

¿CÓMO TRATAR EL ÁNGULO EN LA ESCUELA PRIMARIA? CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO Y PRÁCTICA DOCENTE

Noemí Pizarro, Alicia Zamorano-Vargas, Nuria Joglar-Prieto y Juan Miguel Belmonte

La enseñanza del ángulo mejora al reflexionar sobre su definición, usos, significados y formas en las que se presenta en la matemática escolar. El objetivo del trabajo es identificar y caracterizar aspectos del conocimiento especializado que una maestra moviliza cuando trabaja con ángulos en Educación Primaria. Utilizando el modelo analítico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge y partiendo de una revisión teórica del concepto, se analizan cinco episodios de enseñanza. Se observa que prevalece la noción estática del ángulo, sin considerar el ángulo como la representación de un giro, lo que limita la apropiación del concepto por el estudiantado.

Términos clave: Ángulo; Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas; Educación Primaria; Práctica docente

How to address angles in primary school? Specialised knowledge and teaching practice

The teaching of angles improves when their definitions, uses, meanings, and the various ways they are represented in school mathematics are deeply reflected upon. The aim of this study is to identify and characterize aspects of specialized knowledge that a primary school teacher mobilizes when addressing the notion of angle. Using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge analytical model and based on a theoretical review of the concept, five episodes from the teaching practice are analyzed. The findings show a predominance of the static notion of angle, without considering the angle as a representation of a turn, which may hinder students' conceptual understanding.

Keywords: Angle; Mathematics teacher's specialised knowledge; Primary education; Teaching practice

Pizarro, N., Zamorano-Vargas, A., Joglar-Prieto, N. y Belmonte, J. M. (2026). ¿Cómo tratar el ángulo en la escuela primaria? Conocimiento especializado y práctica docente. *PNA*, 20(2), 183-209. <https://doi.org/10.30827/pna.v20i2.34095>

¿Como abordar o ângulo na escola primária? Conhecimento especializado e prática docente

O ensino do ângulo melhora quando se reflete profundamente sobre sua definição, usos, significados e as diferentes formas como se apresenta na matemática escolar. Este trabalho tem como objetivo identificar e caracterizar aspectos do conhecimento especializado que uma professora mobiliza ao trabalhar a noção de ângulo no Ensino Fundamental. Utilizando o modelo analítico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge e a partir de uma revisão teórica do conceito, analisam-se cinco episódios da prática docente de uma professora. Observa-se uma predominância da noção estática de ângulo, sem considerar o ângulo como representação de uma rotação, o que pode dificultar a apropriação do conceito pelos alunos.

Palavras-chave: Ângulo; Conhecimento Especializado do Professor de Matemática; Educação Primária; Prática docente

El ángulo es una noción matemática importante para describir y utilizar objetos en situaciones cotidianas y profesionales. En concreto, es clave en la resolución de problemas dentro de las ciencias experimentales, de la ingeniería, del deporte, del arte y de la arquitectura, entre otras. También, dentro de la propia matemática la noción de ángulo juega un papel destacado. Por ejemplo, a partir de la consideración del concepto de ángulo se desarrolla la trigonometría, existiendo además muchas ramas de la matemática superior que usan funciones trigonométricas. Sin embargo, dentro de la comunidad matemática, veremos que no hay un consenso en una única definición de ángulo. Así, dependiendo de su uso o de los fenómenos a los que da respuesta, aparecen diferentes enfoques o perspectivas en las definiciones. No es de extrañar que la naturaleza de la noción de ángulo sea, ya de partida, compleja.

Los currículos de muchos países incluyen el concepto de ángulo en la enseñanza en las etapas iniciales de escolarización para impulsar el desarrollo del sentido espacial y de las relaciones geométricas. En el caso de Chile, un objetivo de aprendizaje de primaria es demostrar que comprenden el concepto de ángulo identificando ejemplos de ángulos en el entorno, estimando la medida de ángulos usando como referente ángulos de 45° y de 90° (MINEDUC, 2012, p. 236). Sin embargo, la variedad de contextos, tanto fuera como dentro de la propia matemática, en los que se movilizan los ángulos hace que su tratamiento en la escuela sea especialmente complicado (Micheltmore y White, 2000; Pachuca y Zubieta, 2020). Por ello, no sorprende que los estudiantes tengan dificultades en la escuela elemental para comprender qué es un ángulo y cómo comparar ángulos de distintos tamaños (Fyhn, 2008). Además, se han encontrado evidencias de

estudiantes aventajados en matemática que no logran desarrollar una idea clara del concepto (Cullen et al., 2018).

Por otro lado, hay estudios que ponen especial atención a la importancia del conocimiento que posee el profesorado que enseña geometría en la escuela primaria, ya que las oportunidades de aprendizaje que los profesores ofrecen en sus aulas están directamente relacionadas con sus conocimientos (Hill et al., 2005; Kurt-Birel et al., 2020; Montilla et al., 2021). Estas oportunidades son clave para el desarrollo de la competencia matemática de su alumnado (Carrillo et al., 2013). Se ha detectado que el profesorado en formación inicial, tanto en primaria como en secundaria, presentan una concepción restringida sobre la noción de ángulo. Por ejemplo, en algunas ocasiones, al prevalecer un enfoque o perspectiva estática del ángulo como dos semirrectas que se juntan en un vértice, los futuros docentes tienen dificultades en el estudio de la trigonometría, que necesita la idea de ángulo dinámico como giro (Martín-Fernández et al., 2022).

Por todo lo anteriormente discutido, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué elementos del conocimiento sobre ángulos moviliza el profesorado para su tratamiento en el aula de primaria?

Para dar respuesta a nuestra pregunta, nos apoyaremos en el modelo teórico-analítico *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) de Carrillo-Yáñez et al. (2018). Este modelo asume la especialización del conocimiento matemático del profesorado y, por ello, se centra en aspectos que son específicos de su labor docente: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico de ese contenido. Los datos fueron extraídos de la práctica en el aula de una maestra que manifestó interés en revisar sus clases sobre ángulos dado que, a su juicio, consideraba que no poseía un conocimiento adecuado para que sus estudiantes aprendieran.

Para abordar nuestra pregunta de investigación, planteamos como objetivo identificar y caracterizar aspectos del conocimiento especializado que la maestra moviliza cuando trabaja la noción de ángulo con su alumnado de Educación Primaria. Revisamos dos clases sobre la enseñanza del concepto de ángulo y seleccionamos cinco episodios en los que emergían el o los conceptos de ángulos y sus diversas representaciones. Teniendo en cuenta las dificultades relatadas sobre el tratamiento del ángulo, derivadas de su compleja conceptualización desde diferentes perspectivas, limitamos nuestro análisis a los elementos del conocimiento especializado que la maestra moviliza, dentro del subdominio del MTSK sobre el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Dada la complejidad de la idea de ángulo y la escasa dedicación al estudio de las matemáticas y su didáctica en los planes de formación inicial del profesorado de Educación Primaria (Nolla et al., 2021), entendemos que, para abordar metodológicamente la pregunta de investigación, no es suficiente la observación y análisis de la práctica de una docente en el aula como en otros trabajos con este modelo (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Cayo y Contreras, 2020). Por ello, se

considera inicialmente un enfoque metodológico tipo *top-down* (de la teoría a los datos) desde la revisión de la literatura académica, en matemáticas y en su didáctica, para construir una colección de indicadores del KoT específicos para enseñar la noción de ángulo (Charalambous y Litke, 2018). Estos indicadores se concretarán en un instrumento metodológico destinado a examinar de manera detallada la práctica de la maestra informante. El análisis permitirá evidenciar que en dicha práctica predomina una perspectiva estática de la noción de ángulo, en coherencia con lo señalado en la literatura especializada. Asimismo, dado el papel central de la maestra en los episodios seleccionados, se observa una primacía del registro verbal sobre el gráfico, lo que dificulta la aparición del registro simbólico durante la sesión, en contraste con lo documentado en los estudios revisados.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

