FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO:

Distribuciones y Ecuaciones en Derivadas Parciales

Director:

Rafael Payá Albert

Alumno:

Diego García Zamora

Índice general

Resumen (en inglés)

The final goal of this project is the development of distribution theory in order to give an answer to a classical problem: the existence of solution of partial differential equations. We have decide to separate the text into three different parts: a first chapter introducing distribution theory, a second one dedicated to expose the fundamental tool that we will use and, finally, the third chapter exclusively based on the proof of the Ehrenpreis-Malgrange theorem, which, under certain conditions, grants the existence of such solution.

During Chapter 1: Distributions and Chapter 2: Fourier transform we will follow the same line as W. Rudin in his work *Functional Analysis*[12]. Of course, we have not included proofs of all the results which appear in this project. We develop those that, according to our criterion, are useful in order to the comprehension of the concepts which are treated here. For this same reason, the proof of the theorem which gives name to Chapter 3: Ehrenpreis-Malgrange theorem, belongs to the paper *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem* wrote by P. Wagner about that same theorem published in *The American Mathematical Monthly* [13].

Our main aim in the first chapter will be to find a space where we can solve our problem. The elements of such space should verify some basics rules of calculus and let us, as possible, generalize the classical notions of function and differentiability. We will obtain it after a bit of work.

In the first section from Chapter 1 we will fix once and for always a non-empty open set Ω in $\mathbb{R}^n$ in order to define a topology in the vector space $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ of differentiable complex functions on Ω. As we will see, such topology makes it into a Fréchet space with the Heine-Borel property such that Cauchy sequences will converge. Then we will consider the union of all of the topological subspaces that consist on complex differentiable functions whose support lies on a compact subset $K \subset \Omega$ when we variate the compact set K in order obtain the collection of differentiable functions whose support lies on Ω which will be denoted as $\mathcal{D}(\Omega)$ and its elements will be named as test functions. This set will be provided with a new topology very similar to the one constructed before in order to consider the topological dual space $\mathcal{D}'(\Omega)$, the space of distributions that gives name to the chapter. The main result on this first section will be a characterization of the continuity of linear applications on $\mathcal{D}(\Omega)$ which will allows us to work with distributions without take into account their topological nature:

Proposition. *Let Λ be a linear functional on $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. The following conditions are equivalent:*

i) $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) To every compact $K \subset \Omega$ there exist $N \in \mathbb{N}_0$ and $C > 0$ such that:

$$|\Lambda\phi| \leq C||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ : sop(\phi) \subset K$$

where $||\cdot||_N$ is given by $||\phi||_N = \text{máx}\left\{|D^\alpha\phi(x)| \ : x \in \Omega, |\alpha| \leq N\right\}$.

At this point we can introduce the first example of a distribution that is not a function in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: the famous Dirac measure δ_{x_0} centred in $x_0 \in \Omega$ which maps a function $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ into the number $\phi(x_0)$.

The problem of inducing classical calculus in this new space of distributions will be addressed in the second section. We will first notice that it is possible to identify some of the elements of $\mathcal{D}'(\Omega)$ with locally integrable complex functions on Ω to continue defining a sort of derivative in $\mathcal{D}'(\Omega)$ such that when we consider the derivative of elements equivalent to functions we obtain the elements equivalent to the derivative of those functions. Later, we will define the product of functions and distributions and prove that we can find a sort of Leibniz's rule when we multiply functions and distributions to end stating some properties of sequences of distributions and defining the usually called weak limit.

Proposition. ***Leibniz formula.*** *Let $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ and $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ be a distribution and a function respectively. Then, the next equality holds for every multi-index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:*

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\Lambda)$$

where $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Q}$ are known numbers.

The next section treats about local properties of distributions. We start defining when two distributions will be equal on an open set $\omega \subset \Omega$. As we will see, that definition will allow us to describe a distribution globally from its local behaviour. The proof of that needs from partitions of unity that we will have constructed just before.

After generalize the notion of support of functions into our case, we will do the same with convolutions. We first infer how should act convolution when factors are a distribution and a test function in order to, after prove that some properties of convolution of functions are still verifying, define, under certain hypothesis, the convolution of two distributions. At this point we remark a pair of results that will be useful later:

Proposition. *Consider $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

i) If supp(u) or supp(v) is a compact set, then

$$u * v = v * u$$

ii) If at least two of supp(u), supp(v) or supp(w) are compact sets, then

$$(u * v) * w = u * (v * w)$$

Corollary. *Consider $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ and fix a multi-index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. The next statements hold:*

i) $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$. *In particular* $u = \delta * u$

ii) If at least one of sop(u) or sop(v) are compact sets then

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$$

If in the first part of this work we constructed the space where we will solve our problem, in Chapter 2 we will introduce the crux tool which we will use in order to reach our target: the Fourier transform. We dedicate a first section to remember how that transform acts over complex integrable functions in order to generalize it to the space of distributions later.

After introduce, in a second section, a new space of functions, which will be named the Schwarz class $\mathcal{S}_n$, consisting on the usually called rapidly decreasing functions. In this space Fourier transform will result to be a linear and continuous bijection (whose inverse application is also continuous) from $\mathcal{S}_n$ into $\mathcal{S}_n$ (the inversion theorem). Among the results we expose during this chapter we can highlight the following one:

Theorem.

i) $\mathcal{S}_n$ *is a Fréchet space.*

ii) If $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *is a polynomial,* $g \in \mathcal{S}_n$ *and* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *is a multi-index, then the mappings*

$$f \to Pf \quad f \to gf \quad f \to D^\alpha f$$

are continuous linear mappings of $\mathcal{S}_n$ to $\mathcal{S}_n$.

iii) If $f \in \mathcal{S}_n$ and $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ is a polinomial, then:

$$\mathcal{F}(P(D)f) = P(i(\cdot))\hat{f} \text{ and}$$
$$\mathcal{F}(Pf) = P\left(i(\cdot)\right)\hat{f}$$

where $(\cdot)$ represents the n-dimensional variable.

