



Universidad de Granada

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

GENERALIZACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN
BIPARABÓLICA. APLICACIONES EN EL ÁMBITO
FINANCIERO Y EL CAMPO DE LA VALORACIÓN

TESIS DOCTORAL

Catalina Beatriz García García
Granada, 2007

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Catalina Beatriz García García
D.L.: Gr. 2577 - 2006
ISBN:978-84-338-4193-3

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA

La presente memoria titulada *Generalizaciones de la distribución bipolarabólica. Aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración*, que presenta Dña. Catalina Beatriz García García para optar al grado de Doctor, ha sido realizada en el Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la universidad de Granada bajo la dirección de los doctores D. Rafael Herrerías Pleguezuelo y D. José Manuel Herrerías Velasco.

Fdo. Catalina Beatriz García García

Vº Bº de los Directores de la Tesis:

Fdo. Rafael Herrerías Pleguezuelo

Fdo. José Manuel Herrerías Velasco

Granada, febrero de 2007

Agradecimientos

**Por que son parte de todo lo que hago,
A mi familia ahora y siempre.**

Índice

Introducción	13
Capítulo I: Revisión de los modelos probabilísticos propios de la metodología PERT y el método de las dos funciones de distribución.	
I.0. INTRODUCCIÓN	19
I.1. DISTRIBUCIONES UNIVARIANTES EN EL ÁMBITO DEL PERT Y EL MÉTODO DE LAS DOS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN	22
I.1.1. Distribución rectangular	22
I.1.2. Distribución triangular	25
I.1.3. Distribución beta	30
I.1.4. Distribución trapezoidal	36
I.1.5. Distribución two-sided power	42
I.1.6. Distribución Topp-Leone	49
I.1.7. Distribución parabólica	52
I.1.8. Otras distribuciones para el tratamiento de la incertidumbre	57
I.2. DISTRIBUCIONES BIVARIANTES EN EL MÉTODO DE LAS DOS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN	60
I.2.0. Introducción	60
I.2.1. Distribución cúbica	60
I.2.2. Distribución piramidal	61
I.2.3. Distribución troncopiramidal	66
Capítulo II: Construcción, características estocásticas y aplicaciones principales de la distribución bipolarabólica en el PERT y el método de las dos funciones de distribución.	
II.0. INTRODUCCIÓN	71
II.1. CONSTRUCCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA	73
II.2. CARACTERÍSTICAS ESTOCÁSTICAS PRINCIPALES	77
II.2.1. Obtención a partir del sistema generador de van Dorp	79
II.2.2. Calculo de los momentos centrales	82
II.2.3. Análisis de la forma de la distribución bipolarabólica	83
II.3. APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA	85
II.3.1 La distribución bipolarabólica en la metodología PERT	85
II.3.2. La distribución bipolarabólica en el MDFD	89
II.4.CONCLUSIONES	95

Capítulo III: La distribución biparabólica generalizada de una rama y de dos ramas: una nueva herramienta.

III.0. INTRODUCCIÓN	97
III.1. DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA GENERALIZADA EN UNA RAMA (BPG1)	99
III.1.1. Selección de la función generadora.	101
III.1.2. Aplicación del sistema de van Dorp y Kotz para la generalización de la distribución biparabólica de una rama.	105
III.1.3. Asimetría y curtosis de la distribución BPG1	113
III.1.4. Estimación de la distribución BPG1	116
III.1.4.1. Estimación de la distribución BPG1 usando el método de los momentos	117
III.1.4.2. Estimación de la distribución BPG1 usando el método de máxima verosimilitud	121
III.1.4.3. Estimación de la distribución BPG1 mediante restricciones en la familia de distribución.	123
III.1.4.4. Aplicación del criterio de media moderada y el criterio de varianza máxima en la estimación de la distribución BPG1	125
III.1.4.5. Estimación de la distribución BPG1 mediante el proceso de elicitación	128
III.1.5. La entropía de la distribución BPG1	133
III.1.6. La tasa de fallo de la distribución BPG1	138
III.1.7. La distribución SBPG1 en el ámbito del PERT.	141
III.1.7.1. Análisis de las estimaciones	146
III.1.7.2. Comparaciones de medias	148
III.1.7.3. Comparación de varianzas	152
III.2. GENERALIZACIÓN DE DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA	155
III.2.1. Presentación de la herramienta	156
III.2.2. Generalización de dos ramas de la distribución biparabólica	158
III.2.3. Generalización de dos ramas de la distribución STSP2	164
III.2.4. Generalización mixta de una rama STSP y otra rama BPG.	169
III.2.5. Generalización mixta de una rama BP y otra rama STSP	173
III.2.6. Elicitación	178
III.2.6.1. Elicitación de la distribución SBP2	178
III.2.6.2. Elicitación de la distribución STSP2	181
III.2.6.3. Elicitación de la distribución STSP-BP2	183
III.2.6.4. Elicitación de la distribución SBP-TSP2	185
III.2.6.5. Resumen de los resultados obtenidos con las diferentes combinaciones de distribuciones subyacentes aplicadas en el procedimiento de la elicitación.	188
III.3. APLICACIÓN PRÁCTICA	189
III.3.4. Conclusiones de la aplicación práctica.	194
III.4. CONCLUSIONES	195

Capítulo IV: Extensión del método de las dos funciones de distribución a través de la herramienta matemática cópula.

IV. 0. INTRODUCCIÓN	199
IV.1. REVISIÓN LITERARIA Y APLICACIONES DEL CONCEPTO CÓPULA	201
IV.1.1. Resumen de cópulas más relevantes	205
IV.1.2. Aplicaciones más relevantes de la herramienta cópula	207
IV.1.3. Medidas de asociación	208
IV.1.4. Familia de cópulas FGM	213
IV.1.5. Familia de cópulas Placket	215
IV.2. CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA A PARTIR DE LA CÓPULA FGM	217
IV.2.1. Uso de marginales STSP para la construcción de la función de distribución conjunta a través de la cópula FGM.	217
IV.2.2. Uso de marginales bипarabólicas para la construcción de la función de distribución conjunta a través de la cópula FGM.	224
IV.3. MÉTODO DE VALORACIÓN	227
IV.3.1. Aplicación del método de valoración en ambiente de riesgo para distribuciones subyacentes STSP y familia de cópulas FGM.	229
IV.3.2. Aplicación del método de valoración en ambiente de incertidumbre para distribuciones subyacentes STSP y familia de cópulas FGM.	235
IV.4. CONCLUSIONES Y FUTURAS APLICACIONES	240

Capítulo V: Aplicaciones de la distribución bипarabólica y la distribución two-sided power en el ámbito financiero.

V.0. INTRODUCCIÓN	247
V.1. DESARROLLO TEÓRICO	253
V.1.1. La distribución bипarabólica en el ámbito financiero	255
V.1.2. La distribución TSP en el ámbito financiero.	264
V.1.3 Análisis de la curtosis de las distintas distribuciones	269
V.1.3 Análisis de la curtosis de las distintas distribuciones	270
V.2. APLICACIÓN PRÁCTICA	274
V.2.1. Asimetría y curtosis en la series de datos financieros.	276
V.2.2. Diferentes ajustes del índice DJ Eurostoxx50.	283
V.2.3. Un procedimiento de ajuste simplificado: El caso DJ Eurostoxx50.	290
V.3. CONCLUSIONES	291

Conclusiones y líneas de investigación	293
---	-----

Referencias bibliográficas	299
-----------------------------------	-----

Anexo A	319
----------------	-----

Anexo B	329
----------------	-----

Anexo C	335
----------------	-----

Introducción

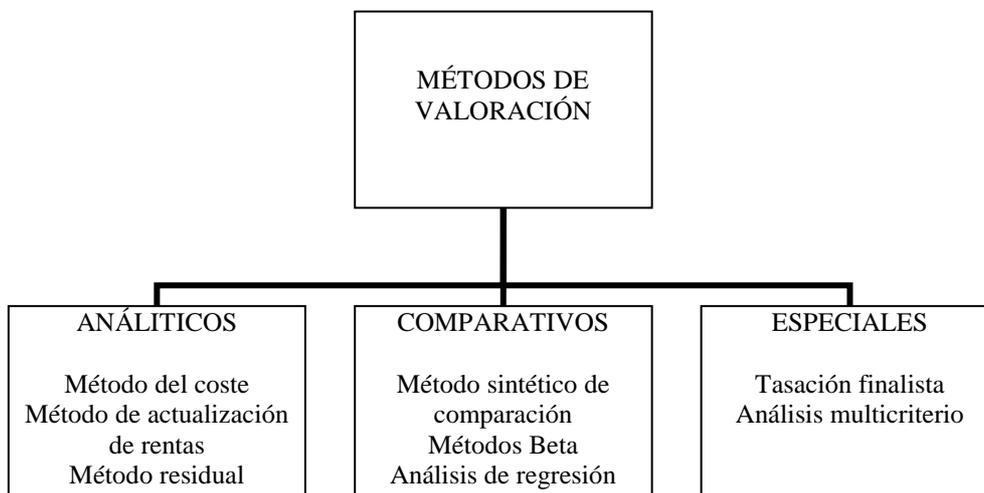
La presente memoria titulada *Generalizaciones de la distribución biparabólica. Aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración* tiene como primer y principal objetivo presentar la denominada distribución biparabólica y encuadrarla dentro del contexto de la Teoría General de Valoración a partir del método de las dos funciones de distribución (MDFD), introducido por Ballestero (1973) y ampliamente tratado en los manuales de Ballestero (1991) o Caballer (1998).

Dentro de la Teoría General de Valoración se encuentran diversos campos de aplicación que podemos agrupar en las siguientes áreas temáticas: i) Área general: nuevas metodologías de valoración, aplicación de las nuevas tecnologías a la valoración, la situación de la valoración en los diferentes países, legislación, etc.; ii) Valoración agraria, mercado de la tierra, agua de riesgo, arbolado, daños agrarios, etc.; iii) Valoración medioambiental: parques naturales, espacios naturales, daños por contaminación, estimación de impactos ambientales, etc.; iv) Valoración empresarial: empresas en funcionamiento, nueva economía, sociedades deportivas, marcas, fondos de comercio, opciones, proyectos de inversión, activos financieros, carteras de inversión, permuta financiera y comercial, etc.; v) Valoración urbana y del patrimonio arquitectónico. Mercado inmobiliario, inmuebles con valor histórico, gestión de centros históricos, inmuebles de uso residencial, comercial, lúdico, religioso, puertos deportivos, campos de golf, etc.; vi) Valoración de activos con valor artístico y cultural: mercado del arte, obras de arte, antigüedades, joyas, numismática y otros activos coleccionables; vii) Valoración de bienes de equipo: maquinaria, vehículos, naval, aeronáutica, etc.; viii) Valoración de activos atípicos: daño corporal, imagen, etc.

En cuanto a las técnicas valorativas aplicables, la Orden ECO/805/2003, de 27 de marzo, sobre normas de valoración de bienes inmuebles y de determinados derechos para ciertas finalidades financieras (BOE de 9 de abril de 2003) cita, en su artículo 15, el método del coste, el método de comparación, el método de actualización de rentas y el método residual. Las características más importantes de cada uno de estos métodos son presentadas a continuación:

- a) El método del coste: consiste en determinar el coste total estimado de reemplazar el activo a tasar por otro de iguales características. Es recomendable para la tasación de inmuebles recientes o en rehabilitación.
- b) El método de comparación: consiste en determinar el valor de los bienes inmuebles a partir de su comparación con otros bienes similares de los que existe información suficiente. Es muy usado y es considerado el método más directo y sistemático para la estimación del valor de mercado.
- c) El método de capitalización: que calcula el precio más probable que un inversor, de tipo medio, estaría dispuesto a pagar, al contado, por la adquisición de un bien capaz de producir rentas.
- d) El método residual: que determina el valor de mercado del suelo, o activo a rehabilitar, a partir del valor del producto inmobiliario final, deduciendo de el todos los gastos e inversiones necesarias para ello.

Los profesores Ballester y Rodríguez (1999) diferencian entre las técnicas analíticas, las de comparación y los métodos de tasación finalista y análisis multicriterio para el caso de tasaciones especiales, tal y como se recoge en el siguiente esquema:



Dentro de las técnicas por comparación distinguen entre el método sintético, el análisis de regresión, y el método de las dos betas. El primer método, consiste en estimar el valor de mercado estableciendo relaciones de proporcionalidad entre una o varias variables externas y el precio en unidades monetarias del inmueble a estimar. Esta muy generalizada en la práctica inmobiliaria debido a su sencillez. El método de regresión esta basado en técnicas econométricas y fue expuesto ya en la Primera Conferencia Internacional de Arquitectos Tasadores, en julio de 1996 en el marco del congreso de la UIA, por el arquitecto Lammers. Es muy usado en países como Estados Unidos pero en España la insuficiencia de datos hacia imposible que las técnicas de análisis de regresión tengan la fiabilidad necesaria. Con la aparición de la Ley 2/1981, de 25 de marzo, Ley de Regulación del Mercado hipotecario, se espera que en un futuro este método tenga un papel relevante en el mundo de la valoración inmobiliaria.

Así pues, el método sintético estima el valor de mercado mediante una relación proporcional con un índice externo y el método de regresión supone que la relación entre el valor de mercado y uno o varios índices externos puede analizarse mediante sistemas estadísticos. El método beta, Ballestero (1973), plantea un nuevo enfoque de manera que la comparación se efectúa a través de dos funciones de distribución.

Originariamente la distribución a aplicar era la beta y de aquí procede el nombre de método de las dos betas que posteriormente se ha generalizado como método de las dos funciones de distribución. Actualmente posee diversas variantes como son el uso de dos triangulares o dos rectangulares, Romero (1977), dos normales (Alonso e Iruretagoyena 1995) o dos trapezoidales (Lozano 1996). Este método, al igual que el sintético, utiliza índices externos que intenta explicar la variable valor de mercado, pero no utiliza coeficientes de proporcionalidad, sino una función de distribución, de manera que un aumento o disminución de los índices externos se encuentra relacionado con una misma respuesta en el valor de mercado aunque no necesariamente proporcional.

El método de las dos funciones de distribución no aparece explícitamente en la Orden ECO/805/2003. Si bien no se utiliza normalmente en la valoración inmobiliaria, tiene gran aplicación en ciertos campos de la valoración agraria. Presenta como inconveniente

que en la mayoría de los casos se debe trabajar con más de un índice por lo que se deben ponderar los índices. En cualquier caso se requiere de la experiencia y subjetividad de un experto que puede hacer disminuir la fiabilidad del método. Como ventajas nombrar el escaso número de datos necesarios para su aplicación, su facilidad para disponer de dicha información y la sencillez de cálculo, Ballestero y Rodríguez (1999).

Desde la presentación del método de la dos betas por, se han publicado numerosas aportaciones, artículos, libros, trabajos de investigación y se han realizado tesis doctorales extendiendo así la aplicación de este método. Las aportaciones realizadas se pueden enmarcar en las siguientes líneas:

- Aplicaciones prácticas del método de las dos funciones de distribución: Ballestero y Caballer (1982), Caballer (1993), Caballer (1998), Caballer (1999) y Ballestero y Rodríguez (1999) extienden su uso a la valoración de árboles frutales e inmuebles. Alonso y Lozano (1985) hacen una aplicación a la valoración de fincas en la comarca de Valladolid; Guadalajara (1996) presenta una serie de casos prácticos. García, Trinidad y Sánchez (1997) realizan una aplicación a la selección de los cultivos de una cartera. Cañas, Domingo y Martínez (1994) realizan una aplicación práctica en la provincia de Córdoba.
- Extensión del método a diferentes distribuciones: Romero (1977) hace una extensión del método utilizando distribuciones uniformes y triangulares; García, Cruz y Andujar (1998) presentan una revisión de la aplicación en distribuciones triangulares. García, Trinidad y Gómez (1999) extienden el método a la utilización de una clase especial de distribuciones trapezoidales; Herrerías, García, Cruz y Herrerías (2001) extienden el método al uso de distribuciones trapezoidales de cualquier tipo. García, Trinidad y García (2004) realizan una aplicación utilizando las funciones triangulares generalizadas de van Dorp y Kotz que permiten ser ajustadas en un ambiente de incertidumbre.
- Utilización de dos o más índices, bajo el supuesto de independencia o no, e implementación de aplicaciones econométricas: García, Cruz y Rosado (2000, 2002) presentan una extensión del método al caso multi-índice bajo la hipótesis de independencia entre los índices. Herrerías Velasco (2002) en su Tesis

Doctoral extiende el método de las dos funciones de distribución al caso bivariante de forma exhaustiva y, en general, al caso multivariante sin hipótesis de independencia, y presenta además la distribución piramidal. García, Cruz y García (2002.b) presentan una aplicación econométrica de la extensión multíndice del método de las dos funciones de distribución.

- Desarrollo de test estadísticos para contrastar la adecuación de las funciones de distribución elegidas y la bondad de los índices: García, Cruz y García (2002.a) extienden el uso del método de la dos funciones de distribución a las familias de funciones mesocúrticas, de varianza constante, Caballer y beta clásica aportando un método para seleccionar la distribución más adecuada a cada caso y presentando al mismo tiempo un programa informático que resuelve el problema de la inversión. Herrerías, Pérez, Callejón y Herrerías (1999) desarrollan un método para constatar la bondad de un experto en la metodología PERT.
- Procedimientos iterativos de valoración: García, Cruz y García (2002.c) y García, Cruz y García (2004).

Así pues, la memoria esta compuesta de cinco capítulos, siendo el método de las dos funciones de distribución el hilo de conductor de los cuatro primeros y realizando aportaciones en las tres primeras líneas descritas anteriormente.

El primer capítulo se destina a la recapitulación de los modelos probabilísticos univariantes y bivariantes usados en dicho método así como en la metodología PERT. En un segundo capítulo se construye la distribución bipolar y se analiza su aplicación en ambas metodologías, extendiendo así el método a nuevas distribuciones. Posteriormente, en el tercer capítulo, se procede a la generalización de una rama, basada en el sistema generador de van Dorp, y de dos ramas desarrollada a partir del mismo. A partir de las distribuciones generadas se realizan ciertas aplicaciones prácticas que permiten avanzar sustancialmente en el método de las dos funciones de distribución utilizando como distribuciones subyacentes distribuciones generalizadas de dos ramas, es decir con parámetros $(a, m, b, n_1$ y $n_2)$. Al trabajar con distribuciones pentaparamétricas y contar únicamente con la información, aportada por el experto, acerca de los parámetros a, m y b , se debe optar por pedir información adicional al experto.

Este procedimiento es conocido como proceso de elicitación y será la base de la segunda parte del tercer capítulo. En la aplicación práctica se realiza una comparación entre el método sintético, el método de regresión y el método de las dos funciones de distribución con subyacentes pentaparamétricas y la distribución beta, subyacente original del citado método. En este capítulo se avanza en la primera y segunda línea de investigación.

En el cuarto capítulo se extiende el MDFD al uso de dos índices para lo que se introduce la herramienta matemática cópula con el propósito de crear funciones de distribuciones conjuntas conocidas las distribuciones marginales de cada uno de los índices. Este hecho constituye una aportación original y novedosa que además abre la posibilidad de trabajar con tres índices e incluso con n índices.

El análisis de la distribución bipolarabólica en el ámbito financiero se lleva a cabo en el quinto y último capítulo constituyendo un gran aporte no solo desde el punto de vista práctico, ajustando los valores del índice bursátil DJ Eurostoxx50, sino también desde un prisma teórico ya que consigue adaptar tanto la distribución bipolarabólica como la distribución *two-sided power*, van Dorp y Kotz (2002.a) para su uso en el ajuste de rendimientos financieros.

Cada capítulo comienza con una pequeña recapitulación que servirá de resumen e introducción donde se resaltarán las aportaciones del capítulo en cuestión. Se cierra la Memoria con un último capítulo recopilatorio en el que se realiza una breve exposición tanto de las conclusiones finales que se derivan del estudio realizado, como de las líneas de investigación abiertas que se espera sean cerradas en futuros trabajos.

Capítulo I

Revisión de los modelos probabilísticos propios de la metodología PERT y el método de las dos funciones de distribución

I.0. INTRODUCCIÓN

El método PERT (Program Evaluation and Review Technique) fue desarrollado, tal y como citan numerosos autores, por la Armada de los Estados Unidos de América en 1957 para controlar los tiempos de ejecución de las diversas actividades integrantes de los proyectos espaciales y debido a la necesidad de terminar cada una de ellas dentro de los intervalos de tiempo disponibles.

Originalmente se utilizó para el control de tiempos del proyecto Polaris y actualmente se utiliza en todo el programa espacial, además de en otros ámbitos como, por ejemplo, la Investigación de Operaciones y, en general, el Análisis Económico. Como aplicaciones concretas, se destacan el estudio de la duración de un proyecto de fabricación en función de la duración de las diferentes tareas (Romero 1991) o el análisis de la bondad de un proyecto de inversión mediante sus diversos flujos de caja actualizados según su valor capital, (Suárez 1980).

Posteriormente, las distribuciones estadísticas y la metodología para pasar de la incertidumbre al riesgo, utilizada en el PERT, han encontrado un nuevo campo en la teoría general de valoración gracias al método de las dos funciones de distribución (MDFD) iniciado por Ballesteros (1971). El objeto de este capítulo es realizar una revisión de los modelos probabilísticos usualmente aplicados en ambos campos y que serán la base para el desarrollo de esta Memoria.

Desde que hace más de cincuenta años se presentaron las, posteriormente muy publicadas, fórmulas del PERT, éstas han sido extensamente criticadas y modificadas. La fórmula inicial proponía asumir que la duración de la actividad seguía una distribución beta y ofrecía estimaciones de la media y la desviación típica basadas en la moda y los valores extremos de la distribución subyacente. Las mayores críticas a estas fórmulas se deben a que *a priori* no existe razón para que la duración de la actividad siga una distribución beta. Sin embargo, Ben Yair (2000) dedica un trabajo a la justificación de este hecho bajo determinadas condiciones. Además, en el caso de una distribución asimétrica a la derecha, las estimaciones de la moda y la desviación típica serán asintóticamente sobrestimadas.

Muchos autores han ofrecido ciertas alternativas entre las que destacan ajustar distintos coeficientes a las fórmulas, emplear extremos alternativos o usar la mediana en lugar de la moda. En Johnson (1998) se ofrece un extenso resumen de las modificaciones propuestas a lo largo del tiempo por diferentes autores sobre las fórmulas clásicas del PERT.

Este capítulo se limitará a hacer una revisión de las diferentes distribuciones empleadas, destacando las distribuciones de probabilidad rectangular, triangular y beta. Además de la sencillez de cálculo de sus características estocásticas, estas distribuciones se adaptan fácilmente a situaciones reales en ambiente de incertidumbre que se transforman en ambiente de riesgo mediante las tres estimaciones subjetivas aportadas por el experto.

La distribución beta posee una reconocida aplicación en el proceso de valoración dando lugar al célebre método de las dos funciones de distribución beta comentado con anterioridad. Además fue usada originalmente por los creadores de la metodología PERT con el propósito de superar los inconvenientes presentados por la distribución normal. Sin embargo, la distribución beta es criticada, entre otros aspectos, por ignorar el valor modal en el cálculo de la varianza. Parece poco conveniente que, después de exigir la estimación del valor modal, posteriormente se omita y una posible solución se recoge en Herrerías (1995). Otra alternativa da lugar al modelo trapezoidal CPR, (Callejón Pérez y Ramos 1998), que será desarrollado en el presente capítulo.

Además de las distribuciones nombradas hasta ahora, destacan la distribución *Two-sided power*, presentada recientemente por van Dorp y Kotz (2002.a) y la distribución Topp-Leone (Topp y Leone 1955). Precisamente fue el profesor van Dorp el que me sugirió el estudio de esta última distribución y por ello quedo agradecida.

Por último, se presenta la distribución parabólica como primer antecedente de la distribución bipolar que se recogerá en el segundo capítulo y se exponen otras distribuciones propias del tratamiento de la incertidumbre como son: la distribución coseno, la distribución medio-coseno y la distribución U.

Por otro lado, parece lógico pensar que el análisis a realizar no se refiera a una única variable y por ello se revisarán también los modelos probabilísticos bivariantes, y en concreto aquellos cuya función de densidad tiene, en su representación gráfica, una forma geométrica. Destacan la distribución cúbica, la distribución piramidal y la distribución troncopiramidal. En cualquier caso, no se ha pretendido realizar un análisis exhaustivo de dichas distribuciones y sus propiedades, sino que el objeto es simplemente exponer la expresión de sus funciones de densidad y de distribución, siendo ésta última la herramienta básica del método de las dos funciones de distribución.

En cuanto a la estructura del capítulo queda dividido en dos epígrafes: a los modelos univariantes se les dedica una primera sección y la segunda abarca los modelos probabilísticos bivariantes.

I.1. DISTRIBUCIONES UNIVARIANTES EN EL ÁMBITO DEL PERT Y EL MÉTODO DE LAS DOS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

I.1.1. Distribución rectangular

Definición

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye uniformemente o sigue una distribución rectangular si su función de densidad responde a la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

donde a y b son los límites de la distribución. De manera que la probabilidad de que X este en el intervalo $[a, b]$ es constante mientras que la probabilidad de que X este fuera de dicho intervalo es 0.

Su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Las representaciones gráficas de la función de densidad y la función de distribución se recogen en la figura (I.1). Esta distribución también es conocida como distribución uniforme ya que, como se observa en su función de densidad, la probabilidad queda repartida uniformemente en todo el recorrido de la variable.

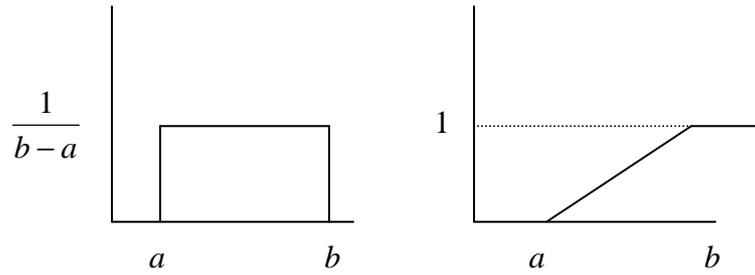


Figura I.1. Función de densidad y función de distribución del modelo probabilístico rectangular

Se observa que la función de distribución es lineal y por tanto fácilmente invertible, es decir:

$$x_\alpha = a + \alpha(b - a), \quad (\text{I.3})$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, siendo x_α un cuantil de $F(x)$ es decir $F(x_\alpha) = \alpha$, siendo esta propiedad muy interesante para la aplicación del MDFD. Véase Palacios, Pérez, Herrerías y Callejón (1999).

Las principales características estocásticas de esta distribución se recogen en el cuadro (I.1) (Arnáiz 1978):

Función generatriz de momentos	Esperanza matemática	Varianza	Coefficiente de asimetría de Fisher	Coefficiente de curtosis de Fisher
$G(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$	$E(x) = \frac{a+b}{2}$	$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$	$g_1 = 0$	$g_2 = -\frac{6}{5}$

Cuadro I.1. Principales características de la distribución rectangular

La distribución rectangular estandarizada

Usando la variable estandarizada $t = \frac{x-a}{b-a}$ puede simplificarse la expresión (I.1) y obtener la distribución rectangular estandarizada cuya función de densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Realizando análogo cambio de variable sobre (I.2) se obtiene la función de distribución de la distribución rectangular estandarizada:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Las características estocásticas de esta distribución, que se recogen en el cuadro (I.2), se obtienen fácilmente de las correspondientes características de la distribución general presentadas en el cuadro (I.1) haciendo $a = 0$ y $b = 1$. Por otro lado, hay que destacar, aunque es de sobra conocido, la invariabilidad de los coeficientes de asimetría y curtosis.

Función generatriz de momentos	Esperanza matemática	Varianza	Coficiente de asimetría de Fisher	Coficiente de curtosis de Fisher
$G(t^*) = \frac{e^t - 1}{t}$	$E(t) = \frac{1}{2}$	$Var(t) = \frac{1}{12}$	$g_1 = 0$	$g_2 = -\frac{6}{5}$
Cuadro I.2. Principales características de la distribución rectangular estandarizada				

La distribución rectangular en el PERT

La distribución rectangular es uno de los modelos de probabilidad más usado en el análisis de inversiones y se plantea como un modelo alternativo al modelo clásico de la metodología PERT. La utilización práctica de este modelo requiere un primer nivel de información suficiente para obtener los valores mínimo (a) y máximo (b) por lo que su elección se restringirá al caso en el que sólo se posea información sobre los valores extremos de la distribución y no se conozca el valor modal ni su frecuencia. En esta distribución se admite que todos los valores de la variable en el intervalo $[a, b]$ son equiprobables, por eso la gráfica de su función de densidad (figura I.1) tiene forma de rectángulo.

I.1.2. Distribución triangular

Definición

Se dice que una variable X sigue una distribución triangular si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)}, & a \leq x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-m)}, & m \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

La representación gráfica de tal función de densidad varía según que $\frac{a+b}{2} > m$,

$\frac{a+b}{2} = m$ ó $\frac{a+b}{2} < m$ de manera que la distribución puede ser asimétrica a la derecha, simétrica o asimétrica a la izquierda respectivamente.

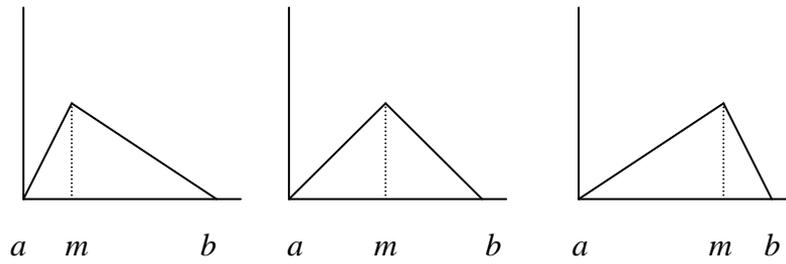


Figura I.2. Distintas representaciones de la función de densidad de la distribución triangular

Su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)}, & a \leq x \leq m \\ \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)}, & m \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (I.7)$$

Esta función de distribución es fácilmente invertible al ser cuadrática. Es decir:

$$x_\alpha = \begin{cases} a + \sqrt{\alpha(b-a)(m-a)} & 0 < \alpha \leq \frac{m-a}{b-a} \\ b - \sqrt{(1-\alpha)(b-a)(-m)} & \frac{m-a}{b-a} < \alpha < 1 \end{cases} \quad (I.8)$$

Siendo x_α un cuantil de $F(x)$ tal que $F(x_\alpha) = \alpha$. (Palacios, Pérez, Herrerías y Callejón 1999). Esta propiedad es muy interesante para la aplicación del método de las dos funciones de distribución.

Las principales características estocásticas de esta distribución son recogidas en el cuadro (I.3):

Función generatriz de momentos	$G(t) = 2 \frac{(b-m)e^{at} + (m-a)e^{bt} - (b-a)e^{mt}}{t^2(b-a)(m-a)(b-m)}$
Esperanza matemática	$E(X) = \frac{a+b+m}{3}$
Varianza	$Var(x) = \frac{(b-m)^2 + (m-a)^2 + (b-m)(m-a)}{18}$
Coefficiente de asimetría de Fisher	$g_1 = \frac{\sqrt{2}(a+b-2m)(b+m-2a)(2b-m-a)}{5((b-a)^2 - (m-a)(b-m))^{3/2}}$
Coefficiente de curtosis de Fisher	$g_2 = -\frac{3}{5}$
Cuadro I.3. Principales características estocásticas de la distribución triangular	

La Distribución Triangular Estandarizada

Las expresiones (I.6) y (I.7) pueden simplificarse si se usa la variable estandarizada

$t = \frac{x-a}{b-a}$, y en ese caso la función de densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} 2 \frac{t}{M}, & 0 \leq t \leq M \\ 2 \frac{1-t}{1-M}, & M \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Y la función de distribución:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{M}, & 0 \leq t \leq M \\ 1 - \frac{(1-t)^2}{1-M}, & M \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

En el cuadro (I.4) se recogen las principales características estocásticas de la distribución triangular estandarizada y se observa, comparando con el cuadro (I.3), la invariabilidad de los coeficientes de asimetría y curtosis de Fisher.

Función generatriz de momentos	$G(t^*) = 2 \frac{1 - M + Me^{t^*} - e^{Mt^*}}{t^{*2} M (1 - M)}$
Esperanza matemática	$E(t) = \frac{M + 1}{3}$
Varianza	$Var(t) = \frac{M^2 - M + 1}{18}$
Coficiente de asimetría de Fisher	$g_1 = \frac{\sqrt{2}(1 - 2M)(1 + M)(2 - M)}{5(M^2 - M + 1)^{3/2}}$
Coficiente de curtosis de Fisher	$g_2 = -\frac{3}{5}$
Cuadro I.4. Principales características de la distribución triangular estandarizada	

La distribución triangular en el PERT

La distribución triangular fue una de las primeras distribuciones continuas descubiertas por los investigadores durante el siglo XVIII. Una de las primeras referencias de la distribución triangular parece ser Simpson (1755, 1757), solo unos pocos años después de que en 1763 el famoso artículo de Bayes presentara la distribución uniforme continua. Según Seal (1949) el objetivo de Simpson era considerar matemáticamente el método práctico para astrónomos que consistía en tomar la media de varias observaciones para disminuir los errores obtenidos de la imperfección de los instrumentos y órganos de recogida de datos. Simpson supone que los errores de recogida de datos en exceso o defecto están simétricamente dispuestos y que se pueden asignar límites superiores e inferiores. La siguiente referencia, Schmidt (1934), advierte que la función de densidad de la distribución triangular simétrica es la distribución de la suma aritmética de dos variables aleatorias uniformes. Posteriormente, Ayyangar (1941), estudia la distribución triangular simétrica estandarizada. Hasta la mitad de los años sesenta muy pocas publicaciones fueron dirigidas al estudio de la distribución

triangular. Sin embargo, desde 1962 la distribución triangular ha renacido en numerosos artículos referentes a la metodología PERT. Véase Clark (1962), MacCrimmon, y Ryaveck (1964), Moder y Rodgers (1968), Vaduva (1971), Williams (1992), Keefer y Verdini (1993) y Johnson (1997) entre otros.

Los parámetros de la distribución triangular tiene correspondencia uno a uno con los valores optimista (a), más probable (m) y pesimista (b) de la metodología PERT¹. Asimismo, se trata de una distribución que puede ser simétrica o asimétrica a la derecha o a la izquierda, lo que añade similitud con la distribución beta. Esto conduce a una aplicación intuitiva de esta distribución en el ámbito del PERT en el que la variable de estudio es el tiempo para completar ciertas actividades dentro de un proyecto global, y cuya incertidumbre puede ser modelada por la función de densidad recogida en la expresión (I.6). Véase Winston (1993).

Recientemente la distribución triangular ha ganado popularidad debido a:

- Su uso en el método de simulación de Monte Carlo, (Vose 1996), sistemas de simulación discretos, (Banks 2000 y Altiok y Melamed 2001).
- Su uso en software de análisis de incertidumbre por ejemplo @Risk desarrollado por Palidase Corporation o Cristal Ball desarrollado por Decisión Engineering. Estos manuales recomiendan el uso de la distribución triangular cuando la distribución subyacente es desconocida pero se dispone de un valor mínimo, un valor máximo y un valor más probable.
- La publicación de la distribución *two-sided power* presentada por van Dorp y Kotz (2002.a) y que se desarrolla en el apartado (I.5) como extensión de la distribución triangular y como una magnífica alternativa a la distribución beta.

¹ El Doctor Herrerías, R. insiste en la denominación de valor mínimo (a), más probable (m) y valor máximo (b) ya que el valor optimista puede no coincidir con el valor mínimo si en lugar de trabajar sobre la duración de tareas se hace, por ejemplo, sobre flujos de caja, ocurriendo igual en el caso del valor pesimista.

I.1.3. Distribución beta

Definición

Sea X una variable aleatoria en el intervalo (a, b) se dice que se distribuye según una distribución beta y se nota como $X \rightarrow \beta(a, b, p, q)$ si y solo si su función de densidad responde a la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1} B(p, q)}, & \text{si } a \leq x \leq b; p \geq 1; q \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Se comprueba fácilmente que la expresión (I.11) es una verdadera función de densidad ya que verifica que $f(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ y $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Las características estocásticas de esta distribución, (Dumas de Rauly 1968), están recogidas en el cuadro (I.5):

Esperanza matemática	Moda	Varianza
$E(x) = \frac{p}{p+q} b + \frac{q}{p+q} a$	$Mo = \frac{p-1}{p+q-2} b + \frac{q-1}{p+q-2} a$	$Var(x) = \frac{pq(b-a)^2}{(p+q+1)(p+q)^2}$
Cuadro I.5. Principales características de la distribución beta de primer tipo		

Obsérvese que la moda de la distribución beta $B(a, b, p, q)$ coincide con la media de la distribución beta $B(a, b, p-1, q-1)$. Farnum y Stanton (1987) aprovecharon este hecho para diseñar una fórmula refinada para el cálculo de la media en la metodología PERT. Golenko-Ginzburg (1988) hace uso de un nuevo parámetro $k = p + q - 2$ y, mediante la expresión de la moda recogida en el cuadro (I.5), obtiene las siguientes expresiones para los parámetros p y q de la distribución beta en función de dicho parámetro k y las tres estimaciones periciales:

$$p = 1 + k \frac{m-a}{b-a} \quad \text{y} \quad q = 1 + k \frac{b-m}{b-a} \quad (\text{I.12})$$

Esta reparametrización llevada a cabo en primer lugar por Golenko-Ginzburg (1988), es obtenida posteriormente y por otro camino, a través de cierta subfamilia del sistema de Pearson, por Herrerías (1989). En cualquier caso, sustituyendo las expresiones de p y q , recogidas en (I.12), en las referentes a la media y a la varianza de la distribución beta $B(a,b,p,q)$ recogida en el cuadro (I.5) se obtiene unas nuevas expresiones en función de los parámetros a, m, b y k , (Herrerías 1989, 1995), que se presenta en el cuadro (I.6)

Esperanza matemática	Varianza
$E(x) = \frac{a + km + b}{k + 2}$	$Var(x) = \frac{(E(x) - a)(b - E(x))}{k + 3}$
Cuadro I.6. Principales características de la distribución beta de primer tipo en función del parámetro k	

Se observa que el parámetro k juega el papel de ponderación del valor estimado como más probable y por tanto puede representar la confiabilidad que se tenga en dicha estimación. Este parámetro presenta el inconveniente de no estar acotado por lo que Pérez (1995) propone el uso del parámetro $\alpha = \frac{k}{k+2}$ que varía dentro del intervalo (0,1)

La Distribución Beta Estandarizada

Para obtener los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución dada por (I.11), y a la vez seguir la línea de las exposiciones anteriores, se presenta la distribución beta estandarizada.

Sea $t = \frac{x-a}{b-a}$ la variable aleatoria que toma valores en el intervalo (0,1) se dice que se distribuye según una distribución beta y se nota como $t \rightarrow \beta(p,q)$ si su función de densidad responde a la siguiente expresión:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1}, & \text{si } t \in (0,1); p > 0; q > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Esta distribución se obtiene de (I.11) realizando el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ y se comprueba fácilmente que la expresión (I.13) es una verdadera función de densidad ya que verifica que $f(t) \geq 0, \forall t \in (0,1)$ y $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

Los momentos no centrales de esta distribución son:

$$E[t^n] = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+n)} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}, n = 1,2,\dots \quad (\text{I.14})$$

Y entre ellos se da la siguiente relación de recurrencia:

$$E[t^n] = \frac{p+n-1}{p+q+n-1} E[t^{n-1}], n = 1,2,\dots \quad (\text{I.15})$$

Usando las expresiones (I.14) y (I.15) se obtiene el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis, (Canávos 1987) que se recogen en el cuadro (I.7), junto con las expresiones de la esperanza matemática y la varianza.

Esperanza matemática	$E(t) = \frac{p}{p+q}$
Varianza	$Var(t) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$
Coficiente de asimetría de Fisher	$g_1 = \frac{2(q-p)\sqrt{p+q+1}}{\sqrt{pq}(p+q+2)}$
Coficiente de curtosis de Fisher	$g_2 = 6 \frac{p(p+1)(p-2q)+q(q+1)(q-2p)}{pq(p+q+2)(p+q+3)}$
Cuadro I.7. Principales características de la distribución beta	

Nótese que, puesto que p y q son positivos, el signo de la asimetría viene dado por el de la diferencia $q-p$, por lo que la distribución presenta asimetría positiva, (negativa), si la moda esta a la izquierda, (derecha), del punto medio. Este resultado fue presentado por Herrerías (1995) y se encuentra recogido en Herrerías (2001).

Por otro lado, se observa que tanto el coeficiente de asimetría como el de curtosis son invariantes a cambios de origen y de escala por lo que se podrán utilizar tanto para la distribución (I.11) como para la distribución (I.13).

La distribución beta en el PERT

La distribución beta fue la originalmente propuesta por los autores de la metodología PERT que plantearon las siguientes expresiones para la estimación de la media y la varianza de la distribución beta:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{a + 4m + b}{6} \\ Var(x) &= \frac{(b - a)^2}{36} \end{aligned} \tag{I.16}$$

Las razones que llevaron a ellas son eminentemente prácticas y sustentadas por intuiciones atractivas, (Hillier y Lieberman 1982 y Yu Chuen-Tao 1980), pero desde luego no pueden obtenerse a partir de la función de densidad de la distribución beta con las informaciones disponibles de valor optimista, pesimista y más probable. En cualquier caso estas expresiones típicas del PERT han dado lugar a multitud de críticas, entre ellas que se ignora, para el cálculo de la varianza, la más comprometida de las estimaciones periciales, es decir, el valor modal. Sin embargo, el modelo PERT ha funcionado relativamente bien en diversos campos lo que puede deberse a sus buenas propiedades con respecto a la asimetría y la curtosis que hacen que este modelo sea el más parecido a una distribución normal pero con dos grandes ventajas sobre ella: i) El recorrido de la variable está limitado, es decir, no presenta colas infinitas como le ocurre a la distribución normal; ii) El modelo puede presentar asimetrías, mientras que la normal siempre es simétrica.

Tal y como se observa en la figura (I.3), la expresión gráfica de la función de densidad recogida en la expresión (I.13) varía sensiblemente según el valor de sus parámetros, dando lugar a figuras en forma de ele, jota, U y campana, (Casas y Santos 1996), y precisamente esta característica la convierte en un modelo adecuado para la distribución de la duración de una actividad en un intervalo finito debido no solo a la amplia variedad de formas sino también a las distintas intensidades de asimetría y curtosis que puede adoptar.

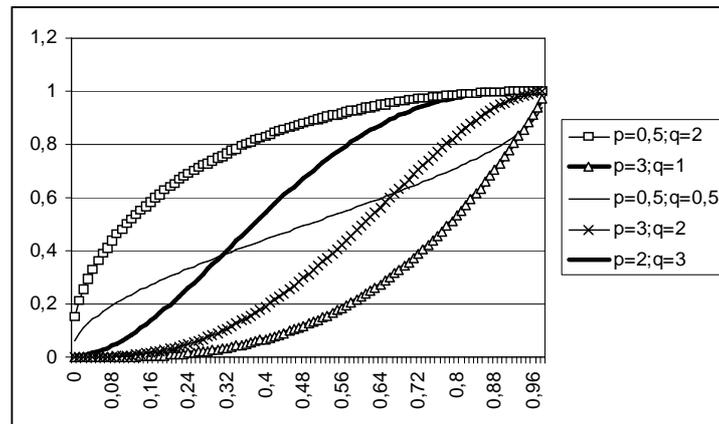


Figura I.3. Diferentes formas de la función de densidad de la distribución beta

Con el fin de resaltar la rigidez de este modelo y salvaguardar la flexibilidad modeladora, Golenko-Ginzburg en 1988, mediante una reparametrización de la distribución beta, y posteriormente Herrerías en 1989, utilizando el sistema generador de Pearson, han desarrollado, por caminos distintos, unos modelos alternativos en los que las estimaciones de $E(x)$ y $Var(x)$ se obtienen por las fórmulas:

$$E(x) = \frac{a + km + b}{k + 2}, \quad (I.17)$$

$$Var(x) = \frac{(1 + k)(b - a)^2 + k^2(m - a)(b - m)}{(k + 2)^2(k + 3)}. \quad (I.18)$$

El parámetro k se determina según la confianza subjetiva en la pericia del experto que determinó a , b y m , aunque el valor asignado, en el llamado PERT clásico, al parámetro k es 4. En este sentido, la pregunta, planteada por Sasieni (1986), sobre la ponderación del valor modal, las respuestas iniciales de Gallagher (1987) y Littlefield y Randolph

(1987) y los trabajos posteriores de Kamburowski (1997), Herrerías, García y Cruz (1999), García, Cruz y Herrerías (2003), y Herrerías, García y Cruz (2003) han establecido las condiciones para algunas subfamilias de distribuciones beta.

La cuestión es la siguiente: con las tres estimaciones clásicas del PERT, $(a, m \text{ y } b)$, es imposible determinar una única distribución beta, debido a que ésta es una distribución tetraparamétrica. Para resolver este problema, en la literatura especializada se recurre bien a hipótesis simplificadoras que permiten la especificación casi completa de dicha distribución (Romero 1991; Suárez 1980) o bien se intenta obtener información adicional con la que pueda realizarse el ajuste con mayor, aunque no total, precisión.

En esta línea están los trabajos de Chae y Kim (1992), Moitra (1990) y Pérez (1995) que agregan información sobre la verosimilitud relativa de la moda, sobre la simetría o sobre el apuntamiento de la distribución respectivamente. Así, imponiendo como hipótesis simplificadora que la distribución beta tenga la misma curtosis que la normal ($\beta_2 = 3$), se obtiene la llamada familia mesocúrtica de distribuciones beta.

En este caso, la ecuación que relaciona los valores de k con los de la moda estandarizada (M) es:

$$k^3(5M^2 - 5M + 1) + k^2(16M^2 - 16M + 2) - 5k - 4 = 0, \quad (\text{I.19})$$

Conocidos los tres valores clásicos $(a, m \text{ y } b)$ y partiendo de $M = \frac{m-a}{b-a}$, se resuelve la ecuación cúbica (I.19) y se obtiene un único valor de $k > 0$ siempre que $0 \leq M \leq 0,2763933\dots$ ó $0,7236067\dots \leq M \leq 1$.

Por otra parte, imponiendo que la distribución beta estandarizada tenga la “misma varianza” que la normal,² es decir: $\sigma^2 = \frac{1}{36}$, véase Yu Chuen-Tao (1980) se obtiene la llamada familia de distribuciones beta de varianza constante. En este caso, la ecuación que relaciona los valores de k con los de la moda estandarizada es:

$$k^3 + k^2[7 - 36(M - M^2)] - 20k - 24 = 0, \quad (\text{I.20})$$

La ecuación cúbica (I.20) siempre tiene una única solución $k > 0$, para todo valor de $M \in (0,1)$.

Es conocido, (Herrerías, García y Cruz 2003), que la única intersección de ambas familias se produce para $k = 4$ que es el valor asignado a la distribución beta del PERT clásico.

Finalmente, la familia de betas triparamétricas, formada por las distribuciones beta $\beta(p, q, a, b)$, con $p = h \pm \sqrt{2}$ y $q = h \mp \sqrt{2}$, $h > 0$, tuvo su origen en el trabajo de Ballester y Caballer (1982) y tabulada posteriormente por Caballer (1993). El estudio de estas familias puede verse en García, Cruz y Herrerías (2003).

I.1.4. Distribución trapezoidal

Definición

Se dice que una variable X se distribuye según una distribución trapezoidal si su función de densidad responde a la siguiente expresión:

² Si se considera que el 997% de la masa de una distribución normal esta comprendido entre $\mu \pm 3\sigma$, entonces se puede pensar que al sustituir la distribución beta por la normal y despreciar el 3%, $(b-a)=6\sigma$, luego $\sigma = \frac{b-a}{6}$ y al estandarizar $\sigma^2 = \frac{1}{36}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a+m_2-m_1} \frac{x-a}{m_1-a}, & a \leq x \leq m_1 \\ \frac{2}{b-a+m_2-m_1}, & m_1 \leq x \leq m_2 \\ \frac{2}{b-a+m_2-m_1} \frac{b-x}{b-m_2}, & m_2 \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

La representación gráfica de tal función de densidad es:

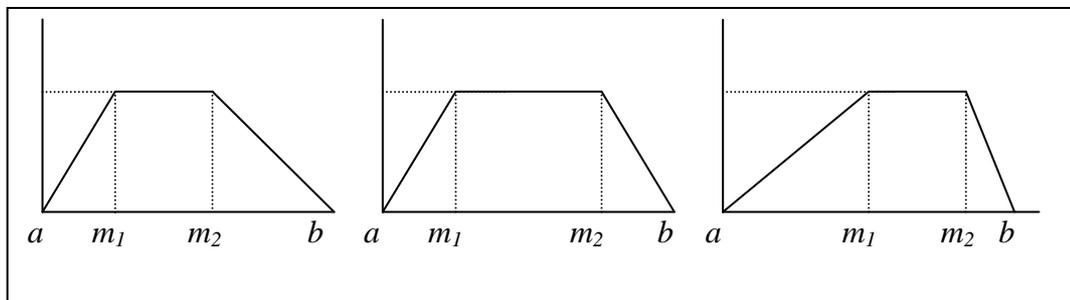


Figura I.4. Distintas representaciones de la función de densidad de la distribución trapezoidal

El nombre trapezoidal refleja la forma del gráfico de la función de densidad. Tal y como se aprecia en las gráficas anteriores la distribución será asimétrica a la derecha, simétrica o asimétrica a la izquierda respectivamente si: $(b-m_2) > (m_1-a)$, $(b-m_2) = (m_1-a)$ ó $(b-m_2) < (m_1-a)$.

Su función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a+m_2-m_1} \frac{(x-a)^2}{m_1-a}, & a \leq x \leq m_1 \\ \frac{1}{b-a+m_2-m_1} (2x-m_1-a), & m_1 \leq x \leq m_2 \\ 1 - \frac{1}{b-a+m_2-m_1} \frac{(b-x)^2}{b-m_2}, & m_2 \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Nótese que tal función de distribución es fácilmente invertible al ser cuadrática y lineal. En efecto, se denota por $L = (b - a) + (m_2 - m_1)$ a la suma de las amplitudes de los dos intervalos y se obtiene:

$$x_\alpha = \begin{cases} a + \sqrt{L(m_1 - a)\alpha}, & 0 \leq \alpha \leq \frac{m_1 - a}{L} \\ \frac{\alpha L + a + m_1}{2}, & \frac{m_1 - a}{L} \leq \alpha \leq 1 - \frac{b - m_2}{L} \\ b - \sqrt{L(b - m_2)(1 - \alpha)}, & 1 - \frac{b - m_2}{L} \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (I.23)$$

Siendo x_α un cuantil de $F(x)$ tal que $F(x_\alpha) = \alpha$. Véase Palacios, Pérez, Herrerías y Callejón (1999). Siendo esta propiedad muy interesante para la aplicación del MDFD. Para la aplicación de esta distribución en la estimación de los flujos de caja véase Herrerías y Calvete (1987) y Herrerías y Miguel (1988). Puede observarse que si $m_1 = a$ y $m_2 = b$ la distribución coincide con la distribución uniforme, y que si $m_1 = m_2 = m$ la distribución se convierte en la distribución triangular. Las expresiones del coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis se recogerán solamente en el caso de la variable estandarizada aprovechando que ambos son invariables a cambios de origen y de escala.

Las principales características de esta distribución se recogen en el cuadro (I.8):

Función generatriz de momentos	$G(x) = \frac{2[(m_1 - a)(e^{bt} - e^{m_2t}) + (b - m_2)(e^{at} - e^{m_1t})]}{(m_1 - a)(b - m_2)(b - a + m_2 - m_1)t^2}$
Esperanza matemática	$E(x) = \frac{1}{3} \left[b + m_1 + m_2 + a - \frac{bm_2 - am_1}{b - a + m_2 - m_1} \right]$
Varianza	$\text{Var}(x) = \frac{1}{18} \left[(b - m_1)^2 + (m_2 - a)^2 + (b - m_2)(m_1 - a) - \frac{2(b - a)(m_2 - m_1)(m_2 - a)(b - m_1)}{(b - a + m_2 - m_1)^2} \right]$
Cuadro I.8. Principales características estocásticas de la distribución trapezoidal	

La distribución trapezoidal estandarizada

Las expresiones (I.21) y (I.22) pueden simplificarse usando la variable estandarizada

$t = \frac{x-a}{b-a}$ resultando las siguientes expresiones para la función de densidad y la función

de distribución respectivamente:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+M_2-M_1)M_1}, & 0 < t \leq M_1 \\ \frac{2}{(1+M_2-M_1)}, & M_1 \leq t \leq M_2 \\ \frac{2}{(1+M_2-M_1)} \frac{1-t}{1-M_2}, & M_2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{(1+M_2-M_1)M_1}, & 0 < t \leq M_1 \\ \frac{2t-M_1}{(1+M_2-M_1)}, & M_1 \leq t < M_2 \\ 1 - \frac{1}{1+M_2-M_1} \frac{(1-t)^2}{1-M_2}, & M_2 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Las principales características estocásticas de esta distribución estandarizada están recogidas en el cuadro (I.9):

Función generatriz de momentos	$G(t^*) = \frac{2[(e^t - e^{M_2 t})M_1 + (1-M_2)(1-e^{M_1 t})]}{(M_1)(1-M_2)(1+M_2-M_1)t^2}$
Esperanza matemática	$E(t) = \frac{1}{3} \left[1 + M_1 + M_2 - \frac{M_2}{1+M_2-M_1} \right]$
Varianza	$Var(t) = \frac{1}{18} \left[(1-M_1)^2 + (M_2)^2 + (1-M_2)(M_1) - \frac{2(M_2-M_1)(M_2)(1-M_1)}{(1+M_2-M_1)^2} \right]$

Cuadro I.9. Principales características estocásticas de la distribución trapezoidal estandarizada

Notando por:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 1 + M_2 - M_1 \\
 h &= \frac{2}{P_1} \\
 P_2 &= 1 + M_2 + M_2^2 - M_1^2 \\
 P_3 &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 - M_1^3 \\
 P_4 &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 + M_2^4 - M_1^4 \\
 P_5 &= 1 + M_2 + M_2^2 + M_2^3 + M_2^4 + M_2^5 - M_1^5
 \end{aligned} \tag{I.26}$$

se obtienen los coeficientes de asimetría y curtosis recogidos en el cuadro (I.10):

Coeficiente de asimetría de Fisher	Coeficiente de curtosis de Fisher
$g_1 = \frac{10h^2 P_2^3 - 45h P_2 P_3 + 54 P_4}{5\sqrt{h}(3P_3 - hP_2^2)^{3/2}}$	$g_2 = \frac{216P_5 - 3h(10h^2 P_2^4 - 60h P_2^2 P_3 + 45P_3^2 + 72P_2 P_4)}{5h(3P_3 - hP_2^2)^2}$
Cuadro I.10. Coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución trapezoidal estandarizada	

La distribución trapezoidal en el PERT

Debido a que muchos procesos físicos de la naturaleza y del cuerpo humano en general se ajustan, o reflejan la forma, de la distribución trapezoidal se ha generado un gran interés alrededor de ella. En este contexto, la distribución trapezoidal ha sido usada en el estudio y la detección del cáncer, (Flehinger y Kimmel 1987) (Brown 1999). También ha sido utilizada en el análisis del riesgo por Pouliquen (1970) y más recientemente por Powell y Wilson (1997) y Garvey (2000). Van Dorp y Kotz (2003.a) desarrollan una generalización de la distribución trapezoidal utilizando técnicas de mixtura de distribuciones y resultando la siguiente expresión para la función de densidad de la distribución trapezoidal generalizada:

$$f(x/a, b, c, d, n_1, n_3, \alpha) = \frac{2n_1n_3}{2\alpha(b-a)n_3 + (\alpha+1)(c-b)n_1n_3 + 2(d-c)n_1} \begin{cases} \alpha^2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{n_1-1}, & a \leq x < b \\ \left[(\alpha-1) \frac{c-x}{c-b} + 1 \right], & b \leq x < c \\ \left(\frac{d-x}{d-c} \right)^{n_3-1}, & c \leq x < d \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (I.27)$$

donde $n_1 > 0$, $n_3 > 0$ y $a < b < c < d$, interpretando a n_1 como la tasa de crecimiento y n_3 como la tasa de decrecimiento en la primera y la tercera fase de la distribución respectivamente. Esta distribución presenta como ventaja su gran flexibilidad que permitirá ajustar la gran variedad de fenómenos de crecimiento y decrecimiento. Sin embargo, posee un gran inconveniente para su uso en el ámbito del PERT debido a la gran cantidad de parámetros que debe facilitar el experto para su determinación.

Como se comentó anteriormente, las distribuciones tradicionalmente aplicadas en la metodología PERT son la distribución rectangular, la distribución triangular –ambas casos especiales de la familia de distribuciones trapezoidales- y la distribución beta. La distribución trapezoidal parece apropiada para ajustar la duración y la forma de fenómenos que pueden ser representados por tres etapas: una primera fase de crecimiento, seguida de una estabilidad relativa y por último un declive. Esta distribución esta limitada a formas lineales en la primera y tercera fase y a una completa estabilidad en la segunda, tal y como se aprecia en la figura (I.4).

Sin embargo, al igual que ocurre con la distribución beta, las tres estimaciones, (a , b y m) no son suficientes para ajustar perfectamente la distribución trapezoidal ya que esta es tetraparamétrica, por ello Callejón, Pérez y Ramos (1998) han ideado un procedimiento para disponer de una distribución trapezoidal en el caso de que solo se dispongan de los valores a , b y m . Esta distribución conocida como trapezoidal CPR ha sido utilizada por García, Trinidad y Gómez (1999) en el método de valoración de las dos funciones de distribución.

Se demuestra, (Callejón, Pérez y Ramos 1998), que si $m_1 < c = \frac{a+b}{2} < m_2$, entonces la media de la distribución trapezoidal está en el intervalo (c, m_2) o bien en el intervalo (m_1, c) según que la distancia entre c y m_2 sea mayor o menor, respectivamente, que la distancia entre m_1 y c . Se demuestra también que si $m_1 = c$ la media de la distribución está comprendida entre c y m_2 , y que si $m_2 = c$ el valor esperado de la distribución está comprendido entre m_1 y dicho centro.

Así pues, la trapezoidal CPR se basa en la siguiente regla de actuación cuando el experto proporcione un valor más probable distinto al centro del intervalo: Definir la distribución trapezoidal por los extremos del intervalo (a y b), el centro del intervalo (c) y el valor más probable tomando como $m_1=m$ y $m_2=c$ en el caso de asimetría a la derecha y tomando $m_1=c$ y $m_2=m$ en el caso de asimetría a la izquierda.

I.1.5. Distribución *two-sided power*

Definición

En van Dorp y Kotz (2002.a) se introduce la denominada distribución *two-sided power* que es una generalización de la distribución triangular. Esta distribución, al igual que la distribución beta, tiene un tratamiento análogo al de las distribuciones que pertenecen al sistema de Pearson, (Herrerías 2004), y se define de la siguiente manera.

Sea X una variable aleatoria en el intervalo (a, b) se dice que se distribuye según una distribución *two-sided power* (TSP) si su función de densidad viene dada por:

$$f(x|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{n}{b-a} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n-1}, & a < x \leq m \\ \frac{n}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n-1}, & m \leq x < b \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

La figura (I.5) ofrece ejemplos de la función de densidad de distribuciones TSP simétricas ($M=0,5$) para distintos valores de n y para los valores $a=0$, $b=1$, entre las que se incluyen la distribución uniforme ($n=1$) la triangular ($n=2$) y otras distribuciones con forma de U.

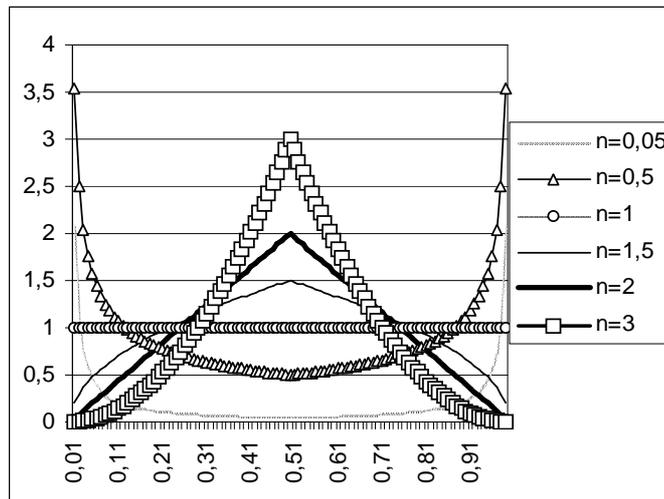


Figura I.5. Distintas representaciones de la función de densidad de la distribución TSP(0;0,5;1;n)

Esta distribución, notada por TSP (a,m,b,n), con $a \leq m \leq b$ y $n > 0$ verifica las siguientes propiedades:

- Si $n > 1$, entonces la moda de esta distribución es m y el valor asignado por su función de densidad es $\frac{n}{b-a}$.
- Si $0 \leq n \leq 1$ y $a < m < b$, entonces las modas son a o b y $f(\cdot/a,m,b,n)$ converge a infinito cuando x tiende a a o b .
- Si $n=1$ entonces la distribución TSP degenera en una función uniforme.
- Si $n=2$ la TSP se convierte en una distribución triangular con parámetros a , m y b .

Su función de distribución toma la expresión:

$$F(x|a, m, b, n) = \begin{cases} \frac{m-a}{b-a} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^n & a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{b-m}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n-1} & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

Sus características principales vienen recogidas en el cuadro (I.11).

Esperanza matemática	$E(x) = \frac{a + (n-1)m + b}{n+1}$
Varianza	$Var(x) = (b-a)^2 \frac{n - 2(n-1)(m-a)/(b-a)(b-m)/(b-a)}{(n+2)(n+1)^2}$
Cuadro I.11. Principales características estocásticas de la distribución <i>two-sided power</i>	

Dada la complejidad de las expresiones correspondientes al coeficiente de asimetría y curtosis solo se presenta, para el caso estandarizado, la expresión del momento de orden k .

La distribución *two-sided power* estandarizada (STSP)

Si se realiza el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$, la variable t toma valores en el intervalo $[0,1]$, se distribuye según una distribución *standard two-sided power* (STSP) y su función de densidad viene dada por:

$$f(t|M, n) = \begin{cases} n \left(\frac{t}{M} \right)^{n-1} & 0 < t < M \\ n \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n-1} & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

donde M , valor modal estandarizado, y n son los parámetros de la distribución.

Y su función de distribución tiene la siguiente expresión:

$$F(t|M, n) = \begin{cases} M \left(\frac{t}{M} \right)^{n-1}, & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-M) \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (I.31)$$

En Van Dorp y Kotz (2002.b) se obtienen los valores de la media y la varianza de una distribución $STSP(M, n)$ que vienen dados por:

Esperanza matemática	$E(t) = \frac{(n-1)M + 1}{n + 1}$
Varianza	$Var(t) = \frac{n - 2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
Momento de orden k	$E[t^k] = \frac{nM^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-M)^{i+1}$
Cuadro I.12. Principales características de la distribución <i>standard two-sided power</i>	

En la figura (I.6) se recogen gráficos de la función de densidad y la función de distribución para diferentes valores de los parámetros n y M . Obsérvese que para $n=2$ y $M=0,5$ se obtiene la representación gráfica de la función de densidad de la distribución triangular simétrica.

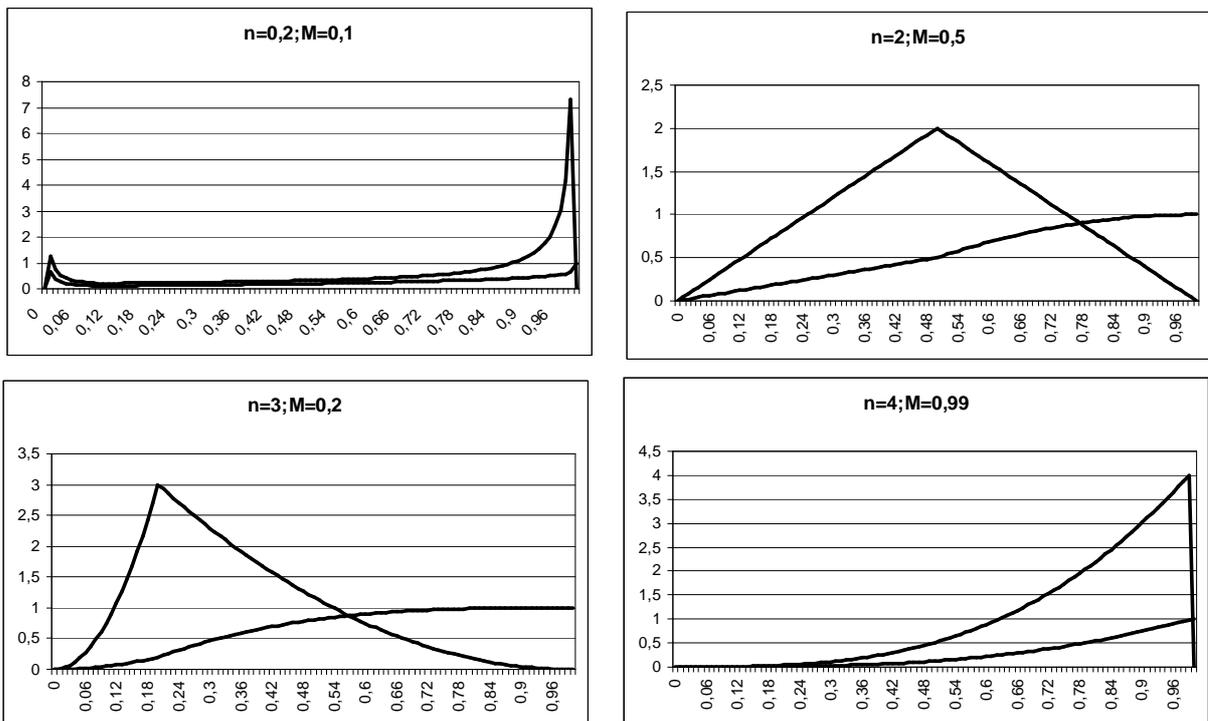


Figura I.6. Representación de la función de densidad y de la función de distribución de la distribución $STSP$ para diferentes valores de n y M .

La distribución *two-sided power* (TSP) en el PERT

Fue introducida por van Dorp y Kotz (2002.a) con un doble objetivo: extender las aplicaciones de la distribución triangular a los problemas asociados al riesgo y la incertidumbre, esta puede considerarse la motivación original, y en segundo lugar servir como una alternativa versátil y flexible a la beta de dos y cuatro parámetros.

Los autores demuestran que la distribución STSP tiene importantes ventajas sobre las anteriores, entre las que se pueden citar:

- Cuantiles de cálculo más fácil.
- Un estimador de máxima verosimilitud que es algorítmicamente eficiente.
- Parámetros con interpretación más clara y significativa.

La estimación de los parámetros M y n la realizan Van Dorp y Kotz (2002.b) de la siguiente forma. En primer lugar n se estima resolviendo la ecuación

$$cn^3 + dn^2 + en + f = 0 \quad (\text{I.32})$$

donde:

$$c = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2; d = \hat{\sigma}^2; e = -\left(\left(\bar{x}' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{4}\right); f = \frac{1}{4} - \left(\bar{x}' - \frac{1}{2}\right)^2 - \hat{\sigma}^2 \quad (\text{I.33})$$

y \bar{x}' y $\hat{\sigma}$ son respectivamente la media y la desviación típica estimada.

Una vez que n es estimada, la estimación de M es como sigue teniendo en cuenta que $0 \leq M \leq 1$ y $n \in \mathfrak{R}$:

$$M = \frac{1}{2} + \frac{n+1}{n-1} \left(\bar{x}' - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{I.34})$$

En el ámbito del PERT y partiendo de los tres valores habituales (a , m y b) cuyo significado es conocido, sería imposible determinar una única distribución STSP, puesto que se trata de una distribución tetraparamétrica de parámetros a , b , m y n . Por tanto, es

necesario restringir la elección de una única distribución STSP a alguna de sus subfamilias.

Los momentos ordinarios de orden k , van Dorp y Kotz (2002.b), son:

$$\mu'_k = E(T^k) = \frac{nM^{k+1}}{n+k} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{k-i} \frac{n}{n+i} (1-M)^{i+1} \quad (\text{I.35})$$

Utilizando las relaciones entre los momentos centrales:

$$\mu_k = E[T - E(T)]^k \quad (\text{I.36})$$

y los momentos ordinarios :

$$\begin{cases} \mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 \\ \mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu_1' + 2\mu_1'^3 \\ \mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu_1' + 6\mu'_2\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

el coeficiente de curtosis, β_2 , de la variable aleatoria estandarizada puede calcularse en función de M y n , véase García, Cruz y García (2005). Dicho coeficiente viene dado por la siguiente expresión ³:

$$\beta_2 = \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} \cdot \frac{AM^4 + BM^3 + CM^2 + DM + E}{4(n-1)^2 M^4 - 8(n-1)^2 M^3 + [4(n-1)^2 + 4n(n-1)] M^2 - 4n(n-1)M + n^2} \quad (\text{I.38})$$

siendo A, B, C, D y E polinomios en n de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A = 24n^3 - 72n^2 + 120n - 72 \\ B = -48n^3 + 144n^2 - 240n + 144 \\ C = 60n^3 - 120n^2 + 156n - 96 \\ D = -36n^3 + 48n^2 - 36n + 24 \\ E = 9n^3 - 3n^2 + 6n \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

³ Recuérdese que $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ mientras que $g_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$.

Puede demostrarse fácilmente que, en el caso de que $n=1$ (distribución uniforme), partiendo de la expresión (I.38), el coeficiente de curtosis es $\frac{9}{5}$ y que, en el caso de que $n=2$ (distribución triangular clásica), el coeficiente de curtosis es $\frac{12}{5}$.

Se define la familia de varianza constante como el conjunto formado por las distribuciones STSP con la misma varianza que la distribución normal (esto es, $\frac{1}{36}$), en caso de trabajar con variables aleatorias estandarizadas, se cumple la siguiente ecuación:

$$n^3 + 4n^2 + (-72M^2 + 72M - 31)n + (72M^2 - 72M + 2) = 0 \quad (\text{I.40})$$

Esta ecuación permite obtener, para cada valor de $M \in (0,1)$, un único valor de $n > 1$.

Por tanto, se puede afirmar que, dados los tres valores habituales (a , m y b), queda determinada una única distribución STSP unimodal de varianza constante. Este resultado permite el uso de esta familia en el ámbito del PERT.

Por otra parte, se define la familia mesocúrtica como el conjunto de distribuciones STSP cuyo coeficiente de curtosis (β_2) es igual a 3. Entonces, haciendo que la expresión (I.38) valga 3 y reordenando algunos términos, se obtiene la siguiente ecuación:

$$an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e = 0 \quad (\text{I.41})$$

siendo a , b , c , d y e polinomios en M de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a(M) = 2M^4 - 4M^3 + 6M^2 - 4M + 1 \\ b(M) = -14M^4 + 28M^3 - 22M^2 + 8M - 1 \\ c(M) = -2M^4 + 4M^3 - 22M^2 + 20M - 6 \\ d(M) = 62M^4 - 124M^3 + 94M^2 - 32M + 2 \\ e(M) = -48M^4 + 96M^3 - 56M^2 + 8M \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

Se demuestra, García, Cruz y García (2005), que, para todo $M \in (0,1)$, la ecuación (I.41) tiene una única solución que verifica la condición $n > 1$, por lo que se puede afirmar que siempre existe una distribución STSP perteneciente a la familia mesocúrtica. Este resultado mejora el obtenido por la familia mesocúrtica de distribuciones beta en la cual es imposible obtener una solución para los valores de $M \in (0,2763933\dots;0,7236067\dots)$.

I.1.6. Distribución Topp-Leone

La distribución Topp-Leone es una distribución unimodal continua acotada cuyo origen se encuentran en el artículo de Topp y Leone (1955) publicado en Journal Statistical Association (JASA) que en un principio recibió poca atención pero que ha sido recientemente redescubierta por Nadarajah y Kotz (2003), Ghitany, Kotz, y Xie (2005) dedican un reciente artículo a las medidas de bondad y las características estocásticas de dicha distribución.

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución Topp Leone de parámetros $0 < v < 1$ y $b > 0$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{2v}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{v-1} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(2 - \frac{x}{b}\right)^{v-1}, \quad 0 < x < b; 0 < v < 1; b > 0 \quad (\text{I.43})$$

En cuanto a su función de distribución viene dada por la expresión:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{x}{b}\right)^v \left(2 - \frac{x}{b}\right)^v, & 0 < x < b; 0 < v < 1; b > 0 \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

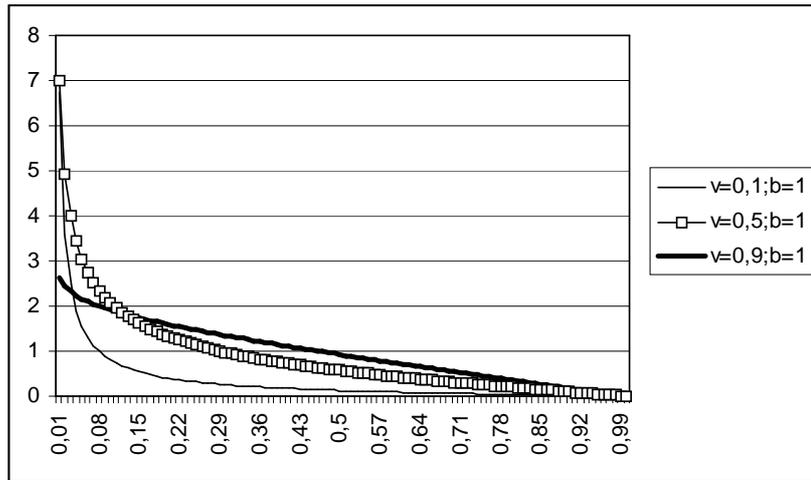


Figura I.7. Función de densidad de las distribuciones: $TL(0,1;1)$, $TL(0,5;1)$ y $TL(0,9;1)$

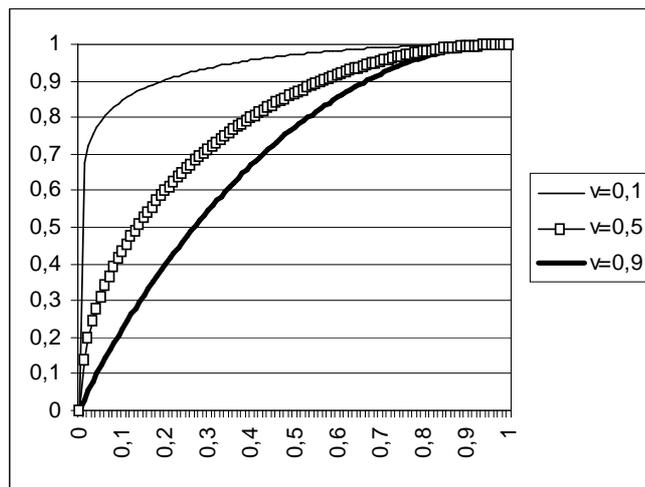


Figura I.8. Función de distribución de las distribuciones: $TL(0,1;1)$, $TL(0,5;1)$ y $TL(0,9;1)$

En las figuras (I.7) y (I.8) se representan la función de densidad y la función de distribución respectivamente de la distribución Topp-Leone para diferentes valores de v (0,1;0,5;0,9) y $b=1$.

Téngase en cuenta que se utiliza la distribución triangular con asimetría a la izquierda como función de densidad generadora de la misma manera que la distribución Weibull es generada a partir de la distribución exponencial.

También se le conoce como la distribución *J-Shaped*, forma de jota, ya que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo $0 < x < b$, donde f' y f'' son, respectivamente, la primera y la segunda derivada de f .

En cuanto a sus propiedades se recogen en el cuadro (I.13) las expresiones relativas a la esperanza matemática y la varianza.

Esperanza matemática	Varianza
$E(x) = b - b4^v \frac{\Gamma(v+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma(2v+2)}$	$Var(x) = \frac{b^2}{1+v} - b^2 16^v \frac{\Gamma^4(1+v)}{\Gamma^2(2+2v)}$
Cuadro I.13. Principales características de la distribución Topp Leone	

Nadarajah y Kotz (2003) obtienen las expresiones algebraicas de los diez primeros momentos con respecto al origen, los cuatro primeros momentos centrados con respecto a la media y de la función de la tasa de fallo que es una medida del envejecimiento. Esta tasa de fallo, $\lambda(x)$, es un coeficiente relevante a la hora de cuantificar los fenómenos relativos al tiempo de vida. Lo ideal es que la forma de la función de la tasa de fallo sea de bañera para que recoja las tres etapas diferentes: la etapa de mortalidad infantil (donde $\lambda(x)$ decrece con x), la región de fallo aleatorio (donde $\lambda(x)$ no cambia rápidamente para cambios de x) y de la región de desgaste (donde $\lambda(x)$ crece con x).

Se ha comprobado que la tasa de fallo de la distribución exponencial es constante, mientras que para la distribución Gamma y Weibull $\lambda(x)$ puede ser monótonamente decreciente o monótonamente creciente. La distribución uniforme tiene una tasa de fallo estrictamente creciente y, por último, la distribución beta con parámetros α y β , toma forma de bañera solo si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$.

En el caso de la distribución Topp-Leone toma la siguiente expresión:

$$\lambda(x) = \frac{2v}{b} \frac{y(1-y^2)^{v-1}}{1-(1-y^2)^v}, \quad y = 1 - \frac{x}{b}; 0 < x < b \quad (\text{I.45})$$

que queda representada en la figura (I.9) para diferentes valores de ν (0,1;0,5;0,9) y $b = 1$.

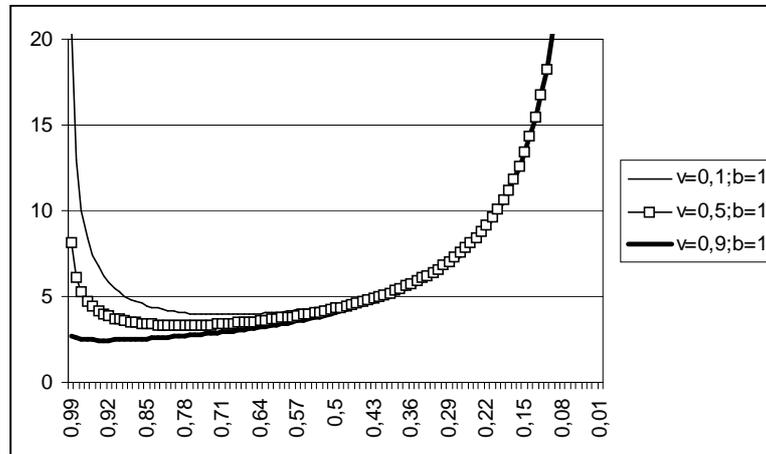


Figura I.9. Tasa de fallo de las distribuciones: TL(0,1;1), TL(0,5;1) y TL(0,9;1)

La figura (I.9) refleja una evidente forma de bañera para la tasa de fallo de la distribución Topp-Leone. Considerando, además, la sencillez de la expresión (I.45) y el hecho de que ninguna de las distribuciones univariantes comúnmente conocidas tiene una tasa de fallo con forma de bañera para el rango completo de los valores, se puede afirmar que la distribución Topp-Leone es la más adecuada para ajustar fenómenos de tiempo, Nadarajah y Kotz (2003).

I.1.7. Distribución parabólica

Parece ser que la primera referencia que se conoce de la distribución parabólica en un libro de estadística esta en Harold (1939, 1961). Este autor obtiene la distribución triangular como suma de dos distribuciones uniformes y una distribución parabólica como suma de tres distribuciones uniformes. La intención del autor era justificar el teorema central del límite demostrando que, a medida que se suman más variables, la distribución se va pareciendo cada vez más a la distribución normal. Partiendo de una única variable uniforme cuya función de densidad es:

$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

se obtiene para la suma de dos variables uniformes, como ya hiciera antes Schmidt (1934), la distribución triangular simétrica:

$$f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, & -2 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.47})$$

Por otro lado, si se agregan tres variables uniformes se construye la que Harold denominó distribución parabólica.

$$f_P(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(3+x^2), & -3 < x < -1 \\ \frac{1}{16}(6-2x^2), & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{16}(3+x^2), & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Se observa que la expresión (I.48) es, en realidad, una combinación de parábolas.

En la figura (I.10) se representan las funciones de densidad para cada una de las anteriores distribuciones, es decir para la distribución uniforme (I.10.a), la distribución triangular (I.10.b) y la distribución parabólica (I.10.c), obtenidas como suma de una, dos y tres variables uniformes respectivamente. Se concluye que, efectivamente, cuanto mayor es el número de variables uniformes agregadas, mayor es el parecido de la función de densidad de la distribución resultante con la función de densidad de la distribución normal.

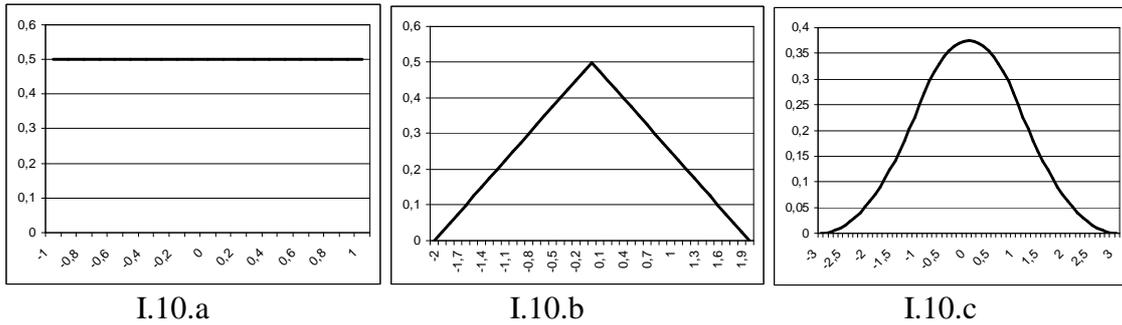


Figura I.10. Distintas representaciones de la función de densidad de la distribución uniforme, triangular y parabólica respectivamente.

La distribución parabólica con la moda centrada en el origen y un rango $(-a, a)$ viene dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4a} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right], & -a < x < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

Cuya representación gráfica se recoge en la figura (I.11).

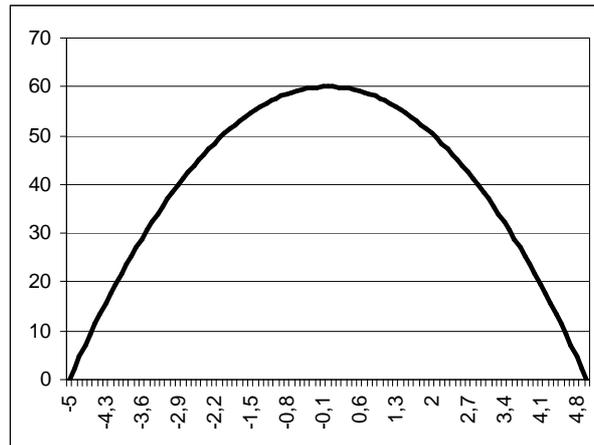


Figura I.11. Representación de la función de densidad (I.49) para $-5 < x < 5$.

Se observa que esta distribución elimina el cambio abrupto en la moda, no presenta un comportamiento lineal, difícilmente observable en un histograma, y satisface la necesidad de ser unimodal y acotada. La distribución parabólica fue usada por el profesor Bronzin (1908) como distribución subyacente del precio de los activos, en la

construcción de un modelo del precio de opciones. Este trabajo es posterior a la tesis doctoral de Bachelier (1900), que es considerado el trabajo seminal en Teoría de precios de opciones y anterior al de Merton (1973) y Black y Scholes (1973). Recientemente los profesores Wolfgang. y Zimmermann (2004) han reivindicado la figura del profesor Brozin obteniendo una expresión de la conocida fórmula de Black-Scholes a partir de las fórmulas de Bronzin.

La distribución parabólica ha tenido numerosas aplicaciones entre las que destacan, en el ámbito de la economía, la simulación del comportamiento del consumidor (Shavitt, Winkler y Wool 2004), el análisis de los planes de las empresas con producción y objetivos múltiples (Keren 1979) y trabajos sobre la distribución de la renta (Kuznets 1955 y 1963). Existen, por otra parte, aplicaciones de la distribución parabólica en el tratamiento de la incertidumbre, (Castrup 2002). Finalmente esta distribución encuentra numerosas aplicaciones en el ámbito de la Física y de la Hidrogeología, Wilson y Paxson (2002) entre otros.

La distribución parabólica parece no haber sido utilizada hasta ahora en el ámbito del PERT, cuando lo cierto es que sus parámetros se podrían determinar con los dos valores habituales del PERT, para la distribución uniforme, es decir el mínimo (a) y el máximo (b).

A partir de la siguiente ecuación cuadrática recogida en la expresión (I.50):

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (\text{I.50})$$

Y conocidos a y b se determina (I.50) con las siguientes condiciones: i. $f(a) = 0$, ii.

$f(b) = 0$, iii. $f'(\frac{a+b}{2}) = 0$, iv. $f''(\frac{a+b}{2}) < 0 \Rightarrow A < 0$, y v. $\int_a^b f(x)dx = 1$. De manera

que la expresión (I.50) quedaría:

$$f(x) = A(x^2 - (a+b)x + a.b) \quad (\text{I.51})$$

Siendo $A = \frac{6}{(a-b)^3}$

Por tanto, la expresión final de la función de densidad de la distribución parabólica para su aplicación en la metodología PERT es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{(a-b)^3} (x^2 - (a+b)x + ab), & x \in (a,b) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Así pues, la distribución parabólica sería una estupenda alternativa a la distribución uniforme, pero con el inconveniente de que esta distribución es simétrica respecto de la moda. La distribución Normal tiene este mismo inconveniente, recuérdese que la distribución beta surge como alternativa a la distribución normal, entre otras razones, para superar el problema de la simetría y el de no acotación de los extremos. En la figura (I.12) se representan las funciones de densidad para la distribución rectangular, la distribución triangular y la distribución parabólica para $x \in [-2, 2]$.

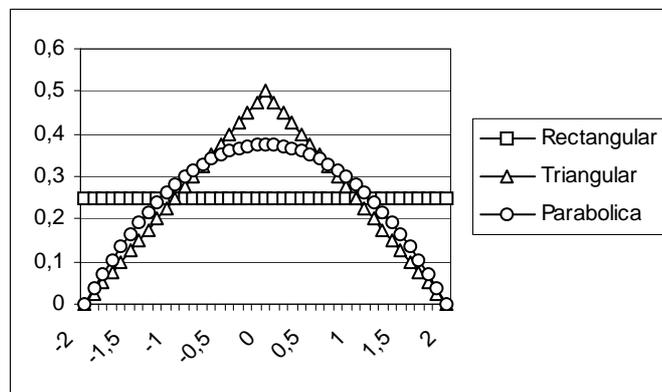


Figura I.12. Representación de la función de densidad de las distribuciones rectangular, triangular y parabólica para $-2 < x < 2$.

A lo largo de esta memoria se estudiarán las características de la distribución parabólica como un caso particular de la distribución biparabólica que será presentada en el segundo capítulo. En el próximo capítulo se tratará de construir una distribución parabólica que pueda ser asimétrica.

I.1.8. Otras distribuciones para el tratamiento de la incertidumbre

Además de las distribuciones presentadas hasta ahora y comúnmente empleadas en la metodología PERT y en la teoría de valoración, se han encontrado en la bibliografía revisada otras distribuciones con aplicación en el tratamiento de la incertidumbre.

En Castrup (2002) se presenta un resumen de algunas de estas distribuciones aunque con un enfoque distinto en cuanto al concepto de incertidumbre. Se desea destacar la distribución coseno, la distribución medio coseno y la distribución U, y por ello son, a continuación, brevemente presentadas.

La distribución coseno

La distribución parabólica elimina el salto brusco en la moda pero sin embargo no presenta ninguna flexibilidad cuando se acerca a sus extremos. Así pues, aunque la distribución parabólica tiene aplicaciones extensas, incluso mayores que la distribución uniforme, lo cierto es que este inconveniente disminuye sus aplicaciones materiales.