A finales de los años 80 del siglo pasado, Shulman planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando e introdujo la distinción entre el conocimiento de la disciplina y el conocimiento didáctico de la disciplina, entendiendo este último diferente del conocimiento pedagógico general (Shulman, 1986). Desde entonces, han surgido varias conceptualizaciones del conocimiento del profesorado, especialmente en el caso de la Educación Matemática. El modelo MTSK se ha mostrado adecuado en muchas investigaciones para comprender y caracterizar el conocimiento especializado del docente sobre diferentes temas matemáticos, tanto desde un enfoque teórico, como desde el análisis de su práctica en el aula (Ramírez-García et al., 2021; Liñán-García et al., 2021; Muñoz-Catalán, Ramírez-García et al., 2022).

Dado que en este trabajo nos aproximamos por primera vez a la pregunta de investigación planteada, y teniendo en cuenta la profundidad requerida por nuestro posicionamiento como investigadores sobre la especificidad del conocimiento matemático para enseñar, solamente pondremos el foco en las siguientes tres categorías del subdominio KoT. Este trata sobre qué y cómo sabe el profesor los contenidos que enseña implicando un dominio profundo del tema, que incluye conceptos, procedimientos, hechos, reglas y teoremas, así como sus representaciones y significados (Carillo-Yáñez et al., 2018).

- (1) Definiciones, propiedades y fundamentos: se refiere al conocimiento del docente sobre definiciones, teoremas, axiomas, proposiciones y propiedades matemáticas relativas a los ángulos. Más adelante, desarrollaremos ese conocimiento de las definiciones, en plural, pues en el caso del ángulo dependen mucho de la aproximación fenomenológica elegida (Freudenthal, 1983).

- (2) Fenomenología y aplicaciones: contempla la comprensión del profesorado sobre los usos de un determinado contenido o los eventos, contextos o sucesos que le dan significado, sentido u origen (Carrillo-Yáñez et al., 2018). En esa línea, Freudenthal (1983, p. 323) recomienda: “introducir los conceptos de ángulo en plural porque, en efecto, hay varios; diversos enfoques fenomenológicos conducen a diversos conceptos, aunque puedan estar estrechamente relacionados”. Sin embargo, coordinar estas perspectivas en el aula es complicado para los docentes pues al provenir de sistemas axiomáticos diferentes, no siempre son del todo compatibles (Kontorovich y Zazkis, 2016).
- (3) Registros de representación: incluye el conocimiento sobre las distintas formas de representar el contenido matemático, en nuestro caso el ángulo, y las conversiones entre dos representaciones cualesquiera. Ningún proceso matemático puede darse sin usar un sistema de representación y, a diferencia de lo que ocurre en otras áreas de conocimiento, los sistemas de representación y las conversiones entre ellos están en el centro del quehacer matemático (Duval, 2006).

Para identificar los distintos registros de representación, utilizamos la adaptación del modelo de Lesh (Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto et al., 2022). Así, en lugar de considerar la diferenciación entre los sistemas de representación símbolo escrito y símbolo hablado, preferimos diferenciar el registro de símbolo matemático (escrito) del de lenguaje natural verbal (ya sea escrito o hablado), por el papel que el símbolo juega en el aprendizaje matemático especialmente en las primeras etapas escolares. Consideramos entonces cinco registros: gráfico (G) y manipulativo (M), ambos de naturaleza icónica por su relación de semejanza con la situación representada, aunque el primero de naturaleza estática y el segundo dinámica, permitiendo interacciones con el aprendiz; lenguaje verbal (V) y lenguaje simbólico (S), ambos de naturaleza simbólica y convencional; y situación real (R), registro crucial en primaria para facilitar la implicación del alumnado en la solución de la situación problema al permitir dotarla de significado.

Definiciones, fenomenología y representaciones del ángulo en la literatura

Considerando lo anterior, comenzamos recogiendo definiciones de la noción de ángulo, así como fenómenos desde donde emerge y sus representaciones, tal y como aparecen en trabajos generados dentro de la comunidad matemática. Además, a través de la revisión de trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas, identificaremos los aspectos del conocimiento del concepto de ángulo relativos a su definición, fenomenología y representaciones, que ayudarían a un docente a trabajar adecuadamente en el aula. Con eso, completaríamos la primera aproximación a la noción de ángulo desde la teoría poniendo el foco en las tres categorías de conocimiento elegidas, lo que nos permitirá, en la sección de

metodología, elaborar un primer instrumento para analizar los datos recogidos de la maestra informante (aproximación *top-down*).

Según Matos (1990), en una ocasión el Libro I de los “Elementos” de Euclides define un ángulo como el conjunto de dos rectas coplanarias distintas que se cortan en un punto centrándose así en los elementos que lo delimitan. Sin embargo, Euclides, en otras ocasiones en el mismo libro, sugiere que el ángulo es la región plana limitada por esas dos rectas o, en otras, habla también de la inclinación entre dos líneas en un plano, que se unen la una a la otra y que no están sobre una línea recta. Euclides parece excluir así en su definición de ángulo el ángulo 0 y el ángulo llano (el que mide 180°) y parece también considerar la posibilidad de que las líneas que se unen para formar el ángulo no sean rectas. Para Casas-García y Luengo-González (2005), las definiciones de Euclides eran de partida poco precisas. En cualquier caso, Euclides apuesta por un enfoque que llamaremos estático en el abordaje de las definiciones de ángulo, fijándose en la abertura y muy dependiente de los registros G, V y S.

De acuerdo con Casas-García y Luengo-González (2005), Hilbert coincide con Euclides considerando el ángulo como un sistema formado por dos semirrectas pertenecientes a distintas rectas coplanarias que se cortan en un punto. Para Severi, un ángulo es el conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos, de un mismo plano, cuyas fronteras se encuentran en un punto. Estas definiciones, según Casas-García y Luengo-González (2005), encierran de nuevo dificultades, entre las que destacan que no define únicamente un objeto y que no sirve para ángulos de 0° , 180° , 360° o mayores, ni para ángulos negativos.

En las definiciones descritas hasta ahora, fenomenológicamente, los autores consideran el ángulo como una región del espacio (del plano) o como un par de líneas rectas (o de semirrectas o rayos) que se cortan en un punto, en ambos casos, siempre desde un enfoque estático, dando respuesta al ángulo como abertura, y necesitando representaciones gráficas y simbólicas para determinar el objeto al que se refieren en las figuras.

En cambio, será Klein quien considere la naturaleza dinámica del objeto identificando el ángulo con la cantidad de giro necesaria para trasladar una semirrecta a la posición de otra, dadas dos semirrectas con vértice común, emergiendo así una nueva referencia o significado del ángulo (Matos, 1990).