We will dedicate the last section in this chapter to a very special kind of distributions, usually called tempered distributions $\mathcal{S}'_n$, which will be a sort of topological dual space of $\mathcal{S}_n$ and, therefore, they will inherit the goods properties of $\mathcal{S}_n$ respect on Fourier transform. We will se that those distributions are not but the elements in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ which posse continuous extensions to $\mathcal{S}_n$. The first examples of those distributions may be distributions with compact support, polynomials, measurable functions whose absolute value is majorized by some polynomial and every function in $L^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 \leq p \leq \infty$. In the same line of what we do with Fourier transform in $\mathcal{S}_n$, we remark the next result:

Theorem.

i) The Fourier Transform is a linear continuous bijection of $\mathcal{S}'_n$ onto $\mathcal{S}'_n$, of period 4, whose inverse is also continuous.

ii) Si $u \in \mathcal{S}'_n$ and $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ is a polynomial, then

$$\mathcal{F}(P(D)u) = P(i(\cdot))\hat{u} \text{ and}$$
$$\mathcal{F}(Pu) = P\left(i(\cdot)\right)\hat{u}$$

In the third and last chapter we will reach the culminating point of this project. As we will see, the Ehrenpreis-Malgrange theorem allows us to prove that, under certain hypothesis on $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, we can find a solution in the distribution sense to the problem:

$$P(D)u = v \quad [*]$$

We will first clarify the concept of fundamental solution, which will be the key in order to reach our goal, since those special solutions will allows us to generate the solutions of $[*]$; to, finally, make the proof of the result that gives name to the chapter. Before doing that, we will introduce a couple of technical lemmas. The first one treats about solving a linear equation system consisting of a Vandermonde matrix and certain vector from the canonical basis of $\mathbb{R}^n$, whose proof will be made through residue theorem. The second one will be a collection of three formulas inferred from theorems, propositions, lemmas and corollaries dispersed throughout the document. The last result in this project will be, as announced, the Ehrenpreis-Malgrange theorem.

Theorem. ***Ehrenpreis-Malgrange.*** *Let $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ be a non constant complex polynomial in $n \in \mathbb{N}$ real variables and $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ with compact support. Then the problem*

$$P(D)u = v$$

has a solution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Instead of developing the classical proof, based on Hahn-Banach theorem; the one we introduce here will be the constructive proof which P. Wagner published in *The American Mathematical Monthly*[13] as we said before. Due to this theorem highlights the utility of distribution theory in its application to linear partial differential equations, already very early constructive proof were found. The proof we will show consist on constructing the fundamental solution as a sum of finitely many distributions.

Introducción

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de la teoría de distribuciones con el fin de dar respuesta a un problema clásico: la existencia de solución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En lo referente a estructura hemos decidido separar el escrito en tres partes diferenciadas: un primer capítulo introductorio a la teoría de distribuciones, un segundo tema en el que presentaremos la herramienta fundamental que vamos a utilizar y, finalmente, el tercer capítulo que dedicaremos exclusivamente a la prueba del teorema de Ehrenpreis-Malgrange el cual, bajo ciertas condiciones, garantiza la existencia de tal solución.

Como veremos más adelante la necesidad de la noción de distribución se basa en una premisa muy simple: derivar las funciones que no son derivables. Una motivación clásica consiste en pararse a analizar la conocida fórmula

$$\int_{]a,b[} u(x)v'(x)\ dx = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - \lim_{x\to a} u(x)v(x) - \int_{]a,b[} v(x)u'(x)\ dx$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $u, v :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivables y tales que $u'v$ y $v'u$ son integrables. Si tomamos como v una función meseta, indefinidamente derivable y de soporte compacto contenido en $]a, b[$, la identidad anterior se convierte en:

$$\int_{]a,b[} u(x)v'(x)\ dx = -\int_{]a,b[} v(x)u'(x)\ dx$$

y vemos que salvo la integral, derivar u y multiplicar por v se traduce en derivar v y hacer el producto por u. Si tomamos por definición de ser derivable que la integral del producto de u por la derivada de cualquier meseta v sea integrable, tendremos una suerte de propiedad que verifica no sólo cualquier función derivable sino otras muchas más. En tal caso podríamos redefinir la derivada de la función u como aquella función u^* que verifica:

$$\int_{]a,b[} u^*(x)\phi(x)\ dx = -\int_{]a,b[} \phi'(x)u(x)\ dx$$

para cualquier función meseta $\phi \in \mathcal{C}^\infty]a,b[$. A modo de ejemplo podemos considerar el siguiente problema: encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que se verifique la ecuación diferencial

$$f'(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

entendida en el sentido anterior. Si tomamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| = \text{abs}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ y tomamos una meseta $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\phi'(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^+} x\phi'(x)\ dx + \int_{\mathbb{R}^-} x\phi'(x)\ dx =$$
$$-\int_{\mathbb{R}^+} \phi(x)\ dx - \int_{\mathbb{R}^-} \phi(x)\ dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\text{sgn}(x)\ dx$$

y en cierta manera f parece ser una solución no derivable de la ecuación propuesta. En vista de esto, da la impresión de que en este caso el problema de encontrar una solución no radica tanto en la existencia de esta, sino más bien en lo que nosotros entendemos por derivada. Enfocaremos el primer capítulo a dar rigor a esta forma de derivar, aunque no será este el punto de partida. Comenzaremos dotando al conjunto de funciones indefinidamente derivables sobre un abierto euclídeo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de una topología, la cual utilizaremos para definir una nueva dentro de una colección de funciones meseta muy particulares. Al considerar el dual topológico de este último, a cuyos elementos llamaremos *distribuciones*, nos toparemos con la grata sorpresa de que, además de representantes de todas las funciones de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, podemos encontrar elementos que se llevan muy bien no sólo con esta forma de derivar sino también con reglas clásicas del cálculo. En el segundo capítulo trataremos de extender la noción de transformada de Fourier que conocemos para funciones integrables a este nuevo contexto para, finalmente, comprobar en el último mediante el teorema de Ehrenpreis-Malgrange que este espacio no sólo es el idóneo para plantear el problema, sino también para resolverlo.

De alguna manera, lo expuesto aquí nos recuerda a la construcción del cuerpo complejo $\mathbb{C}$. Partíamos del problema de encontrar una raíz de un polinomio con coeficientes reales, que no siempre podíamos resolver en $\mathbb{R}$, y configurábamos un ambiente nuevo en el que todas las ecuaciones tuviesen solución. Nuestro caso es similar: partiendo del problema de encontrar las soluciones de una ecuación (diferencial) desarrollaremos una nueva teoría, que tendrá importancia en sí misma, a partir de la cual podremos dar respuesta a nuestro problema.