Una distribución que supera esta deficiencia, presenta una tendencia central y puede ser determinada a partir de los valores extremos es la distribución coseno que viene determinada por la siguiente función de densidad, siendo su representación gráfica la recogida en la figura (I.13):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right), & -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

La distribución medio coseno

Esta distribución es de aplicación cuando la tendencia central no es tan pronunciada y por tanto la distribución normal o la coseno no son apropiadas. Esto se debe a que, aunque la distribución coseno presenta también una tendencia central, posee una probabilidad de ocurrencia cerca de los valores extremos mayor que la presentada por las distribuciones normal o coseno.

Así pues, se trata de una distribución similar a la distribución parabólica pero sin la pérdida de flexibilidad en los extremos de la distribución.

Su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right), & -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

Su representación gráfica es la presentada en la figura (I.14) que si se compara con la figura (I.11) se observa fácilmente como la distribución medio coseno supera el inconveniente de la distribución parabólica al no presentar una terminación brusca en los extremos de la distribución.

La distribución U

Su función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

Siendo su representación gráfica, a la que debe su nombre, la recogida en la figura (I.15).

Es posible que estas distribuciones se puedan utilizar, en el futuro, como generadoras de otras distribuciones más complejas utilizando el sistema generador de van Dorp y Kotz (2003.b).

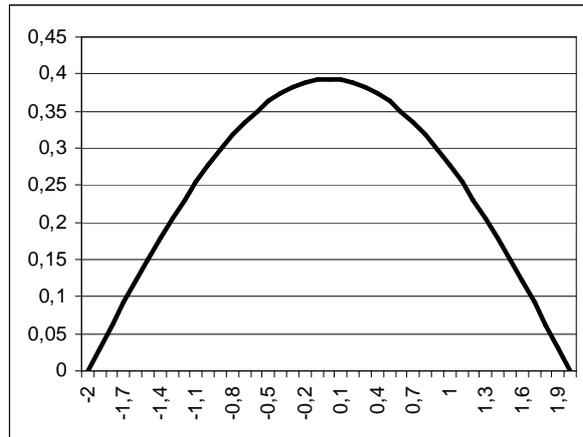


Figura (I.13). Función de densidad de la distribución coseno para $-2 < x < 2$

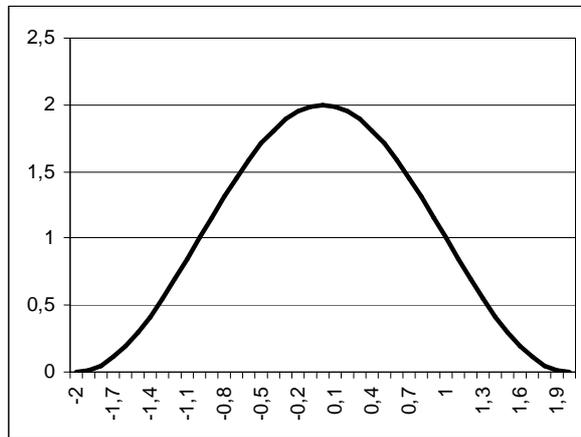


Figura (I.14). Función de densidad de la distribución medio coseno para $-2 < x < 2$

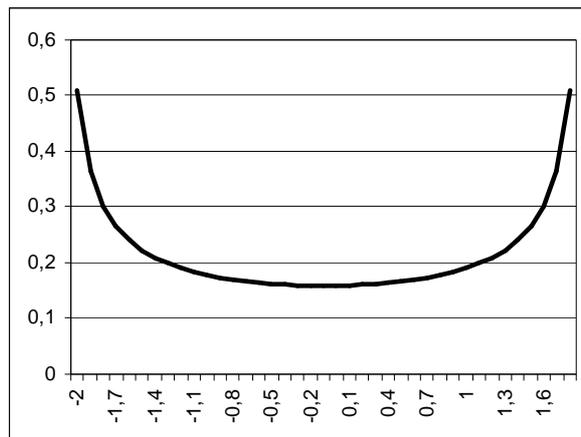


Figura (I.15). Función de densidad de la distribución U para $-2 < x < 2$

I.2. DISTRIBUCIONES BIVARIANTES EN EL MÉTODO DE LAS DOS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

I.2.0. Introducción

Cuando se disponen de dos índices de calidad para valorar un bien en el método de las dos funciones de distribución es conveniente usar distribuciones bivariantes. En este apartado se recogen algunas de las distribuciones presentadas en la tesis de Herrerías (2002). En Herrerías (2005) pueden verse distintas aplicaciones de estas distribuciones bivariantes utilizando el método de las dos funciones de distribución.

I.2.1. Distribución cúbica

Se dice que una variable $z(x,y)$ sigue una distribución cúbica:

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, & \text{si } a_1 < x < b_1 \wedge \text{si } a_2 < y < b_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

Nótese que:

- Corresponde a una distribución de reparto uniforme de la masa unitaria de probabilidad.
- Las variables aleatorias que la conforman son independientes ya que:
 $z(x,y)=z_1(x)z_2(y)$.

El cálculo de la función de distribución es inmediato:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a_1 \wedge y \leq a_2 \\ \frac{(x - a_1)(y - a_2)}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, & \text{si } a_1 < x < b_1 \wedge \text{si } a_2 < y < b_2 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

Puede comprobarse que: i) $F(a_1, a_2) = 0$; ii) $F(b_1, b_2) = 1$; iii) $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = h$, que es la forma funcional de la función de densidad. Nótese que si $(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2)$ el ortoedro se convierte en un hexaedro o cubo. En particular, esto se cumple cuando $a_1 = a_2 = a$ y $b_1 = b_2 = b$.

Teniendo en cuenta los resultados i) y ii) la determinación de las características estocásticas de las distribuciones del ortoedro y cúbica se hacen a partir de las densidades rectangulares correspondientes.

Es interesante señalar que la independencia es debida a que la función de densidad de la distribución uniforme no depende de la variable. Por ello, siempre que una de las variables, que componga el caso bidimensional, se distribuya según una distribución uniforme se va a poder expresar la función de densidad conjunta como el producto de las marginales.

I.2.2. Distribución piramidal

La función de densidad de la distribución piramidal es la siguiente:

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{y - a_2}{m_2 - a_2} \frac{3}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}, & \text{si } (x, y) \in T_1 \\ \frac{b_1 - x}{b_1 - m_1} \frac{3}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}, & \text{si } (x, y) \in T_2 \\ \frac{b_2 - y}{b_2 - m_2} \frac{3}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}, & \text{si } (x, y) \in T_3 \\ \frac{x - a_1}{m_1 - a_1} \frac{3}{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}, & \text{si } (x, y) \in T_4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

Donde los recintos T_i ($i = 1,2,3,4$) son los diferentes triángulos que conforman los recorridos de las variables X e Y , figura (I.16):

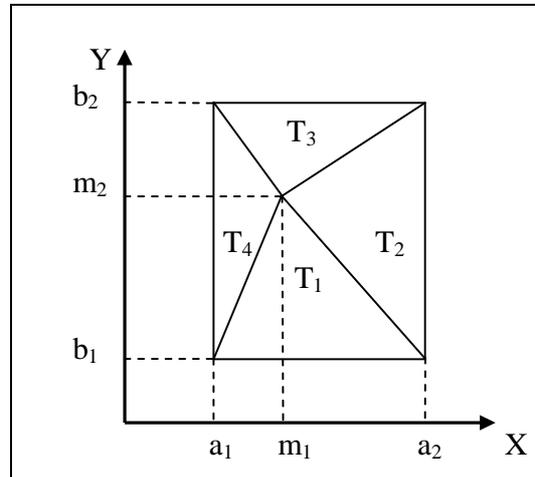


Figura I.16 Recorridos de las variables X e Y

Se observa, figura (I.17), que la representación gráfica de la superficie de probabilidad $z(x,y)$ es una pirámide, de ahí el nombre que se ha dado a la distribución.

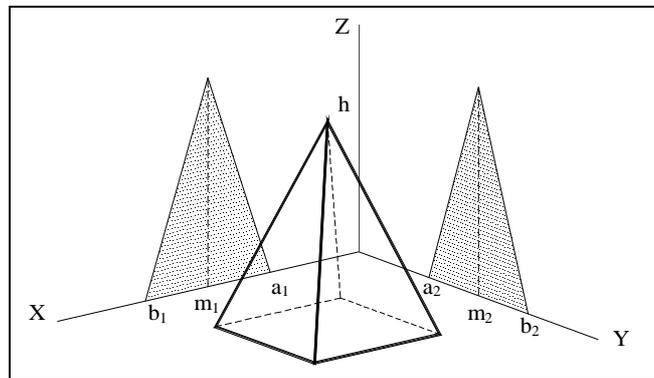


Figura I.17. Representación gráfica de la superficie de probabilidad de la distribución piramidal.

Se puede comprobar fácilmente, véase Herrerías (2002 y 2005) que la función así definida es una verdadera función de densidad, ya que:

$$1) z(x,y) \geq 0 \text{ si } \begin{cases} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < b_2 \end{cases} \quad 2) \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} z(x,y) dx dy = 1$$

En cuanto a la función de distribución habrá que distinguir distintos casos:

Si $(x_0, y_0) \in T_1$ se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(y_0 - a_2)^2}{m_2 - a_2} - \frac{h}{6} \frac{m_1 - a_1}{(m_0 - a_2)^2} (y_0 - a_2)^3 \quad (\text{I.59})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_2$ hay que distinguir los dos casos siguientes:

- Si $y_0 \leq m_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{6} \frac{b_1 - a_1}{(m_2 - a_2)^2} (a_2 - y_0)^3 - \frac{h}{6} \frac{a_2 - m_2}{(b_1 - m_1)^2} (b_1 - x_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{b_1 - a_1}{(m_2 - a_2)} (y_0 - a_2)^2 - \frac{h}{2} \frac{(y_0 - a_2)(b_1 - x_0)^2}{b_1 - m_1} \quad (\text{I.60})$$

- Si $y_0 > m_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = 1 - \left[\frac{h}{6} \frac{a_1 - b_1}{(b_2 - m_2)^2} (b_2 - y_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{b_1 - a_1}{b_2 - m_2} (b_2 - y_0)^2 + \frac{h}{6} \frac{a_2 - m_2}{(b_1 - m_1)^2} (b_1 - x_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{(y_0 - a_2)(b_1 - x_0)^2}{b_1 - m_1} \right] \quad (\text{I.61})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_3$ hay que distinguir los dos casos siguientes:

- Si $x_0 \leq m_1$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{6} \frac{a_2 - b_2}{(m_1 - a_1)^2} (x_0 - a_1)^3 + \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{(m_1 - a_1)} (x_0 - a_1)^2 + \frac{h}{6} \frac{m_1 - a_1}{(b_2 - m_2)} (b_2 - y_0)^3 - \frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{b_2 - m_2} \quad (\text{I.62})$$

- Si $x_0 > m_1$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = 1 - \left[\frac{h}{6} \frac{a_1 - m_1}{(b_2 - m_2)^2} (b_2 - y_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{m_2 - b_2} + \frac{h}{6} \frac{a_2 - b_2}{(b_1 - m_1)^2} (b_1 - x_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{b_1 - m_1} (b_1 - x_0)^2 \right] \quad (\text{I.63})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_4$ se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2} \frac{(y_0 - a_2)(x_0 - a_1)^2}{(m_1 - a_1)} - \frac{h}{6} \frac{m_2 - a_2}{(m_1 - a_1)^2} (x_0 - a_1)^3 \quad (\text{I.64})$$

De (I.58) se deducen las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \begin{cases} h \frac{b_2 - a_2}{m_1 - a_1} (x - a_1) - \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{(m_1 - a_1)^2} (x - a_1)^2 & \text{si } a_1 < x < m_1 \\ h \frac{b_2 - a_2}{b_1 - m_1} (b_1 - x) - \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{(b_1 - m_1)^2} (b_1 - x)^2 & \text{si } m_1 < x < b_1 \end{cases} \quad (\text{I.65})$$

y

$$f_2(y) = \begin{cases} h \frac{b_1 - a_1}{m_2 - a_2} (y - a_2) - \frac{h}{2} \frac{b_1 - a_1}{(m_2 - a_2)^2} (y - a_2)^2 & \text{si } a_2 < y < m_2 \\ h \frac{b_1 - a_1}{b_2 - m_2} (b_2 - y) - \frac{h}{2} \frac{b_1 - a_1}{(b_2 - m_2)^2} (b_2 - y)^2 & \text{si } m_2 < y < b_2 \end{cases} \quad (\text{I.66})$$

donde la constante normalizadora es:

$$h = \frac{3}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \quad (\text{I.67})$$

Cabe destacar que ambas funciones de densidad marginales son funciones cuadráticas por lo que su representación gráfica será la conjunción de dos ramas de parábolas, una de a_i hasta m_i ($i = 1, 2$) y la otra de m_i hasta b_i ($i = 1, 2$).

A partir de (I.65), (I.66) y (I.67) se obtienen las propiedades estocásticas siguientes:

- Vector de medias

$$\vec{\mu} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3a_1 + 2m_1 + 3b_1 \\ 3a_2 + 2m_2 + 3b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.68})$$

- Matriz de varianzas covarianzas

$$\Sigma = \frac{1}{320} \begin{pmatrix} 19(b_1 - a_1)^2 - 12(b_1 - m_1)(m_1 - a_1) & 3(2m_1 - a_1 - b_1)(2m_2 - a_2 - b_2) \\ 3(2m_1 - a_1 - b_1)(2m_2 - a_2 - b_2) & 19(b_2 - a_2)^2 - 12(b_2 - m_2)(m_2 - a_2) \end{pmatrix} \quad (\text{I.69})$$

Obsérvese que la $E(X)$ y $E(Y)$ son medias ponderadas que asignan mayor peso a los extremos (a_i, b_i) que al valor intermedio m_i ($i = 1,2$) al contrario de lo que ocurre en el método PERT.

- Coeficiente de correlación lineal

$$\rho = \frac{3(2m_1 - a_1 - b_1)(2m_2 - a_2 - b_2)}{\sqrt{(19(b_1 - a_1)^2 - 12(b_1 - m_1)(m_1 - a_1))(19(b_2 - a_2)^2 - 12(b_2 - m_2)(m_2 - a_2))}} \quad (\text{I.70})$$

Además $\rho = 0$ si $2m_1 = a_1 + b_1$ ó $2m_2 = a_2 + b_2$ por lo que al menos un par de caras de la pirámide son triángulos isósceles.

Transformando los recorridos de las variables X e Y , $R_X(a_1, b_1)$ y $R_Y(a_2, b_2)$ en recorridos estandarizados $R_{X^*}(0,1)$ y $R_{Y^*}(0,1)$ se simplifican las expresiones de las propiedades estocásticas de la distribución piramidal.

Teniendo en cuenta que $m_i^* = \frac{m_i - a_i}{b_i - a_i}$ ($i = 1,2$) se tiene:

- Vector de medias

$$\vec{\mu} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2m_1^* + 3 \\ 2m_2^* + 3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.71})$$

- Matriz de varianzas covarianzas

$$\Sigma = \frac{1}{320} \begin{pmatrix} 12m_1^{*2} - 12m_1^* + 19 & 3(1 - 2m_1^*)(1 - 2m_2^*) \\ 3(1 - 2m_1^*)(1 - 2m_2^*) & 12m_2^{*2} - 12m_2^* + 19 \end{pmatrix} \quad (\text{I.72})$$

- Coeficiente de correlación lineal

$$\rho = \frac{3(1 - 2m_1^*)(1 - 2m_2^*)}{\sqrt{(12m_1^{*2} - 12m_1^* + 19)(12m_2^{*2} - 12m_2^* + 19)}} \quad (\text{I.73})$$

Nótese que el mayor valor del coeficiente de correlación lineal es 0,1578947, lo cual indica que la distribución piramidal será un modelo probabilístico adecuado cuando entre las variables X e Y exista una correlación lineal moderadamente débil.

I.2.3. Distribución troncopiramidal

Se dice que una variable $z(x,y)$ sigue una distribución troncopiramidal si su función de densidad viene dada por:

$$z(x, y) = \begin{cases} \frac{y - a_2}{y_1 - a_2} h & \text{si } (x, y) \in T_1 \\ \frac{b_1 - x}{b_1 - x_2} h & \text{si } (x, y) \in T_2 \\ \frac{b_2 - y}{b_2 - y_2} h & \text{si } (x, y) \in T_3 \\ \frac{x - a_1}{x_1 - a_1} h & \text{si } (x, y) \in T_4 \\ h & \text{si } (x, y) \in T_5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{I.74})$$

Donde la constante normalizadora h tiene la siguiente expresión:

$$h = \frac{6}{(b_2 - a_2 + y_2 - y_1)(b_1 - a_1 + x_2 - x_1) + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \quad (I.75)$$

Se denotan por T_i ($i=1,2,3,4,5$) las diferentes regiones que conforman los recorridos de (X, Y) tal y como se aprecia en la figura (I.18).

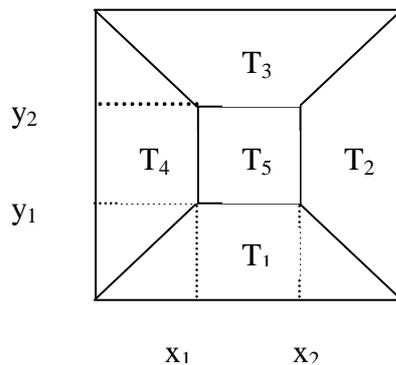


Figura I.18 Recorridos de las variables X e Y

Así pues, la distribución troncopiramidal surge de considerar en los ejes cartesianos sendas distribuciones trapezoidales que generan en el espacio un tronco de pirámide. Las caras del tronco de pirámide pueden determinarse por planos determinados por tres puntos: dos en la base y el tercero correspondiente a uno de los dos vértices del tronco de pirámide, donde la cota de estos puntos o altura del tronco de pirámide servirá de constante normalizadora para la distribución bivariente. Su representación gráfica es:

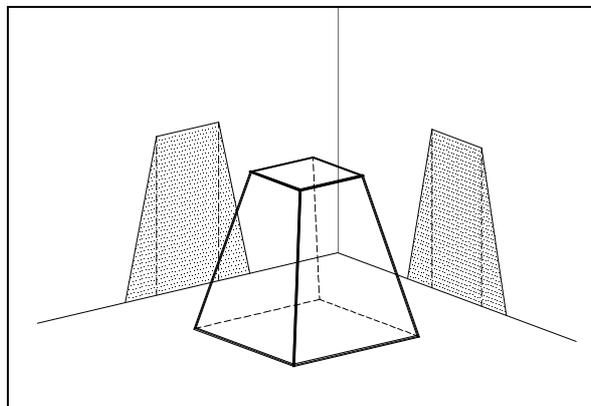


Figura I.19. Función de densidad de la distribución troncopiramidal.

En cuanto a la función de distribución habrá que distinguir distintos casos:

Si $(x_0, y_0) \in T_1$ se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h(x_0 - a_1)(y_0 - a_2)^2}{2(y_1 - a_2)} - \frac{h(x_1 - a_1)}{6(y_1 - a_2)^2}(y_0 - a_2)^3 \quad (\text{I.76})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_2$ hay que distinguir los tres casos siguientes:

- Si $y_0 \leq y_1$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h(b_1 - a_1)}{2(y_1 - a_2)}(y_0 - a_2)^2 - \frac{h(b_1 - a_1 - (x_2 - x_1))}{6(y_1 - a_2)^2}(y_0 - a_2)^3 + \frac{h(y_1 - a_2)}{6(b_1 - x_2)^2}(b_1 - x_0)^3 - \frac{h(y_0 - a_2)(b_1 - x_0)^2}{2(b_1 - x_2)} \quad (\text{I.77})$$

- Si $y_1 < y_0 < y_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h(b_1 - x_1)(y_0 - a_2)}{2} - \frac{h(y_0 - a_2)(b_1 - x_0)^2}{2(b_1 - x_2)} + \frac{h(x_2 - a_1)(y_0 - y_1)}{2} + \frac{h(x_1 - a_1)(y_1 - a_2)}{3} - \frac{h(b_1 - x_2)(y_1 - a_2)}{6} + \frac{h(y_1 - a_2)}{6(b_1 - x_2)^2}(b_1 - x_0)^3 \quad (\text{I.78})$$

- Si $y_0 > y_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = 1 - \left[\frac{h(b_1 - a_1)}{2(b_2 - y_2)}(b_2 - y_0)^2 - \frac{h(b_1 - a_1 - (x_2 - x_1))}{6(b_2 - y_2)^2}(b_2 - y_0)^3 - \frac{h(y_1 - a_2)}{6(b_1 - x_2)^2}(b_1 - x_0)^3 + \frac{h(y_0 - a_2)(b_1 - x_0)}{2(b_1 - x_2)} \right] \quad (\text{I.79})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_3$ hay que distinguir los tres casos siguientes:

- Si $x_0 \leq x_1$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{x_1 - a_1} (x_0 - a_1)^2 - \frac{h}{6} \frac{b_2 - a_2 - (y_2 - y_1)}{(x_1 - a_1)^2} (x_0 - a_1)^3 + \frac{h}{6} \frac{x_1 - a_1}{(b_2 - y_2)^2} (b_2 - y_0)^3 - \frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{b_2 - y_2} \quad (\text{I.80})$$

- Si $x_1 < x_0 < x_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2} (x_0 - a_1)(b_2 - y_1) - \frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{b_2 - y_2} + \frac{h}{2} (x_0 - x_1)(y_2 - a_2) + \frac{h}{3} (x_1 - a_1)(y_1 - a_2) - \frac{h}{6} (x_1 - a_1)(b_2 - y_2) + \frac{h}{6} \frac{x_1 - a_1}{(b_2 - y_2)^2} (b_2 - y_0)^3 \quad (\text{I.81})$$

- Si $x_0 > x_2$, se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = 1 - \left[\frac{h}{2} \frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{b_2 - y_2} - \frac{h}{6} \frac{b_2 - a_2 - (y_2 - y_1)}{(b_1 - x_2)^2} (b_1 - x_0)^3 - \frac{h}{6} \frac{x_1 - a_1}{(b_2 - y_2)^2} (b_2 - y_0)^3 + \frac{h}{2} \frac{b_2 - a_2}{b_1 - x_2} (b_1 - x_0)^2 \right] \quad (\text{I.82})$$

Si $(x_0, y_0) \in T_4$ se tiene que:

$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2} \frac{(y_0 - a_2)(x_0 - a_1)^2}{(x_1 - a_1)} - \frac{h}{6} \frac{y_1 - a_2}{(x_1 - a_1)^2} (x_0 - a_1)^3 \quad (\text{I.83})$$

Capítulo II

Construcción, características estocásticas y aplicaciones de la distribución biparabólica en el PERT y el método de las dos funciones de distribución

II.0. INTRODUCCIÓN

Entre las distribuciones unimodales de tipo geométrico que se emplean en el tratamiento del riesgo y la incertidumbre como alternativa a la distribución beta destacan la distribución rectangular, la distribución triangular, la distribución trapezoidal CPR, (Callejón, Pérez. y Ramos 1998), y recientemente algunas familias de la distribución *two-sided power* (van Dorp y Kotz 2002.a). Todas estas distribuciones están definidas en un dominio acotado, se pueden determinar a partir de las tres estimaciones aportadas por el experto (a , m y b) y su función de densidad $f(x)$ no es derivable en la moda, por lo que $f'(x)$ puede presentar un salto o discontinuidad en la moda. Se puede entender que el hecho de que la densidad marginal sea discontinua añade incertidumbre al proceso de determinación de la distribución subyacente al fenómeno objeto de estudio.

Este capítulo se dedica a la presentación de la distribución biparabólica cuyo primer antecedente es la distribución parabólica, presentada en el primer capítulo. La primera referencia a esta distribución se encuentra en Harold (1939 y 1961) y se obtiene como suma de tres variables aleatorias uniformes, aunque finalmente resulta ser simplemente una combinación de parábolas y a ello debe su nombre. Se comprueba que la distribución biparabólica es la generalización de la distribución parabólica de la misma manera que la distribución *two-sided power*, van Dorp y Kotz (2002.a), es la generalización de la distribución triangular.

Por otra parte, la distribución bipolarabólica resulta ser una distribución definida en un dominio acotado, determinada a partir de los tres valores clásicos y con función de densidad derivable en el punto correspondiente a la moda. Este hecho tiene una sencilla interpretación económica que consiste en que el crecimiento marginal de la función de densidad a la derecha de la moda es igual que el crecimiento marginal a la izquierda. Es decir: $f'_+(m) = f'_-(m)$ y por tanto existirá derivada en el punto m por lo que se puede afirmar que la densidad marginal es continua. Esta característica la diferencia de las distribuciones que vienen siendo aplicadas en ambiente de incertidumbre tanto en el contexto de la metodología PERT como en el método de las dos funciones de distribución.

Tras detallar el proceso de construcción de la distribución bipolarabólica se calculan sus principales características estocásticas para posteriormente completar el análisis con la obtención de la distribución bipolarabólica a partir del sistema generador de van Dorp y Kotz (2003.b).

Se demuestra, por otra parte, que la distribución bipolarabólica es la marginal de la distribución bivalente piramidal, Herrerías (2002). A continuación, se analiza la forma de la distribución a partir de los coeficientes de asimetría y curtosis.

Como parte final, se examinan las posibles aplicaciones prácticas de la distribución y para ello, en primer lugar, se encuadra la distribución bipolarabólica en la metodología PERT procediendo a la comparación de su media y varianza con respecto al resto de distribuciones habitualmente aplicadas en dicha metodología.

Se comprueba que presenta una varianza superior al resto de distribuciones usadas en la comparación y que es, a excepción de la distribución trapezoidal CPR, la más moderada en media. Por lo que se concluye, siguiendo los criterios defendidos por Taha (1981) y desarrollados por Herrerías (1989) que la distribución bipolarabólica es una distribución adecuada para su uso en la metodología PERT en concreto y para el tratamiento del riesgo y la incertidumbre en general.

Por último, la aplicación de la distribución bipolarabólica en el método de las dos funciones de distribución (MDFD) plantea un problema algebraico ya que la función de distribución da lugar a una ecuación cúbica. Tras ser superado se establecen tres posibles alternativas de resolución que quedan recogidas en un cuadro-resumen que facilitara el procedimiento practico.

El capítulo se compone de tres epígrafes, el primero dedicado a la construcción de la distribución bipolarabólica, un segundo en el que se desarrollan las principales características estocásticas de dicha distribución y por último, un tercer epígrafe que analiza las posibles aplicaciones de la distribución bipolarabólica tanto en la metodología PERT como en el método de las dos funciones de distribución.

II.1. CONSTRUCCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA

Se parte de los valores mínimo (a), más probable (m) y máximo (b) aportados por el experto, y se determina la parábola $f_1(x)$ a partir del punto $(a, 0)$ y el vértice (m, h) y la parábola $f_2(x)$ mediante el punto $(b, 0)$ y el vértice (m, h) . Véase figura (II.1).

Se define la función de densidad de la distribución bipolarabólica como:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } a \leq x \leq m \\ f_2(x), & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

La distribución bipolarabólica surge, y de aquí deriva su nombre, de la conjunción de estas dos parábolas que, tal y como se observa en la figura (II.1) comparten el mismo vértice. En la figura (II.2) se presenta, con el resultado en negrita, la función de densidad de la distribución bipolarabólica.

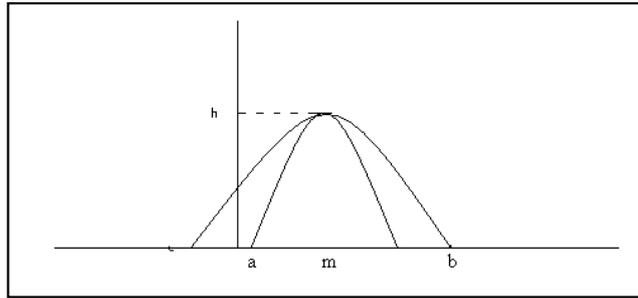


Figura II.1. Parábolas $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

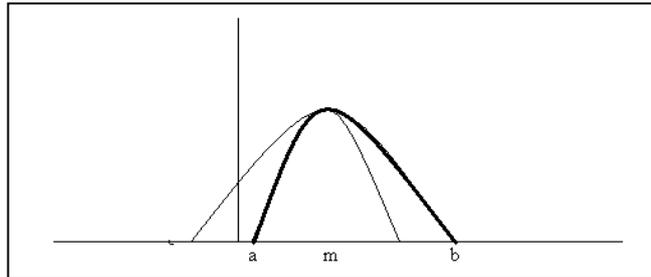


Figura II.2. Construcción de la distribución biparabólica

Se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A(x-a)(x-(2m-a)) \\ f_2(x) &= B(x-b)(x-(2m-b)) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Para determinar los parámetros A y B se le impone a la función $f(x)$ la condición propia de una función de densidad, $\int_a^b f(x)dx = 1$, y la condición de continuidad,

$$f_1(m) = f_2(m).$$

Se demuestra que:

$$A = -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)} ; B = -\frac{3}{2} \frac{1}{(b-m)^2(b-a)} \quad (\text{II.3})$$

Y finalmente se obtiene la función de densidad de la distribución biparabólica:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-a)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-a)a), & \text{si } a \leq x \leq m \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(m-b)^2(b-a)} (x^2 - 2mx + (2m-b)b), & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Obsérvese que $f(x) \geq 0$ ya que: $(x^2 - a^2) + 2m(a - x) = (x + a - 2m)(x - a) < 0$. Lo mismo ocurre con la otra rama.

Se observa que si $a = -5$, $b = 5$ y $m = 0$, entonces se trata de la distribución parabólica, presentada en el primer capítulo, cuando $x \in [-5, 5]$. Esta distribución es un caso particular de la distribución bipolarabólica cuando la moda esta centrada en el origen y es simétrica, es decir: $x \in [-a, a]$. Su función de densidad, para el caso general, es la recogida en la expresión (I.49).

A partir de aquí se obtiene la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2(x-3m+2a)}{(m-a)^2(b-a)}, & \text{si } a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(x-b)^2(x-3m+2b)}{(m-b)^2(b-a)}, & \text{si } m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Se comprueba que:

$$F(m) = \frac{m-a}{b-a} = M \quad (\text{II.6})$$

Es decir, el valor de la función de distribución en la moda (m) es precisamente la moda estandarizada (M). Esta es una propiedad que cumple, entre otras, la distribución *two-sided power* de van Dorp y Kotz (2002.b).

Por otra parte, se observa que la derivada por la derecha y por la izquierda de $f(x)$ en la moda m , coincide con los puntos máximos de dos parábolas y por tanto ambos son iguales a cero. Es decir: $f'_+(m) = f'_-(m) = 0$. Por lo que se concluye que la densidad

marginal es continua. Esta característica la diferencia de otras distribuciones aplicadas en ambiente de incertidumbre, como por ejemplo la triangular, la trapezoidal, la TSP, cuya función de densidad marginal $f'(x)$ presenta un salto o discontinuidad en la moda, añadiendo así mayor incertidumbre al proceso.

Podría pensarse que la distribución bipolarabólica es solo un caso particular de la distribución *two-sided power*, van Dorp y Kotz (2002.a) cuando n toma el valor $n = 3$. Sin embargo, se comprueba que la distribución STSP(3, M) no es derivable en la moda y por tanto, dado que ésta es la principal característica diferenciadora de la distribución bipolarabólica, se concluye que no se trata de la misma distribución. Es decir, partiendo de la expresión (I.30) y sustituyendo $n = 3$:

$$f(t|M,3) = \begin{cases} 3\left(\frac{t}{M}\right)^2, & 0 < t < M \\ 3\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^2, & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Se comprueba que la derivada por la derecha es distinta a la derivada por la izquierda y por tanto esta función de densidad no será derivable en la moda. Esta comprobación se puede realizar a simple vista observando la figura (I.5) donde se recoge la función de densidad de la distribución STSP(3;0,5).

Por otro lado, si se realiza el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ en las expresiones (II.4) y (II.5) se obtiene la expresión de la función de densidad y de la función de distribución para la distribución bipolarabólica estandarizada:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M^2} (t^2 - 2Mt), & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M)^2} (t^2 - 2Mt + 2M - 1), & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

$$F(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{t^2(t-3M)}{M^2}, & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2(t-3M+2)}{(M-1)^2}, & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Se comprueba que al estandarizar la expresión (I.65) o la (I.66), correspondientes a las funciones de densidad marginales de la distribución piramidal, la constante normalizadora (I.67) queda reducida a 3 y se obtiene la expresión (II.8), con lo que se puede afirmar que la distribución bipolarabólica resulta ser la distribución marginal de la distribución bivalente piramidal, (Herrerías 2002).

La distribución piramidal, expuesta en el primer capítulo, satisface el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del sistema de Pearson, y su condición de integrabilidad, correspondiente a las distribuciones bivariantes continuas o sistema de van Uven, (van Uven 1947 y 1948). Por otra parte, la distribución bipolarabólica como marginal de la distribución piramidal verifica la ecuación diferencial del sistema de Pearson correspondiente a las distribuciones univariantes continuas

II.2. CARACTERÍSTICAS ESTOCÁSTICAS PRINCIPALES

Una vez obtenidas la función de distribución y la función de densidad de la distribución bipolarabólica, se presentan sus momentos centrales y su varianza en el caso general:

$$E(x) = \frac{2m + 3b + 3a}{8} \quad (\text{II.10})$$

$$E(x^2) = a^2 + 2a \frac{2(m-a) + 3(b-a)}{8} + 2 \frac{(m-a)^2 + 3(m-a)(b-a) + 4(b-a)^2}{20} \quad (\text{II.11})$$

$$\text{Var}(x) = \frac{12(m-a)^2 - 12(m-a)(b-a) + 19(b-a)^2}{320} \quad (\text{II.12})$$

En cuanto a sus momentos centrales y su varianza en el caso estandarizado:

$$E(t) = \frac{2M + 3}{8} \quad (\text{II.13})$$

$$E(t^2) = \frac{2M^2 + 3M + 4}{20} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{Var}(t) = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320} \quad (\text{II.15})$$

Resulta evidente que estas expresiones coinciden con las expresiones correspondientes para la distribución marginal estandarizada de la distribución piramidal presentada en el primer capítulo.

Por otro lado, el momento de orden k en el caso de la distribución bipolarabólica estandarizada será:

$$E(t^k) = 3 \frac{\sum_{j=0}^k (2+j)M^{k-j}}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (\text{II.16})$$

Se demuestra que el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis tienen las siguientes expresiones respectivamente:

$$\beta_1 = \frac{\left(\frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280} \right)^2}{\left(\frac{12M^2 - 12M + 19}{320} \right)^3} \quad (\text{II.17})$$

$$\beta_2 = \frac{7}{5} \left[\frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{(12M^2 - 12M + 19)^2} \right] \quad (\text{II.18})$$

II.2.1. Obtención a partir del sistema generador de van Dorp

El uso del sistema generador introducido por van Dorp y Kotz (2003.b) permitirá simplificar los cálculos y realizar una presentación más elegante de la distribución bipolarabólica.

Según van Dorp y Kotz (2003.b), si $p(\cdot/\psi)$ es una apropiada función de densidad definida en $[0,1]$ con parámetros, o vector de parámetros, ψ , entonces, se puede construir la siguiente función de densidad unimodal en M :

$$g\left\{t/M, p\left(\cdot/\psi\right)\right\} = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right) & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}/\psi\right) & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

donde $p\left(\cdot/\psi\right)$ es la función generadora de $g\left\{t/M, p\left(\cdot/\psi\right)\right\}$.

Para que g sea la función de densidad bipolarabólica presentada anteriormente, $p\left(\cdot/\psi\right)$ deberá cumplir ciertas condiciones:

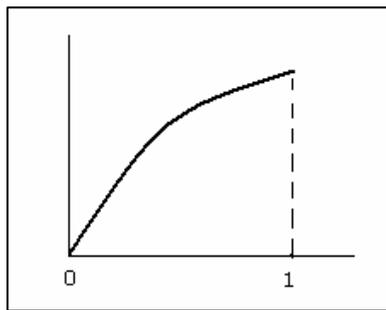


Figura II.3. Representación de $p(\cdot/\psi)$. $p(y)=ay^2+by+c$

En primer lugar, deberá ser una parábola, $p(y/ a, b, c)=ay^2+by +c$, por lo que observando la figura (II.3) se obtienen las siguientes conclusiones:

- La función pasa por el punto (0,0) por tanto se puede demostrar que $c=0$
- La función debe tener un máximo en el punto $y=1$
- $y'(1) = 2ay + b \Big|_{(1)} = 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$ luego debe ser $p(y/a) = a(y^2 - 2y)$.

Además, para que sea una función de densidad en [0,1] debe cumplirse

$$\text{que: } \int_0^1 a(y^2 - 2y)dy = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}. \text{ Por lo tanto:}$$

$$p\left(\frac{y}{\psi}\right) = -\frac{3}{2}(y^2 - 2y) \quad (\text{II.20})$$

Finalmente, se puede afirmar que $p(y)$ se encuentra totalmente determinada y que no depende de ningún parámetro.

Partiendo de las condiciones anteriores se obtiene la siguiente expresión para la función de densidad:

$$g(t/M, p(y)) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{M^2} - 2\frac{t}{M} \right), & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \left[\left(\frac{1-t}{1-M} \right)^2 - 2\left(\frac{1-t}{1-M} \right) \right], & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Y operando se obtiene la función de densidad bipolarabólica recogida en (II.8):

$$g(t/M, p(y)) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M^2} (t^2 - 2Mt), & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M)^2} (t^2 - 2Mt + (2M-1)), & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Si se tiene en cuenta que la función de distribución $G(t/M, p(y))$ de la distribución biparabólica g se puede obtener a partir de su generadora p y siguiendo a van Dorp y Kotz (2003.b):

$$G(t/M, P(y)) = \begin{cases} MP\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-M)P\left(\frac{1-t}{1-M}/\psi\right), & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

donde $P(\cdot/\psi)$ es la función de distribución asociada a la densidad de la función generadora $p(\cdot/\psi)$, pudiendo comprobarse en general que:

$$G(M/M, \psi) = MP(1/\psi) = M \quad (\text{II.24})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $p(y) = -\frac{3}{2}\left(\frac{y^3}{3} - y^2\right)$ la función de distribución de la biparabólica vendrá dada por:

$$G(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2}M\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{M}\right)^3 - \left(\frac{t}{M}\right)^2\right], & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-M)\left(-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^3 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^2\right], & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Desarrollando esta fórmula se logra la expresión (II.9), y si deshacemos el cambio $t = \frac{x-a}{b-a}$ se obtienen las fórmulas (II.4) y (II.5). Una característica muy importante de las funciones de densidad pertenecientes al sistema generador de van Dorp es que $F(m)=M$, siendo F la función de distribución y M la moda estandarizada.

Se demuestra, van Dorp y Kotz (2003.b), la siguiente relación entre los momentos de la generadora $p(y)$ y la función de densidad $g(t)$:

$$E(t^k/M, p) = M^{k+1}E(x^k/\psi) + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[x^i/\psi] \quad (\text{II.26})$$

Haciendo uso de la expresión (II.26), se calculan los valores de los momentos de la distribución bipolarabólica con respecto al origen:

$$E(t/M, p) = (2M - 1)E(y/\psi) + (1 - M) \quad (\text{II.27})$$

$$\text{Var}(t/M, p) = [M^3 + (1 - M)^3] \text{Var}(y/\psi) + M(1 - M)\{E(y/\psi) - 1\}^2 \quad (\text{II.28})$$

Teniendo en cuenta que $p\left(\frac{y}{\psi}\right) = -\frac{3}{2}(y^2 - 2y)$, se consiguen unas expresiones más sencillas que coinciden con las expresiones (II.13) y (II.15):

$$E(t/M, p) = \frac{2M + 3}{8} \quad (\text{II.29})$$

$$\text{Var}(t/M, p) = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320} \quad (\text{II.30})$$

II.2.2. Calculo de los momentos centrales

Utilizando la expresión (II.26), que liga los momentos de la función de distribución bipolarabólica estandarizada con los de su distribución generadora, se obtiene:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{2M + 3}{8} = 3 \frac{2M + 3}{24} \\ E(t^2) &= \frac{2M^2 + 3M + 4}{20} = 3 \frac{2M^2 + 3M + 4}{60} \\ E(t^3) &= \frac{2M^3 + 3M^2 + 4M + 5}{40} = 3 \frac{2M^3 + 3M^2 + 4M + 5}{120} \\ E(t^4) &= \frac{2M^4 + 3M^3 + 4M^2 + 5M + 6}{70} = 3 \frac{2M^4 + 3M^3 + 4M^2 + 5M + 6}{210} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

En general,

$$E(t^k) = 3 \frac{2M^k + 3M^{k-1} + 4M^{k-2} + \dots + (2+k)}{(k+1)(k+2)(k+3)} = 3 \frac{\sum_{j=0}^k (2+j)M^{k-j}}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (\text{II.32})$$

Operando:

$$\mu_2 = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320} \quad (\text{II.33})$$

$$\mu_3 = \frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280} \quad (\text{II.34})$$

$$\mu_4 = \frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{51480} \quad (\text{II.35})$$

II.2.3. Análisis de la forma de la distribución biparabólica

La principal ventaja de la distribución biparabólica, destacada anteriormente, es que presenta un crecimiento continuo de la densidad en todo su dominio, pero además, al igual que ocurre con la familia de distribución *two-sided power*, (van Dorp y Kotz 2002.b), será una distribución asimétrica y presentará un mayor apuntamiento que la normal, siendo ambas características muy deseables en el ámbito de la valoración y de las aplicaciones financieras.

Con el objetivo de realizar una presentación global de la distribución biparabólica y obtener conclusiones acerca de sus ventajas con respecto a otras distribuciones, se presenta, a continuación, un estudio sobre la curtosis y la asimetría de dicha distribución.

Partiendo de las expresiones (II.33) y (II.34) se define el coeficiente de asimetría como:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{\left(\frac{8M^3 - 12M^2 - 10M + 7}{1280}\right)^2}{\left(\frac{12M^2 - 12M + 19}{320}\right)^3} \quad (\text{II.36})$$

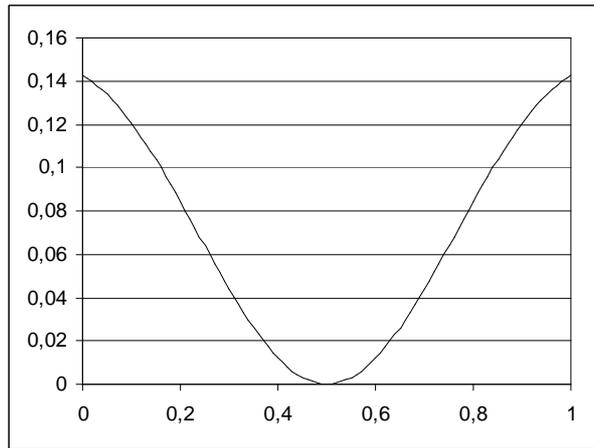


Figura II.4. Representación del coeficiente de asimetría de la distribución bipolarabólica

En la figura (II.4) se representa el coeficiente de asimetría y se aprecia que toma valores siempre inferiores a 0,143 por lo que se puede afirmar que se tratará de una distribución con poca asimetría ya que el coeficiente toma valores muy cercanos a cero. Se observa, además, que a medida que la moda tiende al punto medio, en el caso de la distribución estandarizada $M = \frac{1}{2}$, el coeficiente de asimetría tiende a 0.

En cuanto al coeficiente de curtosis se obtiene a partir de las expresiones (II.33) y (II.35):

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{7}{5} \left[\frac{624M^4 - 1248M^3 + 2088M^2 - 1464M + 1095}{(12M^2 - 12M + 19)^2} \right] \quad (\text{II.37})$$

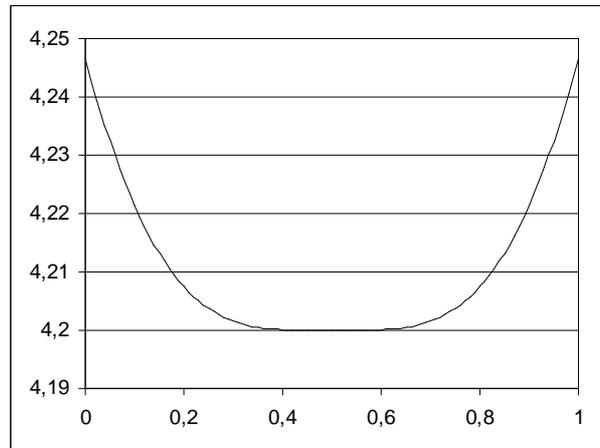


Figura II.5. Representación del coeficiente de curtosis de la distribución biparabólica

En la figura (II.5) se representa el coeficiente de curtosis de la distribución biparabólica estandarizada, y se aprecia que siempre toma valores iguales o superiores a 4,2. Dado que el coeficiente de curtosis propio de una distribución normal es 3 la función de distribución biparabólica presenta mayor apuntamiento que la normal.

II.3. APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA

II.3.1 La distribución biparabólica en la metodología PERT

Siendo x la variable aleatoria cuyo comportamiento ha de ser estimado a través de los valores (a , m y b), y siendo definida la variable estandarizada $t = \frac{x-a}{b-a}$ con valor modal

$M = \frac{m-a}{b-a}$, se recogen en el cuadro (II.1) los valores esperados y la varianza para las

distintas distribuciones usadas habitualmente en la metodología PERT.

En la figura (II.6) se observa que la distribución biparabólica es casi tan moderada en media como la trapezoidal CPR y más moderada que el resto. Por otro lado, la varianza de la distribución biparabólica es siempre superior a la varianza del resto de distribuciones analizadas, tal y como se aprecia en la figura (II.7).

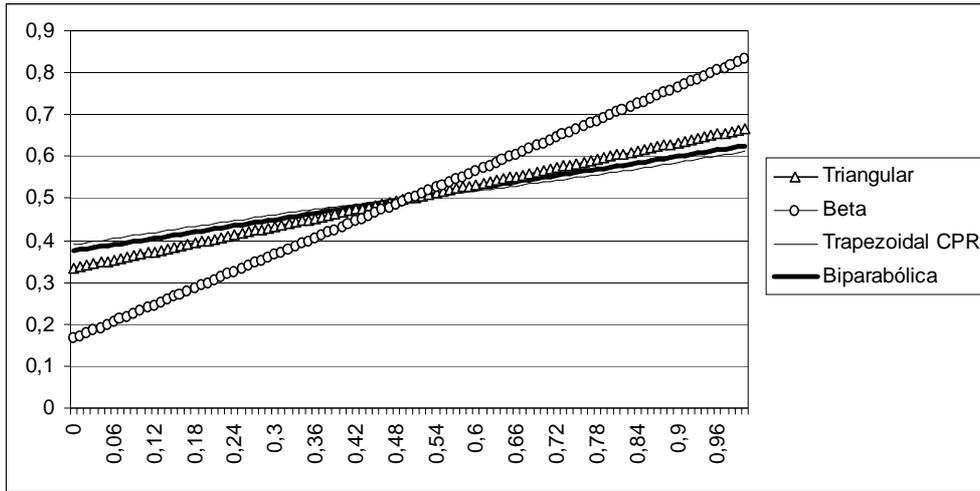


Figura II.6. Comparación del valor de la media

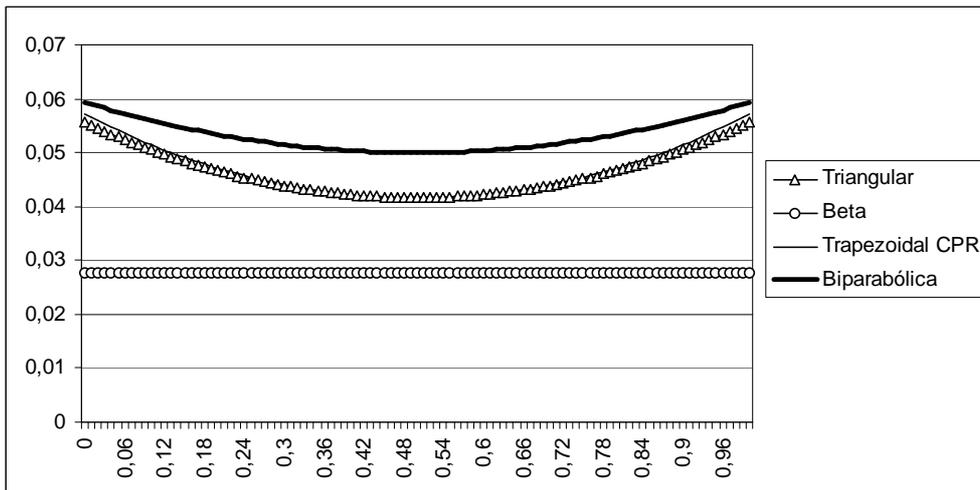


Figura II.7. Comparación del valor de la varianza

	Variable aleatoria x	Variable estandarizada t
Triangular	$E(x) = \frac{a+m+b}{3}$ $\text{var}(x) = \frac{(b-a)^2 - (m-a)(b-m)}{18}$	$E(t) = \frac{M+1}{3}$ $\text{var}(t) = \frac{1-M(1-M)}{18}$
Beta Clásica	$E(x) = \frac{a+4m+b}{6}; \text{var}(x) = \frac{(b-a)^2}{36}$	$E(t) = \frac{1+4M}{6}; \text{var}(t) = \frac{1}{36}$
Biparabólica	$E(x) = \frac{2m+3a+3b}{8}$ $\text{var}(x) = \frac{12(m-a)^2 - 12(m-a)(b-a) + 19(b-a)^2}{320}$	$E(t) = \frac{2M+3}{8}$ $\text{var}(t) = \frac{12M^2 - 12M + 19}{320}$
Trapezoidal CPR (variable estandarizada t)	$E(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[M + \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - M} \right], & M < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \left[M + \frac{3}{2} - \frac{M}{\frac{1}{2} + M} \right], & M > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\text{var}(t) = \begin{cases} \frac{1}{18} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} M + (1-M)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2} - M\right)(1-M)}{\left(\frac{3}{2} - M\right)^2} \right], & M < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{18} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (1-M) + M^2 - \frac{\left(M - \frac{1}{2}\right)M}{\left(M + \frac{1}{2}\right)^2} \right], & M > \frac{1}{2} \end{cases}$	
Cuadro II.1. Valores esperados y varianzas de las distribuciones más usadas en la metodología PERT		

Por último, en la figura (II.8) se representan las densidades de las distribuciones anteriores y, como conclusión fundamental, se destaca que la ordenada en la moda es menor para la distribución biparabólica que para la distribución triangular y la distribución trapezoidal CPR, cuyas expresiones se recogen en el cuadro (II.2). Se puede comprobar que la altura modal de la biparabólica es exactamente la media aritmética de las alturas modales de las distribuciones uniforme y triangular.

Triangular	$h_T = \frac{2}{b-a}$
Uniforme	$h_U = \frac{1}{b-a}$
Biparabólica	$h_{Bp} = \frac{3}{b-a}$
Trapezoidal CPR	$h_{CPR} = \begin{cases} \frac{2}{b-a + \frac{1}{2} - m} & \text{si } m < \frac{a+b}{2} \\ \frac{2}{b-a + m - \frac{1}{2}} & \text{si } m > \frac{a+b}{2} \end{cases}$

Cuadro II.2. Alturas modales

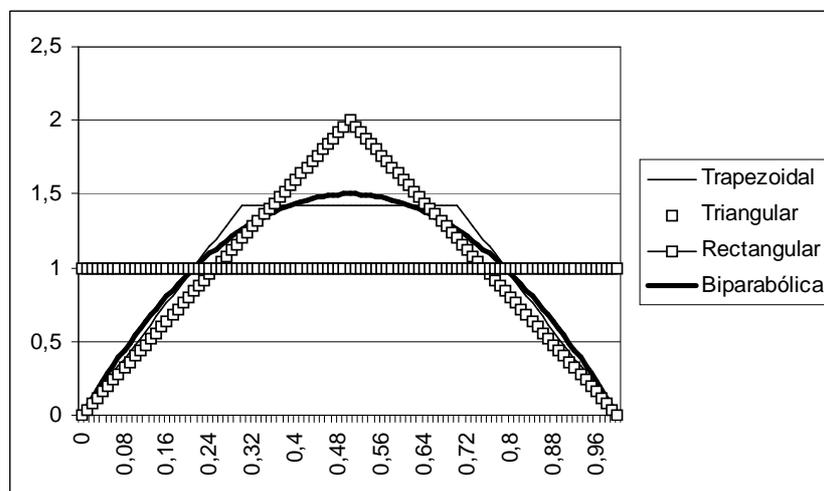


Figura II.8. Comparación de densidades y alturas modales

En conclusión, si se aplica el criterio de máxima varianza en el método PERT defendido por Taha (1981) y desarrollado por Herrerías (1989), la distribución bipolarabólica sería la más conveniente para ser usada en este ámbito, ya que tiene una media casi tan moderada como la trapezoidal CPR, que presenta la media más moderada de las distribuciones conocidas hasta ahora, pero una varianza mucho mayor que las demás.

II.3.2. La distribución bipolarabólica en el MDFD

En la distribución bipolarabólica las funciones de distribución vienen dadas por ecuaciones cúbicas, por lo que si se desea estudiar la aplicación de dicha distribución en el MDFD previamente se debe resolver un problema meramente algebraico. Si el activo está representado por la función $B_1(a_1, m_1, b_1)$ y el índice viene dado por la función $B_2(a_2, m_2, b_2)$; al estandarizar ambas variables se obtienen las distribuciones $B_1^S(0, M_1, 1)$ y $B_2^S(0, M_2, 1)$, cuyas funciones de distribución son respectivamente $G_1^S(t)$ y $G_2^S(t)$ y vienen dadas por la siguiente expresión:

$$G_i(t_i) = \begin{cases} -\frac{3}{2}M_i \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t_i}{M_i} \right)^3 - \left(\frac{t_i}{M_i} \right)^2 \right] & 0 \leq t \leq M_i \\ 1 - (1 - M_i) \left[-\frac{3}{2} \right] \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1-t_i}{1-M_i} \right)^3 - \left(\frac{1-t_i}{1-M_i} \right)^2 \right] & M_i \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

$(i = 1, 2)$

Dado un valor concreto del índice t_2^0 se trata de encontrar el valor del activo t_1^0 que cumple la siguiente condición:

$$G_1(t_1^0) = G_2(t_2^0) \Rightarrow t_1^0 = G_1^{-1}(G_2(t_2^0)) \quad (\text{II.39})$$

Y desestandarizando:

$$X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1) \quad (\text{II.40})$$

Para continuar con el análisis se distinguen dos casos en función de que $M_2 < M_1$ o $M_1 < M_2$, y dentro de cada caso concreto se diferencian tres posibles alternativas. Todas estas posibilidades son desarrolladas a continuación:

Proposición 1: Cuando $M_2 < M_1 \Rightarrow G_2(t_2^0) > G_1(t_1^0) \forall t \in (0,1)$. Véase la figura (II.9):

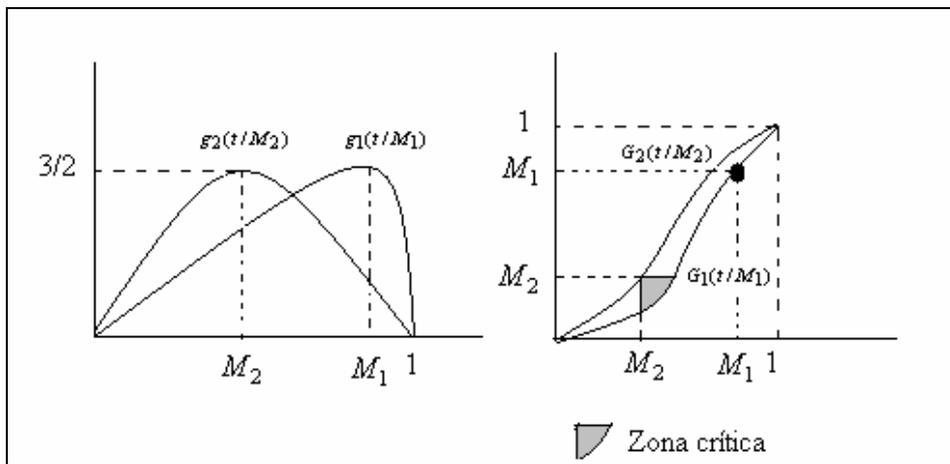


Figura II.9.

Proposición 2: Teniendo en cuenta que $M_2 < M_1$ se distinguen tres posibilidades:

- Si $0 < t < M_2 \Rightarrow G_2(t) < G_2(M_2) = M_2 < M_1$
- Si $M_1 < t < 1 \Rightarrow G_2(t) > G_1(M_1) = M_1 > M_2$
- Si $M_2 < t < M_1 \Rightarrow G_2(t) \underset{>}{<} M_1$ (véase la zona crítica de la gráfica)

Por lo que se establecen tres casos:

- Caso 1.1.

Dado $t_2^0 \in (0, M_2)$ se deduce que $G_2(t_2^0) < M_1$ y aplicando la igualdad de la expresión (II.39):

$$G_1(t_1^0) = -\frac{3}{2}M_1 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^2 \right] = -\frac{3}{2}M_2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t_2}{M_2} \right)^3 - \left(\frac{t_2}{M_2} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0) \quad (\text{II.41})$$

Operando:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{t_1^0}{M_1} \right)^3 - \left(\frac{t_1^0}{M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1} \quad (\text{II.42})$$

A continuación se denomina:

$$k = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1}; z = \frac{t_1^0}{M_1} \quad (\text{II.43})$$

y como consecuencia se obtiene la ecuación cúbica:

$$z^3 - 3z^2 - 3k = 0 \quad (\text{II.44})$$

Una vez resuelta dicha ecuación cúbica, se calcula t_1^0 a partir de los valores $(a, m \text{ y } b)$ y se procede a la desestandarización obteniéndose el valor de $X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$.

- Caso 1.2.

Dado $t_2^0 \in (M_1, 1)$ se deduce que $G_2(t_2^0) > M_1$ y, de manera análoga al caso anterior se plantea la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} G_1(t_1^0) &= 1 - (1 - M_1) \left(-\frac{3}{2} \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^3 - \left(\frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^2 \right] = \\ &= 1 - (1 - M_2) \left(-\frac{3}{2} \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 - t_2}{1 - M_2} \right)^3 - \left(\frac{1 - t_2}{1 - M_2} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

operando:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1-t_1}{1-M_1} \right) - \left(\frac{1-t_1}{1-M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{1-G_2(t_2^0)}{(1-M_1)} \quad (\text{II.46})$$

En la expresión anterior se sustituye por los valores de z y k :

$$z = \frac{1-t_1}{1-M_1}; k = -\frac{2}{3} \frac{1-G_2(t_2^0)}{(1-M_1)} \quad (\text{II.47})$$

y se obtiene, al igual que en el caso anterior, la siguiente ecuación cúbica:

$$\frac{1}{3} z^3 - z^2 = 0 \quad (\text{II.48})$$

Al resolver esta ecuación se obtiene un valor para z_0 y, a partir de este valor un valor para t_1^0 y $X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$.

▪ Caso 1.3.

Dado $t_2^0 \in (M_2, M_1)$, puede ocurrir que $G_2(t_2^0)$ sea menor o mayor que M_1 . En el caso en que $G_2(t_2^0) < M_1$ se realiza un desarrollo similar al del caso 1.1 y, cuando $G_2(t_2^0) > M_1$ se opera como en el caso 1.2.

Proposición 3: Cuando $M_1 < M_2 \Rightarrow G_1(t_1^0) > G_2(t_2^0) \forall t \in (0,1)$. Véase la figura (II.10):

Proposición 4: Teniendo en cuenta que $M_1 < M_2$ se distinguen tres posibles casos:

- Si $0 < t < M_1 \Rightarrow G_2(t) < G_1(t) < G_1(M_1) = M_1 < M_2$
- Si $M_2 < t < 1 \Rightarrow G_2(t) > G_2(M_2) = M_2 > M_1$
- Si $M_1 < t < M_2 \Rightarrow G_2(t) \underset{<}{>} M_1$ véase la zona crítica de la gráfica (II.10).

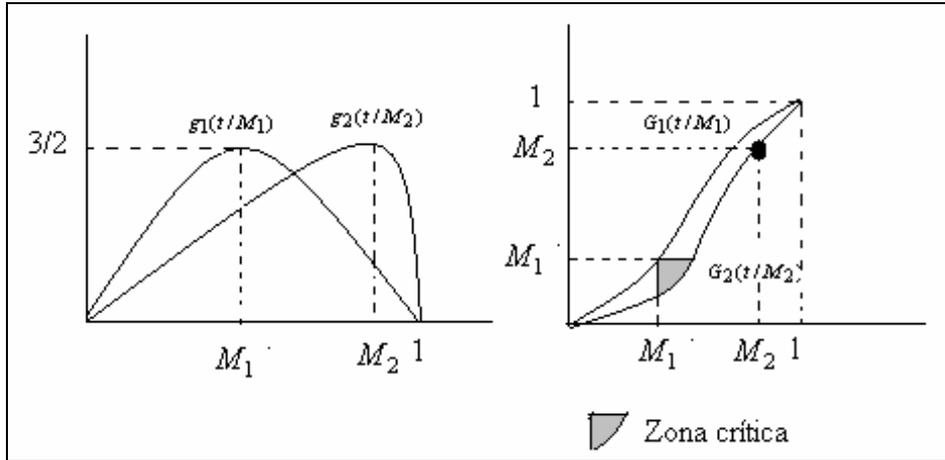


Figura II.10.

Se establecen tres casos:

- Caso 2.1:

Dado $t_2^0 \in (0, M_1)$, se deduce que $G_2(t_2^0) < M_1$ y aplicando la igualdad de la expresión (II.39):

$$-\frac{3}{2} M_1 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0) \quad (\text{II.49})$$

Operando:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^3 - \left(\frac{t_1}{M_1} \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1} \quad (\text{II.50})$$

y llamando:

$$z = \left(\frac{t_1}{M_1} \right); k = -\frac{2}{3} \frac{G_2(t_2^0)}{M_1} \quad (\text{II.51})$$

Se obtiene la ecuación cúbica:

$$z^3 - 3z - 3k = 0 \quad (\text{II.52})$$

Esta ecuación permite obtener un valor para z_0 , y a partir de este valor obtener un valor para $t_1^0 = z_0 M_1$ y $X_1^0 = a_1 + z_0 M_1 (b_1 - a_1)$.

- Caso 2.2:

Dado $t_2^0 \in (M_2, 1)$ se deduce que $G_2(t_2^0) > M_1$ y aplicando la igualdad de la expresión (II.39):

$$1 - (1 - M_1) \left(-\frac{3}{2} \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^3 - \left(\frac{1 - t_1}{1 - M_1} \right)^2 \right] = G_2(t_2^0) \quad (\text{II.53})$$

Similar al caso 1.2.

- Caso 2.3:

Dado $t_2^0 \in (M_1, M_2)$ puede ocurrir que $G_2(t_2^0)$ sea menor o mayor que M_1 . En el caso en que $G_2(t_2^0) < M_1$ operamos como en el caso 2.1, y cuando $G_2(t_2^0) > M_1$ operamos como en el caso 2.2.

Una vez expuestos todos los posibles casos con sus correspondientes planteamientos se presenta en el cuadro (II.3) una síntesis de los resultados obtenidos:

$M_1 < M_2$	$0 < t < M_1$	$M_1 < t < M_2$	$M_2 < t < 1$
$M_2 < M_1$	$0 < t < M_2$	$M_2 < t < M_1$	$M_1 < t < 1$
Valor de k	$k = -\frac{2 G_2(t_2^0)}{3 M_1}$	$G_2(t_2^0) < M_1 \Rightarrow CASO1$ $G_2(t_2^0) > M_1 \Rightarrow CASO2$	$k = -\frac{2(1 - G_2(t_2^0))}{3(1 - M_1)}$
Valor de z	$z = \frac{t_1^0}{M_1}$		$z = \frac{1 - t_1}{1 - M_1}$
Cúbica	$z^3 - 3z^2 - 3k = 0$		$\frac{1}{3}z^3 - z^2 = 0$
Valor estándar	$t_1^0 = z_0 M_1$		$t_1^0 = 1 - z_0(1 - M_1)$
Valor real	$X_1^0 = a_1 + t_1^0(b_1 - a_1)$		$X_1^0 = a_1 + [1 - z_0(1 - M_1)](b_1 - a_1)$

Cuadro II.3. Cuadro-Resumen de posibles casos en la aplicación práctica de la distribución bipolarabólica al método de las dos funciones de distribución.

II.4. CONCLUSIONES

En el presente capítulo se ha presentado la distribución bipolarabólica cuyo primer antecedente es la distribución parabólica, presentada en el primer capítulo. A continuación se enumeran las conclusiones principales que se desprenden del análisis de la distribución bipolarabólica como generalización de la distribución parabólica:

1. Se ha construido la distribución bipolarabólica que se caracteriza por ser una distribución definida en un dominio acotado y determinada a partir de los tres valores clásicos. Además, y como característica diferenciadora del resto de distribuciones aplicadas en la metodología PERT, su función de densidad es derivable en el punto correspondiente a la moda.
2. Se han hallado sus principales características estocásticas y se ha analizado la forma de la distribución a partir de los coeficientes de asimetría y curtosis.
3. Se ha obtenido la distribución bipolarabólica a partir del sistema generador de van Dorp y Kotz (2003.b).
4. Se demuestra que la distribución bipolarabólica es la marginal de la distribución bivalente piramidal, (Herrerías 2002).

5. Desde un punto de vista más pragmático se han examinado las posibles aplicaciones de la distribución en la metodología PERT y en el método de las dos funciones de distribución.
6. Siguiendo los criterios defendidos por Taha (1981) y desarrollados por Herrerías (1989) se concluye que la distribución bipolarabólica es una distribución adecuada para su uso en la metodología PERT y para el tratamiento del riesgo y la incertidumbre.
7. La aplicación de la distribución bipolarabólica en el MDFD plantea un problema algebraico que tras ser superado da lugar a tres posibles alternativas de resolución.

Capítulo III

La distribución bipolarabólica generalizada de una rama y de dos ramas: una nueva herramienta

III.0. INTRODUCCIÓN

En los capítulos previos se ha realizado una revisión de las distribuciones usadas en el ámbito del PERT y en el método de las dos funciones de distribución. Así mismo, se ha presentado la distribución bipolarabólica destacando su gran aplicabilidad en ambos campos.

En el presente capítulo se generaliza la distribución bipolarabólica, como ya hicieran antes van Dorp y Kotz (2002.a) y (2003.a) con la distribución triangular y trapezoidal respectivamente. Así pues, el capítulo está dividido en dos partes claramente diferenciadas dedicadas respectivamente a la generalización de una rama y de dos ramas de la distribución bipolarabólica.

En primer lugar, se presenta el procedimiento de generalización, proponiendo una nueva función generadora como alternativa a la función generadora usada por van Dorp y Kotz (2003.b). Se realiza un análisis comparativo entre ambas funciones generadoras para continuar el proceso de generalización con aquella que aporta un mayor rango al coeficiente de curtosis pensando en sus posibles aplicaciones financieras para ajustar distribuciones muestrales de rendimientos de acciones.

La distribución resultante de dicha generalización queda denominada como distribución bipolarabólica generalizada en una rama, y se nota como BPG_1 . A continuación, se presentan sus características estocásticas principales, resaltando su coeficiente de curtosis y su coeficiente de asimetría que serán objeto de un análisis profundo mediante el ratio de los momentos, (Kotz y Johnson 1985). Posteriormente, se realiza la estimación por momentos distinguiendo entre las estimaciones con dos y cuatro parámetros poblacionales. Para cada caso se realiza una aplicación práctica obteniendo, en ambos, resultados satisfactorios que en el caso de la estimación con dos parámetros poblacionales son comparados con los obtenidos mediante la distribución *standard two-sided power* (STSP). De manera análoga, se dedica un epígrafe a la estimación mediante el método de máxima verosimilitud.

La distribución bipolarabólica es una distribución tetraparamétrica lo que introduce cierta complejidad a la hora de estimar dicha distribución a partir de los tres valores clásicos (a , m y b) aportados por el experto. Existen dos alternativas que se pueden adoptar con el objeto de superar esta circunstancia: imponer restricciones a la familia de distribución (por ejemplo, estimación moderada, con varianza máxima o la restricción a alguna de las subfamilias) o solicitar más información al experto. Esta última posibilidad se conoce como proceso de elicitación. Siguiendo a Kotz y van Dorp (2004) en el libro titulado *Beyond Beta* se desarrolla el procedimiento de elicitación para BPG_1 en un epígrafe del mismo nombre que culmina con una aplicación práctica para las distribuciones beta, STSP y BPG_1 . Por último, en cuanto a la distribución BPG_1 se refiere, se analiza su entropía y se compara con la entropía de la distribución STSP.

En referencia a la generalización en dos ramas, se dedica un primer epígrafe a la presentación de la herramienta. Al trabajar con la posibilidad de aplicar diferente distribución a cada rama se realiza un análisis sobre las distintas combinaciones, obteniendo la generalización en dos ramas para los casos: BP-BP, BP-STSP, STSP-BP y STSP-BP. Para todas estas mixturas se obtienen sus características estocásticas

principales, recogidas en el anexo matemático A, y se presenta el procedimiento de elicitación. Como colofón se realiza una aplicación práctica del proceso de elicitación para las distintas combinaciones y una aplicación al proceso de valoración, donde se comparan los resultados a partir del MDFD en dos ramas para las distintas combinaciones nombradas anteriormente con los resultados obtenidos mediante el método sintético de valoración y el ajuste por mínimos cuadrados.

III.1. DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA GENERALIZADA EN UNA RAMA (BPG₁)

Con el objeto de aportar flexibilidad y generalidad a la distribución triangular, van Dorp y Kotz (2003.b) presentan un sistema generador que permite obtener la distribución *two-sided power* (TSP). Tal y como se comentó con anterioridad, la distribución triangular, con gran aplicación en problemas asociados con el análisis del riesgo y la incertidumbre, es un caso particular de la distribución TSP.

El sistema generador de van Dorp y Kotz permite obtener la distribución STSP a partir de una función de densidad definida en el intervalo (0,1). La idea fundamental de dicho sistema generador es que dado una función de densidad $p(y/\psi)$ en (0,1), con parámetro, o vector de parámetros, ψ se puede generar una función de densidad acampanada y con moda en M , para la familia de distribución, según la siguiente expresión:

$$g\{t/M, p(y/\psi)\} = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 < t < M \\ p\left(\frac{1-t}{1-M}/\psi\right), & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Así pues, la función de densidad:

$$p(y) = 2y, \quad 0 < y < 1 \quad (\text{III.2})$$

es considerada la elección lineal más simple y genera la distribución triangular.

Otras funciones de densidad aplicadas son:

$$p(y/n) = ny^{n-1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n > 0 \quad (\text{III.3})$$

$$p(y/\lambda) = \frac{e^{-\lambda y}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad 0 \leq y \leq 1, \lambda > 0 \quad (\text{III.4})$$

que generan respectivamente la distribución *standard two-sided power*, extendiendo la distribución triangular y la distribución exponencial truncada respectivamente.

Se conoce que la expresión para la función de densidad de la generadora estandarizada para la distribución biparabólica es:

$$p(y) = -\frac{3}{2}(y^2 - 2y), \quad (\text{III.5})$$

Partiendo de la expresión (III.5), y con el objeto de proceder a su generalización, se introduce un nuevo parámetro n tomando como función generadora algunas de las siguientes opciones:

$$p(y) = a(y^{2n} - 2y^n) = ay^n(y^n - 2), \quad (\text{III.6})$$

$$p(y) = a(y^2 - 2y)^n \quad (\text{III.7})$$

Se observa que la expresión (III.6) puede recordar a la distribución Topp y Leone (1955) que fue presentada en el primer capítulo.⁴

Para hallar el valor de a para cada una de las expresiones anteriores se deberá tener en cuenta la condición básica de toda función de densidad:

⁴ Se agradecen los comentarios y recomendaciones del profesor Kotz y, en concreto, su sugerencia de indagar en la distribución Topp-Leone que derivo en nuevas ideas sobre la distribución biparabólica.

$$\int_0^1 a(y^{2n} - 2y^n) dy = 1 \quad (\text{III.8})$$

se deduce para la función generadora (III.6):

$$a = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1}. \quad (\text{III.9})$$

y para la función generadora (III.7.):

$$a = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}{(-1)^n \sqrt{\pi}\Gamma(1+n)} \quad (\text{III.10})$$

En el siguiente apartado se comprueba que usando la primera alternativa, es decir la función de densidad generadora (III.6), se obtiene una distribución con mayor rango de curtosis y por ello se desarrolla el resto del capítulo usando dicha expresión.

III.1.1. Selección de la función generadora.

Para proceder a la generalización se necesita en primer lugar seleccionar la función generadora, para ello hay que tener presente que uno de los objetivos es obtener una distribución cuyo coeficiente de curtosis tenga el mayor recorrido posible. En las figuras (III.1) y (III.2) se representan el coeficiente de curtosis de la BPG₁ usando la función generadora (III.6) y (III.7) respectivamente.

Ambas generalizaciones son *a priori* igual de válidas, sin embargo se demuestra, tal y como se refleja en las figuras (III.1) y (III.2), que usando (III.7) el rango del coeficiente de curtosis es menor que si se aplica (III.6), ya que en el primero el coeficiente varía entre 0 y 3,5 y en el segundo entre 0 y 6.

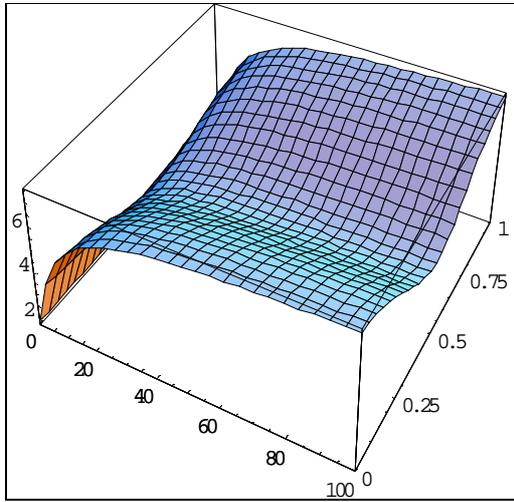


Figura III.1. Representación del coeficiente de curtosis de la distribución BPG_1 usando la función generadora (III.6).

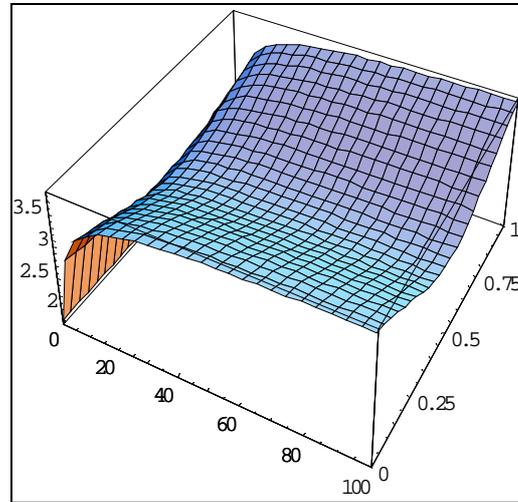


Figura III.2. Representación del coeficiente de curtosis de la distribución BPG_1 usando la función generadora (III.7).

Se desea que la distribución BPG_1 posea un coeficiente de curtosis con un rango lo mayor posible, en vista a realizar aplicaciones financieras que así lo requieren, por ello a partir de ahora el capítulo se centrará en la generalización de la BPG_1 a partir de la función generadora (III.6).

En las figuras (III.3.a) hasta (III.3.e) se muestran representaciones de la función generadora de densidad para diferentes valores de n . Se observa que a medida que el parámetro n aumenta la función de densidad deja de ser una función convexa para convertirse en una función cóncava, concentrándose la masa de probabilidad cerca del 0,5, con valores de n pequeños la masa de probabilidad se reparte de forma parecida a la distribución uniforme, figura (III.3.a), mientras que en la figura (III.3.e) se observa como la masa de probabilidad se ha concentrado en torno al 0,5, fenómeno que se va dando a medida que aumenta n .

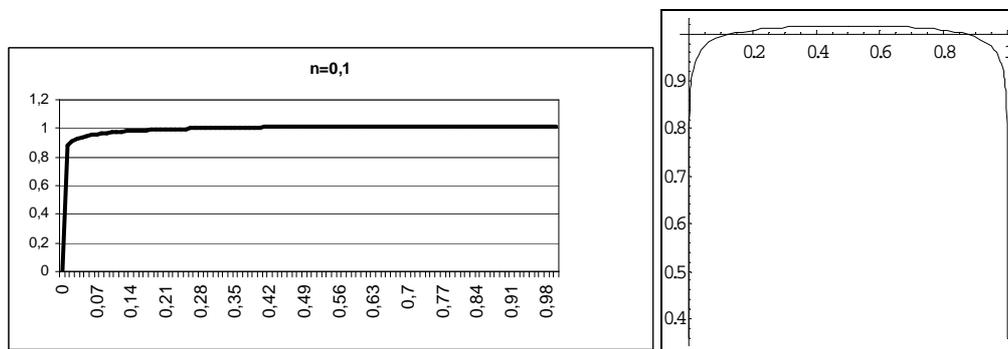


Figura III.3.a. Representación de la función generadora para $n = 0,1$ y su función de densidad correspondiente.

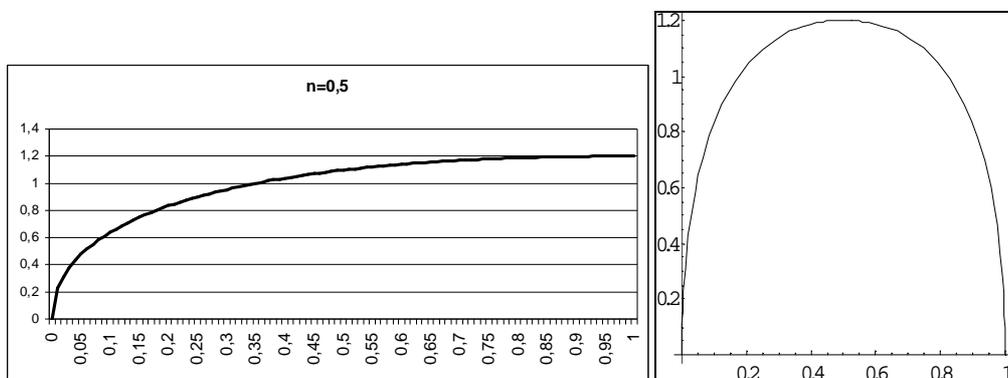


Figura III.3.b. Representación de la función generadora para $n = 0,5$ y su función de densidad correspondiente.

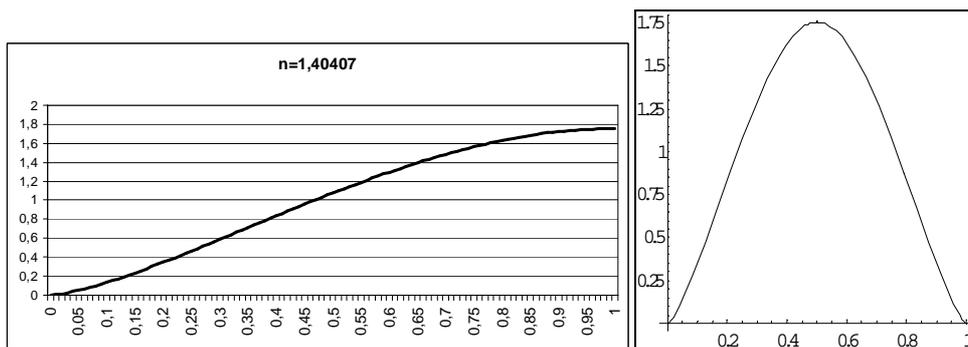


Figura III.3.c. Representación de la función generadora para $n = 1,40407$ y su función de densidad correspondiente.

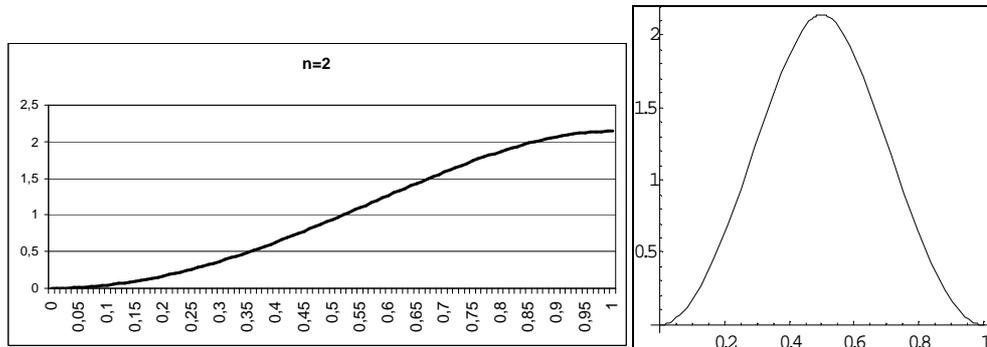


Figura III.3.d. Representación de la función generadora para $n = 2$ y su función de densidad correspondiente.

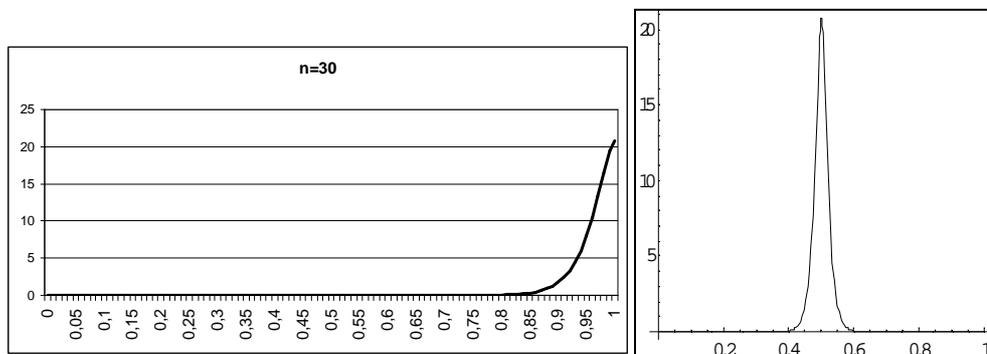


Figura III.3.e. Representación de la función generadora para $n = 30$ y su función de densidad correspondiente.

Cuando $n = 1$ en la expresión (III.9) se obtiene $a = -\frac{3}{2}$, es decir $p(y) = -\frac{3}{2}(y^2 - 2y)$ que resulta ser la distribución generadora de la distribución biparabólica, recogida en la expresión (III.5).

La función generadora de densidad que se utiliza para el desarrollo es:

$$p(y) = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} (y^{2n} - 2y^n) \quad (\text{III.11})$$

En el apartado siguiente se obtiene la distribución biparabólica generalizada a través de la función generadora (III.11).

III.1.2. Aplicación del sistema de van Dorp y Kotz para la generalización de la distribución bipolarbólica de una rama.

En lo sucesivo se notará como y a la variable generadora definida en el intervalo $[0,1]$, en el caso de la bipolarbólica la expresión (III.11), como t a la distribución generada por el sistema generador de van Dorp y Kotz (III.1) que dará lugar a la distribución bipolarbólica estandarizada (SBPG₁) y, por último, se notará con x a la variable desestandarizada definida en el intervalo (a, b) y que dará lugar a la distribución BPG₁.

Una vez aclarada la notación, se obtiene la función de densidad de la distribución bipolarbólica estandarizada de una rama (SBPG₁) para la variable t definida en el intervalo $[0,1]$ a partir de la función generadora (III.11):

$$g(t/M, p(\cdot/n)) = \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} \begin{cases} \left(\left(\frac{t}{M} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{t}{M} \right)^n \right), & 0 \leq t \leq M \\ \left(\left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n \right), & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Y su correspondiente función de distribución:

$$G(t/M, p(\cdot/n)) = \begin{cases} \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} M \left(\left(\frac{t}{M} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{t}{M} \right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right), & 0 < t < M \\ 1 + \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} (M-1) \left(\left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right), & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Cuando $n = 1$ estas expresiones coinciden con las expresiones (II.8), (II.9), (II.22) y (II.25).

Si se realiza el cambio $t = \frac{x-a}{b-a}$ se obtiene la función de densidad y de distribución de la distribución bипarabólica generalizada de una rama (BPG_1) para la variable x definida en el intervalo $[a, b]$:

$$g(x/p(\cdot/n)) = \frac{(2n+1)(n+1)}{(-3n-1)(b-a)} \begin{cases} \left(\left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^n \right), & a \leq x \leq m \\ \left(\left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^n \right), & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (III.15)$$

$$G(x/p(\cdot/n)) = \begin{cases} \frac{(2n+1)(n+1)}{-3n-1} \frac{m-a}{(b-a)} \left(\left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n+1} \frac{1}{n+1} \right), & a \leq x \leq m \\ 1 + \frac{(2n+1)(n+1)}{(-3n-1)} \left(\frac{m-a}{b-a} - 1 \right) \left(\left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} - 2 \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right), & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (III.16)$$

Cuando $n=1$ estas expresiones coinciden con las expresiones (II.4) y (II.5) respectivamente. Véase la figura (III.4) que representa la función de densidad de la distribución SBPG₁ para $n=1$ obteniéndose así la función de densidad de la distribución bипarabólica presentada en el segundo capítulo.

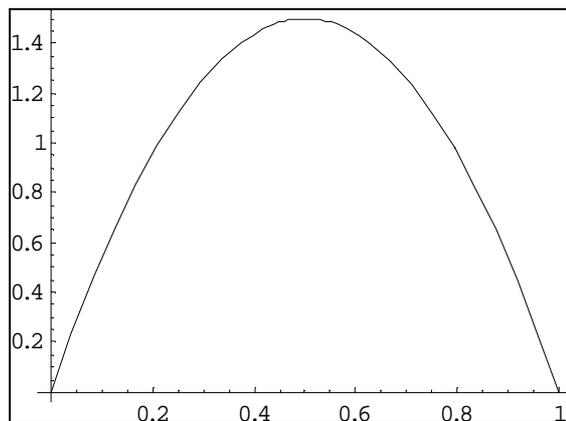


Figura III.4. Función densidad de la BPG₁ para $0 < t < 1$, $n=1$ y $M=0,5$

Con el objeto de obtener los momentos de las variables aleatorias t y x se calculan previamente los momentos de la variable generadora y . A partir de la expresión (III.11) se puede demostrar que el valor esperado de la variable y definida en el intervalo $[0,1]$ es:

$$E(y) = \frac{(2n+1)(3n+2)}{2(n+2)(3n+1)} \quad (\text{III.17})$$

y en general el valor esperado de y^k :

$$E[y^k] = \frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \left[\frac{3n+k+1}{(2n+k+1)(n+k+1)} \right] \quad (\text{III.18})$$

Por otro lado, se cumplirá que la función de distribución en el punto m coincidirá con el valor de la moda estandarizada, M , es decir:

$$P(x < m) = \frac{m-a}{b-a} = M \quad (\text{III.19})$$

o lo que es lo mismo: $P(t < M) = M$, siendo una característica propia de las distribuciones generadas a partir del sistema de van Dorp.

Utilizando la expresión presentada en van Dorp y Kotz (2003.b):

$$E(t/M) = (2M-1)E(y/n) + (1-M), \quad (\text{III.20})$$

$$E(t/M, n) = \frac{M6n^2 + 7n + 2}{6n^2 + 14n + 4} \quad (\text{III.21})$$

Con respecto a la varianza, sabemos que:

$$\text{Var}(t/M) = [M^3 + (1-M)^3] \text{Var}(y/n) + M(1-M)[E(y/n) - 1]^2 \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned} \text{var}(t/M, n) &= \frac{(148n^4 + 244n^3 + 40n^2)M^2}{4(3n+1)^2(n+2)^2(2n+3)(n+3)} + \\ &+ \frac{-(148n^4 + 244n^3 + 40n^2)M + (82n^4 + 247n^3 + 247n^2 + 96n + 12)}{4(3n+1)^2(n+2)^2(2n+3)(n+3)} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Desestandarizando, se comprueba que el valor esperado de x en el intervalo $[a, b]$ es:

$$E(x) = \frac{(7n+2)a + 6n^2m + (7n+2)b}{6n^2 + 14n + 4} \quad (\text{III.24})$$

Se observa que la ponderación de la moda en la expresión (III.24) es:

$$\frac{6n^2}{6n^2 + 14n + 4}. \quad (\text{III.25})$$

Si se considera el caso de la biparabólica, $n = 1$, se observa que los extremos obtienen una ponderación similar entre si y superior a la de la moda:

$$E(x) = \frac{9a + 6m + 9b}{24} = \frac{3a + 2m + 3b}{8} \quad (\text{III.26})$$

Solo en la expresión del valor esperado de la distribución biparabólica generalizada aparece el parámetro n ponderando los extremos, mientras que en el resto de distribuciones dicho parámetro aparece solo ponderando el valor más probable. Ver Cuadro (III.1). Generalmente el parámetro n suele ser mayor que uno y por eso las distribuciones beta generalizada, *two-sided power* y Pearson tienden a ponderar más la moda que los extremos. Sin embargo en la distribución biparabólica se comprueba que para $n = 1$ se ponderan más los extremos.