En la literatura en español, Rey Pastor y Puig Adam (1959), en su libro de “Elementos de Geometría” dirigido al profesorado de Educación Primaria, explican que “cuando trazamos dos rectas en un plano que se cortan en un punto O, cada una de las cuatro regiones en las que el plano queda dividido es un ángulo” (p. 21). Así, en su definición, dan por hecho que los ángulos son regiones convexas del plano. Sin embargo, más adelante ya admiten llamar ángulos también a las regiones no convexas delimitadas por dos semirrectas que se cortan en un punto coincidiendo con Hilbert. Es importante destacar que, aunque dicen que cuando las dos rectas coinciden no hay ángulo, acuerdan considerarlo como el ángulo 0.

Así, consideran de nuevo un enfoque estático, en este caso claramente como región del plano (abertura), y usan los registros G, S y V.

Por otra parte, desde el área de la Didáctica de las Matemáticas, diversas investigaciones han puesto atención en cómo el alumnado de Educación Primaria y primeros años de Educación Secundaria se aproxima a la comprensión del concepto de ángulo y la medida de su amplitud (Berthelot y Salin, 1996; Clements y Burns, 2000; Devichi y Munier, 2013; Mitchelmore y White, 2000; Mullins, 2020, Pachuca y Zubieta, 2020). Es claro que la noción de ángulo, además de presentar problemas ya desde su definición formal, es complicada de abordar en el aula. Algunas de las conclusiones de los trabajos citados son que el aprendizaje del concepto de ángulo está mediado por el trabajo con material concreto, la noción del plano infinito y, especialmente, por el trabajo en una combinación de situaciones que aborden la construcción del ángulo desde diferentes significados estáticos y dinámicos. Esta tensión entre las situaciones estáticas y dinámicas es complicada de gestionar por los docentes (Kontorovich y Zazkis, 2016).

Por otra parte, Mitchelmore y White (2000) detectaron dificultades en los estudiantes para movilizar la idea de ángulo en situaciones que involucran intersecciones de caminos, manecillas de relojes u objetos como las tijeras. Es decir, los estudiantes de primaria tienden a comprender mejor el concepto de ángulo cuando pueden ver sus dos lados. Sin embargo, les resulta más complicado reconocer ángulos en contextos donde uno o ambos lados del ángulo no están visibles.

Utilizar esquinas tiene limitaciones también para trabajar con el ángulo llano (180°). De hecho, autores como Tanguay y Venant (2016) desvelan cómo las conceptualizaciones de ángulo que el alumnado va construyendo están vinculadas a la forma en que las representaciones, en los diferentes registros, y las conversiones entre ellas, se usan en las situaciones de aprendizaje llevadas al aula. El registro gráfico tiene más limitaciones en el enfoque dinámico que en el caso estático, con lo que se forzaría un proceso de abstracción mayor. Fynh (2008) recomienda de integrar el trabajo de los ángulos en primaria en la actividad física por medio de registros que promuevan el movimiento, como el registro manipulativo o las situaciones reales con objetos como, por ejemplo, los abanicos (Berthelot y Salin, 1996) o el propio cuerpo (Fyhn, 2008). En cambio, algunos autores como Guichard (2018), utilizan una aproximación al trabajo con ángulos en la escuela desde la historia de la matemática, y, sugieren un nuevo enfoque de la enseñanza del ángulo desde la idea de magnitud, usando una definición funcional privilegiando la medida de ángulos. Complementando lo anterior, autores como Henderson y Taimina (2005), apuntan a la necesidad de considerar tres perspectivas diferentes desde las que definir ángulo: como una noción dinámica (dando respuesta al fenómeno del giro), noción estática (dando respuesta al fenómeno de abertura tanto en figuras geométricas como en objetos de la vida cotidiana y al de inclinación o pendiente) y como una medida que puede emerger de forma natural al comparar aberturas o giros.

Como podemos observar en la revisión de la literatura descrita en los párrafos anteriores, cada definición de ángulo da respuesta a un fenómeno (apertura, inclinación, giro, medida). Este aspecto parece propio o intrínseco de la noción de ángulo. Por ello, nos ha parecido redundante diferenciar las dos categorías en el análisis y aparecen unidas en las Tablas 3 y 4. Esta decisión está apoyada también por las reflexiones de Freudenthal discutidas anteriormente (1983).

METODOLOGÍA

El objetivo de este trabajo fue identificar y caracterizar aspectos del conocimiento especializado que una maestra moviliza cuando trabaja la noción de ángulo. Por la naturaleza del estudio propuesto, se utiliza una metodología de investigación cualitativa con un paradigma interpretativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

Datos: informante y episodios

Se han elegido dos lecciones sobre enseñanza de ángulo en Educación Primaria (estudiantes de 10 años) de 90 minutos de duración cada una, cuyo detalle se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 1

Objetivos y actividades de las sesiones

Lección	Objetivo	Actividades y análisis a priori
1. Reconociendo ángulos	Identificar características del cuadrado reconociendo el ángulo recto. Reconocer ángulos rectos, agudos, obtusos y extendidos o llanos. Dibujar figuras con ángulos rectos.	Se presenta al curso un cuadrado y se pregunta cuáles son sus características. Se busca que identifiquen los ángulos rectos como característica. Se utiliza el ángulo recto como referencia de apertura para los ángulos agudos y obtusos. Se espera que los estudiantes recuerden la figura geométrica considerando tanto lados de la misma medida como ángulos rectos.
2. Clasificando y conceptualizando	Clasificar ángulos menores o iguales a 180°. Conceptualizar la idea de ángulo. Utilizan guías para clasificar ángulos en figuras y	Se espera que después del trabajo, los estudiantes verbalicen una idea de ángulo. Hay algunos ángulos que visualmente cuesta clasificar,

Tabla 1

Objetivos y actividades de las sesiones

Lección	Objetivo	Actividades y análisis a priori
	dibujos de objetos. Definen ángulo a partir del trabajo con ángulos.	ese es el momento para que los estudiantes necesiten medir.

Las lecciones fueron diseñadas e implementadas en el aula por una maestra de Primaria con cinco años de experiencia de aula y videograbadas para su posterior revisión y análisis detallado (Erickson, 2006). La informante participó en un proyecto de investigación sobre práctica docente a lo largo del cual mostró su preocupación por la enseñanza del ángulo. Se seleccionaron cinco episodios, entendidos como “períodos de tiempo de la clase que se dedican a un tipo de actividad relativamente coherente” (Schoenfeld, 2013; p. 612). En nuestro caso son precisamente los fragmentos de las lecciones donde la maestra introducía, definía y ejemplificaba el concepto de ángulo utilizando diferentes representaciones.

Los episodios elegidos se organizan en la Tabla 2, donde se presentan los momentos cuando, de forma explícita e implícita, se trata una definición y fenomenología de ángulo considerando distintas representaciones. La transcripción de las unidades de información relevantes para el análisis se incluye, para facilitar la lectura, en la sección de resultados.