En el desarrollo de los dos primeros capítulos de este documento nos hemos basado esencialmente en la obra de W. Rudin *Functional Analysis* [12],mientras que la prueba del teorema que da nombre al tercero procede de un artículo de P. Wagner publicado en *The American Mathematical Monthly* [13].

Tal prueba, a diferencia de las pruebas clásicas, basadas en la aplicación del teorema de Hahn-Banach, se trata de una demostración constructiva. Puesto que este resultado pone de manifiesto la utilidad de la teoría de distribuciones en lo referente a su aplicación al campo de las ecuaciones diferenciales, ya desde su publicación la comunidad matemática comenzó a buscar demostraciones que permitiesen calcular la solución de forma explícita. El prototipo de todas ellas es la denominada "escalera de Hörmander" que emplea particiones de la unidad (ver [11]), no obstante la fórmula obtenida depende de los ceros del polinomio y no es muy explícita en este sentido. Será en 1994 cuando H. König publique una nueva prueba consistente en representar la solución fundamental integrando la transformada de Fourier de ciertas funciones de módulo unidad (ver [6]). La prueba que presentaremos aquí consiste en una simplificación de este procedimiento, construyendo la solución buscada como suma finita de distribuciones.

Por último comentamos que no hemos incluido con detalle las demostraciones de todos los resultados que aparecen en este escrito. Desarrollamos aquí únicamente las que, a nuestro criterio, son útiles para aprender a manejar los conceptos con los que trabajamos. Por la misma razón nos hemos decantado por la citada prueba de P. Wagner en lugar de la desarrollada por Rudin en el ya mencionado libro.

Capítulo 1

Distribuciones

La finalidad de este primer capítulo no es otra que confeccionar un espacio que pueda ser candidato a la resolución de nuestro problema. Los elementos de tal conjunto, a los que llamaremos distribuciones, deberán respetar ciertas reglas clásicas del cálculo y permitirnos generalizar, en la medida de lo posible, las nociones tradicionales de función y diferenciabilidad.

Dado $\emptyset \neq \Omega = \Omega^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio en $\mathbb{R}^n$ definiremos una topología localmente convexa en el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ en la cual las sucesiones de Cauchy convergerán. Si ahora fijamos un compacto $K \subset \Omega$ podemos considerar el subespacio de funciones derivables de soporte contenido en K en cual podremos dotar de la topología inducida. La unión de todos estos espacios nos permite considerar un nuevo conjunto: el subespacio de funciones con soporte compacto y contenido en Ω, al que denotaremos $\mathcal{D}(\Omega)$, que será dotado de una nueva topología íntimamente ligada a las anteriores y cuyo dual topológico, $\mathcal{D}'(\Omega) := \left\{\phi : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} : \phi \text{ es lineal y continua}\right\}$, será el conjunto buscado.

Posteriormente comprobaremos que, efectivamente, en $\mathcal{D}'(\Omega)$ podemos encontrar una fotocopia de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ así como definir una *nueva* forma de derivar que generaliza a la derivada clásica. Tras analizar detenidamente alguna que otra propiedad de las distribuciones, generalizaremos también el producto de convolución, que, como veremos, será clave en la resolución de nuestro problema.

1.1. Funciones Test y Distribuciones

Dedicaremos esta primera sección a formalizar la construcción del espacio que buscamos, no sin antes aclarar la notación que vamos a seguir. Fijado $n \in \mathbb{N}$, emplearemos el término MULTI-ÍNDICE para referirnos a la *n-upla*

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

de enteros no negativos α_k para $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. Tal *n-upla* tendrá asociada el operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

de orden

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

siempre que tales derivadas parciales estén definidas. Además, entenderemos por $|\alpha| = 0$ que $D^\alpha f = f$. Dados dos multi-índices α y β de $n \in \mathbb{N}$ componentes definimos la suma de multi-índices como

$$\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$$

y escribiremos $\beta \leq \alpha$ cuando se verifique que $\beta_j \leq \alpha_j \ \forall j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. En tal situación también podemos definir la diferencia de multi-índices mediante:

$$\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n).$$

Teniendo en cuenta esto, fijado $\emptyset \neq \Omega = \Omega^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ (donde Ω^0 denota el interior de Ω) diremos que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ES DE CLASE $\mathcal{C}^\infty$, lo cual denotaremos por $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, si $D^\alpha f \in \mathcal{C}(\Omega)$, esto es, si $D^\alpha f$ tiene sentido y es continua; para todo multi-índice α.

Recordemos ahora que el SOPORTE DE UNA FUNCIÓN $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se define como

$$\mathrm{sop}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

donde hemos usado la barra superior para denotar la clausura o cierre del conjunto.

Por último, comentamos que si $x \in \mathbb{R}^n$ y α es un multi-indice, escribiremos x^α para referirnos a la expresión:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Una topología para $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Consideremos ahora un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Definimos el conjunto $\mathcal{D}_K$ como la colección de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuyo soporte se encuentra contenido en K:

$$\mathcal{D}_K := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \mathrm{sop}(f) \subset K \right\}$$

y notemos que si $K \subset \Omega$ el conjunto $\mathcal{D}_K$ puede identificarse con un subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Nuestro objetivo es dotar a $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de una topología que, como veremos, estará íntimamente ligada con la noción de convergencia uniforme.

Teorema 1.1.1. *En el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ podemos definir una topología localmente convexa $\tilde{\tau}$ verificando:*

i) El espacio topológico $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \tilde{\tau})$ es un espacio de Fréchet, esto es, la topología $\tilde{\tau}$, además de ser localmente convexa, está inducida por una métrica completa e invariante por traslaciones.

ii) En $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \tilde{\tau})$ se cumple la propiedad de Heine-Borel.

iii) Para cada compacto $K \subset \Omega$, el subespacio $\mathcal{D}_K$ es un cerrado en $\tilde{\tau}$.