	MEDIA
BETA GEN.	$\mu = \frac{a + km + b}{k + 2}$
TSP	$\mu = \frac{a + (n - 1)m + b}{n + 1}$
PEARSON	$\mu = \frac{b_2(a + b) + m}{2b_2 + 1}$
BPG ₁	$\mu = \frac{(7n + 2)a + 6n^2m + (7n + 2)b}{6n^2 + 14n + 4}$
Cuadro III.1. Valor esperado de la variable aleatoria x en diferentes distribuciones subyacentes.	

Se puede obtener el valor de n que pondera de igual forma a los extremos y a la moda resolviendo $7n + 2 = 6n^2$. Dicho valor de n es:

$$n = 1,40407148 \quad (\text{III.27})$$

Por comodidad se notará como BPG_1^- a la distribución biparabólica generalizada de una rama con $n = 1,40407148$, es decir aquella que ofrece la misma ponderación a los extremos que a la moda. Para valores superiores de n , la distribución BPG₁ ponderará más la moda que los extremos, pero hasta dicho valor, y en este rango se incluye la biparabólica, la distribución pondera más los extremos que la moda. Esta característica es muy interesante y puede ser de importancia en casos concretos en los que se consideren más relevantes los valores de los extremos frente al de la moda.

Por otra parte, cuando en la distribución *two-sided power* el parámetro n toma el valor 2 se obtiene la distribución triangular cuyo valor esperado pondera de igual forma los tres valores clásicos.

$$E(x) = \frac{a + m + b}{3} \quad (\text{III.28})$$

	VARIANZA
MODELO SIMPLE DE PEARSON.	$\text{var}(t) = \frac{1}{18} + \frac{M(1-M)}{36}$
TRIANGULAR	$\text{var}(t) = \frac{2-2M(1-M)}{36}$
BPG_1^-	$\text{var}(t) = \frac{1329,45M(M-1) + 16336,1209}{32210,2088}$

Cuadro III.2. Expresión de la varianza de la variable aleatoria t para la distribución triangular, el modelo simple de Pearson y la distribución biparabólica.

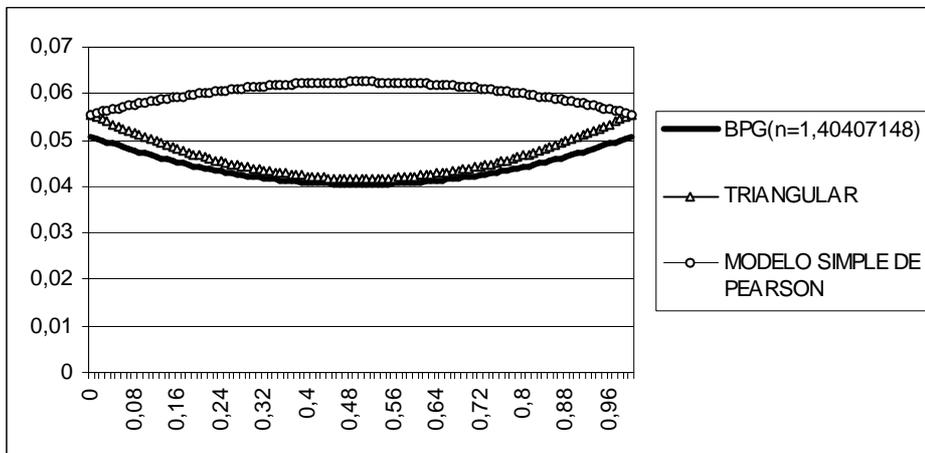


Figura III.5. Comparación de la varianza de la distribución BPG_1^- , la distribución triangular y el modelo simple de Pearson

Resulta interesante comparar la varianza de la distribución triangular y la varianza del modelo simple de Pearson con la de la distribución BPG_1^- , es decir para el caso en el que la distribución biparabólica pondera igual los tres valores clásicos. En el cuadro (III.2) se recogen las correspondientes expresiones.

Se comprueba que el modelo simple de Pearson ofrece siempre valores superiores de la varianza. Por otro lado, la varianza de la distribución triangular será siempre mayor que la de la distribución BPG_1^- , llegando a tener un comportamiento prácticamente similar cuando el valor modal es centrado. Véase figura (III.5).

Con objeto de analizar el comportamiento de la distribución $SBPG_1$ se presentan en la figura (III.6) las funciones de densidad para valores concretos de M y n . Como se observa en los gráficos desde (III.6.a) hasta (III.6.i), la distribución biparabólica generalizada, puede adoptar la forma de la distribución uniforme, a medida que n tiende a 0, o puede ser una distribución degenerada con toda la masa concentrada en un punto (III.6.b) a medida que n tiende a infinito.

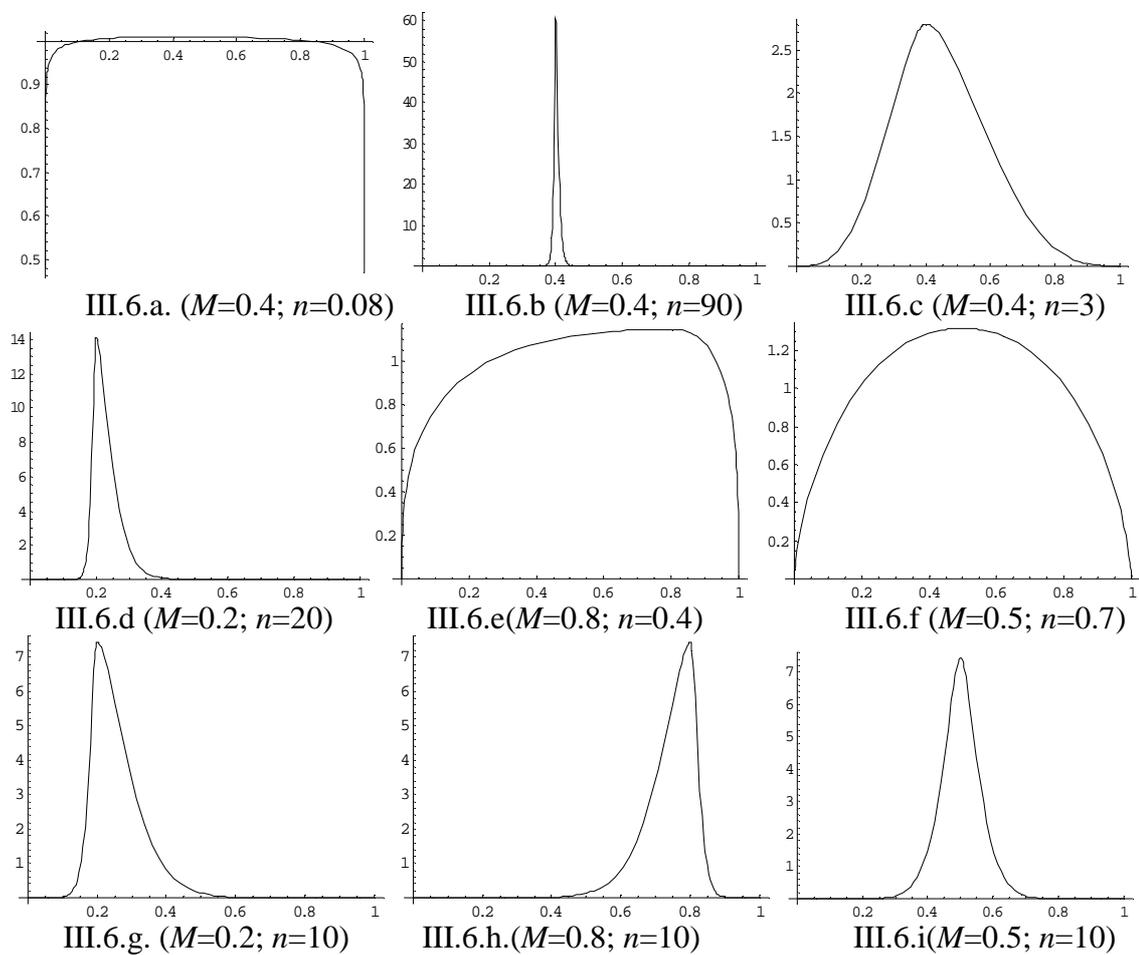


Figura III.6. Representación de la BPG_1 para diferentes valores de M y n .

Para valores de n entre 1 y 10, la distribución adopta formas parecidas a la distribución normal, con la diferencia de que la distribución bipolarabólica generalizada puede ser asimétrica (figuras III.6.c y III.6.d). Para valores de n entre 0 y 1 pero próximos a 0,5, la distribución es parecida a una bipolarabólica muy suavizada (figuras III.6.e y III.6.f). Con $n = 10$, podemos ver como la similitud con la normal es bastante acentuada, figura (III.6.g), y se desdibuja a medida que aumenta la asimetría en las gráficas (III.6.h) y (III.6.i).

A modo de conclusión, destacar que la distribución bipolarabólica se convierte en una distribución muy adecuada para su aplicación en el ámbito del PERT. En el epígrafe (III.1.6) se analizarán en detalle sus propiedades y se comparará con el resto de distribuciones habituales en dicha metodología.

En cualquier caso es evidente que los creadores del PERT quisieron sustituir la distribución normal por la distribución beta básicamente por dos razones: por un lado, porque en la distribución beta, el recorrido de la variable está limitado, no presenta colas infinitas como es el caso de la distribución normal, y por eso es más adecuada para la valoración ya que tanto el tiempo de terminación de una tarea como el flujo de caja son, obviamente, variables acotadas.

Y en segundo lugar, porque la distribución beta puede presentar asimetría, en contra de lo que le ocurre a la distribución normal que siempre es simétrica. Por otro lado, se conoce, Kamburowski (1997) y Herrerías, García y Cruz (2003), que la beta del PERT clásico tiene la misma varianza y curtosis que la distribución normal, Yu Chuen Tao (1980).

Así pues, la intención fue utilizar una distribución acotada y con posibles asimetrías que fuese lo más parecida posible a la distribución normal. La distribución bipolarabólica, como se puede comprobar en las figuras desde (III.6.a) hasta (III.6.i), reúne las dos condiciones mencionadas y su parecido con la normal se manifiesta claramente.

III.1.3. Asimetría y curtosis de la distribución BPG₁

Usando la relación entre los momentos de la generadora $p(y)$ y $g(t)$, van Dorp y Kotz (2003.b) se obtienen los momentos centrados en el origen:

$$E[t^k / M, p] = M^{k+1} E[y^k / \Psi] + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^{i+1} E[y^i / \Psi] \quad (\text{III.29})$$

Una vez conocidos estos se pueden obtener mediante el desarrollo habitual, los momentos centrados respecto a la media. A partir de este procedimiento se obtienen las expresiones para el coeficiente de asimetría β_1 y el de curtosis β_2 . El coeficiente de asimetría tiene la siguiente expresión:

$$\beta_1 = \frac{-[-8nA + 2n^2B - 3n^2C + n^3D + 2n^4E]}{(2+n)(4+n)(1+3n)(9+9n+2n^2)(2+7n+3n^2)^2 \left(\frac{12+96n+n^2F+n^3G+2n^4H}{(9+9n+2n^2)(2+7n+3n^2)^2} \right)^{3/2}} \quad (\text{III.30})$$

Donde A, B, C, D, E, F, G y H son polinomios de M :

$$\begin{aligned} A &= (62 - 51M - 219M^2 + 146M^3) \\ B &= (-52 + 48M + 168M^2) \\ C &= (455 - 356M - 1662M^2 + 1108M^3) \\ D &= (-1397 + 2514M + 840M^2 - 560M^3) \\ E &= (-235 + 681M - 633M^2 + 422M^3) \\ F &= (247 - 40M + 40M^2) \\ G &= (247 - 244M + 244M^2) \\ H &= (41 - 74M + 74M^2) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Y la expresión del coeficiente de curtosis:

$$\beta_2 = (960 + 15216n + 64n^2A + 24n^3B + 4n^4C + n^5D + 4n^6E + n^7F + 72n^8G + 28n^9H) \left[\frac{3(9+9n+2n^2)}{\left[(100+85n+23n^2+2n^3)(12+96n+n^2I+n^3J+2n^4K)^2 \right]} \right] \quad (\text{III.32})$$

Donde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ y K son polinomios de M :

$$\begin{aligned}
 A &= (1553 - 104M + 158M^2 - 108M^3 + 54M^4) \\
 B &= (14597 - 3816M + 5952M^2 - 4272M^3 + 2136M^4) \\
 C &= (183405 - 116840M + 186256M^2 - 138832M^3 + 69416M^4) \\
 D &= (959263 - 1152552M + 1787392M^2 - 1267680M^3 + 633840M^4) \\
 E &= (201619 - 366518M + 497838M^2 - 262640M^3 + 131320M^4) \\
 F &= (431517 - 1067392M + 1377200M^2 - 619616M^3 + 309808M^4) \\
 G &= (1853 - 5881M + 8361M^2 - 4960M^3 + 2480M^4) \\
 H &= (629 - 2404M + 3900M^2 - 2992M^3 + 1496M^4) \\
 I &= (247 - 40M + 40M^2) \\
 J &= (247 - 244M + 244M^2) \\
 K &= (41 - 74M + 74M^2)
 \end{aligned} \tag{III.33}$$

En el gráfico (III.7) se observa que la curtosis máxima de la distribución BPG_1 es aproximadamente 6, por lo que presenta un apuntamiento superior al de la distribución normal, tratándose por tanto de una distribución leptocúrtica. En cuanto a la asimetría, se observa que el coeficiente toma valores máximos cerca de 8 cuando n toma valores mínimos y la moda se aleja del punto medio 0,5.

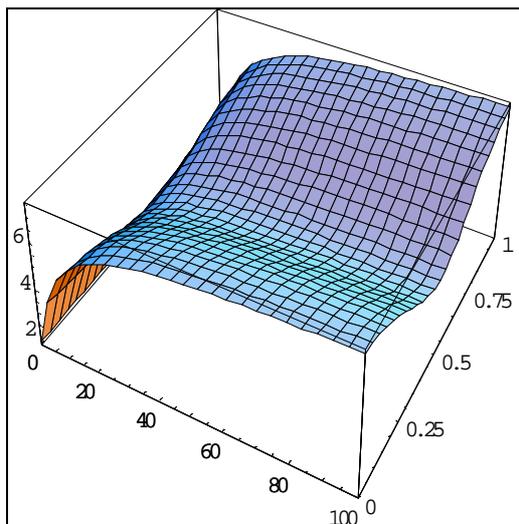


Figura III.7. Representación del coeficiente de curtosis de BPG_1

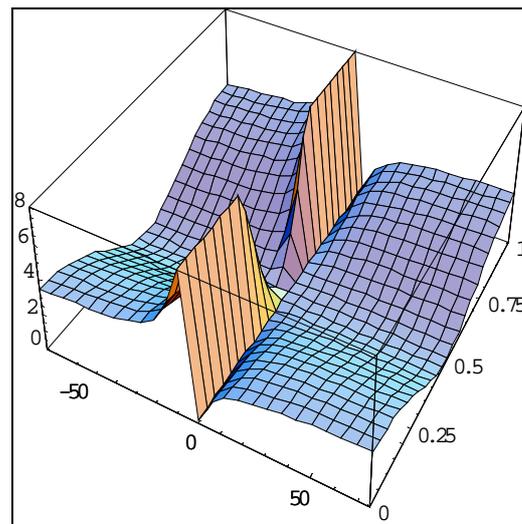


Figura III.8. Representación del coeficiente de asimetría de BPG_1

El gráfico del ratio de los momentos presentado por Elderton y Johnson (1969) ofrece una visión gráfica muy útil acerca de la asimetría y la curtosis de la distribución y permite un análisis en profundidad de los mismos.

La forma clásica del gráfico muestra los valores del coeficiente de asimetría en la abscisa y el coeficiente de curtosis en la ordenada. Sin embargo, Kotz y Johnson (1985) proponen usar la raíz cuadrada del coeficiente de asimetría para que así se retenga el signo del momento de orden 3 que se perdería en otro caso. La figura (III.9) muestra el diagrama de la cobertura del ratio de los momentos para los valores de n entre 0,1 y 25 y los valores de M entre 0 y 1. Este rango es bastante práctico ya que incluye formas unimodales, $0 < M < 1; n > 1$, distribuciones con forma de U, $0 < M < 1; n < 1$, así como la distribución uniforme, $n = 1$.

Esta gráfica muestra el efecto de los parámetros M y n sobre $(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$ para los ejemplos específicos que se exponen mediante líneas gruesas en el gráfico. En este gráfico existe una zona infactible para todas las distribuciones en la que se cumple que: $\beta_2 \geq (\sqrt{\beta_1})^2 + 1$.

La zona horizontalmente rayada representa la cobertura de $(\sqrt{\beta_1}, \beta_2)$ para las distribuciones unimodales STSP, y la zona verticalmente rayada las distribuciones STSP con forma en U. Con la curva negra se representa la cobertura para la familia de distribuciones biparabólica en el rango de valores dado. Se observa que la cobertura de la distribución biparabólica está totalmente contenida en la de la distribución STSP por lo que se puede concluir que esta última tiene una mayor flexibilidad que la distribución biparabólica cuando se modelizan fenómenos unimodales. Esta misma conclusión se obtenía con respecto a las distribuciones beta en Kotz y van Dorp (2004), por lo que se puede afirmar que la distribución STSP es la más flexible de las tres distribuciones en cuanto a los fenómenos unimodales se refiere.

Por otro lado, el área de cobertura asociada a distribuciones con forma en U es similar en tamaño para el caso de la distribución beta y la distribución STSP, lo que implica una flexibilidad similar. Por último, la única distribución miembro de la familia STSP con forma en J, es la que se ha denominado *power*, que se da cuando $M=1$ y $0.1 < n < 1$ y su reflejo, $M=0$. Así pues, se puede afirmar que la distribución beta es la más rica de las tres distribuciones si se restringe a las distribuciones con forma de J.

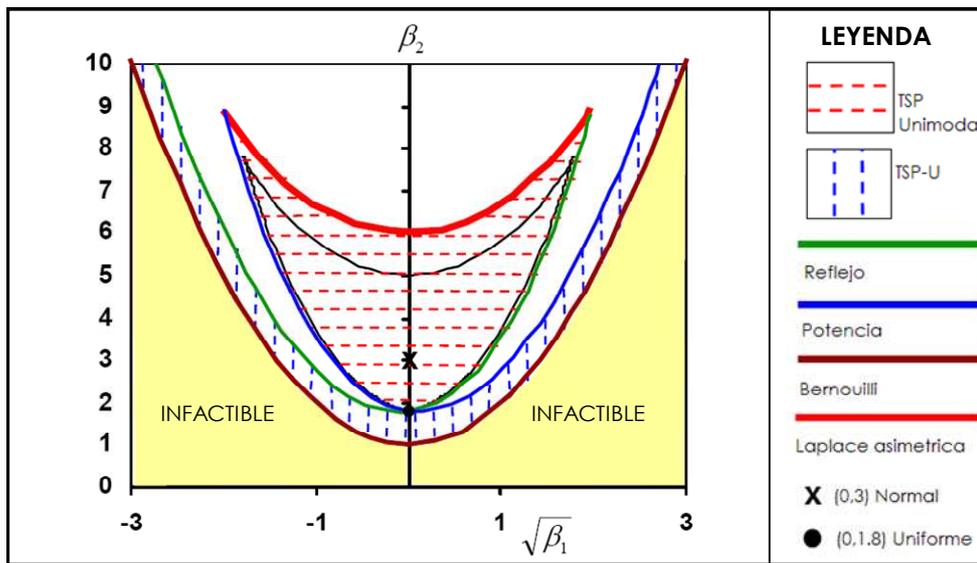


Figura. III.9. Representación del ratio de los momentos

III.1.4. Estimación de la distribución BPG_1

Para realizar la estimación de los parámetros de la distribución BPG_1 se lleva a cabo por un lado el desarrollo del procedimiento de estimación mediante el método de los momentos y por otra parte, el procedimiento para la estimación por el método de máxima verosimilitud. Para el desarrollo del método de los momentos se parte del ejemplo recogido en van Dorp, y Kotz (2002.a). Dicho método se desarrolla para dos y cuatro parámetros poblacionales, realizándose una aplicación práctica obteniendo resultados satisfactorios en ambos casos. Los resultados obtenidos en la estimación con dos parámetros poblacionales son comparados con los obtenidos mediante la distribución *standard two-sided power* (STSP).

De manera análoga, se dedica un epígrafe a la estimación mediante el método de máxima verosimilitud. Por otra parte, al generalizar la distribución bipolarabólica se obtiene una distribución tetraparamétrica lo que introduce cierta complejidad a la hora de estimar dicha distribución a partir de los tres valores clásicos (a , m y b) aportados por el experto.

Con el objeto de superar esta circunstancia se proponen diferentes posibilidades:

- Imposición de restricciones a la familia de distribución desarrollando las subfamilias mesocúrtica, de varianza constante y clásica.
- Imposición del criterio de media moderada y varianza máxima
- Procedimiento de elicitación por el que se solicita más información al experto.

En este epígrafe se desarrollan cada una de las alternativas anteriormente nombradas y se profundiza en el proceso de elicitación donde se lleva a cabo una aplicación práctica para las distribuciones beta, STSP y BPG₁.

III.1.4.1. Estimación de la distribución BPG₁ usando el método de los momentos

Considerando un ejemplo hipotético, recogido en el cuadro (III.3), y que sirvió de base para el trabajo de Johnson y Kotz (1999) y posteriormente para van Dorp y Kotz (2002.a), se pretende realizar la estimación por medio de los momentos.

El ejemplo contiene ocho datos referidos a la duración de una actividad en el contexto del PERT teniendo en cuenta que el valor mínimo es 2 horas y el máximo 12 horas. La tercera columna recoge los valores estandarizados con los que se desarrollaran el ejemplo con objeto de simplificar las fórmulas sin perder generalidad.

ORDEN	VALOR	VALOR ESTANDARIZADO
1	3	0,1
2	4,5	0,25
3	5	0,3
4	6	0,4
5	6,5	0,45
6	8	0,6
7	9,5	0,75
8	10	0,8

Cuadro III.3 Datos de entrada para aplicación práctica

A partir de las expresiones sencillas de la media y la varianza:

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$$

se obtienen los valores $\bar{x} = 0,45625$ y $\hat{\sigma}^2 = 0,0603125$. Igualando estos valores con los momentos de la BPG₁, se despeja el valor de M y de n . Estos cálculos se han llevado a cabo a través del programa Mathematica.

Teniendo en cuenta que M varía dentro del rango $[0,1]$ y que n debe ser siempre positiva, entonces solo existe una solución posible:

$$M = 0,258171 \text{ y } n = 0,719903 \quad (\text{III.34})$$

En la aplicación realizada por van Dorp y Kotz (2002.a) usando la distribución STSP, se obtenían como resultados:

$$M = 0,273 \text{ y } n = 1,478109 \quad (\text{III.35})$$

Utilizando las expresiones (III.12) y (III.13) se pueden representar la función de densidad y la función de distribución de este ejemplo concreto en el que se han estimado los parámetros n y M a partir de la media y varianza muestral. En los siguientes gráficos, (III.10) y (III.11), se comparan la función de densidad y la función de distribución de la TSP y la BPG₁, observándose una gran afinidad entre ellas.

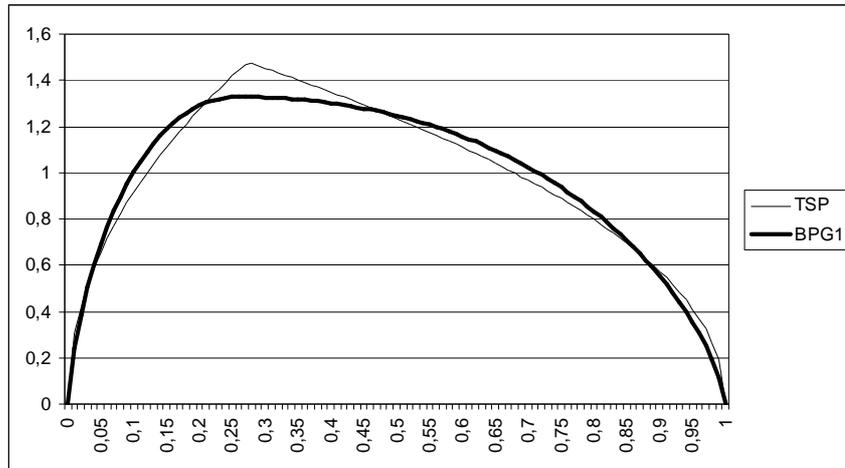


Figura III.10. Función de densidad de la TSP y BPG₁

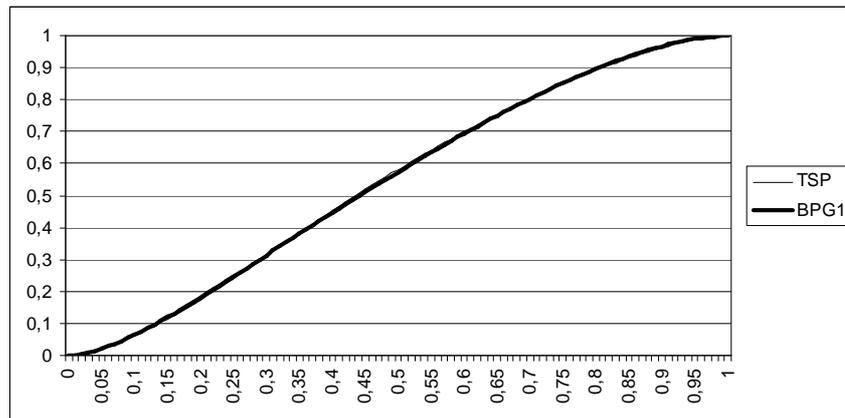


Figura III.11. Función de distribución de la TSP y BPG₁

Se ha realizado la prueba de Kolmogorov-Smirnov sobre la distribución TSP y la distribución BPG₁ estimada. Este contraste, que es válido únicamente para variables continuas, compara la función de distribución teórica con la observada, y calcula un valor de discrepancia, representado habitualmente como D , que corresponde a la discrepancia máxima en valor absoluto entre la distribución observada y la distribución teórica. Si esta comparación revela una diferencia suficientemente grande entre las funciones de distribución muestral y propuesta, entonces la hipótesis nula se rechaza.

Este contraste presenta la ventaja de que no necesita que los datos estén agrupados y además es válido para muestras pequeñas. En el ejemplo propuesto el valor crítico dado por el cuadro de Kolmogorov-Smirnov para $n=8$ es 0,457 y como en ambos casos el valor del estadístico es inferior no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, no es posible detectar un cambio en la distribución para esta variable de la que se estableció en un principio. Hay que resaltar, que la diferencia mayor, en negrita en los cuadros (III.4) y (III.5) es menor en el caso de la distribución TSP, y por tanto se le considera la distribución más apropiada en este caso concreto.

	S_n	$F_n(TSP)$	$ S_n - F_n $		S_n	$F_n(BPG_1)$	$ S_n - F_n $
0,1	0,125	0,061874864	0,06312514	0,1	0,125	0,064126984	0,06087302
0,25	0,25	0,239700857	0,01029914	0,25	0,25	0,24732145	0,00267855
0,3	0,375	0,312549464	0,06245054	0,3	0,375	0,313690833	0,06130917
0,4	0,5	0,452613478	0,04738652	0,4	0,5	0,445284828	0,05471517
0,45	0,625	0,518670359	0,10632964	0,45	0,625	0,509806442	0,11519356
0,6	0,75	0,69937076	0,05062924	0,6	0,75	0,69348014	0,05651986
0,75	0,875	0,849913412	0,02508659	0,75	0,875	0,851973788	0,02302621
0,8	1	0,892078273	0,10792173	0,8	1	0,89627927	0,10372072
Cuadro III.4.Prueba de K-S para TSP				Cuadro III.5.Prueba de K-S para BPG ₁			

La estimación por momentos puede realizarse también usando cuatro parámetros muestrales como son la media, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis. Consiste en hacer mínima la distancia entre los valores poblacionales y los muestrales, es decir en minimizar la expresión:

$$(E(t) - \mu_m)^2 + (\sigma^2 - \sigma_m^2)^2 + (\beta_1 - \beta_{1m})^2 + (\beta_2 - \beta_{2m})^2 \quad (III.36)$$

Una vez calculados los coeficientes de asimetría y curtosis de la muestra, usando la condición (III.32) y las expresiones (III.21), (III.23), (III.30) y (III.32).

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0,141 \\ \beta_2 &= 1,9 \end{aligned} \quad (III.37)$$

Usando el programa Mathematica, se obtiene como solución:

$$n = 0,529959 \quad \text{y} \quad M = 0,0031357 \quad (\text{III.38})$$

Y como valor mínimo 0,0127551 para la expresión (III.36).

Se observa que las soluciones obtenidas por uno y otro método, aplicando dos momentos (III.35) y aplicando cuatro (III.38), no presentan similitudes entre sí aunque ambos ofrecen soluciones válidas.

III.1.4.2. Estimación de la distribución BPG₁ usando el método de máxima verosimilitud

Sean X_1, X_2, \dots, X_S una muestra aleatoria de tamaño n , se elige como a y b los valores mínimo y máximo respectivamente y se procede a estandarizar, obteniendo los valores t_1, t_2, \dots, t_S , en este caso la función de verosimilitud para la BPG₁ vendría dada por:

$$L(t_i, n, M) = \prod_{i=1}^r \frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \left[2 \left(\frac{t_i}{M} \right)^n - \left(\frac{t_i}{M} \right)^{2n} \right] \prod_{i=r+1}^s \frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \left[2 \left(\frac{1-t_i}{1-M} \right)^n - \left(\frac{1-t_i}{1-M} \right)^{2n} \right] \quad (\text{III.39})$$

suponiendo que $t_1 < t_2 < \dots < t_r < M < t_{r+1} < t_{r+2} < \dots < t_{r+s}$ lo cual no quita generalidad al problema salvo que presupone la posición de M :

$$\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \right]^s \prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{M} \right)^n \left[2 - \left(\frac{t_i}{M} \right)^n \right] \prod_{i=r+1}^s \left(\frac{1-t_i}{1-M} \right)^n \left[2 - \left(\frac{1-t_i}{1-M} \right)^n \right] \quad (\text{III.40})$$

Si tomamos logaritmos en (III.40):

$$\begin{aligned}
 \text{Log}L(t_i, n, M) &= s\text{Log}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1}\right] + \sum_{i=1}^r n\text{Log}\left(\frac{t_i}{M}\right) + \text{Log}\left[2 - \left(\frac{t_i}{M}\right)^n\right] + \\
 &\sum_{i=r+1}^s n\text{Log}\left(\frac{1-t_i}{1-M}\right) + \text{Log}\left[2 - \left(\frac{1-t_i}{1-M}\right)^n\right] = s\text{Log}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1}\right] \\
 &+ \sum_{i=1}^r n\text{Log}\left(\frac{t_i}{M}\right) + \text{Log}\left[2 - \left(\frac{t_i}{M}\right)^n\right] + \sum_{i=r+1}^s n\text{Log}\left(\frac{1-t_i}{1-M}\right) + \text{Log}\left[2 - \left(\frac{1-t_i}{1-M}\right)^n\right] \quad (\text{III.41}) \\
 &= s\text{Log}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1}\right] + \sum_{i=1}^r \left[(n\text{Log}t_i - n\text{Log}M) + \text{Log}(2M^n - t_i^n) - n\text{Log}(M) \right] + \\
 &\sum_{i=r+1}^s \left[n\text{Log}(1-t_i) - n\text{Log}(1-M) + \text{Log}(2(1-M)^n - (1-t_i)^n) - n\text{Log}(1-M) \right]
 \end{aligned}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 &= s\text{Log}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1}\right] - 2nr\text{Log}(M) + \sum_{i=1}^r \left[(n\text{Log}t_i + \text{Log}(2M^n - t_i^n)) \right] - \\
 &2ns\text{Log}(1-M) \sum_{i=r+1}^s n\text{Log}(1-t_i) + \text{Log}[2(1-M)^n - (1-t_i)^n] \quad (\text{III.42})
 \end{aligned}$$

y por último se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &= s\text{Log}\left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1}\right] - 2nr\text{Log}(M) - 2n(s-r)\text{Log}(1-M) \\
 &+ \sum_{i=1}^r \left[(n\text{Log}t_i + \text{Log}(2M^n - t_i^n)) \right] + \sum_{i=r+1}^s n\text{Log}(1-t_i) + \text{Log}[2(1-M)^n - (1-t_i)^n] \quad (\text{III.43})
 \end{aligned}$$

Se considera a continuación el problema de optimizar la expresión anterior suponiendo que M es conocido para posteriormente analizar el procedimiento de obtención de M .

Al derivar la expresión (III.43) respecto de n :

$$\begin{aligned}
 &= s \frac{2n(3n+2)}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} - 2nrLgM - 2(s-r)\text{Log}(1-M) + \sum_{i=1}^r \text{Log}t_i + \\
 &\sum_{i=1}^r \frac{2M^n \text{Log}M - t_i^n \text{Log}t_i}{2M^n - t_i^n} + \sum_{i=r+1}^s \text{Log}(1-t_i) + \sum_{i=r+1}^s \frac{2(1-M)^n \text{Log}(1-M) - (1-t_i)\text{Log}(1-t_i)}{2(1-M)^n - (1-t_i)^n}
 \end{aligned} \tag{III.44}$$

El problema reside en buscar soluciones de n que anulen la expresión (III.44). Usando el caso práctico de el cuadro (III.2), entonces $s=8$ y $r=4$, y despejando se obtienen los valores $M=0.22$ y $n=1.002774$. En la figura (III.12) se representa la función de densidad para dichos valores.

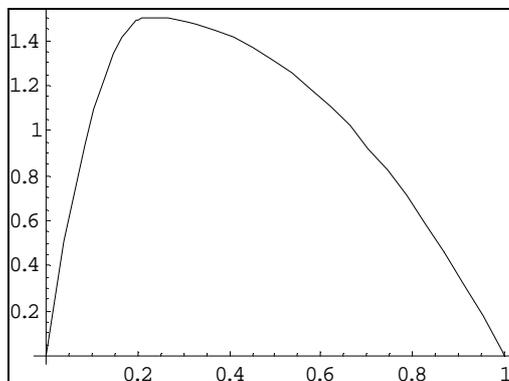


Figura. III.12. Representación para valores $M=0,22$ y $n=1,002774$

III.1.4.3. Estimación de la distribución BPG_1 mediante restricciones en la familia de distribución.

Conocida la expresión de la varianza (III.23), se define la familia de varianza constante como el conjunto compuesto por las distribuciones BPG_1 con la misma varianza que la distribución normal en el caso de trabajar con variables aleatorias estandarizadas.

Igualando la expresión de la varianza a $\frac{1}{36}$ se puede comprobar que se obtiene un único

valor de $n > 1$ para cada valor de M , $0 < M < 1$. Por lo tanto, se puede afirmar que dados los tres valores clásicos, $(a, m \text{ y } b)$, entonces se determina una única distribución unimodal BPG_1 de varianza constante lo que permite el uso de esta distribución en el contexto del PERT.

En la figura (III.13) se recoge la representación de los diferentes valores de n para cada valor de M . Se observa que dicha gráfica tiene un mínimo para $M=0,5$ y $n=0,22642179$.

Por otro lado, se define la familia mesocúrtica como el conjunto de BPG_1 cuyo coeficiente de curtosis es igual a 3. Entonces haciendo la expresión (III.32) igual a 3, se puede comprobar que para cada valor de M , $0 < M < 1$, hay una solución que verifica la condición $n > 1$, lo que permite afirmar que siempre existirá una distribución unimodal BPG_1 perteneciente a la familia mesocúrtica. Este resultado es similar al obtenido para la familia mesocúrtica de la distribución STSP. Ambos resultados mejoran el obtenido por la familia mesocúrtica de la distribución beta ya que este no ofrece solución para los valores de M en el intervalo $0.2763933... < M < 0.72360667...$. Véase García, Trinidad y García (2005). Tal y como se observa en la figura (III.14) existe una familia mesocúrtica en la distribución BPG_1 . En dicho gráfico se reflejan los diferentes valores de n para cada valor de M .

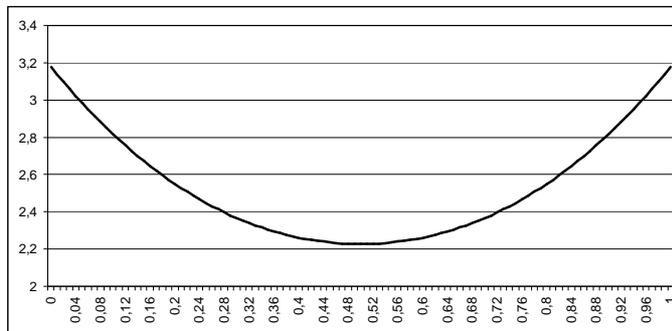


Figura III.13. Relación entre M y n para todas las BPG_1 de varianza constante.

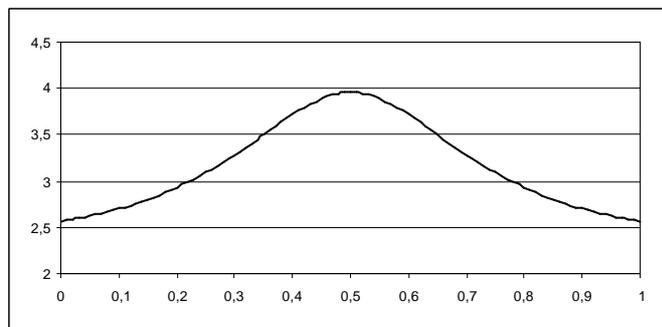


Figura III.14. Relación entre M y n para todas las BPG_1 mesocúrticas

Por último, se conoce como familia clásica al conjunto de distribuciones que cumple simultáneamente $\sigma^2 = \frac{1}{36}$ y $\beta_2 = 3$, figura (III.15). El valor de n que verifica ambas propiedades, en el caso de la distribución BPG_1 es:

$$M = 0,876474\dots, n = 2,74669 \text{ y } M = 0,123526\dots, n = 2,74669 \quad (\text{III.45})$$

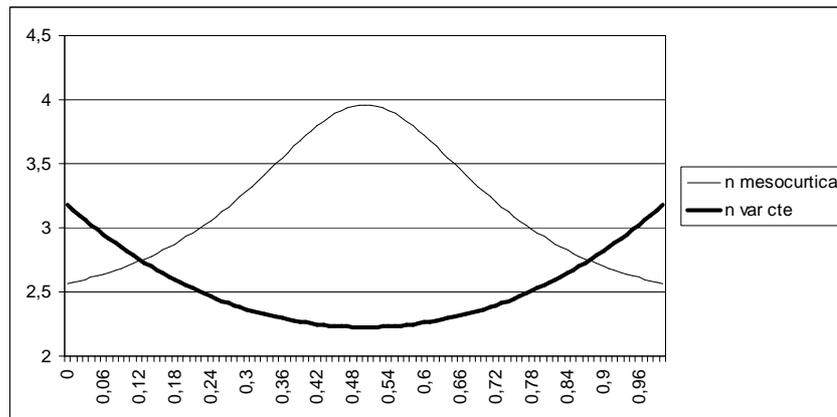


Figura III.15. Relación entre M y n para todas las BPG_1 de varianza constante y mesocúrticas

Por otra parte, en el caso de la distribución STSP, las únicas soluciones para $n > 1$ son:

$$M = 0,747133\dots, n = 3,02344 \text{ y } M = 0,252867\dots, n = 3,02344 \quad (\text{III.46})$$

que corresponden a distribuciones STSP cuyas funciones de densidad cumplen simultáneamente las condiciones $\sigma^2 = \frac{1}{36}$ y $\beta_2 = 3$.

III.1.4.4. Aplicación del criterio de media moderada y el criterio de varianza máxima en la estimación de la distribución BPG_1

Una posible restricción sería usar el criterio presentado por Taha (1981) y desarrollado por Herrerías (1989) y que consiste en considerar que en ambiente de incertidumbre siempre es deseable una media lo más centrada posible, es decir que sea moderada, y por otro lado una varianza lo más grande posible. Esta filosofía queda resumida en la siguiente idea: de

dos caminos con igual media se escoge aquel que tiene mayor varianza, véase Taha (1981). En el cuadro (III.6) y la figura (III.16) se comparan las medias y las varianzas de la distribución biparabólica con otras distribuciones tetraparamétricas como la beta generalizada, la Pearson, y la distribución STSP.

	MEDIA	VARIANZA
BETA GEN.	$\mu = \frac{1+kM}{k+2}$	$\sigma^2 = \frac{k^2 M(1-M) + (k+1)}{(k+3)(k+2)^2}$
STSP	$\mu = \frac{(n-1)M+1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n-2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
PEARSON	$\mu = \frac{b_2(1+0)+M}{2b_2+1}$	$\sigma^2 = \frac{b_2[(b_2^2+b_2)+(1-M)(M-0)]}{(2b_2+1)^2(3b_2+1)}$
SBPG ₁		
	$\mu = \frac{M6n^2+7n+2}{6n^2+14n+4}$	$\sigma^2 = \frac{(148n^4+244n^3+40n^2)M^2 - (148n^4+244n^3+40n^2)M + (82n^4+247n^3+247n^2+96n+12)}{4(3n+1)^2(n+2)^2(2n+3)(n+3)}$
Cuadro III.6. Resumen comparativo de la media y las varianzas de las distribuciones beta generalizada, TSP, Sistema de Pearson y SBPG ₁		

Parece ser que, en este caso, el criterio de Taha (1981) y Herrerías (1989) no conduce a ninguna solución, ya que en todas las distribuciones comparadas la varianza es decreciente mientras que la desviación con respecto a la media es creciente, por lo que no es posible hallar un valor de n en el que, simultáneamente, la varianza sea la máxima posible y la desviación con respecto a la media lo menor posible. Ver figura (III.16). En conclusión, sería deseable encontrar una distribución que fuera aplicable tanto en el ámbito del PERT como en el tratamiento de la incertidumbre en general, de manera que al imponer los criterios de varianza máxima y media moderada origine, para cada terna $(a, m$ y $b)$, una única distribución.

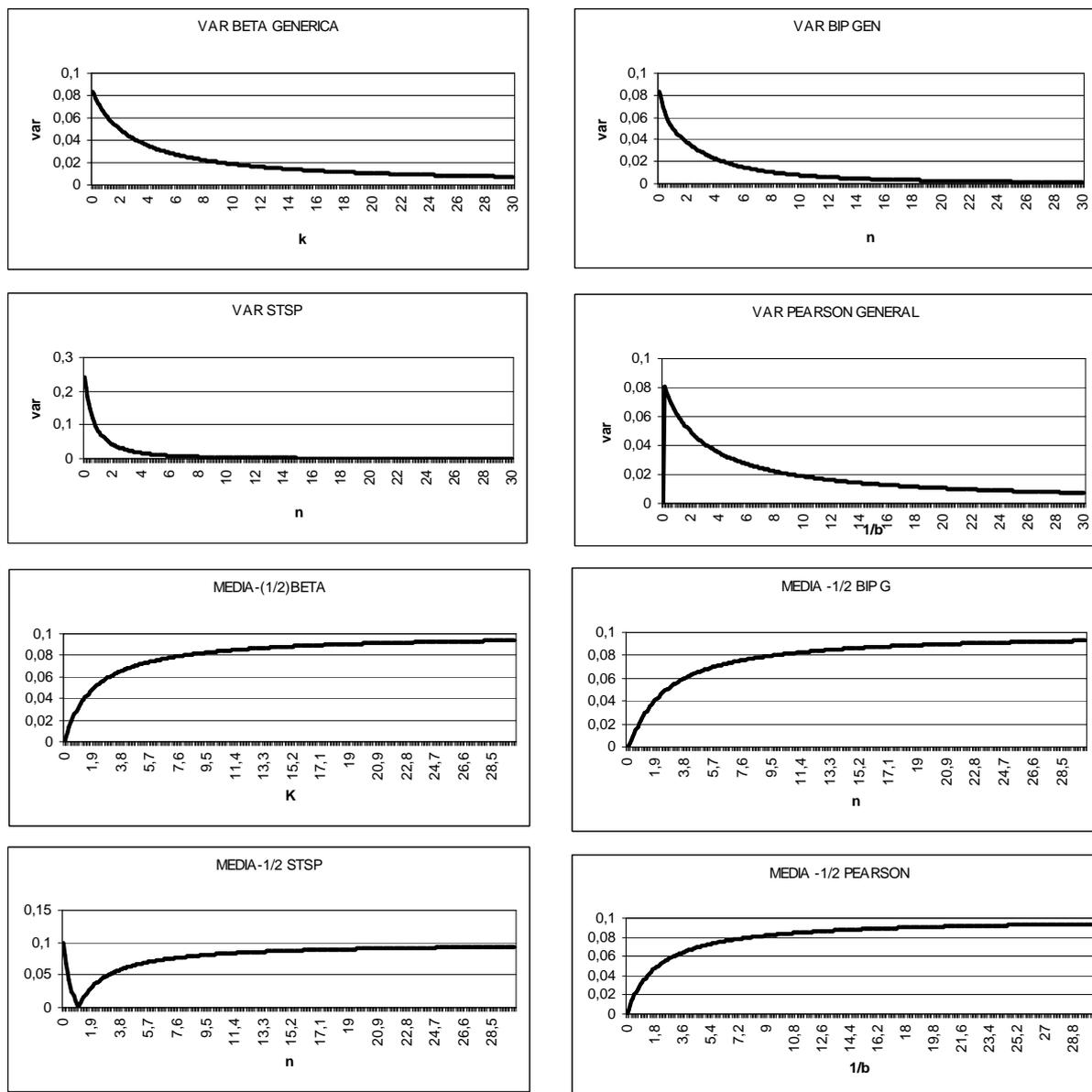


Figura III.16. Gráficas de la varianza y la desviación con respecto a la media para las distribuciones beta generalizada, STSP, Pearson y BPG_1 , para $M=0,4$.

III.1.4.5. Estimación de la distribución BPG_1 mediante el proceso de elicitación

Se entiende por elicitación el proceso por el cual se recurre al experto para obtener más información y así proceder a la estimación de la distribución sin tener que realizar ninguna restricción de las comentadas anteriormente. Así pues, se demuestra que siempre que se disponga de un cuantil en $[a, b]$, o su cuantil t_α en $[0,1]$ con $t_\alpha = \frac{x_\alpha - a}{b - a}$, se podrá estimar el cuarto parámetro y por tanto la distribución $SBPG_1$.

Con el objeto de resolver este problema y sin intención de quitar generalidad al mismo, se limita el cuantil x_α a la siguiente relación: $a < x_\alpha < m < b$. Como la distribución $SBPG_1$ cumple la propiedad (III.19) se puede afirmar que:

$$\alpha < \frac{m - a}{b - a} \quad (III.45)$$

ya que $x_\alpha < m$.

Usando la función de distribución de la $SBPG_1$, recogida en la expresión (III.14), se obtiene:

$$2 \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right) \left(\frac{x_\alpha - a}{m - a} \right)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \left(\frac{x_\alpha - a}{m - a} \right)^{2n+1} = \alpha \quad (III.46)$$

donde $\alpha = P(t < t_\alpha)$.

Si a la función de la expresión (III.46) se le nota como $f(n)$ donde $n > 0$, se puede demostrar que se trata de una función estrictamente decreciente y que cumple:

$$f(0) = \frac{x_\alpha - a}{m - a} \quad (\text{III.47})$$

$$f(\infty) = 0 \quad (\text{III.48})$$

En consecuencia no existirá solución, existirá una única solución o la única solución será $n=0$ dependiendo de que el valor de p sea mayor, menor o igual que $\frac{x_\alpha - a}{m - a}$ respectivamente. En el cuadro (III.7) se resumen las distintas posibilidades:

POSIBILIDADES	SOLUCIONES
$\alpha > \frac{x_\alpha - a}{m - a} \Rightarrow$	Ninguna solución de la SBPG ₁ y existirá una contradicción del experto.
$\alpha < \frac{x_\alpha - a}{m - a} \Rightarrow$	Una única solución que dará el valor de n en la SBPG ₁ .
$\alpha = \frac{x_\alpha - a}{m - a} \Rightarrow$	$n=0$ y tendremos una distribución uniforme.
Cuadro III.7. Cuadro-Resumen	

Como aplicación práctica de este proceso de elicitación descrito, se parte de los tres valores conocidos (a , m y b) y se procede a la obtención de la distribución beta del PERT clásico. Posteriormente, usando dicha distribución, se calcula el cuantil y , finalmente, aplicando el procedimiento de elicitación se obtienen la distribución BPG₁ y la distribución TSP que se comparan gráficamente con la distribución beta. En primer lugar, como se ha indicado anteriormente, se procede a la obtención de la distribución beta clásica ($k=4$). Las expresiones (III.49) y (III.50) relacionan los parámetros p y q de la distribución beta clásica con los valores habituales aportados por el experto (a , m y b).

$$p = 1 + 4 \frac{m - a}{b - a} \quad (\text{III.49})$$

$$q = 1 + 4 \frac{b - m}{b - a} \quad (\text{III.50})$$

Por tanto, conocidos $(a, m$ y $b)$ se obtiene el valor de p y q . A partir de estas relaciones queda determinada la distribución beta clásica.

Se conoce la función de densidad de la variable aleatoria beta estandarizada t , tal que:

$$f(t) = \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{B(p, q)} \quad (\text{III.51})$$

donde:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad (\text{III.52})$$

A continuación, se determina un cuantil α a partir del cual se obtiene el valor de t_α correspondiente a dicho α mediante la siguiente expresión:

$$\int_0^{t_\alpha} f(t) dt = \alpha \quad (\text{III.53})$$

Una vez determinada, a partir de sus parámetros p y q , la distribución beta clásica, y establecido un cuantil, por ejemplo 0,05 ó 0,1, se pueden obtener las distribuciones SBPG₁ y STSP.

En el caso de la distribución SBPG₁, se parte de la expresión (III.46) teniendo en cuenta que $t_\alpha = \frac{x_\alpha - a}{m - a}$ y se obtiene:

$$2 \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right) (t_\alpha)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) (t_\alpha)^{2n+1} = \alpha \quad (\text{III.54})$$

Resolviendo la expresión (III.54) se obtiene el valor de n que determina la distribución BPG₁.

Para la distribución STSP, se parte de la expresión de su función de distribución estandarizada (III.55):

$$F(t/M, n) = \begin{cases} M \left(\frac{t}{M} \right)^n, & \text{si } 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1 - M) \left(\frac{1-t}{1-M} \right)^n, & \text{si } M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Y se obtiene la siguiente expresión:

$$M \left(\frac{t_\alpha}{M} \right)^n = \alpha \quad (\text{III.56})$$

Despejando se establece la siguiente expresión para el valor del parámetro n :

$$n = \frac{L(\alpha/M)}{L(t_\alpha/M)} \quad (\text{III.57})$$

Tomando como ejemplo los valores $a=10$, $m=18$ y $b=30$ y usando las expresiones (III.49) y (III.50) se obtienen los siguientes valores para p y q :

$$p=2,6 \text{ y } q=3,4 \quad (\text{III.58})$$

Aplicando la expresión (III.51) y (III.52), y haciendo uso del programa Mathematica se obtiene que el valor de $B(2,6;3,4)$ es 0,0355. A continuación, resolviendo la ecuación (III.54), se despeja el valor de n , para el caso de la distribución bipolarabólica y los valores propuestos en el ejemplo, que resulta ser $n=0,482602$. De manera análoga, para el caso de la distribución STSP, tras sustituir los valores del ejemplo en la expresión (III.57) se obtiene un valor de $n=1,97109204$.

En el cuadro (III.8) se recogen las distintas soluciones para la media y la varianza usando las expresiones recogidas en el cuadro (III.5) para el caso práctico donde $a=10$, $m=18$ y $b=30$.

	BETA GEN.	SBPG ₁ ($n=0,482602, M=0,4$)	STSP ($n=1,97109204, M=0,4$)
MEDIA	0,433	0,482602	0,46731532
VARIANZA	$\frac{1}{36}$	0,059681	0,04293239

Cuadro III.8. Aplicación práctica de elicitación para $a=10$ $m=18$ y $b=30$. Cuadro resumen de medias y varianzas de las distribuciones beta, SBPG₁ y STSP

Una vez obtenidas las distribuciones SBPG₁ y STSP se realizan comparaciones entre estas y la distribución beta determinada anteriormente. En las figuras (III.17) y (III.18) se presentan los gráficos de las distribuciones beta, SBPG₁ y STSP para el ejemplo práctico desarrollado anteriormente.

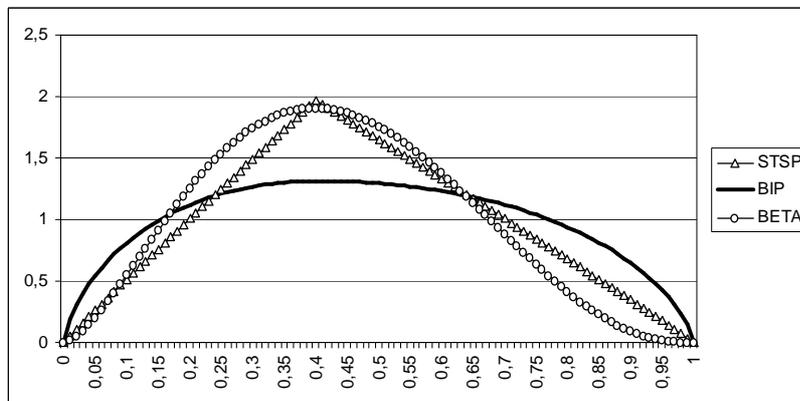


Figura III.17. Aplicación práctica elicitación. Función de densidad de STSP, SBPG₁ y STSP para $a=10$, $m=18$ y $b=30$.

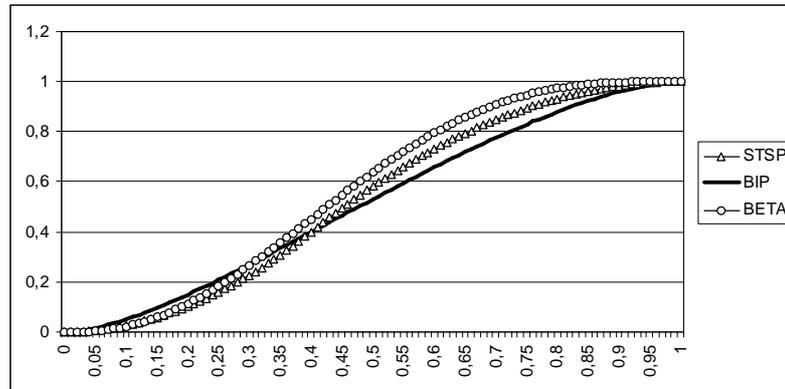


Figura III.18. Aplicación práctica elicitación. Función de distribución de STSP, SBPG₁ y STSP para $a=10$, $m=18$ y $b=30$

III.1.5. La entropía de la distribución BPG₁

La entropía relativa, también conocida como entropía cruzada o función de discriminación, de una función de densidad continua $f(x/M)$ con respecto a la función de probabilidad $g(x)$ se define como:

$$E(f : g / M) = \int \text{Ln} \frac{f(x/M)}{g(x)} dF(X/M) \quad (\text{III.59})$$

y se usa como medida de comparación de la información contenida en las distribuciones.

Se ha comprobado que la entropía relativa de la distribución beta con respecto a la distribución uniforme $[0,1]$, (Soofi y Retzer 2000), resulta ser:

$$E(f : g / a, b) = \text{Ln} [B(a, b) - (a-1)(f(a) - f(a+b)) - (b-1)(f(b) - f(a+b))] \quad (\text{III.60})$$

donde:

$$f(x/a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (\text{III.61})$$

siendo $a > 0, b > 0$, $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y g la función de densidad de la uniforme $[0,1]$.

Por otro lado, la entropía relativa de la distribución STSP con respecto a la distribución uniforme usando la definición (III.59) es:

$$E(f : g / M, n) = \text{Lng}[n] - \frac{n-1}{n} \quad (\text{III.62})$$

donde f es la función de densidad de la distribución STSP.

La expresión (III.62) toma su valor mínimo cuando la variable STSP coincide con una variable uniforme $[0,1]$, es decir cuando $n = 1$. Esto es evidente teniendo en cuenta la definición de entropía relativa ya que se está comparando la información contenida en la distribución STSP con la contenida en una uniforme $[0,1]$.

Obsérvese que las expresiones de la entropía relativa para las distribuciones beta (III.60) y STSP (III.62) tienen cierta similitud. Hay que señalar que la expresión (III.62) no depende de M , es decir que, dado un valor de n , será constante para cualquier valor de M . Por ejemplo, cuando $n = 2$, la distribución STSP se convierte en la distribución triangular y siguiendo la expresión (III.62) su entropía será constante e igual a:

$$\text{Ln}[2] - \frac{1}{2} = 0,193 \quad (\text{III.63})$$

Hay que destacar que, en el caso de la distribución STSP, la varianza, que está intuitivamente relacionada con el concepto de entropía, si depende de M . Véase cuadro (I.11).

Al igual que se ha presentado la entropía para la distribución beta y la distribución STSP, a continuación se compara la información contenida en la distribución SBPG₁ con la contenida en la uniforme. Tomando como partida la función de densidad (III.13) se considera la entropía relativa como:

$$E_R = \int g(t/M) \text{Ln} \left[\frac{g(t/M)}{f(t)} \right] dt \quad (\text{III.65})$$

donde $f(t)$ es la función de densidad de la distribución uniforme.

Desarrollando estas integrales se obtiene:

$$E_R = \text{Ln} \left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \right] + \frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \int_0^1 (2x^n - x^{2n}) \text{Ln} [2x^n - x^{2n}] dx \quad (\text{III.66})$$

$$\text{Ln} \left[\frac{(2n+1)(n+1)}{3n+1} \right] + \frac{2n^2}{(3n+1)(2n+1)(n+1)} \left[4(n+1)(2n+1) \text{HG} \left\{ 1, 1, 1 + \frac{1}{n}, -1 \right\} - 5 - n(1+4n) \right]$$

donde $\text{HG} = \text{Hypergeometric2F1}[a, b, c, z] = \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k (b)_k / (c)_k z^k / k!$

En el caso de la distribución SBPG₁ la entropía no depende de la moda estandarizada (M) igual que ocurría con la distribución STSP. Sin embargo, en ambos casos, la varianza, que está relacionada con la entropía, si depende de la moda estandarizada, hecho que resulta al menos curioso.

Mientras, para la distribución beta ni la entropía ni la expresión de la varianza $\frac{(b-a)^2}{36}$ dependen de la moda. Se concluye que la distribución BPG₁ tiene mayores similitudes con la distribución STSP que con la distribución beta. Para $n = 1$, es decir para la distribución biparabólica original, la expresión de la función hipergeométrica es:

$$\text{Hypergeometric2F1}[1, 1, 2, -1] = \frac{\text{Ln}[4]}{2} \quad (\text{III.67})$$

Y en ese caso, la entropía relativa es:

$$[E_R / n = 1] = \left\{ \text{Ln}\left[\frac{3}{2}\right] + \frac{1}{12}(-20 + 12\text{Ln}[4]) \right\} = 0,1250928 \quad (\text{III.68})$$

Se observa que la entropía de la distribución bipolarabólica original (III.68) es inferior a la de la distribución triangular (III.63).

Seria interesante comparar la entropía de la distribución triangular, más que con la distribución bipolarabólica original ($n=1$), con la distribución bipolarabólica que pondera igual a los extremos y a la moda, que anteriormente se ha notado como BPG_1^- y que da al parámetro n el valor: $n=1,4047148$. Para esta distribución se comprueba que la entropía relativa toma el valor:

$$[E_R / n = 1,4047148] = 0,210409 \quad (\text{III.69})$$

Por lo que se puede afirmar que la distribución BPG_1^- supera la entropía presentada por la distribución triangular (III.63). Si además se compara la varianza de ambas distribuciones, figura (III.19), se aprecia que la distribución BPG_1^- presenta siempre una varianza inferior que la distribución triangular, obteniendo el valor mínimo, ambas, para $M=0,5$.

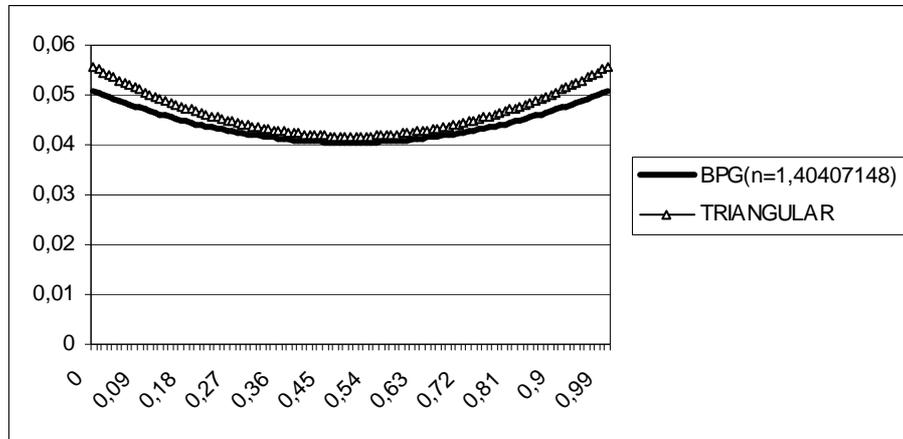


Figura III.19. Comparación de la varianza de la distribución triangular y la distribución BPG₁

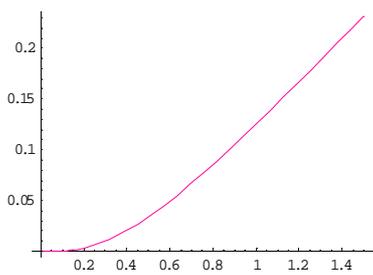


Figura III.20. Entropía de la distribución BPG₁

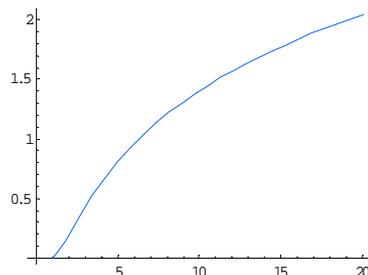


Figura III.21. Entropía de la distribución STSP

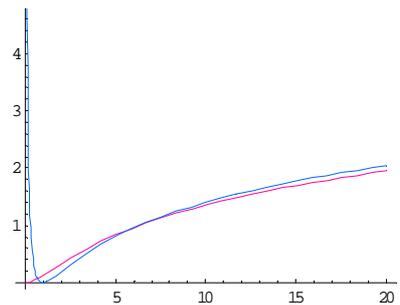


Figura III.22. Comparación entre la entropía de la distribución BPG₁ y la entropía de la distribución STSP.

Por tanto, la distribución BPG_1^- , con $n=1,4047148$, supera en entropía a la distribución triangular y además tiene una varianza ligeramente inferior pero de similar comportamiento, por lo que sería más adecuada para el tratamiento de la incertidumbre. En términos de la información, se puede concluir que a medida que se aumenta la ponderación de la moda la información es mejor, lo que viene a coincidir con la actitud del experto y con la confianza que se puede depositar en el, tal y como se aprecia en las figuras (III.20), (III.21) y (III.22).

En la figura (III.20) se presenta la gráfica de la entropía de la distribución SBPG₁ para n en el intervalo (0,01; 1,5). En la figura (III.21) se representa la entropía de la distribución STSP para n en el intervalo (0; 20). En ambas gráficas se observa que a medida que aumenta n , es decir la ponderación de la moda, aumenta la entropía.

En la figura (III.22) se compara la entropía de la distribución SBPG₁ con la de la distribución STSP en un mismo intervalo de n . Se observa que la entropía de distribución bipolarabólica es siempre creciente en función de n , mientras que no ocurre igual para la distribución STSP que presenta una función decreciente para valores pequeños de n .

Como comentario final se puede decir que la distribución bipolarabólica presenta mejores propiedades que la distribución STSP, en cuanto a entropía se refiere, ya que su comportamiento creciente en función de n es más acorde con la metodología PERT y en concreto con la actitud del experto, y por otro lado al comparar la distribución triangular con la distribución bipolarabólica que pondera igual a los tres coeficientes, está presenta una mayor entropía y varianza por lo que resulta también más conveniente en el tratamiento de la incertidumbre.

III.1.6. La tasa de fallo de la distribución BPG₁

La tasa de fallo se define por el coeficiente medio de extinción de un colectivo en un Δt expresado en tanto por uno y se puede obtener mediante la expresión:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (\text{III.70})$$

Esta tasa tiene unas aplicaciones muy extendidas en las estimaciones paramétricas de funciones de tiempo de vida y se comprueba que en casi todos los fenómenos a los que se les puede aplicar los estudios de duración de vida, la tasa de fallo en función del tiempo sigue una curva denominada de bañera.

En el primer capítulo se presentó la distribución Topp-Leone y se comentó que su tasa de fallo además, de tener una sencilla expresión (I.45), es la única entre las distribuciones univariantes comúnmente conocidas con forma de bañera para el rango completo de los valores, por lo que se puede considerar la distribución más adecuada para ajustar fenómenos de tiempo. En este epígrafe se obtiene, a partir de las expresiones (III.13) y (III.14), la tasa de fallo de la distribución biparabólica que, al igual que su función de densidad y su función de distribución, tendrá dos ramas en función de que el valor de la variable t sea menor o mayor que M .

$$\lambda(t)_{SBPG} = \begin{cases} \frac{(2n+1)(n+1) \left[\left(\frac{t}{M}\right)^{2n} - 2\left(\frac{t}{M}\right)^n \right]}{(-3n-1) - (2n+1)(n+1)M \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{t}{M}\right)^{2n+1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{t}{M}\right)^{n+1} \right]} & 0 < t < M \\ \frac{\left[\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n} - 2\left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n \right]}{(M-1) \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{2n+1} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n+1} \right]} & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

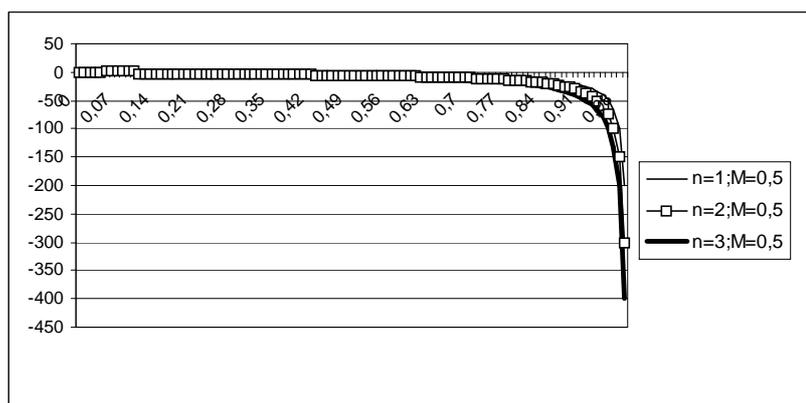


Figura III.23. Representación de la tasa de fallo de las distribuciones SBPG(1;0,5), SBPG(2;0,5) y SBPG(3;0,5)

En la figura (III.23) se representa gráficamente la expresión (III.71) referente a la tasa de fallo de la distribución BPG para el caso en el que n toma los valores 1, 2 y 3 y para un valor modal de 0,5.

Se observa que la tasa de fallo tiene una representación en dos tramos, el primero prácticamente constante y el segundo decreciente por lo que se concluye que la tasa de fallo de la distribución BPG_1 no adopta la forma deseable para una tasa de fallo.

En cuanto a la tasa de fallo de la distribución STSP, se obtiene a partir de las expresiones (I.30) y (I.31), y presenta la siguiente expresión:

$$\lambda(t)_{STSP} = \begin{cases} \frac{n\left(\frac{t}{M}\right)^{n-1}}{1 - M\left(\frac{t}{M}\right)^n} & 0 < t < M \\ \frac{n(1-M)}{(M-1)(1-t)} & M < t < 1 \end{cases} \quad (III.72)$$

En cuanto a la representación de la tasa de fallo de la distribución STSP se recoge en la figura (III.24). Obsérvese que existe una gran similitud entre esta figura y la figura (III.23) referente a la tasa de fallo de la distribución biparabólica.

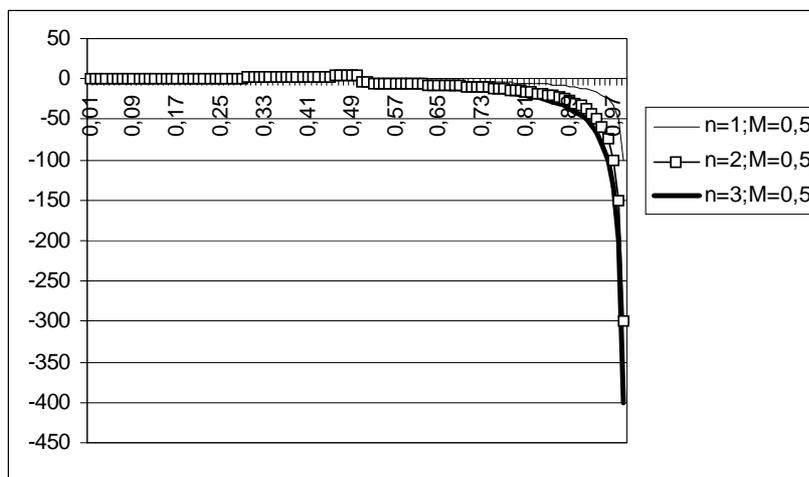


Figura III.24. Representación de la tasa de fallo de las distribuciones STSP(1;0,5), STSP(2;0,5) y STSP(3;0,5)

III.1.7. La distribución $SBPG_1$ en el ámbito del PERT.

Una vez que ha sido presentada la distribución estandarizada biparabólica generalizada en una rama ($SBPG_1$) se procede a analizar su aplicabilidad en el ámbito del PERT. Para ello en primer lugar, se estudiarán cada una de sus subfamilias, es decir la subfamilia mesocúrtica, la de varianza constante y por último la subfamilia clásica. Al comparar cada una de las subfamilias de la distribución $SBPG_1$ entre sí, se observa, figura (III.25), que la subfamilia de varianza constante aumenta la ponderación de la moda cuando el valor de M tiende a los valores extremos 0 y 1. Mientras que la subfamilia mesocúrtica se comporta de manera contraria. Este comportamiento es similar al observado en las subfamilias de varianza constante y mesocúrtica de la distribución STSP.

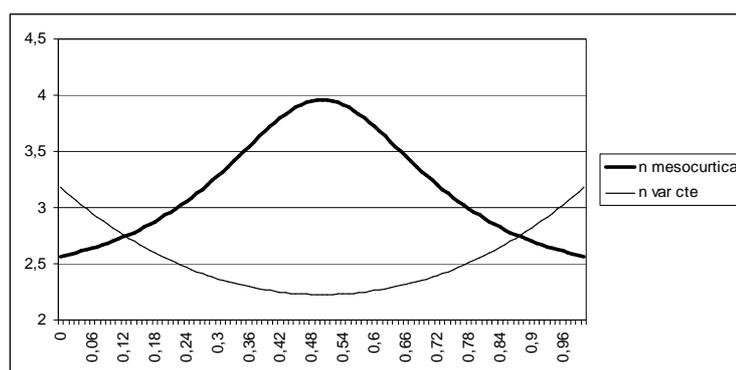


Figura III.25. Valores de n para los valores de M

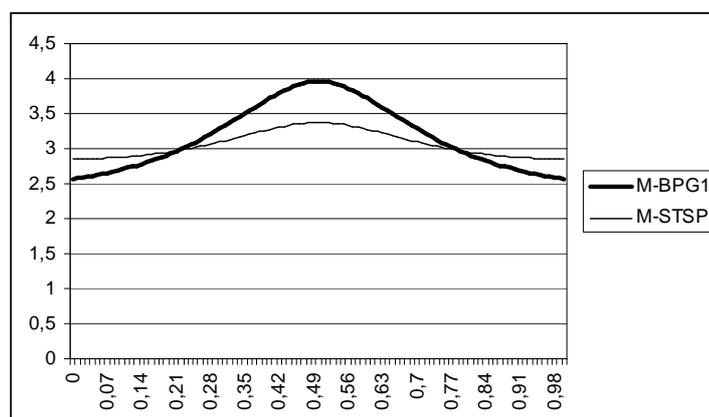


Figura III.26. Comparación de valores de n para valores de M en la familia mesocúrtica de la distribución BPG_1 y $STSP$

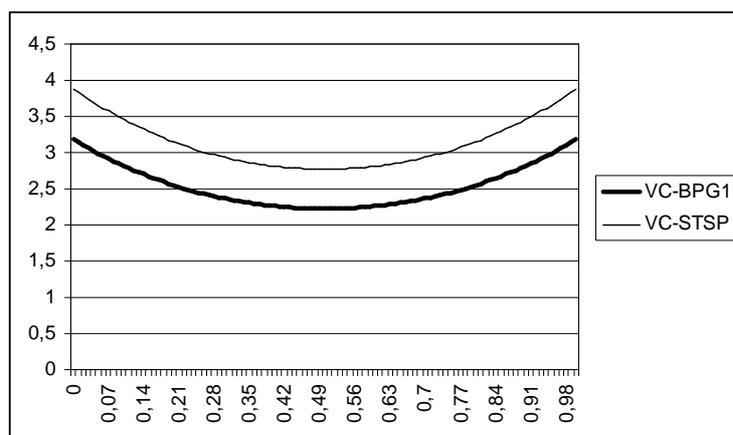


Figura III.27. Comparación de valores de n para valores de M en la familia de varianza constante de la distribución BPG_1 y $STSP$

Si se compara el comportamiento de las diferentes subfamilias de la distribución $SBPG_1$ con las subfamilias de la distribución $STSP$, se aprecia, figura (III.26), que la familia mesocúrtica de la distribución BPG_1 pondera más la moda que la familia mesocúrtica de la distribución $STSP$ para los valores de M , $0,214323 < M < 0,785676$. Sin embargo, se observa, figura (III.27), que la familia de varianza constante de la distribución $STSP$ pondera siempre más la moda que la familia de varianza constante de la distribución BPG_1 .

Se llaman distribuciones clásicas a aquellas distribuciones cuya función de densidad verifica simultáneamente $\sigma^2 = \frac{1}{36}$ y $\beta_2 = 3$.⁵ En la figura (III.28) se presentan las funciones de densidad de las distribuciones clásicas $STSP$ y $SBPG_1$. En el caso de una distribución subyacente beta, ambas condiciones se cumplen cuando $k=4$, mientras que con una distribución subyacente $STSP$ la distribución clásica se obtiene para $n=3,02344$, véase expresión (III.44). Para una distribución subyacente $SBPG_1$ el valor necesario de n es $n=2,74669$, véase expresión (III.43).

⁵ Las distribuciones clásicas son la intersección de la familia mesocúrtica y la familia de varianza constante por similitud a lo que ocurría en la beta del PERT clásico. Expresión aportada por Herrerías, Cruz y García (2003)

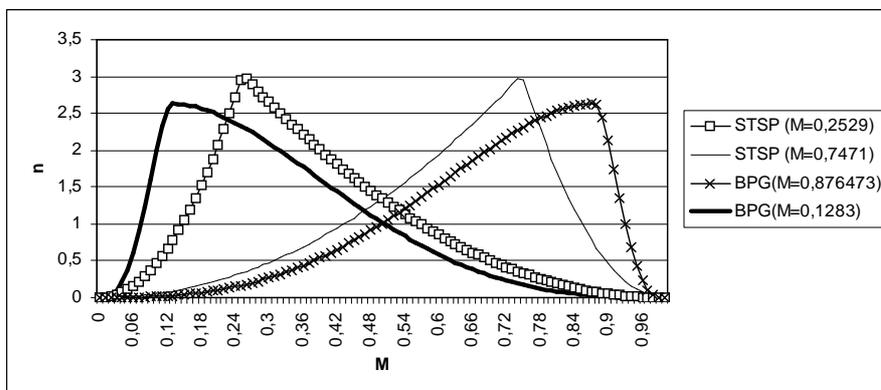


Figura III.28. Función de densidad de las distribuciones clásicas STSP y BPG₁

BETA	k	4
STSP	n	3,02344
SBPG ₁	n	2,74669

Cuadro III.9. Valor de n para distribuciones clásicas para diferentes subyacentes.

Del cuadro (III.9) se deduce que el valor esperado y la varianza de la distribución clásica BPG₁ dados los valores a , m y b , sería:

$$E(x) = \frac{21,23a + 45,266m + 21,23b}{87,72}$$

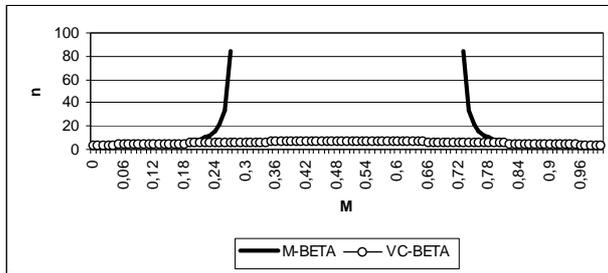
$$Var(x) = \frac{13.781,5582(m^2 - bm + ab - am) + 11.924,5849(a^2 - 2ab + b^2)}{375.569,727 (b - a)^2} \quad (III.73)$$

	VALOR ESPERADO	VARIANZA
BETA GEN.	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{(n-1)^2 M(1-M) + n}{(n+2)(n+1)^2}$
STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n - 2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
PEARSON	$\mu = \frac{b_2(1+0) + M}{2b_2 + 1}$	$\sigma^2 = \frac{b_2 \left[(b_2^2 + b_2) + (1-M)(M-0) \right]}{(2b_2 + 1)^2 (3b_2 + 1)}$
BPG ₁	$\mu = \frac{M 6(n-1)^2 + 7(n-1) + 2}{6(n-1)^2 + 14(n-1) + 4}$	$\sigma^2 = \frac{(148n-1)^4 + 244(n-1)^3 + 40(n-1)^2)M^2 - (148n-1)^4 + 244(n-1)^3 + 40(n-1)^2)M + (82(n-1)^4 + 247(n-1)^3 + 247(n-1)^2 + 96(n-1) + 12)}{4(3n-2)^2(n+1)^2(2n+1)(n+2)}$

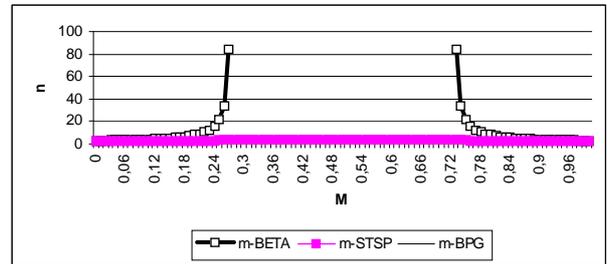
Cuadro III.10. Valores del valor esperado y la varianza para diferentes distribuciones subyacentes.

A continuación se lleva a cabo un estudio comparado de las medias y varianzas estimadas a partir de los valores clásicos aportados por el experto (a , m y b) usando las subfamilias de las distribuciones beta, STSP y SBPG₁. Para ello, en primer lugar, se presentan las expresiones del valor esperado y la varianza de la variable t para las diferentes distribuciones en el cuadro (III.10).

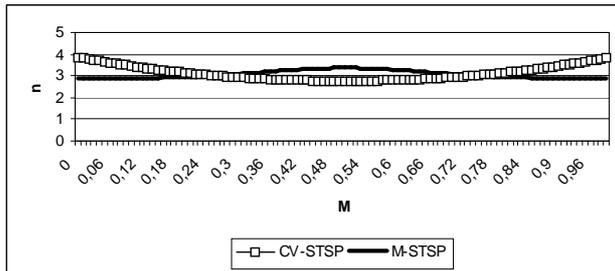
Se tiene que tener en cuenta que los parámetros n y k , de la distribución STSP y beta respectivamente, se relacionan según la siguiente expresión: $n = k + 1$. Esta misma relación se verifica para la distribución SBPG₁ y también para la distribución STSP. Así pues, se pueden reescribir las expresiones de los valores esperados y la varianza de las distribuciones estandarizada beta, STSP, Pearson y BPG₁ en función de n .



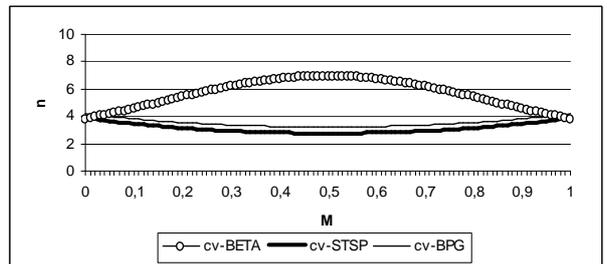
(III.29.a)



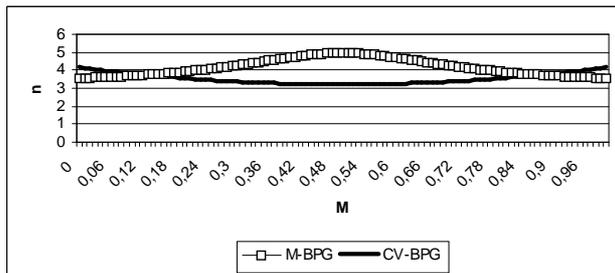
(III.29.d)



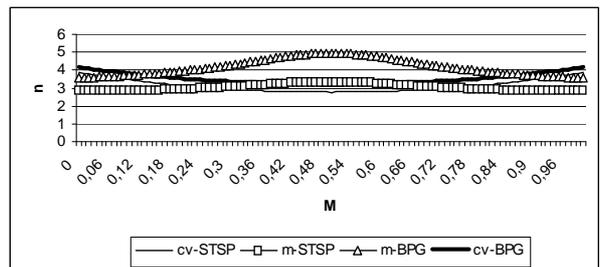
(III.29.b)



(III.29.e)



(III.29.c)



(III.29.f)

Figura III.29. Comparación de la relación entre n y M para las diferentes subfamilias, varianza constante y mesocúrtica, de las distribuciones STSP, Beta y SBPG₁.

A partir de estas expresiones se realiza, un estudio comparado de cada una de las subfamilias, obteniendo su intersección y su posición relativa. En la gráfica (III.29.a) se observa que la distribución beta mesocúrtica carece de resultado para n cuando M se encuentra en el intervalo $(0,27;0,72)$. En el caso de las subfamilias mesocúrticas de distribuciones STSP y SBPG₁, figura (III.29.b), se pondera menos la moda cuando ésta es más arriesgada, es decir cuando sus valores son extremos. Al contrario de lo que ocurre con las subfamilias de varianza constante de las distribuciones STSP y SBPG₁, figura (III.29.c).

Al comparar simultáneamente las subfamilias mesocúrticas, figura (III.29.d), se observa que la distribución STSP y la SBPG₁ son muy similares si bien, esta última pondera ligeramente menos el valor modal. En la figura (III.29.e) se comparan las subfamilias de varianza constante y se observa, al igual que ocurría en las subfamilias mesocúrticas, un comportamiento similar para la subfamilia de varianza constante de la distribución STSP y su análoga de la distribución SBPG₁. La subfamilia de varianza constante de la distribución beta es la que más pondera la moda en todo su recorrido, siendo la subfamilia de varianza constante de la distribución SBPG₁ la que menos pondera ligeramente por debajo de la subfamilia de varianza constante de la distribución STSP. Por último en (III.29.f), se observa que la distribución que más pondera la moda en caso de que ésta tenga valores centrados es la subfamilia mesocúrtica SBPG₁, mientras que la subfamilia de varianza constante de la distribución STSP es la que más pondera la moda en caso de que sus valores sean extremos.

Los siguientes epígrafes se dedican de una parte al análisis de las estimaciones donde se realiza un contraste de Chow para analizar si las diferentes subfamilias son o no estadísticamente diferentes, y, por otro lado, se lleva a cabo una comparación de las medias y las varianzas para establecer según los criterios de moderación y conservadurismo un orden entre las diferentes subfamilias, obteniéndose una solución alternativa a la aportada por Farnum y Stanton (1987).

III.1.7.1. Análisis de las estimaciones

A partir de la variable estandarizada t , y tomando como valores modales: 0.001, 0.002,...,0.99 se obtiene para cada una de las distribuciones subyacentes las observaciones (x_i, y_i^j) donde $i=1, \dots, 99$ y $j=1, 2, 3, 4, 5$ y:

- x_i son los valores de la moda.
- y_i^j son las estimaciones de la media.

- $j=1$ indica que la distribución subyacente es la distribución beta de varianza constante.
- $j=2$ indica que la distribución subyacente es la distribución STSP de varianza constante.
- $j=3$ indica que la distribución subyacente es la distribución STSP mesocúrtica.
- $j=4$ indica que la distribución subyacente es la distribución SBPG₁ de varianza constante.
- $j=5$ indica que la distribución subyacente es la distribución SBPG₁ mesocúrtica.

En todos los casos, se observa gráficamente que la relación entre la moda estandarizada y la estimación de la media es prácticamente lineal. Así pues, parece lógico proponer un ajuste lineal entre ambos parámetros de la siguiente forma: $y_i^j = \theta_1^j + \theta_2^j x_i$ donde $i=1, \dots, 99$ y $j=1, 2, 3, 4, 5$.

Estos ajustes conducen a las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\mu(CV - BETA) &= 0,17\hat{3} + 0,65\hat{3}M \\ \mu(CV - STSP) &= 0,228 + 0,544M \\ \mu(M - STSP) &= 0,255 + 0,490M \\ \mu(CV - BPG) &= 0,241 + 0,517M \\ \mu(M - BPG) &= 0,2396 + 0,5207M\end{aligned}\tag{III.74}$$

Con un 99 por ciento de confianza se propone un test de cambio estructural, (Chow 1960), que permitirá mostrar que las tres soluciones de los tres primeros ajustes son estadísticamente diferentes, es decir que provienen de diferentes poblaciones. Sin embargo, se comprueba que la solución para la distribución SBPG₁ de varianza constante y la distribución SBPG₁ mesocúrtica no son estadísticamente diferentes. De esta manera, se puede afirmar que la familia de distribución clásica, en la cual se suponen cumplidas

simultáneamente las condiciones $\beta_2 = 3$ y $Var = \frac{1}{36}$, parece más lógica en el caso de la distribución SBPG₁ que en el caso de las distribuciones STSP o beta.

III.1.7.2. Comparaciones de medias

Con el objeto de comparar las medias de las diferentes distribuciones se presenta la figura (III.30). En esta figura se presentan las medias estimadas para los diferentes valores de M , $0 < M < 1$. El objetivo es determinar cual de las distribuciones objeto de estudio es más moderada en media. Es evidente que existen unos puntos de corte entre las subfamilias y estos se recogen en el cuadro (III.11). Sin embargo, dado que la distribución biparabólica tiene una expresión para la media diferente a la obtenida para las distribuciones beta o STSP, estos puntos no serán suficientes sino que habrá que determinar también los puntos de corte entre las medias en cuestión.

	Beta	STSP	BPG
Beta	(0,853553;5)	(0,9254;3,55562)	(0,09423;3,83618)
	(0,146437;5)	(0,0746;3,55562)	(0,90577;3,83618)
STSP	-	(0,747133;3,02344)	(0,606277;3,26526)
	-	(0,252867;3,02344)	(0,39372;3,26526)
BPG	-	(0,944812;3,63282)	(0,123526;3,74669)
	-	(0,055188;3,63282)	(0,876474;3,74669)

Cuadro III.11. Puntos de corte

Al igualar la expresión de la media para la distribución biparabólica con la expresión de la media para la distribución STSP o la beta:

$$\frac{M6n^2 + 7n + 2}{6n^2 + 14n + 4} = \frac{(n-1)M + 1}{(n+1)} \quad (\text{III.75})$$

Se obtiene:

$$2M(n-1)(n+1) = (n+1)(n-1) \quad (\text{III.76})$$

Y por tanto se deduce que las soluciones:

$$n = 1 \forall M; n = -1 \forall M; M = 1/2 \forall n \quad (\text{III.77})$$

Es decir, según estos resultados no existe una solución (M_0, n_0) dentro del rango de interés. Esto no quiere decir que no puedan aparecer valores (M_0, n_1) y (M_0, n_2) para los cuales las medias de la beta o la STSP puedan coincidir con la media de la distribución bipolarabólica ya que las fórmulas para obtener las medias, cuadro (III.10), son distintas. Así pues, como se ve en la figura (III.30), que relaciona los valores modales con las medias estimadas sin tener en cuenta los valores de n , además de los puntos de corte entre las subfamilias aparecen nuevos puntos de corte relevantes que se recogen, con asterisco, en el cuadro (III.12).

