacio cerrado, M, de X recibirá el nombre de *M-ideal* si M° es un L-sumando de X'.

Ejemplo 2.6.

En **[43; Teorema 4.3]** se prueba que:

los M-ideales del espacio de Banach subyacente a una JB-álgebra no conmutativa coinciden justamente con los ideales cerrados del álgebra.*

Los ideales cerrados de una JB*-álgebra no conmutativa dependen, por tanto, exclusivamente del espacio de Banach subyacente a ésta.

Este hecho, de gran utilidad, nos permite obtener, por ejemplo, la transitividad de los ideales cerrados de una JB*-álgebra no conmutativa. Puesto que por **[7; Proposición 2.9]** *si X es un espacio de Banach y M un M-ideal suyo, entonces los M-ideales de M son precisamente los M-ideales de X que están contenidos en M,*

tendremos como consecuencia que:

si A es una JB-álgebra no conmutativa e I un ideal cerrado suyo, entonces los ideales cerrados de I son precisamente los ideales cerrados de A que están contenidos en I.*

Proposición 2.7 (**[7; Proposición 2.3]**).

Los M-ideales están $\mathbb{R}$-determinados. Más concretamente: si X es un espacio de Banach complejo y M un subespacio suyo, entonces M es un M-ideal de X si, y sólo si, M es un M-ideal de $X_{\mathbb{R}}$, donde $X_{\mathbb{R}}$ denota el espacio de Banach real subyacente a X.

Definición 2.8.

Si X es un espacio de Banach denotaremos por B_X la bola unidad cerrada de X y por $ex(B_X)$ el conjunto de los puntos extremos de B_X. Dado x' en X', $M_{x'}$ denotará el mayor M-ideal de X contenido en $\mathrm{Ker}(x')$ (la existencia de un tal M-ideal viene garantizada por **[7; Nota 2 Pag. 38]**, ya que cada subespacio cerrado de X contiene un mayor M-ideal). Los M-ideales primitivos del espacio de Banach X serán, por definición, aquellos M-ideales de la forma $M_{x'}$, con x' en $\mathrm{ex}(B_{X'})$. El conjunto de los M-ideales primitivos de X se denotará por $Prim(X)$ y en éste se considerará la llamada *topología estructural* **[7; Sección 3.E]**, cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos de la forma

$$h(I) = \{ J \in Prim(X) : I \subset J \}$$

siendo I un M-ideal de X.

Ejemplo 2.9.

Por **[43; Lema 6.5]** sabemos que

los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una C-álgebra son precisamente los ideales primitivos (en sentido algebraico) del álgebra.*

Nota 2.10.

Recordemos la relación existente entre los M-ideales primitivos de un espacio de Banach y los de cualquier M-ideal suyo descrita en **[1; Proposición 3.5(b)]** para el caso real y trasladable sin dificultad al caso complejo gracias a la $\mathbb{R}$-determinación (Proposición 2.7):

si Y es un M-ideal de un espacio de Banach X, entonces $J \longmapsto J \cap Y$ define un homeomorfismo del conjunto abierto $Prim(X) \setminus h(Y)$ sobre $Prim(Y)$.

Seguidamente identificaremos los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra no conmutativa. Para ello introduciremos los conceptos de factor y de representación factorial.

Comenzaremos por el origen:

Definición 2.11.

Un *JB-factor* será una JBW-álgebra sin más ideales w*-cerrados que los triviales. Un *JB-factor de tipo I* será un JB-factor que contiene *proyecciones minimales*.

Recordemos que los idempotentes (elementos π tales que $\pi^2=\pi$) de una JB-álgebra son más conocidos con el nombre de proyecciones. Recordemos también que, a semejanza con el orden usual considerado para los elementos simétricos de una C*-álgebra, en una JB-álgebra A se dispone de un orden natural cuyo cono positivo viene dado por $\{a^2 : a \in A\}$ (véase **[27; 3.3.3]**). Este orden, sobre las proyecciones, viene caracteriado por

$$\pi \le \pi' \Leftrightarrow \pi\pi' = \pi \quad (\text{para } \pi \text{ y } \pi' \text{ proyecciones de } A).$$

El significado de proyección minimal deberá ser por tanto claro; la minimalidad se entenderá en el orden antes mencionado.

Una *representación factorial* de una JB-álgebra A será un homomorfismo del álgebra A sobre una subálgebra w*-densa de un JB-factor, y si este JB-factor es, de hecho, de tipo I la representación se dirá *de tipo I*.

Ejemplos 2.12.

Es bien conocido **[27]** que las siguientes JB-álgebras son, de hecho JB-factores de tipo I:

(i) La JB-álgebra M_3^8 del Ejemplo 1.25(iii).

(ii) Los factores spines del Ejemplo 1.25(iv).

(iii) La JB-álgebra $\mathrm{Sim}(BL_{\mathbb{K}}(H))$ de los operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ (Ejemplo 1.25(ii)).

Además por **[27; Corolario 5.3.7 y Teoremas 5.3.8, 6.2.3 y 7.5.11]** los anteriores son los únicos ejemplos de JB-factores de tipo I.

Es también bien conocido el hecho de que toda JB-álgebra A posee una familia fiel $\{\phi_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ de representaciones factoriales de tipo I **[2; Proposición 5.6, Corolario 5.7 y Proposición 8.7]**. Por tanto, si llamamos A_i a los correspondientes JB-factores de **representación**, tendremos un homomorfismo inyectivo ϕ de la JB-álgebra A en la JB-álgebra $\overset{\ell_\infty}{\underset{i\in\mathfrak{I}}{\oplus}} A_i$, definido por $\phi(a) = (\phi_i(a))_{i\in\mathfrak{I}}$, que será isométrico como cualquier homomorfismo inyectivo entre JB-álgebras **[27; Proposición 3.4.3]** (y recordemos que no hay más JB-factores de tipo I que los ya descritos anteriormente).

Definición 2.13.

Una JBW*-álgebra que no contenga más ideales w*-cerrados que los triviales se llamará *JB*-factor*, y un JB*-factor que contenga proyecciones minimales se llamará *JB*-factor de tipo I*.

Una proyección de una JB*-álgebra, o bien de una JB*-álgebra no conmutativa, no es más que un idempotente simétrico. Como quiera que el conjunto de los elementos simétricos Sim(A) de una JB*-álgebra, o una JB*-álgebra no conmutativa, A, es una JB-álgebra (Ejemplos 1.27(ii) y 1.29(vii)), dispondremos en éste de un orden natural cuyo cono positivo viene dado por $\{a^2 : a \in \mathrm{Sim}(A)\} = \{a^*a : a \in A\}$. Precisamente en este orden se entenderá la minimalidad de las proyecciones.

Una *representación factorial* de una JB*-álgebra A será un *-homomorfismo del álgebra A sobre una subálgebra w*-densa de un JB*-factor, y si este JB*-factor es, de hecho, de tipo I la representación factorial se dirá *de tipo I*.

Ejemplo 2.14.

(i) Utilizando el Ejemplo 1.27(v), no es difícil comprobar que la correspondencia natural de Wright entre las JB-álgebras y las JB*-álgebras aplica los JB-factores sobre los JB*-factores, y es obvio que un JB-factor es de tipo I si, y sólo si, lo es su complexificación. Además, las representaciones factoriales (resp.: representaciones factoriales de tipo I) de una JB*-álgebra A inducen, por restricción del dominio y el rango, representaciones factoriales (resp.: representaciones factoriales de tipo I) de la JB-álgebra Sim(A).

(ii) El cálculo de la JB*-complexificación de los JB-factores de tipo I, descritos en el Ejemplo 2.12, nos permite obtener todos los JB*-factores de tipo I:

a) La JB*-álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$.

b) Las JB*-álgebras $\mathrm{BL}(H)^+$, donde H es un espacio de Hilbert complejo.

c) Las JB*-álgebras $\{ F \in \mathrm{BL}(H) \colon jF^* j^{-1} = F \}$, donde H es un espacio de Hilbert complejo y j es una conjugación (operador conjugado-lineal isométrico e involutivo) o una anticonjugación (operador conjugado-lineal isométrico y anti-involutivo) sobre H.

d) Los JB*-factores cuadráticos, cuya descripción recordaremos en el Capítulo V.

Igual que sucedía para las JB-álgebras, también para una JB*-álgebra A tenemos un *-homomorfismo inyectivo ϕ de A en la ℓ_∞-suma de una familia $\{A_i\}_{i\in\Im}$ de JB*-factores de tipo I. Dicho *-homomorfismo será automáticamente isométrico como cualquier *-homomorfismo inyectivo entre JB*-álgebras **[61; Corolario 1.4]**, y su existencia es una clara consecuencia de la correspondencia de Wright y lo ya sabido para JB-álgebras.

Definición 2.15.

Una JBW*-álgebra no conmutativa que no contenga más ideales w*-cerrados que los triviales se llamará *JB*-factor no conmutativo* o simplemente *factor*. Un factor que contenga proyecciones minimales (en el sentido ya explicado en la Definición 2.13) se llamará *factor de tipo I*.

Una *representación factorial* de una JB*-álgebra no conmutativa A será un *-homomorfismo del álgebra A sobre una subálgebra w*-densa de un factor, y si este factor es, de hecho, de tipo I la representación factorial se dirá *de tipo I*.

Ejemplos 2.16.

En **[44]** se describieron perfectamente los factores de tipo I, los cuales resultaron ser los siguientes:

(i) La JB*-álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$.

(ii) Las JB*-álgebras no conmutativas $(BL(H))^{(\lambda)}$, donde H es un espacio de Hilbert complejo y $\lambda\in[0,1]$.

(iii) Las JB*-álgebras $\{ F \in BL(H): jF^{*}j^{-1} = F \}$, donde H es un espacio de Hilbert complejo y j es una conjugación o una anticonjugación sobre H.

(iv) Los JB*-factores no conmutativos cuadráticos, cuya descripción será recordada en el Capítulo V.

También en **[44; Teorema 1.2]** se establece para cualquier JB*-álgebra no conmutativa A, como en los casos "JB" y "JB*", la existencia de un *-homomorfismo inyectivo (y por tanto isométrico **[43; Proposición 2.1]**) de A en la ℓ_∞-suma de una familia $\{A_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ de JB*-factores no conmutativos de tipo I.

Ya que por **[27; Proposición 7.5.2]** los "factores asociativos de tipo I" (*W*-factores de tipo I*) no son otros que los de la forma $BL(H)$ con H espacio de Hilbert complejo, se sigue que el concepto de representación factorial de tipo I constituye la extensión natural a nuestro contexto no asociativo de las representaciones irreducibles de las C*-álgebras. No sería descabellado pensar por tanto en que, al igual que los ideales primitivos (en sentido algebraico) de una C*-álgebra son los núcleos de las representaciones irreducibles de ésta, los corazones de los ideales internos maximales-modulares de una JB*-álgebra no conmutativa deberían coincidir con los núcleos de las representaciones factoriales de tipo I de ésta. Nuestra primera aproximación en esta línea la da el siguiente resultado:

Teorema 2.17 (**[44; Corolario 1.13]**).

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a A son justamente los núcleos de las representaciones factoriales de tipo I de A.*

Proposición 2.18.

El núcleo de cualquier representación factorial de una JB álgebra no conmutativa A es un ideal primo.*

Demostración. Sea ϕ una representación factorial de A y supongamos que I_1 e I_2 son ideales de A tales que $I_1 I_2 \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. Es bien sabido que $\phi(I_1)$ y $\phi(I_2)$ no tienen por qué ser ideales del factor de representación B, pero lo que si es claro es que los cierres en la topología w* $\overline{\phi(I_1)}^{w^*}$ y $\overline{\phi(I_2)}^{w^*}$ si que son ideales de B, y además $\overline{\phi(I_1)}^{w^*}\ \overline{\phi(I_2)}^{w^*} = 0$, por lo que es claro que $\overline{\phi(I_1)}^{w^*} = 0$ (y por tanto $I_1 \subset \mathrm{Ker}(\phi)$), o bien $\overline{\phi(I_2)}^{w^*} = 0$ (y por tanto $I_2 \subset \mathrm{Ker}(\phi)$), lo cual demuestra nuestra afirmación. ■

Como consecuencia de los dos resultados anteriores tendremos que:

Proposición 2.19.

Si A es una JB-álgebra no conmutativa entonces Prim(A) es un subconjunto denso del conjunto $\beta(A)$ de los ideales primos y cerrados de A.*

Demostración. El Teorema 2.17 junto con la Proposición 2.18 nos garantizan ya la inclusión $\mathrm{Prim}(A) \subset \beta(A)$.

En cuanto a la densidad basta con tener en cuenta que para cualquier espacio de Banach X se tiene que

$$\bigcap \mathrm{Prim}(X) \subset \bigcap\{\mathrm{Ker}(x'):\ x' \in \mathrm{ex}(B_{X'})\} = \{0\},$$

donde la última igualdad es una inmediata consecuencia de los teoremas de Banach-Alaoglu y de Krein-Milman. Así Prim(X) será denso en $\beta(A)$. ■

Definición 2.20.

Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal y continuo f de X en sí mismo se llama *multiplicador* de X si cada $x' \in \mathrm{ex}(B_{X'})$ es un vector propio para el operador traspuesto f^t de f. Es decir, si existe una función

$$a_f : ex(B_{X'}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que

$$x'\circ f = a_f(x')x' \quad \forall\ x' \in ex(B_{X'}).$$

El conjunto de los multiplicadores de X se denotará por $Mult(X)$.

Para $f \in \mathrm{Mult}(X)$ diremos que $g \in \mathrm{Mult}(x)$ es un *adjunto* para f si $a_g = \overline{a_f}$.

Si g_1 y g_2 son adjuntos para f será $x'\circ g_1 = x'\circ g_2$ $\forall\ x' \in \mathrm{ex}(B_{X'})$ y en consecuencia $\mathrm{Imagen}(g_1 - g_2) \subset \bigcap\{\mathrm{Ker}(x'):\ x' \in \mathrm{ex}(B_{X'})\} = 0$, por lo que será $g_1 = g_2$. En consecuencia el adjunto de un multiplicador (caso de existir) está univocamante determinado.

Definimos el *centralizador*, $Z(X)$, de X como el conjunto de aquellos multiplicadores de X que poseen un adjunto (nótese que $Z(X) = \mathrm{Mult}(X)$ para X real). En **[7; Proposición 3.10]** se comprobó que $Z(X)$, para X complejo, tiene una estructura "natural" de **C*-álgebra** conmutativa. También se vio en **[7; Teorema 3.13]** que:

si X es un espacio de Banach y $f \in Z(X)$ entonces $f^t \in \mathcal{C}(X')$.

Ejemplo 2.21.

Dineen y Timoney demostraron en **[18; Teorema 2.8 y Proposición 3.9]** que:

el centralizador del espacio de Banach subyacente a una JB-álgebra A coincide con el centroide de A.*

Merece la pena observar que la definición de centroide de una JB*-álgebra A dada en [18] (a saber, el conjunto de elementos de $\Gamma(A)$ que son continuos) coincide con la nuestra, puesto que, como A es de anulador cero, todo centralizador en A es automáticamente continuo.

Más adelante (Teorema 2.26) veremos que el resultado de Dineen y Timoney antes enunciado es también válido para JB*-álgebras no conmutativas.

Proposición 2.22.

Sea X un espacio de Banach complejo, f un centralizador de X y g un operador hermitiano sobre X. Entonces $g \circ f = f \circ g$.

Demostración. El operador traspuesto de g, g^t, es también un operador hermitiano sobre X' luego conmutará con toda L-proyección de X' (Proposición 2.4), y por tanto conmutará también con todo elemento del álgebra de Cunningham de X'. Como quiera que $f^t \in \mathcal{C}(X')$ (véase el final de la Definición 2.20), podemos afirmar que g^t y f^t conmutan y que, por tanto, g y f conmutan. ∎

Uno de los principales resultados en la teoría de M-estructura es un teorema del tipo Dauns-Hofmann pero justamente para espacios de Banach. Este está explícitamente establecido para el caso real en **[1; Teorema B de la Introducción]**, y para el caso complejo, que es el que nos ocupa, queda establecido de forma un poco más ambigua en [B; **Teorema 3.13(ii) y comentarios posteriores a la Proposición 3.17**]. Su enunciado puede ser el siguiente:

Teorema 2.23.

*Para cada M-ideal primitivo J de un espacio de Banach complejo X y cada elemento f en el centralizador de X, existe un único número complejo $\tilde{f}(J)$ tal que $f(x) - \tilde{f}(J)x \in J$ para todo x en X, y la aplicación $f \longmapsto \tilde{f}$ establece un *-isomorfismo de $Z(X)$ sobre la C*-álgebra $C_b(Prim(X))$ de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre $Prim(X)$ dotado con la topología estructural.*

Este teorema adquiere un significado especialmente relevante en el caso de ser X el espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra A. En este caso el centralizador del espacio de Banach X coincide con el centroide de A (Ejemplo 2.21) por lo que obtendríamos un teorema de Dauns-Hofman "geométrico" para JB*-álgebras:

si A es una JB-álgebra, las C*-álgebras $\Gamma(A)$ y $C_b(Prim(A))$ son *-isomorfas.*

Téngase en cuenta además (Teorema 2.17) que, para una

JB*-álgebra A, los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a A son justamente los núcleos de las representaciones factoriales de tipo I de A (concepto casi algebraico).

Lema 2.24.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa prima. Entonces* $\Gamma(A) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_A$.

Demostración. Veremos que $\Gamma(A)$ es un álgebra prima. Supongamos, para ello, que f y g son elementos de $\Gamma(A)$ tales que $fg = 0$. Tenemos entonces que $f(A)g(A) = (fg)(AA) = 0$, y como quiera que $f(A)$ y $g(A)$ son ideales de A y A es supuesta prima tendremos que $f(A) = 0$ y en consecuencia $f = 0$, o bien $g(A) = 0$ y en consecuencia $g = 0$. Obtenemos así que $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ o $g = 0$, condición que, trivialmente, caracteriza a la álgebras asociativas y conmutativas primas, como es el caso de $\Gamma(A)$. Así $\Gamma(A)$ es una C*-álgebra conmutativa prima con unidad y, en consecuencia $\Gamma(A) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_A$. ■

El anterior resultado nos permite obtener:

Proposición 2.25.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces, para cada ideal J en $\beta(A)$ y cada f en $\Gamma(A)$, existe un único número complejo $f\sim(J)$ tal que $f(a) - f\sim(J)a \in J$ para todo a en A.*

Demostración. Como cualquier ideal cerrado de A, J es una JB*-álgebra no conmutativa y por tanto $J = J^2$. De este modo $f(J) = f(J^2) = Jf(J) \subset J$ y tendremos así definida una aplicación $a + J \longmapsto f(a) + J$ de A/J en A/J que claramente pertenece a $\Gamma(A/J)$. Puesto que A/J es una JB*-álgebra no conmutativa prima sera $\Gamma(A/J) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_{A/J}$, y la existencia del número complejo $f\sim(J)$ de nuestra afirmación está, de este modo, asegurada. Respecto a la unicidad anunciada, si α y β son números complejos tales que $f(a) - \alpha a \in J$ y $f(a) - \beta a \in J$ $\forall\ a \in A$, obtenemos, sin más que restar ambas expresiones, que $(\alpha - \beta)a \in J$ $\forall\ a \in A$. Esto muestra que $\alpha = \beta$ por ser J un ideal propio de A. ■

Usaremos el anterior resultado en combinación con la Proposición 2.22 para obtener la ya anunciada extensión a JB*-álgebras no conmutativas del resultado enunciado en el Ejemplo 2.21.

Teorema 2.26.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces $Z(A) = \Gamma(A)$.*

Demostración. Sea $f \in Z(A)$. Para $a \in \mathrm{Sim}(A)$ los operadores de multiplicación por a, L_a y R_a, son operadores hermitianos sobre A (Nota 2.3(ii)) y, por tanto, f conmuta con ellos (Proposición 2.22). Si a es ahora un elemento cualquiera de A podemos poner $a = h + ik$ con $h,k \in \mathrm{Sim}(A)$, y en vista de la anterior observación será

$fL_a = f(L_h + iL_k) = fL_h + ifL_k = L_h f + iL_k f = (L_h + iL_k)f = L_a f$,

y de idéntica forma se comprueba que $fR_a = R_a f$. f conmuta de este modo con todos los operadores de multiplicación, lo cual nos garantiza que $f \in \Gamma(A)$, y tenemos así demostrada la inclusión $Z(A) \subset \Gamma(A)$.

Para ver la inclusión contraria sea $f \in \Gamma(A)$ y supongamos que $a' \in ex(B_{A'})$. Puesto que el M-ideal primitivo $M_{a'}$ es un ideal primo cerrado (Proposición 2.19), el resultado anterior nos garantiza la existencia de un número complejo $f\sim(M_{a'}) =: a_f(a')$ tal que

$$f(a) - a_f(a')a \in M_{a'}, \quad \forall\ a \in A.$$

Como $M_{a'} \subset Ker(a')$ podemos concluir que para a en A es $0 = a'(f(a) - a_f(a')a) = a'(f(a)) - a_f(a')a'(a)$ y así $a'(f(a)) = a_f(a')a'(a) \quad \forall\ a \in A$, y en consecuencia

$$a' \circ f = a_f(a')a',$$

y ésto para cualquier a' de $ex(B_{A'})$, lo que demuestra que $f \in Mult(A)$. Para ver que f es, de hecho, un centralizador del espacio de Banach subyacente a A bastará con encontrar un $g \in Mult(A)$ tal que $a_g = \overline{a_f}$. Comprobemos que este g es justamente el que cabría esperar, f^*. Lo antes hecho para f hagamoslo para f^* para obtener que $f^* \in Mult(A)$ y una función $a_{f^*}:ex(B_{A'}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f^*(a) - a_{f^*}(a')a \in M_{a'}$, $\forall\ a \in A$, $\forall\ a' \in ex(B_{A'})$. Como $M_{a'}$ (para $a' \in ex(B_{A'})$) es un ideal cerrado de A será *-invariante (Ejemplo 1.29(iii)) y, por tanto

$f(a^*) - \overline{a_{f^*}}(a')a^* = (f^*(a) - a_{f^*}(a')a)^* \in M_{a'}{}^* = M_{a'}$, $\quad \forall\, a \in A$, $\forall\, a' \in \mathrm{ex}(B_{A'})$, lo que demuestra que $(a' \circ f)(a^*) = \overline{a_{f^*}(a')}a'(a^*)$ $\forall\, a \in A$, $\forall\, a' \in \mathrm{ex}(B_{A'})$, y así $a' \circ f = \overline{a_{f^*}}(a')a'$ $\quad \forall\, a' \in \mathrm{ex}(B_{A'})$. Será entonces $\overline{a_{f^*}} = a_f$, con lo que $f \in Z(A)$. ■

Nota 2.27.