Demostración. Comenzamos tomando una sucesión de subconjuntos compactos de Ω $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $K_i \subset K_{i+1}$ y $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ y, fijado $N \in \mathbb{N}$, definimos seminormas p_N en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ por

$$p_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| : \ x \in K_N, \, |\alpha| \leq N\}, \, f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \tag{1.1}$$

Tal colección define una topología $\widetilde{\tau}$ en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que será metrizable, localmente convexa e invariante por traslaciones (ver 1.37 y 1.38 (c) en [12]) y que viene determinada por la base de entornos centrada en cero definida por:

$$\widetilde{\beta} := \left\{V_N := \left\{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \ p_N(f) < \frac{1}{N}\right\} : N \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para entender cómo funciona esta topología resulta imprescindible relacionarla con la noción de convergencia. Sean $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ una sucesión de funciones convergiendo a f en la topología $\widetilde{\tau}$. Entonces:

$$f_n \xrightarrow{\widetilde{\tau}} f \iff \forall V_N \in \widetilde{\beta} \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ f_n - f \in V_N \iff$$

$$\iff \forall N \in \mathbb{N} \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ p_N(f_n - f) < \frac{1}{N} \iff$$

$$\iff \forall N \in \mathbb{N} \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ \max\{|D^\alpha(f_n - f)(x)| : \ x \in K_N, \, |\alpha| \leq N\} < \frac{1}{N},$$

que es precisamente la convergencia uniforme sobre compactos de Ω de $\{D^\alpha(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $D^\alpha(f)$ para todo α multi-índice de orden $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$.

Como consecuencia inmediata destacamos un hecho que nos será útil en lo sucesivo: puesto que $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \widetilde{\tau})$ es un espacio métrico, la continuidad de funciones está caracterizada mediante sucesiones y dado $x_0 \in \Omega$ la aplicación $\phi_{x_0} : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(f) = f(x_0) \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es continua en esta topología.

Con esto presente, comprobar que los $\mathcal{D}_K$ son cerrados en $\widetilde{\tau}$ no es complicado, pues estos conjuntos no son más que la intersección de los núcleos de estas aplicaciones, para x variando en el complementario de K:

$$\mathcal{D}_K = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \setminus K \right\} =$$
$$= \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : f(x) = 0 \right\} = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \ker(\phi_x).$$

Para probar la complitud, tomamos una sucesión de Cauchy $\left\{ f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \widetilde{\tau})$. Fijado $N \in \mathbb{N}$, encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $p, q > n_0$ se tiene $f_p - f_q \in V_N$. En tal caso, $|D^\alpha f_p(x) - D^\alpha f_q(x)| < 1/N \ \forall x \in K_N$ siempre que $|\alpha| \leq N$, por lo que cada $\left\{ D^\alpha f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función g_α (¡es equivalente!). Como sabemos que si una sucesión de funciones $\left\{ f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de clase $\mathcal{C}^1$ converge uniformemente sobre compactos a una función h y la sucesión de derivadas $\left\{ h'_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge de la misma forma a otra función $\widetilde{h}$ se tiene h de clase $\mathcal{C}^1$ y $h' = \widetilde{h}$; es inmediato que $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $g_\alpha = D^\alpha g_0$, por lo que $\left\{ f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}} \to g$ en la topología $\widetilde{\tau}$ de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Esto concluye la prueba de que tanto $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \widetilde{\tau})$ como $\mathcal{D}_K$ con la topología inducida $\widetilde{\tau}|_{\mathcal{D}_K}$ son espacios de Fréchet.

A continuación comprobamos que $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \widetilde{\tau})$ verifica la *propiedad de Heine-Borel*. Supongamos entonces que $E \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es cerrado y acotado. Como E es un subconjunto de un espacio métrico, basta ver que toda sucesión de elementos de E admite una parcial convergente. Puesto que la acotación de E equivale a:

$$\exists M_N > 0 : p_N(f) \leq M_N \ \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in E$$

podemos usar las desigualdades $|D^\alpha f(x)| \leq M_N \forall x \in K_N, |\alpha| \leq N$ para deducir la equicontinuidad de $\left\{ D^\beta f : f \in E \right\}$ en K_{N-1} para $|\beta| \leq N - 1$. Usando el teorema de Ascolí-Arcelá y el proceso de diagonalización de Cantor(Apendix A de [12]), para cada sucesión de elementos de E encontramos una parcial $\left\{ f_m \right\}_{m\in\mathbb{N}}$

para la que $\{D^\beta f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω para todo multi-índice β, por lo que $\{f_m\}$ converge en la topología de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, como buscábamos.

Por último observemos que, al trabajar con espacios de dimensión infinita, la propiedad de Heine-Borel implica que tanto $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ como $\mathcal{D}_K$ no pueden ser espacios normados (*Teorema de Riesz*). □

Nota. *En lo que resta de documento haremos el abuso de notación estándar e identificaremos el espacio topológico* $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \widetilde{\tau})$ *con* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Finalmente, resaltamos en una proposición la caracterización de la convergencia en esta topología usada en la demostración anterior.

Proposición 1.1.2. *Sean* $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *y* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. *Equivalen:*

i) $f_n \xrightarrow{\widetilde{\tau}} f$.

ii) La sucesión $\{D^\alpha(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre compactos de* Ω *a* $D^\alpha(f)$ *para todo milti-índice* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

El espacio de las Funciones Test

Al igual que antes, tomemos $\emptyset \neq \Omega = \Omega^0 \subset \mathbb{R}^n$ y para cada $K \subset \Omega$ compacto consideremos el conjunto $\mathcal{D}_K$ asociado. Definimos el CONJUNTO DE FUNCIONES TEST (SOBRE Ω) como la unión de todos estos $\mathcal{D}_K$:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ comp. de } \Omega} \mathcal{D}_K$$

Es muy fácil comprobar que $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma y producto por escalares sobre funciones complejas. Además, es claro que:

$$\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \Longleftrightarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \text{ y } \mathrm{sop}(\phi) \subset \Omega \text{ es compacto}$$

Consideremos ahora las normas

$$||\phi||_N := \text{máx}\big\{|D^\alpha\phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \le N\big\} \text{ para } \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ N \in \mathbb{N}_0 \qquad (1.2)$$

La propia definición de éstas nos sugiere la idea de que las restricciones de tales normas a un $\mathcal{D}_K$ inducirá la misma topología en $\mathcal{D}_K$ que las seminormas p_N definidas en la fórmula 1.1 a partir de cierta sucesión de compactos $\big\{K_N\big\}_{N\in\mathbb{N}}$. En efecto, dado $K \subset \Omega$ compacto podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_N\ \forall N \ge N_0$. Además, si $N \ge N_0$ se tiene $||\phi||_N = p_N(\phi)\ \forall\phi \in \mathcal{D}_K$. Por otro lado, puesto que

$$||\phi||_N \le ||\phi||_{N+1} \text{ y } p_N(\phi) \le p_{N+1}(\phi)$$

la topología que induce cada familia de seminormas no depende del primer valor de N, esto es, del menor compacto de la sucesión,(basta comprobar que cada par de topología tiene los mismos abiertos) por lo que concluimos que ambas topologías de $\mathcal{D}_K$ coinciden y una base de entornos centrada en cero será:

$$V_n := \big\{\phi \in \mathcal{D}_K :\ ||\phi||_N < \tfrac{1}{N}\big\}\,,\ N \in \mathbb{N}.$$