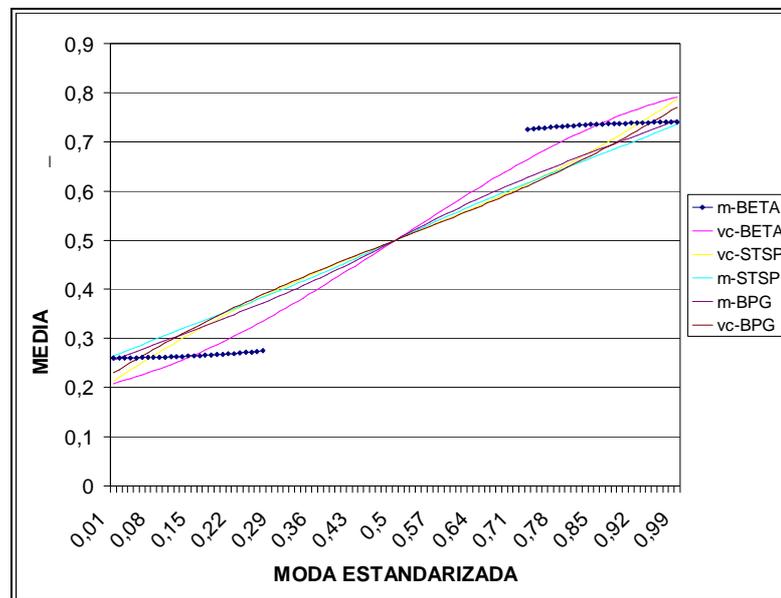


Figura III.30. Representación de las medias en función de M

Intervalos de M	Distribuciones según el orden de moderación
$0 < M < 0,123526$	MSTSP-MBPG
$0,123526 < M < 0,21^*$	MSTSP-CVBPG
$0,21^* < M < 0,252867$	CVBPG-MSTSP
$0,252867 < M < 0,5$	CVBPG-CVSTSP
$0,5 < M < 0,747133$	CVBPG-CVSTSP
$0,747133 < M < 0,79^*$	CVBPG-MSTSP
$0,79^* < M < 0,876474$	MSTSP-CVBPG
$0,876474 < M < 1$	MSTSP-MBPG

Cuadro III.12. Puntos de corte en la comparación de medias.

De esta manera, se dice que una distribución es más moderada en media cuando su media estimada toma valores cercanos a 0,5. Además, se concluye que la distribución SBPG₁ es más moderada en media que la STSP en el intervalo $0,21 < M < 0,79$. Es decir las distribuciones más moderadas en media son: en el intervalo $0,21 < M < 0,79$ la SBPG₁ de varianza constante (CV-SBPG₁), y en los intervalos $0 < M < 0,21$ y $0,79 < M < 1$ la STSP mesocúrtica (M-STSP). Para obtener el valor de n se restringe la distribución STSP a la subfamilia mesocúrtica y la distribución SBPG₁ a la subfamilia de varianza constante de manera que dado el valor de M existirá un único valor para n . Partiendo de la solución obtenida por Farnum y Stanton (1987) y comentada por Johnson (1998):

Si $0 < M < 0,13$	$\mu = \frac{2M}{2M + 1}$	$\sigma^2 = \frac{M^2(1 - M)}{1 + M}$
Si $0,13 < M < 0,87$ PERT CLASICO	$\mu = \frac{1 + 4M}{6}$	$\sigma^2 = \frac{16M(1 - M) + 5}{252}$
Si $0,87 < M < 1$	$\mu = \frac{1}{3 - 2M}$	$\sigma^2 = \frac{M(1 - M)^2}{2 - M}$

Cuadro III.13. Solución obtenida por Farnum y Stanton (1987)

Se propone como alternativa:

Si $0 < M < 0,21$ M-STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n - 2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
Si $0,21 < M < 0,79$ CV-SBPG1	$\mu = \frac{M6n^2 + 7n + 2}{6n^2 + 14n + 4}$	$\sigma^2 = \frac{(148n^4 + 244n^3 + 40n^2)M^2 - (148n^4 + 244n^3 + 40n^2)M + (82n^4 + 247n^3 + 247n^2 + 96n + 12)}{4(3n+1)^2(n+2)^2(n+3)(n+3)}$
Si $0,79 < M < 1$ M-STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n - 2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
Cuadro III.14. Solución alternativa		

Al comparar ambas alternativas en las figuras (III.32) y (III.33) se observa que la solución alternativa propuesta es más moderada en media y además presenta una menor varianza cuando el valor de M se encuentra próximo al centro del intervalo ($M=0,5$). Así pues, cuando el experto ofrece valores de la moda estandarizada extremos, y por tanto más arriesgados, el valor de la varianza es mayor para la alternativa propuesta en el cuadro (III.14), que para la obtenida por Farnum y Stanton (1987).

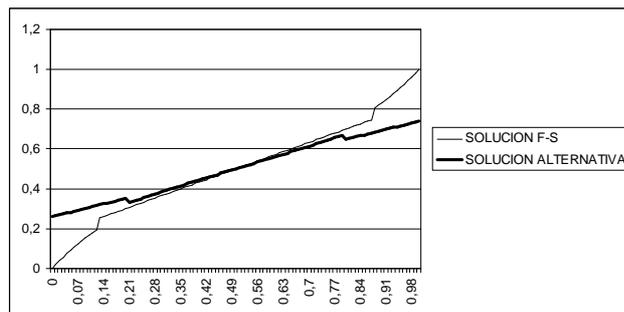


Figura III.32. Comparación de las medias de la solución planteada por Farnum y Stanton y la solución alternativa.

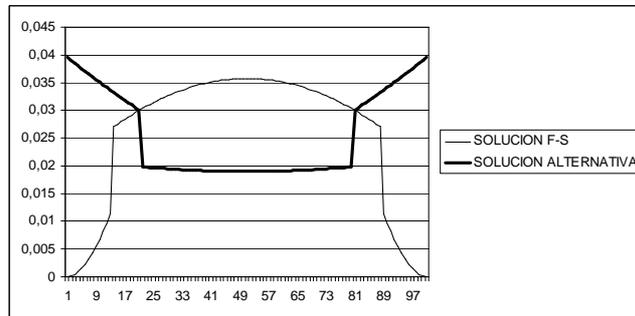


Figura III.33. Comparación de las varianzas de la solución planteada por Farnum y Stanton y la solución alternativa.

III.1.7.3. Comparación de varianzas

Como se ha dicho anteriormente uno de los criterios defendidos por Taha (1981), y desarrollado por Herrerías (1989), es el del conservadurismo, entendiendo que una distribución es más conservadora cuanto mayor es su varianza estimada. De ahí nace el interés por el estudio comparativo de las varianzas de las distribuciones habitualmente aplicadas en la metodología PERT.

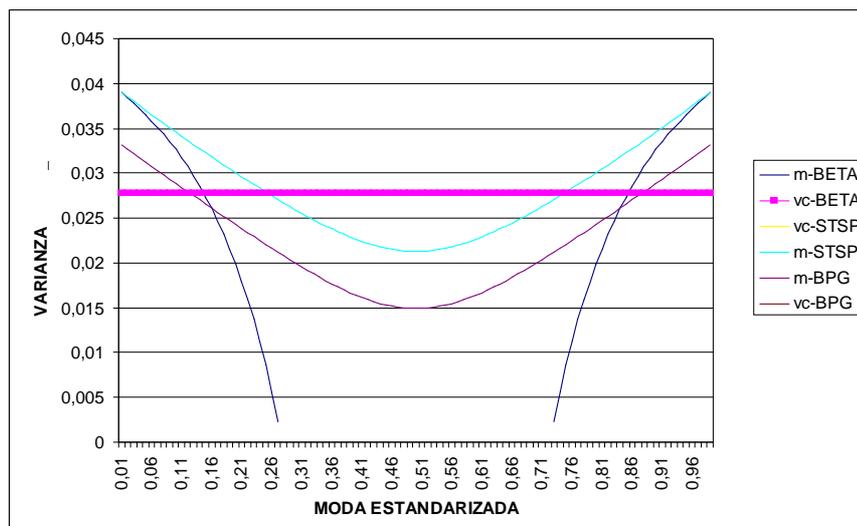


Figura III.31. Representación de las varianzas en función de M

De la figura (III.31) es posible construir el cuadro (III.15) en la cual se puede observar que la distribución STSP es siempre la más conservadora. Más específicamente, la distribución STSP de varianza constante es la mejor opción en el intervalo $0,252867 < M < 0,747133$ y la distribución STSP mesocúrtica en el resto de los valores de M .

Intervalos de M	Distribuciones según su conservadurismo
$0 < M < 0,123526$	MSTSP-MBETA-MBPG-CVSTSP=SVBPG=CVBETA
$0,123526 < M < 0,146437$	MSTSP-MBETA -CVSTSP=CVBPG=CVBETA-MBPG
$0,146437 < M < 0,252867$	MSTSP-CVSTSP=CVBPG=CVBETA -MBPG-MBETA
$0,252867 < M < 0,747133$	CVSTSP=CVBPG=CVBETA-MSTSP-MBPG
$0,747133 < M < 0,853553$	MSTSP-CVSTSP=CVBPG=CVBETA -MBPG-MBETA
$0,853553 < M < 0,876474$	MSTSP-MBETA -CVSTSP=CVBPG=CVBETA-MBPG
$0,876474 < M < 1$	MSTSP-MBETA-MBPG-CVSTSP=SVBPG=CVBETA

Cuadro III.15. Puntos de corte en la comparación de varianzas.

Esto daría lugar a otra propuesta alternativa a la de Farnum y Stanton (1987):

Si $0 < M < 0,252867$; M-STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n-2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
Si $0,252867 < M < 0,747133$; CV-STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n-2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$
Si $0,747133 < M < 1$; M-STSP	$\mu = \frac{(n-1)M + 1}{n+1}$	$\sigma^2 = \frac{n-2(n-1)M(1-M)}{(n+2)(n+1)^2}$

Cuadro III.16. Solución alternativa a la de Farnum y Stanton (1987)

En este caso se observa que las expresiones del valor esperado y la varianza son similares en todos los intervalos propuestos ya que la distribución en todos ellos es la misma. Sin embargo, dado que dentro de cada intervalo nos encontramos con diferentes subfamilias, el valor de n queda determinado de manera diferente dependiendo de que se trate de la subfamilia mesocúrtica o en la de varianza constante.

Tal y como se observa en las figuras (III.34) y (III.35), la solución alternativa propuesta es más moderada en media y además presenta una menor varianza cuando el valor de M se encuentra próximo al centro del intervalo ($M=0,5$), es decir cuando las estimaciones del experto son menos arriesgadas.

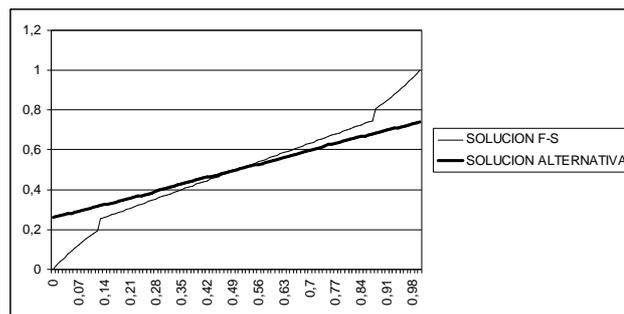


Figura III.34. Comparación de las medias de la solución planteada por Farnum y Stanton y la solución alternativa

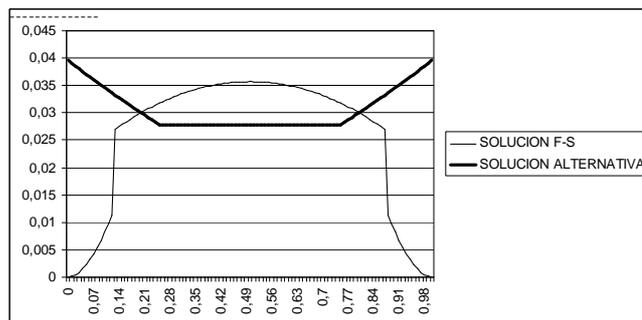


Figura III.35. Comparación de las varianzas de la solución planteada por Farnum y Stanton y la solución alternativa

III.2. GENERALIZACIÓN DE DOS RAMAS DE LA DISTRIBUCIÓN BIPARABÓLICA

El sistema generador presentado por van Dorp y Kotz (2003.b) permite obtener la STSP a partir de una función de densidad $p(y)$ creciente y definida en el intervalo $[0,1]$. La idea fundamental de dicho sistema generador es que partiendo de una función de densidad generadora, $p(y)$ creciente, a la que se le ha introducido un parámetro n o un vector de parámetros, se construye una familia de funciones de densidad unimodales y con la moda en el punto M .

Parece lógico pensar que dicho parámetro n y dicha función $p(y)$ no tienen porque ser iguales a ambos lados de la moda y es por ello que surge la generalización en dos ramas. En esta sección se presenta una herramienta que permite separar la especificación de cada una de las ramas en función de dos densidades generadoras distintas tomando el parámetro n_1 y la función $p(y)$ para la especificación de la primera rama y el parámetro n_2 y la función $q(y)$ para la segunda.

Se desarrolla esta herramienta para la distribución bipolarabólica y la distribución *Two-sided power* (TSP), dando lugar a la distribución bipolarabólica generalizada en dos ramas (BPG₂), la distribución *two-sided power* generalizada en dos ramas (TSP₂). También se combinarán ambas distribuciones para construir la distribución generalizada con una primera rama *two-sided power* y una segunda bipolarabólica (TSP-BP₂) y la distribución generalizada con una primera rama bipolarabólica y la otra *two-sided power* (BP-TSP₂).

Este desarrollo da lugar a distribuciones pentaparamétricas por lo que se desarrolla un apartado dedicado a la elicitación en el que se plantea, y se resuelve, cual será la información adicional que se requerirá al experto para la estimación de dichos parámetros.

Por último, se realiza una aplicación en el campo de la valoración comparando los resultados obtenidos mediante el MDFD (usando como subyacentes las distribuciones generalizadas anteriormente), el método sintético y el método de regresión simple. Esta sección culmina con un apartado dedicado a las conclusiones de la aplicación práctica.

III.2.1. Presentación de la herramienta

Sean $p(y/\psi)$ y $q(y/\gamma)$ dos funciones de densidad crecientes en el intervalo $[0,1]$ y $M \in [0,1]$ se pueden definir entonces una nueva función de densidad o una familia de funciones de densidad unimodales con la moda en el punto M del siguiente modo:

$$g\{t/M, p(\cdot/\psi), q(\cdot/\gamma)\} = \begin{cases} \frac{\pi}{M} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 \leq t \leq M \\ \frac{1-\pi}{1-M} q\left(\frac{1-t}{1-M}/\gamma\right), & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

donde $p(\cdot/\psi)$ y $q(\cdot/\gamma)$ son las densidades generadoras continuas y crecientes en el intervalo $[0,1]$.

Del mismo modo se puede definir la función de distribución asociada a g como:

$$G\{t/M, P(\cdot/\psi), Q(\cdot/\gamma)\} = \begin{cases} \pi P\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 \leq t \leq M \\ 1 - (1-\pi)Q\left(\frac{1-t}{1-M}/\gamma\right), & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

donde $P(\cdot/\psi)$ y $Q(\cdot/\gamma)$ son las funciones de distribución generadora acumulativas asociadas respectivamente a las densidades $p(\cdot/\psi)$ y $q(\cdot/\gamma)$.

Si $t \sim g\{t/M, p(\cdot/\psi), q(\cdot/\gamma)\}$, $Y_1 \sim p(\cdot/\psi)$ y $Y_2 \sim q(\cdot/\gamma)$ se deduce de (III.78) que:

$$E[t^k] = \pi M^k E[Y_1^k] + (1-\pi) \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (1-M)^i E[Y_2^k] \quad (\text{III.80})$$

En el caso especial en el que $p(\cdot/\psi) \equiv q(\cdot/\gamma)$, $\pi = M$ la expresión (III.78) se reduce a:

$$g\{t/M, p(\cdot/\psi)\} = \begin{cases} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 < t < M \\ q\left(\frac{1-t}{1-M}/\gamma\right), & M < t < 1 \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

Esta expresión es reconocida como la de la distribución TSP introducida por Kotz y van Dorp (2004). La ventaja de (III.78) sobre (III.81) es que permite especificaciones separadas para cada rama de la distribución.

Por otro lado, la densidad (III.81) es siempre continua para cualquier valor de M , mientras que para que la densidad (III.78) sea continua en el intervalo $[0,1]$ debe cumplirse que:

$$\frac{\pi}{M} p(1/\psi) = \frac{1-\pi}{1-M} q(1/\gamma) \quad (\text{III.82})$$

De la expresión (III.82) puede despejarse la expresión para π :

$$\pi = \frac{Mq(1/\gamma)}{(1-M)p(1/\psi) + Mq(1/\gamma)} \quad (\text{III.83})$$

Sustituyendo (III.83) en (III.78) se obtiene la siguiente expresión para funciones de densidad continuas unimodales en el recorrido $[0,1]$:

$$g\{t/M, p(\cdot/\psi), q(\cdot/\gamma)\} = \begin{cases} \frac{q(1/\gamma)}{(1-M)p(1/\psi) + Mq(1/\gamma)} p\left(\frac{t}{M}/\psi\right), & 0 \leq t \leq M \\ \frac{p(1/\psi)}{(1-M)p(1/\psi) + Mq(1/\gamma)} q\left(\frac{1-t}{1-M}/\gamma\right), & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Así pues, se puede afirmar que la expresión (III.84) permite separar la especificación de cada una de las ramas en función de dos densidades generadoras $p(\cdot/\psi)$ y $q(\cdot/\gamma)$.

III.2.2. Generalización de dos ramas de la distribución bипarabólica

Consideramos el caso en el que $p(\cdot/\psi)$ y $q(\cdot/\gamma)$ toman las siguientes expresiones:

$$p(y/n_1) = \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)y^{n_1}(2 - y^{n_1})}{3n_1 + 1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_1 \geq 0 \quad (\text{III.85})$$

$$q(y/n_2) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)y^{n_2}(2 - y^{n_2})}{3n_2 + 1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_2 \geq 0 \quad (\text{III.86})$$

con las siguientes funciones de distribución:

$$P(y/n_1) = \frac{2(2n_1 + 1)y^{n_1+1} - (n_1 + 1)y^{2n_1+1}}{3n_1 + 1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_1 \geq 0 \quad (\text{III.87})$$

$$Q(y/n_2) = \frac{2(2n_2 + 1)y^{n_2+1} - (n_2 + 1)y^{2n_2+1}}{3n_2 + 1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_2 \geq 0 \quad (\text{III.88})$$

Ambas cumplen la propiedad para todos los valores de $n_1 \geq 0$ y $n_2 \geq 0$.

$$\frac{d}{dy} p(1/n_1) = 0; \quad \frac{d}{dy} q(1/n_2) = 0 \quad (\text{III.89})$$

De (III.85) y (III.86) se deduce que:

$$p(1/n_1) = \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{3n_1 + 1}, \quad q(1/n_2) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)}{3n_2 + 1} \quad (\text{III.90})$$

Sustituyendo (III.85), (III.86) y (III.30) en (III.83) se obtiene la expresión de π :

$$\pi = \frac{M(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)}{(1 - M)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1) + M(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.91})$$

En la figura (III.36) se recoge la representación en el espacio de π para n_1 y n_2 variando en el intervalo $[1,100]$ y para $M=0,5$.

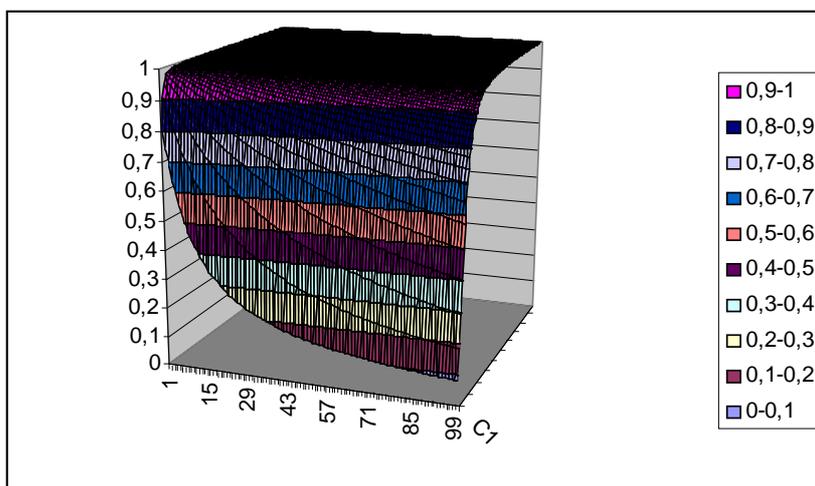


Figura III.36. Representación de π en el espacio.

Sustituyendo (III.91), (III.85) y (III.86) en (III.84) se obtiene la densidad:

$$g\{t/M, n_1, n_2\} = C(M, n_1, n_2) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n_1} \left\{2 - \left(\frac{t}{M}\right)^{n_1}\right\}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2} \left\{2 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2}\right\}, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.92})$$

donde:

$$C(M, n_1, n_2) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(1 - M)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1) + M(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.93})$$

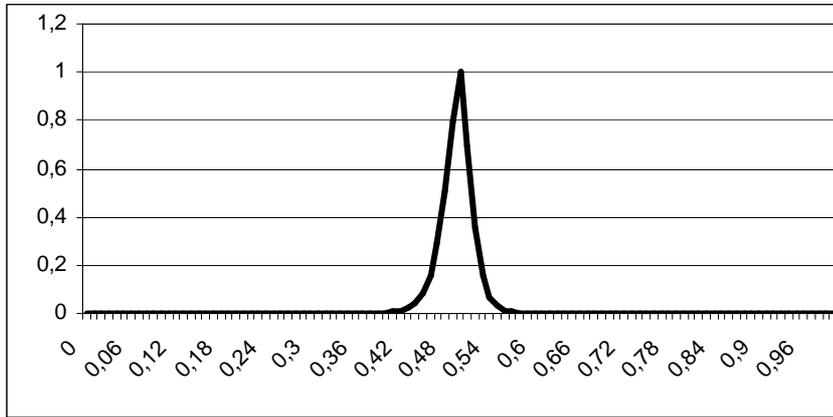


Figura III.37. Función de densidad SBPG₂ ($n_1=30$; $n_2=40$; $M=0.5$)

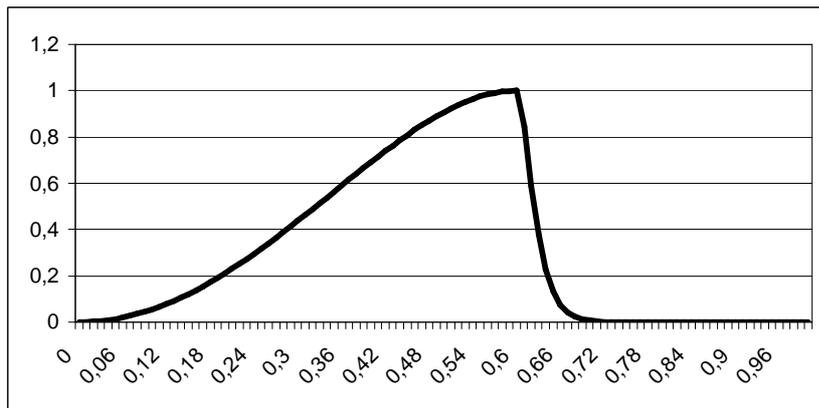


Figura III.38. Función de densidad SBPG₂ ($n_1=2$; $n_2=20$; $M=0.5$)

En las figuras (III.37) y (III.38) se recogen dos ejemplos de funciones de densidad de la distribución SBPG₂. De (III.85), (III.86) y (III.89) se deduce que la función de densidad (III.92) es continua y derivable en el punto M . Cuando $n_1=n_2$ entonces la expresión (III.93) pasa a ser:

$$C(n) = \frac{(2n + 1)(n + 1)}{(3n + 1)} \quad (\text{III.94})$$

Para $n_1=n_2=0$ la expresión (III.92) se reduce a una distribución uniforme $U[0,1]$. Para

$n_1=n_2=1$ la expresión (III.94) se reduce a $\frac{3}{2}$ y por tanto se obtiene la siguiente función de densidad que es la función biparabólica introducida en el segundo capítulo concretamente en la expresión (II.21):

$$g\{t/M, n\} = \frac{3}{2} \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right) \left\{2 - \left(\frac{t}{M}\right)\right\}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right) \left\{2 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)\right\}, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.95})$$

Con la siguiente representación gráfica para $M=0.5$:

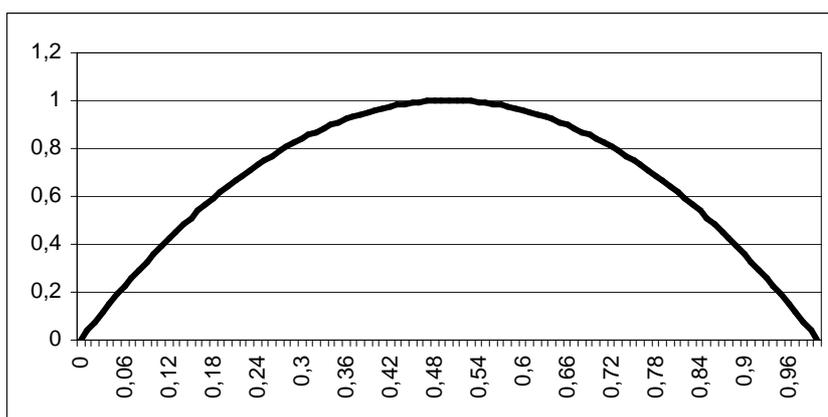


Figura III.39. Función de densidad SBPG₂ ($n_1=n_2=1$; $M=0.5$)

Y cuando $n_1 = n_2$ se obtiene la SBPG₁, expresión (III.13). La función de distribución acumulativa se obtiene sustituyendo las expresiones (III.87), (III.88) y (III.91) en la expresión (III.79).

Por último, si se realiza el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$ y $M = \frac{m-a}{b-a}$ entonces la función de densidad para la variable x con recorrido $[a, b]$ es:

$$f(x/a, m, b, n_1, n_2) = C(a, m, b, n_1, n_2) \begin{cases} \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n_1} \left\{ 2 - \left(\frac{x-a}{m-a} \right)^{n_1} \right\}, & a \leq x \leq m \\ \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n_2} \left\{ 2 - \left(\frac{b-x}{b-m} \right)^{n_2} \right\}, & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

Donde:

$$C(a, m, b, n_1, n_2) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(b-m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1) + (m-a)(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.97})$$

Sustituyendo el valor de π según la expresión (III.91) en la expresión (III.80) donde:

$$E[Y_1^k] = \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{3n_1 + 1} \left[\frac{3n_1 + k + 1}{(2n_1 + k + 1)(n_1 + k + 1)} \right] \quad (\text{III.98})$$

$$E[Y_2^k] = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)}{3n_2 + 1} \left[\frac{3n_2 + k + 1}{(2n_2 + k + 1)(n_2 + k + 1)} \right] \quad (\text{III.99})$$

se obtienen los momentos de la generadora.

Usando la relación existente con los momentos centrados respecto a la media se obtienen las características estocásticas más relevantes de esta distribución. Así pues, el valor esperado de la distribución (III.100), la varianza (III.101), las expresiones de ambas cuando $n_1 = n_2$, (III.102) y (III.103) y el coeficiente de curtosis (III.104) se recogen en el anexo matemático A dada la extensión de estas expresiones. Con el objeto de conseguir una idea gráfica e intuitiva del comportamiento de la distribución, se recogen a continuación una serie de gráficas de la media, la varianza y el coeficiente de curtosis.

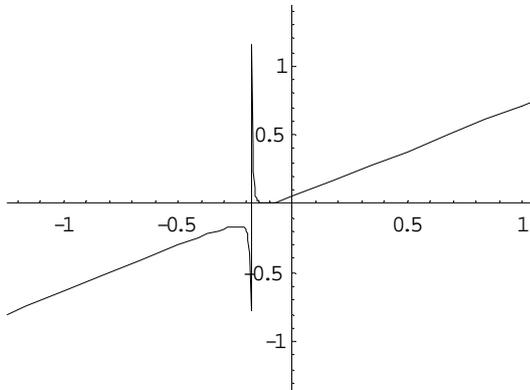


Figura III.40 Representación de la media $n_1=2; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

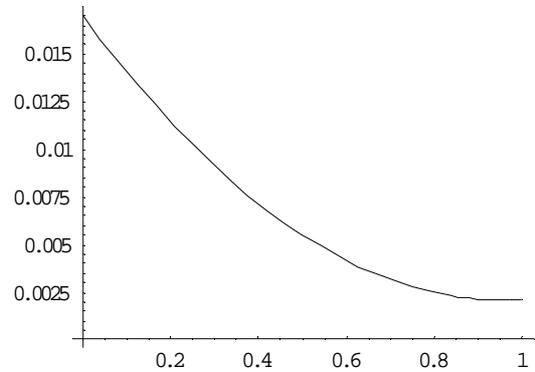


Figura III.41 Representación de la media $n_1=20; n_2=5; M \in \{0,1\}$

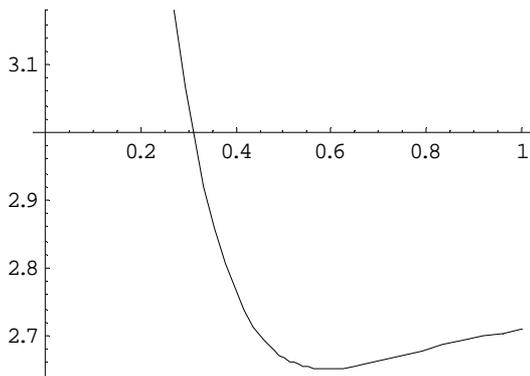


Figura III.42 Representación de la media $n_1=2; n_2=10; M \in \{-2,2\}$

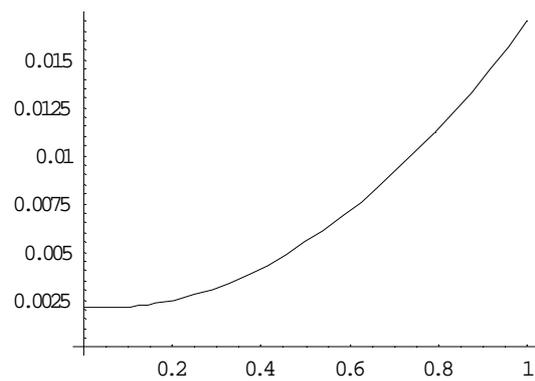


Figura III.43 Representación de la media. $n_1=5; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

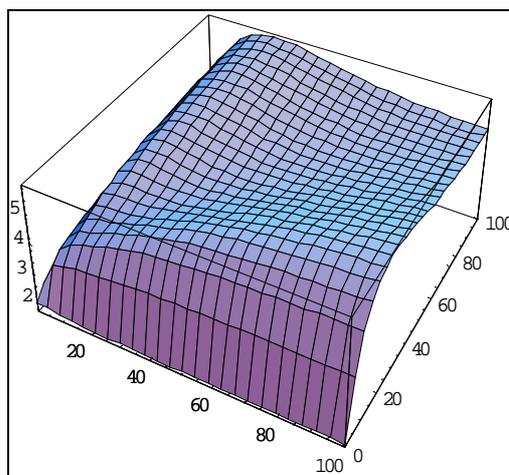


Figura. III.44. Representación en el espacio del coeficiente de curtosis. $M=0,5; n_1 \text{ y } n_2 \in \{0,100\}$

Con esta generalización se ha conseguido superar no solo la simetría criticada a la normal y compensada con la asimetría de la distribución triangular, beta, STSP, BPG₁, etc., sino que ahora cada una de las ramas, a uno y otro lado de la moda, pueden obedecer a una distribución generadora distinta.

Este hecho puede tener aplicación en el ámbito financiero para ajustar los rendimientos del mercado que a uno y a otro lado de la moda, situada habitualmente en el cero, representan etapas de mercado en alza o mercado a la baja.

Pudiera ser que el comportamiento del accionista obedeciera a densidades de distinto origen en cada caso ya que, parece lógico pensar que, en un mercado con beneficios el comportamiento del accionista es distinto que en un mercado con pérdidas y esto motivaría el uso de diferentes funciones generadoras a uno y otro lado de la moda.

III.2.3. Generalización de dos ramas de la distribución STSP₂

Si se toman como densidades generadoras las siguientes expresiones:

$$p(y/n_1) = n_1 y^{n_1-1} \quad (\text{III.105})$$

$$q(y/n_2) = n_2 y^{n_2-1} \quad (\text{III.106})$$

con las siguientes funciones de distribución:

$$P(y/n_1) = y^{n_1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_1 \geq 0; \quad (\text{III.107})$$

$$Q(y/n_1) = y^{n_2}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_2 \geq 0$$

Usando la expresión (III.83) y teniendo en cuenta que

$$p(1/n_1) = n_1 \quad (\text{III.108})$$

$$q(1/n_2) = n_2 \quad (\text{III.109})$$

Se obtiene la expresión para π :

$$\pi = \frac{Mn_2}{(1-M)n_1 + Mn_2} \quad (\text{III.110})$$

de manera análoga operando se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\pi}{M} = \frac{n_2}{(1-M)n_1 + Mn_2} \quad (\text{III.111})$$

$$\frac{1-\pi}{1-M} = \frac{n_1}{(1-M)n_1 + Mn_2} \quad (\text{III.112})$$

En la figura (III.45) se recoge una representación del valor de π en el espacio:

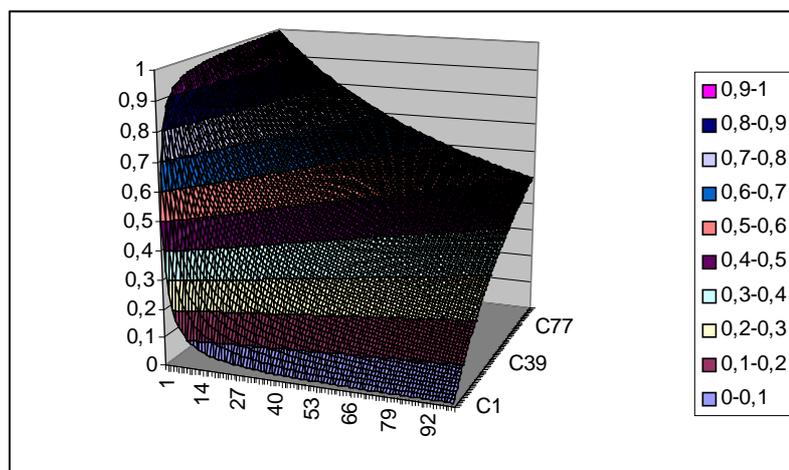


Figura III.45. Representación de π en el espacio.

Usando las expresiones (III.111), (III.112) y (III.78) se obtiene:

$$g(t/n_1, n_2, M) = \frac{n_1 n_2}{(1-M)n_1 + Mn_2} \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n_1-1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2-1}, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.113})$$

En las figuras (III.46) y (III.47) se recogen gráficas de la función de densidad (III.113) para diferentes valores de n_1 , n_2 y M .

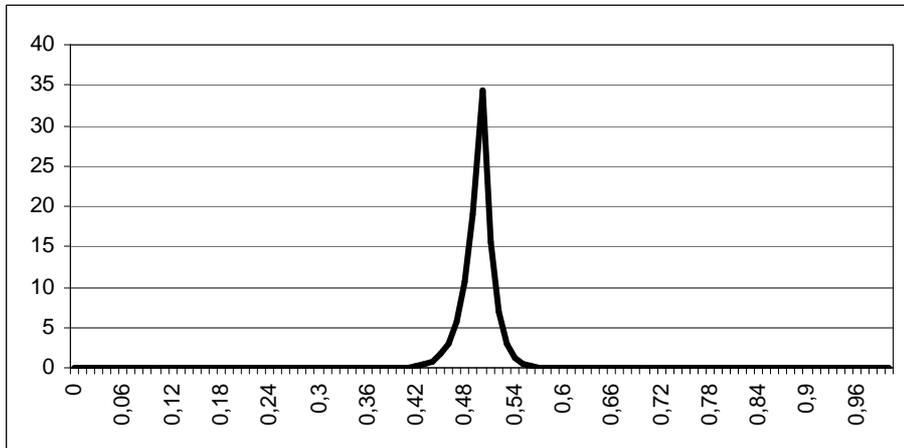


Figura III.46. Función de densidad $STSP_2$ ($n_1=30; n_2=40; M=0.5$)

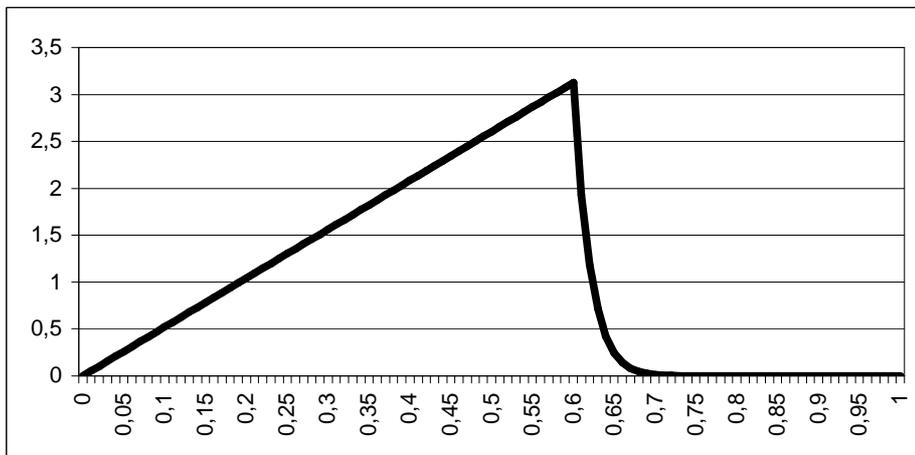


Figura III.47. Función de densidad $STSP_2$ ($n_1=2; n_2=20; M=0.6$)

En el caso en el que $n_1=n_2$

$$g(t/n, M) = C(n_1, n_2, M) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n-1}, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (III.114)$$

Donde:

$$C(n, M) = \frac{n^2}{(1-M)n + Mn} = n \quad (\text{III.115})$$

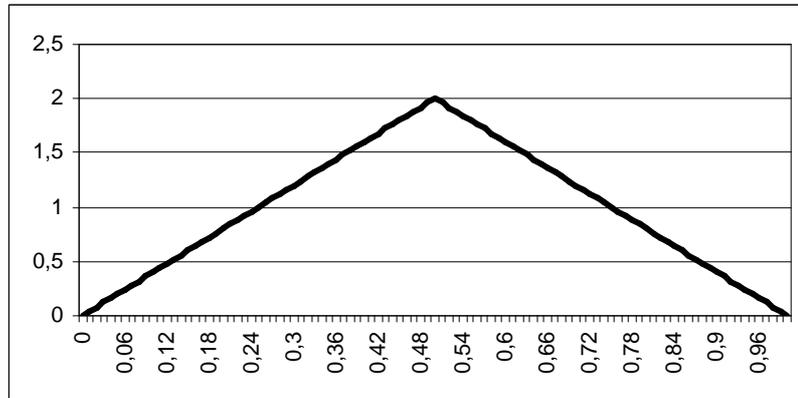


Figura III.48. Función de densidad STSP₂ (n₁=n₂=2; M=0,5)

En la figura (III.48) se recoge la representación gráfica de la función de densidad (III.114) para $M=0.5$ y $n_1 = n_2 = 2$, que en definitiva se trata de una distribución triangular simétrica.

Sustituyendo el valor de π según la expresión (III.110) en la expresión (III.80) donde:

$$E[Y_1^k] = \frac{n_1}{n_1 + k} \quad (\text{III.116})$$

$$E[Y_2^k] = \frac{n_2}{n_2 + k} \quad (\text{III.117})$$

Se obtienen los momentos de la generadora y se pueden obtener las características principales de la distribución. Así pues, el valor esperado de la distribución (III.118), la varianza (III.119), las expresiones de ambas cuando $n_1=n_2$, (III.120) y (III.121), el coeficiente de curtosis (III.122) y el coeficiente de asimetría (III.123) se recogen en el anexo matemático A dada la extensión de estas expresiones. Se recogen a continuación una serie de gráficas de la media, la varianza y el coeficiente de curtosis, con el objeto de conseguir una idea gráfica e intuitiva de su comportamiento.

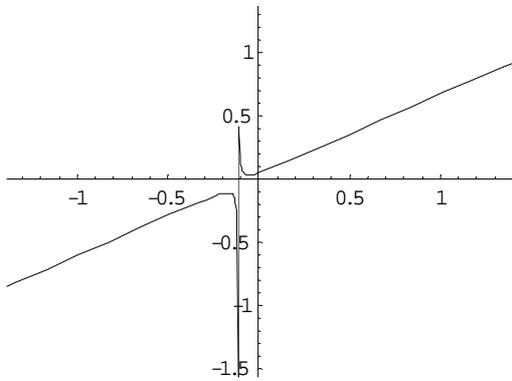


Figura III.49 Representación de la media $n_1=2; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

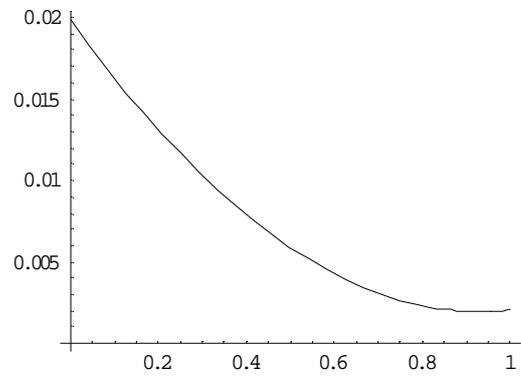


Figura III.50 Representación de la varianza $n_1=20; n_2=5; M \in \{0,1\}$

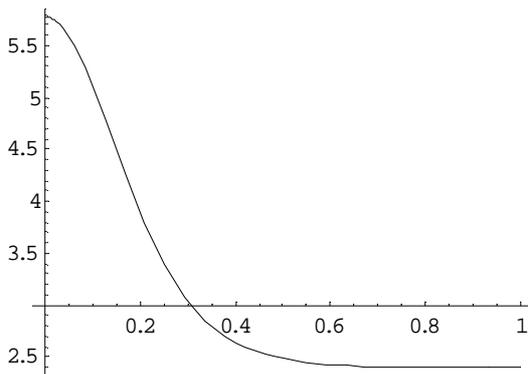


Figura III.51 Representación de la curtosis $n_1=2; n_2=10; M \in \{-2,2\}$

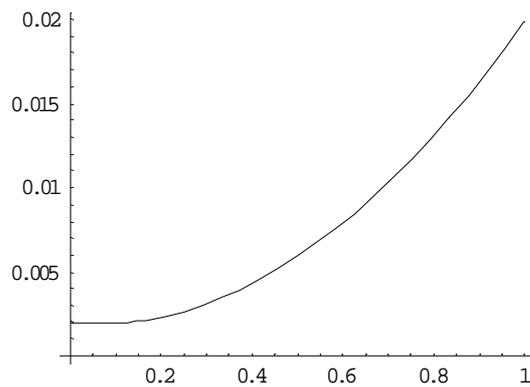


Figura III.52 Representación de la varianza $n_1=5; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

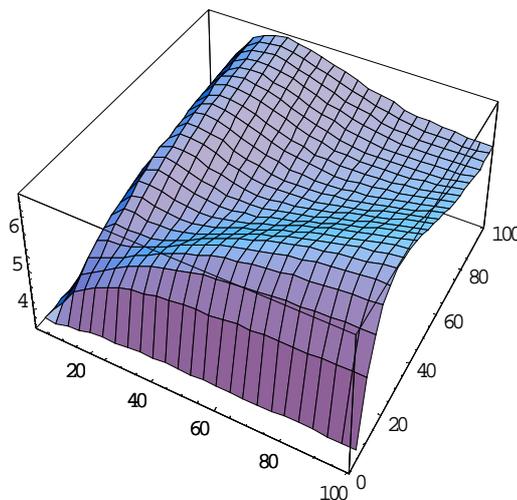


Figura III.53 Representación en el espacio del coeficiente de curtosis.
 $M=0,5; n_1 \text{ y } n_2 \in \{0,100\}$

III.2.4. Generalización mixta de una rama STSP y otra rama BPG.

Partiendo de las siguientes densidades generadoras:

$$p(y/n_1) = n_1 y^{n_1-1} \quad (III.124)$$

$$q(y/n_2) = \frac{(2n_2+1)(n_2+1)}{3n_2+1} y^{n_2} (2-y^{n_2}) \quad (III.125)$$

Y las siguientes funciones de distribución:

$$P(y/n_1) = y^{n_1}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_1 \geq 0;$$

$$Q(y/n_2) = \frac{2(2n_2+1)y^{n_2+1} - (n_2+1)y^{2n_2+1}}{(3n_2+1)}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_2 \geq 0 \quad (III.126)$$

Usando la expresión (III.83) se obtiene la siguiente expresión para π que queda representada en la figura (III.54):

$$\pi = \frac{M(2n_2+1)(n_2+1)}{(1-M)n_1(3n_2+1) + M(2n_2+1)(n_2+1)} \quad (III.127)$$

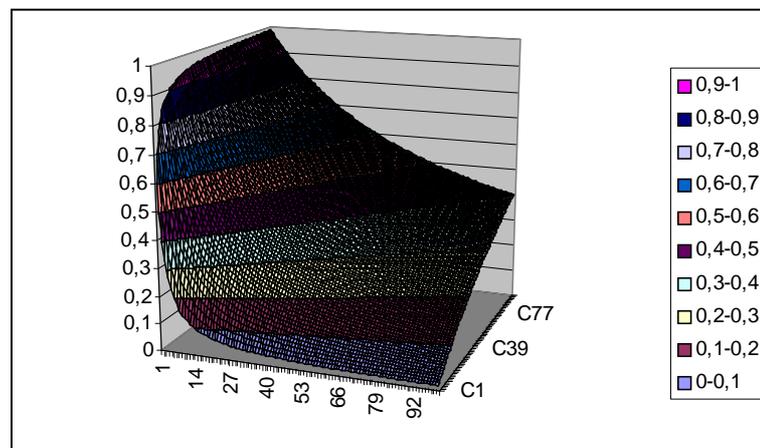


Figura III.54. Representación de π en el espacio ($M=0,5$)

Una vez conocido el valor de π , la función de densidad tomara la expresión:

$$g(t/n_1, n_2, M) = C(n_1, n_2, M) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n_1-1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2} \left[2 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2}\right], & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.128})$$

Donde:

$$C(n_1, n_2, M) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)n_1}{(1 - M)n_1(3n_2 + 1) + M(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.129})$$

Si $n_1=n_2$:

$$g(t/n, M) = C(n, M) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n\right], & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.130})$$

donde:

$$C(n, M) = \frac{(2n + 1)(n + 1)n}{(3n^2 + 1) + Mn(3 - n)} \quad (\text{III.131})$$

En las figuras (III.55) y (III.56) se recoge la representación gráfica de la función de densidad (III.128) para distintos valores n_1, n_2 y M . En la figura (III.57) se representa la función de densidad recogida en la expresión (III.130) para $n_1=n_2=1$ y $M=0,5$.

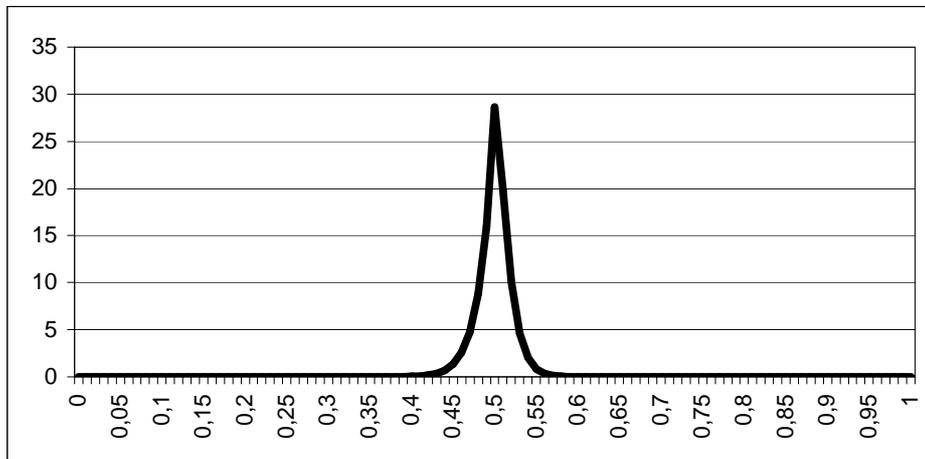


Figura III.55. Función de densidad STSP-BP₂ ($n_1=30; n_2=40; M=0,5$)

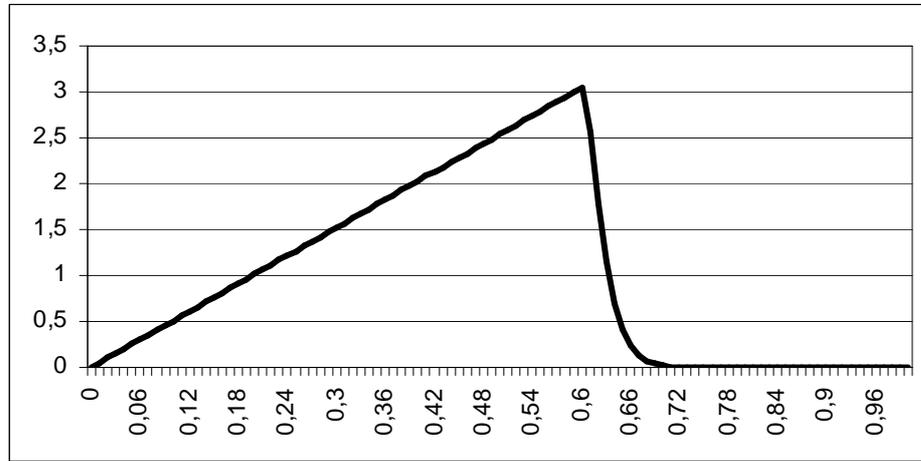


Figura III.56. Función de densidad STSP-BP₂(n₁=2;n₂=20;M=0.6)

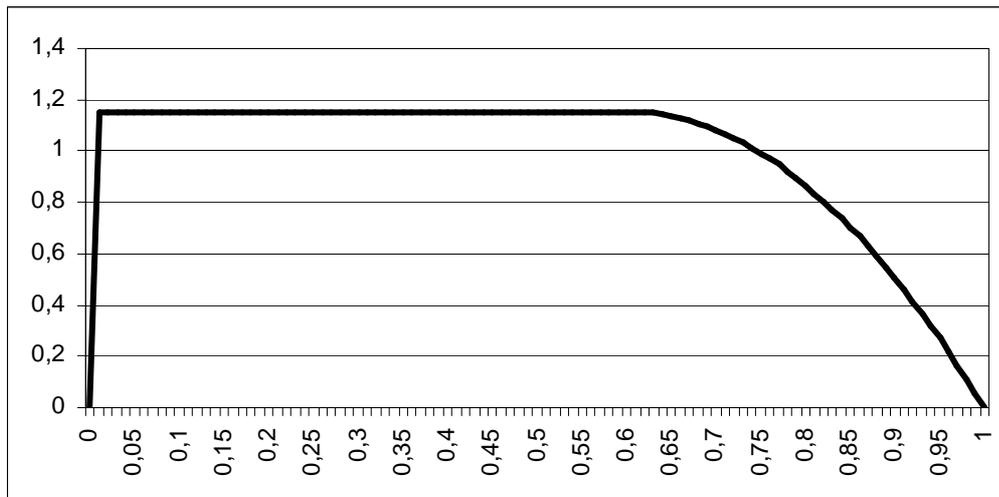


Figura (III.57) Función de densidad STSP-BP₂(n₁=n₂=1;M=0.5)

Se obtienen los momentos de la generadora sustituyendo el valor de π según la expresión (III.126) en la expresión (III.80) donde:

$$E[Y_1^k] = \frac{n_1}{n_1 + k} \tag{III.132}$$

$$E[Y_2^k] = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)}{3n_2 + 1} \left[\frac{3n_2 + k + 1}{(2n_2 + k + 1)(n_2 + k + 1)} \right] \tag{III.133}$$

A partir de ellos, se puede obtener, el valor esperado de la distribución (III.134), la varianza (III.135), las expresiones de ambas cuando $n_1=n_2$, (III.136) y (III.137), el coeficiente de curtosis (III.138) y el coeficiente de asimetría (III.139) se recogen en el anexo matemático A dada la extensión de estas expresiones. A continuación se recogen una serie de gráficas de la media, la varianza y el coeficiente de curtosis, con el objeto de conseguir una idea gráfica e intuitiva de su comportamiento.

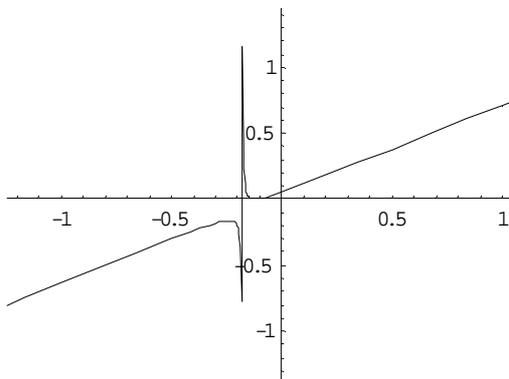


Figura III.58 Representación de la media. $n_1=2; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

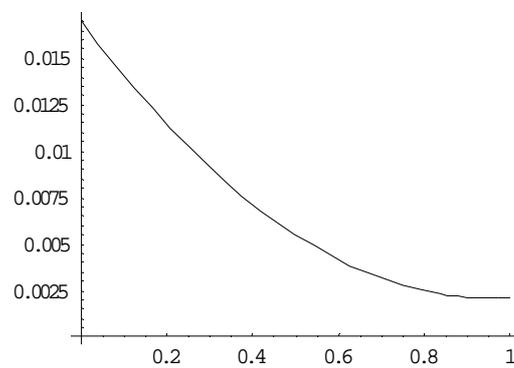


Figura III.59 Representación de la varianza. $n_1=20; n_2=5; M \in \{0,1\}$

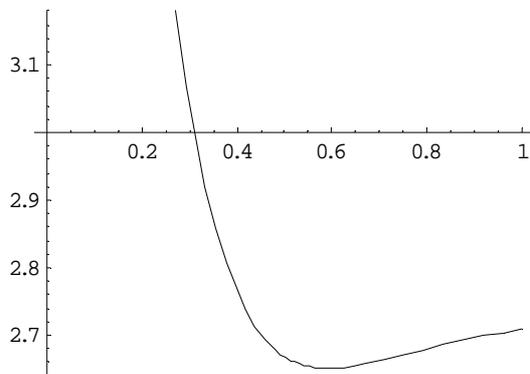


Figura III.60 Representación de la curtosis. $n_1=2; n_2=10; M \in \{-2,2\}$

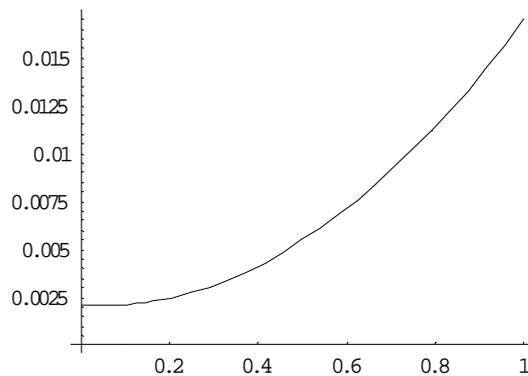


Figura III.61 Representación de la varianza. $n_1=5; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

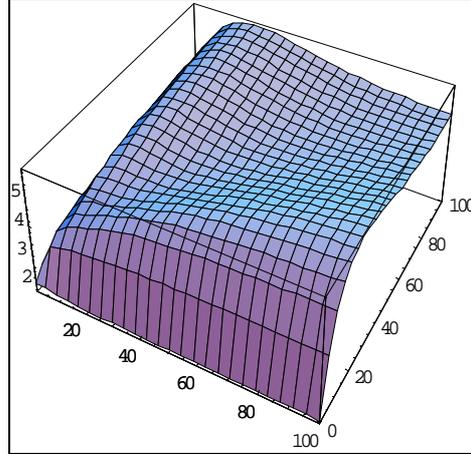


Figura III.62. Representación en el espacio del coef. de curtosis. $M=0,5$; n_1 y $n_2 \in \{0,100\}$

III.2.5. Generalización mixta de una rama BP y otra rama STSP

Partiendo de las siguientes densidades generadoras:

$$p(y/n_1) = \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{3n_1 + 1} y^{n_1} (2 - y^{n_2}) \quad (\text{III.140})$$

$$q(y/n_2) = n_2 y^{n_2 - 1} \quad (\text{III.141})$$

Y las siguientes funciones de distribución:

$$P(y/n_1) = \frac{2(2n_1 + 1)y^{n_1 + 1} - (n_1 + 1)y^{2n_1 + 1}}{(3n_1 + 1)}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_1 \geq 0; \quad (\text{III.142})$$

$$Q(y/n_2) = y^{n_2}, \quad 0 \leq y \leq 1, n_2 \geq 0$$

Usando la expresión (III.83) se obtiene la siguiente expresión para π :

$$\pi = \frac{Mn_2(3n_1 + 1)}{(1 - M)(2n_1 + 1)(n_1 + 1) + Mn_2(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.143})$$

En la figura (III.63) se recoge la representación en el espacio del valor de π :

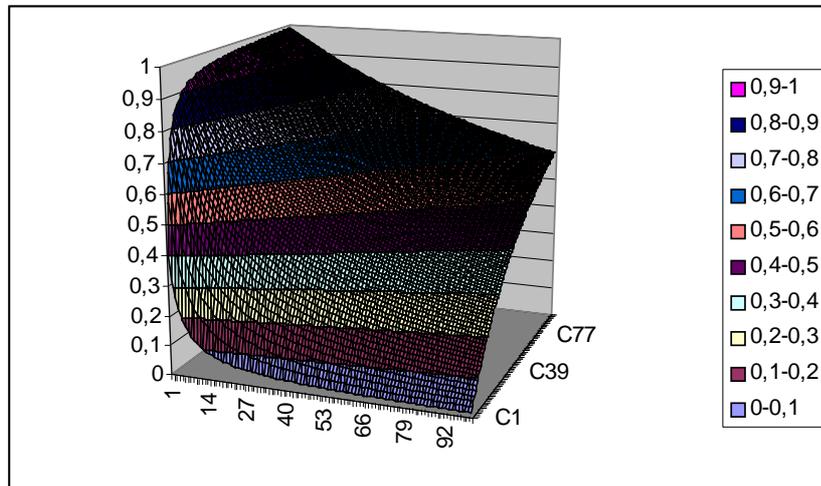


Figura III.63. Representación de π en el espacio ($M=0,5$)

Una vez conocido el valor de π , la función de densidad tomará la expresión:

$$g(t/n_1, n_2, M) = C(n_1, n_2, M) \begin{cases} 2\left(\frac{t}{M}\right)^{n_1} - \left(\frac{t}{M}\right)^{2n_1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^{n_2-1}, & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.144})$$

Donde:

$$C(n_1, n_2, M) = \frac{n_2(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(1 - M)(2n_1 + 1)(n_1 + 1) + Mn_2(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.145})$$

En las figuras (III.64) y (III.65) se recogen la representación gráfica de las funciones de densidad para la distribución SBP-TSP₂, para diferentes valores de n_1 , n_2 y M .

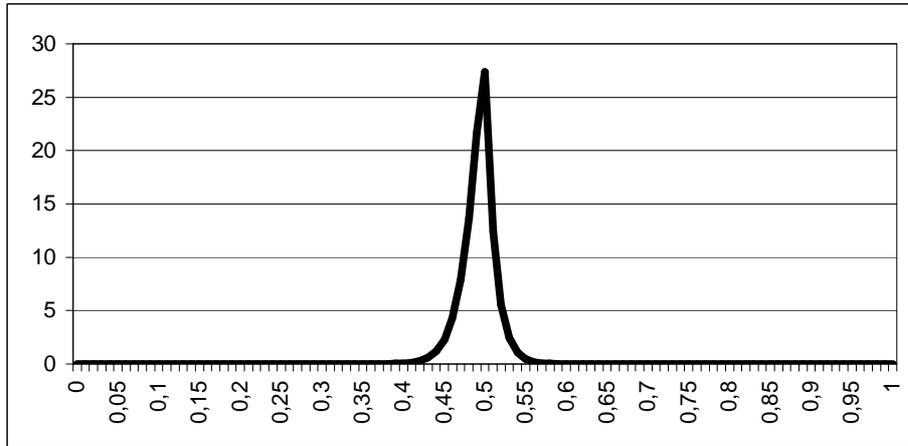


Figura III.64. Función de densidad SBP-TSP($n_1=30; n_2=40; M=0.5$)

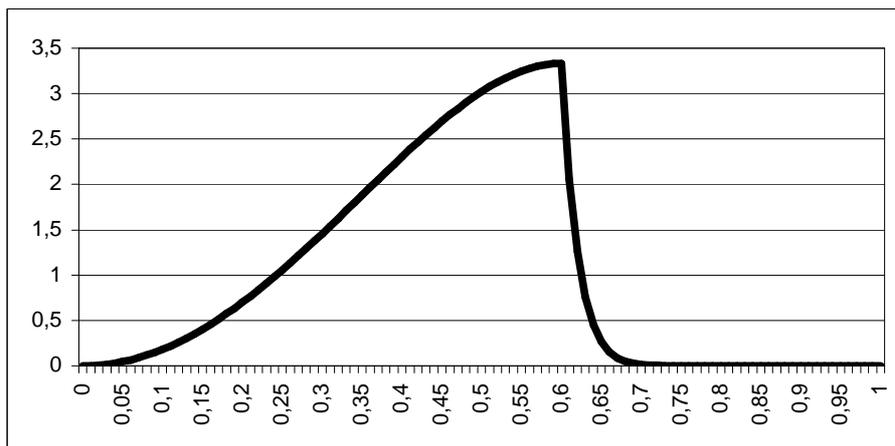


Figura III.65. Función de densidad SBP-TSP($n_1=2; n_2=20; M=0.6$)

Si $n_1=n_2$:

$$g(t/n, M) = C(n, M) \begin{cases} \left(\frac{t}{M}\right)^{n-1}, & 0 \leq t \leq M \\ \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1-t}{1-M}\right)^n\right], & M \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.146})$$

Donde:

$$C(n, M) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{(3n^2+1) + Mn(3-n)} \quad (\text{III.147})$$

En la figura (III.66) se recoge la representación gráfica de la función de densidad (III.146) para $n_1=n_2=1$ y $M=0,5$.

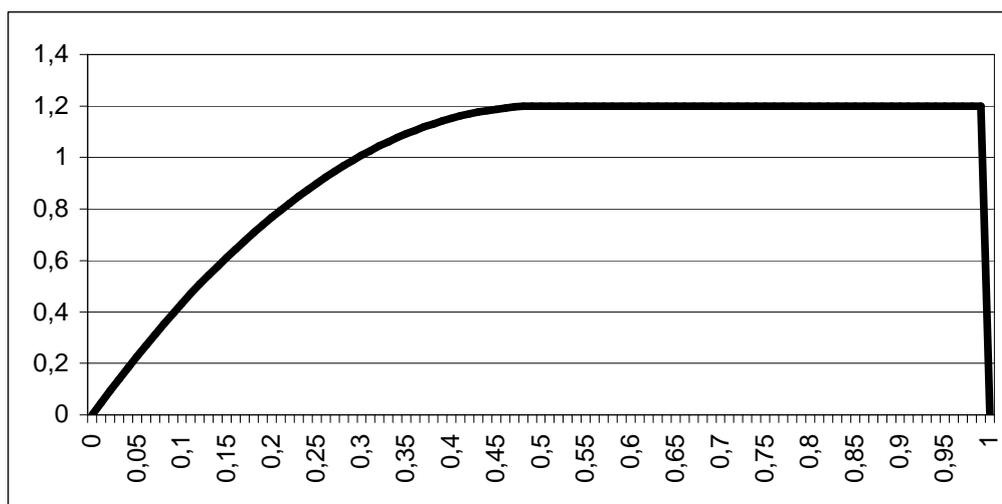


Figura III.66. Función de densidad SBP-STSP₂ ($n_1=n_2=1; M=0,5$)

Sustituyendo el valor de π según la expresión (III.143) en la expresión (III.80) donde:

$$E[Y_1^k] = \frac{(2n_1+1)(n_1+1)}{3n_1+1} \left[\frac{3n_1+k+1}{(2n_1+k+1)(n_1+k+1)} \right] \quad (\text{III.148})$$

$$E[Y_2^k] = \frac{n_2}{n_2+k} \quad (\text{III.149})$$

Se obtienen los momentos de la generadora y a partir de aquí se pueden conocer las características estocásticas más relevantes de esta distribución. Así pues, el valor esperado de la distribución (III.150), la varianza (III.151), las expresiones de ambas cuando $n_1=n_2$, (III.152) y (III.153) y el coeficiente de curtosis (III.154) se recogen en el anexo matemático A, dada la extensión de estas expresiones. Se recogen a continuación una serie de gráficas de la media, la varianza y el coeficiente de curtosis, con el objeto de conseguir una idea gráfica e intuitiva de su comportamiento.

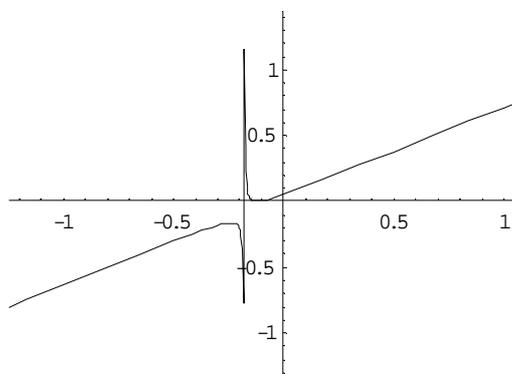


Figura III.67 Representación de la media $n_1=2; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

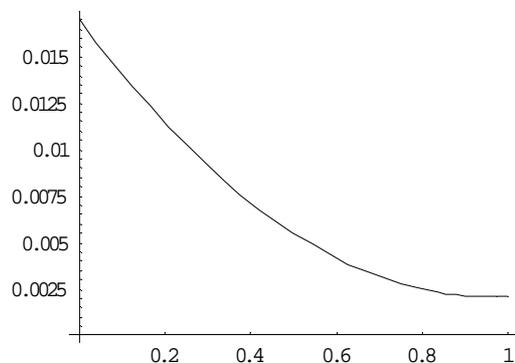


Figura III.68 Representación de la varianza $n_1=20; n_2=5; M \in \{0,1\}$

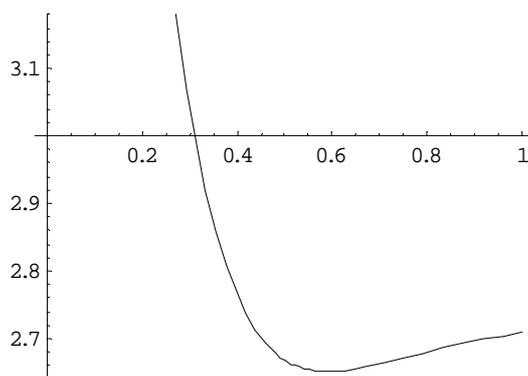


Figura III.69 Representación de la curtosis $n_1=2; n_2=10; M \in \{-2,2\}$

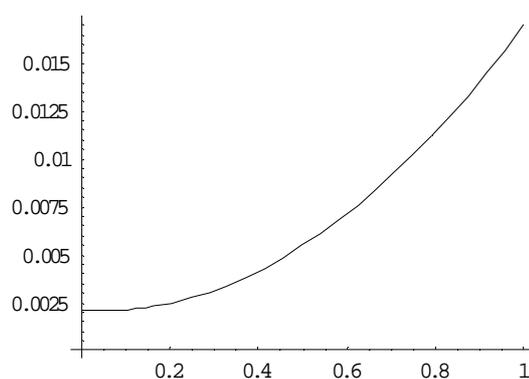


Figura III.70 Representación de la varianza $n_1=5; n_2=20; M \in \{-2,2\}$

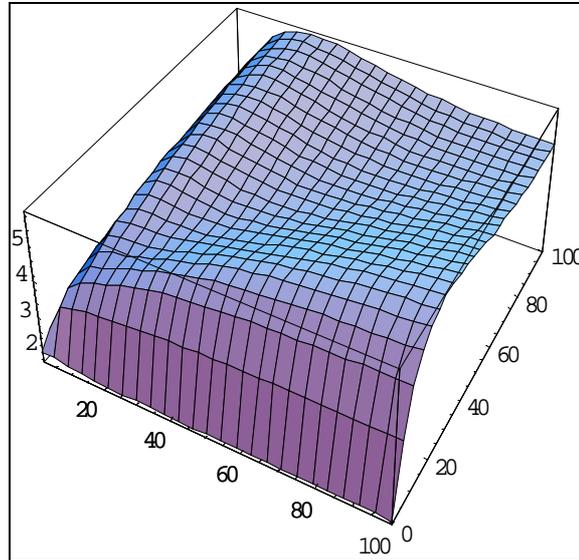


Figura III.71. Representación en el espacio del coef. de curtosis. $M=0,5$; n_1 y $n_2 \in \{0,100\}$

III.2.6. Elicitación

III.2.6.1. Elicitación de la distribución SBP_2

Suponiendo que la distribución subyacente es la biparabólica y a partir de los valores $(a, m$ y $b)$ aportados por un experto y la probabilidad de que el valor x de la variable se encuentre por debajo de m , es decir: $\text{Prob}(x < m) = \pi$, entonces el valor de π será el recogido en la expresión (III.91) que al desestandarizar se transforma en:

$$\pi = \frac{(m-a)(2n_2+1)(n_2+1)(3n_1+1)}{(b-m)(2n_1+1)(n_1+1)(3n_2+1) + (m-a)(2n_2+1)(n_2+1)(3n_1+1)} \quad (\text{III.155})$$

De donde se deduce:

$$1 - \pi = \frac{(b - m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1)}{(b - m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1) + (m - a)(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.156})$$

Y por tanto:

$$\frac{m - a}{b - m} \frac{(3n_1 + 1)}{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)} = \frac{\pi}{1 - \pi} \frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.157})$$

Nótese que el multiplicador de la rama derecha es un ratio entre la diferencia entre la moda y el valor inferior y la diferencia entre la moda y el valor superior, mientras que el multiplicador de la izquierda es el ratio entre sus respectivas probabilidades.

Si llamamos a_p al percentil p de la distribución bipolarabólica entonces:

$$\pi P\left(\frac{a_p - a}{m - a} / n_1\right) = p \quad (\text{III.158})$$

Despejando:

$$\frac{4n_1 + 2}{3n_1 + 1} \left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)^{n_1 + 1} - \frac{n_1 + 1}{3n_1 + 1} \left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)^{2n_1 + 1} = \frac{p}{\pi} \quad (\text{III.159})$$

Definimos $f(n_1)$ como:

$$f(n_1) = \frac{4n_1 + 2}{3n_1 + 1} \left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)^{n_1 + 1} - \frac{n_1 + 1}{3n_1 + 1} \left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)^{2n_1 + 1} \quad (\text{III.160})$$

Siendo $f(n_1)$ una función estrictamente decreciente con una moda en $n_1=0$ y $f(0) = \frac{a_p - a}{m - a}$.

Se demuestra que la ecuación (III.160) no tiene solución para el caso en el que $\frac{a_p - a}{m - a} < \frac{p}{\pi}$,

ya que se está definiendo una distribución con forma en U, y este caso no es contemplado en la familia de distribuciones biparabólicas. Cuando $\frac{a_p - a}{m - a} = \frac{p}{\pi}$, la solución es $n_1 = 0$ coincidiendo con la solución de la distribución uniforme. Cuando $\frac{a_p - a}{m - a} > \frac{p}{\pi}$ se puede obtener una solución a través de aproximaciones sucesivas o el conocido método de *GoalSeek* en Microsoft Excel.

Conocido el valor para n_1 el siguiente paso es hallar n_2 y para ello se parte de la expresión (III.157) en la que se despeja dicho parámetro:

$$\frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} = \frac{m - a}{b - m} \frac{(3n_1 + 1)}{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)} \frac{1 - \pi}{\pi} \quad (\text{III.161})$$

Definimos $g(n_2)$ como:

$$g(n_2) = \frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.162})$$

Se demuestra que se trata de una función estrictamente decreciente con valores de la moda en el intervalo $0 < M < 1$ y con una asíntota en el eje x cuando $n_2 \rightarrow \infty$.

Si llamamos k al segundo miembro de la ecuación (III.161):

$$\frac{m - a}{b - m} \frac{(3n_1 + 1)}{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)} \frac{1 - \pi}{\pi} = k \quad (\text{III.163})$$

Entonces despejando de esa misma expresión se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$2kn_2^2 + (3k - 3)n_2 + k - 1 = 0 \quad (\text{III.164})$$

Existirá una única solución para n_2 si y solo si $k < 1$:

EJEMPLO: Partiendo de los valores (30,36,52) aportados por un experto, sabiendo que el percentil 5 es 31, $a_{0,05}=31$ y la probabilidad de que x quede por debajo de la moda es 0,5, $\text{Prob}(x < m) = \pi = 0,5$, entonces despejando de la expresión (III.159) se obtiene un valor para $n_1=0,292574$ aplicando la función de *FindRoot* del Mathematica. Posteriormente se resuelve la ecuación (III.164) una vez que se obtiene el valor de k a partir de la expresión (III.163):

$$k = \frac{36-30}{52-36} \frac{(3 \cdot 0,292574 + 1)}{(2 \cdot 0,292574 + 1)(0,292574 + 1)} \frac{1-0,5}{0,5} = 0,343666 \quad (\text{III.165})$$

$$0,6873n_2^2 - 1,969n_2 - 0,65 = 0 \Rightarrow n_2 = -0,301571; n_2 = 3,1664 \quad (\text{III.166})$$

III.2.6.2. Elicitación de la distribución STSP₂

Suponiendo que la distribución subyacente es la *two-sided power* y a partir de los valores (a , m y b) aportados por un experto y la probabilidad de que el valor x de la variable se encuentre por debajo de m , es decir: $\text{Prob}(x < m) = \pi$, entonces el valor de π será el recogido en la expresión (III.110) que al desestandarizar se obtiene

$$\pi = \frac{(m-a)n_2}{(b-m)n_1 + (m-a)n_2} \quad (\text{III.167})$$

De donde se deduce:

$$1 - \pi = \frac{(b-m)n_1}{(b-m)n_1 + (m-a)n_2} \quad (\text{III.168})$$

Y por tanto:

$$\frac{\pi}{1-\pi} n_1 = \frac{m-a}{b-m} n_2 \quad (\text{III.169})$$

Si además se cuenta con el valor de un percentil a_p entonces:

$$\pi P\left(\frac{a_p - a}{m - a} / n_1\right) = p \quad (\text{III.170})$$

Despejando:

$$n_1 = \frac{\text{Log}(p/\pi)}{\text{Log}\left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)} \quad (\text{III.171})$$

Sustituyendo (III.171) en la expresión (III.169):

$$n_2 = \frac{(b-m) \pi}{(m-a) 1-\pi} \frac{\text{Log}(p/\pi)}{\text{Log}\left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)} \quad (\text{III.172})$$

Y de esta manera la distribución STSP₂ quedaría elicitada directamente.

EJEMPLO: Partiendo de los valores (30,36,52) aportados por un experto y sabiendo que el percentil 5 es 31, $a_{0,05}=31$ y la probabilidad de que x quede por debajo de la moda es 0,5, $\text{Prob}(x < m) = \pi = 0,5$, entonces despejando de la expresión (III.171).

$$n_1 = \frac{\text{Log}(0,05/0,5)}{\text{Log}\left(\frac{31-30}{36-30}\right)} = 1,285097 \quad (\text{III.173})$$

Y sustituyendo este valor en la expresión (III.172):

$$n_2 = \frac{(52 - 36)}{(36 - 30)} \frac{0,5}{1 - 0,5} 1,285097 = 3,4269 \quad (\text{III.174})$$

III.2.6.3. Elicitación de la distribución STSP-BP2

Suponiendo que la distribución subyacente es una distribución mixta en la que la primera rama está definida por la distribución STSP y la segunda por la distribución SBP, se notará como STSP-BP₂. Partiendo de los valores (a , m y b) aportados por un experto y la probabilidad de que el valor x de la variable se encuentre por debajo de m , es decir: $\text{Prob}(x < m) = \pi$, entonces el valor de π será el recogido en la expresión (III.127) que al desestandarizar se obtiene:

$$\pi = \frac{(m - a)(2n_2 + 1)(n_2 + 1)}{(b - m)n_1(3n_2 + 1) + (m - a)(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.175})$$

De donde se deduce:

$$1 - \pi = \frac{(b - m)n_1(3n_2 + 1)}{(b - m)n_1(3n_2 + 1) + (m - a)(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.176})$$

Y por tanto:

$$\frac{m - a}{b - m} \frac{1}{n_1} = \frac{\pi}{1 - \pi} \frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.177})$$

Nótese que el multiplicador de la rama derecha es el ratio entre la diferencia entre la moda y el valor inferior y la diferencia entre la moda y el valor superior, mientras que el multiplicador de la izquierda es el ratio entre sus respectivas probabilidades.

Si llamamos a_p al percentil p de la distribución bipolarabólica entonces:

$$\pi P\left(\frac{a_p - a}{m - a} / n_1\right) = p \quad (\text{III.178})$$

Despejando:

$$n_1 = \frac{\text{Log}(p / \pi)}{\text{Log}\left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)} \quad (\text{III.179})$$

Conocido el valor para n_1 el siguiente paso es hallar n_2 y para ello se parte de la expresión (III.177) en la que se despeja dicho parámetro:

$$\frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} = \frac{m - a}{b - m} \frac{1}{n_1} \frac{1 - \pi}{\pi} \quad (\text{III.180})$$

Se define $g(n_2)$ como:

$$g(n_2) = \frac{(3n_2 + 1)}{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)} \quad (\text{III.181})$$

Se demuestra que se trata de una función estrictamente decreciente con valores de la moda en el intervalo $0 < M < 1$ y con una asíntota en el eje x cuando $n_2 \rightarrow \infty$.

Si llamamos z al segundo miembro de la ecuación (III.180):

$$z = \frac{m - a}{b - m} \frac{1}{n_1} \frac{1 - \pi}{\pi} \quad (\text{III.182})$$

Entonces despejando de esa misma expresión se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$2zn_2^2 + (3z - 3)n_2 + z - 1 = 0 \quad (\text{III.183})$$

Existirá una única solución para n_2 si y solo si $z < 1$:

EJEMPLO: Partiendo de los valores (30,36,52) aportados por un experto, sabiendo que el percentil 5 es 31, $a_{0,05}=31$ y la probabilidad de que x quede por debajo de la moda es 0,5, $\text{Prob}(x < m) = \pi = 0,5$, entonces despejando de la expresión (III.179)

$$n_1 = \frac{\text{Log}(0,05/0,5)}{\text{Log}\left(\frac{31-30}{36-30}\right)} = 1,285097 \quad (\text{III.184})$$

Sustituyendo el valor de n en la expresión (III.183) se obtiene el valor de z :

$$z=0,2918 \quad (\text{III.185})$$

y resolviendo la ecuación (III.184) en el Mathematica obtenemos una solución para n_2 .

$$0,5836n_2^2 - 2,1245n_2 - 0,7081 = 0 \Rightarrow n_2 = -0.307352, n_2 = 3.94769 \quad (\text{III.186})$$

Dado que el valor de n_2 tiene que ser siempre positivo concluimos que $n_2=3,94769$.

III.2.6.4. Elicitación de la distribución SBP-TSP₂

Suponiendo que la distribución subyacente es una distribución mixta en la que la primera rama está definida por la distribución SBP y la segunda por la distribución STSP, se notará como SBP-TSP₂, y partiendo de los valores (a , m y b) aportados por un experto y la probabilidad de que el valor x de la variable se encuentre por debajo de m , es decir:

$\text{Prob}(x < m) = \pi$, entonces el valor de π será el recogido en la expresión (III.143) que al desestandarizar se obtiene:

$$\pi = \frac{(m - a)n_2(3n_1 + 1)}{(b - m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1) + (m - a)n_2(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.187})$$

De donde se deduce:

$$1 - \pi = \frac{(b - m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(b - m)(2n_1 + 1)(n_1 + 1) + (m - a)n_2(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.188})$$

Y por tanto:

$$\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(3n_1 + 1)} = \frac{m - a}{b - m} n_2 \quad (\text{III.189})$$

Nótese que el multiplicador de la rama izquierda es el ratio entre la diferencia entre la moda y el valor inferior y la diferencia entre la moda y el valor superior, mientras que el multiplicador de la derecha es el ratio entre sus respectivas probabilidades.

Llamando a_p al percentil p de la distribución biparabólica entonces:

$$\pi P\left(\frac{a_p - a}{m - a} / n_1\right) = p \quad (\text{III.190})$$

Despejando:

$$n_1 = \frac{\text{Log}(p/\pi)}{\text{Log}\left(\frac{a_p - a}{m - a}\right)} \quad (\text{III.191})$$

Conocido el valor para n_1 el siguiente paso es hallar n_2 y para ello se parte de la expresión (III.189) en la que se despeja dicho parámetro:

$$n_2 = \frac{b - m}{m - a} \frac{\pi}{1 - \pi} \frac{(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{(3n_1 + 1)} \quad (\text{III.192})$$

EJEMPLO: Partiendo de los valores (30,36,52) aportados por un experto, y sabiendo que el percentil 95 es 49, $a_{0,95}=49$ y la probabilidad de que x quede por debajo de la moda es 0,5, $\text{Prob}(x < m) = \pi = 0,5$, entonces despejando de la expresión (III.191) el valor para n_1 es:

$$n_1 = \frac{\text{Log}\left(\frac{0,95}{0,5}\right)}{\text{Log}\left(\frac{49 - 30}{36 - 30}\right)} = 0,5568 \quad (\text{III.193})$$

Nótese que en este caso hemos optado por preguntarle al experto por el percentil superior en lugar del percentil inferior para evitar así el uso de la herramienta *GoalSeek*.

Por último, se despeja de la expresión (III.192) el valor de n_2 :

$$n_2 = \frac{52 - 36}{36 - 30} \frac{0,5}{1 - 0,5} \frac{(2 \cdot 0,5568 + 1)(0,5568 + 1)}{(3 \cdot 0,5568 + 1)} = 3,2859 \quad (\text{III.194})$$

III.2.6.5. Resumen de los resultados obtenidos con las diferentes combinaciones de distribuciones subyacentes aplicadas en el procedimiento de la elicitación.

En el cuadro (III.16) se recogen las soluciones de los ejemplos planteados para el proceso de elicitación y recogidas en las expresiones (III.165) y (III.166) para la distribución subyacente SBP_2 , las expresiones (III.173) y (III.174) para la distribución subyacente $STSP_2$, las expresiones (III.184) y (III.186) para la distribución subyacente $STSP-BP_2$ y por último, las expresiones (III.193) y (III.194) para el caso de la distribución subyacente $SBP-TSP_2$.

	$STSP_2$	BP_2	$STSP-BP_2$	$SBP-TSP_2$
n_1	1,285097	0,292574	1,285097	0,5568
n_2	3,4269	3,1664	3,94769	3,2859

Cuadro III.17. Cuadro-resumen de las soluciones de los ejemplos propuesto para el proceso de elicitación

En la figura (III.72) se recoge la representación gráfica de las diferentes funciones de densidad para cada una de las distribuciones subyacentes expuestas anteriormente y para los valores de n_1 y n_2 recogidos en el cuadro (III.17)

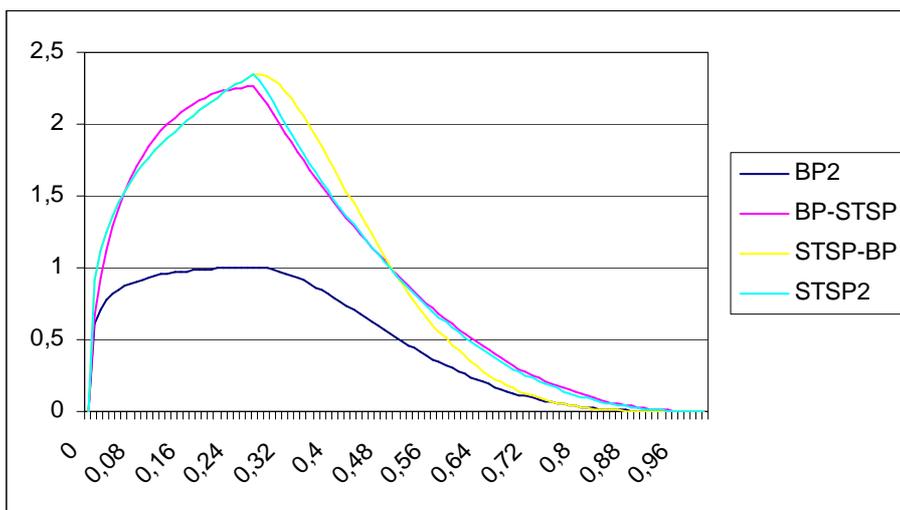


Figura III.72 Representación gráfica de la función de densidad para cada una de las distribuciones subyacentes generalizadas en dos ramas y para los valores de n_1 y n_2 recogidos en el cuadro (III.17).

III.3. APLICACIÓN PRÁCTICA

Una vez que se han desarrollado las distribuciones generalizadas de dos ramas y que se ha presentado el procedimiento de elicitación para cada una de ellas, parece interesante su aplicación en el contexto de la valoración a partir del método de las dos funciones de distribución. A continuación, se calcula, a partir del valor de un índice, el valor de mercado de un activo mediante el método de regresión simple, el método sintético y el método de las dos funciones de distribución usando como subyacentes las distribuciones BPG_2 , $STSP_2$, $STSP-BPG_2$ y $SBPG-TSP_2$ así como la distribución beta que fue originariamente aplicada en dicho método. El interés de la aplicación recae en la comparación del valor de la suma de los cuadrados de los residuos obtenida mediante la aplicación de cada método.

Antes de comenzar la aplicación desarrollaremos cada uno de los métodos que se aplicaran:

a) métodos sintéticos: Se consideran métodos estadísticos en embrión y su desarrollo desemboca en la regresión con una sola variable independiente presentada anteriormente. Existen numerosos métodos sintéticos como por ejemplo el método sintético de clasificación, el método sintético por corrección, el método de los valores atípicos, etc. Nos centraremos en el método sintético de comparación espacial en el que se efectúa la comparación estudiando una o varias características comunes a los bienes objeto de valoración. Estas características pueden ser: la producción bruta, el canon de arrendamiento, la distancia de una parcela a un centro urbano, la edad de las plantaciones, etc. forma más sencilla de estimar el valor del bien mediante comparación espacial es suponer que dicho valor (V_i) es proporcional al índice (I_i) que mida la característica estudiada, de manera que se aplicará la siguiente fórmula:

$$V_i = \frac{\sum_{j=1}^{25} V_j}{\sum_{j=1}^{25} I_j} I_i \quad (\text{III.195})$$

La esencia de este método es la comparación entre bienes ayudándose de una clasificación previa y tomando como término de referencia uno o varios signos externos comunes a los bienes que se comparan. Resulta obvio que ese problema pueda plantearse estadísticamente acudiendo al análisis de regresión. Se aprecia, además, que la expresión (15) es parecida a la que resulta de un ajuste por mínimos cuadrados en una regresión simple sin término independiente.

b) El método de regresión: El método de regresión se engloba dentro de los métodos estadísticos de valoración que aparecen como tal en el primer tercio del siglo XX por la obra de la escuela americana, (Caballer 1993).

Método de las dos funciones de distribución: Su ventaja principal es que necesita menor información empírica y por ello se puede aplicar en ambiente de incertidumbre, es decir cuando sólo se cuenta con la información aportada por el experto acerca del valor optimista, pesimista y más probable.