Hemos dado una demostración completa del Teorema 2.26 ya que su principal ingrediente, a saber la Proposición 2.25, se necesitará esencialmente en lo que sigue. No obstante el Teorema 2.26 se puede deducir fácilmente de su precedente conmutativo (Ejemplo 2.21) como sigue. Puesto que para una JB*-álgebra no conmutativa, A, es $Z(A) = Z(A^+)$ ya que A y A^+ coinciden como espacios de Banach, y además $Z(A^+) = \Gamma(A^+)$ (Ejemplo 2.21), bastaría con demostrar que $\Gamma(A^+) = \Gamma(A)$ para obtener el anterior teorema. Comprobemos que efectivamente

para una JB-álgebra no conmutativa A es $\Gamma(A^+) = \Gamma(A)$.*

Demostración. Desde luego la inclusión $\Gamma(A) \subset \Gamma(A^+)$ no ofrece duda. Para ver la inclusión contraria obsérvese que, para f en el centroide del álgebra A^+ y D una derivación del álgebra A^+, el conmutador $[D,f]$ pertenece al centroide del álgebra A^+ pues para a y b en A^+ se tiene

$$[D,f](a\cdot b) = (D\circ f - f\circ D)(a\cdot b) = (D\circ f)(a\cdot b) - (f\circ D)(a\cdot b) =$$

$$D(f(a\cdot b)) - f(D(a\cdot b)) = D(a\cdot f(b)) - f(D(a)\cdot b + a\cdot D(b)) =$$

$$D(a)\cdot f(b) + a\cdot D(f(b)) - D(a)\cdot f(b) - a\cdot f(D(b)) =$$

$$a\cdot D(f(b)) - a\cdot f(D(b) = a\cdot(D\circ f - f\circ D)(b) = a\cdot[D,f](b).$$

Puesto que para cualquier a en el álgebra A la aplicación $D_a : b \longmapsto [a,b] = ab - ba$ es una derivación de A^+ (ver **[56; Pag. 146]**), tendremos que, para a en A, la aplicación $f \longmapsto [D_a, f]$ es una derivación continua de la C*-álgebra conmutativa $\Gamma(A^+)$. En virtud del teorema de Singer-Wermer **[8; Teorema 18.16]**

si A es un álgebra de Banach conmutativa y D es una derivación continua de A, entonces $D(A)$ está incluido en el radical de Jacobson de A

y la bien conocida semisimplicidad de las C*-álgebras, podemos asegurar que esta derivación es nula. En consecuencia

$$f([a,b]) = [a, f(b)] \quad \forall\ a,b \in A,$$

o lo que es lo mismo

$$f(ab - ba) = af(b) - f(b)a \quad \forall\ a,b \in A.$$

Teniendo en cuenta que por ser $f \in \Gamma(A^+)$ es

$$f(ab + ba) = af(b) + f(b)a \quad \forall\ a,b \in A,$$

obtenemos, sumando ambas expresiones que

$$f(ab) = af(b) \quad \forall\ a,b \in A,$$

y restándolas

$$f(ba) = f(b)a \quad \forall\ a,b \in A,$$

lo que demuestra que $f \in \Gamma(A)$. ■

El anterior Teorema 2.26 junto con el Teorema 2.23 nos permiten extender al caso no conmutativo el ya comentado teorema de Dauns-Hofmann "geométrico" para JB*-álgebras no conmutativas:

si A es una JB-álgebra no conmutativa, entonces las C*-álgebras* $\Gamma(A)$ *y* $C_b(Prim(A))$ *son *-isomorfas.*

El anterior resultado constituye ya una extensión del clásico teorema de Dauns-Hofmann para C*-álgebras. Basta con tener en cuenta que, como se dijo en el Ejemplo 2.9, para éstas, los M-ideales primitivos de su espacio de Banach subyacente coinciden con los ideales primitivos algebraicos.

Desafortunadamente no sabemos si los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra, equivalentemente los núcleos de las representaciones factoriales de tipo I (Teorema 2.17), coinciden con los corazones de los ideales internos maximales-modulares, lo cual nos daría ya, en vista de lo anterior, el teorema de Dauns-Hofmann para JB*-álgebras que anunciábamos. Comprobaremos más adelante (Proposición 2.30), sin embargo, que:

los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB-álgebra no conmutativa son corazones de ideales internos maximales-modulares del álgebra.*

lo cual hace pensar que la siguiente conjetura no es en absoluto descabellada, máxime si tenemos en cuenta el comentario previo al Teorema 2.17 (aunque no hemos conseguido probarla):

los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB-álgebra no conmutativa coinciden justamente con los corazones de los ideales internos maximales-modulares del álgebra.*

Así, para obtener nuestra deseada descripción del centroide de una JB*-álgebra no conmutativa a la manera del teorema de Dauns-Hofmann para C*-álgebras tendremos, todavía, que realizar un esfuerzo adicional.

Recordemos que, para una JB*-álgebra no conmutativa A, obteníamos (Proposición 2.25) para cada ideal J en $\beta(A)$ y cada f en $\Gamma(A)$ un único núemero complejo $f\sim(J)$ tal que $f(a) - \tilde{f}(J)a \in J$ $\forall\ a \in A$. Veremos seguidamente el buen comportamiento de las aplicaciones $J \longmapsto \tilde{f}(J)$ y $f \longmapsto \tilde{f}$.

Proposición 2.28.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa y Λ cualquier subconjunto de $\beta(A)$ conteniendo a $Prim(A)$. Entonces, para cada J en Λ y cada f en $\Gamma(A)$, existe un único número complejo $\tilde{f}(J)$ tal que $f(a) - \tilde{f}(J)a \in J$ para todo a en A. Fijado f la* *aplicación* $f^{\sim} : J \longmapsto f^{\sim}(J)$ *de* Λ *en* $\mathbb{C}$ *es continua y acotada, y la aplicación* $f \longmapsto f^{\sim}$ *es un *-isomorfismo de la C*-álgebra* $\Gamma(A)$ *sobre la C*-álgebra* $C_b(\Lambda)$ *de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre* Λ.

Demostración. La existencia del número complejo $f^{\sim}(J)$ está garantizada por la Proposición 2.25. Demostremos ahora que, para f en $\Gamma(A)$, $f^{\sim}$ es continua sobre $\beta(A)$ (y de este modo sobre Λ). Sabemos que

cada M-ideal de un espacio de Banach es la intersección de los M-ideales primitivos que lo contienen

[**Demostración.** En **[1; Proposición 3.5 a)]** se demuestra para el caso real, y para el caso complejo basta con aplicar la Proposición 2.7.],

y que si J_1 y J_2 están en $\beta(A)$ con $J_1 \subset J_2$ se tiene que $f(a) - f^{\sim}(J_1)a \in J_1 \subset J_2$ $\forall\, a \in A$ y por tanto $f^{\sim}(J_1) = f^{\sim}(J_2)$. Como consecuencia de estos dos hechos tendremos que si C es cualquier subconjunto de $\mathbb{C}$ se tendrá que:

$$\bigcap\{I \in \mathrm{Prim}(A): f^{\sim}(I) \in C\} = \bigcap\{J \in \beta(A): f^{\sim}(J) \in C\}.$$

Sea pues C cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ y comprobemos que $f^{\sim -1}(C)$ es cerrado en $\beta(A)$. Para ello, sea $J_0 \in \overline{f^{\sim -1}(C)} = \mathrm{hull}(\ker(f^{\sim -1}(C)))$ y veamos que $J_0 \in f^{\sim -1}(C)$. J_0

es un elemento de $\beta(A)$ con $\bigcap\{J \in \beta(A): f^{\sim}(J) \in C\} \subset J_0$. Sea I_0 en $\mathrm{Prim}(A)$ tal que $J_0 \subset I_0$. Sabemos que $f^{\sim}(J_0) = f^{\sim}(I_0)$, por lo que bastará con probar que $f^{\sim}(I_0) \in C$. Como quiera que por los Teoremas 2.23 y 2.26, $f^{\sim}_{|\mathrm{Prim}(A)}$ es continua y por tanto el conjunto $\{I \in \mathrm{Prim}(A): f^{\sim}(I) \in C\}$ es cerrado en $\mathrm{Prim}(A)$, y dado que

$$\bigcap\{I \in \mathrm{Prim}(A): f^{\sim}(I) \in C\} = \bigcap\{J \in \beta(A): f^{\sim}(J) \in C\} \subset J_0 \subset I_0,$$

será $I_0 \in (f^{\sim}_{|\mathrm{Prim}(A)})^{-1}(C)$, y tendremos finalmente que $f^{\sim}(I_0) \in C$. Así $f^{\sim}$ es continua sobre $\beta(A)$.

Veamos ahora que $f^{\sim}$ está acotada sobre $\beta(A)$ (y por tanto sobre Λ). Sea J en $\beta(A)$ y a' en A' con $\|a'\| = 1$ tal que $J \subset \mathrm{Ker}(a')$. Entonces $f(a) - f^{\sim}(J)a \subset \mathrm{Ker}(a')$ $\forall\, a \in A$, así $0 = a'(f(a) - f^{\sim}(J)a) = (a' \circ f - f^{\sim}(J)a')(a)$ $\forall\, a \in A$, y por tanto $a' \circ f = f^{\sim}(J)a'$. Así $|f^{\sim}(J)| = \|f^{\sim}(J)a'\| = \|a' \circ f\| \leq \|f\|$, y será por tanto $|f^{\sim}(J)| \leq \|f\|$ (y ésto para cualquier J en $\beta(A)$), lo que demuestra que $f^{\sim}$ está acotada sobre $\beta(A)$.

Finalmente, consideremos la aplicación $\phi: f \longmapsto f^{\sim}_{|\Lambda}$ de $\Gamma(A)$ en $C_b(\Lambda)$. Por los Teoremas 2.23 y 2.26 la aplicación $\phi_1: f \longmapsto f^{\sim}_{|\mathrm{Prim}(A)}$ es un $*$-isomorfismo de $\Gamma(A)$ sobre $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ y, si ϕ_2 denota el $*$-homomorfismo inyectivo de $C_b(\Lambda)$ en $C_b(\mathrm{Prim}(A))$ inducido por la inclusión densa de $\mathrm{Prim}(A)$ en Λ (Proposición 2.19), tendremos claramente que $\phi_2 \circ \phi = \phi_1$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & C_b(\Lambda) \arrow[d, "\phi_2"] \\ & C_b(\mathrm{Prim}(A)) \end{tikzcd}$$

Por tanto ϕ es un *-isomorfismo de $\Gamma(A)$ sobre $C_2(\Lambda)$, lo cual concluye la demostración. ∎

Estudiaremos seguidamente la relación existente entre los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra no conmutativa y los corazones de sus ideales internos maximales-modulares. Obsérvese, Teorema 2.17, que los M-ideales primitivos del espacio de Banach subyacente a una JB*-álgebra no conmutativa coinciden con los núcleos de las representaciones factoriales de tipo I del álgebra, lo cual nos hace recordar los trabajos de L. Bunce para JB-álgebras, [12, 13].

Siguiendo los resultados de [12] y [13] obtenemos:

Lema 2.29.

Si A es una JB-álgebra con unidad y J es el núcleo de una representación factorial de tipo I de A, entonces J es el corazón de un ideal interno maximal-modular de A.

Demostración. Se observó en [13; Sección 2] que:

si J es el núcleo de una representación factorial de tipo I de una JB-álgebra A con unidad, existe entonces un estado puro a' de A tal que J es el mayor ideal cerrado de A contenido en $Ker(a')$

y por otra parte en **[12]** fue observado que:

si A es una JB-álgebra con unidad y a' un estado puro de A, entonces el conjunto $I = \{ a \in A: a'(a^2) = 0 \}$ es un ideal interno cerrado maximal de A.

Sea pues J como en nuestro enunciado. Existirá entonces un estado puro a' de A tal que J es el mayor ideal cerrado de A, de hecho, el mayor ideal de A por tener A unidad, contenido en $\mathrm{Ker}(a')$. Además el conjunto $I := \{ a \in A: a'(a^2) = 0 \}$ es un ideal interno cerrado maximal de A, de hecho, un ideal interno maximal porque A tiene unidad. Sea $a \in J$, entonces $a^2 \in J \subset \mathrm{Ker}(a')$, y así $a'(a^2) = 0$, lo cual nos muestra que $J \subset I$. Es sabido además por **[27; Lema 3.6.2(ii)]** que

si A es una JB-álgebra con unidad y a' un estado de A, entonces $a'(a)^2 \leq a'(a^2)$ $\forall a \in A$

por lo que en nuestro caso tendremos para $a \in I$, $0 \leq a'(a)^2 \leq a'(a^2) = 0$ y en consecuencia $I \subset \mathrm{Ker}(a')$. Veamos que

J es el corazón de I. Así, si J_1 es otro ideal de A contenido en I se tendrá que $J_1 \subset \mathrm{Ker}(a')$, y como quiera que J era el mayor ideal de A contenido en $\mathrm{Ker}(a')$ tnedremos que $J_1 \subset J$. De este modo J es el corazón del ideal interno maximal-modular I. ■

Proposición 2.30.

Para una JB-álgebra no conmutativa A tenemos que*

$$Prim(A) \subset Cor(A) \subset \beta(A).$$

Demostración. Según se vio en la Nota 1.23 del capítulo I $\mathrm{Cor}(A) \subset \beta(A)$ para cualquier álgebra de Jordan no conmutativa normada y completa.

Para ver la inclusión $\mathrm{Prim}(A) \subset \mathrm{Cor}(A)$ téngase en cuenta que, por definición, los ideales internos maximales-modulares de A coinciden con los de A^+ y, además, son cerrados, por lo que los corazones de éstos (relativos a A o A^+) también lo serán. Lo anterior nos permite afirmar que los corazones de los ideales internos maximales-modulares de A o de A^+ se pueden obtener como los mayores M-ideales de A o A^+ contenidos en éstos. Pero, como los M-ideales dependen sólo del espacio de Banach subyacente, se tiene que:

para una JB-álgebra no conmutativa A es $Cor(A) = Cor(A^+)$,* y dado que evidentemente $\mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Prim}(A^+)$, podremos suponer que A es conmutativa. Sea pues J un M-ideal primitivo del espacio de Banach subyacente a la JB*-álgebra A. Debemos demostrar que J es el corazón de un ideal interno maximal-modular de A. Supongamos primeramente que A tiene unidad. Como ya decíamos anteriormente J es el núcleo de una representación factorial de tipo I, π, de A (Teorema 2.17) induciendo, por restricción del dominio y el rango, una representación factorial de tipo I, $\pi\sim$, de la JB-álgebra con unidad $\mathrm{Sim}(A)$ (Ejemplo 2.14(i)). Por el lema anterior $\mathrm{Ker}(\pi\sim)$ es el corazón de un ideal interno maximal-modular I de la JB-álgebra $\mathrm{Sim}(A)$. Puesto que de forma inmediata $I + \mathrm{i}I$ es un ideal interno propio de A, existirá un ideal interno maximal M de A (maximal-modular pues A tiene unidad) con $I + \mathrm{i}I \subset M$. $\mathrm{Sim}(M \cap M^*)$ es un ideal interno propio de $\mathrm{Sim}(A)$ conteniendo a I, luego $\mathrm{Sim}(M \cap M^*) = I$ por la maximalidad de I, y de este modo $M \cap M^* = I + \mathrm{i}I$. Comprobemos que J es el mayor ideal de A contenido en el ideal interno maximal-modular M. Sea P el corazón de M que sabemos es cerrado y por tanto *-invariante. Claramente

$$J = \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Ker}(\pi\sim) + \mathrm{i}\mathrm{Ker}(\pi\sim) \subset P \subset M \cap M^* = I + \mathrm{i}I,$$

y por tanto $\mathrm{Ker}(\pi\sim) \subset \mathrm{Sim}(P) \subset I$, con lo que $\mathrm{Ker}(\pi\sim) = \mathrm{Sim}(P)$ y en consecuencia $J = P$.

Para finalizar la demostración supongamos que A no tiene unidad. Consideremos entonces la unitización A_1 de A que es una nueva JB*-álgebra (véase el Ejemplo 1.29(iv)). Si recordamos ahora la relación existente entre los M-ideales primitivos de un espacio de Banach y los de cualquier M-ideal suyo descrita en la Nota 2.10 obtenemos un M-ideal primitivo J_1 de A_1 tal que $J = J_1 \cap A$. Por la primera parte de la demostración J_1 es el corazón (en A_1) de un ideal interno maximal M_1 de A_1. Ya que claramente $M_1 \quad A$, existe un x en A con $1-x \in M_1$ y por la Nota 1.16 $M_1 \cap A$ es un ideal interno maximal-modular de A cuyo corazón es J. ■

El tan esperado teorema tipo Dauns-Hofmann para JB*-álgebras se deduce ahora directamente de las Proposiciones 2.28 y 2.30.

Teorema 2.31.

Para una JB-álgebra no conmutativa A, las C*-álgebras* $\Gamma(A)$ *y* $C_b(Cor(A))$ *son *-isomorfas. Concretamente, para cada* J *en* $Cor(A)$ *y cada* f *en* $\Gamma(A)$, *existe un único número complejo* $f^\sim(J)$ *tal que* $f(a) - f^\sim(J)a \in J$ *para todo* a *en* A, *y la aplicación* $f \longmapsto f^\sim$ *es un *-isomorfismo de* $\Gamma(A)$ *sobre la C*-álgebra* $C_b(Cor(A))$ *de las funciones complejo-valuadas continuas y acotadas sobre* $Cor(A)$.

CAPITULO III

CENTROIDE EXTENDIDO DE LAS JB*-ALGEBRAS

El centroide extendido, como el propio nombre sugiere, es un conveniente agrandamiento del centroide introducido por W. S. Martindale III en [36] para anillos asociativos primos con la intención de caracterizar los anillos primos verificando una identidad polinómica generalizada. De hecho, la importancia de este concepto había sido ya observada por el propio Martindale en [37] en conexión con el estudio de los isomorfismos de Lie de los anillos asociativos primos.

Posteriormente Amitsur [3], Rowen [54] y otros extendieron este concepto a anillos asociativos semiprimos, y pronto se observó la necesidad de generalizar este concepto al ámbito no asociativo. Fueron Erickson, Martindale y Osborn en [21], quienes iniciaron esta empresa generalizando el concepto de centroide extendido a las álgebras no asociativas primas. Baxter y Martindale ralizaron ya el último avance en **[6]** introduciendo el concepto de centroide extendido para las álgebras no asociativas semiprimas.

El concepto de centroide extendido ha resultado ser muy útil para el estudio de la estructura de las álgebras primas, para las cuales el centroide extendido resulta ser un cuerpo extensión del cuerpo base, siendo especialmente interesante el hecho de que el centroide extendido se reduzca al cuerpo base (en cuyo caso el álgebra se llamará *centralmente cerrada*). El lector puede acudir a **[36]**, **[22]** y **[16]** para ilustrar la utilidad antes mencionada del centroide extendido.

Pasando ya a nuestro ambiente de álgebras normadas destaquemos el trabajo de M. Cabrera y A. Rodriguez, quienes iniciaron en **[15]** un estudio sistemático dei centroide extendido de las álgebras normadas semiprimas. Más adelante tendremos oportunidad de recordar y usar la reformulación del concepto de centroide extendido que estos autores obtienen en **[15; Teorema 1]**.

Destaquemos también el trabajo de P. Ara **[4]**, en el que obtiene una descripción del centroide extendido de una C^*-álgebra. Concretamente, en **[4; Teorema 2.3]** se establece que *el centroide extendido de una C^*-álgebra A es "idéntico" al límite algebraico directo* $\lim\limits_{\Omega\in\mathcal{F}} C(\Omega)$, *donde* $\mathcal{F}$ *denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espectro primitivo de* A *y* $C(\Omega)$ *denota el álgebra de las funciones complejo-valuadas continuas sobre* Ω.

Como consecuencia de esta descripción se obtiene que

toda C^*-álgebra prima es centralmente cerrada.

Obtendremos en este capítulo la extensión natural del teorema de Ara a nuestro ambiente de JB*-álgebras y JB*-álgebras no conmutativas. El lector seguramente intuirá que esta extensión debiera establecer que

el centroide extendido de una JB^*-álgebra no conmutativa A es "idéntico" al límite algebraico directo $\lim\limits_{\Omega\in\mathcal{F}} C(\Omega)$, *donde ahora* $\mathcal{F}$ *denotará la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio de los corazones de los ideales internos maximales-modulares de* A.

Definición 3.1.

En lo que sigue A denotará un álgebra semiprima (concepto éste que fue introducido en la Definición 1.9).

Un *centralizador parcialmente definido* del álgebra A será, por definición, un operador lineal f de un ideal de A (llamado el *dominio* de f y denotado por $dom(f)$) en A verificando la propiedad:

$$f(ab) = af(b) \quad \text{y} \quad f(ba) = f(b)a$$

para cualesquiera a en A y b en $\mathrm{dom}(f)$.

Recordemos que un ideal I de un álgebra A se dice *esencial* si

$$I \cap J \neq 0$$

para cada ideal no cero J de A.

Un *centralizador esencialmente definido* del álgebra A será un centralizador parcialmente definido de A cuyo dominio es un ideal esencial de A.

En [6] se definieron opereraciones suma y producto en el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos del álgebra A (las mismas se pueden definir en el conjunto de los centralizadores parcialmente definidos de A, pero no lo haremos ya que este conjunto no va a ser utilizado). Concretamente, si f y g son dos centralizadores esencialmente definidos del álgebra A definimos la suma $f + g$ como el nuevo centralizador esencialmente definido de A cuyo dominio es $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ y con valores

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \qquad \forall\ a \in dom(f + g),$$

y definimos el producto fg como el nuevo centralizador esencialmente definido de A cuyo dominio de definición es $\{a \in \mathrm{dom}(g) : g(a) \in \mathrm{dom}(f)\}$ y con valores

$$(fg)(a) = f(g(a)) \qquad \forall\, a \in dom(fg).$$

También, de forma totalmente natural, podemos definir en el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos del álgebra A un concepto de extensión. Concretamente, si f y g son centralizadores esencialmente definidos de A diremos que g es una extensión de f si verifica que

$$dom(f) \subset dom(g) \quad y \quad g(a) = f(a) \qquad \forall\, a \in dom(f).$$

Podríamos considerar ahora en el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos de A una relación $\simeq$ definida por

$$f \simeq g \;\Leftrightarrow\; f_{|dom(f)\cap dom(g)} = g_{|dom(f)\cap dom(g)}.$$

En [6] se comprobó que la anterior relación es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos de A. Además las operaciones anteriormente definidas son compatibles con la anterior relación de equivalencia y, el centroide extendido, $C(A)$, de A se define clásicamente como el conjunto cociente con las operaciones inducidas.

En **[15; Proposición 1]** se vislumbra un procedimiento para evitar el anterior paso a cociente. Concretamente *para cada centralizador esencialmente definido f de un álgebra semiprima A existe un único centralizador esencialemente definido maximal g del álgebra A que es una extensión de f (donde la maximalidad se entenderá en el sentido de que no existen centralizadores esencialmente definidos que extiendan estrictamente a g).*

Lo anterior nos permite, igual que se hace en **[15]**, ver el centroide extendido $C(A)$ de un álgebra semiprima A como el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos maximales de A, definiendo la suma y el producto de dos centralizadores esencialmente definidos maximales de A como el único centralizador esencialmente definido maximal de A que extiende la suma y el producto usuales (respectivamente).

La anterior será justamente la formulación de centroide extendido que adoptaremos en la presente memoria.

Definición 3.2.

Un anillo (asociativo) R se dice *von Newmann regular* si verifica la siguiente propiedad

$$\forall\, r \in R \quad \exists\, s \in R : \quad rsr = r.$$

Teorema 3.3 ([6; Teorema 2.5]).