Tabla 2

Episodios de análisis

Lección	Episodio	Actividad	Interés de análisis
1	1	¿Cuál ángulo es recto?	Conflicto con ángulo recto, ángulo llano o extendido y ángulo cero
1	2	Ángulos grandes y ángulos pequeños	Se indica que un ángulo es “más grande que otro” en el caso que tenga una mayor amplitud
2	3	La longitud de los lados del ángulo	Los ángulos se representan con rayos y/o segmentos (interferencia en la noción de ángulo de la longitud de sus lados)
2	4	Definiendo ángulo	Se realiza una definición en conjunto tras realizar aproximaciones con ángulos estáticos.

Tabla 2
Episodios de análisis

Lección	Episodio	Actividad	Interés de análisis
2	5	Con solo una “línea” basta	¿Es necesario tener dos “líneas” para visualizar un ángulo?

Para la toma de datos se elaboraron consentimientos y asentimientos para la dirección del centro educativo, la maestra, padres-madres y estudiantes.

Instrumento de análisis

Para diseñar nuestro instrumento de análisis, metodológicamente comenzamos realizando un análisis *top-down* partiendo de la revisión de la literatura incluida en el Marco Teórico con base en el modelo analítico el MTSK. Así, conseguimos una primera lista de indicadores para cada una de las tres categorías del subdominio KoT elegidas sobre la noción de ángulo. Incluimos a continuación la Tabla 3 en la que se organiza toda la información recogida. Se agrupan, por un lado, los indicadores encontrados de las categorías Definiciones y Fenomenología: (i) Abertura - Región del plano (RP); (ii) Abertura - Par de Semirrectas (PS); (iii) Giro (GI) y (iv) Medida (ME); y, por otro, los indicadores encontrados para la categoría Registros de representación: Gráfico (G), Manipulativo (M); Verbal (V), Simbólico (S) y Situación Real (R). Para facilitar la posterior lectura, se abrevian solo con una inicial las de indicadores de Registros y con dos iniciales las de Definiciones y Fenomenología.

Tabla 3
Definiciones de ángulos, fenomenologías y uso de registros

Autores	Definiciones, fenomenología y uso de registros
Euclides (s. IV a. C.) (citado por Matos, 1990)	Región plana limitada por dos rectas no paralelas (RP), foco en el interior de la región; uso de G, V y S. Conjunto de dos rectas coplanarias distintas que se cortan en un punto (PS); foco en la frontera de la región; uso de G, V y S. La medida de una longitud de arco (ME); uso de G, V y S.
Klein (1849-1925) (citado por Matos, 1990)	Dadas dos semirrectas con vértice común, cantidad de giro necesaria para trasladar una semirrecta a la posición de otra (GI); foco en inclinación, cambio de dirección. Uso de G, V y S.
Hilbert (1862-1943) (citado por Matos, 1990)	Sistema formado por dos semirrectas pertenecientes a distintas rectas coplanarias que se cortan en un punto (PS); foco en la frontera de la región plana; uso de G, V y S.

Tabla 3

Definiciones de ángulos, fenomenologías y uso de registros

Autores	Definiciones, fenomenología y uso de registros
Severi (1879-1961) (citado por Casas-García y Luengo-González (2005))	Conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos de un mismo plano, cuyas fronteras se encuentran en un punto (RP y PS); foco en el interior de la región; uso de S, G y V.
Rey Pastor y Puig Adam (1959)	Cada una de las cuatro regiones en las que el plano queda dividido cuando dos rectas se cortan en un punto (RP); foco en el interior de la región. Regiones no convexas delimitadas por dos semirrectas que se cortan en un punto (RP y PS). Uso de G, V y S.
Freudenthal (1983)	Parte del plano comprendida entre un par desordenado de semirrectas con origen común (RP); foco en la forma geométrica estática. Par ordenado de semirrectas con origen común (PS); cantidad de giro dirigido para llevar la primera a la segunda (GI). Giro dinámico (goniometría) y medida (ME). La distancia o el área entre dos líneas que se cortan (RP, ME). Foco en la abertura y su medida (ME). La diferencia entre la pendiente de dos líneas (GI). Foco en inclinación, cambio de dirección. Uso de registros G, V, S, R y M.
Berthelot y Salin (1996)	Conjunto de puntos situados entre dos semirrectas con un origen común (RP y PS); foco en el interior de la región (RP). Una clase de sectores circulares de igual radio, que pueden ser superponibles (RP); foco en el interior de la región, en la idea de abertura o amplitud (ME). La magnitud de rotación que consigue superponer una semirrecta en otra con origen común (GI); foco en inclinación, cambio de dirección. Uso de los registros G, V, S, M y R.
Clements y Burns (2000)	Giro para pasar de una dirección a otra (Gi); foco en el cambio de dirección y medida con uso de TIC (ME). Uso de registros R, G y S. Registro manipulativo virtual.
Mitchelmore y White (2000)	Intersecciones de caminos y esquinas (PS); foco en la forma de la frontera de la región plana. Giros limitados o ilimitados con diferentes modelos físicos (GI). Porción del plano (RP); foco en el interior de la región, en la idea de abertura, amplitud, la diferencia de orientación (RP, ME, GI). Uso de los registros R, G, M y V.

Tabla 3

Definiciones de ángulos, fenomenologías y uso de registros

Autores	Definiciones, fenomenología y uso de registros
Henderson y Taimina (2005)	Cambio de dirección (GI). Longitud de arco (ME). Espacio entre dos semirrectas (RP, PS). Uso de los registros V, R, G y S.
Fyhn (2008)	Longitud de arco (ME). Región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común; foco en el interior (RP). Par de semirrectas que se cortan en un punto (PS). Uso de los registros V y R.
Thanheiser et al. (2010)	Región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común (RP). Par de semirrectas que se cortan en un punto (PS). Ángulo de rotación (como representación de un giro) para pasar de una semirrecta a otra que comparten el origen (GI). Medida de un ángulo en grados, uso del transportador o de otras piezas con forma de sector circular para superponer (ME) se mide en diferentes unidades, no solo en grados. Uso de los registros V, G y M.
Devichi y Munier (2013)	Ángulo de rotación (GI). Ángulo sectorial, la cantidad compartida por el conjunto de todos los sectores angulares superpuestos (RP). Par de semirrectas que se extienden desde un punto común (PS). Uso de los registros V, R y G.
Kontorovich y Zazkis (2016)	Región del plano comprendida entre un par desordenado de semirrectas con origen común (RP). Par ordenado de semirrectas con origen común, cantidad de giro dirigido para llevar la primera a la segunda (PS, GI y ME). Uso de los registros V, G y S.
Tanguay y Venant (2016)	Dos semirrectas con origen en el mismo punto (PS) dividen el plano en dos regiones (ilimitadas), y cada región se define como un ángulo (RP). Cuando los rayos no son opuestos, una región es convexa y se llama ángulo interior; la otra es no convexa y se llama ángulo exterior. Abertura entre dos objetos rectos, ejemplificado con partes del cuerpo (PS y ME). Uso de los registros G, V, S y R.
Guichard (2018)	Abertura formada por dos líneas o dos planos (PS, GI y ME). Uso de los registros V, R y G.

Tabla 3

Definiciones de ángulos, fenomenologías y uso de registros

Autores	Definiciones, fenomenología y uso de registros
Mullins (2020)	Unión de segmentos con un punto en común (PS). Rotación de una línea (GI). Uso de los registros V y G.