Se procede a aplicar sobre los datos propuestos cada un de los métodos expuestos anteriormente. Aplicando el método sintético se selecciona como característica explicativa los ingresos medidos en pesetas por hectárea y se obtiene una suma de los cuadrados de los residuos igual a 11.825.697.872,33. En la figura (III.73) se presenta el grafico de dispersión entre la variable V_i y la variable I_i , observándose una relación directa entre ambas.

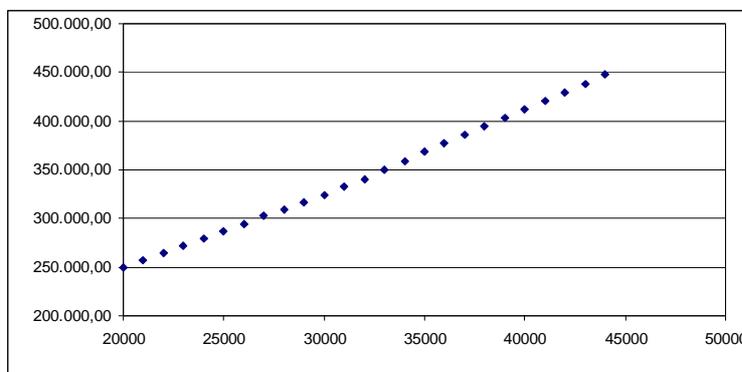


Figura III.73 Gráfico de dispersión de la aplicación práctica 3

<i>i</i> Observaciones	V_i Valor (Ptas./ha)	I_i Ingresos (Ptas./ha)
1	250.000,00	20000
2	257.442,00	21000
3	264.884,10	22000
4	272.326,20	23000
5	279.768,33	24000
6	287.210,40	25000
7	294.652,50	26000
8	302.945,80	27000
9	309.536,67	28000
10	316.978,75	29000
11	324.420,84	30000
12	332.176,92	31000
13	340.669,20	32000
14	349.807,69	33000
15	359.038,46	34000
16	368.269,23	35000
17	377.211,87	36000
18	385.982,45	37000
19	394.753,03	38000
20	403.523,61	39000
21	412.294,19	40000
22	421.064,78	41000
23	429.835,35	42000
24	438.605,93	43000
25	447.376,51	44000
26	456.147,09	45000
27	464.917,67	46000
28	473.688,25	47000
29	482.458,83	48000
30	491.229,41	49000
31	500.000,00	50000

Cuadro III.18. Datos de partida de la aplicación práctica

Al realizar el ajuste por el método de regresión se obtiene la siguiente recta:

$$V_i = 7.5691,50547 + 8,4265I_i \quad (\text{III.196})$$

Se obtiene un coeficiente de determinación muy alto, concretamente del 0.9987 y una suma de los cuadrados de los residuos igual a 226.982.834,29. Este ejemplo, elegido conscientemente, permitirá obtener una conclusión sobre el método más apropiado en aquellos casos en que el método de regresión ofrece un ajuste de gran bondad.

A continuación, se lleva a cabo el proceso de elicitación que permitirá la estimación del valor de mercado mediante el método de las dos funciones de distribución. Una vez calculados los valores a , m y b del activo y del índice se hacen uso de los cuadros (1), (2), (3) y (4) para obtener los correspondientes valores de n_1 y n_2 que se recogen en el cuadro 8:

		TSP ₂	TSP-TSB	TSB-TSP	TSB ₂
INDICE	n_1	1,0705251	1,0705251	0,8185681	0,169822
	n_2	1,4050642	0,846729	1,8214819	0,693813
ACTIVO	n_1	1,028748	1,028748	0,8564106	0,101076
	n_2	1,3202266	0,708962	1,810756	0,644666

Cuadro III.19. Parámetros n_1 y n_2 obtenidos mediante el proceso de elicitación.

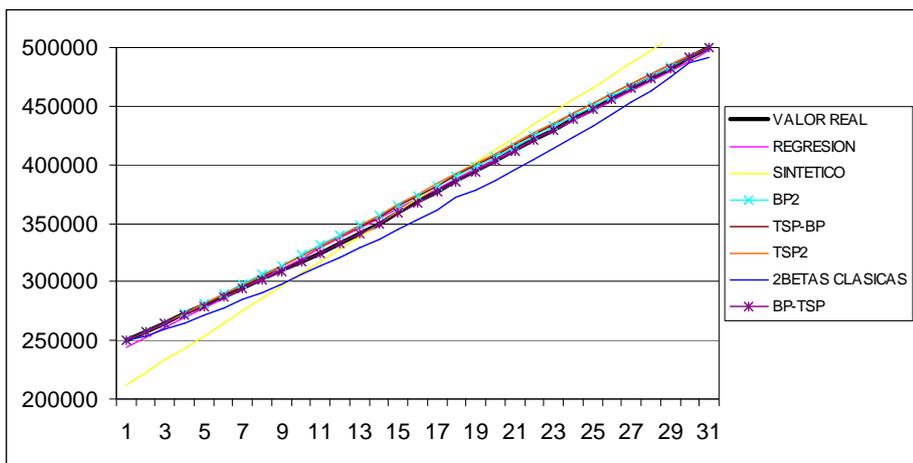


Figura III.74. Valor real del activo y valor estimado obtenido por los distintos métodos.

Generalizaciones de la distribución biparabólica:
Aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración.

Capítulo III

	VALOR REAL	VALOR ESTIMADO						
		REGRESION	SINTETICO	TSB ₂	TSB-TSP	TSP-TSB	TSP ₂	2BETAS CLASICAS
1	250.000	244.222,001	211.782,784	250.000,000	250.000,000	250.000,000	250.000,000	250.000,000
2	257.442	252.648,526	222.371,924	257.276,675	257.498,850	257.308,575	257.320,500	254.028,000
3	264.884,1	261.075,051	232.961,063	265.107,625	264.827,175	265.058,975	265.058,975	259.277,000
4	272.326,2	269.501,575	243.550,202	273.123,525	272.123,725	272.963,475	272.963,475	265.091,000
5	279.768,33	277.928,100	254.139,341	281.246,750	279.423,000	280.977,750	280.977,750	271.271,000
6	287.210,4	286.354,625	264.728,481	289.441,000	286.746,250	289.074,750	289.074,750	277.748,000
7	294.652,5	294.781,150	275.317,620	297.685,750	294.111,750	297.238,000	297.238,000	284.477,000
8	302.945,8	303.207,675	285.906,759	305.967,250	301.537,250	305.457,250	305.457,250	291.424,000
9	309.536,67	311.634,199	296.495,898	314.103,250	309.042,750	313.753,000	313.879,500	298.561,000
10	316.978,75	320.060,724	307.085,038	322.569,250	316.652,250	322.038,000	322.047,750	305.870,000
11	324.420,84	328.487,249	317.674,177	331.047,000	324.396,250	330.381,500	330.404,500	313.347,000
12	332.176,92	336.913,774	328.263,316	339.547,500	332.425,500	338.797,000	338.949,500	320.969,000
13	340.669,2	345.340,299	338.852,455	348.084,000	340.895,500	347.300,750	347.715,250	328.743,000
14	349.807,69	353.766,823	349.441,594	356.512,750	349.736,000	355.905,500	356.659,250	336.655,000
15	359.038,46	362.193,348	360.030,734	364.836,500	358.625,750	364.579,000	365.602,250	344.711,000
16	368.269,23	370.619,873	370.619,873	373.207,500	367.512,250	373.302,750	374.510,250	352.898,000
17	377.211,87	379.046,398	381.209,012	381.620,250	376.395,250	382.064,250	384.558,750	361.221,000
18	385.982,45	387.472,922	391.798,151	390.069,250	385.274,500	390.851,750	392.212,500	372.154,000
19	394.753,03	395.899,447	402.387,291	398.549,000	394.149,750	399.653,000	401.001,250	378.281,000
20	403.523,61	404.325,972	412.976,430	407.054,750	403.020,750	408.456,750	409.744,250	387.016,000
21	412.294,19	412.752,497	423.565,569	415.580,750	411.886,750	417.251,000	418.437,500	395.905,000
22	421.064,7783	421.179,022	434.154,708	424.122,000	420.747,500	426.023,500	427.076,500	404.953,000
23	429.835,35	429.605,546	444.743,847	432.672,500	429.602,500	434.760,750	435.655,500	414.169,000
24	438.605,93	438.032,071	455.332,987	441.226,000	438.451,000	443.448,500	444.167,250	423.569,000
25	447.376,51	446.458,596	465.922,126	449.775,500	447.291,750	452.069,250	452.603,000	433.167,000
26	456.147,09	454.885,121	476.511,265	458.312,500	456.124,000	460.602,750	460.951,000	442.993,000
27	464.917,67	463.311,645	487.100,404	466.826,250	464.945,500	469.022,000	469.194,250	453.125,000
28	473.688,25	471.738,170	497.689,544	475.301,250	473.753,750	477.289,500	477.308,250	463.501,000
29	482.458,83	480.164,695	508.278,683	483.714,000	482.544,500	485.346,250	485.251,250	474.609,000
30	491.229,41	488.591,220	518.867,822	492.016,500	491.308,000	493.075,500	492.939,000	486.328,000
31	500.000	497.017,745	529.456,961	500.000,000	500.000,000	500.000,000	500.000,000	492.188,000

Cuadro III.20. Valores estimados del activo mediante los distintos métodos aplicados

REGRESIÓN	226.982.834,29
SINTETICO	11.825.697.872,33
TSB ₂	451.443.663,76
BPG-TSP	6.027.305,08
TSP-BPG	554.212.886,94
TSP ₂	724.951.335,62
BETA CLASICA	4.497.332.805,31
Cuadro III.21. Suma de los Cuadrados de los Residuos	

Se observa que el método sintético es el que presenta una suma de los cuadrados de los residuos superior. Le sigue el método de las dos funciones de distribución con subyacentes betas. En cambio al usar subyacentes penta-paramétricas y aplicar el proceso de elicitación para el cálculo de los parámetros n_1 y n_2 , se obtiene una suma de los cuadrados similar al método de regresión, excepto en el caso de la mixtura BPG-TSB que es sustancialmente inferior. todos los casos se obtiene una suma de los cuadrados de los residuos inferior a la obtenida mediante el método sintético pero superior a la obtenida mediante el ajuste por mínimos cuadrados. Centrándonos en el método de las dos funciones de distribución la combinación SBPG-TSP es la que obtiene una suma de los cuadrados de los residuos inferior.

III.3.4. Conclusiones de la aplicación práctica.

De la aplicación práctica, que ya fue presentada en el XX Congreso Nacional de ASEPELT y que se encuentra recogida en García, Trinidad y García (2006), se concluye que:

1. El método de regresión ofrece una suma de los residuos al cuadrado inferior al método sintético y al método de las dos funciones de distribución con subyacentes betas. Sin embargo, al usar el proceso de elicitación y contar con más información, la diferencia entre las SCR desciende e incluso una de las mixturas consigue una SCR inferior que el método de regresión.
2. Así pues, parece que la hipótesis que subyace en el método de las dos funciones de distribución es más apropiada que la de proporcionalidad que subyace en el método sintético.
3. El método de regresión utiliza mucha más información para obtener las estimaciones que el método de las dos funciones de distribución por lo que es lógico que la suma de los residuos de los cuadrados sea superior en este último caso.
4. Sin embargo, en ambiente de incertidumbre el único método aplicable es el método de las dos funciones de distribución ya que es el único que nos permite trabajar solo con los datos aportados por el experto.

III.4. CONCLUSIONES

Se exponen a continuación las principales conclusiones que se derivan del presente capítulo y que sirven a su vez de breve resumen del desarrollo acometido en el mismo:

1. Una vez obtenida la distribución bipolarabólica generalizada de una rama, mediante el sistema generador de van Dorp y Kotz, se puede afirmar que es de gran utilidad para su aplicación en la metodología PERT.
2. Los creadores de dicha metodología usaron inicialmente la distribución beta con el objeto de usar una distribución similar a la normal pero con un recorrido limitado y con posibles asimetrías. En la figura (III.6) se comprueba que la distribución bipolarabólica reúne estas condiciones.
3. Además, la expresión de su valor esperado contiene el parámetro n ponderando los extremos, y esto hace que sea de aplicación en el caso concreto en el que se quiera

- dar mayor peso a los extremos que a la moda. Además, para $n=1,40407148$, los extremos y la moda son igualmente ponderados y en ese caso la distribución obtenida, denominada BPG_1^- , presenta una varianza ligeramente inferior a la varianza de la triangular, siendo ambas inferiores a la presentada por el modelo simple de Pearson.
4. El criterio de selección de la función generadora se ha basado en el rango del coeficiente de curtosis con el propósito de futuras aplicaciones financieras de la distribución biparabólica. Finalmente, se comprueba, figura (III.7), que la distribución biparabólica es leptocúrtica con una curtosis máxima aproximadamente igual a seis.
 5. Se ha realizado la estimación de los parámetros de la distribución biparabólica generalizada de dos ramas a partir del método de los momentos y mediante la estimación por máxima verosimilitud. En ambos casos se ha hecho uso de la aplicación práctica de Johnson y Kotz (1999) obteniendo resultados satisfactorios.
 6. Al realizar la generalización de la distribución biparabólica se obtiene una distribución tetraparamétrica lo que conlleva cierta complejidad para estimar los parámetros de dicha distribución a partir de los tres valores clásicos aportados por el experto. En este capítulo se proponen varias alternativas: en primer lugar, la imposición de restricciones a la familia de distribución, la imposición del criterio de media moderada y varianza máxima y por último solicitar más información al experto.
 7. Se puede afirmar que dados los tres valores clásicos (a , m y b) se puede obtener una única distribución BPG_1 de varianza constante, una única distribución BPG_1 perteneciente a la subfamilia mesocúrtica, y por último, una única distribución, con $n=2,74669$, que pertenece a la subfamilia clásica. Este hecho permite el uso de esta distribución en la metodología PERT.
 8. Desde la línea de imposición de restricciones puede optarse por los requisitos de varianza máxima y media moderada propuestos por Taha (1981) y Herrerías (1989). Sin embargo, en este caso dichos criterios con conducen a ninguna solución.

9. Si se opta por pedir más información al experto, proceso de elicitación, se demuestra que siempre que se disponga de un cuantil en $[a, b]$ se podrá estimar el cuarto parámetro.
10. Se ha analizado la entropía de la distribución BPG_1 concluyéndose que dicha distribución presenta mejores propiedades que la distribución TSP desde el punto de vista de la entropía, y además que la distribución BPG_1^- presenta mayor entropía y varianza que la distribución triangular.
11. Al analizar la tasa de fallo de la distribución BPG_1 se observa que su representación contiene dos tramos, el primero prácticamente constante y un segundo tramo decreciente, por lo que no presenta la forma deseable para este tipo de tasa.
12. Se ha analizado profundamente la aplicabilidad de la distribución BPG_1 en la metodología PERT observándose que el comportamiento de las subfamilias de varianza constante y mesocúrtica es similar al que tienen las subfamilias de la distribución TSP. Se comprueba que la familia mesocúrtica de la distribución BPG_1 pondera más la moda que la familia mesocúrtica de la distribución TSP para los valores de M pertenecientes al intervalo $[0,214323; 0,785676]$, mientras que la familia de varianza constante de la distribución TSP pondera, para cualquier valor de M , más la moda que la subfamilia de la distribución BPG_1 .
13. Se ha establecido un orden entre las diferentes subfamilias según los criterios de moderación y conservadurismo formalizándose así una solución alternativa a la aportada por Farnum y Stanton (1987).
14. Además se ha realizado el test de Chow sobre las diferentes subfamilias para comprobar si son o no estadísticamente diferentes y se concluye que solo en el caso de la distribución BPG_1 la subfamilia mesocúrtica y la subfamilia de varianza constante no son estadísticamente diferentes, lo que dota de mayor lógica a la familia clásica de la distribución BPG_1 .
15. Se presenta una herramienta que permite separar la especificación de cada una de las ramas en función de dos densidades generadoras distintas, para posteriormente

aplicar dicha herramienta sobre la distribución bipolar, la distribución TSP y las mezclas de ambas.

16. Con esta generalización de dos ramas se consigue superar no solo la simetría crítica a la normal sino que además cada una de las ramas, a uno y a otro lado de la moda, pueden obedecer a una distribución generadora distinta. Este hecho tiene una gran aplicación en el ámbito financiero como se verá en el quinto capítulo.
17. Este desarrollo da lugar a distribuciones pentaparamétricas por lo que se desarrolla el proceso de elicitación que resuelve cual será la información adicional requerida al experto.
18. Se realiza una aplicación en el campo de la valoración, basado en el ejemplo usado por Caballer (1999), y se comparan los resultados obtenidos mediante el método de las dos funciones de distribución con los obtenidos mediante el método sintético y el método de regresión simple. Se concluye que el MDFD puede ofrecer resultados similares e incluso mejores que el método de regresión y además es el único que puede ser usado en ambiente de incertidumbre. Por otro lado, destacar el hecho de que sus resultados son mejores que los obtenidos mediante el método sintético o el método de las dos betas y que viene justificado por el mayor uso de información.

Capítulo IV

Extensión del método de las dos funciones de distribución a través de la herramienta matemática cópula.

IV. 0. INTRODUCCIÓN

En el capítulo introductorio se realizó una revisión de los métodos de valoración y, entre otros, se presentó el método de las dos funciones de distribución. En el segundo capítulo se analizaron las aplicaciones de la distribución bipolarabólica en dicho método y en el tercero se presentó una aplicación práctica de este método usando la distribución bipolarabólica generalizada en dos ramas (BPG_2).

Es evidente que el método de las dos funciones de distribución ha estado presente a lo largo de toda la memoria y por ello el presente capítulo pretende avanzar en dicho método e indagar en la posibilidad de extenderlo al caso multíndice.

Según Clavijo y Rodríguez (2006) la comparación en el método de valoración de las dos betas presenta como ventaja el escaso número de datos necesario para su aplicación. Sin embargo, precisamente esta ventaja se puede considerar como un problema, y motiva la extensión del método al caso multi-índice, si se tiene en cuenta que, en la mayoría de los casos, el tasador deber trabajar con múltiples variables externas como por ejemplo el entorno urbanístico, la situación geográfica, la calidad constructora, la antigüedad, etc.

Desde la presentación del método de las dos funciones de las dos betas por Ballestero (1971) se han publicado numerosas aportaciones extendiendo de una u otra manera la aplicación de este método.

Así pues, la utilización de dos o más índices en el método de las dos funciones de distribución ya fue planteada con anterioridad por García, Cruz y Rosado (2000, 2002) bajo la hipótesis de independencia entre los índices y por Herrerías Velasco (2002) sin hipótesis de independencia y tanto para el caso bivalente como el multivalente. Otra posibilidad es la planteada en el último capítulo de García y García (2002), posteriormente comentada en Vivo (2005) y en Herrerías Velasco (2005), y que consiste en ponderar los índices. Por otro lado, García, Cruz y García (2002.b) presentaron una aplicación econométrica de la extensión multíndice del método de las dos funciones de distribución.

Numerosas han sido pues las contribuciones realizadas sobre la extensión del método de las dos funciones de distribución al caso multíndice, sin embargo, todas ellas estaban basadas en técnicas subjetivas (método de la moda) o econométricas. La aportación que se presenta en este capítulo es totalmente original a la vez que pretende ser una técnica objetiva que consiga extender el método al caso de dos índices de referencia, y posteriormente a la extensión multíndice.

Al trabajar con dos índices, y con sus respectivas funciones de distribución, surge la necesidad de construir una función de distribución conjunta. Para ello, se hace uso de la herramienta cópula, que si bien ha sido ampliamente estudiada en la literatura, es la primera vez que se aplica dentro de la teoría general de valoración.

Se consideran dos distribuciones para los índices, en primer lugar la distribución *two-sided power*, van Dorp y Kotz (2002.a) y la distribución biparabólica presentada en el segundo capítulo.

En el presente capítulo se lleva a cabo, como aportación original, la aplicación de dichas distribuciones tanto en ambiente de riesgo como en ambiente de incertidumbre. Se

recuerda, que se entiende por ambiente de riesgo el caso en el que se cuenta con un conjunto de datos que, aunque no sean muy abundantes, permiten un tratamiento mediante ajustes estadísticos o estimaciones econométricas, y por ambiente de incertidumbre carecer de información alguna acerca del activo a valorar y recurrir, por tanto, a la opinión de expertos con el objeto de solventar este problema inicial de falta de datos, actuando de forma similar al método PERT.

Así pues, en este capítulo se avanza en el método de las dos funciones de distribución desde una doble perspectiva: analizando su extensión al caso bi-índice a través de la herramienta cópula y, por otro lado, la aplicación en ambiente de riesgo y de incertidumbre de las distribuciones TSP y bipolarabólica. El capítulo consta de cuatro epígrafes dedicados a la introducción de la herramienta cópula, su aplicación para la construcción de una función de distribución conjunta partiendo de marginales *two-sided power* y bipolarabólicas, la presentación del método de valoración con aplicaciones en ambiente de riesgo y de incertidumbre, y por último un epígrafe dedicado al planteamiento de futuras aplicaciones de la herramienta cópula dentro de la teoría general de valoración.

IV.1. REVISIÓN LITERARIA Y APLICACIONES DEL CONCEPTO CÓPULA

La cópula es una herramienta estadística antigua que ha sido popularmente usada en la literatura financiera y econométrica. Haciendo un poco de historia, fue Sklar (1959) quien demostró que todas las leyes de probabilidad dimensionales finitas tienen una función de cópula asociada a ellas.

La base de esta investigación es Frechet (1951), que apoyándose en la definición de distancia entre dos distribuciones de Levy (1950), demostró que dadas dos funciones de distribución marginales, $F(X_1)$ y $F(X_2)$, la distribución conjunta se encuentra entre $W(X_1, X_2)$ y $M(X_1, X_2)$. Es decir:

$$W(X_1, X_2) \leq F(X_1, X_2) \leq M(X_1, X_2) \quad (IV.1)$$

Los límites inferior y superior de la inecuación anterior son usualmente conocidos como *límites de Frechet*, y son así mismo funciones de distribución con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} W(X_1, X_2) &= \max[F_1(X_1) + F_2(X_2) - 1, 0] \\ M(X_1, X_2) &= \min[F_1(X_1), F_2(X_2)] \end{aligned} \quad (IV.2)$$

El límite superior es la función de distribución del par (X_1, X_2) cuando $X_1 = X_2$ con probabilidad 1, y el límite inferior corresponde al caso en el que $X_2 = 1 - X_1$.

Definición IV.1. Una cópula bidimensional es una función $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} C(0, X_2) &= C(X_1, 0) \\ C(X_1, 1) &= X_1 \\ C(1, X_2) &= X_2 \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Siendo X_1 y X_2 dos variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 , respectivamente, y C una cópula bidimensional entonces la función $(X_1, X_2) \rightarrow C(F_1(X_1), F_2(X_2))$ es una función de distribución.

Las funciones cópulas son herramientas útiles en el caso de que se desee construir funciones de distribución conjuntas a partir de las marginales.

El siguiente teorema, presentado por Sklar (1959), muestra que para toda pareja (X_1, X_2) con funciones de distribución marginal F_1 y F_2 , y con función de distribución conjunta $F(X_1, X_2)$, existirá una única cópula $C(F_1(X_1), F_2(X_2))$.

Teorema IV.1. (Sklar 1959) Siendo X_1, \dots, X_m variables aleatorias con función de distribución continua F_1, \dots, F_m , y funciones de supervivencia $S_1=1-F_1, \dots, S_m=1-F_m$ respectivamente, y con función de distribución conjunta $H(X_1, \dots, X_m)$ y función de supervivencia conjunta $S(X_1, \dots, X_m)$, si H es una función de distribución m -dimensional del vector aleatorio (X_1, \dots, X_m) , con marginales continuas F_1, \dots, F_m , entonces existe una única cópula C , tal que para todo $\mathbf{X} \in \mathbf{R}_m$:

$$H(X_1, \dots, X_m) = C(F_1(X_1), \dots, F_m(X_m)) \quad (\text{IV.4})$$

Y, al contrario, si C es una cópula y F_1, \dots, F_m son funciones de distribución, entonces H es una función de distribución m -dimensional con marginales F_1, \dots, F_m . A partir de (IV.4) se puede construir una estructura de dependencia, por ejemplo, una función de distribución m -dimensional H a través de la elección apropiada de un conjunto de marginales F_1, \dots, F_m y una función de cópula C .

Corolario IV.1. Del teorema anterior se deduce que una cópula puede ser representada como una función de distribución m -dimensional con marginales continuas haciendo uso de las funciones inversas $F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)$, siendo $F_i[F_i^{-1}(x_i)] = x_i$, es decir:⁶

$$C(u_1, \dots, u_m) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)) \quad (\text{IV.5})$$

El teorema expuesto anteriormente, (IV.4) y el corolario (IV.5) ofrecen unas herramientas convenientes para la construcción de cópulas. Sin embargo, existen otros métodos de construcción de cópulas, tal y como se detalla a continuación:

- Inversión de marginales: Siendo G una función de distribución n -dimensional con marginales conocidas F_1, \dots, F_n en el caso de distribuciones continuas F_k^{-1} es única y entonces (IV.6) será una cópula única:

⁶ Indistintamente: $C[F_1(X_1), F_2(X_2)] = F(X_1, X_2)$ y $C(u_1, u_2) = F[F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)]$

$$C(u_1, \dots, u_n) = G(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (\text{IV.6})$$

- **Mixtura de familias de cópulas:** Consideramos una clase de cópulas unidas por un parámetro $\omega \in \Omega$ y notado como C_ω , y sea M una medida probabilística sobre Ω . Se define una cópula nueva como:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_{\Omega} C_\omega(u_1, \dots, u_n) dM(\omega) \quad (\text{IV.7})$$

Esta técnica fue utilizada por Frechet (1951) y Carriere (2000).

- **Invirtiendo distribuciones multivariantes mixtas:** Consiste en la mixtura de distribuciones multivariantes para posteriormente invertir las marginales obtenidas tras la mixtura. Un ejemplo es la t -cópula multivariante.
- **Generadores:** Dado un generador, ϕ , tal que se trata de una función convexa continua y cumple: $\phi(1) = 0$ y $\phi(0) = +\infty$, Nelsen (1999), la cópula se construye como:

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (\text{IV.8})$$

En esta técnica encontramos la familia de cópulas conocida como Arquimedianas entre las que se pueden citar las cópulas Cook-Johnson, Gumbel y Frank.

- **Métodos Ad-hoc:** Un ejemplo sería el método de la media geométrica que fue usado por Cuadras y Augé (1981) y Yashin e Iachine (1995). En este caso si $0 < \alpha < 1$ y C_1, C_2 son cópulas bivariantes, entonces:

$$[C_1(u, v)]^\alpha [C_2(u, v)]^{1-\alpha} \quad (\text{IV.9})$$

La expresión (IV.9) será una cópula cuando: $C_2(u, v) \geq C_1(u, v)$ para todo u y v .

Si bien fue Frechet el primero en expresar el problema sistemáticamente, el desarrollo posterior se debe a otros muchos autores y principalmente a Pompilj (1984). En Dall'Aglio, Kotz y Salinetti (1991) se encuentra recogida información sobre el pasado y el presente de la teoría de cópulas, así como sobre las primeras contribuciones de las escuelas estadísticas francesa y romana la mayoría contadas de primera mano por sus precursores.

IV.1.1. Resumen de cópulas más relevantes

Las tres cópulas más importantes son la cópula independiente uv , el límite inferior de Frechet $\{0, u+v-1\}$ y el límite superior de Frechet $\{\min(u, v)\}$. Algunos ejemplos de familias de cópulas paramétricas se recogen en el cuadro (IV.1), Carriere (2004), distinguiendo entre los modelos con un único parámetro y los modelos con dos parámetros.

Los modelos con un único parámetro son: Ali-Mikhail-Haq, Cook-Johnson, Cuadras-Augé-1, Frank, Frechet 1, Gumbel, Morgenstern, Gauss y Placket. La cópula Frank desarrollada por Frank (1979) y posteriormente analizada por Genest (1987) es especialmente útil, no sólo por su simplicidad, sino también porque contiene, en el límite, a las tres cópulas más importantes. En cuanto a los modelos con dos parámetros destacan: Carrieré, Cuadras-Auge 2, Frechet-2, Yashin-Iachine y t-cópula. Además de las distribuciones recogidas en el cuadro (IV.1) otras de las distribuciones más relevantes recogidas en la literatura son la de Farlie (1960), Gumbel (1960), Sibuya (1960) y Clayton y Cuzick (1985). Para un análisis exhaustivo, véase Mardia (1970) y Johnson (1987). Genest y Mackay (1986) demostraron que la mayoría de las distribuciones se derivan de un único método. Posteriormente, Marshall y Olkin (1986) presentan nuevas distribuciones considerando modelos mixtos. A continuación se analizan las aplicaciones más relevantes de las cópulas para posteriormente desarrollar la cópula Farlie-Gumbel y Morgenstern y la cópula Placket, ambas pertenecientes a modelos con un sólo parámetro.

Nombre	$C(u,v)$ donde $(u,v) \in [0,1]^2$	Parámetros
MODELOS CON UN UNICO PARÁMETRO		
Ali-Mikhail-Haq	$uv[1 - \alpha(1-u)(1-v)]^{-1}$	$-1 < \alpha < 1$
Cook-Johnson	$[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}$	$\alpha > 0$
Cuadras-Augé 1	$[Min(u, v)]^\alpha [u, v]^{1-\alpha}$	$0 \leq \alpha \leq 1$
Frank	$\alpha^{-1} \ln[1 + (e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)(e^\alpha - 1)^{-1}]$	$\alpha \neq 0$
Fréchet-1	$pMax(0, u + v - 1) + (1 - p)Min(u, v)$	$0 \leq p \leq 1$
Gumbel	$\exp\left\{-\left[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha\right]^{1/\alpha}\right\}$	$\alpha > 0$
Morgenstern	$uv[1 + 3\rho(1-u)(1-v)]$	$-\frac{1}{3} < \rho < \frac{1}{3}$
Gauss	$G(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) \rho)$	$-1 < \rho < 1$
Plackett	$\frac{1 + (\alpha - 1)(u + v) - \sqrt{1 + (\alpha - 1)(u + v)^2 + 4\alpha(1 - \alpha)}}{1/2(\alpha - 1)}$	$\alpha \geq 0$
MODELOS CON DOS PARÁMETROS		
Carrière	$(1 - p)uv + p(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$	$0 \leq \rho \leq 1, \alpha > 0$
Cuadras-Auge-2	$u^{1-\alpha} v^{1-\beta} \min(u^\alpha, v^\beta)$	$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$
Fréchet-2	$p \max(0, u + v - 1) + (1 - p - q)uv + q \min(u, v)$	$0 \leq p, q \leq 1$
Yashin-Iachine	$(uv)^{1-p} (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-p/\alpha}$	$0 \leq p, q \leq 1; \alpha > 0$
t-cópula	$C_\tau(u, v/\rho, r)$	$-1 < \rho < 1, r > 0$

Cuadro IV.1. Resumen expresiones de cópulas más relevantes

IV.1.2. Aplicaciones más relevantes de la herramienta cópula

Las cópulas han sido estudiadas en la literatura probabilística desde hace más de cincuenta años, y actualmente sigue siendo un tema candente. Existen diferentes líneas de investigación abiertas, por ejemplo: la estructura de Fréchet, la compatibilidad de funciones de distribución, la eficiencia del valor de la media de algunas funciones, su conexión con programación lineal, etc. No obstante, desde el punto de vista práctico tienen una historia relativamente corta ya que la mayoría de las aplicaciones estadísticas han aparecido recientemente. Tal y como se comentó anteriormente, la herramienta cópula se aplica en esta memoria por primera vez en el método de las dos funciones de distribución, pero no cabe duda que es un útil instrumento que se emplea en numerosos y diversos campos. Las aplicaciones son múltiples y a continuación quedan resumidas algunas de las líneas más interesantes, a nuestro entender, y más relacionadas con nuestras pretensiones futuras:

- Aplicaciones en el campo de la matemática actuarial. La primera referencia es, posiblemente, Carrière y Chan (1986) que aplica la cópula bivariante de Fréchet a las investigaciones de los límites conjuntos y las primas de supervivencia. En la literatura reciente encontramos diversas aplicaciones actuariales, entre las que destacamos Kaishev, Dimitrova y Haberman (2005) que pretenden la construcción de la distribución conjunta de los tiempos de supervivencia en un modelo de riesgo competitivo, basándose en Carriere (1994) que usó una cópula Gaussiana, estudiando como influye la elección de la cópula para lo que analizó los resultados obtenidos con distintas familias de cópulas. En Frees y Valdez (1998) se encuentra un buen resumen de las investigaciones sobre cópulas aplicadas a las matemáticas actuariales
- Aplicaciones en finanzas, introducidas por Embrechts, Mc Neil y Straumann (1999, 2000). Destacan la valoración de los seguros sobre pérdidas procedentes de bonos y prestamos realizada por Li (2000) y más recientemente el análisis de la relación entre el riesgo sistemático y el riesgo de crédito en mercados financieros, (Gatfaoui 2005).

- Aplicaciones en el riesgo de mercado, concretamente en el valor en riesgo, en riesgo de crédito y riesgo operacional, (Jouanin, Riboulet y Roncalli 2004), demostrando que en el caso del riesgo de crédito la herramienta cópula ofrece, hasta el momento, los resultados más satisfactorios en dicho campo.
- Aplicaciones para el estudio de la desigualdad de la renta a través de la modelización de la trayectoria de la renta individual, Bonhomme y Robin (2004).

En este capítulo se pretende abrir una nueva línea de investigación aplicando, por primera vez, la herramienta cópula en la teoría general de valoración. Se desea trabajar con dos índices de referencia, y partiendo de sus funciones de distribución construir una función de distribución conjunta que nos permita aplicar el método de valoración descrito en el capítulo introductorio.

IV.1.3. Medidas de asociación

Partiendo de dos muestras aleatorias $(X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ para el par de variables continuas (X, Y) se desea identificar la distribución $H(X, Y)$. Según el teorema de Sklar (1959) conocidas $F(X)$ y $F(Y)$ existirá una única cópula que caracterice completa y únicamente la relación de dependencia conjunta entre dichas variables.

Para describir la estructura de dependencia entre dos variables se harán uso de medidas de dependencia o asociación, que, desde un punto de vista ideal, deben cumplir las siguientes propiedades, Chan Chiou (2005) siendo M la notación general de dicha medida:

- a) $M(X, Y) = M(Y, X)$
- b) $-1 \leq M(X, Y) \leq 1$
- c) $M(X, Y) = 1$ si y sólo si: $F(X, Y) = \min\{F_1(X), F_2(Y)\}$
- d) $M(X, Y) = -1$ si y sólo si: $F(X, Y) = \max\{F_1(X) + F_2(Y) - 1, 0\}$

- e) M es invariante a transformaciones estrictamente decrecientes. Es decir: $M(X, Y) = M\{T_1(X), T_2(Y)\}$, donde $T_1(X)$ y $T_2(Y)$ son dos transformaciones estrictamente decrecientes y posiblemente diferentes.

La medida básica de dependencia lineal entre dos variables X_1 y X_2 es la covarianza:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (\text{IV.10})$$

Para que esta medida sea independiente de las unidades en las que las variables son expresadas, se divide la covarianza entre el producto de las desviaciones típicas conduciendo al ampliamente conocido coeficiente de correlación:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}} \quad (\text{IV.11})$$

Este coeficiente ha sido la medida básica de la dependencia lineal desde hace más de cien años. Sin embargo, este coeficiente puede ser problemático si se incumple la hipótesis de normalidad. En concreto, el coeficiente de correlación viola las propiedades c), d) y e) descritas anteriormente. Por otro lado, para que el coeficiente esté adecuadamente definido, la varianza de X e Y debe ser finita. Esto no ocurre, por ejemplo, en la distribución bivalente t con menos de tres grados de libertad. Por lo tanto, el coeficiente de correlación no será una medida adecuada para medir la dependencia de relaciones no lineales.

Muchas otras medidas han sido propuestas durante el siglo XX para medir la dependencia positiva o negativa, por ejemplo el coeficiente de Blomquist (q), el coeficiente de Höfdding (Δ), el coeficiente de Spearman (ρ_S) y la tau de Kendall (τ). Los dos últimos son los más usados como medidas de dependencia y por ello se desarrollan a continuación entendiéndolos, en cualquier caso, como medidas de asociación y no como medidas de la relación lineal entre variables.

Haciendo un poco de historia, el coeficiente (τ) fue introducido por Fechner sobre 1900 y redescubierto por Kendall (1938). Partiendo de dos pares de variables aleatorias (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) se entenderá que son concordantes si $X_1 < X_2$ e $Y_1 < Y_2$ ó si $X_1 > X_2$ e $Y_1 > Y_2$ y discordantes si $X_1 < X_2$ e $Y_1 > Y_2$ ó $X_1 > X_2$ e $Y_1 < Y_2$. Entonces se define (τ) como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia para dos pares independientes. En Scarsini (1984) se ofrece una definición general y un conjunto de axiomas para las medidas de concordancia.

Empíricamente:

$$\tau = \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\} \quad (\text{IV.12})$$

En cuanto al coeficiente (ρ_s), fue propuesto por primera vez por Spearman en 1904. Al igual que el coeficiente (τ) esta relacionado con la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia.

Si se consideran dos variables (X, Y) , entonces la dependencia entre ambas puede ser analizada fácilmente por sus pares de rangos (R_i, S_i) . De manera que R_i es el rango de valores de X_i para los valores X_1, X_2, \dots, X_n y, de la misma manera, S_i es el rango de Y_i para sus valores Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Su expresión empírica es:

$$\rho_n = \frac{12}{n(n+1)(n-1)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \frac{n+1}{n-1} \quad (\text{IV.13})$$

A continuación, se presenta un ejemplo que nos permitirá calcular el coeficiente rho de Spearman y el coeficiente Tau de Kendall.

Ejemplo: Partiendo de los datos resumidos en el cuadro (IV.2) y recogidos en Genest y Favre (2006):

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6
X_i	-2.224	-1.538	-0,807	0,024	0,052	1,324
Y_i	0,431	1,035	0,586	1,465	1,115	-0,847
Cuadro IV.2. Datos de partida para ejemplo práctico						

Los pares de rangos están recogidos en el cuadro (IV.3):

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6
R_i	1	2	3	4	5	6
S_i	2	4	3	6	5	1
Cuadro IV.3. Pares de rangos						

A partir de este cuadro y mediante unos simples cálculos se calcula el coeficiente Rho de Sperman $\rho_S = 1/35 = 0,028$ y el tau de Kendall $\tau = 1/15 = 0,067$. En ambos casos, si se realiza un test de independencia no habrá evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula de independencia.

Schweizer y Wolf (1981) mostraron que ambas medidas no paramétricas de asociación pueden ser expresadas en términos de una función cópula. Así pues, si tomamos como $u=F(X)$ y como $v=F(Y)$ entonces tenemos la expresión para el coeficiente tau de Kendall:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (\text{IV.14})$$

Y tras diversas operaciones, puede obtenerse la siguiente expresión para el coeficiente Rho de Sperman:

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \quad (\text{IV.15})$$

En conclusión, el coeficiente de correlación, (IV.11), presenta ciertas deficiencias:

- Es sólo una medida de la dependencia lineal.

- Agrega a la información contenida en las marginales la información sobre el comportamiento colectivo.
- No es invariante a cambios de variable.

Por tanto, es deseable encontrar otras medidas de dependencia entre dos variables aleatorias que al contrario del coeficiente de correlación, sólo dependan de las propiedades de la cópula y que no se vean afectadas por cambios en las distribuciones marginales. Se comprueba que las medidas de concordancia descritas anteriormente verifican estas propiedades. En concreto el coeficiente de correlación de Spearman tiene en cuenta sólo la estructura de dependencia entre las variables, en contraposición con el coeficiente de correlación que incorpora el comportamiento colectivo a las propiedades de las marginales.

Las expresiones (IV.14) y (IV.15) podrían sugerir la existencia de una relación lineal entre ambos coeficientes pero se demuestra que no es así. Daniels (1950) demostró la siguiente inecuación entre dichos coeficientes: $-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1$. Por otro lado, es conocido que el rango del coeficiente de correlación de Spearman es $[-1,1]$ y que tomará los valores $\rho = 0$, $\rho = +1$ y $\rho = -1$, si y sólo si $C(u,v)=uv$, $C(u,v) = \min(u,v)$ y $C(u,v) = \max(0, u+v-1)$ respectivamente. El coeficiente tau de Kendall cumple estas mismas propiedades.

A continuación se estudian la cópula FGM y la cópula Plackett, presentando no sólo la definición básica y sus propiedades fundamentales, sino también la expresión correspondiente para las medidas de asociación descritas anteriormente. Hay que tener en cuenta que la cópula FGM permite sólo una correlación en el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ mientras que la cópula Plackett, al igual que las cópulas Frank, Fréchet, Gauss y T-cópula, incluye el rango completo de correlación. También existe el caso de familias que sólo permiten una correlación positiva como por ejemplo: Carrieré, Cook-Johnson, Cuadras-Augé, Gumbel y Yashin-Iachine.

IV.1.4. Familia de cópulas FGM

La distribución FGM es quizás no sólo la distribución bivalente no normal más conocida, sino también probablemente la más precoz. La primera referencia a las distribuciones FGM la encontramos en Eyraud (1936), que se centró en marginales uniformes.

Posteriormente, Morgenstern (1956), Farlie (1960) y Gumbel (1960) desarrollaron el sistema de distribución bivalente. Así mismo, Johnson y Kotz (1975,1977) profundizaron en su generalización presentando propiedades acerca de la regresión y la correlación y extendiendo la familia de distribuciones al caso multidimensional y multiparámetro.

En el caso bidimensional la función de distribución tiene la siguiente forma:

$$F(X,Y) = F_1(X)F_2(Y)[1 + \alpha(1 - F_1(X))(1 - F_2(Y))] \quad (\text{IV.16})$$

donde el parámetro α controla la estructura de dependencia, $F(X,Y)$ es la función de distribución conjunta de X e Y , y por último $F(X)$ y $F(Y)$ son las funciones de distribución marginales.

La expresión (IV.17) recoge la función de densidad:

$$f(X,Y) = f_1(X)f_2(Y)[1 + \alpha(1 - 2F_1(X))(1 - 2F_2(Y))] \quad (\text{IV.17})$$

En cuanto a la correlación entre X e Y se demuestra que:

$$E(Y / X) = E(Y) + \alpha J_2 \{2F_1(X) - 1\} \quad (\text{IV.18})$$

donde $J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(Y)(1 - F(X))dx$. Véase Kotz y Drouet (2001).

En cuanto al parámetro α pertenece al intervalo $[-1,1]$, de manera que los casos en que $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$ representan los máximos grados de dependencia negativa y positiva respectivamente, que se permiten en esta familia. Así pues, aunque a priori el coeficiente

α no se asocia con el concepto de correlación, lo cierto es que existe una relación entre ellos. A modo de ejemplo, se recogen en el cuadro (IV.4) las relaciones existentes entre el coeficiente tau de Kendall y el coeficiente Rho de Sperman con el parámetro α en el caso en el que las marginales sigan una distribución uniforme, (Schucany, Parr y Boyer 1978)

Familia	Tau de Kendall	Rho de Sperman
Farlie-Gumbel-Morgenstern	$\frac{2}{9}\alpha$	$\frac{1}{3}\alpha$

Cuadro IV.4. Expresiones para el tau de Kendall y el Rho de Sperman para la familia FGM con marginales uniformes.

Se puede demostrar, (Dall'aglio, Kotz y Salinetti 1991), que el coeficiente de correlación tiene diferentes expresiones y diferentes rangos de variación según sea la distribución de las funciones marginales, Cuadro (IV.5).

De manera que:

- Si las marginales siguen una distribución $N(0,1)$, la correlación es $\alpha\pi^{-1}$, es decir, que el rango del coeficiente de correlación varía entre $-0,318$ y $0,318$.
- Si las marginales siguen una distribución uniforme, la correlación es $\frac{\alpha}{3}$ y por tanto el rango de variación es de $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$. Se deduce que, para las distribuciones FGM con marginales absolutamente continuas, el coeficiente de correlación entre X e Y no puede exceder de $\frac{1}{3}$.
- Si las marginales siguen una distribución exponencial el coeficiente de correlación varía en el rango $(-0.25;0.25)$.
- Si las marginales siguen una distribución de Laplace entonces el coeficiente de correlación varía en el rango $(-0.281;0.281)$

Distribución	Expresión del coeficiente de correlación	Rango del coeficiente de correlación
F.G.M. con marginales uniformes	$\frac{\alpha}{3}$	$\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$
F.G.M. con marginales normales	$\frac{\alpha}{\pi}$	$\left[-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right]$
F.G.M. con marginales exponenciales	$\frac{\alpha}{4}$	$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$
Distribución con marginales Laplace	0.281α	$[-0.281; 0.281]$

Cuadro IV.5. Expresión y rango del coeficiente de correlación de la familia FGM para diferentes distribuciones marginales

Resumiendo, se puede afirmar que la dependencia estructural entre X e Y está controlada por el parámetro α . Así pues, para que la función de densidad sea positiva, α tiene que variar entre -1 y 1 . Esto hace que se restrinjan los posibles valores del coeficiente de correlación que varía entre $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$, un hecho que limita la aplicación de las distribuciones FGM sólo a casos en los que la dependencia entre ambas variables aleatorias es débil. Véase Athanassoulis, Skarsoulis y Belibassakis (1994).

IV.1.5. Familia de cópulas Placket

Originalmente introducidas por Plackett en 1965 y, posteriormente estudiadas por Mardia (1970) presentan la siguiente función de densidad:

$$f(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{2(\alpha-1)} \left\{ 1 + (\alpha-1)(X+Y) - \sqrt{[1 + (\alpha-1)(X+Y)]^2 - 4XY\alpha(\alpha-1)} \right\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ XY & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

En el caso de marginales uniformes, la función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(X, Y) = \frac{\alpha[(\alpha - 1)(X + Y + 2XY) + 1]}{\left\{1 + (X + Y)(\alpha - 1)\right\}^2 - 4\alpha(\alpha - 1)XY}^{\frac{3}{2}} \quad (\text{IV.20})$$

donde X e Y pertenecen al intervalo $(0,1)$ y el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

El coeficiente de correlación para la familia bivariante Placket con parámetro $\alpha \geq 0$ y funciones de distribución marginales continuas puede expresarse en función del parámetro α tal y como se recoge en el cuadro (IV.6). Se observa que no existe una expresión cerrada para el coeficiente Tau de Kendall.

Familia	Tau de Kendall	Rho de Sperman
Placket	Sin expresión concreta	$\frac{(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)} - \frac{2\alpha \ln \alpha}{(\alpha - 1)^2}$

Cuadro IV.6. Expresiones para el tau de Kendall y el Rho de Sperman para la familia Placket.

El coeficiente Rho de Sperman puede tomar los valores 1, 0 y -1 cuando $\alpha \rightarrow \infty$, $\alpha = 1$ y $\alpha \rightarrow 0$ respectivamente, de manera que como ρ es función lineal de α , pueden obtenerse todos los valores de ρ . Así pues, en contraste con otras familias de cópulas, y en concreto con la familia FGM, la cópula Placket cubre el rango completo del coeficiente de correlación, desde el límite inferior hasta el límite superior de Frechet, incluyendo el caso de independencia.

Estas condiciones son también verificadas por la familia de distribuciones bivariantes Frank, estudiadas por Genest (1987) y por la distribución estandarizada binormal, Anderson (1958). Haciendo una traducción de Devroye (1986) se denominan *familias exhaustivas* a las familias de distribución que contienen los límites de Frechets además del producto de las marginales, es decir el caso de independencia. Hay que destacar que la mayoría de las familias no cumplen esta propiedad.

IV.2. CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA A PARTIR DE LA CÓPULA FGM

Cuando se pretende valorar un activo en función de uno o más índices y no se dispone información estadística alguna se dice que se trabaja bajo ambiente de incertidumbre. Lo habitual en estos casos es recurrir a la opinión de un experto al que se le preguntará por el valor optimista, pesimista y el valor más probable del activo a valorar y de al menos un índice de referencia, (García, Trinidad, y García 2004). En este apartado, se trabaja con dos índices de referencia y por tanto, el experto aportara los valores optimista, pesimista y más probable aportados del activo y ambos índices.

Partiendo de dichos valores, se pretende construir una función de distribución conjunta a partir de las funciones de distribución marginales de cada índice. Se dedica un primer apartado al caso en el que las marginales se distribuyen según una distribución Standard *two-sided power*, y un segundo apartado al caso en el que dichas marginales se distribuyen según una distribución bipolarabólica. En ambos casos la cópula aplicada para la construcción de la función de distribución conjunta es la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern presentada en el epígrafe anterior.

IV.2.1. Uso de marginales STSP para la construcción de la función de distribución conjunta a través de la cópula FGM.

Partiendo de los valores (a_1, m_1, b_1) y (a_2, m_2, b_2) para los índices X_1 y X_2 se estandarizan dichos valores de manera que se parte de los siguientes datos para los índices estandarizados I_1 y I_2 .

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_1 \\ 1 \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (IV.21)$$

Si dichas variables siguen una distribución *two-sided power*, entonces su función de distribución, para $i=1,2$, es:

$$F(I_i) = \begin{cases} M_i \left(\frac{I_i}{M_i} \right)^{n_i}, & 0 \leq I_i \leq M_i \\ 1 - (1 - M_i) \left(\frac{1 - I_i}{1 - M_i} \right)^{n_i}, & M_i \leq I_i \leq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

Aplicando la expresión (IV.16), referente a la función de distribución de la cópula FGM se obtiene la expresión para la función de distribución conjunta que se recoge en la expresión (IV.23). Análogamente, haciendo uso de la expresión (IV.17) se obtiene la expresión correspondiente a la función de densidad conjunta. Ambas expresiones se recogen en el anexo matemático B.

En las figuras (IV.1) y (IV.2) se representan gráficamente la función de distribución y la función de densidad conjunta dadas dos marginales STSP, mediante la función de distribución FGM.

Para proceder a la construcción de la función de densidad y la función de distribución conjunta se tendrá que calcular previamente el valor del parámetro α . Hay que recordar que el parámetro α pertenece al intervalo $[-1,1]$, de manera que los casos en que $\alpha=-1$ y $\alpha=1$ representan los máximos grados de dependencia negativa y positiva, respectivamente, que se permiten en la familia FGM. Se observa que el parámetro α está asociado con las medidas de dependencia y por ello se recurre a ellas para su cálculo.

En el apartado dedicado a la presentación de la cópula FGM se presentó la relación entre el coeficiente de correlación para diferentes familias de distribución FGM presentadas en la literatura de manera que el coeficiente de correlación toma el valor $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{\pi}$, $0,281 \alpha$ y $\frac{\alpha}{3}$ para marginales exponenciales, normales, Laplace y uniformes, respectivamente. Véase Cuadro (IV.5).

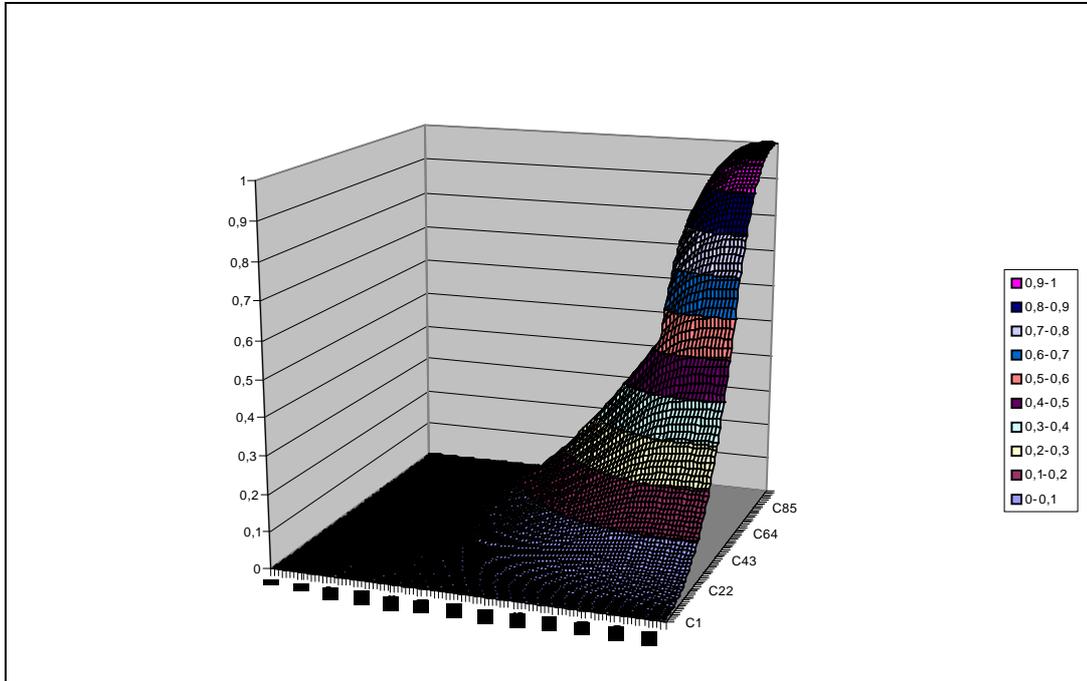


Figura IV.1: Función de distribución conjunta FGM dadas las funciones marginales STSP. $M_1=0,8$; $M_2=0,6$; $\alpha=0,9$.

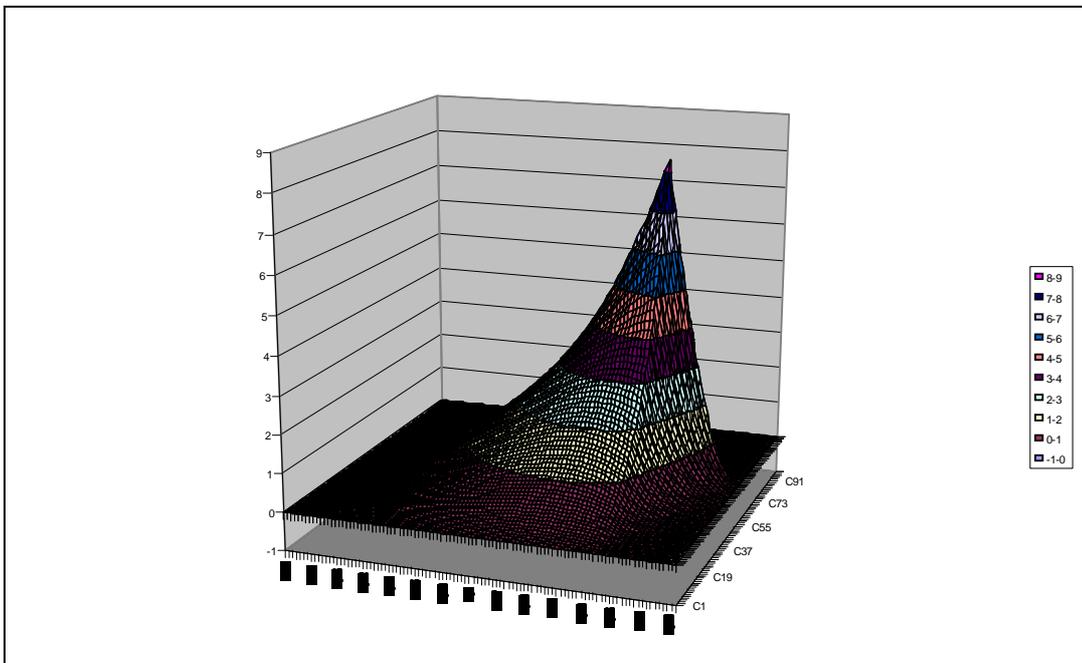


Figura IV.2: Función de densidad conjunta FGM dadas las funciones marginales STSP. $M_1=0,8$; $M_2=0,6$; $\alpha=0,9$.

En estas distribuciones no hay que tener en cuenta el valor de los parámetros de las distribuciones marginales para calcular el valor del coeficiente. Sin embargo, éste no es el caso de las distribuciones FGM con marginales TSP, ya que existe una dependencia funcional sobre los parámetros de la distribución. Según Höfdding (1940):

$$\text{cov}(I_1, I_2) = \int_0^1 \int_0^1 \{F(I_1, I_2) - F(I_1)F(I_2)\} dI_1 dI_2. \quad (\text{IV.25})$$

Utilizando la expresión (IV.17), obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente de correlación de una distribución FGM con marginales TSP:

$$\text{corr}(I_1, I_2) = \alpha \prod_{i=1}^2 \frac{h_{X_i}}{\sqrt{\text{Var}(I_i)}} \quad (\text{IV.26})$$

donde:

$$h_{X_i} = \int_0^1 F(I_i)[1 - F(I_i)] dI_i \quad (\text{IV.27})$$

Sustituyendo la expresión de la función de distribución de las marginales STSP en la expresión (IV.27) y utilizando la expresión (IV.26) se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente de correlación:

$$\text{corr}(I_1, I_2, M_1, M_2, n_1, n_2) = \alpha \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{(n_i + 2)}{n_i - 2(n_i - 1)M_i(1 - M_i)}} \frac{n_i - (n_i - 1)M_i(1 - M_i)}{2n_i + 1}. \quad (\text{IV.28})$$

Así pues, se observa que, una vez conocido el coeficiente de correlación, se puede hallar el parámetro α simplemente despejando de la expresión anterior.

Para hallar el coeficiente de correlación, plantearemos la relación de ambos índices como un problema básico de regresión. De manera que uno de los índices pasa a ser la variable explicativa (X) y el otro la variable explicada (Y):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + u. \quad (\text{IV.29})$$

Partiendo de tres observaciones (el valor máximo, el más probable y el mínimo) para cada uno de los índices, una vez estandarizados, se procede a realizar los cálculos pertinentes para obtener el estimador de los parámetros y el coeficiente de correlación:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & M_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.30})$$

Usando la conocida expresión:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y \quad (\text{IV.31})$$

y sabiendo que:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{2(M_2^2 - M_2 + 1)} \begin{pmatrix} M_2^2 & -(M_2 + 1) \\ -(M_2 + 1) & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

$$X'\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & M_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + 1 \\ M_2 M_1 + 1 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{2(M_2^2 - M_2 + 1)} (M_2^2 + 1)(M_1 + 1) - (M_2 + 1)(M_2 M_1 + 1) = \frac{M_2^2 + M_1 - M_2 - M_2 M_1}{2(M_2^2 - M_2 + 1)} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{2(M_2^2 - M_2 + 1)} (-(M_2 + 1))(M_1 + 1) + (M_2 M_1 + 1)3 = \frac{2M_2 M_1 - M_2 - M_1 + 2}{2(M_2^2 - M_2 + 1)} \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

En el cuadro (IV.7) se recoge el cálculo de la expresión de la covarianza:

Y	X	$y - \bar{y}$	$x - \bar{x}$	$(y - \bar{y})(x - \bar{x})$
0	0	$-(M_1 + 1)/3$	$-(M_2 + 1)/3$	$(M_1 + 1)(M_2 + 1)/9$
M_1	M_2	$M_1 - \frac{(M_1 + 1)}{3}$	$M_2 - \frac{(M_2 + 1)}{3}$	$(2M_1 - 1)(2M_2 - 1)/9$
1	1	$1 - \frac{(M_1 + 1)}{3}$	$1 - \frac{(M_2 + 1)}{3}$	$(2 - M_1)(2 - M_2)/9$

Cuadro IV.7. Cálculos previos a la expresión final de la covarianza

Y finalmente:

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{2M_1M_2 - M_1 - M_2 + 2}{3} \quad (\text{IV.35})$$

con respecto a la varianza de X y la varianza de Y :

$$\text{var}(Y) = \left(-\left(\frac{M_1 + 1}{3} \right) \right)^2 + \left(\frac{2M_1 - 1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2 - M_1}{3} \right)^2 = \frac{2}{3}(M_1^2 - 2M_1 + 2) \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{var}(X) = \frac{2}{3}(M_2^2 - 2M_2 + 2) \quad (\text{IV.37})$$

Por último, el coeficiente de correlación es:

$$\rho = \frac{(2M_1M_2 - M_1 - M_2 + 2)/3}{\frac{2}{3}\sqrt{(M_1^2 - 2M_1 + 2)(M_2^2 - 2M_2 + 2)}} = \frac{2M_1M_2 - M_1 - M_2 + 2}{2\sqrt{(M_1^2 - 2M_1 + 2)(M_2^2 - 2M_2 + 2)}} \quad (\text{IV.38})$$

En la figura (IV.3) se representa gráficamente el coeficiente de correlación entre los índices I_1 y I_2 , y se observa que siempre toma valores comprendidos entre 0,4986 y 0,9016, lo que conduce, sustituyendo en la expresión (IV.28), a valores de α comprendidos en el intervalo (1,55; 3,16).

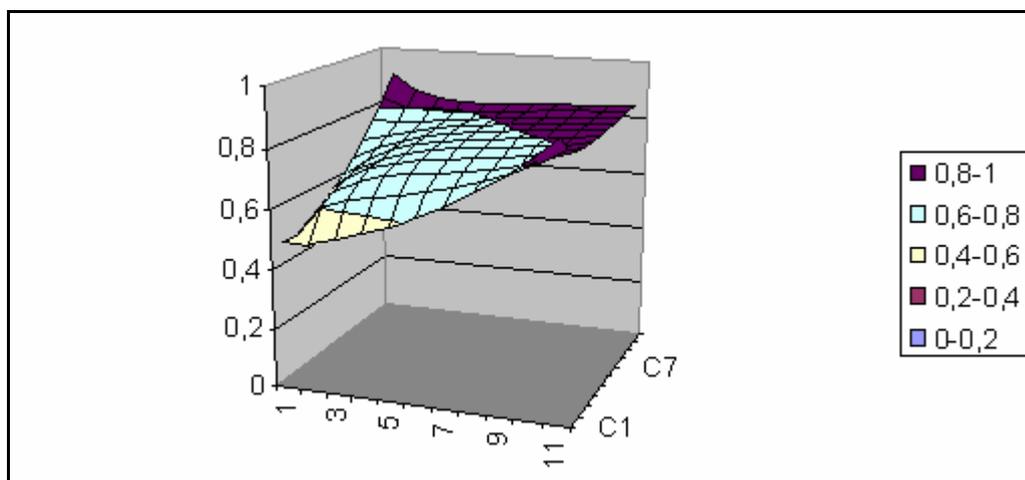


Figura IV.3. Representación del coeficiente de correlación entre el índice 1 y el índice 2 en ambiente de incertidumbre.

Dado que la familia FGM sólo es aplicable para valores de α comprendidos entre -1 y 1 , y se ha comprobado que para marginales TSP toma valores fuera de dicho intervalo, se concluye que no se puede hacer uso de las expresiones (IV.16) y (IV.17) en este caso concreto.

Esta conclusión viene motivada por la falta de datos, sólo tres valores para cada uno de los índices, que conduce a una alta correlación entre dichas variables lo que imposibilita la aplicación de la cópula FGM que, tal como se advirtió en el epígrafe dedicado a su presentación, está limitada a variables con coeficiente de correlación en el intervalo $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ es decir con dependencia moderada o pequeña. En apartados posteriores se presenta una solución alternativa para la superación de este inconveniente.

IV.2.2. Uso de marginales bipolarabólicas para la construcción de la función de distribución conjunta a través de la cópula FGM.

En el apartado anterior se ha aplicado el método de las dos funciones de distribución con dos índices al caso en que estos se distribuyen mediante una STSP y a continuación se utiliza la función de distribución bipolarabólica, presentada en el segundo capítulo, como distribución de las funciones marginales. En cualquier caso, el objetivo es obtener la función de distribución conjunta que permita obtener mediante la fórmula de inversión la función del valor del activo.

Se parte de dos índices, X_1 y X_2 , distribuidos según una bipolarabólica, y que una vez estandarizados se notan como I_1 y I_2 , cuya función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$F(I_i) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{I_i^2 (I_i - 3M_i)}{M_i^2}, & 0 \leq I_i \leq M_i \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{(I_i - 1)^2 (I_i - 3M_i + 2)}{(M_i - 1)^2}, & M_i \leq I_i \leq 1 \end{cases} \quad (IV.39)$$

Partiendo de la expresión (IV.16) referente a la función de distribución de la familia FGM, y haciendo uso de la expresión de la función de distribución TSP (IV.39), se construye la función de distribución conjunta que se recoge en la expresión (IV.40) presentada en el anexo matemático B. De manera análoga, partiendo de la expresión (IV.41) que recoge la función de densidad marginal de una variable bipolarabólica estandarizada, para $i=1,2$, se construye, haciendo uso de la expresión (IV.17) de la función de densidad de la familia FGM, la función de distribución conjunta recogida en la expresión (IV.42) presentada en el anexo matemático B.

$$f(I_i) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{1}{M_i^2} (I_i^2 - 2M_i I_i), & 0 < I_i < M_i \\ -\frac{3}{2} \frac{1}{(1-M_i)^2} (I_i^2 - 2M_i I_i + 2M_i - 1), & M_i < I_i < 1 \end{cases} \quad (IV.41)$$

La representación grafica de las expresiones (IV.40) y (IV.42) se recogen en las figuras (IV.4) y (IV.5), respectivamente:

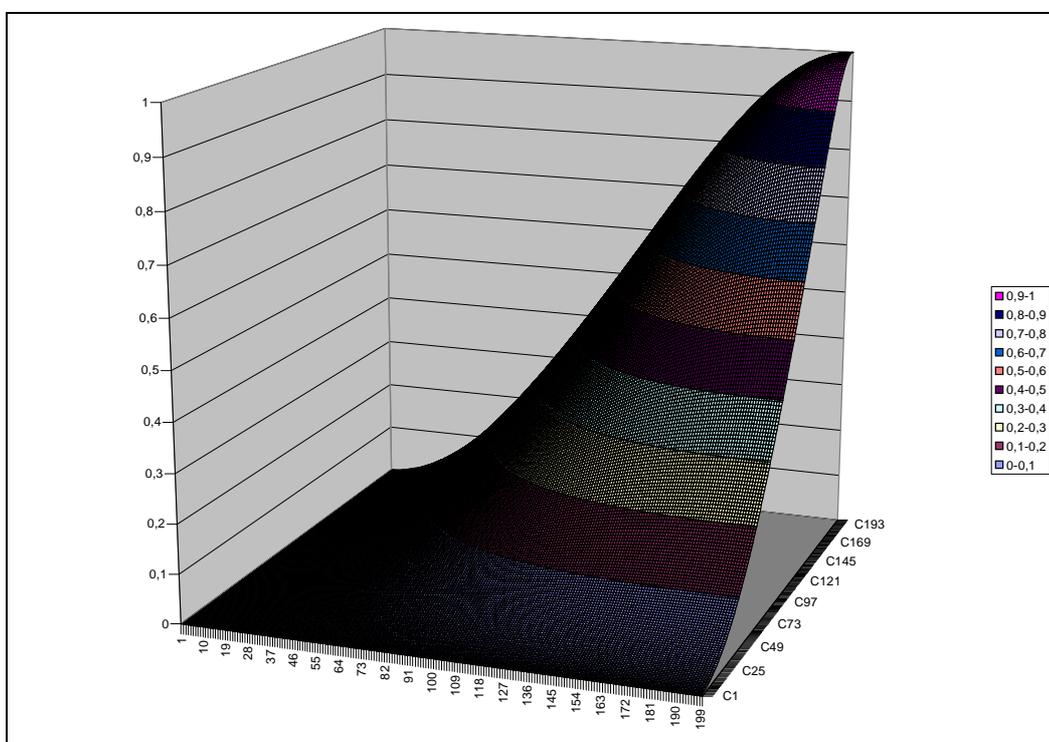


Figura IV.4: Función de distribución conjunta FGM dadas las funciones marginales biparabólicas. $M_1=0,6$; $M_2=0,8$;

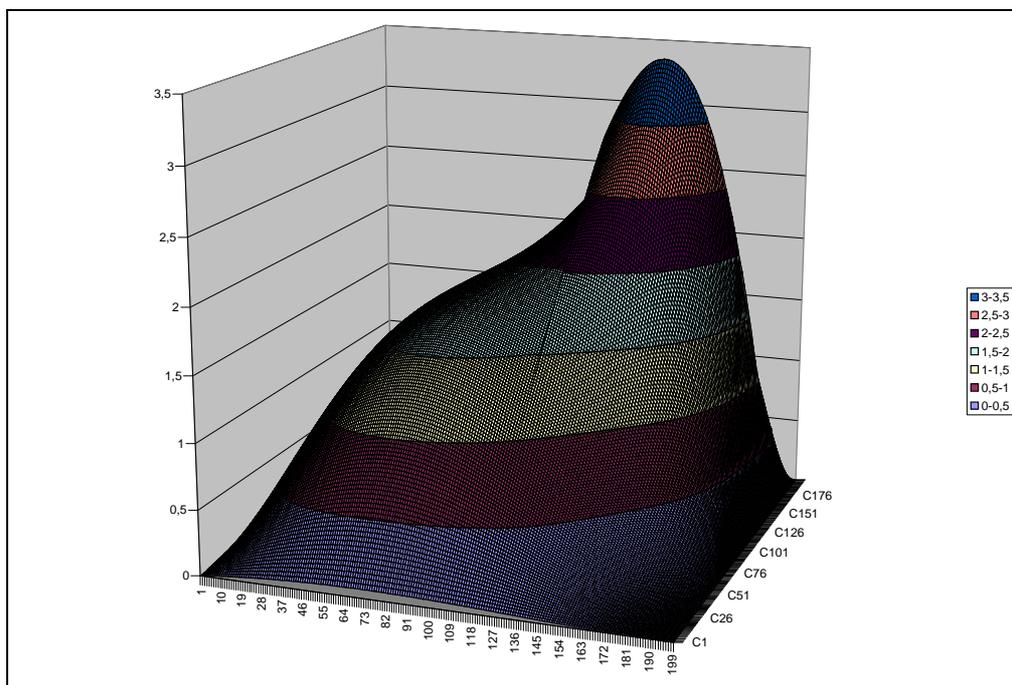


Figura IV.5: Función de densidad conjunta FGM dadas las funciones marginales biparabólicas. $M_1=0,6$; $M_2=0,8$;

Para el cálculo de α en las distribuciones FGM con marginales biparabólicas se utiliza la expresión (IV.28) aplicada en el caso de marginales TSP. Según establece Höfdding (1940) en las expresiones (IV.26) y (IV.27) si utilizamos la función de distribución biparabólica recogida en la expresión (IV.41), h_t vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
 h_t &= \int_0^M \left\{ -\frac{1}{2} \frac{t^2(t-3M)}{M^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{t^2(t-3M)}{M^2} \right\} \right\} dt + \int_M^1 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2(t-3M+2)}{(M-1)^2} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2(t-3M+2)}{(M-1)^2} \right\} dt \\
 &= \frac{3}{8} M^2 - \frac{33}{140} M - \frac{3}{8} (M-1)^3 + \frac{33}{140} (M-1)^2 = -\frac{99}{140} M^2 + \frac{204}{140} M - \frac{171}{280}
 \end{aligned} \tag{IV.43}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\text{var}(I_i) = \frac{12M_i^2 - 12M_i + 19}{320}, \tag{IV.44}$$

la expresión (IV.28) adopta la siguiente forma:

$$\text{corr}(I_1, I_2) = \alpha \prod_{i=1}^2 \frac{-\frac{99}{140} M_i^2 + \frac{204}{140} M_i - \frac{171}{280}}{\sqrt{\frac{12M_i^2 - 12M_i + 19}{320}}}. \quad (\text{IV.45})$$

A modo de resumen, a la hora de obtener la función de distribución conjunta de la familia FGM, ya sea a partir de marginales STSP o bipolarabólicas, el procedimiento se reduce a la aplicación de la expresión (IV.16) para lo que se debe calcular previamente el parámetro α , que se despejará, en cualquier caso, de la expresión (IV.45) una vez conocido el coeficiente de correlación. Para el cálculo del coeficiente de correlación se debe distinguir entre un ambiente de riesgo y un ambiente de incertidumbre. En ambiente de riesgo se cuenta con datos suficientes para determinar el coeficiente de correlación, mientras que en ambiente de incertidumbre se utiliza la expresión (IV.38). Es importante señalar que es posible que en algún caso el valor del parámetro α no esté dentro de los límites permitidos por la familia de distribución FGM.

IV.3. MÉTODO DE VALORACIÓN

El método de las dos funciones de distribución ya fue presentado en el capítulo introductorio y se ha avanzado a través de él durante toda la Memoria. En esta sección, se extiende dicho método a la utilización de dos índices en lugar de uno, y para ello se ha procedido a la construcción de la función de distribución conjunta de ambos índices mediante la herramienta cópula, y concretamente con la familia FGM y las marginales TSP, por una parte, y bipolarabólicas, por otra.

Una vez que se conocen las expresiones de la función de densidad y función de distribución conjunta partiendo de dos índices que actúan como distribuciones marginales, se procede a la presentación del método de valoración.

Dicho método consiste en partir de unos valores concretos (x_0, y_0) para el índice 1 y el índice 2, y a partir de ellos conocer el valor del activo que le corresponde a dichos valores.

El procedimiento tiene varios pasos:

- En primer lugar se calcula el valor F_0 para unos valores dados de los índices (I_1^0, I_2^0) des decir: $F_0 = F(I_1^0, I_2^0)$.
- A continuación se presentan dos posibilidades en función de que el valor F_0 sea menor o mayor que la moda estandarizada del activo (M), y de ello dependerá el valor final del activo. Así pues, se presentan dos posibles ramas:

- Rama 1: Si $F_0 < M$ entonces:

$$M \left(\frac{V}{M} \right)^n = F_0 \Rightarrow V = M \sqrt[n]{\frac{F_0}{M}}. \quad (\text{IV.46})$$

- Rama 2: Si $F_0 > M$ entonces:

$$1 - (1 - M) \left(\frac{1 - V}{1 - M} \right)^n = F_0 \Rightarrow V = 1 - (1 - M) \sqrt[n]{\frac{1 - F_0}{1 - M}} \quad (\text{IV.47})$$

Cuando la aplicación tenga lugar en ambiente de incertidumbre, será necesario realizar el procedimiento de valoración para cada una de las diferentes subfamilias de las distribuciones TSP o bipolarabólicas, ya que el parámetro n tiene una interpretación compleja y no se trata de un dato que pueda aportar directamente el experto, sino que para obtenerlo es necesario restringir a una subfamilia, bien a la familia mesocúrtica o a la de varianza constante. Sin embargo, en ambiente de riesgo se puede estimar el parámetro n definiendo claramente la distribución STSP o SBP de cada uno de los índices. A continuación, se presentan dos aplicaciones prácticas, en primer lugar, en ambiente de riesgo y posteriormente en ambiente de incertidumbre.

IV.3.1. Aplicación del método de valoración en ambiente de riesgo para distribuciones subyacentes STSP y familia de cópulas FGM.

Se toma como punto de partida el caso práctico desarrollado por Alonso y Lozano (1985), trabajo que ha sido reiteradamente citado en las aplicaciones del método que nos ocupa.

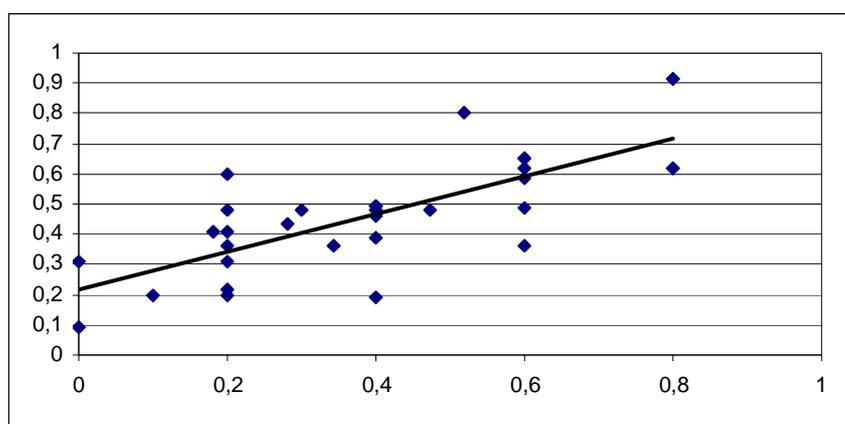


Figura IV.6. Grafico de dispersión entre la Ingresos/Ha (variable estandarizada) y el valor de la finca (variable estandarizada)

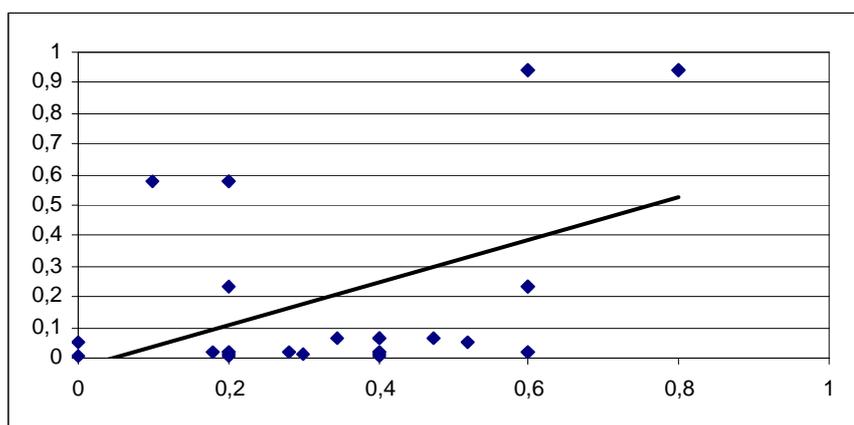


Figura IV.7. Grafico de dispersión entre la inversa de la distancia (variable estandarizada) y el valor de la finca (variable estandarizada)

Valor estandarizado	Ingresos estandarizados	Inversa de la distancia estandarizada
0,6	0,360333333	0,944658423
0,8	0,619583333	0,944658423
0,6	0,619583333	0,944658423
0,8	0,913333333	0,944658423
0,2	0,362333333	0,23312386
0,6	0,582416667	0,23312386
0,6	0,486333333	0,23312386
0,4	0,190833333	0,063710868
0,344	0,362333333	0,063710868
0,4	0,386666667	0,063710868
0,1	0,198083333	0,575714575
0,2	0,198083333	0,575714575
0,2	0,597333333	0,575714575
0,6	0,650466667	0,022298804
0,2	0,478666667	0,022298804
0,6	0,650466667	0,022298804
0,4	0,478666667	0,022298804
0,52	0,800333333	0,0506791
0	0,311333333	0,0506791
0,4	0,492	0,022298804
0,28	0,433566667	0,022298804
0,2	0,2173	0,008108656
0	0,091733333	0,008108656
0,4	0,458033333	0,008108656
0,4	0,492	0,013514427
0,2	0,409133333	0,013514427
0,3	0,478666667	0,013514427
0,18	0,409133333	0,022298804
0,2	0,311333333	0,022298804
0,472	0,478666667	0,063710868

Cuadro IV.8. Datos estandarizados de entrada para la aplicación práctica

Dichos datos se recogen, una vez estandarizados, en el cuadro (IV.8). Para comenzar se realiza un simple diagrama de dispersión, que se recoge en las figuras (IV.6) y (IV.7), donde se observa que, en principio, la variable ingresos/Ha puede tener capacidad para explicar el valor de las tierras, mientras que en el gráfico referente a la variable distancia se observa una cierta dispersión.

Mediante una regresión lineal se obtiene la siguiente ecuación de ajuste $Y = -0,01426 + 0,7710I_1 + 0,176417I_2$, donde Y es el valor de las tierras, I_1 es el ingreso por hectárea y I_2 la inversa de la distancia (o cercanía), el coeficiente de determinación de la regresión es 0,6073 y los parámetros individuales son significativos.

En consecuencia, se trata de un modelo significativo individual y globalmente y se puede decir que la variable ingresos/Ha y la inversa de la distancia tienen capacidad para explicar el valor de la finca.

Si se supone que los dos índices siguen una distribución STSP para el cálculo de la función de distribución conjunta se debe estimar, en primer lugar los parámetros M y n , y, para ello, previamente hay que hallar los valores de la media y la varianza de los datos para tomarlos como estimadores de la media y la varianza de la distribución STSP(M,n).

	Activo	Índice 1 (INGRESOS)	Índice 2 (INVERSA DE LA DISTANCIA)
Medias	0,3732	0,450625	0,226820345
Varianzas	0,04565423	0,03340746	0,110674903
C	0,02282712	0,01670373	0,055337452
D	0,04565423	0,03340746	0,110674903
E	-0,28890536	-0,26914162	-0,37996458
F	0,18826753	0,21415465	0,064697973
n	2,12516	2,44521	1,67757
M	0,4403339	0,47980746	0,337157522
MEDIA	0,47851825	0,49152956	0,458792047
VARIANZA	3,71849229	4,60279724	2,680001395

Cuadro IV.9. Estimación de n y M para las distintas subfamilias

Es decir, a partir de los datos recogidos en el cuadro (IV.8) se calculan la media y la desviación típica estandarizada. Con estos datos se calculan los coeficientes c , d , e y f de la expresión (I.32) y se procede a la resolución de la ecuación cúbica que nos ofrecerá varios valores para el parámetro n , y se elegirá el que sea mayor que 1.

Una vez conocido n , se despeja de la expresión (I.34) y se obtiene el valor de M . Este procedimiento permite obtener los parámetros de las distribuciones STSP, véase Cuadro (IV.9).

En conclusión, el activo sigue una distribución STSP($y/0,4403339;2,12516$), y los índices I_1 y I_2 las distribuciones STSP ($I_1/ 0,47980746; 2,44521$) y STSP($I_2/ 0,337157522; 1,67757$) respectivamente. Una vez conocidas las funciones de distribución de cada uno de los índices, se considerarán a éstas como distribuciones marginales que se utilizarán para la construcción de la función de distribución conjunta. Así pues, haciendo uso de la familia de distribuciones FGM, se obtiene la siguiente función de distribución conjunta representada en la figura (IV.8). Para el cálculo del parámetro α , se calcula, en primer lugar el coeficiente de correlación realizando una regresión lineal entre los dos índices. De dicha regresión se obtiene un valor de $\rho=0,26748401$ y, despejando de la expresión (IV.28), un valor de $\alpha =0,821241$. Este valor de α se encuentra dentro del intervalo $[-1,1]$, por lo que en este caso se puede aplicar la familia FGM sin ningún problema.

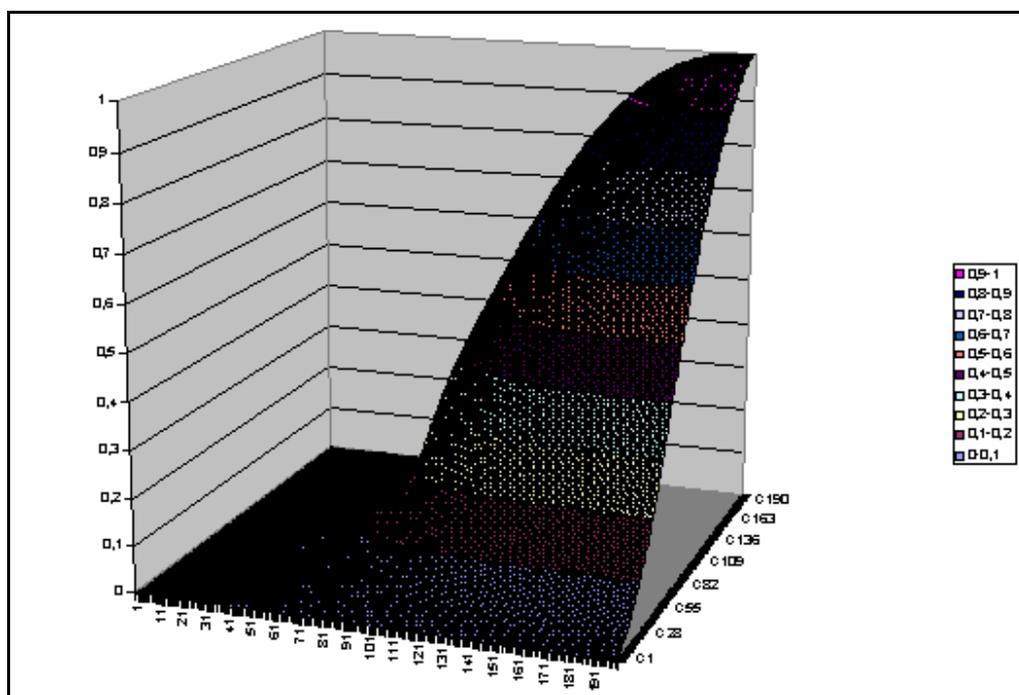


Figura IV.8. Función de distribución conjunta dadas unas marginales STSP

Por último se aplica el procedimiento de valoración presentado en la sección (IV.3) de manera que:

- Si $F_0 < M$, entonces $M \left(\frac{V}{M} \right)^n = F_0 \Rightarrow V = M \sqrt[n]{\frac{F_0}{M}}$.
- Si $F_0 > M$, entonces $1 - (1 - M) \left(\frac{1 - V}{1 - M} \right)^n = F_0 \Rightarrow V = 1 - (1 - M) \sqrt[n]{\frac{1 - F_0}{1 - M}}$.

En la figura (IV.9) se presenta el gráfico del valor del activo en el espacio.

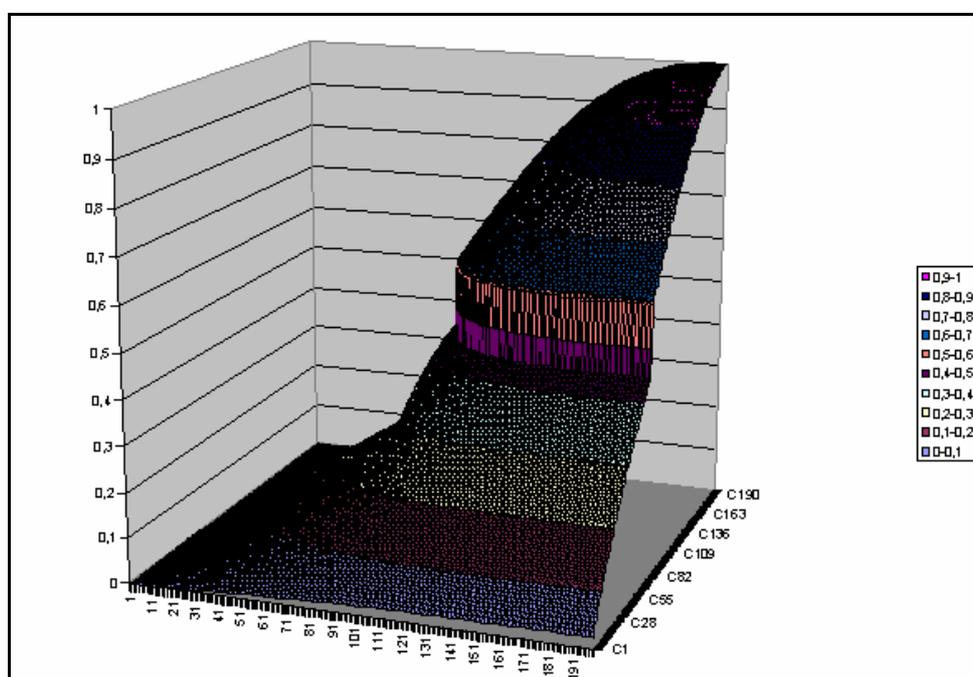


Figura IV.9. Función de valoración.

En el cuadro (IV.10) se recogen los cálculos realizados para la realización de la aplicación práctica. En las tres primeras columnas se recogen los valores estandarizados del activo y los índices. Con las columnas referentes a los valores de los índices y haciendo uso de la expresión (IV.23) se calcula la columna (4) referente a los valores de la función de distribución conjunta para cada par de valores de ambos índices.

Generalizaciones de la distribución biparabólica:
Aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración.