Sea A un álgebra semiprima. Entonces $C(A)$ es un anillo conmutativo von Newmann regular.

Detengámonos en este punto para hacer notar que los elementos del centroide del álgebra semiprima A no son otra cosa que los *centralizadores totalmente definidos* de A. De esta manera podemos ver el centroide de A, $\Gamma(A)$, como un subanillo del centroide extendido $C(A)$, con lo que queda justificada la afirmación del comienzo de este Capítulo de que el centroide extendido es un "agrandamiento" del centroide.

Pasemos ahora a nuestro contexto de JB*-álgebras no conmutativas. Debe ser claro que una tal álgebra es automáticamente semiprima y por tanto tiene perfecto sentido hablar de su centroide extendido. Precisamente el objetivo de este Capítulo será obtener, como ya se dijo, una descripción del centroide extendido de las JB*-álgebras no conmutativas a la manera de la descripción que Ara da para la C*-álgebras. Nuestro primer paso será transferir la involución de la JB*-álgebra A a su centroide extendido (en la forma que el lector seguramente estará imaginando) para obtener una involución sobre $C(A)$, cuyo comportamiento estudiaremos. A continuación obtenemos la herramienta esencial para el estudio de dicho comportamiento.

Proposición 3.4.

Para cada elemento a en una JB-álgebra no conmutativa A, tenemos*

$$\frac{1}{2}\|a\|^2 \leq \|a^\star a\|.$$

Demostración. Supongamos, para comenzar, que A es un JB*-factor no conmutativo de tipo I. Por **[44; Teorema 2.7]** sabemos que

si A es un factor de tipo I entonces es conmutativo, cuadrático o existe una C-álgebra B y un λ con $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ tal que $A = B^{(\lambda)}$.*

Si A es conmutativo el resultado se deduce de **[43; Proposición 2.2]** que nos garantiza que

para cualquier JB-álgebra no conmutativa A y cualquier a en A se tiene $\|a\|^2 \leq \|a^\star a + aa^\star\|$.*

Si $A = B^{(\lambda)}$ para conveniente C*-álgebra B y $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$, nuestra afirmación también es cierta sin más que tener en cuenta que

$$a^\star a = \lambda a^\star \square a + (1-\lambda) a \square a^\star \geq \lambda a^\star \square a \geq \frac{1}{2} a^\star \square a,$$

donde $\square$ denota el producto de la C*-álgebra B y $\geq$ denota el orden usual de los elementos simétricos de una C*-álgebra. Y de este modo $\|a^\star a\| \geq \frac{1}{2}\|a^\star \square a\| = \frac{1}{2}\|a\|^2$.

En otro caso, según observamos al comienzo, deberá ser A una JB*-álgebra no conmutativa cuadrática. Recordemos ahora la descripción dada en **[44; Teoremas 3.2 y 3.4]** para tales álgebras:

si A es una JB-álgebra no conmutativa cuadrática existirán un espacio de Hilbert real X y una aplicación bilineal anticonmutativa $(x,y) \longmapsto x\wedge y$ de $X \times X$ en X verificando*

$$(x\wedge y|z) = (x|y\wedge z),$$

$$\|x\wedge y\| \leq \|x\|\|y\|,$$

tal que, definiendo en la suma de Hilbert $\mathbb{R}\oplus X$ el producto

$$(\alpha,x)(\beta,y) := (\alpha\beta - (x|y)\ ,\ \alpha y + \beta x + x\wedge y),$$

tenemos que A es totalmente isomorfa a $(\mathbb{R}\oplus X)_{\mathbb{C}}$ con el producto de la complexificación, involución

$$((\alpha,x) + i(\beta,y))^\star := (\alpha,-x) + i(-\beta,y),$$

y norma

$$\|(\alpha,x)+i(\beta,y)\|^2 :=$$

$$\|(\alpha,x)\|^2+\|(\beta,y)\|^2+2[\|(\alpha,x)\|^2\|(\beta,y)\|^2-((\alpha,x)|(\beta,y))^2]^{1/2}.$$

Si $a = (\alpha,x) + i(\beta,y)$ entonces

$$a^\star a = [(\alpha,-x)+i(-\beta,y)][(\alpha,x)+i(\beta,y)] =$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2,0)+i(0,2\alpha y-2\beta y-2x\wedge y),$$

con lo que

$$\|a^*a\|^2 = \|(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2,0)\|^2+\|(0,2\alpha y-2\beta x-2x\wedge y)\|^2+$$
$$2[\|(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2,0)\|^2\|(0,2\alpha y-2\beta x-2x\wedge y)\|^2-$$
$$((\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2,0)\,|\,(0,2\alpha y-2\beta x-2x\wedge y))^2]^{1/2} =$$
$$(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2)^2+\|2\alpha y-2\beta x-2x\wedge y\|^2+$$
$$2(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2)\|2\alpha y-2\beta x-2x\wedge y\| =$$
$$(\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2+2\|\alpha y-\beta x-x\wedge y\|)^2,$$

y por tanto

$$\|a^*a\| = \alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2+2\|\alpha y-\beta x-x\wedge y\|^2.$$

Calculemos ahora $\frac{1}{2}\|a\|^2$.

$$\frac{1}{2}\|a\|^2=\frac{1}{2}[\|(\alpha,x)\|^2+\|(\beta,y)\|^2+2[\|(\alpha,x)\|^2\|(\beta,y)\|^2-((\alpha,x)\,|\,(\beta,y))^2]^{1/2}]\leq$$
$$\frac{1}{2}[\|(\alpha,x)\|^2+\|(\beta,y)\|^2+2\|(\alpha,x)\|\|(\beta,y)\|] \leq \|(\alpha,x)\|^2+\|(\beta,y)\|^2 =$$
$$\alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2 \leq \alpha^2+\beta^2+\|x\|^2+\|y\|^2+2\|\alpha y-\beta x-x\wedge y\|^2 = \|a^*a\|.$$

Finalmente, en el caso en que A no tenga por qué ser un factor de tipo I, sea ϕ una representación factorial de tipo I de A en un factor B_ϕ de tipo I. Teniendo en cuenta lo ya demostrado será

$$\frac{1}{2}\|\phi(a)\|^2 \leq \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\|. \qquad (*)$$

Como la aplicación $x \longmapsto (\phi(x))_\phi$ es un *-homomorfismo inyectivo (automáticamente isométrico) de la JB*-álgebra no conmutativa A en la JB*-álgebra no conmutativa $\overset{\ell_\infty}{\underset{\phi}{\odot}} B_\phi$ (véase el comentario posterior al Ejemplo 2.16) tendremos que:

$\|a\|=\sup\{\|\phi(a)\|$: ϕ es una representación factorial de tipo I de $A\}$,

que junto con (*) nos demuestra el enunciado. ■

Definición 3.5.

Una involución * sobre un anillo R se dice *definida positiva* si, para cualquier subconjunto finito $\{ r_j \}$ de elementos de R, se tiene que

$$\sum r_j^* r_j = 0 \Rightarrow r_j = 0 \text{ para todo j.}$$

Un anillo von Newmann regular con involución tal que, para r en R, se tiene que

$$r^* r = 0 \Rightarrow r = 0,$$

se llamará *anillo *-regular.*

Recordemos cómo en la primera sección transferiamos la involución de una JB*-álgebra no conmutativa A a su centroide $\Gamma(A)$ (convirtierndo a éste en tal caso en una C*-álgebra conmutativa). De forma análoga transferiremos ahora la involución de la JB*-álgebra no conmutativa A a su centroide extendido $C(A)$. Concretamente, si f es un elemento de $C(A)$ definimos $f^* \in C(A)$ por

$$dom(f^*) = (dom(f))^* \quad y \quad f^*(b) = (f(b^*))^* \quad \forall\ b \in dom(f^*).$$

Es totalmente lógico pensar que, al igual que sucedía para el centroide, $C(A)$ con esta involución tenga interesantes propiedades. Veremos que efectivamente así sucede.

Lema 3.6.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces $C(A)$ es un anillo *-regular con involución definida positiva.*

Demostración. Una de las herramientas que utilizaremos en la demostración será el orden usual que se puede considerar sobre los elementos simétricos de cualquier JB*-álgebra no conmutativa (véase la Definición 2.13).

Supongamos que $\sum_{j=1}^{n} f_j^* f_j = 0$ con $f_1,\ldots,f_n$ en $C(A)$. Para a en $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}(f_j)$, se tiene que, si $j=1,\ldots,n$, $a\in\mathrm{dom}(f_j)$ y por tanto $a^*\in(\mathrm{dom}(f_j))^*=\mathrm{dom}(f_j^*)$. Así, para $j=1,\ldots,n$, $a^*a\in\mathrm{dom}(f_j)$ y $f_j(a^*a) = a^*f_j(a) \in \mathrm{dom}(f_j^*)$, lo que nos garantiza que a^*a pertenece a $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}(f_j^* f_j)$. Además $0 = \sum_{j=1}^{n} (f_j^* f_j)(a^*a) = \sum_{j=1}^{n} [f_j(a)]^* f_j(a)$. Teniendo en cuenta que por **[44; Teorema 3.7]**

para una JB-álgebra no conmutativa A y b en A se tiene que $b^*b \geq 0$*

tendremos que $[f_j(a)]^* f_j(a) = 0$ para $j = 1,\dots,n$ y por la Proposición 3.4 será $f_j(a) = 0$ para $j = 1,\dots,n$. Finalmente $f_j = 0$ para $j = 1,\dots,n$ por ser $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}(f_j^* f_j)$ un ideal esencial de A. ■

Cabe destacar que serán justamente estas "buenas propiedades" del anillo $C(A)$ las que utilizaremos como herramienta fundamental para la descripción que nos proponemos de $C(A)$.

Definición 3.7.

Si R es un álgebra racional con unidad y con involución definida positiva definimos el *cono positivo* de R como el conjunto de los elementos de la forma $\sum r_j^* r_j$, donde $\{ r_j \}$ es cualquier subconjunto finito de R. De este modo hacemos de R un conjunto parcialmente ordenado de la forma usual. Un elemento r de R se dice *acotado* si

$$r^* r \le n$$

para conveniente natural n, lo que equivale a decir que existe un subconjunto finito $\{ r_j \}$ de R tal que

$$r^* r + \sum r_j^* r_j = n.$$

El conjunto de todos los elementos acotados de R se denotará por R_b. Para r en R_b definimos

$$|r|_b^2 = \inf\{ q \in \mathbb{Q} : r^* r \le q \}.$$

Se observó en [28; Pag. 342] que $|\cdot|_b$ es una seminorma de álgebra sobre R_b que, además, está muy cerca de ser una norma de C*-álgebra pues se verifica que

$$|r^*r|_b = |r|_b^2 \quad \forall\, r \in R_b.$$

Lamentablemente, no es generalmente cierto que $|r|_b = 0$ implique $r = 0$.

Ejemplo 3.8.

Para una C-álgebra A con unidad tenemos que* $A_b = A$ *y* $|\cdot|_b = \|\cdot\|$ *en* A.

Demostración. Debería de ser bien sabido que el orden parcial antes definido coincide, para la C*-álgebra A, con el orden usual sobre los simétricos de A. Así, para $a \in A$ tenemos que

$$|a|_b^2 = \inf\{q \in \mathbb{Q} : a^*a \le q\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : a^*a \le \alpha\} = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Y de este modo $A_b = A$ y $|\cdot|_b = \|\cdot\|$. ■

El pricipal resultado que utilizaremos en lo sucesivo, y que como se verá en su enunciado enlaza con las "buenas propiedades" de C(A), será un teorema de D. Handelman que puede ser establecido como sigue

Teorema 3.9 ([28; Corolario 1.2]).

*Todo anillo conmutativo *-regular con involución definida positiva es el anillo clásico de cocientes de su anillo de elementos acotados.*

Ya que por el Lema 3.6 $C(A)$ es, para una JB*-álgebra no conmutativa A, un anillo *-regular con involución definida positiva podríamos utilizar el teorema de Handelman para obtener $C(A)$ como el anillo clásico de cocientes de su anillo de elementos acotados $C(A)_b$. Nuestro primer propósito será entonces calcular este anillo $C(A)_b$.

Una seminorma p sobre un álgebra de Jordan no conmutativa compleja con involución *, se llama *JB*-seminorma* si verifica las propiedades

$$p(ab) \leq p(a)p(b),$$

$$p(U_a(a^*)) = p(a)^3,$$

para cualesquiera a y b de A.

Lema 3.10.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa y J un ideal cerrado de A. Entonces, la aplicación $a \longmapsto \|L_{a|J}\|$ es una JB*-seminorma sobre A y, si J es además esencial, $\|L_{a|J}\| = \|a\|$ $\forall a \in A$.*

Demostración. Ya que la demostración que aquí haremos pasa por la consideración de operadores de multiplicación sobre diversas álgebras, introduciremos la siguiente notación que, sin duda, dejará claro en qué álgebra nos movemos en cada momento. Para un álgebra B y un elemento b de B notaremos por L_b^B el operador de multiplicación por la izquierda por el elemento b en el álgebra B. Según nuestra nueva notación lo que pretendemos demostrar es que la aplicación $a \longmapsto \|L_{a|J}^A\|$ es una JB*-seminorma. Es claro que si A tiene unidad y $J = A$ entonces

$$\|L_{a|J}^A\| = \|a\| \qquad \forall\, a \in A.$$

Pongámonos ahora en el caso general en que A no tenga necesariamente unidad y J no tenga que coincidir con A. La idea ahora es "cambiar" la JB*-álgebra no conmutativa A por la JBW*-álgebra no conmutativa A'' y el ideal cerrado J de A por el ideal w*-cerrado $J^{\circ\circ}$ de A''. Observemos que el producto de A'' es w*-continuo en cada variable ya que, por **[43; Teorema 3.5]**

el producto de una JBW-álgebra no conmutativa es w*-continuo en cada variable.*

Y observemos también que $J^{\circ\circ}$ es un sumando directo de A'' ya que, como consecuencia de **[43; Teorema 3.9]** *cualquier ideal w*-cerrado de una JBW*-álgebra no conmutativa es un sumando directo de ésta.*

Comprobaremos en primer lugar que, si a es un elemento de la JB*-álgebra no conmutativa A, entonces $\|L^{A}_{a|J}\|$ coincide con $\|L^{A''}_{a|J^{\circ\circ}}\|$. Desde luego, lo que no ofrece la menor duda es que $\|L^{A}_{a|J}\| \le \|L^{A''}_{a|J^{\circ\circ}}\|$. Para ver la desigualdad contraria tomemos un elemento y de $J^{\circ\circ}$ con $\|y\| = 1$ y utilicemos la w*-densidad de la bola B_J en la bola $B_{J^{\circ\circ}}$ para obtener una red $\{ y_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de J, con $\|y_\lambda\| \le 1$ $(\forall\ \lambda\in\Lambda)$ y que converja en la topología w* a y. La w*-continuidad separada del producto de A'' nos garantiza ahora que la red $\{ ay_\lambda \}$ converge en la topología w* a ay, y, como quiera que $\|ay_\lambda\| = \|L^{A}_{a|J}(y_\lambda)\| \le \|L^{A}_{a|J}\|$ para cualquier λ, la w*-semicontinuidad inferior de la norma de A'' nos garantiza que $\|ay\| \le \|L^{A}_{a|J}\|$. En vista de la arbitrariedad del elemento y tendremos que $\|L^{A''}_{a|J^{\circ\circ}}\| \le \|L^{A}_{a|J}\|$. Así

$$\| L^{A}_{a|J} \| = \| L^{A''}_{a|J^{\circ\circ}} \| \quad \forall\ a \in A.$$

Recordemos ahora que $J^{\circ\circ}$ es un sumando directo de A'', y por tanto existirá un ideal I de A'' tal que

$$A'' = J^{\circ\circ} \oplus I.$$

Notaremos por π la proyección de A'' sobre $J^{\circ\circ}$ con núcleo I. Como quiera que para cualquier a de A y cualquier y de $J^{\circ\circ}$ se tiene que $ay = [\pi(a) + (a - \pi(a))]y = \pi(a)y$, tendremos que

$$\| L^{A''}_{a|J^{oo}} \| = \sup\{ \|ay\| : y \in J^{oo}, \|y\| = 1 \} =$$

$$\sup\{ \|\pi(a)y\| : y \in J^{oo}, \|y\| = 1 \} = \| L^{J^{oo}}_{\pi(a)|J^{oo}} \|,$$

y de este modo será

$$\| L^{A}_{a|J} \| = \| L^{A''}_{a|J^{oo}} \| = \| L^{J^{oo}}_{\pi(a)|J^{oo}} \| \qquad \forall\ a \in A.$$

Basta ahora con observar que A'' tiene unidad (Ejemplo 1.29(iv)) y que J^{oo} también la tendrá como sumando directo suyo que es, y recordar la observación hecha al comienzo de la demostración por la cual será

$$\| L^{A}_{a|J} \| = \| L^{J^{oo}}_{\pi(a)|J^{oo}} \| = \| \pi(a) \| \qquad \forall\ a \in A.$$

Nuestra primera afirmación de que la aplicación $a \longmapsto \| L^{A}_{a|J} \|$, o lo que es lo mismo la aplicación $a \longmapsto \| \pi(a) \|$, es una JB*-seminorma es simplemente una consecuencia de ser π un *-homomorfismo.

Demostremos ahora que la seminorma sobre A $a \longmapsto p(a)=\|L^{A}_{a|J}\|$ es, de hecho, una norma sobre A cuando J es, adicionalmente, un ideal esencial de A. Para ésto bastará con comprobar que $aJ \neq 0$ para $a \neq 0$, y para ésto consideremos el conjunto $H = \{ a \in A : aJ = 0 \}$. Nuestra intención será, obviamente, probar que $H = 0$. Nuevamente la w*-continuidad separada del producto de A'' nos va a ser de utilidad puesto que, como consecuencia de ella y de la w*-densidad de J en J^{oo}, tenemos que

$$H = \{ a \in A : aJ^{oo} = 0 \}.$$

Es inmediato de comprobar entonces que H coincide justamente con $I \cap A$ y es por tanto un ideal de A. Por ser A semiprima y $HJ = \{0\}$, se tendrá $H \cap J = \{0\}$, de donde $H = \{0\}$ si como se suponía J es un ideal esencial de A. La seminorma p ha resultado ser, cuando J es adicionalmente esencial, una JB*-norma sobre la JB*-álgebra no conmutativa A y de este modo será también una JB*-norma sobre la JB*-álgebra A^+ que trivialmente verifica $p(a) = p(a^*)$ para cualquier a de A. Ya que por **[61; Proposición 1.3]**

cualquier JB-norma $|\cdot|$ sobre una JB*-álgebra $(A, \|\cdot\|)$ verificando que $|a| = |a^*|$ $\forall\, a \in A$ coincide con $\|\cdot\|$,*

tendremos que

$$\|a\| = p(a) = \| L^A_{a|J} \| \qquad \forall\, a \in A,$$

y nuestro enunciado queda, de esta forma, probado. ■

Siguiendo fieles a nuestro propósito de calcular el anillo $C(A)_b$ de elementos acotados del centroide extendido de una JB*-álgebra no conmutativa A, nuestro próximo avance será comprobar cómo los elementos del centroide de un ideal cerrado de A pueden verse como centralizadores parcialmente definidos del álgebra A.

Lema 3.11.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa, I un ideal cerrado de A y f un elemento de $\Gamma(I)$. Entonces $f(ab) = af(b)$ y $f(ba) = f(b)a$ para todo a en A y b en I.*

Demostración. Por doble trasposición (recuérdese que los centralizadores de un álgebra normada completa de anulador cero son continuos) podemos extender f a una aplicación lineal w*-continua $f^{tt}: I^{\circ\circ} \longrightarrow I^{\circ\circ}$. Ya que

$$f^{tt}(ab) = af^{tt}(b) = f^{tt}(a)b$$

para cualesquiera a y b en I, la w*-densidad de I en $I^{\circ\circ}$ y la w*-continuidad separada del producto de A'' nos permiten concluir que

$$f^{tt}(ab) = af^{tt}(b) = f^{tt}(a)b \quad \text{para cualesquiera } a \text{ y } b \text{ en } I^{\circ\circ}.$$

Igual que decíamos en la demostración del anterior resultado, $I^{\circ\circ}$, como cualquier ideal w*-cerrado de A'', es un sumando directo de A''. Pongamos entonces $A'' = I^{\circ\circ} \oplus J$, para conveniente ideal J de A''. Sean ahora a en A y b en I y pongamos $a = a_{I^{\circ\circ}} + a_J$ con $a_{I^{\circ\circ}}$ en $I^{\circ\circ}$ y a_J en J. Tendremos de esta manera que

$$f(ab) = f^{tt}(ab) = f^{tt}((a_{I^{\circ\circ}} + a_J)b) = f^{tt}(a_{I^{\circ\circ}}b) = a_{I^{\circ\circ}}f^{tt}(b) =$$
$$(a_{I^{\circ\circ}} + a_J)f^{tt}(b) = af(b),$$

y de la misma forma se comprobaría que $f(ba) = f(b)a$. ∎

Proposición 3.12.

Sea A una JB^*-álgebra no conmutativa y f en $C(A)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es un elemento acotado de $C(A)$,

(ii) $dom(f)$ contiene un ideal esencial cerrado,

(iii) $dom(f)$ es un ideal cerrado.

Además, $|\cdot|_b$ es una norma sobre $C(A)_b$. Más concretamente: para f en $C(A)_b$ $|f|_b$ coincide con la norma de f visto como un elemento de la C^*-álgebra $\Gamma(dom(f))$.

Demostración.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que $\mathrm{dom}(f)$ fuera cerrado. Como cualquier otro ideal cerrado de A verificará que $(\mathrm{dom}(f))^2 = \mathrm{dom}(f)$ y en consecuencia

$$f(\mathrm{dom}(f)) = f((\mathrm{dom}(f))^2) = \mathrm{dom}(f)f(\mathrm{dom}(f)) \subset \mathrm{dom}(f).$$

Así f se puede considerar como un elemento de $\Gamma(\mathrm{dom}(f))$. Consideremos ahora el elemento $(\|f\|^2 - f^*f)^{1/2} \in \Gamma(\mathrm{dom}(f))$ como un centralizador esencialmente definido del álgebra A (Lema 3.11) y sea g el único centralizador esencialmente definido maximal de A que lo extiende. Se tiene entonces que $f^*f + g^*g = \|f\|^2$ y, por tanto, que $f \in C(A)_b$ y $|f|_b \leq \|f\|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos ahora que f es un elemento acotado de $C(A)$, con $f^*f \leq q^2$ para algún número racional positivo q. Existen entonces $f_1,\ldots,f_k$ en $C(A)$ tales que $f^*f + \sum_{j=1}^{k} f_j^*f_j = q^2$.