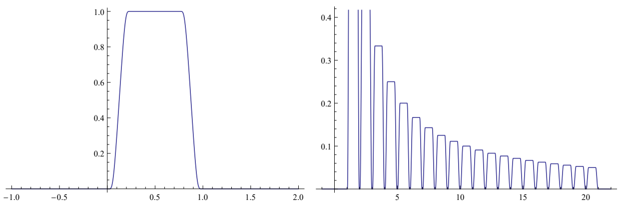
Nota 1.1.3. *Estas normas definidas en la fórmula 1.2 definen una topología metrizable localmente convexa en $\mathcal{D}(\Omega)$, sin embargo tal topología no es completa. Basta tomar $\Omega = \mathbb{R}$ y $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que*

$$sop(f) \subset [0,1]\,,\ \phi(x) > 0 \forall x \in]0,1[.$$

Definiendo, para $m \in \mathbb{N}$

$$\psi_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \tfrac{1}{k}\phi(x-k)$$

tenemos que $\{\psi_m\}$ es una sucesión de Cauchy en esta topología, pero su límite no tiene soporte compacto y por tanto no puede ser un elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Para convencerse de esto, basta ver la forma de, por ejemplo, la función ψ_{20} obtenida *a partir de* $\phi(t) := h(4 * t - 2)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ *donde* $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *es la función meseta definida en el apéndice A. Los grafos de* ϕ *y* ψ_{20} *están recogidos en la figura 1.1*



(a) Grafo de ϕ (b) Grafo de ψ_{20}

Figura 1.1: Grafos

A continuación definiremos una topología τ en $\mathcal{D}(\Omega)$ localmente convexa en la que toda sucesión de Cauchy sí converje, aunque a cambio, sacrificaremos que tal topología sea metrizable.

Teorema 1.1.4. *Sea* $K \subset \Omega$ *un subconjunto compacto de una abierto no vacío* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y denotemos por* τ_K *a la topología inducida por* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *(definida en la sección 1.1) en* $\mathcal{D}_K$ $\widetilde{\tau}|_K$ *y llamemos* β *al conjunto formado por los subconjuntos* $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *convexos y equilibrados tales que* $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ $\forall K \subset \Omega$*:*

$$\beta := \{W \subset \mathcal{D}(\Omega) : W \text{ convexo y equilibrado con } \mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K \ \forall K \subset \Omega\}.$$

Entonces el conjunto

$$\tau := \{\bigcup \phi + W : \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\, W \in \beta\}$$

verifica:

i) τ *es una topología en* $\mathcal{D}(\Omega)$ *y* β *una base de entornos centrada en cero para* τ.

ii) τ *hace de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Nota 1.1.5. *Una demostración de esto puede encontrarse en 6.4 de [12].*

Nota 1.1.6. *Un* CONJUNTO W *de un espacio vectorial* V *se dice* EQUILIBRADO *si* $\forall\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq 1$ *se tiene que* $\alpha W \subset W$.

Nota 1.1.7. *En lo sucesivo identificaremos el espacio topológico* $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ *con el conjunto* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Sin más objetivo que facilitar el trabajo con la topología τ recién definida comprobamos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.8.

i) *Un subconjunto convexo y equilibrado* $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *es abierto si y sólo si* $V \in \beta$.

ii) *La topología* τ_K *de* $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *coincide con la topología inducida por* τ *en* $\mathcal{D}_K$.

iii) *Si* $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *está acotado existen* $K \subset \Omega$ *compacto tal que* $E \subset \mathcal{D}_K$ *y una sucesión* $\{M_N\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ *tal que* $\forall\phi \in E$ *se verifica:*

$$||\phi||_N \leq M_N, \, \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

iv) $\mathcal{D}(\Omega)$ *tiene la propiedad de Heine-Borel.*

v) *Si* $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{D}(\Omega)$, *entonces existe* $K \subset \Omega$ *compacto tal que* $\phi_p \in \mathcal{D}_K, \, \forall p \in \mathbb{N}$ *y además:*

$$\lim_{p,q\to\infty} ||\phi_p - \phi_q||_N = 0, \, \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

vi) *Si* $\{\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}} \to 0$ *en* $\mathcal{D}(\Omega)$ *existe* $K \subset \Omega$ *compacto tal que* $sop(\phi_p) \subset K, \, \forall p \in \mathbb{N}$ *y para cada multi-índice* α *se tiene* $\{D^\alpha\phi_p\}_{p\in\mathbb{N}} \to 0$ *uniformemente.*

vii) *En* $\mathcal{D}(\Omega)$ *toda sucesión de Cauchy converge.*

Demostración.

i) Puesto que $\beta \subset \tau$ basta comprobar que si $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ es convexo, equilibrado y abierto (en $\mathcal{D}(\Omega)$), entonces $\mathcal{D}_K \cap V \in \tau_k$ $\forall K \subset \Omega$ compacto. Probemos que es entorno de todos sus puntos. Sea $\phi \in \mathcal{D}_K \cap V$. Como $\phi \in V \in \tau$ encontramos $W \in \beta : \phi + W \subset V$. En tal caso $\phi + \mathcal{D}_K \cap W \subset \phi + \mathcal{D}_K \cap V$ como buscábamos (notemos que $\phi + \mathcal{D}_K \cap W$ es abierto de $\mathcal{D}_K$ por tener este último la topología inducida por el espacio de Frechet $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$).

ii) Queremos ver si $\tau_K = \tau|_{\mathcal{D}_K}$ para $K \subset \Omega$ compacto. Probamos la doble inclusión. Supongamos primero $O \in \tau|_{\mathcal{D}_K}$. Entonces existe $E \in \tau$ tal que $O = \mathcal{D}_K \cap E$. Para $\phi \in O$, por ser $E \in \tau$, encontramos $W \in \beta$ de forma que $\phi + W \subset E$. Teniendo en cuenta que $\phi + W \cap \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K$ concluimos $\phi + W \cap \mathcal{D}_K \subset O$. Escojamos ahora $E \in \tau_K$ y veamos que existe $V \in \tau : E = \mathcal{D}_K \cap V$. Por definición de τ_K, para $\phi \in E$ encontramos $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ de forma que $\left\{\psi \in \mathcal{D}_K : ||\psi - \phi||_N < \delta\right\}$. Tomando $W_\phi = \left\{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : ||\psi||_N \leq \delta\right\}$ se tiene $W_\phi \in \beta$ y $\mathcal{D}_K \cap (\phi + W_\phi) = \phi + (\mathcal{D}_K \cap W_\phi) \subset E$ y basta tomar $V = \bigcup_{\phi \in E} \phi + W$.