Capitulo IV

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
ACTIVO	INDICE 1	INDICE 2	F.DISTRIB. CONJUTA	F. VALOR	RESISUOS AL CUADRADO DEL MDFD	RESIDUOS AL CUADRADO DE LA REGRESION
0,6	0,36033333	0,94465842	0,4289136	0,43492265	0,02725053	0,028825021
0,8	0,61958333	0,94465842	0,75171637	0,5663414	0,054596343	0,028861445
0,6	0,61958333	0,94465842	0,75171637	0,61820271	0,000331339	0,000906819
0,8	0,91333333	0,94465842	0,98332986	0,89288007	0,008626707	0,003204371
0,2	0,36233333	0,23312386	0,05811654	0,1698006	0,000912004	0,011285965
0,6	0,58241667	0,23312386	0,15218532	0,26709432	0,110826191	0,015393606
0,6	0,48633333	0,23312386	0,12048775	0,23929661	0,130106937	0,039265525
0,4	0,19083333	0,06371087	0,00309719	0,04273356	0,127639307	0,065477553
0,344	0,36233333	0,06371087	0,01557478	0,09137777	0,063817992	0,004576798
0,4	0,38666667	0,06371087	0,00876778	0,06973043	0,109077986	0,011001912
0,1	0,19808333	0,57571458	0,06840917	0,18334169	0,006945837	0,01960862
0,2	0,19808333	0,57571458	0,06840917	0,18334169	0,000277499	0,001602463
0,2	0,59733333	0,57571458	0,53099702	0,48499378	0,081221454	0,121013185
0,6	0,65046667	0,0222988	0,00330169	0,04403884	0,309092812	0,011836312
0,2	0,47866667	0,0222988	0,00221543	0,03650051	0,026732084	0,025198415
0,6	0,65046667	0,0222988	0,00330169	0,04403884	0,309092812	0,011836312
0,4	0,47866667	0,0222988	0,00326857	0,04383041	0,126856775	0,00170238
0,52	0,80033333	0,0506791	0,01387207	0,08653281	0,187893803	0,008420914
0	0,31133333	0,0506791	0,00571027	0,05698887	0,003247731	0,055096184
0,4	0,492	0,0222988	0,00252655	0,03882877	0,130444656	0,00095972
0,28	0,43356667	0,0222988	0,00276073	0,26552544	0,000209513	0,001933015
0,2	0,2173	0,00810866	7,92E-05	0,00761264	0,037012897	0,002051013
0	0,09173333	0,00810866	1,4326E-05	0,00340489	1,15933E-05	0,003351791
0,4	0,45803333	0,00810866	0,00041524	0,01660097	0,146994813	0,003560805
0,4	0,492	0,01351443	0,00109128	0,26494712	0,018239281	0,00105814
0,2	0,40913333	0,01351443	0,00079976	0,02259849	0,031471297	0,010728239
0,3	0,47866667	0,01351443	0,00107372	0,02595848	0,075098756	0,003270738
0,18	0,40913333	0,0222988	0,00185269	0,03355506	0,021446121	0,015656749
0,2	0,31133333	0,0222988	0,00102554	0,02540374	0,030483854	0,000883217
0,472	0,47866667	0,06371087	0,01893535	0,10017689	0,138252426	0,011226269
SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS RESIDUOS					2,31421135	0,519793499

Cuadro IV.10. Cuadro resumen de la aplicación práctica con el cálculo de la SCR para el MDFD y la regresión.

Aplicando el procedimiento de valoración descrito anteriormente se obtienen para cada par de valores, el valor del activo (5) y posteriormente se obtienen los residuos restándole al valor original el valor estimado (6). Por otra parte, en la columna (7) se presentan los residuos obtenidos mediante la regresión realizada al inicio, con el objeto de comparar la suma de los cuadrados de los residuos de la aplicación del MDFD con la suma de los cuadrados de los residuos de la regresión, observándose que esta última es menor que la obtenida mediante la aplicación del MDFD.

IV.3.2. Aplicación del método de valoración en ambiente de incertidumbre para distribuciones subyacentes STSP y familia de cópulas FGM.

Cuando se pretende valorar en un ambiente de incertidumbre sólo se cuenta con la información aportada por el experto y esto hace que la correlación entre los índices sea muy fuerte y por tanto no se pueda hacer uso de la cópula FGM. Véase apartado IV.2.1.

En este apartado se pretende obtener una solución alternativa que permita la aplicación de la cópula FGM en ambiente de incertidumbre. En primer lugar, se presentan, a continuación, algunas opciones:

- Realizar una transformación sobre los valores de α , de manera que el rango obtenido (1,55, 3,16) se convierta en un nuevo rango (0,1) y poder continuar con el procedimiento para el cálculo de la función de distribución conjunta.
- Utilizar otra medida de correlación como el coeficiente de correlación de rango de Kendall, τ (tau). Al igual que, en el caso del coeficiente de correlación, existe una relación entre el parámetro α y la τ de Kendall. Véase Cuadro (IV.4). A través de esta expresión se podría despejar y obtener el valor de α . Sin embargo, el hecho de trabajar en ambiente de incertidumbre hace que el número de intercambios para convertir una ordenación en otra sea muy pequeño, y por ello se tiende a concluir

que existe una alta relación entre las variables, cuando en realidad no se tienen suficientes datos para realizar ninguna afirmación a este respecto.

- Utilizar otra cópula, por ejemplo la cópula Placket que toma valores para todo el rango del coeficiente de correlación.

En conclusión, se sabe que el parámetro α está relacionado con las medidas de correlación. Sin embargo, en ambiente de incertidumbre se cuenta con muy pocos datos y esto hace que las medidas de correlación concluyan con la existencia de una alta correlación entre las variables, lo que implica valores de α fuera del intervalo $(-1,1)$.

La familia FGM no puede aplicarse en estos casos, y por ello se han planteado varias soluciones alternativas. Lo cierto es que ninguna de ellas supone una solución definitiva y por ello, se dedica este apartado a la búsqueda de una alternativa convincente.

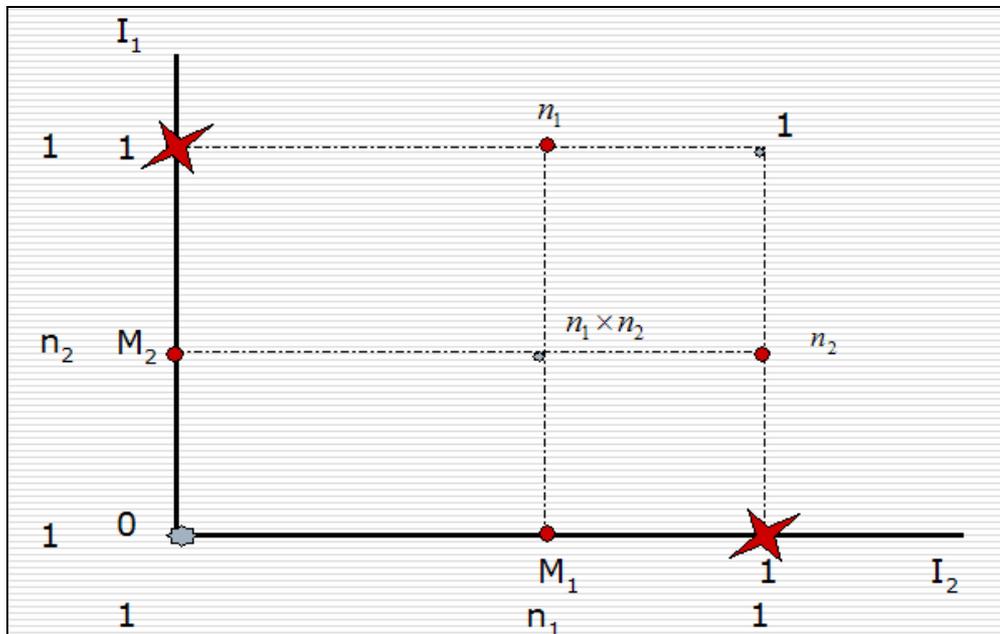


Figura IV.10. Diagrama que representa la solución propuesta en la que se considera el parámetro n como el número de veces que se observa la moda del índice en cuestión.

Como se ha podido sobrentender hasta ahora el problema base es la escasez de observaciones para cada índice, pero si se considera al parámetro n como el número de veces que se observa la moda, de manera que n_1 sería el número de veces que se ha observado la moda del índice 1 y n_2 el número de veces que se ha observado la moda del segundo índice contaríamos con unas observaciones totales de:

$$(n_1 + 2)(n_2 + 2) = n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 4 \quad (\text{IV.48})$$

De esta manera se pasa de tener tres observaciones para cada índice a tener n_1+2 para el primer índice y $n_2 + 2$ para el segundo índice. Ver figura (IV.10).

El objetivo es evitar que el coeficiente de correlación tenga un valor elevado motivado por la escasez de datos. Sin embargo, el resultado es que el coeficiente de correlación tendrá valor nulo cualquiera que sea n_1 y n_2 . Se propone omitir algunas de las observaciones, y parece lógico eliminar aquella en la que el índice 1 toma el valor optimista mientras que el índice 2 nos da el valor pesimista y viceversa, ya que son casos extremos que bajo un supuesto de correlación entre los índices no tendrían posibilidad de darse. De esta manera, el número de observaciones sería:

$$n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 2 \quad (\text{IV.49})$$

Entonces, realizando las operaciones oportunas:

$$\text{var}(I_1) = \frac{M_1^2 [2n_1n_2^2 + 6n_1n_2 + 4n_1] - M_1 [2(n_2 + 1)(n_1n_2 + 2n_1)] + [n_2^2 + n_1n_2^2 + 3n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 1]}{(n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 2)} \quad (\text{IV.50})$$

$$\text{var}(I_2) = \frac{M_2^2 [2n_2n_1^2 + 6n_1n_2 + 4n_2] - M_2 [2(n_1 + 1)(n_1n_2 + 2n_2)] + [n_1^2 + n_2n_1^2 + 3n_1n_2 + 2n_2 + 2n_1 + 1]}{(n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 2)} \quad (\text{IV.51})$$

$$\text{cov}(I_1, I_2) = \frac{(M_1 + M_2 - 2M_1M_2)n_1n_2 + (n_1 + n_2 + 1)}{n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 2} \quad (\text{IV.52})$$

Lo que permite calcular el coeficiente de correlación. Al aumentar las observaciones con respecto al problema inicial y prescindir de los valores extremos se consigue que el valor del coeficiente de correlación este dentro del intervalo adecuado para aplicar la FGM, es decir el coeficiente de correlación toma un valor dentro del rango $(-1/3,1/3)$ y se puede aplicar la familia de distribuciones FGM.

Haciendo uso de las expresiones (IV.50), (IV.51) y (IV.52) y sustituyéndolas en la expresión (IV.25) se obtiene la expresión del coeficiente de correlación y la figura (IV.11) que ofrece el rango de valores posibles para el coeficiente de correlación.

Se observa que aplicando la solución propuesta, el coeficiente de correlación sería siempre menor que 0,3 por lo que se cumpliría la condición necesaria para usar la familia de distribución FGM en caso de incertidumbre. En la figura (IV.12) se ofrece un detalle de la figura (IV.11).

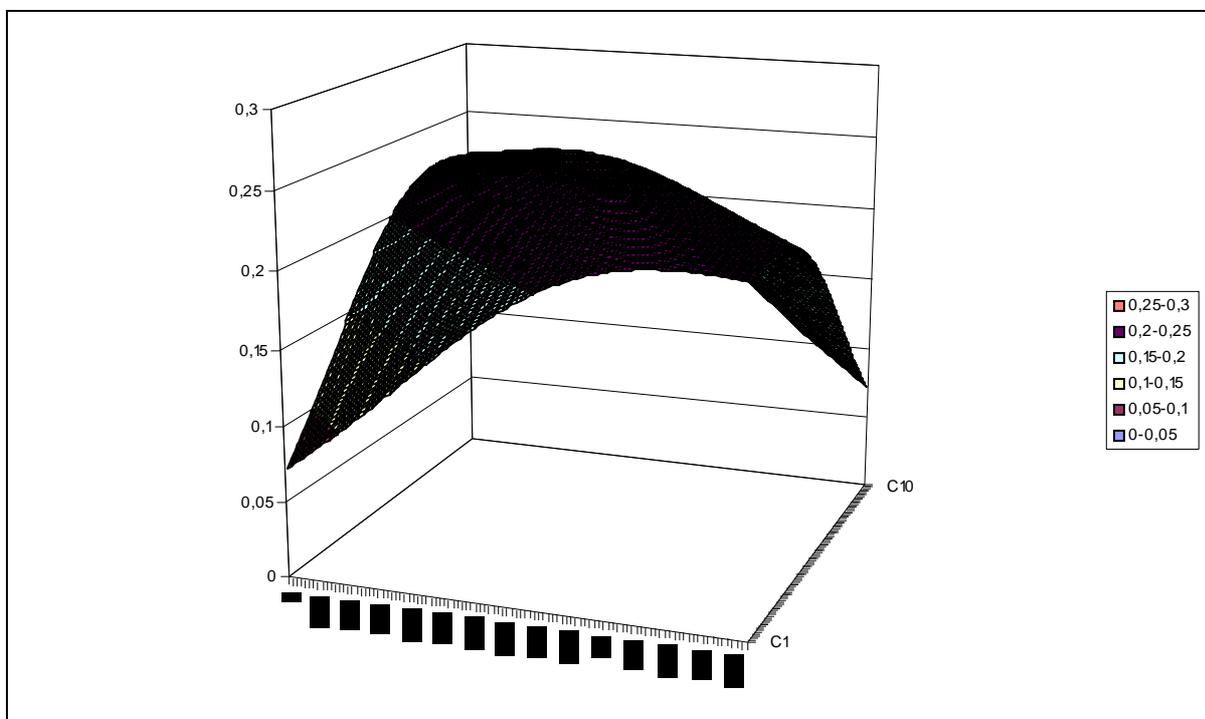


Figura IV.11. Representación del coeficiente de correlación en ambiente de incertidumbre a partir de la solución propuesta

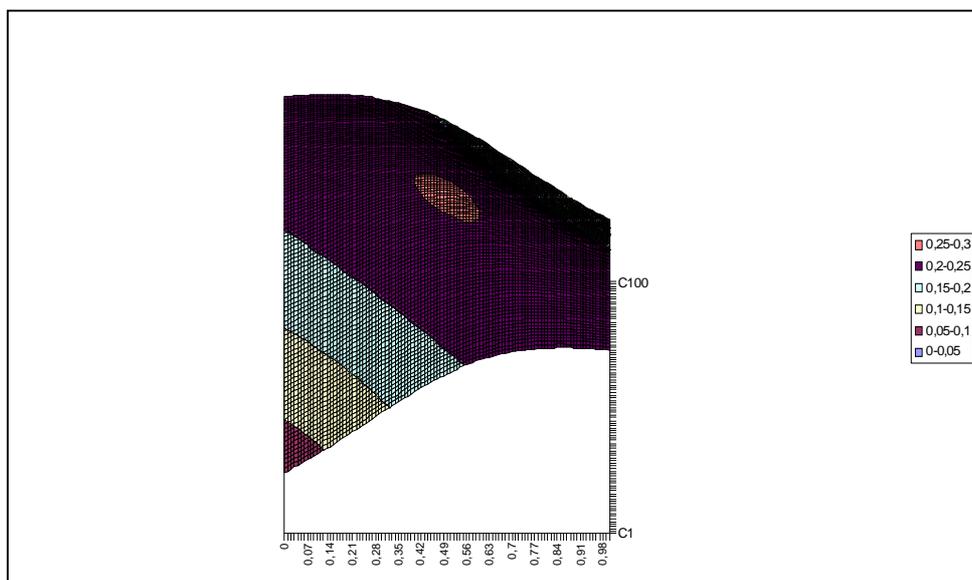


Figura IV.12. Detalle de la representación del coeficiente de correlación usando la solución propuesta.

Con el objeto de realizar una aplicación práctica se parte de los datos recogidos en el cuadro (IV.11) donde se recogen los valores optimista, más probable y pesimista aportados por el experto para el activo y dos índices. Además se cuenta con información sobre el valor de referencia de los índices. Entre paréntesis se presenta los valores estandarizados.

	a	m	b		
activo	110	140	180		
	(0)	(0,428)	(1)		
índice1	200	230	300	x	275
	(0)	(0,3)	(1)		(0,75)
índice2	90	120	170	y	130
	(0)	(0,375)	(1)		(0,5)

Cuadro IV.11. Datos de entrada para la aplicación práctica

El parámetro n tiene una difícil interpretación, tal y como se comentó con anterioridad, y no se ha definido la pregunta que se debería realizar al experto para obtener su valor ni siquiera si tal pregunta existe. Por ello, en esta aplicación práctica se calculan los

diferentes valores de n para cada una de las subfamilias de la distribución TSP. Dichos valores se recogen en el cuadro (IV.12):

n	Mesocúrtica	v-cte	Clásica
activo	3,31885	2,7926	3,02344
índice1	3,09726	2,93465	3,02344
índice2	3,23222	2,83454	3,02344

Cuadro IV.12. Valores de n para las diferentes subfamilias STSP

Una vez conocidos los valores para el parámetro n , y conocidos los valores de M , se puede obtener la función de distribución conjunta y la función de densidad conjunta. En cuanto a los valores obtenidos para el coeficiente de correlación y el parámetro alfa para cada una de las subfamilias referidas al caso práctico se recogen en el cuadro (IV.13):

	MESOCURTICA	VAR CONSTANTE
COEF. DE CORRELACION	0,253233397	0,2624621
ALFA	0,43737487	0,453333

Cuadro IV.13.Resultados de la aplicación práctica

Se observa que en este caso el coeficiente de correlación es siempre inferior a $\frac{1}{3}$ y por tanto podremos aplicar la familia de distribución FGM para resolver la función de distribución conjunta con marginales TSP, ya que siempre que el coeficiente de correlación sea inferior a dicho valor obtendremos valores de alfa en el intervalo $(-1, 1)$ tal y como esta familia de distribuciones requiere.

IV.4. CONCLUSIONES Y FUTURAS APLICACIONES

Esta sección presenta como aportación fundamental la extensión del método de las dos funciones a su aplicación con más de un índice a través de una técnica novedosa basada en la herramienta matemática cópula. Para ello se ha introducido dicha herramienta y posteriormente se ha profundizado en la familia de distribución FGM.

A través de la aplicación de dicha familia de distribuciones en el método de las dos funciones de distribución, tanto en ambiente de riesgo como en ambiente de incertidumbre, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Si se desea trabajar con dos índices en el método de las dos funciones de distribuciones se puede plantear el problema de manera que a partir de las funciones de distribución de cada uno de los índices se obtenga una función de distribución conjunta, surgiendo así la necesidad de trabajar con la herramienta cópula.
2. Esta herramienta ha tenido numerosas aplicaciones pero esta memoria constituye la primera vez que se ha aplicado en el método de las dos funciones de distribución.
3. La familia de distribuciones FGM es una de las más conocidas y aplicadas pero presenta como inconveniente que limita el rango de correlación al intervalo $[-1/3;1/3]$, por lo que sólo será de aplicación cuando los índices estén débilmente relacionados. Este hecho no supone, a priori, un problema ya que si se decide trabajar con dos índices debe ser porque no están muy relacionados porque en caso contrario se optaría por trabajar sólo con uno de ellos.
4. Sin embargo, al trabajar en ambiente de incertidumbre, la ausencia de datos provoca que al calcular el coeficiente de correlación este obtenga un valor alto, impidiendo así la aplicación de la cópula FGM. En este capítulo se proponen ciertas alternativas para superar esta vicisitud. Se propone, como alternativa convincente, el prescindir de los valores extremos consiguiendo así que el valor del coeficiente se encuentre dentro del intervalo.
5. En el caso de trabajar en ambiente de riesgo no existe problema, siempre y cuando el coeficiente de correlación se situó dentro del intervalo descrito anteriormente, ya que existen datos suficientes para calcular dicho coeficiente.
6. Se ha propuesto un método de valoración para conocer el valor del activo dados unos valores concretos para los dos índices de partida. Se ha realizado una aplicación de dicha metodología para la distribución subyacente STSP y la familia de cópulas tanto en caso de riesgo como en caso de incertidumbre.

Por otro lado, se proponen como futuras líneas de investigación dos posibles aplicaciones de la herramienta cópula: En primer lugar, se propone construir la cópula que permita obtener la distribución piramidal a partir de dos distribuciones marginales bipolarabólicas. Tal y como se demostró en el segundo capítulo, la distribución bipolarabólica resulta ser la distribución marginal de la distribución piramidal presentada por Herrerías (2002).

Teniendo en cuenta el teorema de Sklar (1959) se puede afirmar que dada una distribución $H(X_1, X_2)$ y conocida las marginales continuas $F_1(X_1)$ y $F_2(X_2)$ existe una única cópula $C(F_1(X_1), F_2(X_2)) = H(X_1, X_2)$. Por lo que será posible construir la distribución piramidal como función de distribución conjunta de los valores estandarizados de dos índices subjetivos distribuidos ambos mediante una bipolarabólica. El reto será encontrar la cópula adecuada.

A partir del coeficiente de correlación de la piramidal (IV.53) y la expresión correspondiente del parámetro α (IV.54) se procede a la construcción de la cópula FGM partiendo de distribuciones marginales bipolarabólicas y se obtiene la siguiente función de densidad recogida en la figura (IV.13) que no coincide con la de la distribución piramidal que se recoge en la figura (I.17) ya que no acaba en vértice sino que tiene una forma redondeada en su cúspide.

En una primera aproximación, se aplica la cópula FGM para la construcción de la distribución piramidal partiendo de marginales bipolarabólicas, imponiendo que el coeficiente de correlación sea el de la piramidal, cuya expresión, obtenida tras la estandarización de la expresión (I.70), es la siguiente:

$$\rho_{piramidal} = \frac{3(2M_1 - 1)(2M_2 - 1)}{\sqrt{(19 - 12(1 - M_1)M_1)(19 - 12(1 - M_2)M_2)}} \quad (IV.53)$$

Usando la expresión anterior y la (IV.45) que relaciona el coeficiente de correlación y el parámetro α , se obtiene la siguiente expresión para el parámetro α :

$$\alpha_{piramidal} = \frac{\prod_{i=1}^2 3 \frac{(2M_i - 1)}{\sqrt{(19 - 12(1 - M_i)M_i)}}}{\prod_{i=1}^2 \frac{-\frac{99}{140}M_i^2 + \frac{204}{140}M_i - \frac{171}{280}}{\sqrt{\frac{12M_i^2 - 12M_i + 19}{320}}}} \quad (IV.54)$$

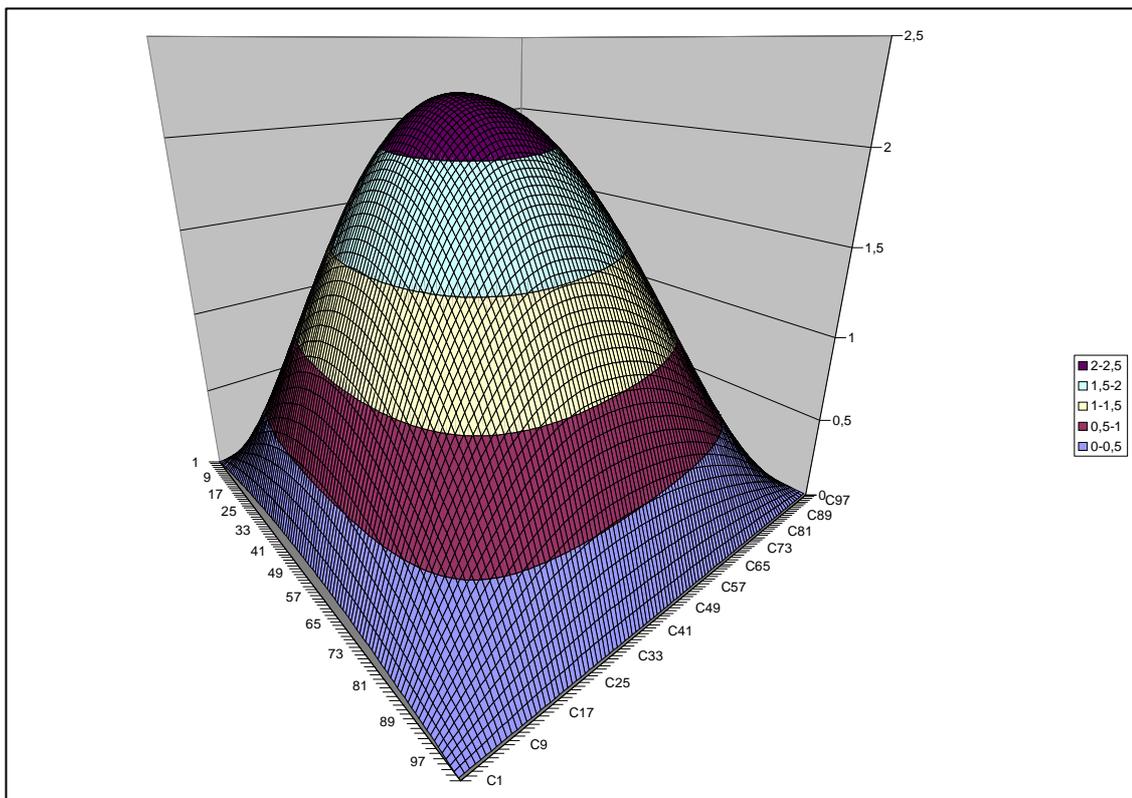


Figura IV.13. Función de distribución conjunta construida con la cópula FGM y a partir de marginales Biparabólicas

Es lógico que la cópula FGM no sea la indicada para la construcción de la distribución piramidal. Tal y como se deduce del teorema de Sklar (1959), y según Deheuvels (1981) cada distribución multivariante tiene asociada al menos una función de cópula y en el caso de que las marginales sean continuas esa cópula será única. Por tanto sólo una única cópula es la adecuada y sería casualidad que precisamente fuera la conocida cópula FGM. Por ello, se plantea como reto la construcción de la cópula que verifique el citado

propósito. Este es simplemente un avance teórico que no aumenta las aportaciones a la extensión práctica pero si puede ser interesante con vistas a analizar la cópula resultante.

En Kettler (2005) se obtiene la distribución piramidal bivariante a partir de marginales normales, llevando a cabo la construcción de la cópula que resulta tener la siguiente expresión:

$$H(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha \wedge \beta)(F^{-1}(\alpha)F^{-1}(\beta)+1) + \frac{1}{2}(F^{-1}(\alpha) \vee F^{-1}(\beta)+1)f(F^{-1}(\alpha) \wedge F^{-1}(\beta)+1) & \text{si } \alpha + \beta \leq 1 \\ G(-F^{-1}(\alpha), -F^{-1}(\beta)) + \alpha + \beta - 1 & \text{si } \alpha + \beta > 1 \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

Se propone un proceso similar para determinar la cópula que dará lugar a la distribución piramidal con marginales bipolarabólicas.

En segundo lugar, se plantea como futura línea de investigación el avanzar en la generalización del método de las dos funciones de distribución al caso multi-índice haciendo uso de la teoría de cópulas. En este capítulo se ha desarrollado la extensión a dos índices de dicho método de valoración, pero puede ser interesante trabajar con más de dos índices. Este objetivo ya fue planteado con anterioridad en García, Cruz Rosado (2000, 2002), Herrerías Velasco (2002) y García y García (2002).

Con este objetivo se propone aplicar las generalizaciones realizadas por Johnson y Kotz (1975) sobre la distribución Farlie-Gumbel-Morgenstern y que para una distribución m-dimensional tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_m) &= \prod_{j=1}^m F_j(X_j) \left[1 + \sum_{j_1 < j_2}^{m-1} \sum_{j_2}^m \alpha_{j_1 j_2} [1 - F_{j_1}(X_{j_1})][1 - F_{j_2}(X_{j_2})] \right] \\ &+ \sum_{j_1 < j_2 < j_3}^{m-2} \sum_{j_2}^{m-1} \sum_{j_3}^m \alpha_{j_1 j_2 j_3} [1 - F_{j_1}(X_{j_1})][1 - F_{j_2}(X_{j_2})][1 - F_{j_3}(X_{j_3})] + \dots \\ &+ \alpha_{123\dots m} \prod_{j=1}^m [1 - F_j(X_j)] \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Donde los coeficientes α son números reales. En el caso de la función de densidad su expresión para el caso m -dimensional es la siguiente:

$$f(X_1, \dots, X_m) = \prod_{j=1}^m f_j(X_j) \left[1 + \sum_{j_1 < j_2}^{m-1} \sum_{j_2}^m \alpha_{j_1 j_2} [1 - 2F_{j_1}(X_{j_1})][1 - 2F_{j_2}(X_{j_2})] \right] + \alpha_{12\dots m} \prod_{j=1}^m [1 - 2F_j(X_j)] \quad (\text{IV.57})$$

Como ejemplo, si se desea trabajar con tres índices de referencia y se conoce la función de distribución marginal asociada a cada uno de ellos, se puede construir la función de distribución conjunta haciendo uso de la familia de distribución FGM mediante la siguiente expresión:

$$F(X_1, X_2, X_3) = F_1(X_1)F_2(X_2)F_3(X_3)[1 + \alpha_{12}[1 - F_1(X_1)][1 - F_2(X_2)] + \alpha_{13}[1 - F_1(X_1)][1 - F_3(X_3)] + \alpha_{23}[1 - F_2(X_2)][1 - F_3(X_3)] + \alpha_{123}[1 - F_1(X_1)][1 - F_2(X_2)][1 - F_3(X_3)]] \quad (\text{IV.58})$$

En Johnson y Kotz (1975) se estudian las propiedades requeridas al coeficiente α así como las propiedades de dependencia, y en Johnson y Kotz (1977) se consideran otras generalizaciones que también deberían ser tenidas en cuenta y se avanza en cuanto a la correlación y la regresión se refiere. Todo esto, en conjunto permitirá extender el conocido método de valoración de las dos funciones de distribución al caso multiíndice lo que se propone como una futura línea de investigación que sin duda tendrá grandes aplicaciones.

Capítulo V

Aplicaciones de la distribución biparabólica y la distribución *two-sided power* en el ámbito financiero

V.0. INTRODUCCIÓN

Tal y como señala Linden (2001) la comprensión del comportamiento de los mercados es un aspecto básico en finanzas. El estudio de la distribución de los rendimientos de los activos es la base sobre la que podrían ser desarrollados modelos de predicción de más alcance, o por lo menos podría representar un avance para entender por qué ocurren ciertos fenómenos en los mercados financieros. La determinación del precio de una opción o el cálculo del valor en riesgo son dos de las aplicaciones más comunes. Ambas aplicaciones necesitan conocer la distribución estadística subyacente que ajusta el comportamiento de los rendimientos de los activos financieros o, en su caso, los procesos estocásticos que los genera.

Durante los años cuarenta se alcanzó la cúspide en la investigación de los mercados financieros gracias a los trabajos iniciales de Bachelier (1900). Estas investigaciones tuvieron como consecuencia la primera antología sobre el comportamiento de los mercados de capitales, recopilado en Cootner (1964), y el establecimiento del comportamiento aleatorio de los precios de la bolsa. Osborne (1959) y Robert (1959) consideran que los precios de un activo financiero se comportan como las partículas en un líquido; este fenómeno se conoce como movimiento browniano.

Así pues, desde la publicación de esta antología la mayor parte de los modelos financieros asumen que los rendimientos comunes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas mediante la distribución normal. Sin embargo, ya en los años sesenta, Fama (1976) señaló que la distribución empírica de los activos era leptocúrtica, con una media más alta y con colas más gruesas que la distribución normal.

En la grafica (V.1) se representa el histograma del valor RD perteneciente al índice DJ Eurostoxx50 desde el inicio hasta mayo de 2005 y los ajustes de la distribución normal (línea verde), la distribución bipolarabólica (línea negra) y la distribución *two-sided power* (línea roja). Se observa que la distribución normal no logra ajustar adecuadamente a los rendimientos mientras que la distribución bipolarabólica y la TSP si poseen el apuntamiento necesario para ajustar dichas series de datos.

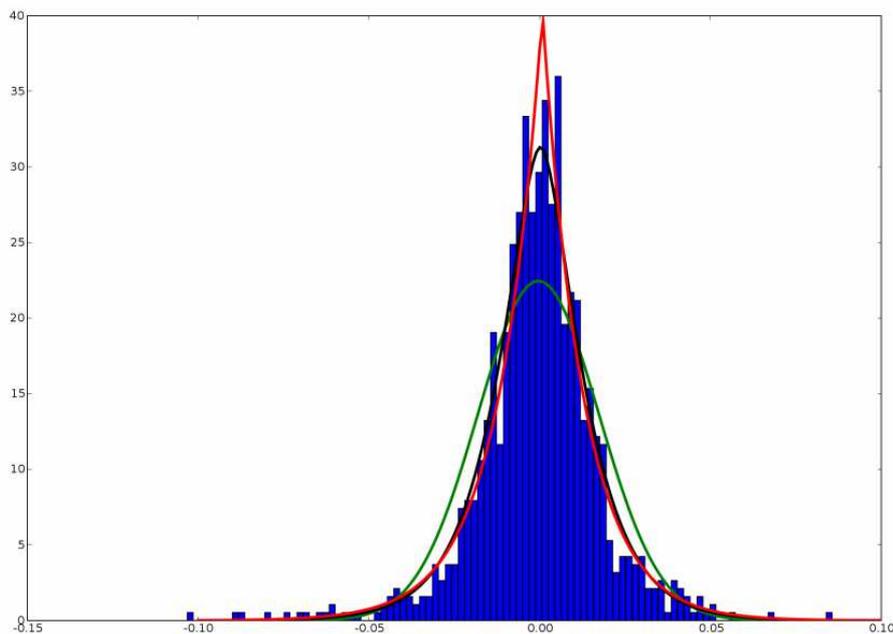


Figura V.1. Representación de la función de densidad de las distribuciones Normal (verde), Biparabólica (negro) y TSP (rojo)

A finales de los años sesenta varios autores demostraron la insuficiencia de la distribución Gaussiana para explicar el comportamiento de los rendimientos, principalmente como consecuencia de los problemas asociados a la curtosis y la asimetría de los datos financieros. Desde entonces, varias distribuciones se han propuesto para explicar el comportamiento de la bolsa.

Hay dos enfoques comunes para modelar la distribución de los rendimientos de los activos financieros. En el primer caso se asume que hay un proceso estocástico subyacente que esta generando dichos rendimientos, y en el segundo enfoque se supone que se conoce directamente la distribución sobre los datos empíricos.

Dentro de este segundo enfoque, se realiza a continuación un repaso de las distribuciones más empleadas en el ámbito financiero. Destacan, en primer lugar, las distribuciones normal y log-normal que han sido ampliamente utilizadas en la literatura financiera con un buen ajuste para series financieras, principalmente porque las estimaciones de sus parámetros son relativamente sencillas. Sin embargo, McDonald (1996) afirma que mientras que estas distribuciones proporcionan modelos descriptivos adecuados para muchos casos, la mayoría de estos conjuntos de datos presentan algunas características no manejables con estas distribuciones.

Los problemas asociados al uso de la distribución normal son muy conocidos, y son principalmente una curtosis constante ($\beta_2 = 3$) y colas más finas que la distribución empírica de los datos. En el caso de la distribución lognormal, incluso considerando que la curtosis es mayor que tres y que aumenta con la varianza, es fácil probar que para valores pequeños de la varianza este parámetro se aproxima a tres.

Otra distribución ampliamente utilizada en literatura es la *t* de Student. Esta distribución tiene colas más gordas que la normal, pero no es útil desde el punto de vista de la asimetría. El uso de esta distribución está motivado principalmente porque cuando los grados de libertad son más de dos, la suma de distribuciones Student converge en una distribución normal como consecuencia del teorema central de límite. Blattberg y Gonedes (1974) comprueban que los grados de libertad para la mayoría de los valores ajustados correspondientes a rendimientos mensuales excedieron de 25. Puesto que una distribución de Student con 25 grados de libertad casi es una distribución normal no parece muy provechoso el uso de esta distribución.

Otra práctica muy extendida ha sido el uso de distribuciones paramétricas más flexibles, es decir familias de distribuciones que incluyen muchas distribuciones comunes como casos especiales. Entre todas ellas, la más polémica es la distribución *estable*. Esta familia de distribuciones fue introducida por Mandelbrot (1963). El autor investigó la familia dada por el logaritmo de su función característica que tiene la siguiente expresión:

$$K(t) = \ln C(t) = i\delta t - \gamma|t|^\alpha \left[1 + i\beta \left(\frac{t}{|t|} \right) \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] \quad (\text{V.1})$$

La función subyacente es simétrica cuando $\beta = 0$, y en este caso δ es la mediana. El parámetro α se restringe al intervalo $(1, 2)$ y es el exponente característico de la familia *estable*. Distintos valores del parámetro α dan diferentes distribuciones, así, por ejemplo, si α es 1 obtenemos la distribución de Cauchy y cuando α es 2 la normal (en ambos casos $\beta = 0$). La característica más importante de esta distribución es que la distribución de la suma de variables estables idénticamente e independientemente distribuidas es a su vez una familia estable. Sin embargo, el problema principal es que cuando $\alpha < 2$ la

varianza es infinita. Es difícil aceptar, por lo menos desde un punto de vista práctico, que la varianza de los rendimientos de los activos financieros es infinita.

Por otra parte, como Linden (2001) señala, se han encontrado evidencias de valores de $\alpha < 2$ solamente para datos diarios o de menor frecuencia, pero estos resultados podrían no ser extensibles para los datos mensuales o semanales. Para varios autores este hecho no concuerda con las características de apuntamiento de esta distribución.

En esta línea destacan los trabajos de Blattberg y Gonedes (1974), Akgiray y Booth (1988), Hagerman (1978) y Hall, Brorsen e Irwin (1989). Por el contrario, otros autores como Diebold (1993) o Baillie (1993) demuestran que tal evidencia solamente rechaza la distribución estable en el caso de la hipótesis de independencia y distribución idéntica.

Sin embargo, el problema más importante asociado a esta distribución es obtener una estimación imparcial y eficiente de los parámetros, que solo serán bien conocidos en casos extremos. La familia Pearson es otra distribución que se aplica para ajustar los rendimientos de los activos por Hirschberg, Mazumdar, Slottje y Zhang (1992) y Lau, Wingender y Lau (1989).

Desde otro punto de vista, otros autores tales como Praetz (1972) o Clark (1973) consideran que la distribución de los rendimientos es una mixtura de distribuciones. Tres familias de distribuciones que permiten el concepto de mixtura son: la distribución beta generalizada de segunda clase, la distribución t-Student generalizada y la distribución beta generalizada exponencial de segunda clase.

La distribución beta generalizada de segunda clase esta definida por cuatro parámetros, los cuales proporcionan una gran flexibilidad así como muchas distribuciones estadísticas

importantes como casos especiales, tales como la distribución gamma generalizada. Puede ser generada, mediante mixtura, la distribución gamma generalizada con un parámetro de escala que se distribuya aleatoriamente como una gamma generalizada inversa.

Por otro lado, la distribución t de Student generalizada fue introducida por McDonald y Newey (1988). Ésta es una función de distribución simétrica con tres parámetros que puede modelar niveles muy diversos de curtosis de los rendimientos. Los casos especiales de esta distribución son la distribución power exponencial, la distribución de Laplace y la t de Student. Resulta interesante, la aplicación de la distribución beta generalizada exponencial de segunda clase hecha por Bookstaber y MacDonald (1989). Ésta es una distribución que permite tanto asimetría como curtosis. En Macdonald y Xu (1995) se obtienen sus cuatro primeros momentos.

A modo de conclusión, Fischer (2004) hace una aplicación de la distribución hiperbólica secante generalizada, siendo sus siglas en inglés (SGSH), la cual es una generalización de la distribución secante hiperbólica, pero que permite una asimetría suficiente para el ajuste de los rendimientos de la bolsa.

Es también importante destacar que la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos de la distribución beta generalizada de segunda clase, la distribución t generalizada y la distribución beta exponencial generalizada de segunda clase requieren optimizaciones no lineales.

En el presente capítulo se presentan la distribución biparabólica (TSB) y la distribución *two-sided power* (TSP) adaptadas al campo financiero y posteriormente se analizan su capacidad para simular los rendimientos de los activos financieros destacando las ventajas propias de cada una de ellas. Se dedica un primer apartado al desarrollo teórico donde se profundiza en la distribución biparabólica y la distribución *two-sided power* aplicadas al

campo financiero y se presentan las distribuciones bipolarabólica asintótica (ATSB) y *two-sided power* asintótica (ATSP). Posteriormente se realiza un análisis de las curtosis de estas distribuciones comparándolas con otras también aplicadas en la literatura resultando que es posible cubrir un amplio rango de curtosis utilizando estas nuevas distribuciones.

En un segundo apartado se lleva a cabo la aplicación práctica. En primer lugar, se presenta el índice Eurostoxx 50 comentando su definición y destacando sus características principales. A continuación se analiza su comportamiento desde el punto de vista de la curtosis. Y finalmente se llevan a cabo los ajustes. Se realizan unos ajustes tradicionales y se configura un nuevo procedimiento de ajuste simplificado.

V.1. DESARROLLO TEÓRICO

En este epígrafe se adaptan las distribuciones bipolarabólica y TSP a las características propias de los mercados financieros y se obtienen las distribuciones asintóticas de ambas, demostrándose que la distribución Laplace es la distribución asintótica de la distribución TSP.

En las figuras (V.2) y (V.3) se recogen, respectivamente, los histogramas de los valores *ing* y *tef* ambos incluidos en el índice de valores DJ Eurostoxx 50. Como característica común de dichos histogramas destaca tener la moda situada en el origen de coordenadas y una inapreciable o nula asimetría. En las graficas se presenta el ajuste obtenido usando como distribución subyacente la normal y se aprecia que si bien en el segundo caso podría considerarse a priori un buen ajuste, en el primer caso no ocurre así ya que el histograma presenta un apuntamiento muy superior a la distribución normal.

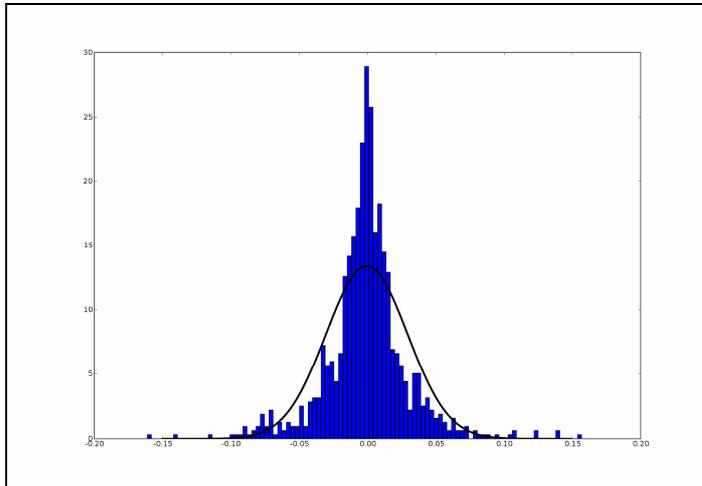


Figura V.2. Histograma del valor *ing* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución normal

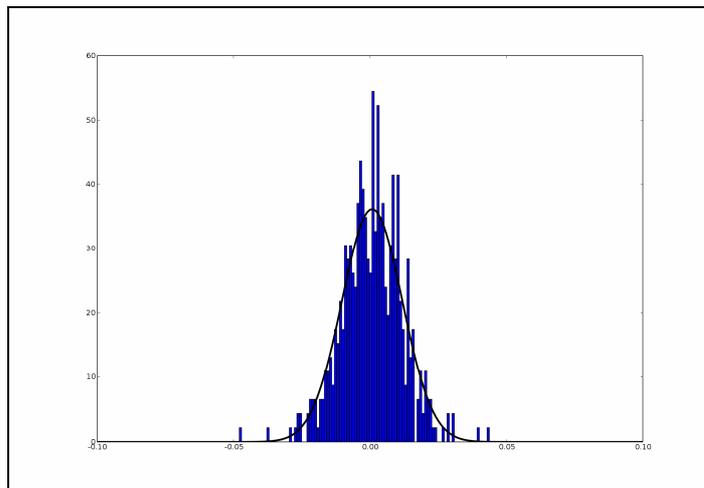


Figura V.3. Histograma del valor *tef* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución normal.

La distribución biparabólica y la distribución TSP, tal y como se ha analizado a lo largo de la memoria, pueden presentar un coeficiente de curtosis por encima del de la normal y por ello esta sección se dedica, por un lado, a la adaptación de dichas distribuciones en el ámbito financiero y, por otro, al análisis de su comportamiento a la hora de ajustar los rendimientos de los activos financieros.

V.1.1. La distribución bipolarabólica en el ámbito financiero

Las series de rendimientos financieros, tal y como son tratados habitualmente, suelen presentar histogramas cuya moda se sitúa en el origen de coordenadas y en su mayoría suelen tener muy poca o ninguna asimetría. Véase figuras (V.2) y (V.3). Por ello, se tratará de expresar la distribución bipolarabólica de tal modo que pueda ser aplicada para ajustar las citadas series financieras. Para ello, si en la expresión (III.15) se realiza la siguiente reasignación de parámetros $a=-s$, $b=s$ y $m=0$ el recorrido de la distribución se convierte en el intervalo $[-s,s]$ y la moda toma el valor 0.

Esta distribución, $BPG_1(-s,0,s,n)$, tiene la siguiente expresión para su función de densidad:

$$g(z) = \frac{(2n+1)(n+1)}{(-3n-1)} \frac{1}{2s} \begin{cases} \left[\left(\frac{z+s}{s} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{z+s}{s} \right)^n \right], & -s \leq z \leq 0 \\ \left[\left(\frac{s-z}{s} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{s-z}{s} \right)^n \right], & 0 \leq z \leq s \end{cases} \quad (V.2)$$

Cuando $n = 1$, la ecuación (V.2) adopta siguiente expresión simplificada:

$$g(z) = \frac{3}{4s} \left(1 - \left(\frac{z}{s} \right)^2 \right), \quad -s \leq z \leq s \quad (V.3)$$

Que resulta ser la conocida expresión de la función de densidad de la distribución parabólica presentada en el primer capítulo, (I.48).

Si se toma como punto de partida la expresión de la función de densidad de la distribución bipolarabólica generalizada de dos ramas, (III.96), y se realiza la reasignación de parámetros indicada anteriormente se obtiene la distribución $BPG_2(-s,0,s,n_1,n_2)$.

$$f(z) = C(-s, 0, s, n_1, n_2) \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s} \right)^{n_1} \left\{ 2 - \left(\frac{z+s}{s} \right)^{n_1} \right\}, & -s < z < 0 \\ \left(\frac{s-z}{s} \right)^{n_2} \left\{ 2 - \left(\frac{s-z}{s} \right)^{n_2} \right\}, & 0 < z < s \end{cases} \quad (\text{V. 4})$$

Donde $C(-s, 0, s, n_1, n_2)$ toma la siguiente expresión:

$$C(-s, 0, s, n_1, n_2) = \frac{(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(2n_1 + 1)(n_1 + 1)}{s(2n_1 + 1)(n_1 + 1)(3n_2 + 1) + s(2n_2 + 1)(n_2 + 1)(3n_1 + 1)} \quad (\text{V.5})$$

Tal y como se observa en la expresión (V.4), esta distribución permite que cada una de las ramas de la función de densidad y de la función de distribución tenga valores distintos del parámetro n , de manera que se nota como n_1 al parámetro de la primera rama y como n_2 al de la segunda. De este modo la masa de probabilidad a la derecha y a la izquierda de la moda puede ser distinta, a pesar de que la moda estandarizada tome el valor $\frac{1}{2}$, ya que estas distribuciones no verifican la propiedad $F(m) = M$ que caracteriza a la familia de distribución van Dorp-Kotz. Será de aplicación cuando no exista total simetría por ejemplo si se toma como $n_1=0,5$ y $n_2=10$ se obtiene la figura (V.4) donde se aprecia la asimetría existente en la distribución, siendo redondeada en la primera rama debido al valor pequeño del parámetro n_1 y más puntiaguda en la segunda rama.

Si se toman los valores $n_1=6$ y $n_2=8$, figura (V.4) se observa que la asimetría es prácticamente inapreciable, por lo que se concluye que la distribución $BPG_2(-s, 0, s, n_1, n_2)$ puede aplicarse tanto en el caso de una ligera asimetría como para asimetrías agudas. Por ultimo, destacar que dicha distribución permite que la masa de probabilidad a la izquierda y a la derecha de la moda sea distinta, generalizando así el caso de las distribuciones de la familia TSP.

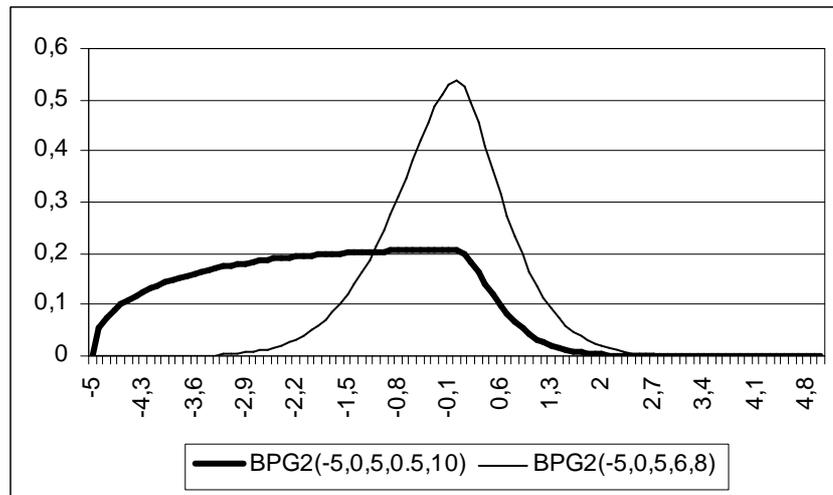


Figura V.4. Representación de la función de densidad de las distribuciones bipolarabólicas de dos ramas $BPG_2(-5,0,5,0.5,10)$ y $BPG_2(-5,0,5,6,8)$

En la figura (V.5) se toma el mismo valor para los parámetros n_1 y n_2 y por tanto se esta representado bien la expresión (V.2) o la expresión (V.4) para $n_1=n_2$. Se observa que a medida que aumentan los valores de n_1 y n_2 la forma de la función de densidad se vuelve más puntiaguda.

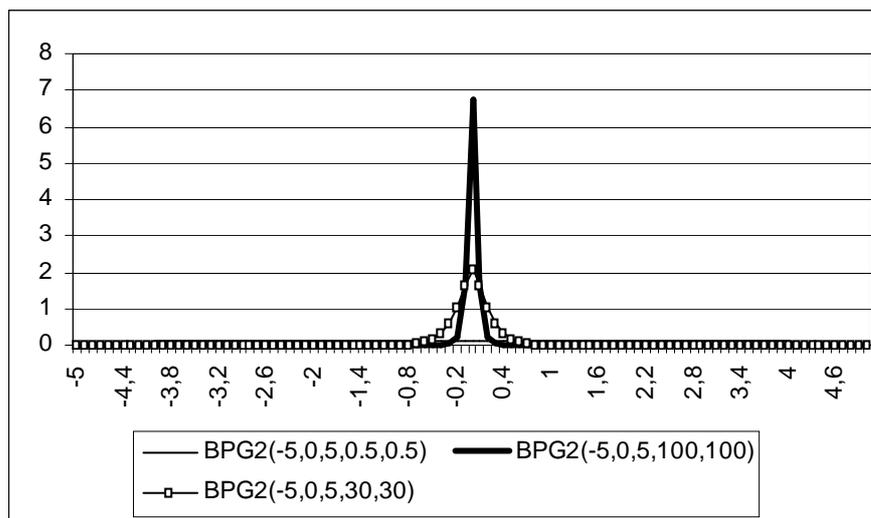


Figura V.5. representación de la función de densidad de las distribuciones bipolarabólicas de dos ramas $BPG_2(-5,0,5,0.5,0.5)$, $BPG_2(-5,0,5,100,100)$ y $BPG_2(-5,0,5,30,30)$

La distribución bipolarabólica asintótica

Como se puede observar en la expresión (V.2) cuando $n \rightarrow \infty$ y s es constante la masa de la distribución tiende a centrarse en un punto (distribución degenerada de Dirac), por otro lado si n es constante y $s \rightarrow \infty$ la distribución también degenera hasta el punto de desaparecer. Se plantea entonces obtener la distribución asintótica de $g(z)$ realizando el cambio $n=ks$ ($k>0$) en la expresión (V.2) y, posteriormente, tomando límites cuando $s \rightarrow \infty$. Realizando el cambio $n = ks$ la expresión (V.2) quedaría:

$$g(z) = \frac{(2ks+1)(ks+1)}{(-3ks-1)} \frac{1}{2s} \begin{cases} \left(\left(\frac{z+s}{s} \right)^{2ks} - 2 \left(\frac{z+s}{s} \right)^{ks} \right), & z \leq 0 \\ \left(\left(\frac{s-z}{s} \right)^{2ks} - 2 \left(\frac{s-z}{s} \right)^{ks} \right), & z \geq 0 \end{cases} \quad (V.6)$$

Tomando límites se puede demostrar que:

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ z \leq 0}} g(z) = g_a(z) = -\frac{k}{3} [e^{2kz} - 2e^{kz}] \quad z \leq 0$$

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ z \geq 0}} g(z) = g_a(z) = -\frac{k}{3} [e^{-2kz} - 2e^{-kz}] \quad z \geq 0 \quad (V.7)$$

Por lo tanto la distribución asintótica de la $BPG_1(-s,0,s,n)$, que se notará como BPG_{1a} o con sus siglas en ingles ATSB, tiene la siguiente expresión para su función de densidad:

$$g_a(z) = \begin{cases} -\frac{k}{3} [e^{2kz} - 2e^{kz}], & z \leq 0 \\ -\frac{k}{3} [e^{-2kz} - 2e^{-kz}] & z \geq 0 \end{cases} \quad (V.8)$$

Que se podría simplificar del siguiente modo:

$$g_a(z) = -\frac{k}{3} \left[e^{-2k|z|} - 2e^{-k|z|} \right] \quad (\text{V.9})$$

Se puede demostrar que:

i. $\int_{-\infty}^0 g_a(z) dz = \frac{1}{2}$

ii. $\int_0^{\infty} g_a(z) dz = \frac{1}{2}$

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} g_a(z) dz = 1$

De la expresión (i) se puede concluir que la función de densidad de la distribución biparabólica asintótica, $g_a(z)$ recogida en (V.8), cumple la condición del sistema generador de van Dorp, ya que $G(M) = M = \frac{m-a}{b-a}$, es decir: $G(0) = \int_{-\infty}^0 g_a(z) dz = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, de la expresión (V.9), se puede concluir que $g_a(z)$ es una verdadera función de densidad.

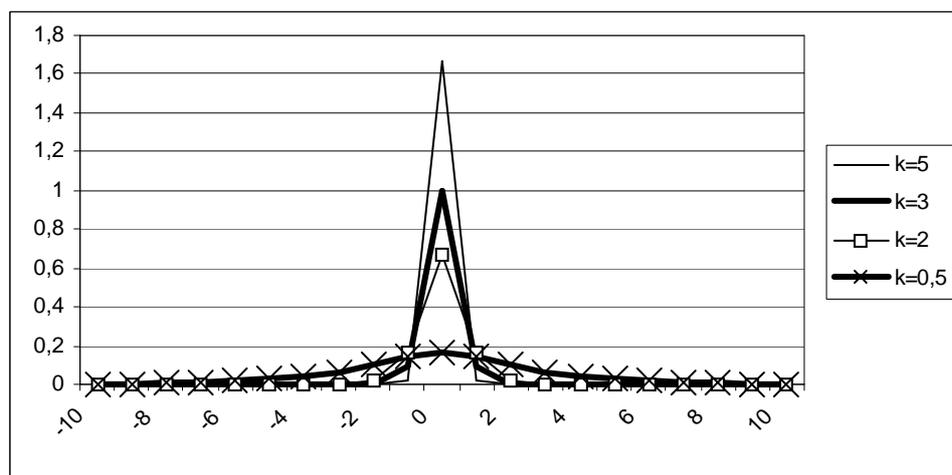


Figura V.6. Representación de la función de densidad de la distribución biparabólica asintótica BPG_a para los valores de $k=5$, $k=3$, $k=2$ y $k=0,5$

En la figura (V.6) se observa que cuando k es pequeño, en la gráfica $k=0,5$, la figura de la función de densidad presenta una forma redondeada y a medida que k aumenta, la función de densidad adopta una forma más puntiaguda parecida a la de la distribución *two-sided power*, van Dorp y Kotz (2002.a). No obstante, esta distribución siempre termina en forma redondeada ya que su función de densidad es derivable en la moda como ocurría con las distribuciones de la familia originaria.

La expresión de la función de distribución es la siguiente:

$$G_a(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[2e^{kz} - \frac{e^{2kz}}{2} \right], & z \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-2kz}}{2} - 2e^{-kz} \right], & z \geq 0 \end{cases} \quad (\text{V.10})$$

Por otro lado, los momentos respecto al origen adoptan las siguientes expresiones:

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \frac{5}{2k^2}; \quad \mu_3 = 0; \quad \mu_4 = \frac{63}{2k^4} \quad (\text{V.11})$$

De donde se obtienen las siguientes expresiones para el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2} = 0; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 5,04 \quad (\text{V.12})$$

A partir de la expresión de la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{5}{2k^2} \quad (\text{V.13})$$

Se puede expresar k en función de σ , es decir $k = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sigma}$ de este modo la expresión (V.9)

quedaría formulada en función de σ del siguiente modo:

$$g_a(z) = -\frac{\sqrt{2,5}}{3\sigma} \left[e^{-2\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}|z|} - 2e^{-\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}|z|} \right] \quad (\text{V.14})$$

Y la expresión (V.10) quedaría:

$$G_a(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left[2e^{\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}z} - \frac{e^{2\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}z}}{2} \right], & z \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{3} \left[\frac{e^{-2\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}z}}{2} - 2e^{-\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}z} \right], & z \geq 0 \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

Es posible que la moda de los rendimientos de la serie financiera no este situada exactamente en el 0 sino que a veces se sitúa en un punto τ próximo al cero. En ese caso la reasignación de parámetros sería $a = -s$, $b = s$ y $m = \tau$. De esta manera, la expresión (III.15) quedaría del siguiente modo:

$$g(z) = \frac{(2n+1)(n+1)}{(-3n-1)} \frac{1}{2s} \begin{cases} \left(\left(\frac{z+s}{\tau+s} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{z+s}{\tau+s} \right)^n \right), & -s \leq z \leq \tau \\ \left(\left(\frac{s-z}{s-\tau} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{s-z}{s-\tau} \right)^n \right), & \tau \leq z \leq s \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

Si se establece de nuevo la relación $n=ks$ y se toma el límite cuando $s \rightarrow \infty$, se obtiene la distribución biparabólica asintótica no centrada en el origen:

$$g_{a,\tau}(z) = -\frac{k}{3} \begin{cases} \left[e^{2k(z-\tau)} - 2e^{k(z-\tau)} \right], & -\infty \leq z \leq \tau \\ \left[e^{2k(\tau-z)} - 2e^{k(\tau-z)} \right], & \tau \leq z \leq \infty \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

Cuya expresión simplificada sería.

$$g_{a,\tau}(z) = -\frac{k}{3} \left[e^{-2k|z-\tau|} - 2e^{-k|z-\tau|} \right], \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (\text{V.18})$$

Y haciendo uso de la relación existente entre el parámetro k y la varianza, la expresión final es:

$$g_{a,\tau}(z) = -\frac{\sqrt{2,5}}{3\sigma} \left[e^{-2\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}|z-\tau|} - 2e^{-\frac{\sqrt{2,5}}{\sigma}|z-\tau|} \right], \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (\text{V.19})$$

A continuación se presentan distintos histogramas de valores incluidos en el índice Eurostoxx50 ajustados mediante una distribución bipolarabólica, una distribución bipolarabólica generalizada en dos ramas y una distribución bipolarabólica asintótica respectivamente, observándose en todo caso, un ajuste bastante adecuado.

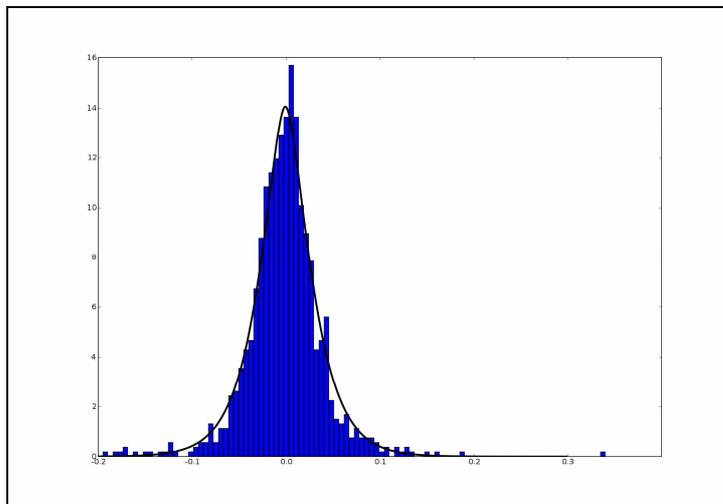


Figura V.7. Histograma del valor cge perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución bipolarabólica

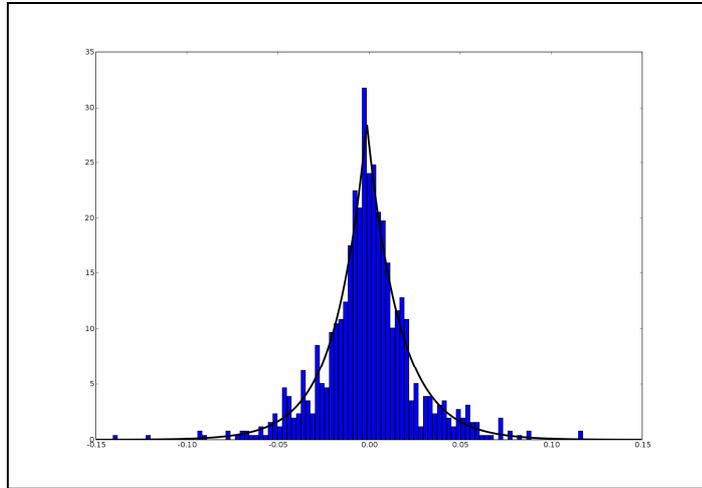


Figura V.8. Histograma del valor *dte* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución BPG₂

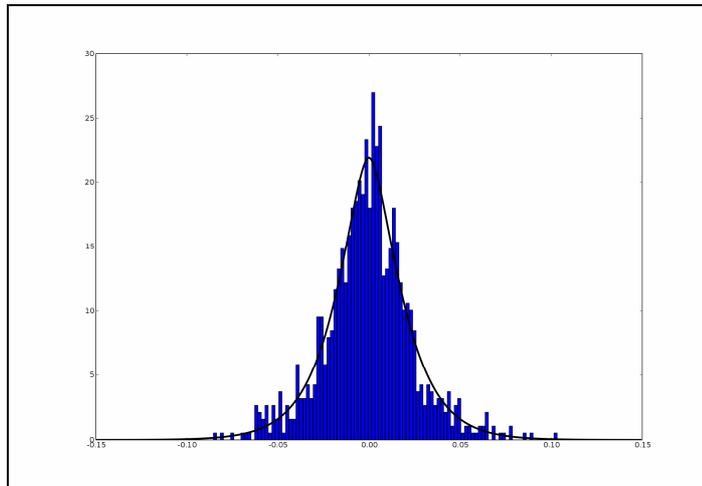


Figura V.9. Histograma del valor *sie* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución ATSB.

V.1.2. La distribución TSP en el ámbito financiero.

En este apartado se tratará de adaptar la distribución *two-sided power* presentada por van Dorp y Kotz (2002.b) a las características propias de su aplicación en el campo financiero. Para ello, se parte de la expresión (I.28) y se realiza la reasignación de parámetros $a = -s$, $b = s$ y $m = 0$ obteniéndose la siguiente expresión:

$$g(z) = \frac{n}{2s} \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n-1}, & -s \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n-1}, & 0 \leq z \leq s \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

Si se toma como punto de partida la expresión de la función de densidad de la distribución STSP generalizada de dos ramas, recogida en la expresión (III.113) se obtiene la distribución TSP(a, m, b, n_1, n_2) deshaciendo el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b-a}$

$$g(a, m, b, n_1, n_2, x) = \frac{n_1 n_2}{(b-m)n_1 + (m-a)n_2} \begin{cases} \left(\frac{x-a}{m-a}\right)^{n_1-1}, & a \leq x \leq m \\ \left(\frac{b-x}{b-m}\right)^{n_2-1}, & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

y se realiza la reasignación de parámetros $a=-s$, $b=s$ y $m=0$, se obtiene la distribución TSP ($-s, 0, s, n_1, n_2$).

$$g(-s, 0, s, n_1, n_2, z) = \frac{n_1 n_2}{s n_1 n_2} \begin{cases} \left(\frac{z+s}{s}\right)^{n_1-1}, & -s \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{s-z}{s}\right)^{n_2-1}, & 0 \leq z \leq s \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

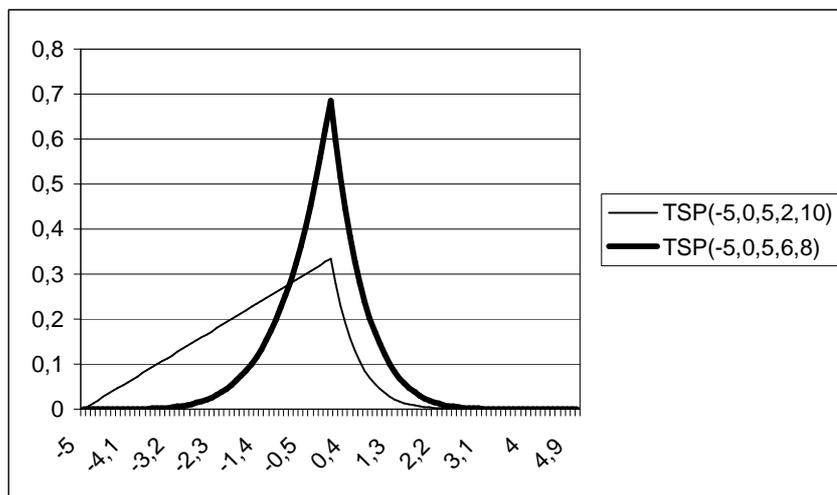


Figura V.10. representación de la función de densidad de las distribuciones TSP de dos ramas $TSP_2(-5,0,5,2,10)$ y $TSP_2(-5,0,5,6,8)$

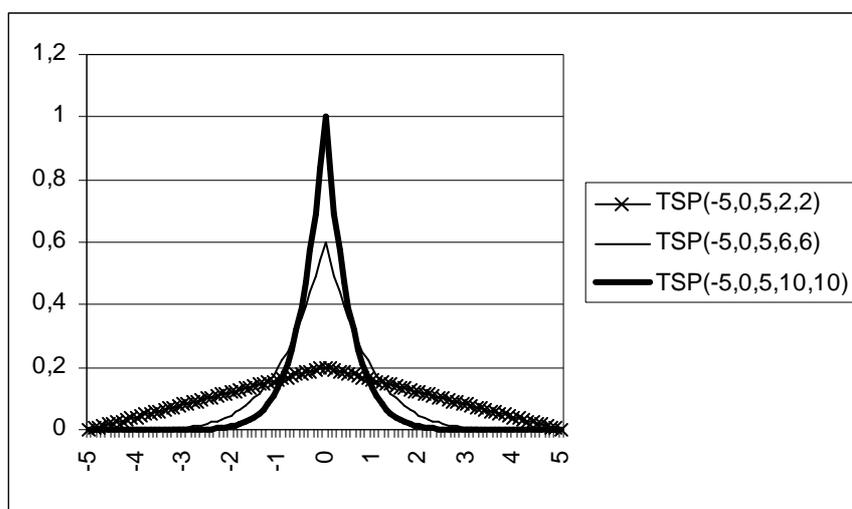


Figura V.11. Representación de la función de densidad de las distribuciones TSP de dos ramas $TSP_2(-5,0,5,2,2)$, $TSP_2(-5,0,5,6,6)$ y $TSP_2(-5,0,5,10,10)$

Tal y como se observa en las graficas (V.10) y (V.11) la distribución $STSP_2$ permite que las ramas adopten formas distintas o similares según si los valores de n_1 y n_2 son distintos o iguales entre sí. Por otro lado, la masa de probabilidad a la derecha y a la izquierda de la moda pueden ser distintas.

La distribución TSP asintótica

De manera análoga a lo realizado para el caso de la distribución biparabólica asintótica se realiza el cambio $n-1 = ks$ y se toma el límite de $g(z)$ cuando s tiende a infinito sobre la expresión de la función de densidad de la distribución TSP obteniéndose la expresión de la distribución TSP asintótica y simétrica:

$$g_a(z) = \frac{k}{2} \begin{cases} e^{kz} & z \leq 0 \\ e^{-kz} & z \geq 0 \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

Que podría simplificarse como:

$$g_a(z) = \frac{k}{2} e^{-k|z|}, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (\text{V.24})$$

Se observa que las expresiones (V.23) y (V.24) se corresponden con una distribución de Laplace, por lo que se puede afirmar que la distribución asintótica de una TSP simétrica es la distribución simétrica de Laplace. Véase Kotz y van Dorp (2005)

Se puede demostrar, por otra parte, que:

- i. $\int_{-\infty}^0 g_a(z) dz = \frac{1}{2}$
- ii. $\int_0^{\infty} g_a(z) dz = \frac{1}{2}$
- iii. $\int_{-\infty}^{\infty} g_a(z) dz = 1$

De aquí se deduce que la distribución TSP asintótica, TSPa o sus siglas en inglés ATSP, es una verdadera función de densidad, que cumple, además, las condiciones de las distribuciones pertenecientes al sistema generador de van Dorp: $F(m) = M$, es decir

$$F(0) = \frac{1}{2}.$$

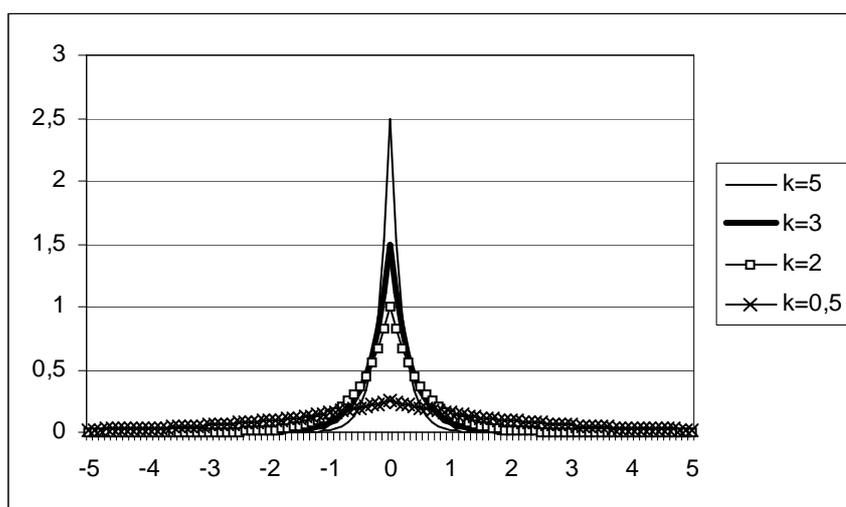


Figura V.12. Representación de la función de densidad de la distribución TSP asintótica, TSP_a, para los valores de $k=5$, $k=3$, $k=2$ y $k=0,5$

Si se calculan los momentos centrados con respecto al origen se obtiene:

$$\mu_1 = 0; \mu_2 = \frac{2}{k^2}; \mu_3 = 0; \mu_4 = \frac{24}{k^4} \quad (\text{V.25})$$

Por lo tanto el coeficiente de asimetría y de curtosis serán:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^2} = 0; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 6 \quad (\text{V.26})$$

Como se puede observar en la expresión (V.23) la distribución TSP asintótica y simétrica depende de un único parámetro que está relacionado con su varianza de la siguiente forma:

$$\sigma^2 = \frac{2}{k^2} \quad (\text{V.27})$$

Si se expresa k en función de σ se obtiene $k = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$, la expresión (V.24) quedaría del siguiente modo:

$$g_a(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|z|}, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (\text{V.28})$$

Si se realiza la reasignación de parámetros $a = -s$, $b = s$ y $m = \tau$ con el fin de posibilitar que la moda no este en el origen, la expresión de la distribución asintótica de la TSP sería:

$$g_{a,\tau}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|z-\tau|}, \quad -\infty \leq z \leq \tau \quad (\text{V.29})$$

Tal y como se comentó anteriormente, la distribución asintótica de la distribución TSP resulta ser la distribución Laplace, cuya función de distribución es conocida y por ello se obvia su expresión. A continuación se presentan distintos histogramas de valores incluidos en el índice Eurostoxx50 ajustados mediante una distribución TSP, una distribución TSP generalizada en dos ramas y la distribución TSP asintótica que resulta ser la distribución de Laplace.

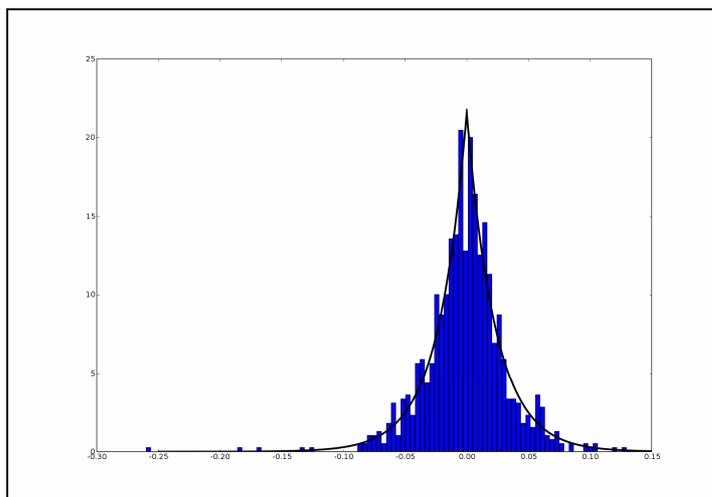


Figura V.13. Histograma del valor *nokp* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución TSP.

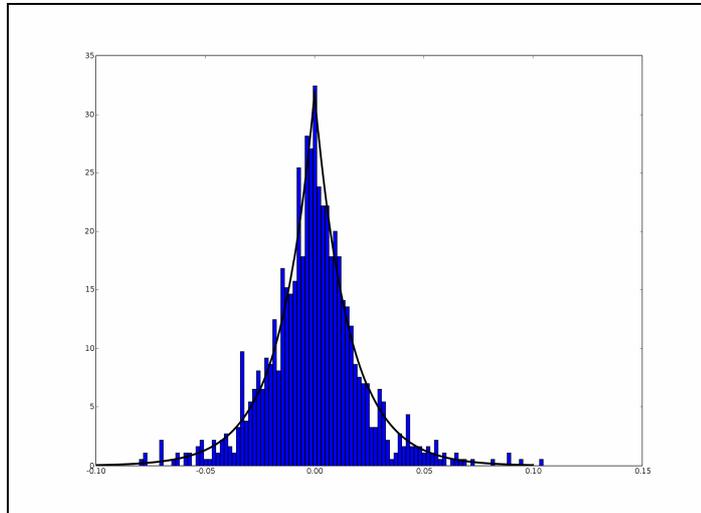


Figura V.14. Histograma del valor *bbva* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución ATSP.

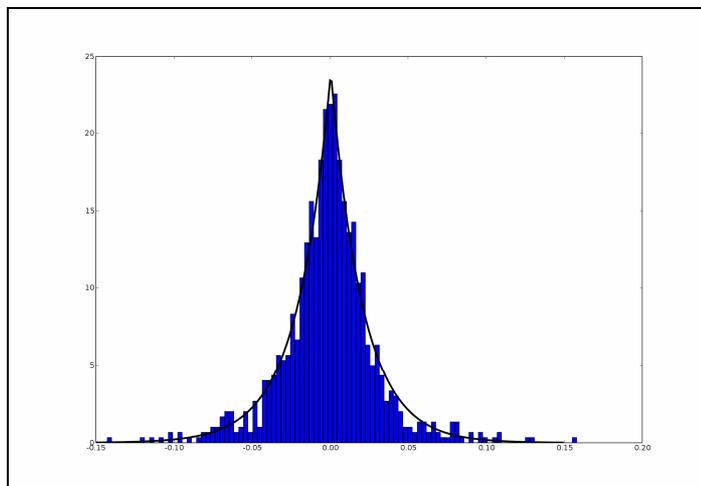


Figura V.15. Histograma del valor *midi* perteneciente al índice Eurostoxx50. Ajuste de una distribución TSP₂

V.1.3 Análisis de la curtosis de las distintas distribuciones

Se ha comentado con anterioridad, y se comprobará más adelante de manera empírica en el caso del índice DJ Eurostoxx50, que la mayoría de las distribuciones de rendimientos de activos suelen ser simétricas, por lo que sería conveniente estudiar el rango de variación de la curtosis para las distribuciones TSP y BPG₁ simétricas, ya que el problema del ajuste radica en el exceso de curtosis de los datos muestrales respecto de las distribuciones habitualmente usadas.

Este epígrafe se dedica al análisis de la curtosis de distintas distribuciones como son la distribución TSP, la distribución biparabólica (BPG₁ o sus siglas en inglés TSB), la distribución beta, la distribución biparabólica asintótica (ATSB), la distribución Normal y la distribución de Laplace, todas ellas con la condición de simetría. Por ello, se presentan a continuación las distintas expresiones del coeficiente de curtosis de dichas distribuciones. En el caso de la distribución *two-sided power* la expresión de su curtosis, véase García, Cruz y García (2005), es:

$$\beta_2^{TSP} = 6 \frac{(n-1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} \quad (\text{V.30})$$

Para el caso de la distribución biparabólica generalizada de una rama el coeficiente toma la expresión:

$$\begin{aligned} \beta_2^{TSB} = & (960 + 15.216n + 97.944n^2 + 316.859,5n^3 + 466.134n^4 + 710.990n^5 \\ & + 472.788n^6 + 184032n^7 + 38.718n^8 + 3402n^9) \times \\ & \times \left\{ \frac{3(9 + 9n + 2n^2)}{\left[(100 + 85n + 23n^2 + 2n^3)(12 + 96n + 237n^2 + 186n^3 + 45n^4) \right]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

Véase expresión (III.32) con $M=0,5$.

El coeficiente de curtosis de la distribución beta simétrica tiene la siguiente expresión:

$$\beta_2^{BETA_s} = \frac{3k + 9}{k + 5} \quad (V.32)$$

Si se tiene en cuenta que $k = n - 1$, entonces la expresión quedaría:

$$\beta_2^{BETA_s} = \frac{3n + 6}{k + 5} \quad (V.33)$$

El cuanto al coeficiente de curtosis de la distribución bipolarabólica generalizada de una rama asintótica y simétrica se comprueba que toma el valor 5,04. Y por ultimo, es conocido que la curtosis de la distribución normal y de la distribución Laplace asimétrica son 3 y 6 respectivamente.

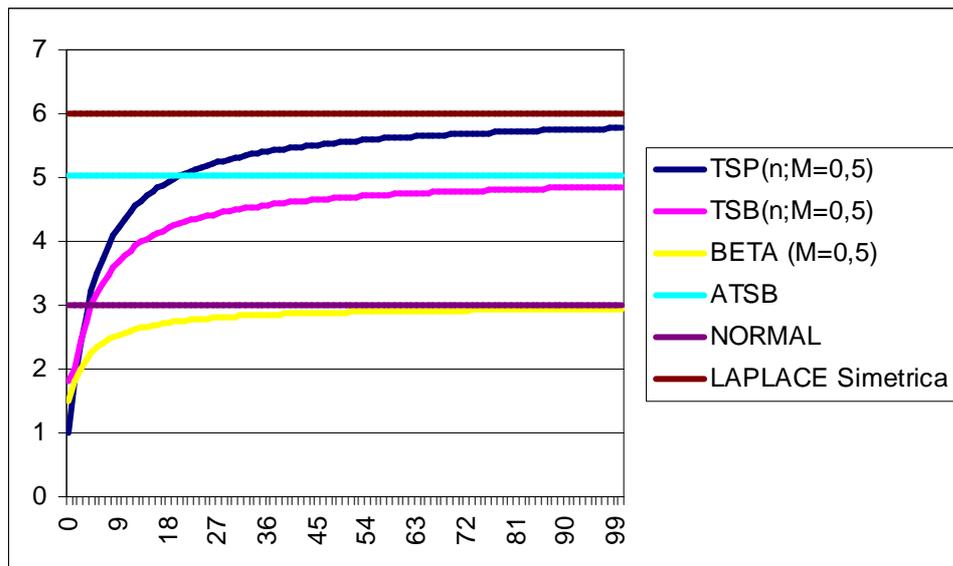


Figura V.16. Representación del coeficiente de curtosis para las distribuciones simétricas TSP, TSB, Beta, ATSB, Normal y Laplace.

Se observa, figura (V.16) que la distribución beta simétrica tiene siempre una curtosis inferior a la distribución normal. Sin embargo, el rango de curtosis de la distribución simétrica bipolarabólica generalizada de una rama (BPG_1) y de la distribución TSP simétrica tiene un recorrido mayor.

Este hecho explica que los ajustes de distribución TSP simétricas y BPG_{1a} , o ATSB, simétricas sean mejores si la curtosis de la distribución muestral de los rendimientos de los activos tienen valores en el rango que recorren estas últimas distribuciones y en general si la distribución muestral tiene curtosis mayor que 3, es decir si son leptocúrticas tal y como afirma Fama (1976).

En las figuras (V.17) y (V.18) se representan las funciones de densidad de las distribuciones bipolarabólica asintótica (ATSB), *two-sided power* asintótica (ATSP). Se hará uso de las expresiones (V.14) y (V.28) que recogen las funciones de densidad de ambas distribuciones solo en función del parámetro σ . De esta manera compararemos ambas distribuciones para un mismo valor de σ , tomando en primer lugar el valor 0,5 y en segundo lugar el valor 2. Con el objeto de una mejor comparación se representa también la conocida función de densidad de la distribución normal para $\mu = 0$ y los mismos valores de σ .

Se observa en ambas figuras que la función de densidad de la distribución asintótica bipolarabólica es más apuntada que la función de densidad de la distribución normal, y menos apuntada que la función de densidad de la distribución asintótica *two-sided power*. Además la distancia existente entre la distribución ATSP y ATSB aumenta conforme aumenta el valor del parámetro σ . Este hecho se puede entender, desde el punto de vista financiero, como que al aumentar la volatilidad aumenta más el apuntamiento de la distribución ATSP que el de la distribución ATSB. Dado que este comportamiento es el que suele observarse empíricamente en el ámbito financiero, se concluye que la distribución ATSP tiene mejores propiedades que la distribución ATSB para su aplicación en el ajuste de los rendimientos de los activos financieros y que ambas tienen un mejor comportamiento que la distribución normal

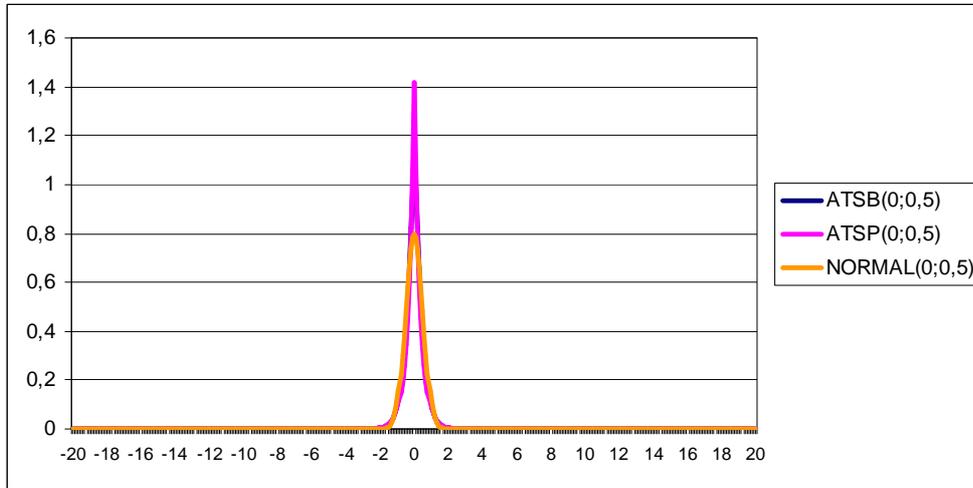


Figura V.17. Representación de la función de densidad de las distribuciones ATSB(0;0,5), ATSP(0;0,5) y Normal(0;0,5).

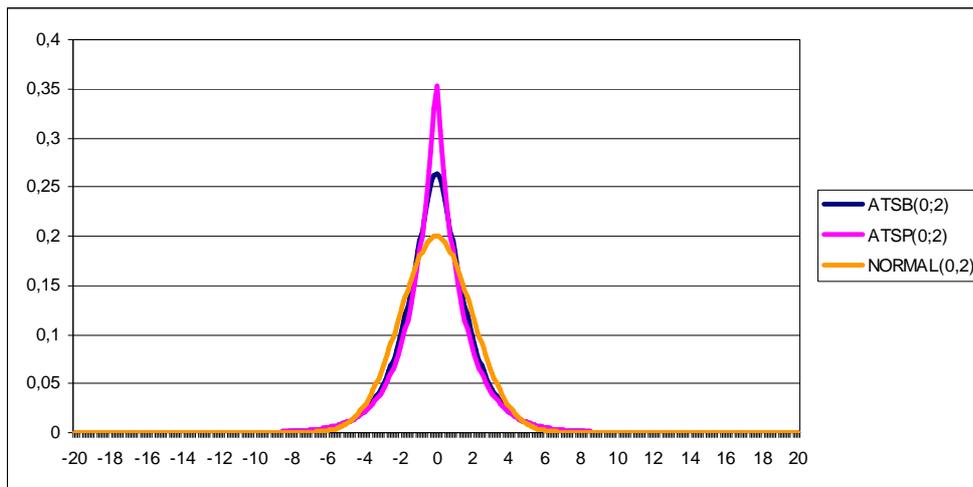


Figura V.18. Representación de la función de densidad de las distribuciones ATSB(0;2), ATSP(0;2) y Normal(0;2).

Por otra parte, se comprueba que la distribución beta no posee distribución asintótica ya que si en la expresión (I.11) se hace $a=-s$, $b=s$ y $m=0$, entonces $p = q = 1 + \frac{k}{2}$, y sabiendo que la relación entre p , q y s es: $p = q = k_0 s$, la expresión (I.11) queda expresada como:

$$f(z) = \frac{(z+s)^{k_0 s-1} (s-z)^{k_0 s-1}}{B(k_0 s, k_0 s) (2s)^{k_0 s-1}} \quad (\text{V.34})$$

Se comprueba que el límite de la expresión anterior, (V.34), cuando s tiende a infinito es igual a cero es decir: $\lim_{s \rightarrow \infty} f(z) = 0$, por lo que se concluye que la distribución beta no tiene distribución asintótica.

V.2. APLICACION PRÁCTICA

Una vez presentadas las distribuciones biparabólica y *two-sided power* adaptadas al ámbito financiero así como sus respectivas distribuciones asintóticas, se procede a la realización de la aplicación práctica que es el verdadero objetivo del presente capítulo.

Con el objeto de realizar una aplicación práctica que no se limite al campo nacional se ha seleccionado el índice bursátil Dow Jones Eurostoxx 50 para la realización de la misma. Se recuerda que los índices bursátiles no son más que sistemas de medición estadísticos sobre los precios de las acciones que reflejan la evolución del conjunto de acciones más representativo de cada mercado, (Miralles y Miralles 2006). Hay que destacar que en la actualidad los índices bursátiles están cobrando cada vez más importancia por su eficacia para valorar la evolución de los mercados bursátiles, su capacidad para captar negocio y su poder de influencia.

Existen numerosos índices bursátiles, algunos tan antiguos como el Dow Jones Industrial Average creado en 1884 u otros tan recientes como el EuroStoxx 50 creado en 1991. Existen también índices compuestos como por ejemplo el Nasdaq 100 (índice de referencia por excelencia de los mercados tecnológicos), el FTSE 350 (perteneciente al Grupo Financial Times con base en la Bolsa de Londres y de gran influencia en Europa) o el norteamericano Standard & Poor 500. En cualquier caso, todos los índices bursátiles tratan continuamente de adaptarse a los cambios que sufren los mercados financieros adaptando sus metodologías de cálculo o la composición de los mismos.

En este epígrafe se dedica un primer apartado al estudio de la asimetría y la curtosis en las series de datos financieros y concretamente en el caso del índice Dow Jones Eurostoxx que, como se comentó anteriormente, ha sido el índice seleccionado para la realización de la aplicación práctica. El hecho principal que motiva su elección es que se trata de un índice de carácter europeo ya que engloba a las cincuenta empresas más sólidas de la Unión Europea.