Para a en el ideal esencial $I = \mathrm{dom}(f) \cap (\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{dom}(f_j))$ tenemos que

$$q^2 a{\star}a = (f{\star}f)(a{\star}a) + \sum_{j=1}^{k} (f_j{}^{\bullet}f_j)(a{\star}a) = f(a)^{\bullet}f(a) + \sum_{j=1}^{k} f_j(a)^{\bullet}f_j(a)$$

y así, por la ya utilizada referencia **[44; Teorema 3.7]**, tenemos que

$$0 \le f(a)^{\bullet}f(a) \le q^2 a{\star}a$$

y por tanto

$$\|f(a)^{\bullet}f(a)\| \le q^2\|a{\star}a\| \le q^2\|a\|^2.$$

De este modo, usando la Proposición 3.4, $\|f(a)\| \le \sqrt{2}q\|a\|$. f es así continuo en I. Teniendo además en cuenta que (ver **[15; Corolario 1]**)

> *todo centralizador esencialmente definido maximal de un algebra normada semiprima es un operador cerrado (en el sentido de que si $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathrm{dom}(f)$ convergente a un elemento a y la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a un elemento b, entonces $a \in \mathrm{dom}(f)$ y $b = f(a)$),*

tendremos que $\mathrm{dom}(f)$ deberá contener la clausura de I en A. De este modo $\mathrm{dom}(f)$ contiene un ideal esencial cerrado.

(ii) ⇒ (iii) Supongamos ahora que $\mathrm{dom}(f)$ contiene un ideal esencial cerrado J y veamos que f es necesariamente continuo en $\mathrm{dom}(f)$. Como quiera que f es un operador cerrado y J es un subespacio cerrado será $f_{|J}$ continuo (teorema de la gráfica cerrada). Si a es un elemento de dom(f) y b está en J tenemos que

$$\|f(a)b\| = \|af(b)\| \le \|a\|\|f(b)\| = \|a\|\|f_{|J}(b)\| \le \|a\|\|f_{|J}\|\|b\|,$$

de manera que será

$$\| \mathrm{L}_{f(a)|J} \| = \sup\{ \|f(a)b\| : b \in J, \|b\| = 1 \} \le \|a\|\|f_{|J}\|,$$

y teniendo en cuenta el Lema 3.10 será

$$\|f(a)\| = \| \mathrm{L}_{f(a)|J} \| \le \|f_{|J}\|\|a\|,$$

y esto para cualquier a en dom(f). Así pues f es continuo en dom(f) y además

$$\|f\| = \|f_{|J}\|.$$

Como quiera que f es un operador cerrado, dom(f) deberá ser un ideal cerrado.

Veamos ahora que $|\cdot|_b$ es una norma sobre $C(A)_b$. Sea f en $C(A)_b$ y q en $\mathbb{Q}$ con $|f|_b < q$. Sabemos, por lo hecho en (i)⇒(ii), que existe un ideal esencial cerrado I_q de A tal que

$$\| f_{|I_q} \| \le \sqrt{2}q,$$

En consecuencia

$$\|f\| = \|f_{|I_q}\| \le \sqrt{2}q \quad \forall\, q \in \mathbb{Q} \text{ con } |f|_b < q,$$

y por tanto $\|f\| \le \sqrt{2}|f|_b$ para cualquier f de $C(A)_b$. Así nuestra seminorma de álgebra $|\cdot|_b$ sobre $C(A)_b$ (véase el comentario posterior a la Definición 3.7) resulta ser una norma de álgebra sobre la C^*-álgebra conmutativa $\Gamma(\mathrm{dom}(f))$ luego

$|\cdot|_b \geq \|\cdot\|$ en $\Gamma(\mathrm{dom}(f))$ [55; **Teorema 1.2.4**]. Pero sabemos que la desigualdad contraria es también cierta (recuérdese la demostración de (iii) ⇒ (i)). ■

El lector ahora seguramente nos permitirá un pequeño entretenimiento y, quizás abusando de su paciencia, expondremos algunos resultados no triviales que pretenderian estudiar la relación existente entre el centroide extendido de la JB*-álgebra no conmutativa A y el centroide extendido de un ideal esencial cerrado suyo M. Hemos de confesar sin embargo que, aunque estos resultados nos sirvieron de inspiración para pensar que $C(M)$ coincidia con $C(A)$, en realidad no serán en absoluto utilizados para obtener esta conclusión final.

Recordemos en primer lugar el concepto de ideal autodenso introducido en [15] justamente con el objetivo de estudiar la relación existente entre el centroide extendido de un álgebra normada semiprima y el de un ideal esencial suyo. Para un subconjunto no vacío N de un álgebra normada A definimos la *N-topología* de A como la topología inicial para la familia de aplicaciones de la forma $a \longmapsto ax$ y $a \longmapsto xa$ de A en A (con la topología de la norma) cuando x pertenece a N. Es claro que si $N_1 \subset N_2$ entonces la N_1-topología es más débil que la N_2-topología y que si A tiene unidad entonces la A-topología coincide con la topología de la norma. Un subconjunto N de A se llamará *autodenso* en A si N es denso en A para la N-topología. En [15; **Teorema 3**] se demostró que

si A es un álgebra normada semiprima y M es un ideal esencial autodenso de A, entonces M es un álgebra semiprima y el centroide extendido de M coincide con el centroide extendido de A. Más concretamente, cada centralizador esencialmente definido maximal f de M es un centralizador esencialmente definido de A y si llamamos $f\sim$ al único centralizador esencialmente definido maximal de A que extiende a f, la aplicación $f \longmapsto f\sim$ es un isomorfismo de $C(M)$ sobre $C(A)$.

R. C. Busby comprobó en [14; **Proposición 3.5**] que

cualquier ideal cerrado de una C^*-álgebra es autodenso,

y como consecuencia de ésto y del resultado antes citado de [15] sobre ideales autodensos obtenemos el siguiente hecho al que con seguridad se podría llegar de manera más fácil:

si A es una C^*-álgebra y M es un ideal esencial cerrado suyo entonces $C(M) = C(A)$.

Parece lógico suponer que el análogo del anterior resultado siga siendo válido para nuestras JB*-álgebras no conmutativas. Es decir, no parece aventurado conjeturar que

si A *es una JB*-álgebra no conmutativa y* M *es un ideal esencial cerrado suyo, entonces* $C(M) = C(A)$.

Esta conjetura se hace aun más convincente si observamos que lo único que utiliza Busby en su demostración es la existencia de una "unidad aproximada" para cualquier ideal cerrado de una C*-álgebra ([45; **Teorema 1.4.2**]).

Diremos que un álgebra normada A tiene *unidad aproximada* si existe una red $\{ a_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de A verificando que las redes

$$\{ ba_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \quad y \quad \{ a_\lambda b \}_{\lambda \in \Lambda}$$

convergen a b para cualquier b de A, en la topología de la norma. La red $\{ a_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ se llamará unidad aproximada para A.

De hecho, repitiendo la demostración dada para C*-álgebras, podemos comprobar que

Si A *es un álgebra normada asociativa y* M *un ideal de* A *con unidad aproximada, entonces* M *es autodenso.*

Demostración. Dado un elemento a del álgebra A, trataremos de encontrar una red $\{ x_\lambda \}$ de elementos de M convergente a a en la M-topología, es decir, de manera que las redes $\{ x_\lambda x \}$ y $\{ x x_\lambda \}$ converjan a ax y xa respectivamente con la topología de la norma, para cualquier x de M. Sea $\{ m_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ una unidad aproximada para M. Sea $x_\lambda = m_\lambda a$ $\forall \lambda \in \Lambda$. Es claro que $\{ x_\lambda \}$ es una red de elementos de M. Comprobemos que converge a a en la M-topología. Sea x en M, entonces

$$\{ \|x_\lambda x - ax\| \} = \{ \|(m_\lambda a)x - ax\| \} = \{ \|m_\lambda (ax) - ax\| \} \to 0$$

pues ax está en M y $\{ m_\lambda \}$ es una unidad aproximada para M, también

$$\{ \|x x_\lambda - xa\| \} = \{ \|x(m_\lambda a) - xa\| \} = \{ \|(xm_\lambda - x)a\| \} \to 0$$

pues $\{ \|xm_\lambda - x\| \} \to 0$. ∎

La primera pregunta que nos hacemos, con el propósito de dar respuesta a la cuestión planteada, es si todo ideal cerrado de una JB*-álgebra no conmutativa tiene unidad aproximada o lo que es lo mismo si toda JB*-álgebra no conmutativa tiene una unidad aproximada. La respuesta, como cabría esperar, es afirmativa:

toda JB-álgebra no conmutativa tiene una unidad aproximada.*

Demostración. Sea A una JB*-álgebra no conmutativa y comprobemos que posee una unidad aproximada. Supongamos en primer lugar que A es, de hecho, una JB*-álgebra. La anterior afirmación no plantea entonces demasiado problema. Efectivamente, debe ser ya bien conocido que $\mathrm{Sim}(A)$ es una JB-álgebra que, por **[27; Proposición 3.5.4]** tiene una unidad aproximada $\{ a_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$. Si a es ahora cualquier elemento de A, podremos escribir $a = a_1 + ia_2$ con a_1 y a_2 en $\mathrm{Sim}(A)$. Como quiera que las redes $\{ a_1 \cdot a_\lambda \}$ y $\{ a_2 \cdot a_\lambda \}$ convergen respectivamente a a_1 y a_2, tendremos que la red $\{ a \cdot a_\lambda \}$ converge a $a_1 + ia_2 = a$, lo cual demuestra que la red $\{ a_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ es también una unidad aproximada para la JB*-álgebra A.

Supongamos ahora que A es una JB*-álgebra no conmutativa. La idea ahora es considerar la JB*-álgebra A^+ que por lo antes demostrado sí que tiene un unidad aproximada $\{ a_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$. Sabemos por tanto que la red $\{ a \cdot a_\lambda \}$ converge a a para cualquier a de A, y pretendemos comprobar que las redes $\{ aa_\lambda \}$ y $\{a_\lambda a\}$ también convergen a a. Puesto que para cualquier b de A la aplicación $a \longmapsto [a,b]$ es una derivación de A^+ (**[56; Pag. 146]**), tendremos que

$$[a^2,b] = 2a \cdot [a,b] = 2[a,a \cdot b],$$

para cualesquiera a y b de A. Tenemos en consecuencia que

$$[a^2,a_\lambda] = 2[a,a \cdot a_\lambda] \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

y por tanto

$$\{ [a^2,a \cdot a_\lambda] \} \longrightarrow 2[a,a] = 0.$$

Si ahora a es un elemento cualquiera de A podemos poner

$a = b_1 + ib_2$ con b_1 y b_2 en $\mathrm{Sim}(A)$, y podemos poner también $b_1 = a_1^2 - a_2^2$ y $b_2 = a_3^2 - a_4^2$ con a_1, a_2, a_3 y a_4 elementos positivos de $\mathrm{Sim}(A)$. Podemos concluir entonces que la red

$$\{ [a, a_\lambda] \}_{\lambda \in \Lambda}$$

converge en norma a cero, para cualquier a de A, y tenemos así que las redes

$$\{ aa_\lambda \} = \{ a \cdot a_\lambda + \tfrac{1}{2}[a, a_\lambda] \}$$

$$\{ a_\lambda a \} = \{ a \cdot a_\lambda - \tfrac{1}{2}[a, a_\lambda] \}$$

convergen a a. Así, la red $\{ a_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ es una unidad aproximada para la JB*-álgebra no conmutativa A. ■

En vista de que la existencia de unidad aproximada para una JB*-álgebra no conmutativa A está asegurada, se podría pensar en usar la técnica de autodensidad, antes utilizada para las C*-álgebras, para comprobar que el centroide extendido de A coincide con el centroide extendido de cualquier ideal esencial cerrado suyo. Lamentablemente nos damos cuenta de que esta técnica es esencialmente asociativa por lo que, en principio, no sabemos que el resultado sobre la autodensidad sea válido en nuestro nuevo ambiente. Nuestras técnicas hasta ahora introducidas nos van a permitir, sin embargo, obtener la coincidencia del centroide extendido de A con el de cualquier ideal esencial cerrado suyo sin el menor esfuerzo.

Proposición 3.13.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa y M un ideal esencial cerrado de A. Entonces $C(M) = C(A)$.*

Demostración. Sea f en $C(M)_b$. Por la Proposición 3.12 dom(f) es un ideal cerrado de M, el cual es a su vez un ideal cerrado de A. De este modo (Ejemplo 2.6) dom(f) es un ideal cerrado de A. Tendremos de este modo que f puede verse como un elemento de Γ(dom(f)). Si observamos ahora que dom(f) sigue siendo esencial visto como ideal de A, podremos afirmar por el Lema 3.11 que f puede verse como un centralizador esencialmente definido del álgebra A. Si $f\sim$ denota el único centralizador esencialmente definido maximal del álgebra A que extiende a f, dom($f\sim$) contiene un ideal esencial cerrado, a saber dom(f), y por tanto, Proposición 3.12, $f\sim$ pertenece a $C(A)_b$. Tenemos así, definido un *-homomorfismo

$$C(M)_b \longrightarrow C(A)_b ,$$

que sin gran dificultad se comprueba ser biyectivo. Como quiera que $C(M)$ y $C(A)$ son anillos *-regulares con involución definida positiva (Lema 3.6), coincidirán con el anillo clásico de cocientes de su anillo de elementos acotados (Teorema 3.9), y en consecuencia el anterior *-isomorfismo se extiende a un *-isomorfismo de $C(M)$ sobre $C(A)$. ■

Advirtamos en este punto al paciente lector que después de la anterior divagación retomamos nuestro objetivo de describir el anillo $C(A)_b$.

Para una JB*-álgebra no conmutativa A denotemos por $\mathfrak{I}$ el conjunto de sus ideales esenciales cerrados y definamos sobre $\mathfrak{I}$ una relación de orden $\leq$ por $J \leq I \Leftrightarrow I \subset J$. Claramente $(\mathfrak{I},\leq)$ es un conjunto dirigido. Si I, J están en $\mathfrak{I}$ con $I \subset J$ entonces la restricción $\mathrm{res}(J,I) : \Gamma(J) \longrightarrow \Gamma(I)$ es un homomorfismo inyectivo de C*-álgebras y $(\ \Gamma(I)\ ,\ \mathrm{res}(J,I)\ )_{I,J\ \in\ \mathfrak{I}}$ es un sistema dirigido de C*-álgebras.

Proposición 3.14.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces $C(A)_b$ es *-isomorfo al límite algebraico directo $\lim\limits_{I\in\mathfrak{I}} \Gamma(I)$, donde $\mathfrak{I}$ denota la familia de los ideales esenciales cerrados de A.*

Demostración. Por el Lema 3.11 sabemos que si I está en $\mathfrak{I}$ cada elemento de $\Gamma(I)$ puede ser visto como un centralizador esencialmente definido del álgebra A y, pasando al único centralizador esencialmente definido maximal del álgebra A que lo extiende, obtenemos un *-homomorfismo inyectivo $\Gamma(I) \longrightarrow C(A)$. Puesto que $\Gamma(I)$ (como cualquier C*-álgebra, Ejemplo 3.8) coincide con el conjunto de sus elementos acotados, este homomorfismo está, de hecho, valuado en $C(A)_b$. Por otra parte, si I y J están en $\mathfrak{I}$ con $I \subset J$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma(J) \arrow[r] \arrow[dr] & \Gamma(I) \arrow[d] \\ & C(A)_b \end{tikzcd}$$

conmuta y en consecuencia (recuérdese la caracterización de la inyectividad para tales homomorfismos dada en el Ejemplo 1.3(vi)) tenemos un *-homomorfismo inyectivo

$$\lim_{I \in \mathfrak{I}} \Gamma(I) \longrightarrow C(A)_b \, .$$

Para concluir la demostración veremos que este último homomorfismo es sobreyectivo. Para ésto, sea f en $C(A)_b$. Por la Proposición 3.12 $\mathrm{dom}(f)$ es cerrado, con lo que será $\mathrm{dom}(f) = (\mathrm{dom}(f))^2$ y por tanto $f(\mathrm{dom}(f)) \subset \mathrm{dom}(f)$. Obtenemos así, por restricción del dominio y el rango, un elemento de $\Gamma(\mathrm{dom}(f))$. $\mathrm{dom}(f)$ es un ideal esencial cerrado de A y f pertenece al rango del homomorfismo $\Gamma(\mathrm{dom}(f)) \longrightarrow C(A)_b$, por lo que obtenemos la sobreyectividad sin más que recordar la caracterización que para ésta se vio en el Ejemplo 1.3(vi).■

El anterior resultado nos da ya una primera descripción de los elementos acotados del centroide extendido de una JB*-álgebra no conmutativa A en términos de las C*-álgebras $\Gamma(I)$, para I ideal esencial cerrado de A. Usaremos ahora la descripción que realizábamos en la Capítulo anterior del centroide de una JB*-álgebra no conmutativa para obtener una descripción, sin duda, más espectacular de la parte acotada del centroide extendido de A.

Para un ideal cerrado I de una JB*-álgebra no conmutativa A denotemos por $U_A(I)$ al subconjunto abierto de $\beta(A)$ dado por

$$U_A(I) = \{ J \in \beta(A) : I \nsubseteq J \}.$$

Lema 3.15.

Sea I un ideal cerrado de una JB-álgebra no conmutativa A. Entonces, para cada J en $U_A(I)$, $I \cap J$ pertenece a $\beta(I)$, y la aplicación $J \longmapsto I \cap J$ de $U_A(I)$ en $\beta(I)$ es continua y con rango denso.*

Demostración. Sea J en $U_A(I)$. Entonces $I \cap J$ es un ideal cerrado y propio de I, y debemos probar que es también un ideal primo de I. Si P_1 y P_2 son ideales de I con $P_1 P_2 \subset I \cap J$, entonces $\overline{P_1}\ \overline{P_2} \subset \overline{P_1 P_2} \subset \overline{I \cap J} = I \cap J$. Pero $\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ son ideales cerrados de I, luego son, de hecho, ideales cerrados de A (Ejemplo 2.6). Por ser J un ideal primo de A tendremos que $\overline{P_1}$ (y por tanto P_1) o $\overline{P_2}$ (y por tanto P_2) está contenido en

(y por tanto P_1) o $\overline{P_2}$ (y por tanto P_2) está contenido en $I \cap J$, lo cual prueba que $I \cap J$ es un ideal primo de I. La continuidad de la aplicación $J \longmapsto I \cap J$ es inmediata de comprobar. Para ver la densidad del rango de la anterior aplicación, recordemos la Nota 2.10 para obtener que

$$\bigcap\{J \cap I \colon J \in \mathrm{Prim}(A),\ I \quad J\} = \bigcap \mathrm{Prim}(I) \subset \bigcap\{\mathrm{Ker}(x') \colon x' \in \mathrm{ex}(B_{I'})\}$$

y esta última intersección vale cero sin más que aplicar los Teoremas de Krein-Milman y de Banach-Alaoglu. Sabemos además, utilizando la Proposición 2.19 que

$$\bigcap\{J \cap I \colon J \in U_A(I)\} \subset \bigcap\{J \cap I \colon J \in \mathrm{Prim}(A),\ I \not\subset J\} = 0.$$

Esto último nos muestra que la clausura en $\beta(I)$ del conjunto $\{ J \cap I \colon J \in U_A(I) \}$ coincide con $\beta(I)$. ■

Para un ideal I de un álgebra de Jordan no conmutativa A notaremos:

$$V_A(I) = \{ J \in \mathrm{Cor}(A) : I \not\subset J \}.$$

Proposición 3.16.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa e I un ideal cerrado suyo. Entonces, para cada f en $\Gamma(I)$ y cada J en $V_A(I)$ existe un único número complejo $f^{\sim}(J)$ tal que $f(a) - f^{\sim}(J)a \in J$ para todo a en I, y la aplicación $f \longmapsto f^{\sim}$ es un $*$-isomorfismo de $\Gamma(I)$ sobre $C_b(V_A(I))$.*

Demostración. Para un ideal cerrado I de una JB*-álgebra no conmutativa A denotaremos

$$W_A(I) = \{ J \in \mathrm{Prim}(A) : I \not\subset J \}.$$

Como se observó en la Nota 2.10 la ley

$$J \longmapsto J \cap I$$

es un homeomorfismo de $W_A(I)$ sobre $\mathrm{Prim}(I)$, que induce por tanto un *-isomorfismo

$$C_b(\mathrm{Prim}(I)) \cong C_b(W_A(I)).$$

Por otra parte por el lema anterior la aplicación $\alpha : J \longmapsto I \cap J$ de $U_A(I)$ en $\beta(I)$ es continua con rango denso y, en consecuencia, induce un *-homomorfismo inyectivo

$$C_b(\beta(I)) \longrightarrow C_b(U_A(I))$$

dado por

$$g \longmapsto g \circ \alpha.$$

Además, la Proposición 2.28 nos proporciona *-isomorfismos

$$\Gamma(I) \cong C_b(\beta(I)) \cong C_b(\mathrm{Prim}(I)).$$

Además, por la Proposición 2.30 tenemos inclusiones

$$W_A(I) \subset V_A(I) \subset U_A(I).$$

Observemos que estas inclusiones son densas. Como quiera que $(\bigcap W_A(I)) \cap I$ coincide por la Nota 2.10 con $\bigcap \mathrm{Prim}(I)$ lo cual sabemos sobradamente que vale cero, tenemos que, si $J \in U_A(I)$, $(\bigcap W_A(I)) \cap I = 0 \subset J$ y por tanto $\bigcap W_A(I) \subset J$ (pues J es primo y $I \quad J$). Es claro entonces que

$$\overline{W_A(I)}^{U_A(I)} = \{J \in \beta(A) \colon I \subset J,\ \bigcap W_A(I) \not\subset J\} = U_A(I),$$

y de ahí es clara nuestra afirmación sobre la densidad de las inclusiones.

Estas inclusiones densas inducirán *-homomorfismos inyectivos:

$$C_b(U_A(I)) \longrightarrow C_b(V_A(I)) \longrightarrow C_b(U_A(I)).$$

Se puede comprobar de forma rutinaria que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(I) \cong C_b(\beta(I)) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d] & & C_b(\mathrm{Prim}(I)) \arrow[d, "\cong"] \\
C_b(U_A(I)) \arrow[r] & C_b(V_A(I)) \arrow[r] & C_b(W_A(I))
\end{tikzcd} .$$

Como consecuencia, todas las aplicaciones involucradas en el diagrama son *-isomorfismos y en particular

$$\Gamma(I) \cong C_b(V_A(I)).$$

No perdamos de vista que este isomorfismo tiene una forma muy concreta. Efectivamente, basta recordar la Proposición 2.28 (aplicada a la JB*-álgebra no conmutativa I) paradarse cuenta de que dicho isomorfismo está establecido en la forma enunciada.■

Notemos que si A es un álgebra de Jordan no conmutativa e I y J son ideales suyos se tiene, gracias a la primidad de los "corazones", que:

$$V_A(I)\cap V_A(J) = V_A(IJ)$$

(donde, como el comprensivo lector habrá imaginado, $V_A(IJ)$ denota el conjunto $\{H\in\mathrm{Cor}(A):\ IJ \not\subset H\}$).

Con la intención de caracterizar la eventual densidad en $\mathrm{Cor}(A)$ del abierto $V_A(I)$ recordamos el importante concepto de semisimplicidad.

Si A es un álgebra de Jordan no conmutativa con unidad, un elemento a de A se dice *invertible* si existe un elemento b de A verificando las dos condiciones siguientes:

$$ab = ba = 1$$

$$a^2b = ba^2 = a$$

Si A es ahora un álgebra de Jordan no conmutativa posiblemente sin unidad, un elemento a de A se dirá *casi-invertible* si el elemento $1-a$ es invertible en A_1.