Para operativizar el análisis de los episodios seleccionados, retomamos las propuestas de San Martín (2014) y consideramos las tres categorías del KoT como *codificaciones abiertas*, integrando en una misma unidad las relativas a Definiciones y Fenomenología. Estas categorías se configuraron inicialmente como codificaciones abiertas, en tanto que derivan de la identificación y conceptualización de la noción de ángulo a partir de la información sintetizada en la Tabla 3. Posteriormente, dichas codificaciones abiertas se articularon mediante distintos indicadores, también recogidos en la Tabla 3, siguiendo un enfoque de carácter *top-down*. A partir de este proceso se establecieron las *codificaciones axiales*, que se presentan en la Tabla 4. Las codificaciones abiertas y axiales son las que se utilizan en la sección de Resultados para identificar y caracterizar el conocimiento especializado de la maestra informante movilizado durante los episodios observados cuando trabaja con ángulos en el aula.

Tabla 4

Instrumento: codificaciones abiertas y axiales para categorizar el conocimiento especializado de la maestra informante

Codificación Abierta (KoT-MTSK)	Codificación Axial (análisis <i>Top-down</i>)
Definición y Fenomenología	Abertura - Región del plano (RP)
	Abertura - Par de semirrectas (PS)
	Giro (GI)
	Medida (ME)
Registros de representación	Simbólico (S)
	Verbal (V)
	Gráfico (G)
	Manipulativo (M)
	Situaciones Reales (R)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Comenzamos analizando el episodio 1. En este episodio la maestra muestra el ángulo de medida cero y el ángulo llano utilizando material didáctico.

Episodio 1: ¿Cuándo el ángulo es recto?

- Maestra:* ¿Sólo existirán ángulos rectos?
- Varios estudiantes:* [Se escuchan algunos “no” y otros murmuran].
- Maestra:* Porque yo aquí tengo dos lados, un vértice y están rectos, Ana, ¿qué otro ángulo puede existir?
- Estudiante 1 [Ana]:* Curvos.
- Maestra:* ¿Cómo curvos? Nosotros habíamos dicho que había dos líneas rectas que formamos ángulos, pero aquí, entre este lado del rombo y este, se formará un ángulo? [Mostrando un ángulo obtuso en un rombo que está en la pizarra].
- Estudiantes:* [Se escuchan algunos “no” y otros murmuran].
- Maestra:* Pensemos. ¿Hay dos líneas rectas? [mostrando el rombo]. ¿Aquí hay una línea recta? [mostrando un lado del rombo].
- Estudiantes:* No.
- Maestra:* ¿Qué hace a una línea ser recta?
- Estudiante 2:* Que esté derecha.

[La maestra dibuja en forma paralela a un lado del rombo, una línea ondulada de color azul y el rombo está dibujado con lápiz de color negro].

- Maestra:* ¿Esta está así? (refiriéndose a la línea azul ondulada). ¿Ésta (señalando la línea azul), o ésta (señalando la línea negra). ¿Cuál está recta? O sea, ¿cuál está derecha?
- Maestra:* ¿Cuál de esas dos líneas es una línea recta?
- Estudiante 3:* La de la derecha.
- Maestra:* ¿La negra o la azul?
- Estudiante 3:* La negra. [Indicando el lado del rombo que es una línea recta].
- Maestra:* Pero la diferencia de esta línea recta, con la otra [mostrando el rombo] es que ésta otra está acostada [la maestra se inclina para mostrar con su cuerpo como sería una línea ‘acostada’], está un poco más inclinada, la otra está recta, de manera horizontal. ¿Acá, existirá un ángulo? Sí, porque hay dos líneas rectas, hay un vértice, entonces ¿por qué se caracterizará el ángulo?
- Por ejemplo, aquí, ¿hay un ángulo? [Muestra las geotiras juntas, una sobre otra].

- Estudiante 4:* No.
- Maestra:* ¿Por qué no?
- Estudiante 4:* Porque están juntas.
- Estudiante 2:* No, porque no hay una línea recta que se una con la otra [moviendo una mano desde arriba hacia abajo].
- Maestra:* Sí hay un vértice, porque se unen aquí [mostrando las conexiones donde se juntan las geotiras]. Solo que están así como si estuviera una encima de la otra. [Pausa]. ¿Ustedes ven un ángulo? ¿Dónde lo ven?
- Estudiante 3:* [Muestra las manos, coloca una a continuación de la otra de forma horizontal, deja la mano derecha de forma horizontal y pivota la mano izquierda].
- Maestra:* Y, ¿por qué dice que ahí hay un ángulo?
- Estudiante 3:* Porque tiene un vértice y lo hace ver como un ángulo.
- Maestra:* Ya, muy bien.

A través del dibujo de un rombo en la pizarra, interpretamos que la maestra moviliza su conocimiento sobre ángulos por medio de la definición (PS) utilizando la representación (G). Además, conoce el potencial del uso de las geotiras (M) para acompañar la conceptualización de ángulo. La representación con las geotiras (M) incide en la concepción de ángulo como (PS). Esto último propicia que el estudiantado se confunda con el uso del lenguaje natural y el lenguaje geométrico, donde “lo derecho” parece sinónimo a “recto”. También, respecto al uso del lenguaje, en este episodio aparece el uso de un vocabulario “flotante” sobre la palabra recto: (a) recto versus curvo; (b) recto como dos direcciones de un plano vertical y horizontal y, (c) recto refiriéndose al ángulo comprendido entre dos segmentos ortogonales. Así, las codificaciones axiales (V) y (M) causan confusiones con la categoría (R). Sin embargo, los razonamientos que la maestra propone exigen al estudiante situarse en la concepción de ángulo como (RP), cuando indica: “Sí, hay un vértice porque se unen aquí. Solo que están así, como si estuviera una encima de la otra”.

El uso de lenguaje (V) y el uso de geotiras (M) dan lugar a un conflicto alineado con las investigaciones de Tanguay y Venant (2016), porque la representación dificulta la comprensión del ángulo. Aquí, el ángulo llano o en ángulo cero, cuando el par de semirrectas pertenecen a la misma recta o coinciden, pierde la visibilidad emergiendo dificultades en el aprendizaje como indican Mitchelmore y White (2000).

Episodio 2: Ángulos grandes y ángulos pequeños

En este episodio la maestra, considerando la clasificación de ángulos, pregunta directamente a los estudiantes por ángulos más pequeños o más grandes que un recto. Utilizando las geotiras, diseña un ángulo recto y pregunta a los estudiantes.

- Maestra:* Esto es un ángulo recto [usando las geotiras]. Y ahora, ¿este ángulo es más pequeño o más grande? [Juntando un poco las geotiras].
- Estudiante 2:* Más pequeño.
- Maestra:* Claro, porque las líneas se están haciendo más juntas.
- Estudiante 2:* Porque se inclinó.
- Estudiante 3:* Mientras más juntas estén las dos, más pequeños.
- Maestra:* [Vuelve a repetir el movimiento]. ¿Este ángulo es más pequeño o más grande?
- Estudiante 4:* Es más chico.
- Maestra:* ¿Por qué es más chico?
- Estudiante 4:* Porque se juntaron.
- Maestra:* ¿Qué se juntó?
- Estudiante 4:* Las líneas.
- Maestra:* El ángulo es más pequeño porque las líneas se están haciendo más juntas [con las geotiras forma un ángulo claramente obtuso]. ¿Este ángulo es más pequeño o más grande?
- Estudiante 5:* Más grande.
- Estudiante 6:* Está más separado.
- Maestra:* ¿Qué está más separado? Muy bien, les cuento, el ángulo no son las dos líneas y el vértice, el ángulo es lo que está entre ellos. Toda la distancia que hay entre un lado y el otro, se llama ángulo [señalando con el dedo las geotiras]. Por eso ustedes dicen que son más grandes o más pequeños, porque la distancia creció o disminuyó.