iii) Lo hacemos por contrarrecíproco. Sea $E \subset \mathcal{D}(\Omega) : E \not\subseteq \mathcal{D}_K$ $\forall K \subset \Omega$ compacto. Usando el recubrimiento por compactos definido en la demostración de 1.1.1 encontramos una sucesión $\left\{\phi_m\right\}$ de elementos de E y otra $\left\{x_m\right\}$ de elementos de Ω tales que $\phi_m(x_m) \neq 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\left\{x_n\right\}$ no tiene límite en Ω (de tenerlo podríamos encontrar un compacto conteniendo a los elementos de la sucesión). Consideremos el conjunto

$$W = \left\{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\phi(x_m)| < m^{-1}|\phi_m(x_m)|\right\}$$

Como cada compacto $K \subset \Omega$ sólo contiene un número finito de elementos de $\left\{x_m\right\}$, $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ y $W \in \beta$. Como $\phi_m \notin mW$, ningún múltiplo de W puede contener a E y este no es acotado (en el sentido de los espacios vectoriales topológicos, ver nota 1.1.9), como buscábamos. Para concluir la prueba de este apartado, escojamos $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ acotado. Por *ii)*, E es acotado en algún $\mathcal{D}_K$ y por tanto

$$\sup\big\{||\phi||_N : \phi \in E\big\} < \infty \ \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

iv) Es consecuencia de aplicar *iii)*, pues $\mathcal{D}_K$ tiene la *propiedad de Heine-Borel.*

v) Dado que toda sucesión de Cauchy es acotada (ver Teorema 1.29 de [12]) *iii)* nos dice que cada sucesión de Cauchy $\big\{\phi_m\big\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ está contenida en algún $\mathcal{D}_K$. Por *ii)* $\big\{\phi_m\big\}$ es también una sucesión de Cauchy en τ_k.

vi) Es una reformulación de *vi).*

vii) Consecuencia directa de *ii)*, *v)* y la complitud de $\mathcal{D}_K$. □

Nota 1.1.9. ***Sobre la acotación de conjuntos.***

i) Espacios vectoriales topológicos. *Sea* (X, τ) *e.v.t.* $E \subset X$ *se dice acotado si* $\forall V \in \mathcal{U}_0^\tau \ \exists s > 0 : E \subset tV \ \forall t > s$.

ii) Espacios métricos. *Sea* (M, d) *e.m.* $E \subset M$ *se dice acotado si* $\exists K > 0 : d(x, y) < K \ \forall x, y \in E$.

A continuación probaremos una caracterización de la continuidad de aplicaciones lineales de dominio $\mathcal{D}(\Omega)$ cuyo codominio es un espacio tolopógico localmente convexo arbitrario. Un vistazo rápido al enunciado bastará para recordarnos a la que tenemos para aplicaciones lineales entre espacios normados.

Nota 1.1.10. *Daremos por conocido que en un espacio vectorial topológico* V *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$ *son equivalentes:*

1. $E \subset V$ *está acotado.*

2. *Si* $\big\{x_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* E *y* $\big\{\alpha_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ *es una sucesión en* $\mathbb{K}$ *convergiendo a cero, entonces* $\big\{x_n\alpha_n\big\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

Nota 1.1.11. *También usaremos que para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ *en un espacio vectorial topológico metrizable existe una sucesión* $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ *de escalares positivos tal que* $\{x_n\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

Teorema 1.1.12. Caracterización de Continuidad. *Sea* Y *un espacio topológico localmente convexo y* $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ *una aplicación lineal. Son equivalentes:*

i) Λ *es continua.*

ii) Λ *es acotada, esto es, lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados.*

iii) Si $\{\phi_m\} \to 0$ *en* $\mathcal{D}(\Omega)$ *entonces* $\{\Lambda\phi_m\} \to 0$ *en* Y.

iv) Para todo $K \subset \Omega$ *compacto, la restricción de* Λ *a* $\mathcal{D}_K$ *es continua.*

Demostración.

$i) \to ii)$. Supongamos Λ continua y tomemos $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ acotado. Consideremos $W \in \mathcal{U}_0^Y$ un entorno de cero en Y. Puesto que Λ es continua y $\Lambda 0 = 0$ encontramos un entorno $V \in \mathcal{U}_0^{\mathcal{D}(\Omega)}$ de forma que $\Lambda(V) \subset W$. La acotación de E nos da un $t \in \mathbb{R}$ tal que $E \subset tV$, por lo que

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW.$$

$ii) \to iii)$. Supongamos que Λ es acotada y que $\{\phi_m\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Aplicando la proposición 1.1.8 encontramos $K \subset \Omega$ tal que $\{\phi_m\} \to 0$ en $\mathcal{D}_K$ de forma que la restricción de Λ a tal $\mathcal{D}_K$ es acotada. Como $\{\phi_m\} \to 0$, en particular está acotada y, puesto que Λ es acotada, la sucesión $\{\Lambda\phi_m\}$ estará acotada. Usando la nota 1.1.11 (en $\mathcal{D}_K$) encontramos una sucesión $\{\gamma_m\} \to \infty$ de escalares positivos tal que $\{\gamma_m\phi_m\} \to 0$. En tal caso la sucesión $\{\Lambda(\gamma_m\phi_m)\}$ también está acotada y usando la nota 1.1.10 con $E = \{\Lambda(\gamma_m\phi_m) \colon m \in \mathbb{N}\}$ y $\alpha_n = \gamma_n^{-1}$ concluimos que

$$\{\Lambda(\phi_m)\} = \{\gamma_m^{-1}\Lambda(\gamma_m\phi_m)\} \to 0$$

como buscábamos.

iii) $\to$ *iv)*. Tomemos $\{\phi_m\} \to 0$ en $\mathcal{D}_K$. Usando *ii)* de la proposición 1.1.8 tenemos $\{\phi_m\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Utilizando *iii)* $\{\Lambda\phi_m\} \to 0$ en Y y como $\mathcal{D}_K$ es metrizable conluimos *iv)*.