Recordemos [39] que para cualquier álgebra de Jordan no conmutativa A existe un mayor ideal casi-invertible (ideal cuyos elementos son todos casi-invertibles) $Rad(A)$ llamado *radical de Jacobson* del álgebra A. El álgebra A se dice *semisimple* si $\mathrm{Rad}(A) = 0$, siendo inmediato de comprobar que la semisimplicidad implica la semiprimidad. Para A conmutativa Hogben y McCrimmon

[30] caracterizaron el radical de A como la intersección de los corazones de los ideales internos maximales-modulares de A, y se observó en [23] que lo mismo sigue siendo cierto en el caso no conmutativo.

Observemos ahora que cualquier JB*-álgebra no conmutativa A es semisimple pues

$$\mathrm{Rad}(A) = \bigcap \mathrm{Cor}(A) \subset \bigcap \mathrm{Prim}(A) = 0.$$

Es ahora prácticamente evidente que para una álgebra de Jordan no conmutativa semisimple A y para un subconjunto S no vacío de A, equivale el hecho de ser $S \neq \{0\}$ con el hecho de ser $V_A(S)$ no vacio.

Lo anterior junto con la igualdad $V_A(I) \cap V_A(J) = V_A(IJ)$ dicha al comienzo nos muestra claramente que, para un álgebra de Jordan no conmutativa semisimple A, los subconjuntos abiertos densos de $\mathrm{Cor}(A)$ están caracterizados como aquellos conjuntos de la forma $V_A(I)$ con I un ideal esencial de A.

Obsevemos finalmente que si el álgebra de Jordan no conmutativa semisimple A es normada y completa entonces $V_A(I)$ coincide con $V_A($[illegible]$)$ para cualquier ideal I de A, y como consecuencia de lo anterior y esto último tendremos que:

para un álgebra de Jordan no conmutativa semisimple normada (en particular para una JB-álgebra no conmutativa) la* *familia* $\{ V_A(I) : I \in \Im \}$ *(donde, como antes,* $\Im$ *denota la familia de los ideales esenciales cerrados de* A *) coincide justamente con la familia de todos los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico* $Cor(A)$.

Para un espacio topológico S denotemos por $\mathfrak{F}$ el conjunto de los subconjuntos abiertos y densos de S. Definimos un orden parcial sobre $\mathfrak{F}$ por $\Omega \leq \Omega' \Leftrightarrow \Omega' \subset \Omega$. Claramente $(\mathfrak{F},\leq)$ es un conjunto dirigido, y si $\Omega,\Omega' \in \mathfrak{F}$ con $\Omega' \subset \Omega$ entonces las restricciones

$$\mathrm{res}(\Omega,\Omega') : C(\Omega) \longrightarrow C(\Omega') \quad \text{y} \quad \mathrm{res}_b(\Omega,\Omega'):C_b(\Omega) \longrightarrow C_b(\Omega'))$$

son $*$-homomorfismos por lo que $(\, C(\Omega)\,,\, \mathrm{res}(\Omega,\Omega')\,)_{\Omega,\Omega' \in \mathfrak{F}}$ y $(\, C_b(\Omega)\,,\, \mathrm{res}_b(\Omega,\Omega')\,)_{\Omega,\Omega' \in \mathfrak{F}}$ son sistemas dirigidos de álgebras con involución.

Lema 3.17.

Sea A *una* JB^**-álgebra no conmutativa. Los límites algebraicos directos* $\displaystyle\lim_{I\in\Im} \Gamma(I)$ y $\displaystyle\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega)$ *son entonces* $*$*-isomorfos, siendo* $\Im$ *la familia de los ideales esenciales cerrados de* A y $\mathfrak{F}$ *la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico* $Cor(A)$.

Demostración. Observemos que los $*$-isomorfismos (del lema anterior)

$$\Gamma(I) \cong C_b(V_A(I))$$

con I en $\mathfrak{I}$ son compatibles con el orden de los sistemas dirigidos de C*-álgebras

$$(\ \Gamma(I)\ )_{I\in\mathfrak{I}} \quad \text{y} \quad (\ C_b(\Omega)\ )_{\Omega\in\mathfrak{F}} = (\ C_b(V_A(I))\ )_{I\in\mathfrak{I}}.$$

Se deduce entonces (véase el Ejemplo 1.3(vi)) que

$$\lim_{I\in\mathfrak{I}} \Gamma(I) \cong \lim_{I\in\mathfrak{I}} C_b(V_A(I)) \cong \lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega). \quad \blacksquare$$

Los Lemas 3.6 y 3.17 junto con el Teorema 3.9 nos permitirían obtener ya sin dificultad la descripción del centroide extendido a la manera de Ara de una JB*-álgebra no conmutativa como

$$C(A) \cong \lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega),$$

donde $\mathfrak{F}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico $\mathrm{Cor}(A)$.

No obstante, para nuestras necesidades analíticas sería más conveniente disponer de una descripción en la que no se involucrase el concepto de límite algebraico directo, y para ésto construimos aquí nuestra particular materialización de $\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$.

Definición 3.18.

Definimos una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre un espacio topológico S como una función ϕ complejo-valuada y continua sobre algún subconjunto abierto y denso de S, llamado el dominio de ϕ y denotado por $\mathrm{dom}(\phi)$. En el conjunto de las funciones continuas parcialmente abierto-denso definidas sobre S podemos definir una suma y un producto de la forma que cabría esperar. Concretamente, si ϕ y ψ son dos de tales funciones, definimos

$$\mathrm{dom}(\phi + \psi) = \mathrm{dom}(\phi\psi) = \mathrm{dom}(\phi) \cap \mathrm{dom}(\psi), \text{ y}$$
$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x), \ (\phi\psi)(x) = \phi(x)\psi(x).$$

Diremos también que ψ es una extensión de ϕ si

$$\mathrm{dom}(\phi) \subset \mathrm{dom}(\psi) \ \text{ y } \ \phi(x) = \psi(x) \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi).$$

Una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre el espacio topológico S se dice maximal si no admite ninguna extensión continua parcialmente abierto-denso definida sobre S.

Seguramente no habrá pasado desapercibida la notable analogía existente entre las anteriores definiciones y nuestra construcción del centroide extendido. El siguiente resultado dejará aun más patente esta analogía, y seguramente delatará el camino que vamos a emprender para la descripción de $\lim\limits_{\Omega \in \mathfrak{F}} C(\Omega)$.

Lema 3.19.

Sea ϕ *una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre un espacio topológico* S. *Existe entonces una única función continua parcialmente abierto-denso definida maximal* ψ *que extiende a* ϕ. *Tal extensión es acotada si, y sólo si,* ϕ *lo es.*

Demostración. Supongamos que ϕ es una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre S y sea $\{ \phi_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ el conjunto de todas las extensiones continuas parcialmente abierto-denso definidas de ϕ (que evidentemente contiene a ϕ por lo que no es vacío), y definimos $\psi: \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{dom}(\phi_\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\psi(x) = \phi_\lambda(x) \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi_\lambda)$ (la buena definición de ψ es obvia). Es claro que ψ es la extensión maximal buscada, claramente única.

Si ahora ϕ es además acotada tengamos en cuenta que, por la densidad, cualquier extensión continua suya ψ está también acotada y se verifica que

$$\sup\{ \ |\phi(x)| \ : \ x \in \mathrm{dom}(\phi) \ \} = \sup\{ \ |\psi(x)| \ : \ x \in \mathrm{dom}(\psi) \ \}.$$

Así la extensión obtenida anteriormente responde a nuestras necesidades. ■

Denotaremos por $\mathbb{E}(S)$ (resp.: $\mathbb{E}_b(S)$) el conjunto de las funciones continuas (resp.: continuas y acotadas) parcialmente abierto-denso definidas y maximales sobre el espacio topológico S.

Tomando como suma y producto de dos elementos de $\mathfrak{E}(E)$ la única función continua parcialmente abierto-denso definida maximal sobre S que extiende respectivamente la suma y el producto de los elementos considerados como funciones continuas parcialmente abierto-denso definidas sobre S. Sobre $\mathfrak{E}(S)$ consideramos además la involución $*$ definida por

$$\mathrm{dom}(\phi^*) = \mathrm{dom}(\phi) \quad \text{y} \quad \phi^*(x) = \overline{\phi(x)} \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi^*).$$

Lema 3.20.

Si S es un espacio topológico $\mathfrak{E}(S)$ es un anillo conmutativo $*$-regular con involución definida positiva y

$$(\ \mathfrak{E}(S)\ )_b = \mathfrak{E}_b(S).$$

Demostración. La afirmación de que $\mathfrak{E}(S)$ es un anillo conmutativo es de inmediata comprobación. Veamos ahora que este anillo es von Newmann regular. Para ello sea ϕ en $\mathfrak{E}(S)$ y definamos

$\Omega := \{\ x \in \mathrm{dom}(\phi) : \phi(x) \neq 0\ \} \cup \mathrm{int}(\{\ x \in \mathrm{dom}(\phi) : \phi(x) = 0\ \})$.

Ω es evidentemente un subconjunto abierto de S que además es denso en $\mathrm{dom}(\phi)$, y por tanto en S, puesto que

$\mathrm{int}(\mathrm{dom}(\phi)\setminus\Omega)=\mathrm{int}(\{x \in \mathrm{dom}(\phi)\colon \phi(x)=0\}\setminus\mathrm{int}\{x \in \mathrm{dom}(\phi)\colon \phi(x)=0\})=\emptyset$.

Definamos ahora una función complejo-valuada ψ' sobre Ω por

$$\psi'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi(y)} & \text{si } y \in \{\, x \in \mathrm{dom}(\phi) \;:\; \phi(x) \neq 0 \,\} \\[2ex] 0 & \text{si } y \in \mathrm{int}\{\, x \in \mathrm{dom}(\phi) \;:\; \phi(x) = 0 \,\}. \end{cases}$$

Es claro que la función ψ' es continua en Ω, por lo que será una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre S. Sea ψ la única extensión continua parcialmente abierto-denso definida maximal de ψ'. Es claro que

$$\psi\phi\psi = \psi,$$

y de ahí la regularidad.

Supongamos ahora que fuera $\sum_{j=1}^{n} \phi_j^* \phi_j = 0$ para $\phi_1,\ldots,\phi_n$ en $\mathfrak{C}(S)$, y comprobemos que $\phi_j = 0$ para $j = 1,\ldots,n$. Tenemos entonces que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \phi_j^* \phi_j = \sum_{j=1}^{n} |\phi_j|^2,$$

y en consecuencia

$$\phi_j(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}(\phi_j), \quad \forall\, j = 1,\ldots,n.$$

Puesto que el conjunto $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}(\phi_j)$ es denso en $\mathrm{dom}(\phi_j)$ (para $j=1,\ldots,n$) y la ϕ_j es continua podemos concluir que

$$\phi_j = 0 \quad (\text{para } j = 1, \ldots ,n).$$

Tenemos así demostrado que $\mathfrak{C}(S)$ es un anillo *-regular con involución definida positiva. Es totalmente lógico preguntarse ahora por su anillo de elementos acotados, y llega así el momento de comprobar que $(\mathfrak{C}(S))_b = \mathfrak{C}_b(S)$. Supongamos que ϕ está en $(\mathfrak{C}(S))_b$. Existen entonces $\psi_1, \ldots ,\psi_k$ en $\mathfrak{C}(S)$ tales que

$$\phi^*\phi + \sum_{j=1}^{k} \psi_j^* \psi_j = n$$

para conveniente número natural n. Tenemos de este modo que

$$|\phi|^2 + \sum_{j=1}^{k} |\psi_j|^2 = \phi^*\phi + \sum_{j=1}^{k} \psi_j^* \psi_j = n$$

y, por tanto

$$|\phi(x)|^2 \leq n \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi) \cap (\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{dom}(\psi_j)).$$

Nuevamente la continuidad de ϕ y la densidad de $\mathrm{dom}(\phi) \cap (\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{dom}(\psi_j))$ en $\mathrm{dom}(\phi)$ nos permiten asegurar que

$$|\phi(x)|^2 \leq n \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi),$$

y así $\phi \in \mathfrak{C}_b(S)$, lo cual demuestra la inclusión $(\mathfrak{C}(S))_b \subset \mathfrak{C}_b(S)$. La inclusión contraria es, si cabe, más fácil aun. Si ϕ está ahora en $\mathfrak{C}_b(S)$ existirá, por definición, un natural n tal que $|\phi(x)|^2 \leq n \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi)$. Así

$$\phi^*\phi + \psi^*\psi = n$$

donde $\psi(x) := \sqrt{n - |\phi(x)|^2} \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}(\phi)$, por lo que $\phi \in (\mathfrak{C}(S))_b$. ■

Lema 3.21.

Si S es un espacio topológico entonces

$$\lim_{\Omega \in \mathfrak{J}} C(\Omega) \cong \mathfrak{C}(S) \quad \text{y} \quad \lim_{\Omega \in \mathfrak{J}} C_b(\Omega) \cong \mathfrak{C}_b(S),$$

(donde $\mathfrak{J}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico S).

Demostración. Para $\Omega \in \mathfrak{J}$ y $\phi \in C(\Omega)$ sea $i_\Omega(\phi)$ la única función continua parcialmente abierto-denso definida maximal sobre

S que extiende a ϕ (Lema 3.19). De este modo para cada Ω en $\mathfrak{F}$ disponemos de una aplicación

$$i_\Omega : C(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{C}(S)$$

que, por la definición que hemos dado de las operaciones sobre $\mathfrak{C}(S)$, es un *-homomorfismo inyectivo y además, para $\Omega \subset \Omega'$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C(\Omega') \arrow[rr, "res(\Omega'{,}\Omega)"] \arrow[dr, "i_{\Omega'}"'] & & C(\Omega) \arrow[dl, "i_\Omega"] \\ & \mathfrak{C}(S) & \end{tikzcd}$$

Existirá entonces un *-homomorfismo inyectivo de $\lim\limits_{\Omega\in\mathfrak{F}} C(\Omega)$ en $\mathfrak{C}(S)$. Como quiera que si ϕ está en $\mathfrak{C}(S)$ tenemos que $i_{\mathrm{dom}(\phi)}(\phi) = \phi$ podemos concluir que $\bigcup\limits_{\Omega\in\mathfrak{F}} i_\Omega(C(\Omega)) = \mathfrak{C}(S)$, y por tanto que dicho *-homomorfismo inyectivo es, de hecho, un *-isomorfismo (recuérdese la condición de sobreyectividad dada en el Ejemplo 1.3(vi)).

Idéntica demostración admite el hecho de que

$$\lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega) \cong \mathfrak{C}_b(S).$$

Teorema 3.22.

El centroide extendido $C(A)$ de una JB-álgebra no conmutativa A es *-isomorfo al anillo $\mathfrak{C}(Cor(A))$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 3.14 y los Lemas 3.17 y 3.21 de la existencia de *-isomorfismos

$$C(A)_b \cong \lim_{I\in\mathfrak{I}} \Gamma(I) \cong \lim_{\Omega\in\mathfrak{F}} C_b(\Omega) \cong \mathfrak{C}_b(\mathrm{Cor}(A))$$

(donde $\mathfrak{I}$ denota el conjunto de los ideales esenciales cerrados de A y $\mathfrak{F}$ denota la familia de los subconjuntos abiertos y densos del espacio topológico $\mathrm{Cor}(A)$).

Como quiera que (Lema 3.20) $\mathfrak{C}_b(\mathrm{Cor}(A)) \cong \mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))_b$ disponemos de un *-isomorfismo

$$C(A)_b \cong \mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))_b.$$

Tanto $C(A)$ (Lema 3.6) como $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$ (Lema 3.20) son anillos *-regulares con involución definida positiva, por lo que ambos coincidirán con los anillos clásicos de cocientes de sus anillos de elementos acotados (Teorema 3.9). Así el *-isomorfismo de $C(A)_b$ sobre $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))_b$ se extenderá a un *-isomorfismo de $C(A)$ sobre $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$. ■

Deduciremos seguidamente que las JB*-álgebras no conmutativas primas son centralmente cerradas. Para ello observemos previamente el siguiente resultado cuya demostración ya ha sido realizada alguna páginas antes.

Lema 3.23.

En una JB-álgebra no conmutativa prima A, todos los subconjuntos abiertos no vacíos de Cor(A) son densos.*

Corolario 3.24.

El centroide extendido de una JB-álgebra no conmutativa prima coincide con el cuerpo base $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea ϕ una función continua parcialmente abierto-denso definida maximal sobre $\mathrm{Cor}(A)$ y supongamos, razonando por reducción al absurdo, que ϕ no fuera constante. Sean entonces α y β dos puntos distintos en la imagen de ϕ y sea $r > 0$ tal que

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r \} \cap \{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta| < r \} = \emptyset.$$

$$\phi^{-1}(\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r \}) \ \ \text{y} \ \ \phi^{-1}(\{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta| < r \})$$

son abiertos no vacíos disjuntos, lo cual es absurdo pues el lema anterior nos asegura que son densos. Esto demuestra que $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$ coincide con $\mathbb{C}1$ y el Teorema 3.22 nos garantiza entonces que el centroide extendido de A coincide con el cuerpo base $\mathbb{C}$. ∎

Nuestro deseado objetivo de describir el centroide extendido de una JB*-álgebra no conmutativa A ha sido cumplido justo en los términos que cabía esperar. Además no se puede dudar de la utilidad de nuestra descripción en tanto que nos ha permitido obtener otro resultado ya conjeturado

que toda JB-álgebra no conmutativa prima es centralmente cerrada.*

No podemos sin embargo, a pesar de la euforia del objetivo cumplido, dejar de mostrar un poco de insatisfacción ante el hecho de que, a pesar de que nuestro $*$-isomorfismo identificando $C(A)$ con $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$ provenía de un $*$-isomorfismo muy concreto, Teorema 2.31, y perfectamente explicitado, las no pocas manipulaciones algebraicas que hemos realizado nos han hecho perder de vista la forma concreta en que $C(A)$ y $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$ son identificados. Sería pues deseable, y por otra parte totalmente esperable, que dicha identificación fuera perfectamente descriptible. Esperanza que queda alentada además por el siguiente resultado:

Proposición 3.25.

Sea A una JB-álgebra no conmutativa. Entonces para cada f en $C(A)_b$ y cada J en $\mathrm{Cor}(A)$ con $\mathrm{dom}(f) \not\subset J$ existe un único número complejo $f^{\sim}(J)$ tal que $f(a) - f^{\sim}(J)a \in J$ para todo a en $\mathrm{dom}(f)$, la aplicación $f^{\sim}$ de $V_A(\mathrm{dom}(f))$ en $\mathbb{C}$ pertenece a*

*$\mathfrak{C}_b(Cor(A))$ y la aplicación $f \longmapsto f^{\sim}$ es un *-isomorfismo de $C(A)_b$ sobre $\mathfrak{C}_b(Cor(A))$.*

Demostración. Si $f \in C(A)_b$ por la Proposición 3.12 dom(f) es un ideal cerrado de A y en consecuencia $f \in \Gamma(\text{dom}(f))$. Como ya se observó en la Proposición 3.16 existirá entonces una función $f^{\sim} \in C_b(V_A(\text{dom}(f))$ tal que

$$f(a) - f^{\sim}(J)a \in J \quad \forall\ a \in \text{dom}(f),\ \forall\ J \in V_A(\text{dom}(f)).$$

Comprobaremos que $f^{\sim}$ es, de hecho, una función continua y acotada parcialmente abierto-denso definida maximal sobre Cor(A). Sea entonces ϕ una función continua parcialmente abierto-denso definida sobre Cor(A) que extiende a $f^{\sim}$, tendremos por una parte que $\text{dom}(\phi) = V_A(I)$ para conveniente ideal esencial cerrado de A (recuérdese que los subconjuntos abiertos y densos de Cor(A) son justamente de esa forma), y por otra parte tendremos que $\phi \in C_b(V_A(I))$. De esta manera, recordando nuevamente lo dicho en la Proposición 3.16, podemos encontrar un g en $\Gamma(I)$ tal que

$$g(a) - \phi(J)a \in J \quad \forall\ a \in I,\ \forall\ J \in V_A(I).$$

Puesto que estamos suponiendo que ϕ extiende a $f^{\sim}$ tendremos que

$$V_A(\text{dom}(f)) \subset V_A(I) \quad \text{y} \quad f^{\sim}(J) = \phi(J) \quad \forall\ J \in V_A(\text{dom}(f)).$$

De la inclusión $V_A(\text{dom}(f)) \subset V_A(I)$ deducimos que

$$\text{dom}(f) \subset I$$

(obsérvese que $\mathrm{dom}(f) \subset \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\subset J}} J \subset \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Prim}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\subset J}} J = \mathrm{dom}(f)$ y que por tanto $\mathrm{dom}(f) = \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\subset J}} J$, y de la misma forma $I = \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ I\subset J}} J$, por lo que $\mathrm{dom}(f) = \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\subset J}} J \subset \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ I\subset J}} J \subset I$).

Si a es un elemento de $\mathrm{dom}(f)$ y J un elemento de $V_A(\mathrm{dom}(f))$ tenemos que

$$f(a) - g(a) = (f(a) - f^{\sim}(J)a) + (f^{\sim}(J)a - g(a)) =$$

$$(f(a)-f^{\sim}(J)a) + (\phi(J)a-g(a)) \in J.$$

De este modo hemos probado que

$$(f - g)(\mathrm{dom}(f)) \subset J \quad \forall\ J \in V_A(\mathrm{dom}(f)),$$

y por tanto

$$(f - g)(\mathrm{dom}(f)) \subset \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\not\subset J}} J,$$

pero es bien sabido que

$$(f - g)(\mathrm{dom}(f)) \subset \mathrm{dom}(f) \subset \bigcap_{\substack{J\in \mathrm{Cor}(A)\\ \mathrm{dom}(f)\subset J}} J.$$

Así

$$(f - g)(\mathrm{dom}(f)) \subset \bigcap_{J\in \mathrm{Cor}(A)} J = \{0\},$$

y de este modo f coincide con g sobre $\mathrm{dom}(f)$, y por tanto g es un centralizador esencialmente definido de A que extiende a f. Como f es un centralizador esencialmente definido maximal sobre A, podemos concluir entonces que necesariamente

$$f = g,$$

por lo que será

$$f^{\sim} = \phi.$$

Esto nos demuestra ya que $f^{\sim}$ es, de hecho, una función continua y acotada parcialmente abierto-denso definida maximal sobre $\mathrm{Cor}(A)$. Recordemos ahora que la Proposición 3.14 y los Lemas 3.16 y 3.21 nos vienen a decir que la correspondencia entre f y la extensión maximal de $f^{\sim}$ nos proporciona un *-isomorfismo de $C_b(A)$ sobre $\mathfrak{C}_b(\mathrm{Cor}(A))$. Pero aquí acabamos de probar que $f^{\sim}$ es ya maximal y que por lo tanto la aplicación

$$f \longmapsto f^{\sim}$$

es ya el *-isomorfismo de $C(A)_b$ sobre $\mathfrak{C}_b(\mathrm{Cor}(A))$. ∎

Nuestra esperanza de describir la identificación de $C(A)$ con $\mathfrak{C}(\mathrm{Cor}(A))$, en términos análogos a los de la Proposición que acabamos de demostrar, se vuelve casi convicción al observar que por **[51; Proposiciones 5 y 6]**

si A es un álgebra de Jordan normada y completa, J el corazón de un ideal interno maximal-modular de A y f un centralizador parcialmente definido y cerrado sobre A con $\mathrm{dom}(f) \not\subset J$. Existe entonces un λ en $\mathbb{C}$ tal que $f(x) - \lambda x \in J$ para todo x en $\mathrm{dom}(f)$.