Figura V.19. Evolución del índice Eurostoxx 50. (Fernández 2004)

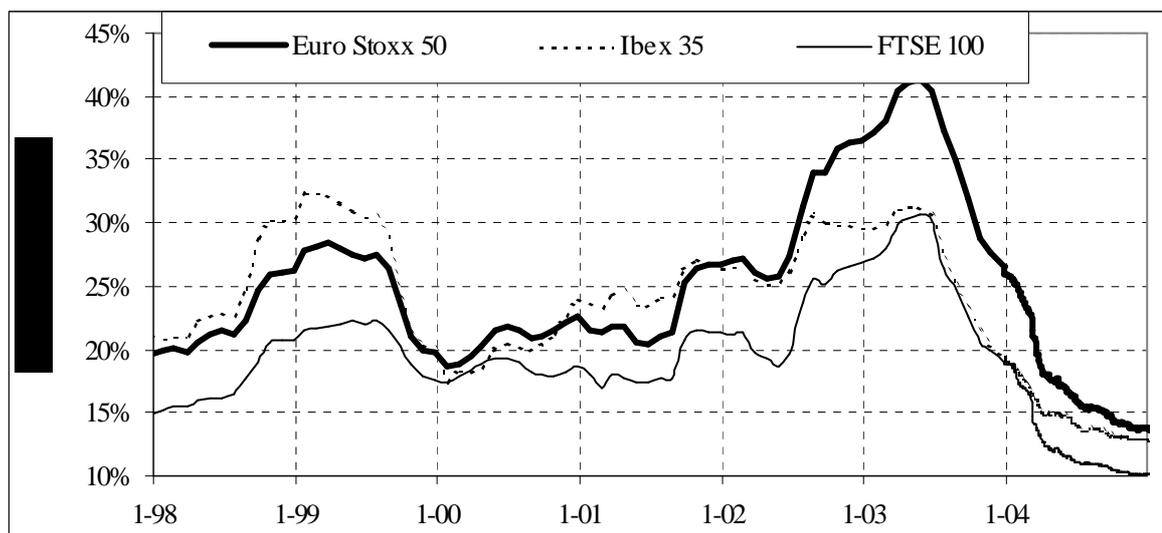


Figura V.20. Evolución de la volatilidad del índice Eurostoxx 50, del IBEX 35 y FTSE 100. (Fernández 2004)

Tal y como se aprecia en la figura (V.19) su evolución fue estable desde su aparición hasta el año 1997 cuando comenzó una evolución creciente que duraría hasta el año 2000. A partir de entonces se ha consumado un decrecimiento que a partir del año 2003 se convirtió en una cierta estabilidad que continua actualmente. En cuanto a la evolución de su volatilidad, se observa en la figura (V.20) que a partir del año 2002, justo cuando empieza el decaimiento, el índice EuroStoxx 50 es el de más volatilidad si se compara con el índice Ibex 35 o el índice FTSE 100.

Tras el epígrafe dedicado al análisis de la asimetría y la curtosis se llevara a cabo la aplicación prácticamente propiamente dicha y para ello se dedica un apartado a la realización de los ajustes y un ultimo apartado a la presentación de una nueva técnica para la realización de ajustes rápidos destacando sus ventajas y utilidades.

V.2.1. Asimetría y curtosis en la series de datos financieros.

El problema de la asimetría y la curtosis en las series de datos de mercados de capitales ha sido estudiado por varios autores como Simkowitz y Beedles (1978), Friend y Westerfield (1980), Barone-Adesi (1985), Sears y Wei (1988), Tan (1991), Lim (1989), Chunchinda, Dandapani, Hamid y Prakash (1997), Peiro (1999) o Harvey y Siddique (1999, 2000).

Chiao, Hung y Srivastava (2003) señalan que se ha abierto un nuevo debate sobre considerar dos nuevos conceptos de riesgo, referentes a la asimetría y la curtosis, como complemento del riesgo de la covarianza. Este trabajo, uno de los más recientes, hace un análisis del mercado de Taiwán a través de los últimos veinte años y demuestra la existencia de una alta asimetría y curtosis no sólo en la distribución individual de los rendimientos sino también en la del índice de mercado. Estos resultados siguen la misma línea que los obtenidos por Aggarwai, Rao y Hiraki (1989) en el mercado de acciones de Tokio.

Sin embargo, y en otra línea, algunos autores restan importancia a este fenómeno de varias maneras. Es el caso de Singleton y Wingender (1986), y recientemente Peiro (1999), que señalan que la asimetría podría ser una consecuencia de hipótesis de partida incorrectas, o Simkowitz y Beedles (1978) que demostraron que una adecuada diversificación de la cartera disminuye la asimetría. A pesar de estas circunstancias, y antes de realizar los ajustes, se analizan a continuación la curtosis y la asimetría para los rendimientos diarios y semanales del índice Dow Jones Eurostoxx 50.

En primer lugar, analizando el cuadro (V.1) es interesante observar que no hay activos con curtosis inferior a tres para rendimientos diarios o semanales. Además, un 44% y un 76% tienen curtosis comprendida en el intervalo [3,9] en el caso diario y semanal respectivamente. En el caso de rendimientos diarios hay una importante cantidad de activos con una curtosis extremadamente alta (un 22%), debido a, desde nuestro punto de vista, datos anómalos. En el caso semanal este porcentaje es de un 14%, menor aunque relevante. Para evitar este problema, se eliminan los rendimientos mayores del 15% de la información diaria, cuadro (V.2), y se observa que el 86% de las acciones tiene una curtosis entre 3 y 9 y solo el 14% una curtosis superior a 9.

Si se observan los datos semanales, el porcentaje de acciones con curtosis entre 3 y 9 es del 76% sin quitar ningún dato y se eleva a 86% al eliminar los rendimientos mayores al 15%, de manera análoga a lo que ocurría en el caso diario pero con una importante diferencia, ya que en el caso semanal el 70% de los activos tienen una curtosis cercana a 6. En el cuadro (V.3) se presentan los datos semanales eliminando los rendimientos mayores del 50% y se observa que el 48% tiene una curtosis entre 6 y 9 y un 38% tiene curtosis entre 3 y 6, mientras que solo un 14% tiene curtosis superior a 9. Con respecto a la asimetría se ha llevado a cabo el contraste de Wilcoxon (1945) obteniéndose los resultados mostrados en el cuadro (V.4). Se observa que la hipótesis nula, de simetría en los rendimientos diarios, es aceptada para valores del estadístico entre $-1,96$ y $1,96$. Hay que señalar que un valor negativo del estadístico implica una asimetría positiva y viceversa.

Capítulo V

Se observa que solo 10 de los 50 valores muestran asimetría para los rendimientos diarios y solo 1 en el caso de rendimientos semanales. Si se eliminan los rendimientos superiores al 15%, cuadro (V.5), entonces son 8 los valores los que rechazan el test en el caso diario y ninguno en el caso semanal. Se concluye por tanto que una distribución válida para ajustar los valores debe tener una curtosis entre 3 y 9, y lo que es más importante, la asimetría no es una condición necesaria en esta distribución. Esta situación hace que las distribuciones TSP y TSB en sus diferentes formas, sean unas candidatas adecuadas para llevar a cabo el proceso de ajuste, véase figura (V.15) y comentarios.

Valor	Diario		Semanal		Valor	Diario		Semanal	
	Curtosis	Asim.	Curtosis	Asim.		Curtosis	Asim.	Curtosis	Asim.
TAL	1191,12	-0,24	4,50	-0,24	DCX	4,28	-0,22	4,28	-0,22
RD	584,16	0,87	131,63	0,87	PHIL	7,64	-0,35	5,07	-0,35
SQA	5,48	-0,19	4,40	-0,19	EXAF	912,21	-9,46	190,24	-9,46
TEF	8,36	-0,42	5,80	-0,42	TIT	18,85	-0,32	6,09	-0,32
NOKP	8,36	-0,45	6,52	-0,45	CRFR	30,78	-0,32	5,96	-0,32
SCH	8,94	-0,30	6,50	-0,30	RWE	8,39	0,08	6,21	0,08
ENI	4,54	-0,36	4,84	-0,36	UC	21,51	0,93	11,07	0,93
SIE	7,36	-0,22	6,18	-0,22	LE	1026,73	1,24	217,21	1,24
EOA	7,49	0,14	4,91	0,14	REP	11,01	-0,02	5,38	-0,02
BNP	6,61	-0,31	6,77	-0,31	BAY	28,00	-0,13	7,05	-0,13
ING	10,99	-0,66	9,34	-0,66	BSN	1907,51	1,09	391,05	1,09
BBVA	9,93	0,00	6,85	0,00	ORAF	1670,91	-0,10	5,48	-0,10
DTE	5,11	0,01	4,50	0,01	ELE	9,89	-0,36	6,38	-0,36
DBK	7,78	-0,50	6,48	-0,50	IBE	10,61	-0,04	6,51	-0,04
SGE	9,80	0,06	6,10	0,06	MUV2	10,52	-0,26	7,92	-0,26
FTEL	6,90	-0,23	6,03	-0,23	AIR	6,31	-0,02	5,39	-0,02
ALV	10,94	-0,36	6,53	-0,36	GOB	12,85	-0,22	4,80	-0,22
AAB	8,92	-0,18	6,90	-0,18	LVMH	12,58	0,13	6,88	0,13
MIDI	8,13	-0,15	9,11	-0,15	CRDA	6,73	0,32	7,16	0,32
UNIL	1615,77	0,00	322,86	0,00	AGN	236,40	-0,45	6,77	-0,45
BAS	6,66	-0,20	4,41	-0,20	SPI	5,12	-0,07	4,06	-0,07
G	605,63	-0,12	6,58	-0,12	LFG	1049,79	-0,09	221,64	-0,09
MEV	11,96	-0,03	10,40	-0,03	CGE	29,56	-1,34	21,06	-1,34
SAP	11,63	-0,04	5,91	-0,04	AH	421,19	-9,54	205,65	-9,54
ENEL	8,02	-0,47	6,68	-0,47	TIM	5,20	0,17	4,81	0,17

Cuadro (V.1) Curtosis y asimetría para todos los datos.

Generalizaciones de la distribución biparabólica:
Aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración.

Capítulo V

Valor	Diario		Semanal		Valor	Diario		Semanal	
	Curtosis	Asim.	Curtosis	Asim.		Curtosis	Asim.	Curtosis	Asim.
TAL	4,979	-0,115	3,875	-0,014	DCX	4,281	-0,034	4,792	0,014
RD	6,860	-0,264	5,723	0,191	PHIL	6,833	-0,237	5,767	-0,091
SQA	5,426	-0,024	4,878	0,132	EXAF	794,811	-20,10	510,73	-20,58
TEF	5,614	0,141	7,064	0,573	TIT	9,421	-0,175	8,325	0,381
NOKP	7,975	-0,307	9,730	-0,872	CRFR	6,202	-0,082	5,300	0,150
SCH	8,293	-0,077	8,626	0,284	RWE	7,114	0,276	7,896	0,326
ENI	4,544	-0,015	4,882	-0,171	UC	11,656	0,829	6,787	0,595
SIE	7,000	0,075	8,962	0,448	LE	9,690	0,030	11,012	0,960
EOA	6,466	0,044	7,072	-0,185	REP	7,045	0,223	4,583	0,088
BNP	6,616	0,125	6,149	-0,524	BAY	29,957	0,842	5,692	0,256
ING	11,000	-0,119	11,692	0,166	BSN	6,815	-0,019	6,215	-0,140
BBVA	8,838	-0,007	6,004	0,472	ORAF	5,114	-0,027	5,417	-0,129
DTE	5,117	0,074	4,050	-0,138	ELE	5,869	-0,099	4,234	0,094
DBK	7,439	-0,135	6,391	-0,231	IBE	6,928	-0,002	7,563	0,221
SGE	6,993	0,032	6,392	0,003	MUV2	9,850	-0,089	11,161	0,547
FTEL	6,912	0,416	8,610	0,928	AIR	5,535	0,116	5,708	0,265
ALV	8,733	-0,048	8,028	0,226	GOB	12,653	-0,467	29,287	-2,404
AAB	8,896	-0,100	6,827	0,089	LVMH	6,592	0,274	6,596	-0,099
MIDI	7,617	0,036	6,318	-0,310	CRDA	6,747	-0,128	7,464	0,309
UNIL	9,849	-0,130	12,877	0,018	AGN	10,893	-0,179	5,769	0,014
BAS	5,841	-0,028	6,658	0,287	SPI	5,123	0,178	5,197	0,448
G	11,384	0,117	4,958	0,273	LFG	4,850	0,016	6,398	-0,168
MEV	12,174	0,422	10,260	0,529	CGE	27,996	-0,897	6,659	0,201
SAP	11,269	0,085	7,346	0,268	AH	508,437	-13,294	22,010	1,879
ENEL	8,031	-0,540	6,291	-0,517	TIM	5,201	0,222	6,200	0,222

Cuadro (V.2). Curtosis y asimetría de los valores del índice Eurostoxx 50 eliminando los rendimientos mayores que el 15%.

Valor	Semanal		Valor	Semanal	
	Curtosis	Asim.		Curtosis	Asim.
TAL	4,50	-0,24	DCX	6,68	-0,47
RD	5,37	-0,22	PHIL	4,28	-0,22
SQA	4,40	-0,19	EXAF	5,07	-0,35
TEF	5,80	-0,42	TIT	10,36	-0,69
NOKP	6,52	-0,45	CRFR	6,09	-0,32
SCH	6,50	-0,30	RWE	5,96	-0,32
ENI	4,84	-0,36	UC	6,21	0,08
SIE	6,18	-0,22	LE	11,07	0,93
EOA	4,91	0,14	REP	7,91	0,04
BNP	6,77	-0,31	BAY	5,38	-0,02
ING	9,34	-0,66	BSN	7,05	-0,13
BBVA	6,85	0,00	ORAF	4,61	-0,04
DTE	4,50	0,01	ELE	5,48	-0,10
DBK	6,48	-0,50	IBE	6,38	-0,36
SGE	6,10	0,06	MUV2	6,51	-0,04
FTEL	6,03	-0,23	AIR	7,92	-0,26
ALV	6,53	-0,36	GOB	5,39	-0,02
AAB	6,90	-0,18	LVMH	4,80	-0,22
MIDI	9,11	-0,15	CRDA	6,88	0,13
UNIL	7,67	-0,18	AGN	7,16	0,32
BAS	4,41	-0,20	SPI	6,77	-0,45
G	6,58	-0,12	LFG	4,06	-0,07
MEV	10,40	-0,03	CGE	3,92	-0,11
SAP	5,91	-0,04	AH	10,21	-0,12
ENEL	6,68	-0,47	TIM	17,76	0,24

Cuadro (V.3) Curtosis y asimetría para los valores del Eurostoxx 50 eliminando los rendimientos superiores al 50%.

Valor	Diario	Semanal	Valor	Diario	Semanal
TAL	2,17	0,43	DCX	0,36	0,12
RD	0,08	-0,77	PHIL	1,41	-1,07
SQA	1,54	-0,56	EXAF	0,33	-0,40
TEF	1,78	1,00	TIT	-1,63	-0,66
NOKP	2,61	2,62	CRFR	2,07	-0,14
SCH	1,53	1,65	RWE	1,30	-0,37
ENI	-0,37	-0,35	UC	-0,24	0,07
SIE	-0,32	0,20	LE	0,58	-0,72
EOA	2,26	-0,05	REP	1,66	-0,33
BNP	0,31	-0,01	BAY	0,94	-0,59
ING	2,40	-0,44	BSN	1,23	-0,24
BBVA	1,31	1,93	ORAF	2,04	-0,15
DTE	-0,51	-0,83	ELE	2,08	-0,39
DBK	0,70	-0,48	IBE	1,27	-0,57
SGE	1,03	-0,28	MUV2	0,80	0,35
FTEL	-0,13	-0,22	AIR	0,95	-0,06
ALV	0,70	0,41	GOB	1,27	0,60
AAB	2,26	-0,49	LVMH	0,60	-0,79
MIDI	0,24	-0,83	CRDA	0,81	-0,28
UNIL	0,19	-1,04	AGN	2,11	-0,13
BAS	1,72	0,37	SPI	-0,49	0,57
G	-0,05	0,07	LFG	0,31	-0,84
MEV	1,50	-1,03	CGE	0,13	0,48
SAP	2,98	0,47	AH	1,59	-0,46
ENEL	-0,04	0,15	TIM	0,61	0,10

Cuadro (V.4) Test de Wilcoxon para los valores del Eurostoxx 50 usando todos los datos.

Valor	Diario	Semanal	Valor	Diario	Semanal
TAL	-0,025	-0,107	DCX	0,365	0,160
RD	0,739	-1,130	PHIL	1,857	-0,085
SQA	1,747	0,775	EXAF	- 0,072	0,411
TEF	2,073	0,832	TIT	- 0,678	-0,379
NOKP	3,215	0,332	CRFR	1,838	-0,390
SCH	1,742	0,581	RWE	1,006	0,502
ENI	-0,373	0,165	UC	- 0,176	-0,875
SIE	-0,384	-0,013	LE	0,226	-0,077
EOA	0,633	-0,045	REP	1,605	0,861
BNP	0,312	-1,253	BAY	1,315	-0,873
ING	2,396	0,308	BSN	0,766	0,648
BBVA	1,725	-0,240	ORAF	0,164	0,423
DTE	-0,515	0,635	ELE	2,079	0,468
DBK	1,037	-0,379	IBE	1,732	-0,431
SGE	1,525	0,022	MUV2	0,441	-0,002
FTEL	-0,128	0,606	AIR	0,950	-1,087
ALV	0,181	-0,232	GOB	0,979	0,978
AAB	2,316	-0,449	LVMH	0,182	-0,166
MIDI	1,277	-0,407	CRDA	0,811	0,889
UNIL	1,810	-0,325	AGN	1,769	-0,721
BAS	2,020	0,428	SPI	- 0,489	0,974
G	0,324	0,290	LFG	0,234	-0,031
MEV	2,127	1,124	CGE	- 0,206	0,807
SAP	2,495	0,901	AH	1,009	-0,868
ENEL	-0,039	0,429	TIM	0,614	0,219

Cuadro (V.5). Test de Wilcoxon para los valores del Eurostoxx 50 eliminando los rendimientos superiores al 15%.

V.2.2. Diferentes ajustes del índice DJ Eurostoxx50.

Tal y como se indico en el apartado V.1 dedicado a la presentación de la distribución bipolarabólica y la distribución TSP adaptadas al ámbito financiero, estas distribuciones, así como sus respectivas asintóticas, parecen ser excelentes candidatas para su aplicación en el mercado financiero.

Por ello en este epígrafe se pretende aplicar dichas distribuciones, junto a otras, para el ajuste del índice bursátil EuroStoxx50 que fue presentado con anterioridad. Las distribuciones usadas son la distribución TSP(-100,100), la distribución TSP Fast, la distribución TSP₁, la distribución TSB₁, la distribución ATSB, la distribución normal, la distribución Laplace, la distribución beta y las distribuciones TSP₂ y TSP₂. En el cuadro (V.6) se establece la nomenclatura que se seguirá a lo largo del epígrafe y se describen cada una de las distribuciones citadas.

DISTRIBUCIÓN	DESCRIPCIÓN
TSP(-100,100)	Distribución TSP simétrica que toma como valores extremos el -100 y el 100.
TSP Fast	Distribución TSP ajustada por el procedimiento rápido
TSP ₁	Distribución TSP generalizada de una rama.
TSB ₁	Distribución bipolarabólica generalizada de una rama, también notada como BPG ₁ .
ATSB	Distribución bipolarabólica asintótica
ATSP	Distribución TSP asintótica. Distribución de Laplace
Cuadro (V.6). Aclaración de la nomenclatura.	

Antes de proceder a la descripción detallada de cada una de las distribuciones así como del proceso del ajuste en cada uno de los casos, hay que tener en cuenta que se va a trabajar, en todo momento, con datos depurados, es decir que se han eliminado los rendimientos superiores al 15% y que se consideran, por otro lado, cinco escenarios diferentes recogidos en el cuadro (V.7).

ESCENARIO 1	Trabajar con los últimos 1000 datos
ESCENARIO 2	Trabajar con los últimos 500 datos
ESCENARIO 3	Trabajar con los últimos 250 datos
ESCENARIO 4	Trabajar con datos semanales
ESCENARIO 5	Trabajar con todos los datos
Cuadro (V.7). Escenarios posibles en la aplicación práctica	

En los cuadros (V.8), (V.9), (V.10), (V.11) y (V.12), adjuntados en el anexo C, se recogen las características principales de cada uno de los valores pertenecientes al índice DJ Eurostoxx 50 para cada uno de los citados escenarios. Se recoge para cada valor su media, su desviación típica, sus coeficientes de asimetría y de curtosis, el estadístico del test de Wilcoxon y el valor crítico de dicho test. El análisis de dichos cuadros conlleva los siguientes comentarios:

- Trabajando en el primer escenario, con 1000 datos, solo un 10% presentan curtosis claramente superior a 9, no existe ninguna curtosis inferior a 4 y ninguno de los activos presenta asimetría.
- En el segundo escenario, trabajando con 500 datos, solo un 6% presenta curtosis claramente superior a 9, el 22% tienen una curtosis entre 3 y 4, el 16% esta entre 3,5 y 4 y el resto tiene una curtosis entre 4 y 9. Ninguno de los activos presenta asimetría

- En el tercer escenario, con 250 datos, solo un 4%, dos activos, presenta un coeficiente de curtosis claramente superior a 9, un 46% tienen curtosis entre 3 y 4, un 30% tienen curtosis entre 3,5 y 4 y solo un 2% presenta curtosis inferior a 3. Ningún activo presenta asimetría
- Con datos semanales, en el cuarto escenario, solo un 14% presenta curtosis claramente superior a 9, solo un activo, el 2%, tiene curtosis entre 3 y 4. Ningún activo presenta asimetría
- Por último, con todos los datos, quinto escenario, un 22% presenta una curtosis superior a 9, no existe ningún activo cuya curtosis sea inferior a 4 y un 14% presenta asimetría.

En consecuencia, se concluye que el efecto del aumento de datos sobre la curtosis y la asimetría es claro ya que se produce un aumento de ambos. Véase cuadro (V.13).

	CURTOSIS		ASIMETRIA
	<4	>9	
ESCENARIO 1 (últimos 1000 datos)	0%	10%	0%
ESCENARIO 2 (últimos 500 datos)	22%	6%	0%
ESCENARIO 3 (últimos 250 datos)	48%	4%	0%
ESCENARIO 4 (datos semanales)	2%	14%	0%
ESCENARIO 5 (todos los datos)	0%	22%	14%

Cuadro (V.13). Resumen de los resultados obtenidos en los cuadros (V.8), (V.9), (V.10), (V.11) y (V.12)

Se procede, ahora sí, a la realización de los ajustes que son recogidos en los cuadros (V.14), (V.15), (V.16), (V.17) y (V.18). A continuación, se presenta un breve comentario del proceso de ajuste para cada una de las distribuciones que sirve, a su vez, como descripción detallada de cada una de las distribuciones aplicadas.

Distribución TSP(-100,100): En primer lugar, hay que señalar que se hará uso del logaritmo de los rendimientos de los precios que se notará como r y se calcula como $r = \log(p/p_0)$. Así pues la distribución de los rendimientos puede ser ajustada mediante una distribución TSP en el intervalo $(-a, a)$, lo que sería equivalente a decir que $s = (r - a)/2a$ se distribuye según una distribución STSP(M, n). Nótese que se ha seleccionado un intervalo simétrico para así cumplir con una de las características propia de las distribuciones empíricas. En general, se puede afirmar que cuanto mayor sea el valor de a , en relación con los rendimientos, mejores serán los resultados. Una buena elección es tomar $a=10$ ya que es equivalente a tomar el logaritmo de los rendimientos de 10000% y a multiplicar, o dividir, el precio por $e^{100} \approx 3 \cdot 100^{43}$.

La selección de un valor grande de a tiene otras consecuencias interesantes ya que como $\sigma_s = \sigma_r/2a$, un valor grande de a implica un valor pequeño de σ_s , lo que a su vez significa un valor grande de n . Por otro lado, la media de r , m_r , es próxima a cero, y como $m_s = m_r/2a$, la media de s , m_s , será próxima a cero. Por lo tanto, se puede usar las aproximaciones $M \approx \bar{t}'$ y $n \approx \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ para estimar los parámetros de la distribución

STSP(M, n), obteniéndose $M = m_s = m_r/2a$ y $n = 1/\sigma_s \sqrt{2} = 2a/\sigma_r \sqrt{2}$.

La distribución TSP FAST: Es análoga a la distribución anterior solo que no se optimizan los extremos sino únicamente se optimizan los parámetros M y n .

La distribución TSP: De manera análoga a las anteriores, se parte de $M=0$ y $n = 200/\sigma_r \sqrt{2}$, y se optimizan tanto los extremos como los parámetros n y M .

La distribución BPG₁: Se toma un valor de n muy grande, por ejemplo $n=1000$, y se optimizan por máxima verosimilitud los cuatro parámetros.

La distribución Normal: Se aplica el procedimiento de máxima verosimilitud.

La distribución Laplace: Se obtiene de manera inmediata

La distribución beta: No tenemos primeras estimaciones para los parámetros.

La distribución Cauchy: Se obtiene de manera inmediata pero no se logran buenos resultados.

La distribución TSP₂ y la distribución TSB₂: Se toma el valor de la media como moda y se dividen los datos en dos partes, la posterior y la anterior de la moda. Para cada rama se ajusta una ley o parábola. El intervalo es $(-100+moda;100+moda)$ y se toma como valor de n inicial $n=100*(1+media(rama))$. Finalmente se aplica el procedimiento de máxima verosimilitud.

Una vez presentadas cada una de las distribuciones y los procedimientos de ajuste se procede a comentar los resultados obtenidos. En el cuadro (V.14), (V.15) y (V.16) se presentan los ajustes realizados usando 1000, 500 y 250 datos respectivamente. En el cuadro (V.17) se recogen los ajustes realizados usando datos semanales y finalmente el cuadro (V.18) recoge los ajustes obtenidos mediante el uso de todos los datos. Todas estas cuadros se adjuntan en el anexo C. Los valores máximos del test de Kolmogorov Smirnov es 0.0358, 0.0544, 0.0767, 0.0450 y 0.0767 respectivamente para el caso de 1000 datos, 500 datos, 250 datos, datos semanales y todos los datos.

La información que se desprende de dichos cuadros queda sintetizada en los cuadros (V.19), (V.20), (V.21), (V.22) y (V.23) que presentan, de manera resumida, los ajustes obtenidos usando 1000 datos, 500 datos, 250 datos, datos semanales y todos los datos respectivamente. Tras un análisis exhaustivo se puede concluir que los mejores ajustes se logran con la distribución bipolarabólica y la distribución TSP. En todos los casos, excepto cuando se usan todos los datos, se consiguen buenos ajustes obteniendo ambas distribuciones en más del 80% de los valores y se debe señalar que en algunos casos, casi todos los valores son explicados por una de estas distribuciones. Resulta interesante que la distribución TSP ofrece una gran variedad de ajustes simples y que en algunos casos la distribución Laplace, asintótica de la TSP, ofrece resultados interesantes.

Se puede comprobar que en los ajustes con datos semanales y con 500 y 250 datos, las distribuciones que ofrecen mejores resultados son la TSB_1 y la ATS. En principio la TSB_1 sería un caso particular de la distribución TSB_2 y el hecho de que esta última ajuste en menos casos que la TSB_1 , ver cuadros (V.20) y (V.21), puede deberse a la ausencia de asimetría y a las dificultades del ajuste cuando existen demasiados parámetros ya que resulta más complicado buscar unos parámetros iniciales adecuados.

Con todos los datos, prácticamente las únicas distribuciones que siguen funcionando, ajustando en un 46% y un 44% de los casos, son la TSB_1 y la ATSB. Es evidente que a medida que se aumenta el número de observaciones resulta más difícil ajustar una distribución a los datos empíricos. Esto puede estar relacionado con los problemas que se presentan en la predicción a largo plazo y también es posible que a lo largo del tiempo la distribución vaya cambiando de parámetros o incluso que una distribución sustituya a otra.

DISTRIBUCION	VALORES	%
TSP(-100;100)	45	90%
TSP F	30	60%
TSP_1	39	78%
TSB_1	40	80%
NORMAL	0	0%
LAPLACE	39	78%
BETA	0	0%
CAUCHY	4	8%
TSP_2	46	92%
TSB_2	45	90%
ATSB	40	80%

Cuadro (V.19). Resumen de los valores que pasan el test usando 1000 datos para cada una de las distribuciones

DISTRIBUCION	VALORES	%
TSP(-100;100)	38	76%
TSP F	14	28%
TSP_1	34	68%
TSB_1	47	94%
NORMAL	35	70%
LAPLACE	36	72%
BETA	2	4%
CAUCHY	2	4%
TSP_2	40	80%
TSB_2	36	72%
ATSB	47	94%

Cuadro (V.20). Resumen de los valores que pasan el test usando 500 datos para cada una de las distribuciones

DISTRIBUCION	VALORES	%
TSP(-100;100)	43	86%
TSP F	21	42%
TSP ₁	40	80%
TSB ₁	48	96%
NORMAL	47	94%
LAPLACE	41	82%
BETA	11	22%
CAUCHY	39	78%
TSP ₂	46	92%
TSB ₂	42	84%
ATSB	49	98%

Cuadro (V.21). Resumen de los valores que pasan el test usando 250 datos para cada una de las distribuciones

DISTRIBUCION	VALORES	%
TSP(-100;100)	41	82%
TSP F	26	52%
TSP ₁	41	82%
TSB ₁	42	84%
NORMAL	5	10%
LAPLACE	41	82%
BETA	0	0%
CAUCHY	10	20%
TSP ₂	42	84%
TSB ₂	41	82%
ATSB	42	84%

Cuadro (V.22). Resumen de los valores que pasan el test usando datos semanales para cada una de las distribuciones

DISTRIBUCION	VALORES	%
TSP(-100;100)	14	28%
TSP F	4	8%
TSP ₁	10	20%
TSB ₁	23	46%
NORMAL	0	0%
LAPLACE	10	20%
BETA	0	0%
CAUCHY	0	0%
TSP ₂	11	22%
TSB ₂	11	22%
ATSB	22	44%

Cuadro (V.23). Resumen de los valores que pasan el test usando todos los datos para cada una de las distribuciones

V.2.3. Un procedimiento de ajuste simplificado: El caso DJ Eurostoxx50.

En este epígrafe se presenta un nuevo procedimiento de ajuste que permitiría elegir la distribución subyacente de una manera más rápida y cómoda. El procedimiento limita el proceso de ajuste a tres distribuciones: la distribución normal, la distribución bipolar asintótica (ATSB) y la asintótica de la TSP (ATSP) que resulta ser la distribución Laplace.

Así pues la norma a aplicar será que cuando la curtosis varíe entre $[0;4]$ se ajusta con la distribución normal, cuando la curtosis varía entre $(4;5,5]$ se ajusta mediante la distribución ATSB y si es mayor que 5,5 se ajusta con la distribución Laplace.

En los cuadros (V.24), (V.25), (V.26), (V.27) y (V.28), adjuntados en el anexo C, se recogen los ajustes realizados usando 1000 datos, 500 datos, 250 datos, datos semanales y todos los datos respectivamente. Además también se ha realizado el contraste de Kolmogorov y se comprueba que se acepta en el 94% de los casos cuando se utilizan 250 datos, en el 88% de los casos con 500 datos, en el 78% de los casos con 1000 datos, en el 74% de los casos con datos semanales y que desciende hasta el 32% si se usan todos los datos.

V.3. CONCLUSIONES

El estudio del índice de valores DJEurostoxx50 ha permitido establecer que el comportamiento de los rendimientos de los activos financieros tiene como principales características:

1. Simetría. El test de Wilcoxon no detecta asimetría, esto permite aceptar la asunción de que las distribuciones subyacentes pueden ser simétricas, hipótesis que fue señalada como razonable por el profesor Bronzin (1908), véase Zimmerman y Harfner (2004)
2. La curtosis ocupa un rango entre 3 y 9 en términos generales, dentro de este rango de curtosis se mueven diferentes distribuciones como son la distribución TSP y la distribución TSB. Esto puede explicar que en la práctica estas sean las distribuciones que mejor ajustan a los datos. Por otro lado, se ha de señalar que estos ajustes suelen ser más sencillos que los ajustes de otras distribuciones alternativas a la normal que se han presentado en la introducción de este capítulo.
3. Los resultados de los ajustes resumidos en los cuadros (V.16), (V.17), (V.18), (V.19) y (V.20) sitúan a la distribución TSB y a la distribución ATSB como las mejores distribuciones para simular la distribución subyacente al rendimiento de los activos financieros
4. La existencia de una distribución asintótica (ATSB) para la distribución biparabólica (TSB) permite conjeturar la posibilidad de que se pueda elicitar una distribución TSB a partir de tres cuantiles y la moda, del mismo modo que Kotz y van Dorp (2006) presentan en su trabajo para la TSP aprovechando el hecho de que la distribución asintótica de la TSP es la distribución de Laplace.
5. Los ajustes simples presentados en el apartado V.2. y recogidos en los cuadros (V.21), (V.22), (V.23), (V.24) y (V.25), resultan eficaces en la mayoría de los casos:

	Acepto		ATSB		ATSP		NORMAL	
1000 datos	39	78,0%	10	25,6%	29	74,4%	0	0,0%
500 datos	44	88,0%	24	54,5%	9	20,5%	11	25,0%
250 datos	47	94,0%	15	31,9%	8	17,0%	24	51,1%
Datos semanales	37	74,0%	9	24,3%	27	73,0%	1	2,7%
Todos los datos	16	32,0%	7	43,8%	9	56,3%	0	0,0%

Se puede concluir que a medida que aumenta el número de datos el procedimiento funciona peor, pero además de ser lógico, ocurre con todas las distribuciones y puede estar explicado por el hecho de que a largo plazo la distribución subyacente cambia cuando el número de datos disminuye (1000, 500, 250) los resultados son satisfactorios. Con 500 datos la que mejor funciona es la distribución ATSB, con 1000 datos la ATSP y con 250 datos funciona bien la distribución normal, a pesar de la curtosis.

Conclusiones y Líneas de Investigación

La memoria que nos ocupa, dedicada al estudio de las generalizaciones de la distribución biparabólica y a sus aplicaciones en el ámbito financiero y el campo de la valoración, esta integrada por cinco capítulos, además de un capítulo introductorio y el presente capítulo de conclusiones.

Las aportaciones fundamentales de esta memoria quedan expuestas a continuación:

- Presentación de la distribución biparabólica caracterizada principalmente por que su función de densidad es derivable en la moda. Curiosamente, esta distribución resulta ser la marginal de la distribución piramidal lo que añade relevancia al estudio de la distribución a la vez que abre una nueva línea de investigación.
- Análisis profundo de la aplicabilidad de dicha distribución en el método de las dos funciones de distribución.
- Análisis y comparación del comportamiento de la distribución biparabólica y la distribución STSP, van Dorp y Kotz (2002.a) en la metodología PERT.
- Generalización de una rama de ambas distribuciones a partir del sistema generador de van Dorp. Desarrollo de una nueva herramienta de generalización de dos ramas que da lugar a distribuciones pentaparamétricas en las que cada una de las ramas, a uno y otro lado de la moda, obedecen a una función generadora diferentes.
- Extensión del método de las dos funciones de distribuciones con dos índices. Aplicación de la herramienta matemática copula para la construcción de distribuciones conjuntas usando como distribución marginal las distribuciones biparabólica y STSP. Estudio y aplicación de las copulas más relevantes.

- Adaptación de la distribución bipolarabólica y la distribución TSP al ámbito financiero. Construcción de sus distribuciones asintóticas. Análisis del comportamiento de la curtosis de dichas distribuciones en comparación con la distribución Normal, la distribución Laplace y la distribución beta.
- Distintos ajustes de los rendimientos financieros de los valores pertenecientes al índice bursátil DJ Eurostoxx 50 mediante las distribuciones bipolarabólica y TSP, sus distribuciones asintóticas y otras distribuciones de interés.
- Desarrollo de un procedimiento de ajuste simplificado basado en el coeficiente de curtosis.

Cada uno de los capítulos descritos finaliza con un epígrafe en el que se resaltan los resultados principales, por lo que es razonable que en este capítulo de conclusiones se pretenda ser breve y se remite al lector interesado a la lectura de las conclusiones comentadas en los capítulos previos. Bajo esta premisa se presenta, a continuación, lo que puede ser considerado como los resultados más interesantes de este trabajo de investigación.

1. Se ha construido de forma geométrica y a partir del sistema generador de van Dorp y Kotz la distribución bipolarabólica, generalizándose a una y dos ramas potenciales (TSB_1 , TSB_2 o también BPG_1 y BPG_2). Se ha demostrado que existe una distribución asintótica de la TSB simétrica y se ha notado como ATSB. Todas estas distribuciones se dan a conocer por primera vez en esta memoria analizando su comportamiento en el ámbito del PERT, del método de las dos funciones de distribución y en el financiero.
2. Según los resultados obtenidos en el capítulo II la distribución bipolarabólica es la más adecuada para ser utilizada en el ámbito del PERT, bajo los criterios presentados por Taha (1981) y desarrollados por Herrerías (1989).
3. Pasar de ambiente de incertidumbre a un ambiente de riesgo, es decir determinar la función de densidad del fenómeno objeto de estudio, a partir de los valores habituales (a , m y b) en el caso de que la distribución subyacente a emplear tenga

más de tres parámetros no es posible salvo que: 1) se le impongan restricciones a los parámetros de la distribución subyacente, 2) se pidan más datos al experto subjetivo o normativo, es decir se lleve a cabo el proceso de elicitación. En esta memoria se han conseguido avances importantes en ambas líneas. En la primera se ha demostrado que las subfamilias mesocúrticas y de varianza constante derivadas de la distribución BPG_1 tienen un comportamiento más homogéneo que las derivadas de la distribución TSP. Además, se demuestra que existe una distribución TSB clásica, como intersección de la subfamilia de varianza constante y la subfamilia mesocúrtica. En la segunda línea se han presentado interesantes métodos de elicitación con preguntas que son fácilmente interpretables por el experto en relación al fenómeno de estudio y sencillas de implementar en el modelo estadístico.

4. Se han construido copulas en ambiente de incertidumbre lo que permite utilizar el método de las dos funciones de distribución de una manera completamente novedosa a los intentos anteriores a esta memoria, los resultados en las aplicaciones practicas son satisfactorios.
5. Los procesos de elicitación y su aplicación práctica han permitido situar el método de las dos funciones de distribución como un método de valoración que sitúa su “acuracidad” por encima del método sintético, reforzando sus cualidades para ser utilizado en ambiente de incertidumbre.
6. Un resultado curioso, es que la distribución biparabólica, construida de forma geométrica, resulta ser, inesperadamente, la distribución marginal de la distribución piramidal presentada por Herrerías (2002, 2005).
7. La TSB_1 (BPG_1) tiene una distribución asintótica que resulta ser más apuntada que la distribución de Laplace, asintótica de la distribución TSP cuando ambas distribuciones tienen la misma varianza, incrementándose la diferencia en el apuntamiento a medida que aumenta la varianza. Según el comportamiento de las series financieras esta es una buena característica de la ATSB que la convierte en una distribución especialmente adecuada para el tratamiento de las mismas. Se ha comprobado que la distribución beta carece de distribución asintótica.

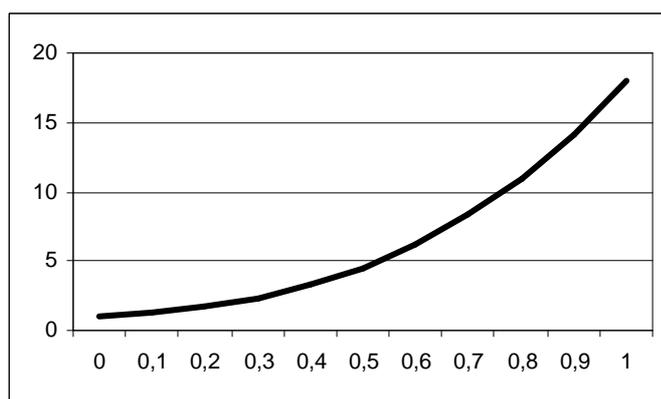
8. La ATSP tiene una curtosis igual a 5,04 que la sitúa entre la normal, (3) y la Laplace (6).
9. Se han generalizado a una y dos ramas la distribución biparabólica y la TSP construyéndose mixturas de distribuciones TSP y TSB y para todos estos casos se han desarrollado procesos de elicitación. Se ha comprobado que todas estas herramientas son de gran utilidad en el ámbito del método de las dos funciones de distribución y que abren nuevas posibilidades de aplicaciones prácticas.
10. Las aplicaciones de la TSB, y la TSB₂ y de la ATSB como distribuciones subyacentes en el ámbito financiero han puesto de manifiesto una gran capacidad de ajuste a los datos empíricos que las sitúan en la mayoría de los escenarios estudiados para el caso concreto del índice de valores DJ Eurostoxx 50, por encima de las distribuciones usadas habitualmente.

En cuanto a las líneas de investigación abiertas destacan:

1. La distribución biparabólica generalizada de dos ramas (BPG₂ o sus siglas en ingles TSB₂) permite tener exponentes distintos en cada una de las ramas. Se considera interesante estudiar el desarrollo de un test que permita contrastar la hipótesis nula de igualdad de exponentes ($H_0 : n_1 - n_2 = 0$) dados unos datos concretos para el ajuste y tratar de relacionar el valor numérico $|n_1 - n_2|$ con el coeficiente de asimetría intentando poner en relación el test propuesto con el de Wilcoxon.
2. En un reciente artículo de Kotz. y van Dorp (2006) se ha establecido un interesante procedimiento para elicitar una distribución TSP(a, m, b, n) a partir de tres cuantiles, $a_p < x_s < a_q$, y la moda, en el que afirman que ninguna otra familia univariante continua y unimodal puede ser elicitada por este método. La existencia de la distribución ATSB hace pensar que la TSB pueda ser una buena candidata a ello y en la actualidad ya se está trabajando en esta línea.

3. La construcción de copulas tridimensionales y n-dimensional en ambiente de incertidumbre es un reto que queda planteada en esta memoria como culminación del capítulo IV.
4. Otra posible línea de investigación es el desarrollo de la teoría de opciones utilizando las distribuciones presentadas en esta memoria. Puede ser especialmente interesante en el caso en que $n_1 \neq n_2$ es decir para la distribución BPG_2 (o TSB_2).
5. Desarrollar nuevas funciones de densidad acotadas y unimodales a partir de funciones generadoras como por ejemplo la funciones coseno o la función medio coseno presentadas en el capítulo I. Especialmente interesante puede ser el caso de la función generadora cúbica que se presenta brevemente.

Dada la función de densidad $p(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$ si se imponen las condiciones: i) $p(0) = 0$; ii) $p'(1) = 0$; iii) $p'(0) = 0$; iv) $\int_0^1 p(y)dy = 1$, entonces se obtiene: $p(y) = 6\left(y^2 - \frac{2}{3}y^3\right)$. Se puede introducir un nuevo parámetro n de manera multiplicativa $p_1(y) = k\left(y^{2n} - \frac{2}{3}y^{3n}\right)$ o aditiva $p_2(y) = k\left(y^{n+2} - \frac{2}{3}y^{n+3}\right)$.



Ejemplo de representación de una función cúbica con $a=10$, $b=5$, $c=2$ y $d=1$.

Calculando el parámetro k se obtiene la función de densidad para el procedimiento

multiplicativo $p_1(y) = \frac{3(2n+1)(3n+1)}{5n+1} \left(y^{2n} - \frac{2}{3} y^{3n} \right)$ para $n > 1$, y en el procedimiento

aditivo $p_2(y) = \frac{3(n+3)(n+4)}{n+6} \left(y^{n+2} - \frac{2}{3} y^{n+3} \right)$ para $n > 0$. Si se analiza el

comportamiento del punto de inflexión se observa que en el primer caso

$x_0 = \sqrt[n]{\frac{2n-1}{3n-1}}$ comprobándose que: i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x_0 = 1$; ii) $\lim_{x \rightarrow 1} x_0 = \frac{1}{2}$. Mientras que en el

segundo caso, para el esquema aditivo, $x_0 = \frac{3(n+1)}{2(n+3)}$ y se comprueba que: i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x_0 = \frac{3}{2}$;

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} x_0 = \frac{1}{2}$.

Por lo que en el esquema aditivo $x_0 = x_0(n)$ es una función creciente entre $(1, +\infty)$ y en el esquema multiplicativo $x_0 = x_0(n)$ es una función creciente entre $(0, +\infty)$. En definitiva el comportamiento del punto de inflexión en función de n puede hacer pensar que la distribución generada a partir de $p_1(y)$ y de $p_2(y)$ cubre un rango de curtosis adecuado para la aplicación de ambas en el ámbito financiero.

6. Los procedimientos de elicitación desarrollados en esta memoria pueden ser el punto de partida para establecer una escala de acuracidad, o exactitud, entre los diferentes procedimientos de valoración. Este estudio podría constituir una interesante línea de investigación.

Referencias bibliográficas

AGGARWAI, R., RAO, R. P. Y HIRAKI, T. (1989). Skewness and kurtosis in Japanese equity returns: empirical evidence. *Journal of Financial Research*, 12, p. 253-260.

AKGIRAY, V. Y BOOTH, G. G. (1988). The stable law model of stock returns. *J. Business Econom. Statist.*, 6, p. 51-57.

ALONSO, R. E IRURETAGOYENA, M.T. (1995). *Valoración Agraria. Conceptos, Métodos y Aplicaciones*. Ediciones Mundi-Prensa.

ALONSO, R. Y LOZANO, J. (1985). El método de la dos funciones de distribución: Una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarca Centro y Tierra de campos. (Valladolid). *Anales del INIA, Economía*, 9, p. 295-325.

ALTIOK, T. Y MELAMED, B. (2001). *Simulation Modelling and Analysis with Arena*. Cyber Research and Enterprise Technologies, p. 46.

ANDERSON, T.W. (1958). *An introduction to multivariate statistical analysis*, John Wiley and Sons, Inc. New York.

ARNÁIZ, G. (1978). *Introducción a la estadística teórica*. Lex-Nova. Valladolid.

ATHANASSOULLIS, G.A., SKARSOULIS, E.K. Y BELIBASSAKIS, K.A. (1994) Bivariate distributions with given marginals with an application to wave climate description. *Applied Ocean Research*, Vol. 16, No. 1, 1994, p. 1-17.

AYYANGAR, A.S.K. (1941). The triangular distribution. *Mathematics Student*, 9, p. 85-87.

BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la speculation*; *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Paris, Ser. 3, 17, p. 21-88. English translation in: *the random character of stock market prices* (ed. Paul Cootner), MIT-Press (1964), p. 17-79.

BAILLIE, R. T. (1993). Comment on modelling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Rev.*, 12, p. 343-345.

BALLESTERO, E. (1971). Sobre la valoración sintética de tierras un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria. *Revista de Economía Política*. Abril, p. 225-238.

BALLESTERO, E. (1973). Nota sobre un Nuevo método rápido de valoración. *Revista de Estudios agro sociales*, 85, Octubre-Diciembre 1973, p. 75-78.

BALLESTERO, E. (1991). *Economía de la empresa agraria y alimentaria*. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.

BALLESTERO, E. Y CABALLER, V. (1982). Il metodo delle due beta. Un procedimento rapido nella stima dei beni fondiari. *Genio Rurale*. 45, 6, p. 33-36.

BALLESTERO, E. Y RODRÍGUEZ, J.A. (1999). El precio de los inmuebles urbanos. CIE Inversiones Editoriales DOSSAT 2000.

BANKS, J. (2000). Introduction to simulations. WSC 2000.

BARONE-ADESI, G. (1985). Arbitrage equilibrium with skewed asset return. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, p. 299-313.

BAZZANI, J. GRILLENSONI, M. Y MALAGOLI, C. (1993). *Valutazione delle risorse ambientali: inquadramento o metodologie di via*. Edagricole, Bologna.

BEN YAIR, (2000) A. Upon implementing the beta distribution in project management. Department of industrial Engineering and Management. Negev academic college of Engineering, Israel.

BLACK, F. Y SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities; *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-654.

BLATTBERG, R. Y GONNEDES, N (1974). A comparison of stable and Student distribution as statistical models for stock prices. *J. Business*, 47, p. 244-80

BONHOMME, S. Y ROBIN, J.M. (2004). Modelling individual Earnings Trajectories using copulas with an application to the study of earnings inequality: France 1990-2002.

BOOKSTABER, R. M. Y MCDONALD, J. B. (1989). A general distribution for describing security price returns. *J. Business*, 60, p. 401-424.

BRONZIN, V. (1908). *Theorie der Prämieneschäfte*; Franz Deuticke.

BROWN, S.L. (1999). An SAB report: estimating uncertainties in Radiogenic Cancer Risk, Washington, D.C.: Science and Advisory Board, United States Environmental Protection Agency, EPA-SAB-RAC-99-008.

CABALLER, V. (1993). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Ediciones Pirámide, S.A. Madrid, 2ª Edición.

CABALLER, V. (1998). *Valoración agraria. Teoría y práctica*. Ediciones Mundi Prensa. Madrid, 3º Edición.

CABALLER, V. (1999). *Valoración de árboles, frutales, forestales, medio ambientales, ornamentales*. EDICIONES Mundi-Prensa.

CALLEJON, J., PEREZ, E. Y RAMOS, A. (1998). La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT. X reunión ASEPELT-ESPAÑA. Universidad de Castilla La Mancha. CD-ROM-Fichero g26.

CANAVOS, G.C. (1987). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. Mc Graw Hill. México.

CAÑAS, J.A., DOMINGO, J. Y MARTÍNEZ, J.A. (1994). Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de las dos funciones de distribución. *Investigación Agraria. Serie Economía*. 9,3,p. 447-467.

CARRIÉRE, J. F. (1994). Dependent decrement theory. *Transactions: Society of Actuaries*, XLVI. 45-73; p. 27-40.

CARRIÉRE, J. F. (2000). Bivariate Survival Models for Coupled Lives. The Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 100-1. p. 17-32

CARRIÉRE, J. F. (2004). Copulas. Encyclopedia of Actuarial Science, Vol. 1-3, Wiley. New York, NY.

CARRIÉRE, J. F. Y CHAN, L.K. (1986). The Bounds of Bivariate Distributions that Limit the Value of Last-Survivor Annuities. Transactions, Vol. XXXVIII, Society of Actuaries, Schaumburg, IL., p. 51-74.

CASAS, J.M Y SANTOS, J. (1996). Introducción a la estadística para economía y administración de empresas (2ª edición). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

CASTRUP, H. (2002). Distributions for Uncertainty Analysis. Integrated Sciences Group.

CLARK, C.E. (1962). The PERT model for the distribution of an activity. Operations Research, 10, 99. p. 405-406.

CLARK, P. K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. Econometrica, 41, p. 135-155.

CLAVIJO HERNANDEZ, F. Y RODRIGUEZ RODRIGUEZ, A.M. (2006). Eficiencia de las normas de valoración española para la tasación de las propiedades inmobiliarias a instituciones contables: Un nuevo paso hacia el logro de la armonización internacional. Revista de contabilidad y Tributación. Comentarios y casos prácticos. Nº 276, Vol.2, marzo 2006, p. 212-263.

CLAYTON, D. Y CUZICK, J. (1985). Multivariate generalizations of the proportional hazards models. J.R. Statistics. Soc. 148,2, p.82-117.

COOTNER, P. (1964). The Random Character of Stock Market Prices. Cambridge: MIT Press.

CUADRAS, C. Y AUGÉ, J. (1981). A continuous general multivariate distribution and its properties. Communications in Statistics. Theory and Methods. A10, p. 339-353.

CHAE, K.C. Y KIM, S. (1992). Stimating the mean and variance of PERT activity time likelihood-ratio of the mode and the midpoint. I.I.E. Transaction, Vol. 22, nº3,

CHAN CHIOU, S. (2005). Multivariate Continuous Time Models through copula. Econometrics and Statistics Colloquium. University of Chicago.

CHIAO, C., HUNG, K. Y SRIVASTAVA, S. C. (2003). Taiwan stock market and tour-moment asset pricing model. International Financial Market, Institutions and Money, 13, p. 355-381.

CHOW, G.C. (1960) Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. *Econometrica* 28(3), p. 591-605.

CHUNHACHINDA, P., DANDAPANI, K., HAMID, S., Y PRAKASH, A. J. (1997). Portfolio selection and skewness: evidence from international stock markets. *Journal of Banking and Finance*, 21, p. 143-167.

DALL'AGLIO, G., KOTZ, S. Y SALINETTI, G. (1991). *Advances in Probability Distributions with given marginals - Beyond the copulas*, Kluwer Academic Publishers, London.

DANIELS, H.E. (1950). Rank correlation and population models. *J. Roy. Statistics, Soc. SER. B.*, 12, p. 171-181.

DEHEUVELS, P. (1981). A non parametric test for independence. *Publications de l'Institut de Statisique de l'Université de Paris*, vol. 26, p. 29-50.

DEVROYE, L. (1986). Non uniform Random variate generation. Springer-Verlang (cg.cs.carleton.ca/luc/chapter_eleven.pdf)

DIEBOLD, F.X. (1993). Comment on Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Rev.*, 12, p. 339-442.

DUMAS DE RAULY, D. (1968). *L'estimation staquistique*. Gauthier-Villars.

ELDERTON, W.P. Y JOHNSON, N.L. (1969), *Systems of Frequency Curves*, London: Cambridge University Press.

EMBRECHTS, P., MCNEIL, A.J. Y STRAUMANN, D. (1999). Correlation: pitfalls and alternatives, Risk magazine, 12, May, p. 69-71

EMBRECHTS, P., MCNEIL, A.J. Y STRAUMANN, D. (2000), Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls, in M. Dempster and H.K. Moffatt (Eds.), Risk Management.

EYRAUD, H. (1936). Les principis de la mesure des correlations. Ann. Univ. Lyon. Aq, p. 30-47.

FAMA, E. (1976). Foundations of Finance : Portfolio Decisions and Securities Prices; New York: Basic Books.

FARLIE, D.J.G. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. Biometrika, 47, p. 307-323.

FARNUM, N.R. Y STANTON, L.W. (1987).Some results concerning the Estimation of beta distribution parameters in PERT. J.Opl, Res. Soc., Vol.38, nº3, p 287-290.

FERNANDEZ, P. (2004). Valoración de empresas. Ediciones GESTION 2000.

FISCHER, M. (2004). Skew Generalized Secant Hyperbolic Distributions: Unconditional. Austrian Journal of Statistics. Vol. 33, Nº 3, 293–304

FLEHINGER, B.J. Y KIMMEL, M. (1987). The natural history of lung cancer in periodically screened population. Biometrika, 43: p. 127-144.

FRANK, M. (1979). On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $X+Y-f(X,Y)$. Aequationes Mathematicae, 19, p. 194-226.

FRECHET, M. (1951). Sur le tableaux de Correlation dont les Marges son Donees, Annales de l'Université de Lyon Section A, vol. 9, p. 53-77.

FREES, E.W. Y VALDEZ, E.A. (1998). Understanding relationships using copulas. North AMERICAN Actuarial Journal, Vol.2, nº2, p. 229-261.

FRIEND, I. Y WESTERFIELD, R. (1980). Co-skewness and capital asset pricing. *Journal of Finance*, 38, p. 897-913.

GALLAGHER, C. (1987). A note on PERT assumptions. *Management Science*, vol. 33, nº 10, 1360.

GARCÍA, J. Y GARCÍA, L.B. (2002). Teoría general de valoración. Método de las dos funciones de distribución. Unicaja fundación..

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y ANDUJAR, A.S. (1998). Il metodo dell due funzione di distribuzione: Il modello triangolare. Una revisione. *Genio Rurale*. 11,p.3-8.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y GARCÍA, L.B. (2002.a). Generalización del método de las dos funciones de distribución a familias betas determinadas con los tres valores habituales. Análisis selección y control de proyectos y valoración. Servicio de publicaciones de la Universidad de Murcia.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y GARCÍA, L.B. (2002.b). Regresión a través de las dos funciones de Distribución. Actas de la XVI reunión Asepelt-España, Madrid.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y GARCÍA, L.B. (2002.c). Iterative valuation process in the method of the two beta distributions. *Spanish Journal of Agricultural Research*, 21.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y GARCÍA, L.B. (2004). Proceso iterativo de valoración en el método de las dos betas. Capítulo 3. Programación, selección, control y valoración de proyectos. Universidad de Granada.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y GARCÍA, L.B. (2005). The two-sided power distribution for the treatment of the uncertainty in PERT. *Statistical Methods & Applications*, 14, p.209-222.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y HERRERÍAS, J.M. (2003). Some indications to correctly use the estimations of an expert in the PERT methodology. *Central European Journal of Operations Research*, 11, 2, p. 183-196.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y ROSADO, Y. (2000). Las funciones de distribución multivariantes en la teoría general de valoración. Actas de la XIV Reunión Asepelt. España, Oviedo.

GARCÍA, J., CRUZ, S. Y ROSADO, Y. (2002) Extensión multi índice del método beta en valoración agraria. Economía Agraria y Recursos naturales. Vol.2, Núm.2, p. 3-26.

GARCÍA, J., TRINIDAD, J.E. Y GARCÍA, L.B. (2004). Valoración por el método de las dos funciones de distribución. Como seleccionar la mejor distribución. XVIII Reunión Asepelt-España, León.

GARCÍA, J., TRINIDAD, J.E. Y GÓMEZ, J. (1999). El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal. Revista Española de Estudios Agrosociales y pesqueros. Nº. 185, p. 57-80.

GARCÍA, J., TRINIDAD, J.E. Y SÁNCHEZ, M. (1997). Selección de una cartera de cultivos: el principio "primero la seguridad" de Roy. Investigación agraria, Serie Economía. 12,1,2,3,p. 425-445.

GARCÍA, L.B., TRINIDAD, J.E. Y GARCÍA, J. (2006). La generalización en dos ramas a partir del sistema generador de van Dorp. Aplicaciones en el método de las dos funciones de distribución. XX Congreso Nacional de Asepelt, La Laguna.

GARVEY, P.R. (2000). Probability methods for cost uncertainty analysis, a systems engineering perspective. New York, NY: Marcel Dekker.

GATFAOUI, H. (2005). How Does Systematic Risk Impact US Credit Spreads? A Cópula Study. Banque & Marchés. nº 77, p. 5-16.

GENEST, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. Biometrika, 74, p. 549-555.

GENEST, C. Y FAVRE, A.C. (2006). Everything you always wanted to know about cópula modelling but were afraid to ask. Journal of Hydrologic Engineering, 11, sous presse.

GENEST, C. Y MACKAY, J. (1986). The joy of copulas: Bivariate Distributions with uniform Marginals. *American Statistician*, vol. 40, p. 280-283.

GHITANY, M.E., KOTZ, S. Y XIE, M. (2005). On some reliability measures and their stochastic orderings for the Topp-Leone distribution. *Journal of applied Statistics*, vol. 32, nº 77, p. 715-722.

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988). On the distribution of activity time in PERT. *J. Opl. Soc.* Vol. 39, nº8, p. 767-771.

GUADALAJARA, N. (1996). Valoración agraria. Casos prácticos. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.

GUMBEL, E.J. (1958), Bivariate exponential distributions, *J. AMER. Statist. Assoc.* 55, p. 698-707.

HAGERMAN, R. L. (1978). More evidence on the distribution of security returns. *J. Finance*, 33, p. 1213-1221.

HALL, J A., BRORSEN, B. W. Y IRWIN, S. H. (1989). The distribution of futures prices: A test of the stable Paretian and mixture of normals hypotheses. *J. Financ. Quant. Anal.*, 24, p. 105-116.

HAROLD, J. (1939, 1961). *Theory and probabilities*. Clarendon Press. (1º y 3º edición) Capítulo 2.

HARVEY, C. R. Y SIDDIQUE, A. (1999). Autoregressive skewness. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, p. 465-487.

HARVEY, C.R. Y SIDDIQUE, A. (2000). Conditional Skewness in Asset Pricing Tests. *Journal of Finance*, 55 (3), p. 1263-1296.

HERRERÍAS VELASCO, J.M. (2002). Tesis doctoral. Avances en la teoría general de valoración en ambiente de incertidumbre. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la empresa. Universidad de Granada.

HERRERÍAS VELASCO, J.M. (2005). Modelos probabilísticos aplicados a la Teoría General de Valoración. El método de las dos betas. Servicio de publicaciones de Unicaja.

HERRERÍAS, R. (1989). Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el Método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones. Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid., p. 89-112.

HERRERÍAS, R. (1995). Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT. IX Reunión Asepelt Espala. Vol. IV, p. 411-416.

HERRERÍAS, R. (2001). Programación, selección y control de proyectos en incertidumbre. Ed. Universidad de Granada.

HERRERÍAS, R. (2004). La distribución TSP(a,m,b,n) de van Dorp y Kotz como distribución de tipo Pearson univariante continua. Algunas aplicaciones estadísticas y económicas. Aspectos teóricos y aplicados en la generación de distribuciones de probabilidad. Editorial: Entrelibros.

HERRERÍAS, R. Y CALVETE, H. (1987). Una ley de probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una inversión. Libro homenaje al profesor Gonzalo Arnáiz Vellando. INE, Madrid, 279-296. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), p. 119-127.

HERRERÍAS, R. Y MIGUEL, S. (1988). Expresiones alternativas para la varianza de la distribución trapezoidal. Actas de la II Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Valladolid 89-112. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), p. 129-133.

HERRERÍAS, R., GARCÍA, J. Y CRUZ, S. (1999). The parameters of the classical PERT. An assessment of its success. Central European Journal of Operations Research, Vol. 7. p. 159-175.

HERRERÍAS, R., GARCIA, J. Y CRUZ, S. (2003). A note on the reasonableness of PERT hypotheses. Operations Research Letters, 31 (1), p 60-62.

HERRERÍAS, R., GARCÍA, J., CRUZ, S. Y HERRERÍAS, J.M. (2001). Il modello probabilistico trapezoidale nel metodo delle due distribuzioni Della teoria generale di valutazioni. Genio Rurale. Estimo e Territorio. Revista de Scienze Ambientali. 4-3,9.

HERRERÍAS, R., PEREZ, F., CALLEJÓN, J. Y HERRERÍAS, E. (1999) Las familias de distribución beta de varianza constante y mesocurticas en el método PERT. Defendido en la II Reunión científica :Selección, Evaluación y control de proyectos y recogido en Herrerías, R. (2001)

HILLIER, I. Y LIEBERMAN, G.J. (1982). Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.

HIRSCHBERG, J., MAZUMDAR, S., SLOTTJE, D. Y ZHANG, G. (1992). Analyzing functional forms of stock returns. J. Appl. Financ. Econom., 2(4), p. 221-227.

HÖEFFDING, W. (1940). Maszstabinvariante Korrelationstheorie. Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin, 5, p. 181-233.
http://braude.ort.org.il/industrial/13thconf/html.%5Cfiles%5C113_p.pdf..

JOHNSON, D. (1997). The triangular distribution as a proxy for the beta distribution in risk analysis. Statistician, 46, p. 387-398.

JOHNSON, D. (1998). The robustness of mean and variance approximations in risk analysis. Journal of the Operational Research Society, 49, p. 253-262.

JOHNSON, M.E. (1987). Multivariate Statistical simulation. New York. John Wiley.

JOHNSON, N.L. Y KOTZ, S. (1975). On some generalized Farlie-Gumbel and Morgenestern. Communications in Statistics, 4(5), p. 415-427.

JOHNSON, N.L. Y KOTZ, S. (1977). On some generalized Farlie-Gumbel and Morgenestern distribution II. Regression, correlation and further generalizations. Commun. Statistical Theory and Method, A6(6), p. 485-496.

JOHNSON, N.L. Y KOTZ, S. (1999). Non-smooth sailing or triangular distributions revisited after some 50 years. Statistician, 48, p. 179-187.

JOUANIN, J.F. RIBOULET, G. Y RONCALLI, T. (2004). Publicado en el libro Risk Measures for the 21st Century, editado por Giorgio Szego, John Wiley & Sons.

KAISHEV, V.K., DIMITROVA, D.S. Y HABERMAN, S. (2005). Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions. Actuarial Research Paper, nº 164, Cass Business School, London.

KAMBUROWSKI, J. (1997). New validations of PERT times. Omega International Journal of Management Science 1997. Vol. 25, Iss. 3, p 323-328.

KEEFER, D.L. Y VERDINI, W.A. (1993). Better estimation of PERT activity time parameters. Management Science 39, p 1086-1091.

KENDALL, M. (1938). A New Measure of Rank Correlation. Biometrika, 30, p. 81-89.

KEREN, M. (1979). The Incentive effects of plan targets and priorities in a disaggregated Model. Journal of comparative economics 3, p. 1-26 (1979)

KETTLER, P.C. (2005). The pyramid distribution. Pure Mathematics, Núm. 39.

KOTZ, S. Y DROUET, M. (2001). Correlation and dependence. Imperial Collage Press, Londres.

KOTZ, S. Y JOHNSON, N.L. (1985). Moment Ratio Diagrams in Encyclopedia of Statistical Sciences. Vol.5, New York; Willey, p. 02-604.

KOTZ, S. Y VAN DORP, J. R. (2004). Beyond Beta, Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications, World Scientific Press, Singapore.

KOTZ, S. Y VAN DORP, J.R. (2005). A link between Two-sided power and Asymmetric Laplace Distributions: with Applications to Mean and Variance Approximations. Statistics and Probability Letters, Vol. 71, p. 382-394.

KOTZ, S. Y VAN DORP, J.R. (2006). A Novel Method for Fitting Unimodal Continuous Distributions on a Bounded Domain. IIE Transactions, Vol. 38, p. 421-436

KUZNETS, S. (1955). Economic Growth and Income Inequality. *American Economic Review*, 45

KUZNETS, S. (1963). Quantitative Aspect of Distribution of Income by size. *Economic Development and Cultural Change* 11

LAU, H. J. R., WINGENDER, R. Y LAU, A. H. (1989). On estimating skewness in stock returns. *Mgmt. Sci.* 35(9), pp. 1139-1142.

LÉVY, P. (1950). Distance de deux variables aleatoires et distance de deux lois de probabilité. In *generalités sur le probabilités Elements aleatoires* by M. Frechet, Gauthier-Villars, Paris.

LI, D. (2000). On Default Correlation: A copula Function Approach. *Journal of fixed Income*, 9(4), p. 43-54.

LIM, K.G. (1989). A new test of the three-moment capital asset pricing model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, pp. 205-216.

LINDEN, M. (2001). A model for stock return distribution. *International Journal of Finances and Economics*, 6, pp. 159-169.

LITTLEFIELD, T.K. Y RANDOLPH, P.H. (1987). An answer to Sasieni's Question on PERT times. *Management Sci.* 33 p 1357-1359.

LOZANO J.J. (1996). Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva. Tesis doctoral Universidad Politécnica Madrid.

MACCRIMMON, K.R. Y RYAVECK, C.A. (1964). An analytical study of the PERT assumptions. *Operations Research*, nº12, p. 16-36.

MANDELBROT, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *J. Business*, 36, 392-417.

MARDIA, V. (1970) . Families of bivariate distributions. London: Charles W. Griffin.

MARSHALL, A.W. Y OLKIN, I. (1986). Bivariate distributions generated from mixtures. Technical report. Stanford University Department of Statistics.

MCDONALD, J. B. Y NEWAY, W. K. (1988). Partially adaptive estimation of regression models via the generalized T distribution. *Econometric Rev.*, 12, pp. 103-124.

MCDONALD, J. B. Y XU, Y. J. (1995). A generalization of beta distribution with applications. *J. Econometrics*, 66, pp. 133-152.

MCDONALD, J.B. (1996). Probability distributions for financial models. In *handbook of Statistics. Financial Statistics*, vol 14, Maddala GS, Rao CR (eds). Elsevier Science: Amsterdam, 427-461.

MERTON, R.C. (1973). Theory of rational option pricing; *Bell journal of economics and management science*, 4, p. 141-183.

MIRALLES MARCELO, J.L. Y MIRALLES QUIROS, J.L. (2006). Nuevas perspectivas del mercado bursátil. El caso español. *Universia Business Review. Actualidad ECONOMICA*, 2T, ISSN 1698-5117.

MODER, J.J. Y RODGERES, E.G. (1968). Judgment estimates of the moments of PERT type distributions. *Management Science*, vol. 15, nº2, p B-76 a B-83.

MOITRA, S.D. (1990). Skewness and the beta distribution. *J. Opl. Res. Soc.* Vol. 41, nº 10, p 953-961.

MORGENSTERN, D. (1956). Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, *Mitt. Für Math. Statistik*. 8, p. 234-235.

NADARAJAH, S. Y KOTZ, S. (2003). Moments of some J-shaped distributions. *Journal of Applied Statistics*, 30, pp 311-317.

NELSEN, R.B. (1999). An introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, 139, Springer Verlag, New York.

OSBORNE, M.F.M. (1959). Brownian Motion in the stock market. *Operation Research*, 7, 145-173.

PALACIOS, F., PÉREZ, E., HERRERÍAS, R. Y CALLEJÓN, J. (1999). Estimación no paramétrica de la distribución del VAN en proyectos de inversión con tasas de descuento aleatorias. Actas en CD-Rom de la XIII Reunión ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Burgos. Recogido en Herrerías, R. (2001, editor), 289-299.

PEIRO, A. (1999). Skewness in financial returns. *Journal of Banking and Finance*, 32, pp. 847-863.

PEREZ, E. (1995). Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento. IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA. Vol. 4. Análisis de Empresa. Métodos estadísticos y econométricos. P. 545-551. Universidad de Santiago de Compostela.

PLACKETT, R.L. (1965). A class of bivariate distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* 60, p. 516-522.

POMPILJ, G. (1984). Le variable Casuali. *Ist Calcolo Probab. Univ. Roma*.

POULIQUEN, L.Y. (1970). Risk analysis in Project appraisal. *World Bank Staff Occasional Papers*, 1. Baltimore, Md: John Hopkins University Press.

POWELL, M.R. Y WILSON, J.D. (1997). Risk assessment for national natural resource conservation programs, Discussion Paper 97-49. Washington D.C.: Resources for the Future. p. 370-418, Reproduced in *Biometrika*.

PRAETZ, P. D. (1972). The distribution of share price changes. *J. Business*, 45, pp. 49-55.

ROBERT, H. (1959). Stock Market Patterns and Financial Analysis: Methodological Suggestions. *Journal of Finance*, 14 (1).

ROMERO, C. (1977). Valoración por el método de las dos distribuciones beta: Una extensión. *Revista de Economía Política*.

ROMERO, C. (1991). Técnicas de programación y control de proyectos. Pirámide.

- SASIENI, M.W. (1986). A note on PERT times. *Management Sci.* 32 pp 1652-1653.
- SCARSINI, M. (1984). On measures of concordance. *Sthocastica*, Vol. VIII, Núm. 3.
- SCHMIDT, R. (1934). Statistical analysis of one-dimensional distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 5, p. 30-43.
- SCHUCANY, W.R., PARR, W.C. Y BOYER, J.E. (1978). Correlation structure in Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions. *Biometrika*, 65, p. 650-653.
- SCHWEIZER, B, Y WOLF, E.F. (1981). On non parametrics measures of dependence for Random variables. *The annals of Statistics*, 9:p. 879-885
- SEAL, H.L. (1949). Historical development of the use of generating functions in probability theory. *Mitt. Vereinnigung Scweiz. Versicherungsmathematiker.* 49, p. 209-228.
- SEARS, R. S. Y WEI, K. C. J. (1985). Asset Pricing, higher moments, and the market risk premium: a note. *Journal of Finance.* 40, pp. 1251-1253.
- SHAVITT, Y., WINKLER, P. Y WOOL, A. (2004). On the economics of multicasting. *Economic Research and electronic Networking*, 6, 1.
- SIBUYA, M. (1960). Bivariate extreme Statistics. I. *Ann, Inst. Statist. Math, Tokyo*, 11: p. 195-210.
- SIMKOWITZ, M., Y BEEDLES, W. (1978). Diversification in a three moments world. *Journal of Finance and Quantitative Analysis.* 13, p. 927-941
- SIMPSON, T. (1755). A letter to he Right Honourable George Earls of Maclesfield President of the Royal Society, on the advantage of taking the mean of a number of observations in practical astronomy. *Philosophical Transactions*, 49 (1), p. 82-93.
- SIMPSON, T. (1757). An attempt to show the advantage arising by taking the mean of a number of observations in practical astronomy. *Miscellaneous Tracts on some curious and very interesting Subjects in Mechanics, Physical Astronomy and Speculative Mathematics*, p 64-75.

SINGLETON, J.C. Y WINGENDER, J. (1986). Skewness persistence in common stock returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, p. 341-355.

SKLAR, A. (1959). *Functions de Repartition à n Dimensions et Leurs Marges*. Publications de L'Institut de Statistiques de l'Universite de Paris, vol. 8, p. 229-231.

SOOFI, S.M. Y RETZER, J.J. (2000). Information indices: unification and applications, *Journal of Econometrics*, 107, p.17-40.

SUÁREZ, S. (1980). *Decisiones optimas de inversión y financiación en la empresa*. Pirámide.

TAHA, H.A. (1981). *Investigación de operaciones*. Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A. México.

TAN, K. J (1991). Risk return and the three moment capital asset pricing model: another look. *Journal of Finance and Banking*.15, p. 449-460.

THEEBE, M. (2004): Planes, trains and automobiles: The impact of traffic noise on house prices. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 28:2/3, p. 209-234.

TOPP, C.W. Y LEONE, F.C. (1955). A family of J-Shaped frequency functions, *Journal of the American Statistical Association*, 50 (269), p. 209-219.

VADUVA, I. (1971). Computer generation of random variables and vector related to PERT problems, *Proc. Fourth Conf.Probab.Theory, Brasov*, 12-18, p. 381-395

VAN DORP, J. R. Y KOTZ, S. (2002.a). A Novel Extension of the Triangular Distribution and its Parameter Estimation, *The Statistician*, 51, Núm.. 1, p. 63-79.

VAN DORP, J. R. Y KOTZ, S. (2002.b). The Standard Two Sided Power Distribution and its Properties: with Applications in Financial Engineering, *The American Statistician*, 56, Núm. 2, p. 90-99

VAN DORP, J. R. Y KOTZ, S. (2003.a). Generalized Trapezoidal Distributions. *Metrika*, Vol. 58, Issue 1, p. 85-97.

VAN DORP, J. R. Y KOTZ, S. (2003.b) Generalizations of Two Sided Power Distributions and their Convolution. Communications in Statistics: Theory and Methods, Vol. 32, Núm.. 9, p. 1703 – 1723.

VAN UVEN, M. J. (1947). Extensions of Pearson´s probability distributions to two variables. Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, Vol. 50, p. 1063-1070 y 1252-1264.

VAN UVEN, M. J. (1948). Extensions of Pearson´s probability distributions to two variables. Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, Vol. 51, p. 41-53 y p.191-196

VIVO J.M. (2005). Tesis doctoral. Propiedades de extremos en algunos modelos probabilísticos bivariantes para la economía. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la empresa. Universidad de Granada.

VOSE, D. (1996). Quantitative Risk Analysis: A guide to Monte Carlo simulation Modelling. Wiley, New York.

WILCOXON, F. (1945). Individual Comparisons by Ranking method. Biometrics 1, p. 80-83.

WILSON J. Y PAXSON D.E. (2002). Unsteady ejector performance and experimental investigation using a resonance tube driver. Joint Propulsion Conference, Indianapolis Indiana, July 7-10-2002 available <http://gltrs.grc.nasa.gov/GLTRS>

WILLIAMS, T.M. (1992). Practical use of distribution in network analysis. J.Op. Res. Soc. 43, p. 265-270.

WINSTON, W.L. (1993). Operations Research, Applications and Algorithms. Pacific Grove, CA: Duxbury Press.

YASHIN, A. Y IACHINE, I. (1995). How long can humans live? Lower bound for biological limit of human longevity calculated from Danish twin data using correlated frailty model. Mechanisms of Ageing and development. 80, p. 147-169.