iv) $\to$ *i)*. Sea $U \in \mathcal{U}_0^Y$ convexo y equilibrado. Entonces $V := \Lambda^{-1}(U)$ es convexo y equilibrado. Por *i)* de la proposición 1.1.8

$$V \in \tau \Longleftrightarrow \mathcal{D}_K \cap V \in \tau_K \ \forall \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega).$$

por lo que *i)* y *iv)* son equivalentes. □

Corolario 1.1.13. *Fijado un multi-índice α el operador $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ es una aplicación continua.*

Demostración. Basta darse cuenta de que $||D^\alpha\phi||_N \leq ||\phi||_{N+|\alpha|}$ $\forall N \in \mathbb{N}_0$, por lo que D^α es continuo en cada $\mathcal{D}_K$. □

El concepto de Distribución

Definición 1.1.14. Distribución *Diremos que un funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$ es una distribución en Ω si es contínuo en la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Al conjunto de todas las distribuciones en Ω lo denotaremos $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Comenzamos esta, tan breve como trascendente, sección enunciando la que será la definición en torno a la que girará el resto de este escrito. A continuación reenunciamos el teorema 1.1.12 desde el el punto de vista de las distribuciones, obteniendo así una caracterización.

Proposición 1.1.15. Caracterización de Distribuciones. *Sea Λ un funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$. Son equivalentes:*

i) $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) Para todo $K \subset \Omega$ *compacto existen* $N \in \mathbb{N}_0$ *y* $C > 0$ *tales que:*

$$|\Lambda\phi| \leq C||\phi||_N \;\forall \phi \in \mathcal{D}_K. \tag{1.3}$$

Diremos que Λ es una DISTRIBUCIÓN DE ORDEN $N \in \mathbb{N}_0$ si $N \in \mathbb{N}_0$ es el mínimo entero no negativo para el cual la desigualdad 1.3 se verifica para todo $K \subset \Omega$ compacto. Caso de no existir tal N diremos que Λ es una DISTRIBUCIÓN DE ORDEN INFINITO.

Introducimos ahora el primer ejemplo de distribución, cuya importancia, como veremos más adelante, será vital para alcanzar nuestro objetivo.

Definición 1.1.16. MEDIDA DE DIRAC EN $\mathbb{R}^N$. *Dado* $x \in \Omega$ *definimos la aplicación lineal* $\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ *como la aplicación que nos lleva cada* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *en el escalar* $\phi(x)$*:*

$$\delta_x(\phi) := \phi(x)$$

Cuando x=0 a la aplicación $\delta := \delta_0$ *se la llama* MEDIDA DE DIRAC EN $\mathbb{R}^N$.

Notemos que la caracterización de la proposición 1.1.15 nos asegura que δ_x es una distribución de orden 0.

Como conclusión a esta sección vamos a aclarar las propiedades de la topolgía de $\mathcal{D}(\Omega)$ que tenemos pendientes. En primer lugar fijemos $K \subset \Omega$ compacto, y expresemos $\mathcal{D}_K$ en la forma:

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{Ker}(\delta_x).$$

Usando esta identidad y el apartado *ii)* de la proposición 1.1.8 junto con el hecho de que en un espacio vectorial topológico cualquier subespacio que sea espacio de Fréchet es un cerrado *(ver 1.27 de [12])* concluimos que $\mathcal{D}_K$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}(\Omega)$. Además $\mathcal{D}_K$ tiene interior vacío en la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Usando el recubrimiento numerable por compactos de Ω $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ introducido en la sección 1.1 tenemos

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_n}$$

y $\mathcal{D}(\Omega)$ es de primera categoría en sí mismo. Puesto que toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$ converge, el Teorema de Baire nos dice que $\mathcal{D}(\Omega)$ no puede ser metrizable.

1.2. Cálculo en Distribuciones

En esta segunda sección abordaremos el problema de inducir el cálculo de $\mathbb{R}^n$ en el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ recién definido. Comenzaremos viendo que podemos identificar de forma razonable ciertos elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ con funciones de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y continuaremos definiendo una *derivada* en $\mathcal{D}'(\Omega)$ de forma que cuando derivemos elementos equivalentes a funciones obtengamos el elemento equivalente a la derivada de la función. Posteriormente comprobaremos que la regla del producto se lleva medianamente bien con esta redefinición de derivada, finalizando la sección con algunas propiedades sobre sucesiones de distribuciones.

Funciones vistas como Distribuciones

Supongamos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Consideremos el funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$ definido por

$$\Lambda_f(\phi) := \int_\Omega \phi(x)f(x)dx \ \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.4}$$

Puesto que $\exists K \subset \Omega$ compacto : $\phi \in \mathcal{D}_K$, se tiene:

$$|\Lambda_f(\phi)| \leq \left(\int_K |f|\right) \cdot ||\phi||_0$$

y la proposición 1.1.15 garantiza que $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

En adelante abusaremos del lenguaje y llamaremos funciones a estas distribuciones, pues, en vista de la relación 1.4 parece más que razonable identificar la distribución Λ_f con f.

Hacemos ahora lo propio con medidas de Borel complejas sobre Ω y medidas positivas sobre Ω localmente finitas. Llamemos μ a una medida de esta índole y definamos la distribución:

$$\Lambda_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi \, d\mu \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.5}$$

la cual identificaremos con μ.

Derivación de Distribuciones

Sea α un multi-índice y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. Motivados por la fórmula de Green, versión en dimensión arbitraria de la fórmula de integración por partes para funciones de una variable, definimos la derivada α-ésima como el funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.6}$$

Siempre que $|\Lambda \phi| \leq C||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}_K$, pues en estas condiciones se tiene

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| \leq C||D^\alpha \phi||_N \leq C||\phi||_{N+|\alpha|}$$

y por la caracterización 1.1.15 $D^\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Notemos ahora que fijada una distribución Λ y dos multi-índices α y β se tiene:

$$D^\alpha D^\beta \Lambda = D^{\alpha+\beta} \Lambda = D^\beta D^\alpha \Lambda$$

puesto que D^α y D^β conmutan sobre funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Derivada de una función vista como distribución

A continuación vamos a intentar convencernos de que hemos hecho bien en llamar función a la distribución Λ_f asociada a la función localmente integrable f. El problema que abordamos es claro: cuando $D^\alpha f$ exista en el sentido clásico y tanto f como $D^\alpha f$ sean locamente integrables en Ω, se debe verificar que

$$\Lambda_{D^\alpha f} = D^\alpha \Lambda_f.$$

No obstante, a poco que se piense esta última igualdad equivale a que $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tenga:

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(D^\alpha \phi)(x)\ dx = \int_\Omega (D^\alpha f)(x)\phi(x)\ dx$$

lo cual es fácil de comprobar cuando f tiene derivadas parciales continuas de orden menor o igual que $N \in \mathbb{N}$, esto es, $f \in \mathcal{C}^N(\Omega)$; y $|\alpha| \leq N$.