Si A es entonces una JB*-álgebra no conmutativa, f un elemento del controide extendido de A (luego un centralizador parcialmente definido cerrado [15]) y $J \in Cor(A)$ con $dom(f) \not\subset J$, existe un único número complejo $f^{\sim}(J)$ tal que

$$f(a) - f^{\sim}(J)a \in J \quad \forall\ a \in dom(f).$$

En vista de la Proposición 3.25 no parece aventurado conjeturar que

para una JB-álgebra no conmutativa A y un elemento f de $C(A)$, la aplicación $J \longmapsto f^{\sim}(J)$ de $V_A(dom(f))$ en $\mathbb{C}$ es continua,*

ni tampoco parece descabellado conjeturar que

*la función $J \longmapsto f^{\sim}(J)$ de $V_A(dom(f))$ en $\mathbb{C}$ es una función continua parcialmente abierto-denso definida maximal sobre $Cor(A)$, y el *-isomorfismo de nuestra descripción queda justamente establecido por $f \longmapsto f^{\sim}$.*

Desafortunadamente no hemos sido capaces de verificarlo.

Comprobaremos ahora que nuestros Teoremas 2.31 y 3.22 extienden, respectivamente, el teorema de Dauns-Hofmann clásico y el teorema de Ara, para lo cual mostraremos cómo, para una C*-álgebra, los corazones de sus ideales internos maximales-modulares no son otra cosa que los ideales primitivos.

Proposición 3.26.

En una C^*-álgebra A los corazones de los ideales internos maximales-modulares de A coinciden con los ideales primitivos de A.

Demostración. El Ejemplo 1.22 nos muestra cómo los ideales primitivos de cualquier álgebra asociativa, en particular de nuestra C^*-álgebra, son corazones de ideales internos maximales-modulares.

Veamos ahora que los "corazones" de A son ideales primitivos de A. Supongamos en primer lugar que M es un ideal interno cerrado maximal de A y consideremos $M^{\circ\circ}$, que es un ideal interno w^*-cerrado de la W^*-álgebra A''. Pero como consecuencia de **[20; Teorema 3.16]** es sabido que

> *todo ideal interno w^*-cerrado de una W^*-álgebra coincide con la intersección de un ideal izquierdo w^*-cerrado y un ideal derecho w^*-cerrado,*

y por tanto podemos poner

$$M^{\circ\circ} = L \cap R$$

para conveniente ideal izquierdo w^*-cerrado L de A'' y conveniente ideal derecho w*-cerrado R de A''. Por ser M cerrado el teorema de la bipolar nos garantiza que

$$M = M^{\circ\circ} \cap A,$$

y en consecuencia será

$$M = (L \cap A) \cap (R \cap A).$$

Pero $L \cap A$ y $R \cap A$ son ideales unilaterales cerrados de A (izquierdo y derecho, respectivamente), luego ideales internos cerrados de A, conteniendo a M. La maximalidad de M nos asegura, por tanto, que

$$L \cap A = A \text{ ó } M \quad \text{y} \quad R \cap A = A \text{ ó } M.$$

Puesto que no puede darse la posibilidad $L \cap A = R \cap A = A$, deberá ser

$$L \cap A = M \text{ o bien } R \cap A = M,$$

hecho que nos viene a decir que M es un ideal unilateral de A. Así habremos probado que

los ideales internos cerrados maximales de una C-álgebra coinciden con sus ideales unilaterales cerrados maximales.*

Si nuestra C*-álgebra A tiene unidad los ideales internos maximales de A son cerrados, y por tanto:

los ideales internos maximales de una C-álgebra con unidad* A *coinciden con sus ideales unilaterales maximales.*

Supongamos ahora que la C*-álgebra A pueda carecer de unidad y sea M un ideal interno x-maximal de A. Sabemos entonces (Nota 1.16) que $M = M_1 \cap A$ para conveniente ideal interno maximal M_1 de A_1 conteniendo a $1-x$. Por lo ya demostrado antes M_1 es un ideal unilateral de A_1 (que contiene a $1-x$) y por tanto M es un ideal unilateral modular. Así

los ideales internos maximales-modulares de una C-álgebra coinciden con sus ideales unilaterales modulares maximales.*

Supongamos ahora J es el corazón de un ideal interno maximal-modular M de la C*-álgebra A. Ya sabemos que M es un ideal unilateral (por ejemplo izquierdo) que es maximal entre todos los ideales unilaterales propios de A. Con más razón es maximal entre los ideales izquierdos propios de A, por lo que es un ideal izquierdo modular maximal y J es un ideal primitivo (izquierdo) de A. ∎

CAPITULO IV

ZOCALO DE LAS ALGEBRAS DE JORDAN NO DEGENERADAS

En el presente capítulo se pretende exponer los resultados básicos sobre las álgebras de Jordan con zócalo no cero, con especial énfasis, por supuesto, en el caso normado completo.

El concepto de zócalo fue introducido por J. Dieudonne en **[17]** para las álgebras asociativas semiprimas. En una tal álgebra A existen ideales izquierdos minimales (ideales izquierdos no nulos que no contienen ningún otro ideal izquierdo no nulo) si, y sólo si, existen ideales derechos minimales (de definición análoga), en cuyo caso la suma de los primeros coincide con la suma de los segundos, que es por tanto un ideal (bilatero) de A al que se llama *zócalo* de A y se nota $soc(A)$ (véase **[31; Capítulo IV]**). Si el álgebra asociativa semiprima A carece de ideales izquierdos minimales se conviene en decir que $soc(A) = 0$.

La existencia de ideales unilaterales minimales en un álgebra asociativa semiprima, o lo que es lo mismo el hecho de que ésta tenga zócalo no cero, es de gran utilidad para el estudio de su estructura, al menos cuando el álgebra es, de hecho, prima. El principal teorema de estructura de que disponemos para álgebras asociativas primas con zócalo no cero da una caracterización de éstas como ciertas álgebras de operadores lineales.

Definición 4.1.

Un par de espacios vectoriales X e Y sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dicen estar en *dualidad* cuando se disponga de una aplicación bilineal no degenerada $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $X \times Y$ en $\mathbb{K}$. La terna $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es lo que se llama un *par dual*.

Si $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un par dual debe ser claro que todo elemento x de X define un funcional lineal sobre Y mediante

$$\hat{x}(y) = \langle x,y\rangle \quad \forall\ y \in Y,$$

y que todo elemento y de Y define un funcional lineal $\hat{y}$ sobre X. Debe ser claro también que las aplicaciones $x \longmapsto \hat{x}$ e $y \longmapsto \hat{y}$ son lineales e inyectivas, las cuales serán llamadas *inmersiones naturales*.

Definición 4.2.

Sean X e Y espacios vectoriales sobre cuerpos $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$, respectiamente, y sea v un isomorfismo de cuerpos de $\mathbb{K}_1$ sobre $\mathbb{K}_2$. Diremos que una aplicación V de X en Y es una aplicacion semilineal (con isomorfismo de cuerpos asociado v) si

$$V(x_1+x_2) = V(x_1)+V(x_2) \quad \text{y}$$

$$V(\lambda x_1) = v(\lambda)V(x_1) \quad \forall\ \lambda\in\mathbb{K}_1,\ \forall\ x_1,x_2\in X.$$

Sean $(X_1, Y_1, <\cdot,\cdot>_1)$ y $(X_2, Y_2, <\cdot,\cdot>_2)$ pares duales sobre los cuerpos $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ respectivamente. Diremos que una aplicacion semilineal V de X_1 en X_2, con isomorfismo de cuerpos asociado v, *tiene adjunto* si existe una aplicación U de Y_2 en Y_1 tal que

$$<x_1,Uy_2>_1^{v} = <Vx_1,y_2>_2 \quad \forall\ x_1 \in X_1,\ \forall\ y_2 \in Y_2.$$

(donde, por λ^{v} denotamos a $v(\lambda)$).

La no degeneración de la forma bilineal $<\cdot,\cdot>_1$ nos permite comprobar sin dificultad que U es una aplicación semilineal de Y_2 en Y_1 con isomorfismo de cuerpos asociado v^{-1}, y que U está unívocamente determinado por V. A este U, caso de existir, se le llamará *adjunto* de V y se notará $V^{\#}$.

Para un par dual $(X, Y, <\cdot,\cdot>)$ notaremos por $L_Y(X)$ al álgebra de todos los operadores lineales T de X en X que tienen un adjunto con respecto a $<\cdot,\cdot>$, esto es, tales que exista otro operador $T^{\#}$ de Y en Y con

$$\langle x, T^{\#}y\rangle = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall\, x \in X,\ \forall\, y \in Y.$$

Notaremos también por $FL_Y(X)$ el conjunto de aquellos operadores de $L_Y(X)$ que además tengan rango finito-dimensional.

Si $u \in X$ y $v \in Y$ definimos el operador lineal $u\otimes v$ sobre X por

$$(u\otimes v)(x) = \langle x, v\rangle u \qquad \forall\, x \in X.$$

Obsérvese que

$$u\otimes v \in FL_Y(X)$$

y que

$$(u\otimes v)^{\#}(y) = \langle u, y\rangle v \qquad \forall\, y \in Y.$$

Es claro que $L_Y(X)$ es una subálgebra del álgebra $L(X)$ de todos los operadores lineales sobre X.

Ejemplo 4.3.

El teorema de estructura de Jacobson (que enunciaremos seguidamente) nos permite asegurar que

si A es una subálgebra de $L_Y(X)$ conteniendo a $FL_Y(X)$ para conveniente par dual $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces A es prima (de hecho, primitiva) con zócalo no cero.

Es más, el teorema de estructura de Jacobson nos garantiza que, de hecho, salvo algún retoque en la anterior descripción, todas las álgebras asociativas primas con zócalo no cero responden al anterior esquema. Efectivamente, si notamos que por [40; **Teorema 1**]

> *para un álgebra asociativa semiprima con zócalo no cero equivalen el ser primitiva y el ser prima,*

tendremos que el teorema de estructura de Jacobson [31; **Teorema IV.9**] se puede establecer de la siguiente manera:

Teorema (de estructura de Jacobson) **4.4.**

Un álgebra asociativa A es prima con zócalo no cero si, y sólo si, existe un álgebra asociativa de división Δ y un par dual $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre Δ tal que A es una subálgebra de $L_Y(X)$ conteniendo a $FL_Y(X)$, en cuyo caso el zócalo de A coincide con $FL_Y(X)$.

El lector debería intuir cuál debe ser la definición de par dual sobre un álgebra asociativa de división y qué significará la adjunción en un tal ambiente.

Disponemos de esta manera de una descripción algebraica plenamente satisfactoria de las álgebras asociativas primas con zócalo no cero.

Sean $(X_1, Y_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(X_2, Y_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ pares duales sobre cuerpos $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ respectivamente. Si V es un isomorfismo semilineal de X_1 sobre X_2, para cada operador lineal T sobre X_1 la aplicación VTV^{-1} define un operador lineal sobre X_2, que además tiene rango finito-dimensional cuando T lo tiene, y que tiene adjunto cuando T, V y V^{-1} lo tienen. Si suponemos, por tanto, que V y V^{-1} tienen además adjunto, dispondremos de una aplicación

$$T \longmapsto VTV^{-1}$$

que establece un isomorfismo de $\mathrm{L}_{Y_1}(X_1)$ sobre $\mathrm{L}_{Y_2}(X_2)$ y que induce, por restricción del dominio y la imagen, un isomorfismo de $\mathrm{FL}_{Y_1}(X_1)$ sobre $\mathrm{FL}_{Y_2}(X_2)$.

El teorema de los isomorfismos de Jacobson nos dirá que los anteriores son, en realidad, los únicos isomorfismos de anillos existentes entre álgebras asociativas primas con zócalo no cero (por supuesto, vistas según dice el teorema de estructura). Aunque este famoso teorema está establecido en el ambiente general de los pares duales sobre álgebras asociativas de división, hacemos aquí una lectura restringida del mismo limitándonos a los únicos pares duales que a nosotros nos son de interés: los bien conocidos, pares duales sobre cuerpos.

Terema (de los isomorfismos de Jacobson) **4.5.**

Sean $(X_1, Y_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(X_2, Y_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ *pares duales sobre los cuerpos* $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ *respectivamente, y sea* R_i *un subanillo de* $L_{Y_i}(X_i)$ *conteniendo a* $FL_{Y_i}(X_i)$ *para* $i = 1, 2$. *Si* ϕ *es un isomorfismo de* R_1 *sobre* R_2, *existe entonces un isomorfismo semilineal* V *de* X_1 *sobre* X_2 *tal que* V *y* V^{-1} *tienen adjunto y tal que* $\phi(T) = VTV^{-1}$ *para todo* T *de* R_1.

Pasando ahora a nuestro ambiente de álgebras normadas, es lógico suponer que el teorema de estructura de Jacobson para las álgebras asociativas primas con zócalo no cero sea topológicamente perfeccionable si el álgebra en cuestión es supuesta, adicionalmente, de Banach. Efectivamente así sucede, apareciendo en escena los llamados apareamientos de Banach (que no son otra cosa que la traslación lógica al ambiente normado de los pares duales).

Definición 4.6.

Un *apareamiento de Banach* será un par dual $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ en el que X e Y son espacios de Banach y la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es continua sobre $X \times Y$.

Un apareamiento de Banach $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ en el que $Y = X$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es bien simétrica o bien antisimétrica se llamará *espacio de Banach autodual* y se notará simplemente por $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

El espacio de Banach autodual $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ recibirá el nombre de *simétrico* o de *antisimétrico* dependiendo de que la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sea simétrica o antisimétrica, respectivamente.

Para un tal espacio de Banach autodual la aplicación

$$T \longrightarrow T^{\#}$$

define una involución lineal del álgebra $L_X(X)$ que deja invariante a $FL_X(X)$. $Sim(L_X(X))$ y $Sim(FL_X(X))$ denotarán justamente los elementos simétricos de $L_X(X)$ y $FL_X(X)$, respectivamente, respecto de tal involución.

Nota 4.7.

Si $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un apareamiento de Banach, el teorema de la gráfica cerrada nos permite comprobar que $L_Y(X)$ es una subálgebra de $BL(X)$. Lamentablemente no tenemos garantia de que dicha subálgebra sea cerrada en $BL(X)$, y es por ello por lo que en dicha álgebra se considera la norma $|\cdot|$ definida por

$$|T| = \max\{\|T\|, \|T^{\#}\|\} \quad \forall\ T \in L_Y(X).$$

Y sabemos por **[8; Lema 27.5]** que

si $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un apareamiento de Banach entonces* $(L_Y(X), |\cdot|)$ *es un álgebra de Banach.*

Ejemplo 4.8.

De esta manera obtenemos, a partir del Ejemplo 4.3 y de lo anterior, que

si A es una subálgebra cerrada de $(L_Y(X), |\cdot|)$ conteniendo a $FL_Y(X)$ para conveniente apareamiento de Banach, entonces A es un álgebra de Banach prima con zócalo no cero.

Es más, según puede observarse en **[8; Teorema 31.6]** o **[48; Teorema 2.4.12]** cualquier álgebra de Banach compleja prima con zócalo no cero no está muy lejos de ser una de las antes descritas.

Teorema 4.9.

Un álgebra de Banach compleja A es prima con zócalo no cero si, y sólo si, existe un apareamiento de Banach complejo $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y un homomorfismo continuo e inyectivo ϕ de A en el álgebra de Banach $(L_Y(X), |\cdot|)$ tal que el rango de ϕ contiene a $FL_Y(X)$. En tal caso $\phi(Soc(A)) = FL_Y(X)$.

Observemos que la anterior descripción, de las álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero, no es del todo satisfactoria desde el punto de vista analítico. La razón es que, aunque supone un avance considerable respecto a la descripción puramente algebraica del Teorema 4.5, no se consigue una descripción topológica (que, por otra parte, es la que cabría esperar) del álgebra de Banach. Esta deseada descripción algébrico-topológica la conseguiremos con un nuevo "mejoramiento" analítico del álgebra.

Definición 4.10.

Diremos que un álgebra normada $(A, \|\cdot\|)$ tiene *minimalidad de la topología de la norma* si para cualquier otra norma de álgebra $|\cdot|$ sobre A tal que $|\cdot| \leq \rho\|\cdot\|$ para conveniente positivo ρ, se tiene que, de hecho, la norma $|\cdot|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$.

Ejemplo 4.11.

Casualmente nuestras, ya familiares, JB*-álgebras no conmutativas tienen minimalidad de la topología de la norma, como se demuestra en [46].

Es justamente para las álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma para las que tenemos un teorema de descripción algébrico-topológica plenamente satisfactorio. Antes de presentar tal descripción introduzcamos los nuevos apareamientos que en ésta aparecen.

Es claro que, para un apareamiento de Banach $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, las inmersiones naturales $x \longmapsto \hat{x}$ e $y \longmapsto \hat{y}$ están, de hecho, valuadas en los duales topológicos Y' y X' respectivamente y son, además, continuas.

Definición 4.12.

Un apareamiento de Banach $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que las inmersiones naturales, $x \longmapsto \hat{x}$ e $y \longmapsto \hat{y}$, de X en Y' y de Y en X' respectivamente, sean homeomorfismos sobre sus imagenes se llamará *apareamiento de Banach regular.*

Destaquemos antes de continuar que los resultados fundamentales en lo que sigue están extraidos de **[49]** y **[47]**, y serán justamente los que nos sirvan para nuestra descripción de las JB*-álgebras primas con zócalo no cero que haremos en el siguiente capítulo.

En **[49; Teorema II.2.1]** y **[47; Teorema I.2]** se comprobó que:

Teorema 4.13.

Salvo isomorfismos topologicos, las álgebras de Banach complejas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma son justamente las subálgebras cerradas de $BL(X)$ *contenidas en* $L_Y(X)$ *y conteniendo a* $FL_Y(X)$, *para conveniente apareamiento de Banach regular* $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

El concepto de zócalo fue introducido en las álgebras de Jordan no degeneradas por J. M. Osborn y M. L. Racine en **[40]**. El concepto de no degeneración para álgebras de Jordan es justamente la traslación para éstas de la semiprimidad asociativa, en el sentido de que para un álgebra asociativa A, el hecho de que ésta sea semiprima se puede reformular en términos del álgebra de Jordan A^+. Concretamente

el álgebra asociativa A *es semiprima si, y sólo si, los operadores* U_a *del álgebra de Jordan* A^+ *son no nulos para los* a *no nulos de* A.

Establecemos entonces la siguiente definición:

Definición 4.14.
Un álgebra de Jordan no conmutativa A se dice *no degenerada* si

$$U_a \neq 0 \text{ para cualquier } a \neq 0.$$

Ejemplo 4.15.

(i) Según se vio anteriormente el álgebra simetrizada A^+ de un álgebra asociativa semiprima es un álgebra de Jordan no degenerada.

(ii) Es evidente que las JB*-álgebras no conmutativas son no degeneradas.

Definición 4.16.

Un subespacio I de un álgebra de Jordan A se llamará *ideal interno débil* si

$$U_I(A) \subset I.$$

Obsérvese que un ideal interno débil I de un álgebra de Jordan A no es, a diferencia de lo que ocurría con los ideales internos, necesariamente una subálgebra de A, y justamente la condición para que ésto suceda es que I sea, de hecho, un ideal interno de A (Definición 1.12) o, equivalentemente, un ideal interno débil de la unitización A_1 de A.

Un ideal interno débil de un álgebra de Jordan A se dice *minimal* si no es cero y no contiene ningún otro ideal interno débil no cero de A.

Definición 4.17.

Definimos el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada A, y se notará $\mathrm{Soc}(A)$, como la suma de los ideales internos débiles minimales de A, caso de que existan, y se conviene en definir $\mathrm{Soc}(A) = 0$ en el caso de que A carezca de ideales internos débiles minimales.

En [40; **Teorema 17**] se comprobó que

el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada A es un ideal de A.

En [40; **Teorema 18**] se obtuvo además una descripción para las álgebras de Jordan no degeneradas primitivas con zócalo no cero, donde el ser primitiva significa (como se puede sospechar) que el ideal cero es el corazón de algún ideal interno maximal-modular del álgebra. Esta descripción es, en realidad, una descripción de las álgebras de Jordan no degeneradas primas con zócalo no cero pues posteriormente se comprobó en [23; **Teorema 12**] que

un álgebra de Jordan no degenerada con zócalo no cero es primitiva si, y sólo si, es prima.

No se disponía, sin embargo, de un teorema de descripción satisfactoria para las álgebras de Jordan no degeneradas con zócalo con cero con la hipótesis adicional de ser complejas normadas y completas hasta el trabajo de L. Rico [49].

En el caso normado completo se dispone del siguiente teorema de descripción cuya demostración puede verse en [49; **Teorema III.1.3**] y [47; **Teorema 1.1**].

Teorema 4.18.

Un álgebra de Jordan compleja normada completa A es prima y no degenerada con zócalo no cero si, y sólo si, se encuentra en alguna de las siguientes situaciones:

(i) A es, salvo isomorfismos topológicos, el álgebra de Jordan $M_3^S(\mathbb{C})$.

(ii) A es simple y cuadrática sobre $\mathbb{C}$.

(iii) Existe un apareamiento de Banach complejo $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y un homomorfismo continuo e inyectivo ϕ de A en el álgebra de Jordan normada completa $(L_Y(X)^+, |\cdot|)$ tal que el rango de ϕ contiene a $FL_Y(X)$.

(iv) Existe un espacio de Banach complejo autodual $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y un homomorfismo continuo e inyectivo ϕ de A en el álgebra de Jordan normada completa $(Sim(L_X(X)), |\cdot|)$ que contiene a $Sim(FL_X(X))$.

Obsérvese que la anterior descripción no es, desde el punto de vista analítico, enteramente satisfactoria. La hipótesis de minimalidad de la topología de la norma, cómo no, sí que permite obtener ([49; Teorema III.2.4] y [47; Teorema 1.3]), sin embargo, la descripción que cabía esperar.

Teorema 4.19.

Salvo isomorfismos topológicos, las álgebras de Jordan no degeneradas complejas normadas completas primas con zócalo no cero y minimalidad de la topología de la norma son las siguientes:

(i) *El álgebra de Jordan* $M_3^8(\mathbb{C})$.

(ii) *Las algebras* $J(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *donde* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio de Banach complejo autodual regular simétrico con* $\dim(X)\geq 2$ *(recuérdese el Ejemplo 1.11(v)).*

(iii) *Las subálgebras de Jordan cerradas de* $BL(X)$ *contenidas en* $L_Y(X)$ *y que contienen a* $FL_Y(X)$, *donde* $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un apareamiento de Banach complejo regular.*

(iv) *Las subálgebras de Jordan cerradas de* $BL(X)$ *contenidas en* $Sim(L_X(X))$ *y que contienen a* $Sim(FL_X(X))$, *donde* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio de Banach complejo autodual regular.*

Con posterioridad a la introducción del zócalo en álgebras de Jordan, A. Fernández y A. Rodríguez definieron en **[23]** el zócalo de un álgebra de Jordan no conmutativa no degenerada A como el zócalo del álgebra de Jordan A^+.