La maestra comienza movilizando el significado de ángulo recto como referente para comparar ángulos mayores o menores a él, por medio de la Definición y Fenomenología (PS) y así avanzar hacia el significado de medida poniendo el foco en la codificación axial de fenomenología de medida (ME) de la abertura de las geotiras, a través de movimientos, tipo giros (GI). La maestra utiliza su conocimiento de otra Definición y Fenomenología, (RP), cuando indica “el ángulo es lo que está entre ellos”. Al mover las geotiras (M), sabe cómo representar con el material un arco que se asemeja a las ideas de Euclides sobre la medida de la longitud de arco, lo que permite clasificar a los ángulos como “más grandes” o “más pequeños” (ME) de acuerdo con la apertura en las geotiras (M). En el proceso de hacer conversiones entre las representaciones (V) y (M) se apoya especialmente

en un lenguaje de signos con los dedos de las manos, simulando trazar un supuesto arco (de una geotira a otra).

Posiblemente, la concepción estática del ángulo mostrada por la maestra informante, le hace desaprovechar la potencialidad que el registro manipulativo presenta para ofrecer la noción dinámica del ángulo. Es decir, las decisiones de enseñanza que toma, basadas en su conocimiento didáctico del contenido, parecen estar condicionadas por su conocimiento de los temas. Se observa así cómo indicadores de conocimiento de un subdominio están relacionados con otros de otros subdominios del modelo MTSK.

Episodio 3: Longitud de los lados de ángulos

Este episodio ocurre cuando la maestra pide a los estudiantes identificar ángulos rectos.

- Maestra:* ¿Hay un ángulo recto? [Muestra un ángulo recto con dos geotiras de diferente longitud].
- Estudiantes:* Sí... más o menos [hay estudiantes con dudas].
- Maestra:* ¿Quién dice que no?
- Estudiante 1:* No, porque no son iguales las líneas.
- Maestra:* ¿Qué características tenía el ángulo recto? ¿Qué sus líneas fueran iguales?
- Estudiante 2:* Mmm... tienen un vértice.
- Maestra:* Ya, el vértice que está ahí dónde se juntan. ¿Qué más? Tiene que haber dos líneas, un vértice y ¿cómo tienen que estar esas dos líneas? Tú dijiste algo, ¿unidas, cierto? Tengo dos líneas. [La maestra muestra dos geotiras de distinto tamaño una en cada mano]. ¿Tienen que ser del mismo tamaño?
- Estudiantes:* No.
- Maestra:* Da lo mismo, pueden ser como ellas quieran. Tú dijiste que había que unir las y tú que tenían un vértice.
- Estudiante 2:* Como la luz.
- Maestra:* ¿Por qué como la luz?
- Estudiante 2:* [Se levanta de su puesto para mostrar la caja donde se encuentra el tubo fluorescente que ilumina la sala y que se encuentra en el techo y que forma un ángulo recto con el techo].
- Maestra:* Ah, súper bien.

El foco del episodio se enmarca en la codificación axial de Definición y fenomenología (PS). La maestra conoce la definición de ángulo asociada a dicha fenomenología y también el potencial de las geotiras (M) de longitudes marcadamente diferentes para enfrentar a su alumnado a un obstáculo didáctico

que se genera por el trabajo con las representaciones más típicas de ángulos, donde la longitud de los lados es la misma. Este obstáculo genera un conflicto al trabajar con el registro de representación manipulativo (M) que simula semirrectas con tiras de longitud claramente distinta, que en realidad representan segmentos. La maestra comprende las limitaciones de los registros de representación simbólico (S) y manipulativo (M) para representar la noción de recta al ser un objeto no acotado y, por eso, insiste en la irrelevancia de la longitud de las geotiras para representar un ángulo recto, movilizándolo así la codificación (PS). Además, ese conocimiento la lleva también a facilitar una comparación en paralelo entre dos representaciones del ángulo recto. Por un lado, la representación del ángulo con las geotiras (M) y, por otro lado, con una representación a partir de un objeto real (R), a la que se refieren como “la luz” (una lámpara empotrada en el techo de forma cuadrada en la que los lados que forman el ángulo recto tienen la misma longitud). Esto evidencia su conocimiento sobre la flexibilidad representacional (Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto et al., 2022): no solo conoce diferentes representaciones, su potencial y sus limitaciones, también sabe cómo compararlas (M, R y V). De nuevo, su toma de decisiones docentes está apoyada en su KoT.

Episodio 4: Elementos que componen un ángulo con los estudiantes.

En este episodio, detrás haber trabajado ya con las clasificaciones de ángulos, la maestra, junto a los estudiantes, intenta ofrecer una definición de ángulo.

- Estudiante 1 [Carolina]:* Son dos líneas unidas por un vértice.
- Maestra:* ¿Está bien lo que dice Carolina?
- Estudiante 2:* No, porque le falta que sean dos líneas rectas.
- Maestra:* Bien, Amanda con precisión. [Mostrando dos geotiras unidas, una recta y una curva]. Entonces vamos a decir que el ángulo son dos líneas rectas que se juntan en un vértice.
- Estudiante 3:* Falta decir que el ángulo es el espacio.
- Maestra:* Muy bien, ¿entendieron lo que dijo?
- Estudiantes:* Sí [a coro].
- Maestra:* El ángulo es el espacio, gracias a eso se compone. Ya Ana, ¿qué podemos decir?
- Estudiante 3:* El ángulo es el espacio entre las dos líneas.
- Maestra:* Entonces ahí viene lo que dice Carolina, entre dos líneas, y aquí hay que decir lo que dijo Amanda ¿entre dos líneas...?
- Estudiantes:* Rectas [a coro].
- Maestra:* Volvamos a lo que dijo Carolina.
- Estudiante 1:* Unidas...

- Maestra:* Pongamos que se juntan, para que seamos más precisos, que se juntan.
- Estudiante 2:* En un vértice.
- Maestra:* Ana dijo algo super importante: no estamos diciendo lo que es un ángulo, estamos diciendo lo que compone a un ángulo. Entonces, ¿qué palabras serán importantes acá?
- Estudiante 2 [Ana]:* Espacio.
- Maestra:* Espacio porque es la abertura. [Abriendo los brazos para mostrar amplitud].
- Estudiante 4:* Vértice.
- Maestra:* Vértice, ¿qué más?
- Estudiante 4:* Líneas rectas.
- Maestra:* Es el espacio entre dos líneas rectas que se juntan en un vértice. O sea, tengo que tener un espacio, dos líneas rectas y un vértice. [Mientras la maestra lo menciona va subrayando estas palabras en la definición de ángulo que ha ido anotando en la pizarra].
- Estudiante 1:* Que se juntan.
- Maestra:* Claro que se juntan en el vértice.

En este episodio la maestra enumera con los estudiantes los elementos para definir ángulo (lados, vértice y espacio) evidenciando su conocimiento de dichos elementos y de cómo coordinar a la vez dos categorías axiales vinculadas a fenomenología (RP) y (PS).