Referencias bibliográficas

YU CHUEN-TAO, L. (1980). Aplicaciones practicas del PERT y CPM. Ediciones Deusto

ZIMMERMANN, H. Y HAFNER, W. (2004). Amazing Discovery – Professor Bronzin’s
option pricing models (1908), Manuscript, Universität Basel

Valor esperado de la distribución BPG ₂	(III.100)
$\frac{(1 + 2n_1) (-2 (2 + 7n_2 + M (6 + M) n_2^2 + 2M^2 n_2^3) - 3n_1 (2 + 7n_2 + M (6 + M) n_2^2 + 2M^2 n_2^3) + (-1 + M) n_1^2 (2 + 7n_2 + M (2 + 7n_2 + 6n_2^2)))}{2 (2 + n_1) (2 + n_2) (1 + 3n_2 + 2Mn_2^2 - 2 (-1 + M) n_1^2 (1 + 3n_2) + n_1 (3 + 9n_2 + 6Mn_2^2))}$	
Varianza de la distribución BPG ₂	(III.101)
$\frac{3M^3 (1 + n_1)^2 (1 + 2n_1) (1 + n_2) (1 + 2n_2)}{(3 + n_1) (3 + 2n_1) (M (1 + 3n_1) (1 + n_2) (1 + 2n_2) - (-1 + M) (1 + n_1) (1 + 2n_1) (1 + 3n_2))} -$ $\frac{(-1 + M) (1 + 3n_1 + 2n_1^2) (3M^2 (1 + n_2)^2 (2 + 5n_2 + 2n_2^2) + 3 (2 + 9n_2 + 5n_2^2) + M (6 + 27n_2 + 37n_2^2 + 14n_2^3))}{(2 + n_2) (9 + 9n_2 + 2n_2^2) (1 + 3n_2 + 2Mn_2^2 - 2 (-1 + M) n_1^2 (1 + 3n_2) + n_1 (3 + 9n_2 + 6Mn_2^2))} -$ $\frac{(1 + 2n_1)^2 (2 (2 + 7n_2 + M (6 + M) n_2^2 + 2M^2 n_2^3) + 3n_1 (2 + 7n_2 + M (6 + M) n_2^2 + 2M^2 n_2^3) - (-1 + M) n_1^2 (2 + 7n_2 + M (2 + 7n_2 + 6n_2^2)))^2}{4 (2 + n_1)^2 (2 + n_2)^2 (1 + 3n_2 + 2Mn_2^2 - 2 (-1 + M) n_1^2 (1 + 3n_2) + n_1 (3 + 9n_2 + 6Mn_2^2))^2}$	
Valor esperado de la distribución BPG ₂ cuando $n_1 = n_2$	(III.102)
$\frac{2 + 7n + 6Mn^2}{4 + 14n + 6n^2}$	
Varianza de la distribución BPG ₂ cuando $n_1 = n_2$	(III.103)
$\frac{12 + 96n + (247 - 40M + 40M^2) n^2 + (247 - 244M + 244M^2) n^3 + 2 (41 - 74M + 74M^2) n^4}{4 (9 + 9n + 2n^2) (2 + 7n + 3n^2)^2}$	

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{M^5 (1+n_1) (1+2n_1) (5+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(5+n_1) (5+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{4 (1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} + \frac{6 (1-M)^2 (1+n_2) (1+2n_2) (3+3n_2)}{(3+n_2) (3+2n_2) (1+3n_2)} - \frac{4 (1-M)^3 (1+n_2) (1+2n_2) (4+3n_2)}{(4+n_2) (4+2n_2) (1+3n_2)} + \frac{(1-M)^4 (1+n_2) (1+2n_2) (5+3n_2)}{(5+n_2) (5+2n_2) (1+3n_2)} \right) \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) - 3 \left(\frac{M^2 (1+n_1) (1+2n_1) (2+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(2+n_1) (2+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right)^4 + \\
 & 6 \left(\frac{M^2 (1+n_1) (1+2n_1) (2+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(2+n_1) (2+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \left(1 - \frac{(1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} \right) \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right)^2 \left(\frac{M^3 (1+n_1) (1+2n_1) (3+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(3+n_1) (3+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{2 (1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} + \frac{(1-M)^2 (1+n_2) (1+2n_2) (3+3n_2)}{(3+n_2) (3+2n_2) (1+3n_2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right) - \\
 & 4 \left(\frac{M^2 (1+n_1) (1+2n_1) (2+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(2+n_1) (2+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right) \\
 & \left(\frac{M^4 (1+n_1) (1+2n_1) (4+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(4+n_1) (4+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \left(1 - \frac{3 (1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{3 (1-M)^2 (1+n_2) (1+2n_2) (3+3n_2)}{(3+n_2) (3+2n_2) (1+3n_2)} - \frac{(1-M)^3 (1+n_2) (1+2n_2) (4+3n_2)}{(4+n_2) (4+2n_2) (1+3n_2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right) \Bigg/ \\
 & \left(\frac{M^3 (1+n_1) (1+2n_1) (3+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(3+n_1) (3+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \left(1 - \frac{2 (1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} + \frac{(1-M)^2 (1+n_2) (1+2n_2) (3+3n_2)}{(3+n_2) (3+2n_2) (1+3n_2)} \right) \right. \\
 & \left. \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) - \left(\frac{M^2 (1+n_1) (1+2n_1) (2+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{(2+n_1) (2+2n_1) (M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2))} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n_2) (1+2n_2) (2+3n_2)}{(2+n_2) (2+2n_2) (1+3n_2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2)}{M (1+3n_1) (1+n_2) (1+2n_2) + (1-M) (1+n_1) (1+2n_1) (1+3n_2)} \right) \right) \right)^2
 \end{aligned}$$

Valor esperado de la distribución $STSP_2$	(III.118)
$\frac{n_1 (-1 - n_1 - M (1 + n_1) (-1 + n_2) + M^2 (n_1 - n_2) n_2)}{(1 + n_1) (1 + n_2) ((-1 + M) n_1 - M n_2)}$	
Varianza de la distribución $STSP_2$	(III.119)
$n_1 \left[\frac{M^2 n_2}{(2 + n_1) (n_1 - M n_1 + M n_2)} + \frac{(-1 + M) (2 + 2 M n_2 + M^2 n_2 (1 + n_2))}{((-1 + M) n_1 - M n_2) (2 + 3 n_2 + n_2^2)} - \frac{n_1 (1 + n_1 + M (1 + n_1) (-1 + n_2) + M^2 n_2 (-n_1 + n_2))^2}{(1 + n_1)^2 (1 + n_2)^2 ((-1 + M) n_1 - M n_2)^2} \right]$	
Valor esperado de la distribución $STSP_2$ cuando $n_1 = n_2$	(III.120)
$\frac{1 + M (-1 + n)}{1 + n}$	
Varianza de la distribución $STSP_2$ cuando $n_1 = n_2$	(III.121)
$\frac{-2 M (-1 + n) + 2 M^2 (-1 + n) + n}{(1 + n)^2 (2 + n)}$	
Coeficiente de asimetría de la distribución $STSP_2$	(III.122)
$\left(n_1 \left[\frac{M^4 n_2}{(3 + n_1) (n_1 - M n_1 + M n_2)} - \frac{3 n_1 (-1 - n_1 - M (1 + n_1) (-1 + n_2) + M^2 (n_1 - n_2) n_2) (-2 (2 + n_1) - 2 M (2 + n_1) (-1 + n_2) - M^2 (2 + n_1) (-1 + n_2) n_2 + M^3 (n_1 - n_2) n_2 (1 + n_2))}{(2 + 3 n_1 + n_1^2) (1 + n_2)^2 (2 + n_2) (n_1 - M n_1 + M n_2)^2} - \frac{2 n_1^2 (1 + n_1 + M (1 + n_1) (-1 + n_2) + M^2 n_2 (-n_1 + n_2))^3}{(1 + n_1)^3 (1 + n_2)^3 ((-1 + M) n_1 - M n_2)^3} + \frac{(-1 + M) (6 + 6 M n_2 + 3 M^2 n_2 (1 + n_2) + M^3 n_2 (2 + 3 n_2 + n_2^2))}{((-1 + M) n_1 - M n_2) (6 + 11 n_2 + 6 n_2^2 + n_2^3)} \right] \right) / \left(n_1 \left[\frac{M^2 n_2}{(2 + n_1) (n_1 - M n_1 + M n_2)} + \frac{(-1 + M) (2 + 2 M n_2 + M^2 n_2 (1 + n_2))}{((-1 + M) n_1 - M n_2) (2 + 3 n_2 + n_2^2)} - \frac{n_1 (1 + n_1 + M (1 + n_1) (-1 + n_2) + M^2 n_2 (-n_1 + n_2))^2}{(1 + n_1)^2 (1 + n_2)^2 ((-1 + M) n_1 - M n_2)^2} \right] \right)^{3/2}$	

Coeficiente de curtosis de la distribución STSP ₂	(III.123)
$\left(\frac{M^5 n_1 n_2 (n_1 - M n_1 + M n_2)^2}{4 + n_1} + (n_1 - M n_1) (n_1 - M n_1 + M n_2)^2 \left(1 + \frac{4(-1+M)n_2}{1+n_2} + \frac{6(-1+M)^2 n_2}{2+n_2} + \frac{4(-1+M)^3 n_2}{3+n_2} + \frac{(-1+M)^4 n_2}{4+n_2} \right) - \right.$ $\frac{6 n_1^3 (n_1 - M n_1 + M n_2) (-2(2+n_1) - 2M(2+n_1)(-1+n_2) - M^2(2+n_1)(-1+n_2)n_2 + M^3(n_1-n_2)n_2(1+n_2)) (1+n_1+M(1+n_1)(-1+n_2) + M^2 n_2(-n_1+n_2))^2}{(1+n_1)^2(2+n_1)(1+n_2)^3(2+n_2)} -$ $\frac{3 n_1^4 (1+n_1+M(1+n_1)(-1+n_2) + M^2 n_2(-n_1+n_2))^4}{(1+n_1)^4(1+n_2)^4} - \frac{1}{(3+4n_1+n_1^2)(1+n_2)^2(6+5n_2+n_2^2)} (4n_1^2(n_1-Mn_1+Mn_2)^2(-1-n_1-M(1+n_1)(-1+n_2) + M^2(n_1-n_2)n_2)$ $\left. (-6(3+n_1) - 6M(3+n_1)(-1+n_2) - 3M^2(3+n_1)(-1+n_2)n_2 - M^3(3+n_1)n_2(-1+n_2^2) + M^4(n_1-n_2)n_2(2+3n_2+n_2^2))) \right) /$ $\left(n_1^2 (n_1 - M n_1 + M n_2)^4 \left(\frac{M^3 n_2}{(2+n_1)(n_1 - M n_1 + M n_2)} + \frac{(-1+M)(2+2Mn_2+M^2 n_2(1+n_2))}{((-1+M)n_1 - M n_2)(2+3n_2+n_2^2)} - \frac{n_1(1+n_1+M(1+n_1)(-1+n_2) + M^2 n_2(-n_1+n_2))^2}{(1+n_1)^2(1+n_2)^2((-1+M)n_1 - M n_2)^2} \right)^2 \right)$	

Valor esperado de la distribución STSP-BP ₂	(III.134)
$\frac{6 M n_1 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2) n_2^2 + n_1 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2) (2 + 7 n_2) + M^2 (1 + 2 n_2) (-3 n_1^3 (2 + 3 n_2) + 2 (2 + 3 n_2 + n_2^2) + n_1^2 (-2 - 3 n_2 + 6 n_2^2) + n_1 (10 + 15 n_2 + 7 n_2^2))}{2 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2) (2 + n_2) (-n_1 (1 + 3 n_2) + M (-1 + n_1 - 3 n_2 + 3 n_1 n_2 - 2 n_2^2))}$	
Varianza de la distribución STSP-BP ₂	(III.135)
$\frac{3 M^3 (1+n_1)^2 (1+2n_1)(1+n_2)(1+2n_2)}{(3+n_1)(3+2n_1)(1+3n_1)(M(1+n_2)(1+2n_2) - (-1+M)n_1(1+3n_2))} - \frac{(-1+M)n_1(3M^2(1+n_2)^2(2+5n_2+2n_2^2) + 3(2+9n_2+5n_2^2) + M(6+27n_2+37n_2^2+14n_2^3))}{(2+n_2)(9+9n_2+2n_2^2)(n_1+3n_1n_2+M(1+3n_2+2n_2^2-n_1(1+3n_2)))}$ $\frac{(6 M n_1 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2) n_2^2 + n_1 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2) (2 + 7 n_2) + M^2 (1 + 2 n_2) (-3 n_1^3 (2 + 3 n_2) + 2 (2 + 3 n_2 + n_2^2) + n_1^2 (-2 - 3 n_2 + 6 n_2^2) + n_1 (10 + 15 n_2 + 7 n_2^2)))^2}{4 (2 + 7 n_1 + 3 n_1^2)^2 (2 + n_2)^2 (n_1 + 3 n_1 n_2 + M (1 + 3 n_2 + 2 n_2^2 - n_1 (1 + 3 n_2)))^2}$	
Valor esperado de la distribución STSP-BP ₂ cuando $n_1=n_2$	(III.136)
$\frac{-6 M n^3 (1 + 3 n) - n (2 + 13 n + 21 n^2) + M^2 (-2 - 11 n - 18 n^2 - 5 n^3 + 6 n^4)}{2 (2 + 7 n + 3 n^2) (-n (1 + 3 n) + M (-1 - 2 n + n^2))}$	
Varianza de la distribución STSP-BP ₂ cuando $n_1=n_2$	(III.137)
$\left((1+2n) \left(n^2 (1+3n)^2 (12+72n+103n^2+41n^3) + M^4 (-1-2n+n^2)^2 (12+72n+103n^2+41n^3) - 4Mn(1+3n)^2 (-12-60n-45n^2+31n^3+26n^4) + 4M^3n \right. \right.$ $\left. (12+132n+523n^2+880n^3+504n^4-104n^5-123n^6) + 2M^2n(-36-396n-1549n^2-2438n^3-890n^4+974n^5+591n^6) \right) / \left(4(9+9n+2n^2)(2+7n+3n^2)^2(M+n+2Mn+3n^2-Mn^2)^2 \right)$	

$$\left(\frac{M^5 (1 + nl) (1 + 2nl) (5 + 3nl) (1 + n2) (1 + 2n2)}{(5 + nl) (5 + 2nl) (1 + 3nl) (M (1 + n2) (1 + 2n2) - (-1 + M) nl (1 + 3n2))} + \right. \\
 \left. \left(1 + \frac{2 (-1 + M) (1 + 2n2) (2 + 3n2)}{2 + 7n2 + 3n2^2} + \frac{2 (-1 + M)^2 (1 + n2) (1 + 2n2) (4 + 3n2)}{8 + 30n2 + 19n2^2 + 3n2^3} + \frac{18 (-1 + M)^2 (1 + n2)^2 (1 + 2n2)}{9 + 36n2 + 29n2^2 + 6n2^3} + \frac{(-1 + M)^4 (1 + n2) (1 + 2n2) (5 + 3n2)}{25 + 90n2 + 47n2^2 + 6n2^3} \right) \right. \\
 \left. \left(1 - \frac{M (1 + n2) (1 + 2n2)}{M (1 + n2) (1 + 2n2) - (-1 + M) nl (1 + 3n2)} \right) - \right. \\
 \left. \frac{3 (6Mnl (2 + 7nl + 3nl^2) n2^2 + nl (2 + 7nl + 3nl^2) (2 + 7n2) + M^2 (1 + 2n2) (-3nl^2 (2 + 3n2) + 2 (2 + 3n2 + n2^2) + nl^2 (-2 - 3n2 + 6n2^2) + nl (10 + 15n2 + 7n2^2)))^4}{16 (2 + 7nl + 3nl^2)^4 (2 + n2)^4 (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))^4} + \right. \\
 \left. \left(3 (6Mnl (2 + 7nl + 3nl^2) n2^2 + nl (2 + 7nl + 3nl^2) (2 + 7n2) + M^2 (1 + 2n2) (-3nl^2 (2 + 3n2) + 2 (2 + 3n2 + n2^2) + nl^2 (-2 - 3n2 + 6n2^2) + nl (10 + 15n2 + 7n2^2)))^2 \right. \right. \\
 \left. \left(\frac{3M^2 (1 + nl)^2 (1 + 2nl) (1 + n2) (1 + 2n2)}{(3 + nl) (3 + 2nl) (1 + 3nl) (M (1 + n2) (1 + 2n2) - (-1 + M) nl (1 + 3n2))} - \frac{(-1 + M) nl (3M^2 (1 + n2)^2 (2 + 5n2 + 2n2^2) + 3 (2 + 9n2 + 5n2^2) + M (6 + 27n2 + 37n2^2 + 14n2^3))}{(2 + n2) (9 + 9n2 + 2n2^2) (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))} \right) \right) / \\
 \left. \left(2 (2 + 7nl + 3nl^2)^2 (2 + n2)^2 (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))^2 \right) + \right. \\
 \left. \left(2 (6Mnl (2 + 7nl + 3nl^2) n2^2 + nl (2 + 7nl + 3nl^2) (2 + 7n2) + M^2 (1 + 2n2) (-3nl^2 (2 + 3n2) + 2 (2 + 3n2 + n2^2) + nl^2 (-2 - 3n2 + 6n2^2) + nl (10 + 15n2 + 7n2^2))) \right. \right. \\
 \left. \left(\frac{M^4 (1 + nl) (1 + 2nl) (4 + 3nl) (1 + n2) (1 + 2n2)}{(4 + nl) (4 + 2nl) (1 + 3nl) (M (1 + n2) (1 + 2n2) + (1 - M) nl (1 + 3n2))} - \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{(-1 + M) nl (36 + 171n2 + 93n2^2 + 9M (4 + 19n2 + 27n2^2 + 10n2^3) + 3M^2 (12 + 57n2 + 94n2^2 + 63n2^3 + 14n2^4) + M^3 (36 + 171n2 + 296n2^2 + 237n2^3 + 88n2^4 + 12n2^5))}{2 (2 + n2) (4 + n2) (9 + 9n2 + 2n2^2) (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))} \right) \right) / \\
 \left. \left((2 + 7nl + 3nl^2) (2 + n2) (-nl (1 + 3n2) + M (-1 + nl - 3n2 + 3nl n2 - 2n2^2)) \right) \right) / \\
 \left(- \frac{3M^2 (1 + nl)^2 (1 + 2nl) (1 + n2) (1 + 2n2)}{(3 + nl) (3 + 2nl) (1 + 3nl) (M (1 + n2) (1 + 2n2) - (-1 + M) nl (1 + 3n2))} + \frac{(-1 + M) nl (3M^2 (1 + n2)^2 (2 + 5n2 + 2n2^2) + 3 (2 + 9n2 + 5n2^2) + M (6 + 27n2 + 37n2^2 + 14n2^3))}{(2 + n2) (9 + 9n2 + 2n2^2) (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))} + \right. \\
 \left. \frac{(6Mnl (2 + 7nl + 3nl^2) n2^2 + nl (2 + 7nl + 3nl^2) (2 + 7n2) + M^2 (1 + 2n2) (-3nl^2 (2 + 3n2) + 2 (2 + 3n2 + n2^2) + nl^2 (-2 - 3n2 + 6n2^2) + nl (10 + 15n2 + 7n2^2)))^2}{4 (2 + 7nl + 3nl^2)^2 (2 + n2)^2 (nl + 3nl n2 + M (1 + 3n2 + 2n2^2 - nl (1 + 3n2)))^2} \right)$$

Valor esperado de la distribución SBP-TSP ₂ cuando $n_1=n_2$	(III.152)
$\frac{2 + 7n + 6Mn^2}{4 + 14n + 6n^2}$	
Varianza de la distribución SBP-TSP ₂ cuando $n_1=n_2$	(III.153)
$\frac{12 + 96n + (247 - 40M + 40M^2)n^2 + (247 - 244M + 244M^2)n^3 + 2(41 - 74M + 74M^2)n^4}{4(9 + 9n + 2n^2)(2 + 7n + 3n^2)^2}$	
Coeficiente de curtosis de la distribución SBP-TSP ₂	(III.154)

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{M^5 (1+n1) (1+2n1) (5+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(5+n1) (5+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \right. \\
& \left(1 - \frac{4 (1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} + \frac{6 (1-M)^2 (1+n2) (1+2n2) (3+3n2)}{(3+n2) (3+2n2) (1+3n2)} - \frac{4 (1-M)^3 (1+n2) (1+2n2) (4+3n2)}{(4+n2) (4+2n2) (1+3n2)} + \frac{(1-M)^4 (1+n2) (1+2n2) (5+3n2)}{(5+n2) (5+2n2) (1+3n2)} \right) \\
& \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) - 3 \left(\frac{M^2 (1+n1) (1+2n1) (2+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(2+n1) (2+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right)^4 + \\
& 6 \left(\frac{M^2 (1+n1) (1+2n1) (2+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(2+n1) (2+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \left(1 - \frac{(1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} \right) \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right)^2 \left(\frac{M^3 (1+n1) (1+2n1) (3+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(3+n1) (3+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{2 (1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} + \frac{(1-M)^2 (1+n2) (1+2n2) (3+3n2)}{(3+n2) (3+2n2) (1+3n2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right) - \\
& 4 \left(\frac{M^2 (1+n1) (1+2n1) (2+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(2+n1) (2+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right) \\
& \left(\frac{M^4 (1+n1) (1+2n1) (4+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(4+n1) (4+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \left(1 - \frac{3 (1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{3 (1-M)^2 (1+n2) (1+2n2) (3+3n2)}{(3+n2) (3+2n2) (1+3n2)} - \frac{(1-M)^3 (1+n2) (1+2n2) (4+3n2)}{(4+n2) (4+2n2) (1+3n2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right) \Bigg/ \\
& \left(\frac{M^3 (1+n1) (1+2n1) (3+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(3+n1) (3+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \left(1 - \frac{2 (1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} + \frac{(1-M)^2 (1+n2) (1+2n2) (3+3n2)}{(3+n2) (3+2n2) (1+3n2)} \right) \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) - \left(\frac{M^2 (1+n1) (1+2n1) (2+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{(2+n1) (2+2n1) (M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2))} + \right. \right. \\
& \left. \left. \left(1 - \frac{(1-M) (1+n2) (1+2n2) (2+3n2)}{(2+n2) (2+2n2) (1+3n2)} \right) \left(1 - \frac{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2)}{M (1+3n1) (1+n2) (1+2n2) + (1-M) (1+n1) (1+2n1) (1+3n2)} \right) \right) \right)^2
\end{aligned}$$

$$F(I_1, I_2) = \begin{cases} M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \left[1 + \alpha \left(1 - M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \right) \left(1 - M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \right) \right], & 0 < I_1 < M_1; 0 < I_2 < M_2 \\ \left[1 - (1 - M_1) \left(\frac{1 - I_1}{1 - M_1} \right)^{n_1} \right] M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \left[1 + \alpha (1 - M_1) \left(\frac{1 - I_1}{1 - M_1} \right)^{n_1} \left(1 - M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \right) \right], & M_1 < I_1 < 1; 0 < I_2 < M_2 \\ M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \left[1 - (1 - M_2) \left(\frac{1 - I_2}{1 - M_2} \right)^{n_2} \right] \left[1 + \alpha \left(1 - M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \right) (1 - M_2) \left(\frac{1 - I_2}{1 - M_2} \right)^{n_2} \right], & 0 < I_1 < M_1; M_2 < I_2 < 1 \\ \left[1 - (1 - M_1) \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \right] \left[1 - (1 - M_2) \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \right] \left[1 + \alpha (1 - M_1) \left(\frac{1 - I_1}{1 - M_1} \right)^{n_1} (1 - M_2) \left(\frac{1 - I_2}{1 - M_2} \right)^{n_2} \right], & M_1 < I_1 < 1; M_2 < I_2 < 1 \end{cases} \tag{IV.23}$$

Función de distribución conjunta de la familia FGM con marginales STSP

$$f(I_1, I_2) = \begin{cases} n_1 n_2 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2-1} \left[1 + \alpha \left(1 - 2M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \right) \left(1 - 2M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \right) \right], \\ \quad 0 < I_1 < M_1; 0 < I_2 < M_2 \\ \\ n_1 n_2 \left(\frac{1-I_1}{1-M_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2-1} \left[1 + \alpha \left(-1 + 2(1-M_1) \left(\frac{1-I_1}{1-M_1} \right)^{n_1} \right) \left(1 - 2M_2 \left(\frac{I_2}{M_2} \right)^{n_2} \right) \right], \\ \quad M_1 < I_1 < 1; 0 < I_2 < M_2 \\ \\ n_1 n_2 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{1-I_2}{1-M_2} \right)^{n_2-1} \left[1 + \alpha \left(1 - 2M_1 \left(\frac{I_1}{M_1} \right)^{n_1} \right) \left(-1 + 2(1-M_2) \left(\frac{1-I_2}{1-M_2} \right)^{n_2} \right) \right], \\ \quad 0 < I_1 < M_1; M_2 < I_2 < 1 \\ \\ n_1 n_2 \left(\frac{1-I_1}{1-M_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{1-I_2}{1-M_2} \right)^{n_2-1} \left[1 + \alpha \left(-1 + 2(1-M_1) \left(\frac{1-I_1}{1-M_1} \right)^{n_1} \right) \left(-1 + 2(1-M_2) \left(\frac{1-I_2}{1-M_2} \right)^{n_2} \right) \right], \\ \quad M_1 < I_1 < 1; M_2 < I_2 < 1 \end{cases} \tag{IV.24}$$

Función de densidad conjunta de la familia FGM con marginales STSP

$$F(I_1, I_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} \frac{I_1^2 I_2^2 (I_1 - 3M_1)(I_2 - 3M_2)}{M_1^2 M_2^2} \right) \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \frac{I_1^2 (I_1 - 3M_1)}{M_1^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{I_2^2 (I_2 - 3M_2)}{M_2^2} \right) \right], \\ \quad \text{si } 0 \leq I_1 \leq M_1; 0 \leq I_2 \leq M \\ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(I_1 - 1)^2 (I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{I_2^2 (I_2 - 3M_2)}{M_2^2} \right) \left[1 + \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{(I_1 - 1)^2 (I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{I_2^2 (I_2 - 3M_2)}{M_2^2} \right) \right], \\ \quad \text{si } M_1 \leq I_1 \leq 1; 0 \leq I_2 \leq M_2 \\ \left(-\frac{1}{2} \frac{I_1^2 (I_1 - 3M_1)}{M_1^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(I_2 - 1)^2 (I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \frac{I_1^2 (I_1 - 3M_1)}{M_1^2} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{(I_2 - 1)^2 (I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \right], \\ \quad \text{si } 0 \leq I_1 \leq M_1; 0 \leq I_2 \leq M_2 \\ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(I_1 - 1)^2 (I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(I_2 - 1)^2 (I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \left[1 + \alpha \left(\frac{1}{2} \frac{(I_1 - 1)^2 (I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{(I_2 - 1)^2 (I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \right], \\ \quad \text{si } M_1 \leq I_1 \leq 1; M_2 \leq I_2 \leq 1 \end{cases} \tag{IV.40}$$

Función de distribución conjunta de la familia FGM con marginales biparabólicas

$$f(I_1, I_2) = \begin{cases} \left(\frac{9(I_1^2 - 2M_1 I_1)(I_2^2 - 2M_2 I_2)}{4M_1^2 M_2^2} \right) \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{I_1^2(I_1 - 3M_1)}{M_1^2} \right) \left(1 + \frac{I_2^2(I_2 - 3M_2)}{M_2^2} \right) \right], & \text{si } 0 \leq I_1 \leq M_1; 0 \leq I_2 \leq M_2 \\ \left(\frac{9(I_1^2 - 2M_1 I_1 + 2M_1 - 1)(I_2^2 - 2M_2 I_2)}{4(1 - M_1)^2 M_2^2} \right) \left[1 + \alpha \left(-1 + \frac{(I_1 - 1)^2(I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(1 + \frac{I_2^2(I_2 - 3M_2)}{M_2^2} \right) \right], & \text{si } M_1 \leq I_1 \leq 1; 0 \leq I_2 \leq M_2 \\ \left(\frac{9(I_1^2 - 2M_1 I_1)(I_2^2 - 2M_2 I_2 + 2M_2 - 1)}{4M_1^2(1 - M_2)^2} \right) \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{I_1^2(I_1 - 3M_1)}{M_1^2} \right) \left(-1 + \frac{(I_2 - 1)^2(I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \right], & \text{si } 0 \leq I_1 \leq M_1; M \leq I_2 \leq 1 \\ \left(\frac{9(I_1^2 - 2M_1 I_1 + 2M_1 - 1)(I_2^2 - 2M_2 I_2 + 2M_2 - 1)}{4(1 - M_1)^2(1 - M_2)^2} \right) \left[1 + \alpha \left(-1 + \frac{(I_1 - 1)^2(I_1 - 3M_1 + 2)}{(M_1 - 1)^2} \right) \left(-1 + \frac{(I_2 - 1)^2(I_2 - 3M_2 + 2)}{(M_2 - 1)^2} \right) \right], & \text{si } M_1 \leq I_1 \leq 1; M \leq I_2 \leq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Función de densidad conjunta de la familia FGM con marginales biparabólicas

VALOR	MEDIA	DT	ASIM.	CURTOSIS	TEST	V.C.	VALOR	MEDIA	DT	ASIM.	CURTOSIS	TEST	V.C.
F:TAL	0,00004	0,01684	-0,28958	5,16378	-0,69624	1,96	D:DCX	-0,00045	0,02193	-0,10063	4,46422	-0,74590	1,96
H:RD	-0,00039	0,01778	-0,59939	7,30350	-0,26052	1,96	H:PHIL	-0,00033	0,03070	-0,01840	4,92355	-0,30933	1,96
F:SQ@F	-0,00004	0,01981	-0,06419	5,33407	-0,08163	1,96	F:EX@F	-0,00097	0,03835	-3,26418	49,28074	-0,30628	1,96
E:TEF	-0,00019	0,02072	0,32713	6,38837	-0,41070	1,96	I:TIT	-0,00042	0,02267	-1,04951	12,98703	-0,28728	1,96
M:NOKP	-0,00101	0,03257	-0,70279	9,20807	-0,67469	1,96	F:CRFR	-0,00040	0,02020	-0,02653	5,97611	0,34628	1,96
E:SCH	-0,00019	0,02289	0,12427	5,70238	-0,49106	1,96	D:RWE	0,00006	0,01779	0,13340	4,36313	0,02361	1,96
I:ENI	0,00028	0,01636	-0,42727	5,02034	-0,25324	1,96	I:UC	-0,00019	0,01799	0,17517	9,29834	-0,23029	1,96
D:SIE	-0,00025	0,02402	0,09772	4,33684	-0,38249	1,96	F:LE	-0,00050	0,02819	-0,06752	8,04853	-0,99562	1,96
D:EOA	0,00015	0,01717	0,16967	5,61408	0,29975	1,96	E:REP	-0,00009	0,01777	0,10915	7,04017	-0,12201	1,96
F:BNP	0,00008	0,02130	-0,08655	8,17851	-1,28055	1,96	D:BAY	-0,00046	0,02603	1,32058	30,64511	-0,71724	1,96
H:ING	-0,00053	0,02986	0,06715	7,43647	0,08872	1,96	F:BSN	-0,00003	0,01282	-0,20857	9,53695	-0,45726	1,96
E:BBVA	-0,00024	0,02206	0,26058	5,34873	-0,82989	1,96	F:OR@F	-0,00028	0,01867	-0,19916	6,76546	-0,24288	1,96
D:DTE	-0,00048	0,02522	0,00435	6,26052	0,12495	1,96	E:ELE	-0,00006	0,01669	-0,18741	6,36978	-0,95654	1,96
D:DBK	-0,00032	0,02264	-0,18094	5,93387	-0,36002	1,96	E:IBE	0,00027	0,01034	-0,02428	5,21639	-0,60407	1,96
F:SGE	0,00015	0,02305	0,02384	7,17115	0,69686	1,96	D:MUV2	-0,00129	0,02738	-0,39872	8,25989	0,22511	1,96
F:FTEL	-0,00067	0,03507	0,36062	7,52921	-0,22336	1,96	F:AIR	0,00008	0,01773	-0,04245	6,77224	-0,91844	1,96
D:ALV	-0,00117	0,02675	-0,02771	5,60018	-0,54649	1,96	F:GOB	0,00016	0,02336	-1,13005	20,58099	0,21383	1,96
H:AAB	-0,00014	0,02427	-0,00437	7,99310	0,73159	1,96	F:LVMH	-0,00001	0,02319	0,44732	7,91534	-0,62349	1,96
F:MIDI	-0,00048	0,03022	0,11239	6,40958	-0,45043	1,96	F:CRDA	0,00031	0,01978	-0,12823	6,74679	0,81118	1,96
H:UNIL	-0,00024	0,01531	-0,74518	9,09164	-0,00522	1,96	H:AGN	-0,00111	0,03246	-0,16493	7,33158	-1,14567	1,96
D:BAS	0,00017	0,01847	0,21324	6,51074	0,30309	1,96	I:SPI	-0,00032	0,02332	0,16129	5,25719	-0,64417	1,96
I:G	-0,00037	0,01799	-0,34540	6,61163	-0,35917	1,96	F:LFG	-0,00024	0,02036	0,06660	5,85157	-0,48565	1,96
H:AMEV	-0,00019	0,02587	0,45167	10,98564	-0,63997	1,96	F:CGE	-0,00092	0,04051	0,34814	11,03274	-0,94769	1,96
D:SAP	-0,00015	0,02902	0,67135	9,75281	-0,90635	1,96	H:AH	-0,00162	0,04469	10,66086	245,80787	0,36325	1,96
I:ENEL	0,00003	0,01563	-0,97273	10,16791	0,58330	1,96	I:TIM	-0,00032	0,01852	0,02277	7,68277	-1,00595	1,96

Cuadro V.8. 1000 datos

VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTOSIS	TEST.	V.C.	VALOR	MED	D.T.	ASIM.	CURTOSIS	TEST.	V.C..
F:TAL	0,00054	0,01047	-0,03383	3,27771	-0,18269	1,96	D:DCX	0,00041	0,01430	0,20345	3,92454	0,47127	1,96
H:RD	0,00027	0,01051	-1,09017	9,80353	0,12066	1,96	H:PHIL	0,00041	0,01781	0,24546	4,04980	-0,05259	1,96
F:SQ@F	0,00058	0,01407	-0,49864	6,16476	0,25570	1,96	F:EX@F	0,00081	0,01562	0,08791	4,04080	0,24394	1,96
E:TEF	0,00078	0,01104	-0,09046	4,19707	-0,10163	1,96	I:TIT	0,00043	0,01199	-0,09955	4,90715	0,73479	1,96
M:NOKP	0,00002	0,02242	-1,93611	21,01912	-1,46288	1,96	F:CRFR	-0,00003	0,01256	0,09263	5,39306	0,34387	1,96
E:SCH	0,00068	0,01222	-0,04662	4,00970	1,16816	1,96	D:RWE	0,00136	0,01346	0,00433	3,59213	0,13133	1,96
I:ENI	0,00075	0,01039	-0,38225	5,19528	0,06543	1,96	I:UC	0,00022	0,00863	-0,20227	6,18023	0,78469	1,96
D:SIE	0,00066	0,01422	-0,11059	4,38714	-0,25260	1,96	F:LE	0,00071	0,01497	-0,28845	6,66907	-0,63468	1,96
D:EOA	0,00093	0,01138	-0,25091	4,21713	0,18114	1,96	E:REP	0,00081	0,00916	-0,20702	3,70050	-0,27643	1,96
F:BNP	0,00044	0,01242	0,05228	3,42086	-0,98845	1,96	D:BAY	0,00092	0,01603	0,11598	4,79019	-0,35501	1,96
H:ING	0,00075	0,01461	0,16128	4,33139	0,14958	1,96	F:BSN	0,00046	0,00921	0,33698	5,11605	-1,02295	1,96
E:BBVA	0,00086	0,01232	0,12002	4,21490	1,24179	1,96	F:OR@F	-0,00016	0,01164	-0,19056	4,15310	-0,08403	1,96
D:DTE	0,00037	0,01187	0,03163	4,16122	0,53417	1,96	E:ELE	0,00055	0,01010	-0,84198	8,01826	-0,97654	1,96
D:DBK	0,00028	0,01409	0,42687	4,85142	-0,00386	1,96	E:IBE	0,00066	0,00773	-0,22171	4,52251	0,03326	1,96
F:SGE	0,00070	0,01291	0,13582	4,05007	1,07696	1,96	D:MUV2	-0,00007	0,01610	0,20799	4,57940	0,39584	1,96
F:FTEL	0,00037	0,01491	0,01653	3,54537	0,34932	1,96	F:AIR	0,00037	0,01139	0,03329	3,88531	-0,67614	1,96
D:ALV	0,00063	0,01683	0,14966	3,73715	-0,35779	1,96	F:GOB	0,00065	0,01395	-0,05514	3,77232	-0,15330	1,96
H:AAB	0,00021	0,01122	0,02904	4,24292	0,27380	1,96	F:LVMH	0,00052	0,01249	0,15367	3,34198	0,58176	1,96
F:MIDI	0,00072	0,01480	-0,11665	3,51111	-0,59168	1,96	F:CRDA	0,00041	0,01305	-0,03232	5,87159	0,65819	1,96
H:UNIL	0,00013	0,01174	-2,43704	21,83042	1,12945	1,96	H:AGN	0,00028	0,01805	0,06189	5,28123	0,06145	1,96
D:BAS	0,00075	0,01241	0,18004	4,13237	0,77204	1,96	I:SPI	0,00064	0,01461	-0,17381	3,54709	-0,48525	1,96
I:G	0,00031	0,00911	-0,05704	5,76474	0,71534	1,96	F:LFG	0,00061	0,01455	0,22723	4,34220	-0,39045	1,96
H:AMEV	0,00082	0,01215	-0,15146	4,70811	-0,09080	1,96	F:CGE	0,00031	0,02318	-0,35656	7,12388	-1,37563	1,96
D:SAP	0,00043	0,01818	0,89455	9,73122	0,25112	1,96	H:AH	-0,00003	0,02195	0,17683	4,68753	-0,25968	1,96
I:ENEL	0,00047	0,01040	-1,09651	11,70514	1,31222	1,96	I:TIM	0,00013	0,01042	-0,74263	15,17412	-0,25496	1,96

Cuadro V.9. 500 datos

VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTO SIS	TEST	V.C.	VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTO SIS	TEST	V.C.
F:TAL	0,00047	0,00860	-0,23836	3,68121	-0,05068	1,96	D:DCX	-0,00049	0,01104	-0,14631	3,76713	0,09436	1,96
H:RD	0,00052	0,00885	-0,05653	3,88834	0,01005	1,96	H:PHIL	-0,00024	0,01326	0,04111	3,88020	0,23678	1,96
F:SQ@F	0,00115	0,01148	0,14401	3,26175	0,00830	1,96	F:EX@F	0,00049	0,01189	-0,20592	3,75173	-0,07165	1,96
E:TEF	0,00064	0,00907	0,19451	4,84604	-0,32241	1,96	I:TIT	0,00031	0,01029	-0,55209	8,50775	0,34032	1,96
M:NOKP	0,00093	0,01695	-1,31253	15,52218	0,50895	1,96	F:CRFR	0,00005	0,01086	0,30161	5,75276	0,27173	1,96
E:SCH	0,00029	0,00976	-0,31285	4,53057	0,51803	1,96	D:RWE	0,00124	0,01176	-0,12584	3,92715	0,98208	1,96
I:ENI	0,00078	0,00968	-0,23287	4,33890	-0,65705	1,96	I:UC	0,00048	0,00791	0,01810	7,45106	1,19631	1,96
D:SIE	0,00005	0,01082	0,16670	4,15789	-0,32852	1,96	F:LE	0,00121	0,01120	-0,16861	4,88143	0,00175	1,96
D:EOA	0,00082	0,00973	-0,38967	4,52368	0,02709	1,96	E:REP	0,00061	0,00845	-0,17421	3,92007	-0,56443	1,96
F:BNP	0,00030	0,01009	0,13697	3,70317	-1,18479	1,96	D:BAY	0,00083	0,01206	0,43855	3,68004	0,29226	1,96
H:ING	0,00067	0,01072	-0,34351	4,58673	1,05676	1,96	F:BSN	0,00016	0,00880	0,29421	4,01970	-1,18129	1,96
E:BBVA	0,00065	0,00904	0,22183	3,19606	-0,60812	1,96	F:OR@F	-0,00038	0,00977	-0,90513	5,91251	-0,16169	1,96
D:DTE	0,00040	0,01010	0,31464	5,72835	1,24857	1,96	E:ELE	0,00076	0,00813	-0,35540	3,66832	-0,51376	1,96
D:DBK	-0,00017	0,01123	0,15692	3,22548	-0,55820	1,96	E:IBE	0,00095	0,00693	-0,13515	5,49304	-0,43687	1,96
F:SGE	0,00050	0,00973	-0,15346	4,13248	0,98303	1,96	D:MUV2	0,00006	0,01140	0,24797	3,58578	-0,22245	1,96
F:FTEL	0,00070	0,01206	0,21865	3,14680	-0,04194	1,96	F:AIR	0,00025	0,00900	-0,11431	3,99747	-0,76277	1,96
D:ALV	0,00043	0,01199	0,02998	2,66385	-0,22630	1,96	F:GOB	0,00045	0,01040	-0,10994	3,67209	-0,28222	1,96
H:AAB	0,00033	0,00926	-0,24769	6,05106	0,43252	1,96	F:LVMH	0,00000	0,01096	0,04047	3,20087	-0,24641	1,96
F:MIDI	0,00056	0,01247	-0,24473	3,07191	0,22979	1,96	F:CRDA	0,00013	0,01125	-0,79273	6,95885	0,47241	1,96
H:UNIL	0,00001	0,00885	-0,57722	6,22113	0,18065	1,96	H:AGN	0,00009	0,01276	0,02839	3,42673	0,02398	1,96
D:BAS	0,00092	0,01006	0,12080	3,32559	0,51376	1,96	I:SPI	0,00079	0,01139	-0,11025	4,00920	-0,28047	1,96
I:G	0,00054	0,00627	0,13030	3,64262	-0,02359	1,96	F:LFG	0,00016	0,01070	-0,23086	4,18894	-0,60506	1,96
H:AMEV	0,00099	0,00872	-0,15000	3,54572	-0,47968	1,96	F:CGE	-0,00095	0,02026	-1,37856	14,79009	-0,44692	1,96
D:SAP	0,00005	0,01393	-0,10721	5,26175	0,05417	1,96	H:AH	-0,00010	0,01618	0,01363	4,87342	-0,36959	1,96
I:ENEL	0,00052	0,00954	-0,20177	4,85067	0,89750	1,96	I:TIM	0,00019	0,01093	-1,58645	22,37707	0,24041	1,96

Cuadro V.10. 250 datos

VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTOSIS	TEST.	V.C.	VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTOSIS	TEST.	V.C.
F:TAL	0,00126	0,01711	-0,014	3,875	-0,107	1,96	D:DCX	-0,00054	0,02070	0,014	4,792	0,160	1,96
H:RD	0,00046	0,01463	0,191	5,723	-1,130	1,96	H:PHIL	0,00140	0,02531	-0,091	5,767	-0,085	1,96
F:SQ@F	0,00073	0,01860	0,132	4,878	0,775	1,96	F:EX@F	-0,00118	0,05696	-20,586	510,731	0,411	1,96
E:TEF	0,00074	0,01889	0,573	7,064	0,832	1,96	I:TIT	0,00060	0,02709	0,381	8,325	-0,379	1,96
M:NOKP	-0,00008	0,03236	-0,872	9,730	0,332	1,96	F:CRFR	0,00061	0,01820	0,150	5,300	-0,390	1,96
E:SCH	0,00039	0,02042	0,284	8,626	0,581	1,96	D:RWE	0,00040	0,01740	0,326	7,896	0,502	1,96
I:ENI	0,00008	0,01762	-0,171	4,882	0,165	1,96	I:UC	-0,00022	0,02139	0,595	6,787	-0,875	1,96
D:SIE	0,00005	0,02121	0,448	8,962	-0,013	1,96	F:LE	0,00021	0,01932	0,960	11,012	-0,077	1,96
D:EOA	0,00069	0,01669	-0,185	7,072	-0,045	1,96	E:REP	0,00061	0,01554	0,088	4,583	0,861	1,96
F:BNP	-0,00120	0,02175	-0,524	6,149	-1,253	1,96	D:BAY	0,00082	0,01764	0,256	5,692	-0,873	1,96
H:ING	0,00145	0,02172	0,166	11,692	0,308	1,96	F:BSN	0,00041	0,01488	-0,140	6,215	0,648	1,96
E:BBVA	0,00017	0,01873	0,472	6,004	-0,240	1,96	F:OR@F	0,00009	0,01979	-0,129	5,417	0,423	1,96
D:DTE	-0,00007	0,02677	-0,138	4,050	0,635	1,96	E:ELE	0,00045	0,01554	0,094	4,234	0,468	1,96
D:DBK	0,00061	0,01885	-0,231	6,391	-0,379	1,96	E:IBE	0,00002	0,01539	0,221	7,563	-0,431	1,96
F:SGE	0,00009	0,02035	0,003	6,392	0,022	1,96	D:MUV2	-0,00042	0,02087	0,547	11,161	-0,002	1,96
F:FTEL	0,00198	0,03360	0,928	8,610	0,606	1,96	F:AIR	0,00060	0,01708	0,265	5,708	-1,087	1,96
D:ALV	0,00002	0,02139	0,226	8,028	-0,232	1,96	F:GOB	0,00014	0,02192	-2,404	29,287	0,978	1,96
H:AAB	-0,00026	0,01815	0,089	6,827	-0,449	1,96	F:LVMH	-0,00013	0,01977	-0,099	6,596	-0,166	1,96
F:MIDI	0,00005	0,02254	-0,310	6,318	-0,407	1,96	F:CRDA	0,00092	0,02183	0,309	7,464	0,889	1,96
H:UNIL	0,00079	0,01557	0,018	12,877	-0,325	1,96	H:AGN	0,00104	0,01984	0,014	5,769	-0,721	1,96
D:BAS	-0,00020	0,01645	0,287	6,658	0,428	1,96	I:SPI	0,00008	0,02234	0,448	5,197	0,974	1,96
I:G	0,00059	0,01734	0,273	4,958	0,290	1,96	F:LFG	-0,00009	0,02071	-0,168	6,398	-0,031	1,96
H:AMEV	0,00166	0,02102	0,529	10,260	1,124	1,96	F:CGE	0,00109	0,02809	0,201	6,659	0,807	1,96
D:SAP	0,00078	0,02701	0,268	7,346	0,901	1,96	H:AH	0,00147	0,02291	1,879	22,010	-0,868	1,96
I:ENEL	0,00012	0,01616	-0,517	6,291	0,429	1,96	I:TIM	0,00041	0,02274	0,222	6,200	0,219	1,96

Cuadro V.11. Datos semanales

	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTOS IS	TEST	V.C	VALOR	MEDIA	D.T.	ASIM.	CURTOS IS	TEST	V.C
F:TAL	0,00055	0,01814	-0,115	4,979	-0,025	1,96	D:DCX	-0,00045	0,02102	-0,034	4,281	0,365	1,96
H:RD	0,00031	0,01485	-0,264	6,860	0,739	1,96	H:PHIL	0,00059	0,02685	-0,237	6,833	1,857	1,96
F:SQ@F	0,00063	0,02023	-0,024	5,426	1,747	1,96	F:EX@F	-0,00039	0,03434	-20,108	794,811	-0,072	1,96
E:TEF	0,00064	0,01947	0,141	5,614	2,073	1,96	I:TIT	-0,00001	0,02659	-0,175	9,421	-0,678	1,96
M:NOK P	0,00135	0,03262	-0,307	7,975	3,215	1,96	F:CRFR	0,00048	0,01865	-0,082	6,202	1,838	1,96
E:SCH	0,00044	0,02032	-0,077	8,293	1,742	1,96	D:RWE	0,00024	0,01678	0,276	7,114	1,006	1,96
I:ENI	0,00055	0,01752	-0,015	4,544	-0,373	1,96	I:UC	0,00040	0,02236	0,829	11,656	-0,176	1,96
D:SIE	0,00029	0,01995	0,075	7,000	-0,384	1,96	F:LE	0,00009	0,02044	0,030	9,690	0,226	1,96
D:EOA	0,00041	0,01649	0,044	6,466	0,633	1,96	E:REP	0,00042	0,01586	0,223	7,045	1,605	1,96
F:BNP	0,00032	0,02209	0,125	6,616	0,312	1,96	D:BAY	0,00028	0,01920	0,842	29,957	1,315	1,96
H:ING	0,00046	0,02100	-0,119	11,000	2,396	1,96	F:BSN	0,00029	0,01516	-0,019	6,815	0,766	1,96
E:BBVA	0,00054	0,01955	-0,007	8,838	1,725	1,96	F:OR@F	0,00058	0,01952	-0,027	5,114	0,164	1,96
D:DTE	- 0,00006	0,02706	0,074	5,117	-0,515	1,96	E:ELE	0,00050	0,01638	-0,099	5,869	2,079	1,96
D:DBK	0,00021	0,01884	-0,135	7,439	1,037	1,96	E:IBE	0,00046	0,01446	-0,002	6,928	1,732	1,96
F:SGE	0,00047	0,02120	0,032	6,993	1,525	1,96	D:MUV 2	0,00018	0,02141	-0,089	9,850	0,441	1,96
F:FTEL	- 0,00002	0,03352	0,416	6,912	-0,128	1,96	F:AIR	0,00029	0,01713	0,116	5,535	0,950	1,96
D:ALV	0,00003	0,02060	-0,048	8,733	0,181	1,96	F:GOB	0,00033	0,02039	-0,467	12,653	0,979	1,96
H:AAB	0,00046	0,01867	-0,100	8,896	2,316	1,96	F:LVM H	0,00034	0,02047	0,274	6,592	0,182	1,96
F:MIDI	0,00034	0,02253	0,036	7,617	1,277	1,96	F:CRDA	0,00031	0,01978	-0,128	6,747	0,811	1,96
H:UNIL	0,00032	0,01471	-0,130	9,849	1,810	1,96	H:AGN	0,00040	0,02202	-0,179	10,893	1,769	1,96
D:BAS	0,00046	0,01673	-0,028	5,841	2,020	1,96	I:SPI	0,00018	0,02224	0,178	5,123	-0,489	1,96
I:G	0,00023	0,01759	0,117	11,384	0,324	1,96	F:LFG	0,00018	0,01995	0,016	4,850	0,234	1,96
H:AME V	0,00047	0,01971	0,422	12,174	2,127	1,96	F:CGE	-0,00017	0,03075	-0,897	27,996	-0,206	1,96
D:SAP	0,00089	0,02856	0,085	11,269	2,495	1,96	H:AH	0,00010	0,02694	-13,294	508,437	1,009	1,96
I:ENEL	- 0,00007	0,01601	-0,540	8,031	-0,039	1,96	I:TIM	0,00060	0,02197	0,222	5,201	0,614	1,96

Cuadro V.12. Todos los datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
TAL	0,036	0,048	0,040	0,017	0,019	0,054	0,040	0,197	0,056	0,036	0,036
RD	0,029	0,023	0,025	0,021	0,022	0,074	0,023	0,235	0,050	0,029	0,029
SQ@F	0,027	0,030	0,027	0,016	0,015	0,057	0,027	0,997	0,055	0,026	0,035
TEF	0,027	0,027	0,026	0,031	0,032	0,071	0,026	0,403	0,053	0,024	0,023
NOKP	0,028	0,023	0,023	0,020	0,024	0,066	0,023	0,280	0,054	0,028	0,028
SCH	0,020	0,020	0,020	0,030	0,031	0,077	0,020	0,228	0,045	0,023	0,023
ENI	0,024	0,038	0,029	0,019	0,017	0,066	0,029	0,196	0,056	0,028	0,028
SIE	0,030	0,029	0,022	0,015	0,016	0,048	0,022	0,347	0,054	0,030	0,030
EOA	0,021	0,022	0,021	0,023	0,024	0,065	0,021	0,208	0,048	0,028	0,022
BNP	0,034	0,029	0,040	0,030	0,029	0,080	0,040	0,325	0,047	0,034	0,034
ING	0,029	0,046	0,029	0,042	0,044	0,102	0,029	0,434	0,036	0,029	0,029
BBVA	0,023	0,024	0,024	0,021	0,021	0,067	0,024	0,250	0,048	0,020	0,036
DTE	0,018	0,030	0,017	0,034	0,033	0,083	0,017	0,292	0,044	0,020	0,020
DBK	0,028	0,032	0,029	0,015	0,015	0,059	0,029	0,344	0,053	0,024	0,024
SGE	0,029	0,028	0,031	0,032	0,033	0,084	0,031	0,294	0,046	0,022	0,023
FTEL	0,026	0,039	0,024	0,038	0,039	0,094	0,024	0,132	0,042	0,026	0,026
ALV	0,027	0,039	0,026	0,025	0,023	0,074	0,028	0,262	0,049	0,031	0,031
AAB	0,034	0,040	0,039	0,049	0,048	0,100	0,039	0,499	0,036	0,034	0,034
MIDI	0,021	0,030	0,025	0,031	0,031	0,080	0,025	0,092	0,042	0,021	0,021
UNIL	0,029	0,027	0,029	0,017	0,018	0,069	0,029	0,230	0,058	0,033	0,033
BAS	0,026	0,028	0,026	0,024	0,019	0,064	0,026	0,396	0,050	0,029	0,029

Cuadro V.14. Ajustes usando 1000 datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
G	0,025	0,033	0,025	0,038	0,038	0,096	0,025	0,228	0,039	0,024	0,024
MEV	0,037	0,057	0,046	0,049	0,051	0,111	0,046	0,133	0,036	0,037	0,037
SAP	0,022	0,027	0,023	0,029	0,028	0,084	0,023	0,106	0,054	0,022	0,022
ENEL	0,039	0,039	0,039	0,033	0,033	0,075	0,039	0,218	0,052	0,038	0,038
DCX	0,035	0,044	0,037	0,017	0,017	0,048	0,037	0,191	0,055	0,031	0,031
PHIL	0,018	0,021	0,018	0,025	0,026	0,067	0,018	0,227	0,049	0,020	0,018
EX@F	0,032	0,066	0,030	0,047	0,045	0,119	0,031	0,508	0,039	0,030	0,032
TIT	0,065	0,065	0,065	0,064	0,063	0,088	0,065	0,313	0,062	0,072	0,072
CRFR	0,022	0,029	0,026	0,016	0,016	0,063	0,023	0,450	0,050	0,022	0,022
RWE	0,034	0,043	0,034	0,024	0,024	0,042	0,034	0,163	0,058	0,033	0,033
UC	0,051	0,051	0,051	0,047	0,047	0,101	0,051	0,346	0,046	0,047	0,047
LE	0,035	0,053	0,044	0,051	0,052	0,109	0,044	0,651	0,036	0,035	0,035
REP	0,023	0,027	0,024	0,027	0,026	0,076	0,024	0,325	0,046	0,021	0,021
BAY	0,031	0,035	0,031	0,020	0,021	0,084	0,031	0,135	0,052	0,025	0,040
BSN	0,033	0,032	0,032	0,019	0,020	0,069	0,033	0,255	0,057	0,031	0,031
OR@F	0,032	0,036	0,032	0,017	0,020	0,054	0,032	0,220	0,058	0,035	0,035
ELE	0,023	0,039	0,033	0,024	0,032	0,079	0,033	0,998	0,052	0,023	0,023
IBE	0,032	0,052	0,037	0,036	0,032	0,048	0,037	0,237	0,058	0,032	0,032
MUV2	0,026	0,038	0,024	0,040	0,038	0,096	0,024	0,292	0,043	0,025	0,025
AIR	0,028	0,031	0,031	0,021	0,023	0,067	0,031	0,304	0,052	0,021	0,021
GOB	0,017	0,034	0,016	0,038	0,035	0,094	0,017	0,366	0,044	0,017	0,017
LVMH	0,042	0,042	0,042	0,026	0,024	0,078	0,042	0,999	0,055	0,042	0,042
CRDA	0,040	0,043	0,042	0,018	0,017	0,066	0,042	0,324	0,059	0,037	0,037
AGN	0,029	0,042	0,034	0,039	0,040	0,095	0,034	0,102	0,040	0,024	0,024
SPI	0,028	0,032	0,028	0,025	0,026	0,065	0,028	0,445	0,054	0,027	0,027
LFG	0,021	0,024	0,023	0,021	0,021	0,064	0,023	0,996	0,051	0,018	0,018
CGE	0,030	0,028	0,032	0,024	0,024	0,078	0,032	0,435	0,048	0,031	0,030
AH	0,024	0,091	0,024	0,034	0,036	0,149	0,024	1,000	0,044	0,026	0,026
TIM	0,063	0,063	0,063	0,049	0,048	0,086	0,063	0,323	0,047	0,047	0,058

Continuación Cuadro V.14. Ajustes usando 1000 datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
TAL	0,0465	0,0780	0,0470	0,0401	0,0378	0,0296	0,0470	0,0312	0,0713	0,0448	0,0910
RD	0,0404	0,0585	0,0360	0,0213	0,0219	0,0589	0,0363	0,3832	0,0680	0,0382	0,0382
SQ@F	0,0514	0,0590	0,0569	0,0266	0,0291	0,0511	0,0486	0,1780	0,0615	0,0420	0,0420
TEF	0,0489	0,0879	0,0481	0,0358	0,0358	0,0282	0,0481	0,2078	0,0738	0,0495	0,0643
NOKP	0,0602	0,0466	0,0651	0,0314	0,0357	0,0871	0,0641	0,3436	0,0659	0,0499	0,0613
SCH	0,0565	0,0668	0,0562	0,0296	0,0318	0,0474	0,0568	0,0721	0,0573	0,0402	0,0402
ENI	0,0408	0,0731	0,0402	0,0244	0,0252	0,0399	0,0401	0,7348	0,0661	0,0449	0,0665
SIE	0,0385	0,0616	0,0404	0,0268	0,0268	0,0408	0,0404	0,1748	0,0646	0,0370	0,0371
EOA	0,0364	0,0750	0,0357	0,0295	0,0271	0,0546	0,0361	0,1554	0,0639	0,0359	0,0411
BNP	0,0535	0,0706	0,0642	0,0364	0,0348	0,0324	0,0641	0,1471	0,0651	0,0606	0,0608
ING	0,0328	0,0429	0,0257	0,0191	0,0195	0,0559	0,0260	0,1969	0,0531	0,0236	0,0235
BBVA	0,0601	0,0720	0,0602	0,0296	0,0299	0,0404	0,0601	0,2024	0,0632	0,0479	0,0445
DTE	0,0415	0,0568	0,0458	0,0252	0,0249	0,0382	0,0458	0,1881	0,0668	0,0425	0,0415
DBK	0,0443	0,0530	0,0396	0,0369	0,0334	0,0496	0,0396	0,4739	0,0683	0,0356	0,0443
SGE	0,0346	0,0589	0,0518	0,0275	0,0283	0,0465	0,0518	0,1867	0,0602	0,0342	0,0426
FTEL	0,0588	0,0764	0,0592	0,0433	0,0448	0,0319	0,0591	0,1416	0,0769	0,0619	0,0619
ALV	0,0433	0,0575	0,0601	0,0273	0,0282	0,0411	0,0519	0,1091	0,0672	0,0549	0,0549
AAB	0,0556	0,0483	0,0403	0,0210	0,0233	0,0457	0,0404	0,2204	0,0603	0,0416	0,0416
MIDI	0,0399	0,0597	0,0450	0,0255	0,0241	0,0342	0,0446	0,1170	0,0638	0,0392	0,0393
UNIL	0,0526	0,0473	0,0543	0,0294	0,0325	0,0849	0,0543	0,0981	0,0652	0,0501	0,0501
BAS	0,0544	0,0734	0,0534	0,0380	0,0382	0,0366	0,0535	0,2303	0,0658	0,0474	0,0469

Cuadro V.15. Ajustes usando 500 datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
G	0,0351	0,0415	0,0378	0,0280	0,0234	0,0558	0,0378	0,2119	0,0589	0,0338	0,0338
MEV	0,0393	0,0788	0,0377	0,0223	0,0218	0,0523	0,0377	0,2771	0,0698	0,0389	0,0392
SAP	0,0350	0,0375	0,0381	0,0322	0,0246	0,0684	0,0379	0,3377	0,0550	0,0299	0,0298
ENEL	0,0611	0,0637	0,0611	0,0404	0,0476	0,0660	0,0611	0,9039	0,0669	0,0494	0,0494
DCX	0,0469	0,0635	0,0502	0,0363	0,0345	0,0391	0,0502	0,1903	0,0675	0,0451	0,0451
PHIL	0,0372	0,0458	0,0391	0,0308	0,0286	0,0463	0,0388	0,1795	0,0657	0,0391	0,0391
EX@F	0,0393	0,0535	0,0344	0,0158	0,0191	0,0535	0,0346	0,1892	0,0560	0,0314	0,0313
TIT	0,1034	0,1040	0,1040	0,0861	0,0840	0,0897	0,1040	0,2081	0,0891	0,0918	0,0918
CRFR	0,0419	0,0515	0,0445	0,0260	0,0266	0,0398	0,0445	0,2853	0,0679	0,0435	0,0673
RWE	0,0533	0,1068	0,0541	0,0358	0,0353	0,0310	0,0546	0,1904	0,0699	0,0614	0,0614
UC	0,0887	0,0950	0,0896	0,0680	0,0687	0,0781	0,0896	0,1750	0,0777	0,0844	0,0844
LE	0,0272	0,0645	0,0300	0,0191	0,0226	0,0688	0,0295	0,2173	0,0542	0,0303	0,0304
REP	0,0411	0,0898	0,0445	0,0275	0,0273	0,0448	0,0444	0,0464	0,0756	0,0447	0,0447
BAY	0,0489	0,0689	0,0497	0,0292	0,0294	0,0441	0,0491	0,1802	0,0681	0,0455	0,0456
BSN	0,0542	0,0655	0,0582	0,0376	0,0331	0,0507	0,0581	0,2639	0,0671	0,0605	0,0526
OR@F	0,0466	0,0628	0,0464	0,0346	0,0337	0,0301	0,0464	0,1984	0,0780	0,0481	0,0511
ELE	0,0529	0,0795	0,0559	0,0399	0,0355	0,0539	0,0558	0,5253	0,0683	0,0414	0,0414
IBE	0,0387	0,0883	0,0386	0,0244	0,0237	0,0424	0,0386	0,0643	0,0706	0,0387	0,0383
MUV2	0,0310	0,0376	0,0264	0,0161	0,0175	0,0551	0,0263	0,2581	0,0594	0,0239	0,0239
AIR	0,0454	0,0755	0,0466	0,0322	0,0292	0,0407	0,0463	0,1979	0,0664	0,0449	0,0449
GOB	0,0317	0,0641	0,0309	0,0256	0,0257	0,0612	0,0309	0,1532	0,0603	0,0318	0,0317
LVMH	0,0767	0,0942	0,0770	0,0521	0,0528	0,0306	0,0770	0,1618	0,0773	0,0684	0,0708
CRDA	0,0481	0,0661	0,0544	0,0344	0,0365	0,0371	0,0542	0,2148	0,0675	0,0478	0,0479
AGN	0,0345	0,0393	0,0337	0,0238	0,0197	0,0602	0,0336	0,9980	0,0583	0,0349	0,0457
SPI	0,0556	0,0683	0,0482	0,0266	0,0276	0,0413	0,0476	0,1263	0,0659	0,0557	0,0558
LFG	0,0464	0,0542	0,0466	0,0275	0,0259	0,0385	0,0464	0,1728	0,0660	0,0493	0,0494
CGE	0,0506	0,0548	0,0635	0,0328	0,0344	0,0493	0,0631	0,1340	0,0654	0,0516	0,0506
AH	0,0422	0,0464	0,0423	0,0232	0,0249	0,0497	0,0423	0,2433	0,0573	0,0419	0,0419
TIM	0,0800	0,0800	0,0800	0,0702	0,0713	0,0939	0,0800	0,3110	0,0782	0,1194	0,0845

Continuación Cuadro V.15. Ajustes usando 500 datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
TAL	0,0475	0,0875	0,0467	0,0342	0,0360	0,0531	0,0468	0,8390	0,0763	0,0491	0,0511
RD	0,0441	0,0699	0,0441	0,0272	0,0312	0,0568	0,0438	0,4171	0,0613	0,0452	0,0514
SQ@F	0,0620	0,0891	0,0609	0,0394	0,0447	0,0469	0,0609	0,1127	0,0724	0,0594	0,0568
TEF	0,0831	0,0874	0,0854	0,0471	0,0580	0,0419	0,0855	0,2300	0,0762	0,0821	0,0823
NOKP	0,0602	0,0604	0,0569	0,0366	0,0394	0,0725	0,0560	0,1594	0,0753	0,0529	0,0592
SCH	0,0588	0,0685	0,0592	0,0302	0,0358	0,0493	0,0592	0,3511	0,0649	0,0504	0,0858
ENI	0,0462	0,0770	0,0555	0,0366	0,0356	0,0379	0,0551	0,0466	0,0760	0,0526	0,0526
SIE	0,0525	0,0663	0,0608	0,0406	0,0400	0,0359	0,0527	0,1936	0,0743	0,0579	0,0579
EOA	0,0493	0,0783	0,0499	0,0309	0,0318	0,0596	0,0492	0,0712	0,0667	0,0480	0,0554
BNP	0,0776	0,0844	0,0946	0,0527	0,0590	0,0332	0,0943	0,3257	0,0794	0,0754	0,1187
ING	0,0533	0,0597	0,0548	0,0349	0,0369	0,0659	0,0548	0,3943	0,0595	0,0406	0,0405
BBVA	0,0886	0,0837	0,0899	0,0473	0,0518	0,0467	0,0897	0,0351	0,0779	0,0765	0,0856
DTE	0,0677	0,0583	0,0736	0,0315	0,0406	0,0544	0,0729	0,2426	0,0685	0,0504	0,0503
DBK	0,0491	0,0636	0,0493	0,0413	0,0410	0,0509	0,0493	0,0554	0,0670	0,0521	0,0521
SGE	0,0652	0,0913	0,0807	0,0431	0,0390	0,0474	0,0807	0,0769	0,0653	0,0648	0,0648
FTEL	0,0609	0,0833	0,0622	0,0492	0,0483	0,0264	0,0612	0,1300	0,0806	0,0650	0,0628
ALV	0,0760	0,0907	0,0662	0,0513	0,0502	0,0341	0,0607	0,8366	0,0833	0,0704	0,0650
AAB	0,0379	0,0549	0,0490	0,0266	0,0291	0,0482	0,0490	0,1061	0,0637	0,0438	0,0437
MIDI	0,0496	0,0809	0,0488	0,0311	0,0301	0,0389	0,0493	0,0341	0,0819	0,0474	0,0460
UNIL	0,0589	0,0667	0,0587	0,0386	0,0396	0,0432	0,0589	0,0611	0,0766	0,0583	0,0583
BAS	0,0548	0,0816	0,0446	0,0337	0,0368	0,0422	0,0477	0,0419	0,0647	0,0475	0,0442
G	0,0501	0,0788	0,0459	0,0357	0,0327	0,0362	0,0458	0,4631	0,0765	0,0490	0,0525
MEV	0,0544	0,0982	0,0630	0,0384	0,0393	0,0375	0,0554	0,4423	0,0684	0,0524	0,0525
SAP	0,0292	0,0304	0,0262	0,0302	0,0322	0,0764	0,0295	0,1956	0,0533	0,0275	0,0275
ENEL	0,0807	0,0869	0,0808	0,0489	0,0518	0,0583	0,0808	0,9195	0,0685	0,0675	0,0908

Cuadro V.16. Ajustes usando 250 datos.

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
DCX	0,0577	0,0858	0,0586	0,0484	0,0485	0,0402	0,0577	0,1668	0,0798	0,0556	0,0580
PHIL	0,0588	0,0543	0,0516	0,0258	0,0255	0,0437	0,0509	0,1778	0,0619	0,0507	0,0507
EX@F	0,0435	0,0663	0,0466	0,0282	0,0320	0,0473	0,0432	0,0743	0,0665	0,0446	0,0509
TIT	0,1159	0,1160	0,1160	0,0971	0,0990	0,1061	0,1160	0,1889	0,1037	0,1053	0,1053
CRFR	0,0457	0,0535	0,0466	0,0290	0,0318	0,0435	0,0466	0,2718	0,0732	0,0415	0,0415
RWE	0,0678	0,1000	0,0709	0,0386	0,0379	0,0429	0,0710	0,4052	0,0652	0,0570	0,0618
UC	0,1261	0,1302	0,1265	0,0855	0,0710	0,0837	0,1265	0,2172	0,0930	0,1210	0,1210
LE	0,0364	0,0947	0,0407	0,0235	0,0234	0,0538	0,0367	0,1844	0,0649	0,0365	0,0366
REP	0,0688	0,0800	0,0769	0,0393	0,0431	0,0615	0,0766	0,5564	0,0763	0,0622	0,0622
BAY	0,0558	0,0819	0,0589	0,0422	0,0405	0,0488	0,0587	0,1607	0,0803	0,0625	0,0550
BSN	0,0754	0,0740	0,0778	0,0527	0,0513	0,0480	0,0778	0,1962	0,0715	0,0636	0,0658
OR@F	0,0648	0,0772	0,0636	0,0607	0,0607	0,0516	0,0635	0,0424	0,0963	0,0556	0,0556
ELE	0,0402	0,1056	0,0457	0,0290	0,0282	0,0464	0,0456	0,5867	0,0739	0,0404	0,0404
IBE	0,0481	0,0999	0,0569	0,0247	0,0247	0,0548	0,0519	0,0870	0,0629	0,0481	0,0376
MUV2	0,0422	0,0554	0,0419	0,0299	0,0270	0,0345	0,0419	0,1203	0,0659	0,0475	0,0475
AIR	0,0576	0,0865	0,0720	0,0451	0,0412	0,0362	0,0718	0,6087	0,0758	0,0576	0,0576
GOB	0,0665	0,0823	0,0514	0,0357	0,0351	0,0470	0,0483	0,9112	0,0703	0,0665	0,0666
LVMH	0,0728	0,0911	0,0730	0,0550	0,0563	0,0312	0,0728	0,0381	0,0802	0,0729	0,0729
CRDA	0,0612	0,0690	0,0613	0,0429	0,0380	0,0531	0,0614	0,0585	0,0745	0,0651	0,0907
AGN	0,0462	0,0592	0,0460	0,0408	0,0418	0,0534	0,0460	0,0807	0,0613	0,0497	0,0476
SPI	0,0588	0,0726	0,0599	0,0365	0,0377	0,0435	0,0599	0,0851	0,0648	0,0587	0,0461
LFG	0,0578	0,0720	0,0619	0,0392	0,0414	0,0526	0,0618	0,1091	0,0730	0,0525	0,0553
CGE	0,0608	0,0574	0,0474	0,0318	0,0318	0,0702	0,0454	0,2156	0,0639	0,0608	0,0598
AH	0,0519	0,0640	0,0519	0,0400	0,0391	0,0521	0,0520	0,6135	0,0694	0,0503	0,0571
TIM	0,0838	0,0840	0,0840	0,0731	0,0740	0,1156	0,0840	0,3366	0,0722	0,0769	0,0742

Continuación Cuadro V.16. Ajustes usando 250 datos.

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
TAL	0,0417	0,0726	0,0402	0,0249	0,0264	0,0325	0,0403	0,1812	0,0671	0,0408	0,0393
RD	0,0409	0,0565	0,0412	0,0278	0,0243	0,0663	0,0408	0,2303	0,0498	0,0368	0,0368
SQ@F	0,0260	0,0409	0,0336	0,0207	0,0181	0,0500	0,0336	0,5090	0,0566	0,0278	0,0278
TEF	0,0578	0,0589	0,0589	0,0446	0,0457	0,0568	0,0589	0,3293	0,0546	0,0452	0,0450
NOKP	0,0869	0,0869	0,0869	0,0838	0,0842	0,0878	0,0869	0,2379	0,0836	0,1502	0,0878
SCH	0,0658	0,0726	0,0726	0,0545	0,0557	0,0672	0,0726	0,3097	0,0600	0,0579	0,0658
ENI	0,0395	0,0473	0,0396	0,0287	0,0244	0,0485	0,0398	0,4320	0,0597	0,0384	0,0384
SIE	0,0244	0,0303	0,0239	0,0296	0,0293	0,0802	0,0238	0,9986	0,0430	0,0244	0,0238
EOA	0,0283	0,0554	0,0293	0,0273	0,0281	0,0790	0,0293	0,2356	0,0577	0,0286	0,0287
BNP	0,0345	0,0467	0,0440	0,0188	0,0195	0,0573	0,0440	0,1748	0,0558	0,0296	0,0528
ING	0,0434	0,0696	0,0328	0,0442	0,0475	0,1089	0,0328	0,3330	0,0391	0,0297	0,0297
BBVA	0,0474	0,0452	0,0452	0,0440	0,0434	0,0637	0,0452	0,1185	0,0547	0,0483	0,0642
DTE	0,0356	0,0363	0,0384	0,0349	0,0348	0,0661	0,0378	0,9923	0,0544	0,0330	0,0330
DBK	0,0138	0,0383	0,0163	0,0251	0,0254	0,0673	0,0163	0,1839	0,0498	0,0203	0,0130
SGE	0,0374	0,0381	0,0379	0,0331	0,0329	0,0819	0,0379	0,2753	0,0516	0,0436	0,0364
FTEL	0,0437	0,0460	0,0445	0,0234	0,0267	0,0759	0,0446	0,0977	0,0566	0,0366	0,0367
ALV	0,0344	0,0329	0,0343	0,0259	0,0267	0,0764	0,0343	0,3214	0,0539	0,0277	0,0277
AAB	0,0373	0,0379	0,0379	0,0427	0,0428	0,0899	0,0379	0,2762	0,0432	0,0326	0,0326
MIDI	0,0328	0,0246	0,0342	0,0222	0,0222	0,0579	0,0342	0,9984	0,0569	0,0349	0,0349
UNIL	0,0288	0,0524	0,0303	0,0313	0,0312	0,0970	0,0301	0,2182	0,0482	0,0290	0,0289
BAS	0,0306	0,0416	0,0319	0,0206	0,0228	0,0523	0,0319	0,3448	0,0559	0,0285	0,0260
G	0,0239	0,0245	0,0245	0,0273	0,0270	0,0757	0,0245	0,1690	0,0543	0,0353	0,0354
MEV	0,0436	0,0515	0,0317	0,0315	0,0354	0,0916	0,0318	0,3162	0,0486	0,0233	0,0233
SAP	0,0437	0,0445	0,0445	0,0294	0,0296	0,0835	0,0445	0,0942	0,0430	0,0335	0,0334
ENEL	0,0635	0,0638	0,0638	0,0471	0,0459	0,0794	0,0638	0,1629	0,0604	0,0494	0,0511

Cuadro V.17. Ajustes usando datos semanales

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
DCX	0,0557	0,0686	0,0570	0,0381	0,0380	0,0421	0,0566	0,1828	0,0683	0,0547	0,0547
PHIL	0,0268	0,0563	0,0278	0,0276	0,0276	0,0627	0,0278	0,2714	0,0533	0,0271	0,0272
EX@F	0,0590	0,2021	0,0548	0,0620	0,0585	0,2701	0,0545	-----	0,0500	0,0626	0,0627
TIT	0,0607	0,0609	0,0609	0,0655	0,0640	0,0904	0,0609	0,3600	0,0661	0,0677	0,0707
CRFR	0,0313	0,0486	0,0318	0,0209	0,0185	0,0438	0,0318	0,4742	0,0587	0,0310	0,0310
RWE	0,0314	0,0321	0,0321	0,0291	0,0299	0,0769	0,0322	0,5123	0,0499	0,0236	0,0235
UC	0,0860	0,0861	0,0861	0,0743	0,0744	0,0821	0,0861	0,2670	0,0719	0,0825	0,0825
LE	0,0228	0,0313	0,0226	0,0238	0,0232	0,0848	0,0226	0,6791	0,0472	0,0269	0,0270
REP	0,0560	0,0562	0,0562	0,0378	0,0365	0,0469	0,0562	0,2039	0,0591	0,0426	0,0425
BAY	0,0260	0,0466	0,0304	0,0211	0,0211	0,0657	0,0304	0,9972	0,0547	0,0261	0,0262
BSN	0,0331	0,0445	0,0407	0,0178	0,0214	0,0596	0,0407	0,2556	0,0546	0,0332	0,0333
OR@F	0,0408	0,0449	0,0411	0,0215	0,0188	0,0455	0,0411	0,1862	0,0633	0,0396	0,0396
ELE	0,0349	0,0491	0,0405	0,0272	0,0237	0,0456	0,0405	0,2081	0,0633	0,0350	0,0350
IBE	0,0417	0,0407	0,0417	0,0459	0,0446	0,0678	0,0418	0,2535	0,0530	0,0423	0,0422
MUV2	0,0292	0,0616	0,0406	0,0452	0,0451	0,0883	0,0407	0,8164	0,0422	0,0292	0,0292
AIR	0,0457	0,0568	0,0475	0,0355	0,0333	0,0609	0,0475	0,4799	0,0587	0,0406	0,0406
GOB	0,0388	0,0329	0,0391	0,0245	0,0200	0,0787	0,0391	0,2210	0,0602	0,0270	0,0269
LVMH	0,0364	0,0380	0,0364	0,0247	0,0248	0,0684	0,0365	0,2170	0,0509	0,0343	0,0343
CRDA	0,0500	0,0396	0,0547	0,0412	0,0389	0,0781	0,0509	0,3582	0,0610	0,0447	0,0448
AGN	0,0419	0,0658	0,0371	0,0329	0,0337	0,0721	0,0371	0,1255	0,0509	0,0425	0,0425
SPI	0,0290	0,0605	0,0309	0,0249	0,0328	0,0667	0,0309	0,2546	0,0643	0,0330	0,0508
LFG	0,0327	0,0359	0,0315	0,0175	0,0176	0,0485	0,0315	0,9965	0,0597	0,0314	0,0413
CGE	0,0332	0,0366	0,0337	0,0370	0,0384	0,0837	0,0337	0,2897	0,0456	0,0234	0,0234
AH	0,0384	0,0663	0,0380	0,0488	0,0448	0,1146	0,0379	0,3858	0,0423	0,0330	0,0331
TIM	0,0493	0,0493	0,0493	0,0504	0,0513	0,0591	0,0493	0,2866	0,0568	0,0555	0,0555

Continuación Cuadro V.17. Ajustes usando datos semanales

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSPB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
TAL	0,0311	0,0532	0,0303	0,0134	0,0133	0,0383	0,0303	0,4454	0,0577	0,0308	0,0308
RD	0,0240	0,0321	0,0229	0,0127	0,0123	0,0609	0,0230	0,2614	0,0502	0,0236	0,0235
SQ@F	0,0195	0,0347	0,0294	0,0185	0,0166	0,0459	0,0295	0,2332	0,0541	0,0192	0,0191
TEF	0,0604	0,0640	0,0640	0,0462	0,0461	0,0596	0,0640	0,3254	0,0498	0,0519	0,0522
NOKP	0,1088	0,1096	0,1096	0,0899	0,0916	0,0931	0,1096	0,3228	0,0917	0,0939	0,0939
SCH	0,0589	0,0598	0,0598	0,0462	0,0468	0,0703	0,0598	0,3310	0,0476	0,0517	0,0517
ENI	0,0282	0,0447	0,0299	0,0215	0,0175	0,0403	0,0298	0,9981	0,0579	0,0341	0,0341
SIE	0,0150	0,0268	0,0139	0,0281	0,0265	0,0756	0,0138	0,9997	0,0416	0,0138	0,0138
EOA	0,0153	0,0321	0,0155	0,0244	0,0229	0,0726	0,0155	0,3446	0,0448	0,0230	0,0229
BNP	0,0159	0,0178	0,0170	0,0152	0,0129	0,0571	0,0170	0,3209	0,0539	0,0176	0,0177
ING	0,0398	0,0444	0,0403	0,0339	0,0323	0,0980	0,0403	0,1076	0,0362	0,0315	0,0314
BBVA	0,0543	0,0555	0,0555	0,0486	0,0488	0,0684	0,0555	0,3554	0,0515	0,0491	0,0492
DTE	0,0188	0,0191	0,0191	0,0184	0,0175	0,0603	0,0191	0,2699	0,0500	0,0143	0,0143
DBK	0,0146	0,0214	0,0176	0,0217	0,0220	0,0747	0,0176	0,3438	0,0429	0,0147	0,0146
SGE	0,0186	0,0240	0,0244	0,0171	0,0191	0,0643	0,0244	0,3203	0,0479	0,0168	0,0168
FTEL	0,0224	0,0304	0,0210	0,0162	0,0141	0,0632	0,0268	0,0828	0,0527	0,0232	0,0232
ALV	0,0181	0,0176	0,0180	0,0181	0,0204	0,0727	0,0180	0,3559	0,0488	0,0197	0,0197
AAB	0,0428	0,0433	0,0433	0,0321	0,0324	0,0877	0,0433	0,5233	0,0406	0,0337	0,0337
MIDI	0,0200	0,0249	0,0249	0,0188	0,0168	0,0655	0,0249	0,0761	0,0486	0,0192	0,0192
UNIL	0,0257	0,0269	0,0269	0,0207	0,0223	0,0784	0,0269	0,3603	0,0469	0,0185	0,0184
BAS	0,0311	0,0360	0,0318	0,0153	0,0188	0,0531	0,0319	0,9994	0,0532	0,0226	0,0225
G	0,0190	0,0188	0,0188	0,0195	0,0195	0,0651	0,0188	0,0867	0,0556	0,0239	0,0240
MEV	0,0367	0,0383	0,0383	0,0263	0,0219	0,0801	0,0383	0,1121	0,0461	0,0290	0,0289
SAP	0,0472	0,0480	0,0480	0,0298	0,0300	0,0815	0,0480	0,0993	0,0403	0,0360	0,0360
ENEL	0,0359	0,0358	0,0358	0,0354	0,0357	0,0674	0,0358	0,2102	0,0487	0,0359	0,0359

Cuadro V.18. Ajustes usando todos los datos

STOCK	TSP(-100,100)	TSP F	TSP	TSPB	ATSB	NORMAL	LAPLACE	BETA	CAUCHY	TSP2	TSB2
DCX	0,0324	0,0540	0,0336	0,0168	0,0167	0,0378	0,0337	0,1705	0,0594	0,0348	0,0314
PHIL	0,0322	0,0330	0,0330	0,0211	0,0212	0,0653	0,0330	0,2771	0,0446	0,0248	0,0247
EX@F	0,0209	0,0950	0,0212	0,0269	0,0287	0,1587	0,0211	1,0000	0,0463	0,0247	0,0247
TIT	0,0627	0,0627	0,0627	0,0584	0,0577	0,0625	0,0627	0,0730	0,0649	0,0713	0,0625
CRFR	0,0258	0,0338	0,0301	0,0147	0,0140	0,0490	0,0301	0,5242	0,0525	0,0218	0,0216
RWE	0,0249	0,0259	0,0259	0,0189	0,0194	0,0631	0,0259	0,3488	0,0482	0,0204	0,0203
UC	0,0800	0,0786	0,0786	0,0749	0,0749	0,0857	0,0786	0,1392	0,0765	0,0947	0,0851
LE	0,0191	0,0224	0,0193	0,0187	0,0190	0,0693	0,0193	0,7407	0,0497	0,0205	0,0416
REP	0,0375	0,0411	0,0411	0,0293	0,0266	0,0513	0,0411	0,3406	0,0542	0,0316	0,0316
BAY	0,0219	0,0227	0,0270	0,0173	0,0177	0,0740	0,0269	0,3044	0,0519	0,0214	0,0235
BSN	0,0300	0,0333	0,0302	0,0171	0,0199	0,0508	0,0302	0,2647	0,0552	0,0312	0,0311
OR@F	0,0351	0,0535	0,0332	0,0180	0,0174	0,0345	0,0343	0,2657	0,0615	0,0347	0,0346
ELE	0,0412	0,0413	0,0413	0,0265	0,0255	0,0518	0,0413	0,4652	0,0529	0,0305	0,0304
IBE	0,0517	0,0524	0,0524	0,0407	0,0397	0,0560	0,0524	0,3382	0,0545	0,0410	0,0409
MUV2	0,0354	0,0353	0,0353	0,0362	0,0357	0,0876	0,0353	0,3658	0,0390	0,0388	0,0390
AIR	0,0360	0,0414	0,0360	0,0261	0,0206	0,0478	0,0361	0,3021	0,0572	0,0307	0,0307
GOB	0,0262	0,0269	0,0265	0,0172	0,0179	0,0558	0,0265	0,3740	0,0535	0,0211	0,0211
LVMH	0,0210	0,0224	0,0207	0,0141	0,0134	0,0596	0,0207	0,9997	0,0530	0,0221	0,0264
CRDA	0,0404	0,0432	0,0419	0,0183	0,0175	0,0659	0,0419	0,3242	0,0594	0,0367	0,0367
AGN	0,0425	0,0495	0,0495	0,0362	0,0362	0,0872	0,0495	0,0991	0,0398	0,0422	0,0421
SPI	0,0371	0,0369	0,0369	0,0269	0,0295	0,0567	0,0369	0,4426	0,0531	0,0397	0,0326
LFG	0,0273	0,0360	0,0278	0,0128	0,0111	0,0399	0,0278	0,9982	0,0597	0,0281	0,0281
CGE	0,0201	0,0356	0,0198	0,0280	0,0278	0,0944	0,0198	0,3586	0,0406	0,0213	0,0213
AH	0,0353	0,0705	0,0358	0,0305	0,0327	0,1333	0,0358	1,0000	0,0410	0,0341	0,0341
TIM	0,0426	0,0433	0,0433	0,0438	0,0445	0,0642	0,0433	0,2864	0,0547	0,0515	0,0515

Continuación Cuadro V.18. Ajustes usando todos los datos

VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.	VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.
F:TAL	5,164	ATSB	1	0,027	0,039	D:DCX	4,464	ATSB	1	0,017	0,039
H:RD	7,304	LAP	1	0,035	0,039	H:PHIL	4,924	ATSB	1	0,027	0,039
F:SQ@F	5,334	ATSB	1	0,018	0,039	F:EX@F	49,281	LAP	0	0,059	0,039
E:TEF	6,388	LAP	1	0,033	0,039	I:TIT	12,987	LAP	0	0,078	0,039
M:NOKP	9,208	LAP	1	0,033	0,039	F:CRFR	5,976	LAP	1	0,020	0,039
E:SCH	5,702	LAP	1	0,026	0,039	D:RWE	4,363	ATSB	1	0,024	0,039
I:ENI	5,020	ATSB	1	0,024	0,039	I:UC	9,298	LAP	0	0,043	0,039
D:SIE	4,337	ATSB	1	0,016	0,039	F:LE	8,049	LAP	0	0,047	0,039
D:EOA	5,614	LAP	1	0,025	0,039	E:REP	7,040	LAP	1	0,026	0,039
F:BNP	8,179	LAP	1	0,028	0,039	D:BAY	30,645	LAP	1	0,032	0,039
H:ING	7,436	LAP	0	0,040	0,039	F:BSN	9,537	LAP	1	0,031	0,039
E:BBVA	5,349	ATSB	1	0,027	0,039	F:OR@F	6,765	LAP	1	0,038	0,039
D:DTE	6,261	LAP	1	0,023	0,039	E:ELE	6,370	LAP	0	0,042	0,039
D:DBK	5,934	LAP	1	0,026	0,039	E:IBE	5,216	ATSB	1	0,038	0,039
F:SGE	7,171	LAP	1	0,026	0,039	D:MUV2	8,260	LAP	1	0,036	0,039
F:FTEL	7,529	LAP	1	0,033	0,039	F:AIR	6,772	LAP	1	0,029	0,039
D:ALV	5,600	LAP	1	0,032	0,039	F:GOB	20,581	LAP	1	0,032	0,039
H:AAB	7,993	LAP	0	0,042	0,039	F:LVMH	7,915	LAP	0	0,042	0,039
F:MIDI	6,410	LAP	1	0,026	0,039	F:CRDA	6,747	LAP	1	0,037	0,041
H:UNIL	9,092	LAP	1	0,033	0,039	H:AGN	7,332	LAP	1	0,034	0,039
D:BAS	6,511	LAP	1	0,032	0,039	I:SPI	5,257	ATSB	1	0,028	0,039
I:G	6,612	LAP	1	0,035	0,039	F:LFG	5,852	LAP	1	0,018	0,039
H:AMEV	10,986	LAP	0	0,055	0,039	F:CGE	11,033	LAP	1	0,024	0,039
D:SAP	9,753	LAP	1	0,025	0,039	H:AH	245,808	LAP	0	0,087	0,039
I:ENEL	10,168	LAP	1	0,038	0,039	I:TIM	7,683	LAP	0	0,051	0,039

Cuadro (V.24) Ajuste simplificado con 1000 datos

ACCION	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.	ACCION	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.
F:TAL	3,278	NORM	1	0,030	0,054	D:DCX	3,925	NORM	1	0,039	0,054
H:RD	9,804	LAP	1	0,048	0,054	H:PHIL	4,050	ATSB	1	0,036	0,054
F:SQ@F	6,165	LAP	1	0,054	0,054	F:EX@F	4,041	ATSB	1	0,027	0,054
E:TEF	4,197	ATSB	1	0,047	0,054	I:TIT	4,907	ATSB	0	0,085	0,054
M:NOKP	21,019	LAP	1	0,047	0,054	F:CRFR	5,393	ATSB	1	0,028	0,054
E:SCH	4,010	ATSB	1	0,037	0,054	D:RWE	3,592	NORM	1	0,031	0,054
I:ENI	5,195	ATSB	1	0,027	0,054	I:UC	6,180	LAP	0	0,094	0,054
D:SIE	4,387	ATSB	1	0,031	0,054	F:LE	6,669	LAP	1	0,036	0,054
D:EOA	4,217	ATSB	1	0,027	0,054	E:REP	3,700	NORM	1	0,045	0,054
F:BNP	3,421	NORM	1	0,032	0,054	D:BAY	4,790	ATSB	1	0,037	0,054
H:ING	4,331	ATSB	1	0,027	0,054	F:BSN	5,116	ATSB	1	0,040	0,054
E:BBVA	4,215	ATSB	1	0,044	0,054	F:OR@F	4,153	ATSB	1	0,049	0,054
D:DTE	4,161	ATSB	1	0,034	0,054	E:ELE	8,018	LAP	1	0,050	0,054
D:DBK	4,851	ATSB	1	0,044	0,054	E:IBE	4,523	ATSB	1	0,028	0,054
F:SGE	4,050	ATSB	1	0,037	0,054	D:MUV2	4,579	ATSB	1	0,028	0,054
F:FTEL	3,545	NORM	1	0,032	0,054	F:AIR	3,885	NORM	1	0,041	0,054
D:ALV	3,737	NORM	1	0,041	0,054	F:GOB	3,772	NORM	0	0,062	0,054
H:AAB	4,243	ATSB	1	0,030	0,054	F:LVMH	3,342	NORM	1	0,031	0,054
F:MIDI	3,511	NORM	1	0,034	0,054	F:CRDA	5,872	LAP	0	0,057	0,054
H:UNIL	21,830	LAP	1	0,042	0,054	H:AGN	5,281	ATSB	1	0,024	0,054
D:BAS	4,132	ATSB	1	0,043	0,054	I:SPI	3,547	NORM	1	0,041	0,054
I:G	5,765	LAP	1	0,040	0,054	F:LFG	4,342	ATSB	1	0,031	0,054
H:AMEV	4,708	ATSB	1	0,030	0,054	F:CGE	7,124	LAP	1	0,049	0,054
D:SAP	9,731	LAP	1	0,028	0,054	H:AH	4,688	ATSB	1	0,029	0,054
I:ENEL	11,705	LAP	0	0,061	0,054	I:TIM	15,174	LAP	0	0,089	0,054

Cuadro (V.25) Ajuste simplificado con 500 datos

VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.	VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.
F:TAL	3,681	NORM	1	0,053	0,077	D:DCX	3,767	NORM	1	0,041	0,077
H:RD	3,888	NORM	1	0,057	0,077	H:PHIL	3,880	NORM	1	0,044	0,077
F:SQ@F	3,262	NORM	1	0,047	0,077	F:EX@F	3,752	NORM	1	0,048	0,077
E:TEF	4,846	ATSB	1	0,069	0,077	I:TIT	8,508	LAP	0	0,097	0,077
M:NOKP	15,522	LAP	1	0,063	0,077	F:CRFR	5,753	LAP	1	0,055	0,077
E:SCH	4,531	ATSB	1	0,036	0,077	D:RWE	3,927	NORM	1	0,044	0,077
I:ENI	4,339	ATSB	1	0,043	0,077	I:UC	7,451	LAP	0	0,100	0,077
D:SIE	4,158	ATSB	1	0,047	0,077	F:LE	4,881	ATSB	1	0,022	0,077
D:EOA	4,524	ATSB	1	0,032	0,077	E:REP	3,920	NORM	1	0,062	0,077
F:BNP	3,703	NORM	1	0,034	0,077	D:BAY	3,680	NORM	1	0,049	0,077
H:ING	4,587	ATSB	1	0,041	0,077	F:BSN	4,020	ATSB	1	0,062	0,077
E:BBVA	3,196	NORM	1	0,047	0,077	F:OR@F	5,913	LAP	0	0,093	0,077
D:DTE	5,728	LAP	1	0,070	0,077	E:ELE	3,668	NORM	1	0,047	0,077
D:DBK	3,225	NORM	1	0,051	0,077	E:IBE	5,493	ATSB	1	0,026	0,077
F:SGE	4,132	ATSB	1	0,045	0,077	D:MUV2	3,586	NORM	1	0,035	0,077
F:FTEL	3,147	NORM	1	0,027	0,077	F:AIR	3,997	NORM	1	0,037	0,077
D:ALV	2,664	NORM	1	0,034	0,077	F:GOB	3,672	NORM	1	0,047	0,077
H:AAB	6,051	LAP	1	0,045	0,077	F:LVMH	3,201	NORM	1	0,031	0,077
F:MIDI	3,072	NORM	1	0,039	0,077	F:CRDA	6,959	LAP	1	0,064	0,077
H:UNIL	6,221	LAP	1	0,066	0,077	H:AGN	3,427	NORM	1	0,054	0,077
D:BAS	3,326	NORM	1	0,042	0,077	I:SPI	4,009	ATSB	1	0,043	0,077
I:G	3,643	NORM	1	0,036	0,077	F:LFG	4,189	ATSB	1	0,042	0,077
H:AMEV	3,546	NORM	1	0,038	0,077	F:CGE	14,790	LAP	1	0,048	0,077
D:SAP	5,262	ATSB	1	0,036	0,077	H:AH	4,873	ATSB	1	0,045	0,077
I:ENEL	4,851	ATSB	1	0,058	0,077	I:TIM	22,377	LAP	1	0,072	0,077

Cuadro (V.26) Ajuste simplificado con 250 datos

VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.	VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.
F:TAL	3,875	NORM	1	0,033	0,045	D:DCX	4,792	ATSB	1	0,037	0,066
H:RD	5,723	LAP	1	0,037	0,045	H:PHIL	5,767	LAP	1	0,026	0,045
F:SQ@F	4,878	ATSB	1	0,027	0,045	F:EX@F	510,731	LAP	0	0,211	0,045
E:TEF	7,064	LAP	0	0,057	0,045	I:TIT	8,325	LAP	0	0,074	0,045
M:NOKP	9,730	LAP	0	0,089	0,045	F:CRFR	5,300	ATSB	1	0,019	0,045
E:SCH	8,626	LAP	0	0,059	0,045	D:RWE	7,896	LAP	1	0,027	0,045
I:ENI	4,882	ATSB	1	0,025	0,056	I:UC	6,787	LAP	0	0,079	0,045
D:SIE	8,962	LAP	1	0,031	0,045	F:LE	11,012	LAP	1	0,032	0,045
D:EOA	7,072	LAP	1	0,029	0,045	E:REP	4,583	ATSB	1	0,035	0,045
F:BNP	6,149	LAP	1	0,037	0,050	D:BAY	5,692	LAP	1	0,026	0,045
H:ING	11,692	LAP	0	0,050	0,045	F:BSN	6,215	LAP	1	0,041	0,045
E:BBVA	6,004	LAP	0	0,051	0,045	F:OR@F	5,417	ATSB	1	0,022	0,045
D:DTE	4,050	ATSB	1	0,039	0,059	E:ELE	4,234	ATSB	1	0,032	0,045
D:DBK	6,391	LAP	1	0,016	0,045	E:IBE	7,563	LAP	1	0,041	0,045
F:SGE	6,392	LAP	1	0,036	0,045	D:MUV2	11,161	LAP	0	0,048	0,045
F:FTEL	8,610	LAP	1	0,056	0,062	F:AIR	5,708	LAP	1	0,041	0,045
D:ALV	8,028	LAP	1	0,033	0,045	F:GOB	29,287	LAP	1	0,030	0,045
H:AAB	6,827	LAP	1	0,031	0,045	F:LVMH	6,596	LAP	1	0,035	0,045
F:MIDI	6,318	LAP	1	0,026	0,045	F:CRDA	7,464	LAP	1	0,058	0,091
H:UNIL	12,877	LAP	1	0,040	0,045	H:AGN	5,769	LAP	1	0,030	0,045
D:BAS	6,658	LAP	1	0,036	0,045	I:SPI	5,197	ATSB	0	0,061	0,047
I:G	4,958	ATSB	1	0,042	0,045	F:LFG	6,398	LAP	1	0,038	0,045
H:AMEV	10,260	LAP	0	0,046	0,045	F:CGE	6,659	LAP	1	0,038	0,045
D:SAP	7,346	LAP	1	0,032	0,045	H:AH	22,010	LAP	0	0,057	0,045
I:ENEL	6,291	LAP	1	0,059	0,072	I:TIM	6,200	LAP	0	0,062	0,055

Cuadro (V.27) Ajuste simplificado con datos semanales

VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.	VALOR	CURTOSIS	DISTRIB.	ACEPTA	ESTAD.	MAX.
F:TAL	4,979	ATSB	1	0,016	0,020	D:DCX	4,281	ATSB	1	0,022	0,030
H:RD	6,860	LAP	0	0,022	0,020	H:PHIL	6,833	LAP	0	0,023	0,020
F:SQ@F	5,426	ATSB	1	0,020	0,020	F:EX@F	794,811	LAP	0	0,098	0,020
E:TEF	5,614	LAP	0	0,046	0,020	I:TIT	9,421	LAP	0	0,062	0,020
M:NOKP	7,975	LAP	0	0,096	0,020	F:CRFR	6,202	LAP	0	0,023	0,020
E:SCH	8,293	LAP	0	0,045	0,020	D:RWE	7,114	LAP	0	0,021	0,020
I:ENI	4,544	ATSB	1	0,018	0,025	I:UC	11,656	LAP	0	0,091	0,020
D:SIE	7,000	LAP	1	0,017	0,020	F:LE	9,690	LAP	0	0,022	0,020
D:EOA	6,466	LAP	1	0,015	0,020	E:REP	7,045	LAP	0	0,025	0,020
F:BNP	6,616	LAP	1	0,022	0,023	D:BAY	29,957	LAP	1	0,016	0,020
H:ING	11,000	LAP	0	0,038	0,020	F:BSN	6,815	LAP	0	0,032	0,020
E:BBVA	8,838	LAP	0	0,058	0,020	F:OR@F	5,114	ATSB	1	0,020	0,020
D:DTE	5,117	ATSB	1	0,023	0,026	E:ELE	5,869	LAP	0	0,026	0,020
D:DBK	7,439	LAP	1	0,018	0,020	E:IBE	6,928	LAP	0	0,043	0,020
F:SGE	6,993	LAP	0	0,024	0,020	D:MUV2	9,850	LAP	0	0,041	0,020
F:FTEL	6,912	LAP	0	0,030	0,028	F:AIR	5,535	LAP	0	0,033	0,020
D:ALV	8,733	LAP	1	0,018	0,020	F:GOB	12,653	LAP	0	0,024	0,020
H:AAB	8,896	LAP	0	0,029	0,020	F:LVMH	6,592	LAP	0	0,030	0,020
F:MIDI	7,617	LAP	1	0,014	0,020	F:CRDA	6,747	LAP	1	0,037	0,041
H:UNIL	9,849	LAP	1	0,020	0,020	H:AGN	10,893	LAP	0	0,037	0,020
D:BAS	5,841	LAP	0	0,026	0,020	I:SPI	5,123	ATSB	0	0,041	0,021
I:G	11,384	LAP	0	0,028	0,020	F:LFG	4,850	ATSB	1	0,015	0,020
H:AMEV	12,174	LAP	0	0,025	0,020	F:CGE	27,996	LAP	0	0,037	0,020
D:SAP	11,269	LAP	0	0,026	0,020	H:AH	508,437	LAP	0	0,072	0,020
I:ENEL	8,031	LAP	0	0,037	0,032	I:TIM	5,201	ATSB	0	0,056	0,024

Cuadro (V.28) Ajuste Simplificado con todos los datos