Se comprobó en [23; **Corolario 8**] que el concepto de zócalo introducido para las álgebras de Jordan no conmutativas es, de hecho, una verdadera extensión para éstas del zócalo asociativo, pues se tiene que *el zócalo de un álgebra asociativa no degenerada A vista como álgebra de Jordan no conmutativa, coincide con el zócalo de A vista como álgebra asociativa semiprima.*

Además se obtuvo un teorema de clasificación para las álgebras de Jordan no comutativas no degeneradas primas con zócalo no cero que en el caso normado adopta ([16; **Teorema 2**]) la siguiente forma:

Teorema 4.20.

Las álgebras de Jordan no conmutativas normadas no degeneradas complejas primas con zócalo no cero son las siguientes:

(i) Las álgebras complejas normadas simples flexibles y cuadráticas.

(ii) Las álgebras de Jordan no degeneradas complejas normadas primas con zócalo no cero.

(iii) Las λ-mutaciones $A^{(\lambda)}$ de un álgebra asociativa normada compleja prima con zócalo no cero A con $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{2}\}$.

CAPITULO V

JB^*-ALGEBRAS PRIMAS CON ZOCALO NO CERO

Nuestra intención ahora es describir las JB*-álgebras no conmutativas primas con zócalo no cero, para lo cual los anteriores resultados de descripción nos serán de gran ayuda.

Como quiera que cada JB*-álgebra no conmutativa A es evidentemente no degenerada, si además A es prima y tiene zócalo no cero, los teoremas de descripción del Capítulo anterior (ya se apuntó en el ejemplo 4.11 que las JB*-álgebras no conmutativas tienen minimalidad de la topología de la norma) nos permitirian encuadrar nuestra JB*-álgebra no conmutativa entre ciertos modelos de álgebras (véanse los Teoremas 4.19 y 4.20). Aunque ésto supone una primera aproximación a la estructura de nuestra JB*-álgebra no conmutativa prima con zócalo no cero, no llegamos sin embargo a obtener una descripción, ni tan siquiera "topológica", de ésta, pues no todas las álgebras encuadradables entre estos modelos son "topológicamente" JB*-álgebras no conmutativas.

Por otra parte, ya que debemos de estar convencidos del marcado carácter geométrico de las JB*-álgebras no conmutativas, no podemos admitir para éstas ninguna descripción que no sea "geométrica", en el sentido perfectamente imaginable de que se describa su norma; o lo que es lo mismo, ya no nos conformamos con un modelo "salvo isomorfismos topológicos" sino que deseamos un modelo "salvo *-isomorfismos (automáticamente isométricos)". Qué duda cabe de que esta descripción que se pretende es perfectamente razonable.

La aplicación del Teorema 4.20 a nuestra JB*-álgebra no conmutativa prima con zócalo no cero nos permite hacer una primera aproximación, puramente algebraica, en la descripción de A afirmando que A se encuentra en una de las siguientes situaciones:

i) *A es simple y cuadrática.*

ii) *A es conmutativa.*

iii) *A es la λ-mutación $B^{(\lambda)}$ (con λ en $\mathbb{C}$ y $\lambda \neq 1/2$) de un álgebra de Banach no conmutativa compleja prima con zócalo no cero.*

5.1. JB*-álgebras no conmutativas simples cuadráticas.

Si A se encuentra en la primera de las situaciones, es decir si A es una JB*-álgebra no conmutativa simple y cuadrática, entonces su descripción nos viene ya dada de manera plenamente satisfactoria en **[44; Sección 3]**, pues allí se demostró que

si A es una JB-álgebra no conmutativa simple cuadrática, existen un espacio de Hilbert real E con $\dim_{\mathbb{R}}(E) \geq 2$ y una aplicación bilineal anticonmutativa $\wedge$ de $E \times E$ en E verificando*

$$(x \wedge y | z) = (x | y \wedge z)$$

$$\|x \wedge y\| \leq \|x\| \|y\|,$$

y de manera que, definiendo en la suma de Hilbert $\mathbb{R} \oplus E$ el producto

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta - (x|y) \ , \ \alpha y + \beta x + x \wedge y),$$

se tiene que A es totalmente isomorfa a $(\mathbb{R} \oplus E)_{\mathbb{C}}$ con el producto de la complexificación, involución dada por

$$[\ (\alpha, x) + i(\beta, y)\ ]^{*} = (\alpha, -x) + i(-\beta, y),$$

y norma dada por

$$\|\ (\alpha, x) + i(\beta, y)\ \|^{2} =$$

$$\|(\alpha, x)\|^{2} + \|(\beta, y)\|^{2} + 2[\ \|(\alpha, x)\|^{2} \|(\beta, y)\|^{2} - (\ (\alpha, x)\ |\ (\beta, y)\ )^{2}]^{1/2}.$$

5.2. JB*-álgebras primas con zócalo no cero.

Como es bien sabido nuestra JB*-álgebra no conmutativa A (prima y con zócalo no cero) tiene minimalidad de la topología de la norma. Por tanto, si A es, de hecho, conmutativa el Teorema 4.19 nos permite hacer una primera aproximación a la estructura de A. Concretamente A queda enmarcada en uno de los siguientes casos:

i) A es algebraicamente isomorfa al álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$.

ii) A es simple cuadrática.

iii) A es, salvo isomorfismos topológicos, una subálgebra de Jordan cerrada de $BL(X)$ contenida en $L_Y(X)$ y que contiene a $FL_Y(X)$, para conveniente apareamiento de Banach complejo regular $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

iv) A es, salvo isomorfismos topológicos, una subálgebra de Jordan cerrada de $BL(X)$ contenida en $\mathrm{Sim}(L_X(X))$ y que contiene a $\mathrm{Sim}(FL_X(X))$, para conveniente espacio de Banach complejo autodual regular $(X , \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Estudiaremos pacientemente lo que ocurre en cada una de las situaciones anteriores.

Situación (i).

En [43; Corolario 2.10] se demostró que:

si dos JB-álgebras no conmutativas son isomorfas entonces son *-isomorfas.*

Lo anterior nos permite obtener dos conclusiones:

(a) la primera es que la estructura de JB*-álgebra de $M_3^8(\mathbb{C})$ (véase Ejemplo 1.27(iii)) es esencialmente única,

(b) y en segundo lugar, si nuestra JB*-álgebra A es, como se dice en 5.2(i), topológicamente isomorfa a la JB*-álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$, entonces existirá un *-isomorfismo (por otra parte, automáticamente isométrico) de A sobre $M_3^8(\mathbb{C})$.

Así la primera situación se traduce en que:

*A es, salvo *-isomorfismos (automáticamente isométricos), la JB*-álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$ con su estrctura esencialmente única de JB*-álgebra.*

<u>Situación</u> <u>(ii)</u>.

Si suponemos ahora que A es una JB*-álgebra prima cuadrática la descripción nos viene ya dada en 5.1 con $\wedge$ idénticamente nula.

Así la segunda situación se traduce en que:

existe un espacio de Hilbert real E con $\dim_{\mathbb{R}}(E) \geq 2$, de manera que, definiendo en la suma de Hilbert $\mathbb{R} \oplus E$ el producto

$$(\alpha,x)(\beta,y) = (\alpha\beta - (x|y)\ ,\ \alpha y + \beta x),$$

se tiene que A es totalmente isomorfa a $(\mathbb{R} \oplus E)_{\mathbb{C}}$ con el producto de la complexificación, involución dada por

$$[\ (\alpha,x) + i(\beta,y)\ ]^* = (\alpha,-x) + i(-\beta,y),$$

y norma dada por

$$\|\ (\alpha,x) + i(\beta,y)\ \|^2 =$$

$$\|(\alpha,x)\|^2 + \|(\beta,y)\|^2 + 2[\ \|(\alpha,x)\|^2 \|(\beta,y)^2 - (\ (\alpha,x)\ |\ (\beta,y)\ )^2]^{1/2}.$$

Situación (iii).

Supongamos que A se encuentra en la situación descrita en el apartado (iii) del enunciado. A es entonces, salvo isomorfismos topológicos, una subálgebra de Jordan cerrada de $BL(X)$ contenida en $L_Y(X)$ y que contiene a $FL_Y(X)$, para conveniente apareamiento de Banach regular $(X , Y , <\cdot,\cdot>)$. Podremos suponer, por tanto, que A es una subálgebra de Jordan de $BL(X)$ de manera que su norma "estelar" es equivalente a la correspondiente restricción a A de la norma de operadores sobre $BL(X)$, y tal que

$$FL_Y(X) \subset A \subset L_Y(X).$$

Sea $B = \overline{FL_Y(X)}^{A} = \overline{FL_Y(X)}^{BL(X)}$. B es un álgebra asociativa compleja tal que

$$FL_Y(X) \subset B \subset L_Y(X).$$

Puesto que evidentemente el zócalo de A, o lo que es lo mismo $FL_Y(X)$, es *-invariante, será B también *-invariante y de este modo $(B^+ , \|\cdot\|)$ será una JB*-álgebra. Puesto que por **[52; Teorema 2]**

un álgebra asociativa compleja B tal que B^+ es una JB-álgebra para conveniente norma e involución es, con la misma norma e involución, una C*-álgebra,*

tendremos que $(B , \|\cdot\|)$ es una C*-álgebra con la restricción de la involución * de A.

De esta manera B es un subanillo de $L_Y(X)$ que contiene a $FL_Y(X)$ y que posee una involución (conjugado-lineal)

$$F \longmapsto F^\star.$$

A la manera de **[31; IV.12]** definimos la aplicación bilineal no degenerada $<\cdot,\cdot>_r$ sobre $Y \times X$ de la siguiente forma:

$$< y \, , \, x >_r \; = \; < x \, , \, y > \qquad \forall \; y \in Y, \; \forall \; x \in X.$$

Esta aplicación bilineal hace de la terna $(Y \, , \, X \, , \, <\cdot,\cdot>_r)$ un par de espacios vectoriales en dualidad, y si definimos

$$B^{\#} = \{ \, F^{\#} \; : \; F \in B \, \}$$

obtenemos un subanillo de $L_X(Y)$ que contiene a $FL_X(Y)$. La aplicación

$$G \longmapsto (G^{\#})^\star$$

es un isomorfismo de anillos de $B^{\#}$ sobre B, y el teorema de los isomorfismos de Jacobson (Teorema 4.5) nos garantiza ahora la existencia de un isomorfismo semilineal V (con isomorfismo de cuerpos asociado v) de Y sobre X tal que V y V^{-1} tienen adjunto y

$$F^\star \; = \; V \, F^{\#} \, V^{-1} \qquad \forall \; F \in B.$$

Veamos seguidamente como repercuten las propiedades de la involución * en el isomorfismo semilineal V.

En primer lugar, utilizando la conjugado-linealidad de * obtenemos que, si F es un elemento no nulo de B y α es cualquier número complejo,

$$\bar{\alpha}F^\star = (\alpha F)^\star = V(\alpha F)^\# V^{-1} = V(\alpha F^\#)V^{-1} = v(\alpha)VF^\# V^{-1} = v(\alpha)F^\star,$$

y de este modo será

$$v(\alpha) = \bar{\alpha} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Así V es un isomorfismo conjugado-lineal de Y sobre X.

En segundo lugar, utilizando el carácter involutivo de $\star$ obtenemos que, si F está en B,

$$F=F^{\star\star}= V(F^\star)^\# V^{-1} = V(VF^\# V^{-1})^\# V^{-1} = V(V^{-1})^\# F V^\# V^{-1} = (V(V^\#)^{-1})F(V^\# V^{-1})$$

y así

$$F(V^\# V^{-1}) = (V^\# V^{-1})F$$

para cualquier F de B. Esto nos garantiza la existencia de un número complejo λ tal que $V^\# V^{-1} = \lambda I$ y, por tanto

$$V^\# = \lambda V.$$

Además, para y en Y, tenemos que

$$\langle Vy,y\rangle = \overline{\langle y,V^\# y\rangle_r} = \overline{\langle V^\# y,y\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle Vy,y\rangle} = \bar{\lambda}\lambda\langle Vy,y\rangle = |\lambda|^2\langle Vy,y\rangle.$$

Y como quiera que la aplicación $\langle V(\cdot),\cdot\rangle$ es una forma sesquilineal no degenerada sobre Y, la fórmula de polarización nos permite asegurar la existencia de un y en Y tal que $\langle Vy,y\rangle \neq 0$, lo cual, junto con lo anterior, nos demuestra que $|\lambda| = 1$.

Si μ es ahora un número complejo tal que $\mu^2 = \lambda$, podemos cambiar V por μV, lo cual nos permitirá suponer que

$$V^\# = V.$$

El primer paso a dar para la comprobación de la anterior afirmación será mostrar cómo sigue siendo cierto que $F^\star$ coincide con $(\mu V)F^{\#}(\mu V)^{-1}$, para cualquier F de B. Efectivamente, si F es un elemento de B tenemos que

$$(\mu V)F^{\#}(\mu V)^{-1}=\mu VF^{\#}V^{-1}\mu^{-1}=\mu VF^{\#}(\bar{\mu})^{-1}V^{-1}=\mu V(\bar{\mu})^{-1}F^{\#}V^{-1}=VF^{\#}V^{-1}=F^\star.$$

Observemos ahora que

$$(\mu V)^{\#} = V^{\#}\mu^{\#} = V^{\#}\bar{\mu} = \bar{\mu}V^{\#} = \bar{\mu}\lambda V = \bar{\mu}\mu^{2}V = \mu V$$

(esta última igualdad es solamente una consecuencia del hecho de ser $|\lambda| = 1$). Así nuestra suposición es perfectamente válida.

Definimos ahora sobre X la forma sesquilineal g siguiente:

$$g(x_1,x_2) = \langle x_1,V^{-1}x_2\rangle \qquad \forall\ x_1,\ x_2 \in X,$$

Y deduciremos ahora fácilmente que tal forma sesquilineal es, de hecho, una forma hermitiana. Efectivamente, para x_1 y x_2 en X tenemos que

$$\overline{g(x_1,x_2)} = \overline{\langle x_1,V^{-1}x_2\rangle} = \langle x_2,(V^{-1})^{\#}x_1\rangle = \langle x_2,V^{-1}x_1\rangle = g(x_2,x_1).$$

Comprobaremos seguidamente que además $g(x,x) \neq 0$ para cualquier elemento no nulo x de X.

Si x está en X e y está en Y sabemos que $x\odot y$ pertenece a $FL_Y(X)$, y no es difícil ver que

$$(x\odot y)^\star = V(y)\odot V^{-1}(x).$$

Por lo que, si x está en X, $x\odot V^{-1}x$ pertenecerá a $FL_Y(X)$ y

$$(x\odot V^{-1}x)^\star = VV^{-1}x\odot V^{-1}x = x\odot V^{-1}x.$$

Puesto que (B, $\|\cdot\|$) es una C*-algebra tendremos que

$$\|x\otimes V^{-1}x\|^2 = \|(x\otimes V^{-1}x)^*(x\otimes V^{-1}x)\| = \|(x\otimes V^{-1}x)(x\otimes V^{-1}x)\| =$$

$$\|<x,V^{-1}x>x\otimes V^{-1}x\| = |g(x,x)|\,\|x\otimes V^{-1}x\|.$$

Y como quiera que $x\otimes V^{-1}x$ es no nulo para cualquier $x \neq 0$, será

$$|g(x,x)| = \|x\otimes V^{-1}x\| \qquad \forall\ x \in X.$$

Y, en consecuencia, será $g(x,x) \neq 0$ para cualquier $x \neq 0$ como se quería.

El teorema de la gráfica cerrada nos permite obtener la continuidad de V y V^{-1} y, en consecuencia, la continuidad de g. Esto junto con la conexión de la esfera unidad de X nos garantiza que g tiene signo constante y, de este modo (cambiando g por $-g$ si fuera necesario), podemos suponer que g es un producto escalar sobre X, al que notaremos $(\cdot|\cdot)$. Comprobaremos a continuación que la norma asociada al producto escalar $(\cdot|\cdot)$ es equivalente a la norma $|\cdot|_X$ de X. Dado que nuestro razonamiento pasa por la consideración de normas sobre muy diversos espacios convendremos en notar la norma de todos ellos por $|\cdot|$ y el lector observará en cada momento sobre qué espacio se está considerando dicha norma (cosa que no deberá plantear demasiado problema pues la situación hablará por si misma). Puesto que la norma (estelar) $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma de operadores sobre $BL(X)$ tendremos que

$$m|\cdot| \leq \|\cdot\| \leq M|\cdot| \quad (\text{ sobre } A\ )$$

para convenientes reales positivos m y M. De este modo

(observando previamente que $|x\circledast y| = |x||\hat{y}|$) tendremos que

$$m|x||(V^{-1}x)^{\wedge}| = m|x\circledast V^{-1}x| \le \|x\circledast V^{-1}x\| = (x|x) =$$

$$\|x\circledast V^{-1}x\| \le M|x\circledast V^{-1}x| = M|x||(V^{-1}x)^{\wedge}|.$$

Usando ahora la regularidad del apareamiento de Banach (X, Y, $<\cdot,\cdot>$) encontramos reales positivos m' y M' tales que

$$m'|x||V^{-1}x| \le (x|x) \le M'|x||V^{-1}x|$$

para cualquier x de X, y ahora la continuidad de V y V^{-1} nos permite concluir que

$$m'|V|^{-1}|x|^2 \le (x|x) \le M'|V^{-1}||x|^2$$

para cualquier x de X, lo cual nos muestra la equivalencia entre las normas ya anunciada. Esta equivalencia nos permite afirmar que

$$H = (X , (\cdot|\cdot))$$

es un espacio de Hilbert.

Si F es un elemento de $FL_Y(X)$ entonces

$$(Fx_1|x_2) = <Fx_1,V^{-1}x_2> = <x_1,(F^{\#}V^{-1})x_2> =$$

$$<x_1,V^{-1}(VF^{\#}V^{-1})x_2> = (x_1|(VF^{\#}V^{-1})x_2),$$

para cualesquiera x_1 y x_2 de X, lo que nos demuestra que el operador lineal F sobre X tiene adjunto $F^{\bullet}$ con respecto al producto escalar $(\cdot|\cdot)$ y además

$$F^{\bullet} = VF^{\#}V^{-1}.$$

De idéntica forma se comprobaría que si F es un operador lineal sobre X con adjunto con respecto al producto escalar $(\cdot|\cdot)$ entonces F tiene adjunto con respecto a $<\cdot,\cdot>$ y $F^{\#}=V^{-1}F^{\bullet}V$. Así habremos demostrado que

un operador lineal F sobre el espacio X tiene adjunto con respecto a la forma bilineal $<\cdot,\cdot>$ si, y sólo si, F tiene un adjunto $F^{\bullet}$ con respecto al producto escalar $(\cdot|\cdot)$, en cuyo caso $F^{\#} = V^{-1}F^{\bullet}V$.

Como quiera que en H, como en cualquier otro espacio de Hilbert, los operadores lineales que poseen adjunto con respecto al producto escalar coinciden con los operadores lineales y continuos, habremos demostrado también que

$L_Y(X) = BL(H)$, $FL_Y(X) = FL(H)$ y $B = KL(H)$. Además $F^{\bullet} = VF^{\#}V^{-1}$ para cualquier F de $BL(H)$.

Tenemos en consecuencia que $F^{\bullet} = F\star$ para cualquier F de B. Pero lo deseable sería que fuese $F^{\bullet} = F\star$ para cualquier F de A. Este hecho no es en absoluto difícil de comprobar. Efectivamente, si F está en B y G está en A tenemos que $F^{\bullet}$ está en B y $F^{\bullet}G$ está en B, por lo que será

$$F\cdot G^{\bullet} = (F^{\bullet}\cdot G)^{\bullet} = (F^{\bullet}\cdot G)^{\star} = (F\star\cdot G)^{\star} = (F\star)\star\cdot G\star = F\cdot G\star.$$

Así, dado G en A, será

$$F \cdot (G^{\bullet} - G^{\star}) = 0$$

para cualquier F de B, y en consecuencia

$$G^{\bullet} = G^{\star},$$

como afirmábamos.

Habremos probado de esta manera que, en la tercera situación:

*salvo * isomorfismos (automáticamente isométricos), A es una subálgebra de Jordan cerrada y autoadjunta de $BL(H)$ que contiene a $KL(H)$, para conveniente espacio de Hilbert complejo H.*

Situación (iv).

Supongamos finalmente que A se encuentra en la situación descrita en el apartado (iv) del comienzo. Consideramos en este caso el anillo simple $\mathrm{FL}_X(X)$, al que consideramos, además, dotado de la involución

$$F \longmapsto F^{\#}.$$

El hecho de que el zócalo de A, o lo que es lo mismo $\mathrm{Sim}(\mathrm{FL}_X(X))$, sea *-invariante nos permite considerar el Jordan-homomorfismo de anillos

$$^* : \mathrm{Sim}(\mathrm{FL}_X(X)) \longrightarrow \mathrm{FL}_X(X).$$

Aunque lo deseable sería disponer, como en el caso anterior, de un antiautomorfismo de $\mathrm{FL}_X(X)$ que extendiera a *. Así, nuestro primer objetivo será extender el anterior Jordan-homomorfismo a un antiautomorfismo del anillo $\mathrm{FL}_X(X)$.

La idea para realizar ésto es aplicar un teorema de Martindale **[29; Teorema 4.2.4]** estableciendo lo siguiente:

Teorema 5.3.

Sea R *es un anillo simple con unidad e involucion y libre de 2-torsión* ($x \in R$, $2x=0 \Rightarrow x=0$), *que contiene un idempotente simétrico* $e \neq 0,1$. *Supongamos que* $\dim_{Cen(R)} R > 16$ *(donde* $Cen(R)$ *denota el centro del anillo) y que* ϕ *es un Jordan-homomorfismo de* $Sim(R)$ *en un anillo libre de 2-torsión* R'. *Entonces* ϕ *admite una única extensión a un homomorfismo (asociativo) de* R

en R'.

Lamentablemente nuestro anillo $FL_X(X)$, aun siendo simple, no tiene unidad cuando X es de dimensión infinita (situación, por otra parte, más que probable para nosotros). El siguiente bien conocido resultado, no obstante, nos hace vislumbrar un posible camino a seguir para evitar esta contrariedad.

Lema.

Si R es un anillo simple y e es un idempotente no nulo de R, entonces eRe es un anillo simple con unidad.

Demostración. Claramente el elemento e es una unidad para el anillo eRe. Para ver la simplicidad consideremos un ideal no nulo I de eRe. Tendremos entonces que $I + RI + IR + RIR$ es un ideal no nulo del anillo R y, por tanto (simplicidad de R), será $I + RI + IR + RIR = R$. En consecuencia

$$eRe = e(I + RI + IR + RIR)e = eIe + eRIe + eIRe + eRIRe$$

y por ser e una unidad para eRe y ya que $I \subset eRe$, también será

$$eRe = eIe + eR(eI)e + e(Ie)Re + eR(eIe)Re =$$

$$eIe + (eRe)Ie + eI(eRe) + (eRe)I(eRe) \subset I.$$

Así I coincide con eRe, y de ahí la simplicidad. ∎

Si π es un idempotente no nulo de $FL_X(X)$ con $\pi^{\#} = \pi$, el anillo $\pi FL_X(X)\pi$ es, en consecuencia, un anillo simple con unidad e involución. Para aplicar, como queremos, el teorema de Martindale (Teorema 5.3) al anillo $\pi FL_X(X)\pi$ necesitamos además que sea $\dim_{Cen(\pi FL_X(X)\pi)}(\pi FL_X(X)\pi) > 16$.