Los principales registros de representación utilizados son el verbal-oral y verbal-escrito (V) acompañado, ocasionalmente, por los registros manipulativo con las geotiras (M) y real con sus brazos (R). El registro verbal-oral está relacionado con el verbal-escrito porque la maestra escribe en la pizarra una definición de ángulo subrayando los elementos de la fenomenología (PS). De nuevo, estos elementos de la situación observada evidencian su conocimiento sobre las codificaciones axiales identificadas.

Episodio 5: Con solo una “línea” basta

En este episodio, se muestra a los estudiantes que con solo una línea se puede formar un ángulo.

- Maestra:* Aquí tenemos un ángulo y estas son las líneas, que nosotros le decimos líneas, pero son rectas... por eso pueden ser grandes o chiquitas, el porte da lo mismo.
- Estudiante 1 [Baltazar]:* ¿Sólo pueden ser dos líneas o puede ser una?

- Maestra:* Tienen que ser siempre dos. A veces la otra es imaginaria, pero siempre está, por ejemplo, mira (dibuja en la pizarra un segmento oblicuo). Alguien te puede decir “Baltazar, aquí hay un ángulo” y tú le puedes decir “pero has hecho sólo una línea”.
- Estudiante 1:* Está invisible.
- Maestra:* Y, ¿dónde está?
- Estudiante 2:* En el metal de la pizarra.
- Maestra:* Exacto, está en el metal de la pizarra, ¿Lo entendiste Baltazar?
- Estudiante 1:* Lo sabía.

Durante el episodio la maestra moviliza la fenomenología (PS) mostrando así su conocimiento de la misma. Utiliza fundamentalmente los registros (V) y (G) en los dibujos de la pizarra, haciendo conversiones entre los dos tipos de registros. En un momento durante el episodio, ante la pregunta de uno de los estudiantes sobre la necesidad de dos rectas para definir el ángulo, la maestra incide en la idea de rectas imaginarias apoyándose en la inclinación de un segmento dibujado partiendo de un vértice de la pizarra, evidenciando su conocimiento de las representaciones del ángulo además de en el registro (V), también en los registros (R) y (G). Aunque parece que la pregunta del alumno viene dada por la dificultad de identificar los dos segmentos del ángulo llano, la maestra, posiblemente condicionada por su objetivo de trabajar desde la fenomenología (PS), no interpreta el verdadero cuestionamiento del alumno.

Para finalizar esta sección, se ha incluido una tabla en la que se resumen los resultados de nuestro análisis de los cinco episodios organizados en las categorías axiales de la codificación abierta construida.

Tabla 5
Codificación episodios

Codificación Abierta (KoT – MTSK)	Codificaciones Axiales Top-down	Episodio
Definición y Fenomenología	Región del Plano (RP)	2, 4
	Par de Semirrectas (PS)	1, 2, 3, 4, 5
	Giro (GI)	2
	Medida abertura (ME)	2
Registros de representación	Simbólico (S)	
	Verbal (V)	1, 2, 3, 4, 5
	Gráfico (G)	5

Tabla 5
Codificación episodios

Codificación Abierta (KoT – MTSK)	Codificaciones Axiales Top-down	Episodio
	Manipulativo (M)	1, 2, 3, 4
	Situaciones Reales (R)	3, 4, 5

CONCLUSIONES

En una primera instancia, hemos constatado que encontrar una definición formal de ángulo es complicado, incluso en trabajos de la literatura especializada tanto en matemáticas como en su didáctica. La noción de ángulo está mediatizada por fenomenología, lo que, epistemológicamente, puede influir en esta dificultad. Aun así, en la escuela se insiste en ofrecer una definición, en muchas ocasiones, única.

Se observa que hay coherencia entre lo encontrado en la literatura revisada y lo evidenciado en los análisis de los episodios: prevalece el enfoque estático al trabajar con los ángulos como región plana o par de semirrectas, siendo esta última fenomenología la más frecuente. Posiblemente, el uso de las geotiras propicia dicha aproximación, aunque este material también pudo haber sido útil para tratar la noción de ángulo como giro.

La noción de ángulo como giro o medida, apenas se ha observado en los episodios analizados, lo que coincide con los resultados de la revisión de la literatura en matemáticas. Sin embargo, desde la didáctica de las matemáticas todos los trabajos revisados en el apartado del marco teórico a partir de Freudenthal (1983) insisten en que en las aulas se deben generar diversas oportunidades en las cuales los estudiantes puedan trabajar para construir su noción de ángulo, con las distintas perspectivas o sus usos, incluidos el giro y la medida.

En cuanto al uso de registros, dado que en las clases analizadas el protagonismo recaía en la maestra, el uso de registro verbal está siempre presente. Sorprendentemente, la maestra apenas se apoya en el registro gráfico, por ello el registro simbólico no emerge en ninguno de los episodios a pesar de la prevalencia de este registro en los textos matemáticos revisados. El uso de un material manipulable como las geotiras sustituye el registro gráfico por el manipulativo.

Cabe destacar que hemos constatado que el registro verbal presenta ciertas dificultades. Por ejemplo, la polisemia en español de la palabra recto genera una confusión en los estudiantes cuando la palabra hace referencia a la condición de rectos de los lados del ángulo y a la condición del ángulo recto (90°), incluso proponen la existencia de ángulos “curvos”. El ángulo cero no tiene curvas ni pendientes, por lo tanto “está recto”, al igual que el ángulo llano. A esta confusión se añade el que las palabras derecho/recto también hacen referencia a la situación

horizontal o vertical del segmento. Nos preguntamos: ¿qué es algo recto para los estudiantes?, ¿algo que está derecho y no es oblicuo? Es importante que los docentes conozcan este obstáculo cultural y puedan tomar decisiones didácticas adecuadas, esto está alineado con Tanguay y Venant (2016) que observaron un abuso en los registros de representación gráfico y simbólico del ángulo en la Educación Primaria, lo que implica limitaciones en el abordaje de su definición como giro o proceso de cambio de dirección, que genera tensiones entre las diferentes definiciones de ángulo en el aula.

Estos resultados nos permiten dar respuesta a nuestro objetivo identificando y categorizando elementos del KoT desde dos perspectivas: la primera desde la revisión de la literatura, y la segunda desde el análisis de la práctica de una maestra. Se muestra la importancia de que el profesorado disponga de un conocimiento especializado sólido sobre ángulos que le permita ofrecer oportunidades de aprendizaje a partir de las diversas fenomenologías y de la explotación de los recursos y materiales de enseñanza. En este trabajo no se considera la representación manipulativa virtual, porque no se utiliza y apenas es nombrada en la literatura revisada, sin embargo, debería ser complementaria a las otras representaciones y considerada como otro registro por su naturaleza interactiva, pero no física.

Esta investigación puede tener también repercusiones directas en los planes de estudios de la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas en primaria, pues indica en qué aspectos del conocimiento MTSK se debe incidir al abordar con los futuros docentes la enseñanza y el aprendizaje del ángulo. En este sentido es especialmente relevante el resumen de la revisión teórica recogido en la Tabla 3.

AGRADECIMIENTOS

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK) PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER Una manera de hacer Europa, y del proyecto PMI UMC1501 PMI-EXAI/PNII/10/2017 de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile.