Lema.

Sea X un espacio de Banach autodual y π un idempotente de $FL_X(X)$ con $\pi^{\#} = \pi$. Entonces $Im(F) \subset Im(\pi)$ $\forall$ $F \in \pi FL_X(X)\pi$ y la aplicación $F \longmapsto F_{|Im(\pi)}$ define un isomorfismo de $\pi FL_X(X)\pi$ sobre $L(Im(\pi))$.

Demostración. Si $F \in \pi FL_X(X)\pi$, entonces $F = \pi F$, por lo que $Im(F) = Im(\pi F) \subset Im(\pi)$. Esta es justo la condición que hace que la aplicación

$$\pi FL_X(X)\pi \longrightarrow L(Im(\pi))$$
$$F \longmapsto F_{|Im(\pi)}$$

esté bien definida. Claramente es, además, un homomorfismo de álgebras.

Supongamos que $F, G \in \pi FL_X(X)\pi$ y que $G_{|Im(\pi)} = F_{|Im(\pi)}$. Por el hecho de ser $F, G \in \pi FL_X(X)\pi$ tendremos que $G = G\pi$ y $F = F\pi$. Pero $G\pi = F\pi$ por ser $G_{|Im(\pi)} = F_{|Im(\pi)}$. Así $G = F$, lo cual demuestra la inyectividad del anterior homomorfismo. En cuanto a la sobreyectividad, sea $G \in L(Im(\pi))$ y sea $F = \pi G\pi$.

Es inmediato comprobar que $F \in \pi FL_X(X)\pi$ (démonos cuenta de que $\mathrm{Im}(\pi)$ es, con la restricción de la forma bilineal asociada a X, un espacio de Banach autodual finito-dimensional, con lo que podremos disponer de $G^{\#}$ y entonces F tiene adjunto $F^{\#} = \pi G^{\#}\pi$) y que $F_{|\mathrm{Im}(\pi)} = G$. ■

El isomorfismo anterior nos permite asegurar que, para una proyección π de $\pi FL_X(X)\pi$, es

$$\mathrm{Cen}(\pi FL_X(X)\pi) = \mathrm{Cen}(L(\mathrm{Im}(\pi))) = \mathbb{C},$$

y en consecuencia será

$$\dim_{\mathrm{Cen}(\pi FL_X(X)\pi)}(\pi FL_X(X)\pi) = \dim_{\mathbb{C}}(L(\mathrm{Im}(\pi))).$$

De esta manera, *si A es de dimensión infinita* X también lo será y existirá por tanto una proyección π_0 de $FL_X(X)$ tal que para

$$\pi \geq \pi_0 \quad (\mathrm{Im}(\pi_0) \subset \mathrm{Im}(\pi)) \quad \text{es} \quad \dim_{\mathbb{C}}(\pi FL_X(X)\pi) > 16.$$

Podemos aplicar ahora el teorema de Martindale para extender el Jordan-homomorfismo $* : \mathrm{Sim}(\pi FL_X(X)\pi) \longrightarrow (FL_X(X))^{op}$ (donde $(FL_X(X))^{op}$ denota el álgebra opuesta de $FL_X(X)$) de manera única a un homomorfismo asociativo conjugado-lineal ϕ_π de $\pi FL_X(X)\pi$ en $(FL_X(X))^{op}$ y, por la unicidad de la extensión, ϕ_{π_2} es una extensión de ϕ_{π_1} si $\pi_1 \leq \pi_2$. Puesto que el conjunto de todas

las proyecciones π de $FL_X(X)$ es un conjunto dirigido y
$FL_X(X) = \bigcup_\pi \pi FL_X(X)\pi,$
podemos definir un isomorfismo asociativo conjugado-lineal ϕ de $FL_X(X)$ sobre $(FL_X(X))^{op}$ por

$$\phi(F) = \phi_\pi(F) \quad \text{para} \quad F \in \pi FL_X(X)\pi.$$

Disponemos de esta manera de un antiautomorfismo involutivo conjugado-lineal ϕ de $FL_X(X)$ tal que

$$F^* = \phi(F) \quad \forall\ F \in \mathrm{Sim}(FL_X(X)).$$

Así pues, si trabajamos de forma idéntica a como se hizo en el caso anterior obtenemos un isomorfismo conjugado-lineal

$$V : X \longrightarrow X$$

verificando que:

1. V y V^{-1} tienen adjunto como operadores de $(X,X,<\cdot,\cdot>_r)$ en $(X,X,<\cdot,\cdot>)$ y de $(X,X,<\cdot,\cdot>)$ en $(X,X,<\cdot,\cdot>_r)$ respectivamente,
2. $\phi(F) = V\ F^{\#}\ V^{-1}$ para cualquier F de $FL_X(X)$, y
3. $V^{\#} = V$.

Además, la involutividad de ϕ repercute sobre V en que, si $F \in \mathrm{Sim}(FL_X(X))$,

$$F = \phi^2(F) = V^2F(V^2)^{-1}$$

y, en consecuencia existe un número complejo α tal que

$$V^2 = \alpha I.$$

Además

$$\bar{\alpha}V = V(\alpha 1) = VV^2 = V^2V = (\alpha 1)V = \alpha V,$$

y por tanto α es en realidad un número real (no nulo). Cambiando V por $|\alpha|^{-1/2}V$ podemos suponer, en consecuencia, que

$$V^2 = \pm 1.$$

No olvidemos que, además, disponemos de una forma sesquilineal g definida sobre X por:

$$g(x_1,x_2) = \langle x_1,Vx_2\rangle$$

para cualesquiera x_1 y x_2 de X, que, igual que en el caso anterior, resulta ser una forma hermitiana.

Nuestro propósito ahora es comprobar que

$$g(x,x) \neq 0$$

para cualquier x no cero de X.

Si la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es simétrica tenemos que, si x está en X, $x\otimes x$ pertenece a $\mathrm{Sim}(\mathrm{FL}_X(X))$ y

$$(x\otimes x)^* = \phi(x\otimes x) = V(x\otimes x)V^{-1} = Vx\otimes V^{-1}x,$$

y en consecuencia

$$\|x\otimes x\|^3 = \|U_{x\otimes x}((x\otimes x)^*)\| = \|(x\otimes x)(x\otimes x)^*(x\otimes x)\| =$$

$$\|(x\otimes x)(Vx\otimes V^{-1}x)(x\otimes x)\| = |\langle x,Vx\rangle|^2\|x\otimes x\|,$$

lo cual implica que

$$|g(x,x)| = \|x\otimes x\|$$

para cualquier x de X. Lo cual prueba nuestra afirmación para el caso simétrico.

En el caso antisimétrico tenemos en cambio que, si x e y están en X, $x\otimes y-y\otimes x$ pertenece a $\mathrm{Sim}(FL_X(X))$ y

$$(x\otimes y-y\otimes x)^* = \phi(x\otimes y-y\otimes x) = V(x\otimes y-y\otimes x)V^{-1} = Vy\otimes V^{-1}x-Vx\otimes V^{-1}y,$$

y en consecuencia

$$\|x\otimes y-y\otimes x\|^3 = \|U_{x\otimes y-y\otimes x}((x\otimes y-y\otimes x)^*)\| =$$

$$||g(x,y)|^2-g(x,x)g(y,y)|\,\|x\otimes y-y\otimes x\|^2,$$

lo cual implica que

$$||g(x,y)|^2-g(x,x)g(y,y)| = \|x\otimes y-y\otimes x\|$$

para cualesquiera x e y de X. Si existiera un elemento no cero x de X tal que $g(x,x)$ fuera cero, tendriamos que

$$|g(x,y)| = \|x\otimes y-y\otimes x\| \quad \forall\ y \in X.$$

El núcleo del funcional conjugado-lineal $y \longmapsto g(x,y)$ coincidiría, por tanto, con la envolvente lineal del elemento x, lo cual nos dice que el espacio X tendría dimensión dos lo cual supondría una contradicción (recuérdese que A está siendo supuesta infinito-dimensional y que por tanto X es infinito-dimensional).

Así pues nuestra afirmación de que $g(x,x) \neq 0$ para cualquier $x \neq 0$ ha sido probada.

El teorema de la gráfica cerrada nos permite obtener nuevamente la continuidad de V y V^{-1} y, en consecuencia, la continuidad de g. Esto junto con la conexión de la esfera unidad de X nos garantiza que g tiene signo constante y, de este modo (cambiando g por $-g$ si fuera necesario), podemos suponer que g es un producto escalar sobre X, al que notaremos $(\cdot|\cdot)$.

Si la forma bilineal $<\cdot,\cdot>$ es simétrica tenemos que

$$(Vx|Vx) = <Vx,V^2x> = <Vx,\pm x> = \pm<x,Vx> = \pm(x|x).$$

De ahí deducimos que $V^2 = I$ y que el operador V es isométrico respecto a la norma asociada al producto escalar $(\cdot|\cdot)$. V es por tanto una conjugación (operador conjugado-lineal involutivo e isométrico) de X.

Si la forma bilineal $<\cdot,\cdot>$ es supuesta ahora antisimétrica tenemos que

$$(Vx|Vx) = <Vx,V^2x> = -<V^2x,Vx> = -(\pm<x,Vx>) = -(\pm(x|x)).$$

De ahí deducimos que en este caso es $V^2 = -I$ y también que el operador V sigue siendo isométrico respecto a la norma asociada al producto escalar $(\cdot|\cdot)$. El operador V es de este modo una anticonjugación (operador conjugado-lineal anti-involutivo e isométrico) de X.

Demostraremos ahora que la norma asociada al producto escalar $(\cdot|\cdot)$ es equivalente a la norma de X, y que por tanto

$$H = (X,(\cdot|\cdot))$$

es un espacio de Hilbert.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto escalar $(\cdot|\cdot)$ obtenemos que

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |(x|Vy)|^2 \leq (x|x)(Vy|Vy) = (x|x)(y|y)$$

para cualesquiera x e y de X. De este modo la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es continua para la norma asociada al producto escalar $(\cdot|\cdot)$. Como quiera que por **[49; Teorema III.2.2]** y **[47; Proposición 3.2]**

para un espacio de Banach autodual $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ regular, la topología de la norma de X es la menor topología normable sobre X haciendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ continua,

tendremos la equivalencia anunciada.

Se comprueba ahora, exactamente igual que en el caso precedente que:

un operador lineal F sobre el espacio X tiene adjunto con respecto a la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si, y sólo si, F tiene un adjunto F^* con respecto al producto escalar $(\cdot|\cdot)$. En cuyo caso $F^* = VF^{\#}V^{-1}$.

Y esto nos muestra como

$L_X(X) = BL(H)$, $FL_X(X) = FL(H)$, $F\star = F^{\bullet}$ $\forall F \in Sim(BL(H))$ y

$Sim(L_X(X)) = \{ F \in BL(H) : V^{-1}F^{\bullet}V = F \}$.

También, de idéntica forma a como se hizo en el caso precedente se comprueba que en realidad es

$$F^{\bullet} = F\star \qquad \forall F \in A.$$

Se habrá demostrado de esta manera que

supuesto que A sea infinito-dimensional y en la situación (iv) de 5.2, salvo $\star$-isomorfismos (automáticamente isométricos), es una subálgebra de Jordan cerrada y autoadjunta de $BL(H)$ contenida en $\{ F \in BL(H) : V^{-1}F^{\bullet}V = F \}$ y que contiene a $\{ F \in KL(H) : V^{-1}F^{\bullet}V = F \}$, para conveniente espacio de Hilbert complejo H y conveniente conjugación o anticonjugación V del espacio de Hilbert H.

Si A es *finito-dimensional* basta aplicar **[44; Teorema 3.5]** para obtener que A es una de las siguientes:

(i) $M_3^8(\mathbb{C})$,

(ii) un factor cuadrático,

(iii) $BL(K)^+$ para conveniente espacio de Hilbert complejo de dimensión finita K,

(iv) la JB*-complexificación de $Sim(BL(K))$ donde K es un espacio de Hilbert finito-dimensional real o cuaterniónico.

Obsérvese ahora que, por [27; 7.5.10], una tal JB*-complexificación es isomorfa a

$$\{ F \in BL(H) : VF^{*}V^{-1} = F \}$$

para conveniente espacio de Hilbert complejo H y conveniente conjugación (si K es real) o anticonjugación (si K es cuaterniónico) V de H.

5.4. Mutaciones.

Supongamos para finalizar que nuestra JB*-álgebra A es la λ-mutación $B^{(\lambda)}$ (con λ en $\mathbb{C}$ y $\lambda \neq \frac{1}{2}$) de un álgebra de Banach compleja no conmutativa prima con zócalo no cero. Puesto que A^+ coincide con B^+ tendremos que B^+ es, de hecho, una JB*-algebra con la misma norma e involución de A. Nuevamente haciendo uso de **[52; Teorema 2]** (cuyo enunciado recordamos se dió al estudiar la tercera situación en el apartado 5.2) obtenemos que B es una C*-álgebra con la misma norma e involución. Disponemos de esta manera de una C*-álgebra no conmutativa B tal que

$$\|\lambda ab+(1-\lambda)ba\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \forall\ a,b \in B$$

(pues $B^{(\lambda)}=A$ es un álgebra normada). Recordamos ahora que en **[53; Lema 1]** se comprobó que:

si B es una C-álgebra no conmutativa y es un número complejo tal que*

$$\|\lambda ab + (1-\lambda)ba\| \leq \|a\|\|b\| \quad \textit{para} \quad a,b \in B.$$

Entonces $0 \leq \lambda \leq 1$.

En consecuencia tenemos que:

A es la λ-mutación $B^{(\lambda)}$ de una C^*-álgebra prima B con zócalo no cero para conveniente número real λ con $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Hagamos notar además que la C^*-álgebra prima con zócalo no cero B de antes no puede ser más que una subálgebra cerrada y autoadjunta del álgebra $BL(H)$, de operadores lineales y continuos sobre conveniente espacio de Hilbert complejo H, que contiene al álgebra $KL(H)$, de operadores lineales compactos sobre H.

Puesto que evidentemente todos y cada uno de los tipos de JB*-álgebras no conmutativas que han ido apareciendo en nuestro largo estudio son ejemplos de JB*-álgebras no conmutativas primas con zócalo no cero, resulta que hemos probado el siguiente teorema que nos da una perfecta descripción (geométrica) de ésta clase de álgebras.

Teorema 5.5.

Salvo $*$-isomorfismos (automáticamente isométricos), las JB-álgebras no conmutativas primas con zócalo no cero son las siguientes:*

(i) El álgebra $M_3^8(\mathbb{C})$ con su estructura esencialmente única de JB-álgebra.*

(ii) Las JB-álgebras no conmutativas simples cuadráticas*

(véase el apartado 5.1 para la precisa descripción de éstas).

(iii) *Las subálgebras de Jordan cerradas y autoadjuntas de $BL(H)$ que contienen a $KL(H)$, donde H es un espacio de Hilbert complejo.*

(iv) *Las subálgebras de Jordan cerradas y autoadjuntas de $BL(H)$ contenidas en $\{ F \in BL(H) : V^{-1}F^{*}V = F \}$ y que contienen a $\{ F \in KL(H) : V^{-1}F^{*}V = F \}$, donde H es un espacio de Hilbert complejo y V es una conjugación o una anticonjugación de H.*

(v) *Las λ-mutaciónes $B^{(\lambda)}$ de las C^*-álgebras primas con zócalo no cero B, donde λ es un número real con $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Quisiera agradecer al esforzado lector esa paciencia y perseverancia que sin duda habrá puesto en la tarea de llegar hasta el final de esta memoria.

REFERENCIAS

[1] E. M. Alfsen y E. G. Effros, Structure in real Banach spaces II. *Ann. of Math.* 96 (1972), 129-173.

[2] E. M. Alfsen, F. W. Shultz y E. Størmer, A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras. *Adv. Math.* 28, (1978) 11-56.

[3] S. A. Amitsur, On rings of quotiens. *Instituo Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica*, vol. 8 (1972).

[4] P. Ara, Extended centroid of C*-algebras. *Archiv. der Math.* 54 (1990), 358-364.

[5] P. Ara, On the symmetric algebra of quotients of a C*-algebra. *Glasgow Math. J.* (por aparecer).

[6] W. E. Baxter y W. S. Martindale III, Central closure of semiprime nonassociative rings. *Commun. Algebra* 7 (1979), 1103-1132.

[7] E. Behrends, *M-structure and the Banach-Stone theorem.* Lecture Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.

[8] F. F. Bonsall y J. Duncan, *Complete normed algebras.* Springer-Verlag, 1973.

[9] F. F. Bonsall y J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* London Math. Soc. Lecture Note Series 2. Cambridge University Press 1971.

[10] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique. Théorie des ensembles. Chapitre 3. Hermann. Paris 1963.

[11] N. Bourbaki, Eléments de Mathematique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.

[12] L. J. Bunce, The theory and structure of dual JB-algebras.

Math. Zeitschrift 180 (1982), 525-534.

[13] L. J. Bunce, Type I JB-algebras. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 34 (1983), 7-19.

[14] R. C. Busby, Double centralizers and extensions of C*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 132 (1968), 79-99.

[15] M. Cabrera y A. Rodríguez, Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras: a first approach. *Commun. Algebra* 18 (7) 1990, 2293-2326.

[16] M. A. Cobalea y A. Fernández, Prime noncommutative Jordan algebras and central closure. *Algebras, groups and geometries* 5 (1988), 129-136.

[17] J. Dieudonne, Sur le socle d'un anneu et les anneux simples infinis. *Bull. Soc. Math. France* 70 (1942), 46-75.

[18] S. Dineen y R. M. Timoney, The centroid of a JB*-triple system. *Math. Scand* 62 (1988), 327-342.

[19] C. M. Edwards, On Jordan W*-algebras. *Bull. Sci. Math.* *104* (1980), 393-403.

[20] C. M. Edwards y G. T. Rüttimann, Inner ideals in W*-algebras. *Michigan Math. J.* *36* (1989), 147-159.

[21] T. S. Erickson, W. S. Martindale III y J. M. Osborn, Prime nonassociative algebras. *Pacific J. Math.* *60* (1975), 49-63.

[22] A. Fernández, Modular annihilator Jordan algebras. *Commun. Algebra* *13* (1985), 2597-2613.

[23] A. Fernández y A. Rodríguez, Primitive noncommutative Jordan algebras with nonzero socle. *Proc. Amer. Math. Soc.* *96* (1986), 199-206.

[24] V. T. Filippov, Theory of Mal'tsev algebras. *Algebra i Logika* *16* (1977), 101-108.

[25] Y. Friedman y B. Russo, The Gelfand-Naimark theorem for JB*-triples. *Duke Math. J.* *53* (1) (1986), 139-148.

[26] H. Hanche-Olsen, A note on the bidual of a JB-algebra. *Math. Z.* 175 (1980), 29-31.

[27] H. Hanche-Olsen y E. Størmer, *Jordan operator algebras.* Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, 1984.

[28] D. Handelman, Rings with involution as partially ordered abelian groups. *Rocky Mountain J. Math.* 11 (1981), 337-381.

[29] I. N. Herstein, *Rings with involution.* University of Chicago Press, 1976.

[30] L. Hogben y K. McCrimmon, Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra. *J. Algebra* 68 (1981), 155-169.

[31] N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publis. 37 (1968).

[32] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publis. 39.

[33] N. Jacobson, *Lie algebras.* Dover Publications, Inc. New York, 1962.

[34] P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals Math. 35* (1934), 29-64.

[35] A. M. Kaidi, J. Martínez y A. Rodríguez, On a nonassociative Vidav-Palmer theorem. *Quart. J. Math. Oxford* (2) *32* (1981), 435-442.

[36] W. S. Martindale III, Prime rings stisfying a generalized polynomial identity. *J. Algebra 12* (1969), 576-584.

[37] W. S. Martindale III, Lie isomorphisms of prime rings. *T.A.M.S. 142* (1969), 437-455.

[38] J. Martínez JV-algebras. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87* (1980), 47-50.

[39] K. McCrimmon, Noncommutative Jordan rings. *Trans. Math. Soc.*

158 (1971), 1-33.

[40] J.M.Osborn y M.L.Racine, Jordan rings with nonzero socle. *Trans. Amer. Math. Soc. 251* (1979), 375-387.

[41] L. J. Paige, *Jordan algebras.* En *Studies in modern algebra* (A. Albert, editor). M. A. A. Studies in Mathematics, 1963.

[42] R. Payá, Numerical range of operators and structure in Banach spaces. *Quart. J. Math. Oxford* (2) *33* (1982), 357-364.

[43] R. Payá, J. Pérez y A. Rodríguez, Noncommutative Jordan C*-álgebras. *Manuscripta Math. 37* (1982), 87-120.

[44] R. Payá, J. Pérez y A. Rodríguez, Type I factor representations of noncommutative JB*-algebras. *Proc. London Math. Soc. 48* (1984), 428-444.

[45] G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, London, 1979.

[46] J.Pérez, L.Rico y A.Rodríguez, Full algebras of Jordan-Banach

algebras and algebra norms on JB*-algebras. Preprint.

[47] J.Pérez González, L.Rico Romero, A. Rodriguez Palacios y A.R.Villena Muñoz, Prime Jordan-Banach algebras with non zero socle. Preprint Universidad de Granada.

[48] C.E.Rickart, *General theory of Banach algebras.* Krieger, New York, 1974.

[49] L. Rico, *Sobre algebras de Jordan normadas completas primas con zocalo no cero.* Tesis Doctoral. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, 1988.

[50] A. Rodriguez Palacios, Nonassociative normed algebras spanned by hermitians elements. *Proc. London Math. Soc.* (3) 47 (1983), 258-274.

[51] A. Rodriguez Palacios, Primitive nonassociative normed algebras and extended centroid. Preprint Universidad de Granada.

[52] A. Rodriguez Palacios, Jordan axioms for C* algebras.

Manuscripta Math. *61* (1988), 297-314.

[53] A. Rodriguez Palacios, A Vidav-Palmer theorem for Jordan C*-algebras and related topics. *J. London Math. Soc.* *22*, (1980), 318-332.

[54] L. H. Rowen, Structure of rings with involution applied to generalized polynomial identities. *Canad. J. Math.* (3) *27* (1975), 573-584.

[55] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*. Springer, Berlin, 1971.

[56] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*. Academic Press, 1966.

[57] F. W. Shultz, On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. *J. Funct. Anal.* *31* (1979), 360-376.

[58] E. Størmer, On the Jordan structure of C*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* *120* (1965), 438-447.

[59] D. M. Topping, *Jordan algebras of self-adjoint operators.* Mem. Amer. Math. Soc. 53, Providence 1965.

[60] H. Upmeier., *Symmetric Banach manifolds and Jordan C*-algebras.* North-Holland Mathematics Studies 104, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdan, 1985.

[61] J. D. M. Wright, Jordan C*-algebras. *Michigan Math.* 24 (1977), 291-302.

[62] M. A. Youngson, Hermitian operator of Banach Jordan algebras. *Proc. Edimburgh Math. Soc.* (2) 22 (1979), 93-104.