REFERENCIAS

- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans: Identification d'un obstacle didactique. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 22(2), 417-442. <https://doi.org/10.7202/031887ar>
- Carrillo, J., Zakaryán, D. y Contreras González, L. C. (2013). Avance de un modelo de relaciones entre las oportunidades de aprendizaje y la competencia

- matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(47), 779-804. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400005>
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cayo H. y Contreras L. C. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación Matemática*, 32(2), 39-68. <https://doi.org/10.24844/EM3202.02>
- Charalambous, C. Y. y Litke, E. (2018). Studying instructional quality by using a content-specific lens: the case of the Mathematical Quality of Instruction framework. *ZDM*, 50(3), 445-460. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0913-9>
- Casas-García, L. M. y Luengo-González, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 23(2), 201-216.
- Clements, D. y Burns, B. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 31-45. <https://doi.org/10.1023/a:1003938415559>
- Cullen, A. L., Cullen, C. J. y O'Hanlon, W. A. (2018). Effects of an intervention on children's conceptions of angle measurement. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(1), 136-147. <https://doi.org/10.21890/ijres.382941>
- Devichi, C. y Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.10.001>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Erickson, F. (2006). Definition and analysis of data from videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camili y P. Elmore (Eds.). *Handbook of complementary methods in education research*. (pp. 177-191). American Educational Research Association.
- Fyhn, A. B. (2008). A climbing class reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 19-35. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9087-z>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.
- Guichard, J. P. (2018). Angles in secondary school: Surveying and navigation. En É. Barbin, J.-P. Guichard, M. Moyon, P. Guyot, C. Morice-Singh, F. Métin, M. Bühler, D. Tournès, R. Chorlay y G. Hamon (Eds.), *Let history into the mathematics classroom* (1-15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57150-8_1

- Kontorovich, I. y Zazkis, R. (2016). Turn vs. shape: Teachers cope with incompatible perspectives on angle. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 223-243. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9699-2>
- Kurt-Birel, G., Deniz, S. y Önel, F. (2020). Analysis of primary school teachers' knowledge of geometry. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 12(4), 303-309. <https://doi.org/10.26822/iejee.2020459459>
- Henderson, D. W. y Taimina, D. (2005). *Experiencing geometry. Euclidean and non-euclidean with history*. Cornell University.
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill.
- Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C. y Barrera-Castarnado, V. J. (2021). Specialised knowledge for teaching geometry in a primary education class: Analysis from the knowledge mobilized by a teacher and the knowledge evoked in the researcher. *Mathematics*, 9(21), 2805. <https://doi.org/10.3390/math9212805>
- Martín-Fernández, E., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Conversions between trigonometric representation systems by pre-service secondary school teachers. *PNA*, 16(3), 237-263. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.21957>
- Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator*, 1(1), 4-11. <https://doi.org/10.63301/tme.v1i1.1745>
- Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238. <https://doi.org/10.1023/A:1003927811079>
- MINEDUC. (2012). *Bases curriculares. Primero a Sexto Básico*.
- Montilla, A. P. y Cardeñoso, J. M. (2021). Explorando el conocimiento de los temas (KOT) sobre el límite desde la perspectiva del MTSK. En A. M. Rosas Mendoza (Ed.), *Avances en matemática educativa. Teorías diversas* 8 (pp. 99-120). Editorial Lectorum.
- Mullins, S. B. (2020). Angling for the right result: Students' conceptualizations of angles. *Journal of Research in Education*, 29(1), 1-47.
- Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo-Yañez, J. (2022). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development*, 45(1), 37-80. <https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>
- Muñoz-Catalán, M.C., Joglar-Prieto, N., Ramírez, M. y Codes, M. (2022). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.),

- Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)*, (pp. 235-250). Dykinson, S.L.
- Nolla, A., Muñoz, R., Cerisola, A. y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 96(35.1), 185-208. <https://doi.org/10.47553/rifop.V96i35.1.85882>
- Pachuca, Y. y Zubieta, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática*, 32(1), 38-66. <https://doi.org/10.24844/em3201.03>
- Ramírez-García, M., Belmonte, J. M., Pizarro, N., y Joglar-Prieto, N. (2021). Approach to the early childhood education teacher's specialised knowledge about length and its measurement in a collaborative context of professional development. *Acta Scientiae*, 23(7), 120-147. <https://doi.org/10.17648/ACTA.SCIENTIAE.6311>
- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1959). *Elementos de geometría*. Nuevas gráficas, S.A.
- San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16(1), 104-122.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education*, 45, 607-621. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X01500200>
- Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM*, 48(6), 875-894. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5>
- Thanheiser, E., Browning, C., Moss, M., Watanabe, T. y Garza-Kling, G. (2010). Developing mathematical content knowledge for teaching elementary school mathematics. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 1. <https://www.math.ttu.edu/k12/htdocs/journal/1.contentknowledge/thanheiser01/article.pdf>

Noemí Pizarro
Universidad Metropolitana de
Ciencias de la Educación, Chile
noemi.pizarro@umce.cl

Alicia Zamorano Vargas
Universidad de Chile, Chile
alicia.zamorano@uchile.cl

Nuria Joglar Prieto
Universidad Complutense de Madrid,
España
njoglar@ucm.es

Juan Miguel Belmonte
Universidad Complutense de Madrid,
España
belmonte@ucm.es

Recibido: junio de 2025. Aceptado: octubre de 2025
doi: 10.30827/pna.v20i2.34095



ISSN: 1887-3987

HOW TO ADDRESS ANGLES IN PRIMARY SCHOOL? SPECIALISED KNOWLEDGE AND TEACHING PRACTICE

Noemí Pizarro, Alicia Zamorano-Vargas, Nuria Joglar-Prieto, and Juan Miguel Belmonte

The teaching of angles can be significantly improved when attention is paid to their definitions, uses, meanings, and the various ways they are represented in school mathematics. This study aims to identify and characterise aspects of the specialised knowledge a primary school teacher mobilises when teaching the concept of angle. Two complementary methodological approaches are employed to address the stated objective: a theoretical review of the concept including mathematics and mathematics education research, and the analysis of the teaching practice of a Chilean teacher. Both analyses rely on the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) theoretical model.

Despite the inclusion of angles in primary curricula in many countries, the wide range of contexts in which the concept is used—both within and beyond mathematics—makes its teaching particularly complex. Students frequently experience difficulties grasping the concept, a challenge that may be compounded by teachers' own restricted understandings. It has even been also found that pre-service teachers generally have a restricted conception of the notion of angle, often limited to the static idea of two rays meeting at a vertex, which can, for example, create difficulties later on when they are required to teach trigonometry, which relies on the dynamic concept of angle.

The findings reveal a predominant focus on a static conception of angle, with little or no reference to its dynamic interpretation as a representation of turn. This limited perspective constrains her use of resources, particularly those that could support the development of a dynamic understanding through manipulative representations and may hinder students' conceptual understanding.

This suggests the need for teachers to possess deep, specialised knowledge that enables them to draw on diverse representations and contexts. Such knowledge is essential to create meaningful learning opportunities and to make effective use of didactical tools and materials. This research may also have direct implications for the design of initial and continuing teacher education programmes in primary mathematics, as it highlights specific aspects of MTSK that should be emphasised when addressing the teaching and learning of angles with prospective teachers.