Producto de funciones y distribuciones

Sean $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Definimos la DISTRIBUCIÓN PRODUCTO de f y Λ, que denotaremos $f\Lambda$ como:

$$(f\Lambda)(\Phi) := \Lambda(f\phi)\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.7}$$

En primer lugar, notemos que la fórmula 1.7 tiene perfecto sentido, pues, para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Otro detalle a tener en cuenta podría ser que Λf y $f\Lambda$, contrariamente a lo que podría sugerir la notación; son objetos matemáticos distintos: mientras que el primero es un escalar, el segundo es una distribución. Para comprobar esto último, nos basaremos en la fórmula de Leibniz para el producto de funciones:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta} f)(D^\beta g),\ \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \tag{1.8}$$

Donde los $c_{\alpha\beta}$ son escalares conocidos pero irrelevantes para probar lo que buscamos. Como $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para cada compacto $K \subset \Omega$ encontramos $C > 0$, $N \in \mathbb{N}_0 : |\Lambda(\phi)| \leq C||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Utilizando la fórmula de Leibniz para funciones 1.8 podemos encontrar $\widetilde{C} > 0$ (dependiente de f, K y N) tal que $||f\phi||_N \leq \widetilde{C}||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}_K$. Puesto que en tal caso $|(f\Lambda)(\phi)| \leq C\widetilde{C}||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}_K$, sólo queda aplicar el teorema 1.1.15.

Con el fin de adaptar al caso que nos ocupa esta fórmula probamos el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1. ***Fórmula de Leibniz.*** *Sean $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución y $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ una función. Para todo multi-índice α se tiene:*

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\Lambda) \tag{1.9}$$

Demostración. Comenzamos la prueba fijando $u \in \mathbb{R}^n$ y definiendo $h_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante $h_u(x) := exp(u \cdot x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, que verifica $D^\alpha h_u = u^\alpha h_u$. Aplicando la fórmula de Leibniz para funciones a $f = h_u$, $g = h_v$ obtenemos:

$$(u+v)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} u^{\alpha-\beta} v^\beta \quad u,\, v \in \mathbb{R}^n.$$

En particular:

$$\begin{aligned} u^\alpha = (v + (-v+u))^\alpha &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} v^{\alpha-\beta}(-v+u)^\beta = \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} v^{\alpha-\beta} \sum_{\gamma \leq \beta} c_{\beta\gamma}(-1)^{|\beta-\gamma|} v^{\beta-\gamma} u^\gamma = \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} (-1)^{|\gamma|} v^{\alpha-\gamma} u^\gamma \sum_{\gamma \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $(-1)^{|\beta-\gamma|} = (-1)^{\sum_{k=1}^n \beta_k - \gamma_k} = (-1)^{\sum_{k=1}^n \beta_k - \sum_{k=1}^n \gamma_k} = (-1)^{|\beta|}(-1)^{-|\gamma|} = (-1)^{|\beta|}(-1)^{|\gamma|}$ para β y γ multi-índices con $|\gamma| \leq |\beta|$. Si ahora comparamos los eslabones primero y último obtenemos:

$$\sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}=\begin{cases}(-1)^{|\alpha|} & \text{si } \gamma=\alpha\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},$$

que usado junto a la fórmula de Leibniz para funciones aplicada a $D^\beta(D^{\alpha-\beta}f\phi)$ nos da la igualdad:

$$\sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}D^\beta(\phi D^{\alpha-\beta}f)=\sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}\sum_{\gamma\leq\beta}c_{\beta\gamma}(D^{\alpha-\gamma}f)(D^\gamma\phi)=$$

$$=\sum_{\gamma\leq\alpha}(D^{\alpha-\gamma}f)(D^\gamma\phi)\sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}=(-1)^{|\alpha|}fD^\alpha\phi.$$

Finalizamos fijando $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ y operando:

$$D^\alpha(f\Lambda)(\phi)=(-1)^{|\alpha|}(f\Lambda)(D^\alpha\phi)=(-1)^{|\alpha|}\Lambda(fD^\alpha\phi)=$$

$$\sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}\Lambda(D^\beta(\phi D^{\alpha-\beta}f))=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(D^\beta\Lambda)(\phi D^{\alpha-\beta}f)=$$

$$=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}((D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\Lambda))(\phi)$$

como buscábamos. □

Sucesiones de distribuciones y límite débil

En este punto es importante recordar cómo funcionan las topologías débiles en un espacio vectorial $X\neq\emptyset$ dotado de una topología τ. Dada una familia

$$\mathcal{F}:=\left\{f_k:(X,\tau)\to(X_k,\tau_k):(X_k,\tau_k)\text{ esp. top. y } f_k \text{ ap. lineal, } k\in\mathbb{N}\right\}$$

diremos que $\tau_{\mathcal{F}}$ es la TOPOLOGÍA INICIAL en X para $\mathcal{F}$ si es la topología menos fina (con menos abiertos) que hace continuas a todas las f_k.

Llamamos TOPOLOGÍA DÉBIL de (X,τ) a la topología inicial $w(X)=\tau_{X^*}$ en X para $\mathcal{F}=X^*$. Por otro lado, notemos que para $x\in X$ podemos considerar el funcional lineal y continuo, llamado usualmente *inyección canónica en el bidual*, $J_x : X^* \to \mathbb{R}$ definido por $J_x(f) := f(x)$, $\forall f \in X^*$ y definir la TOPOLOGÍA DÉBIL* $w^*(X)$ en X^* como la topología inicial en X^* para $\mathcal{F} := \{J_x : X^* \to \mathbb{R} : x \in X\}$.

Puesto que $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(\Omega)$, podemos considerar la topología débil* en $\mathcal{D}'(\Omega)$ inducida por $\mathcal{D}(\Omega)$, que lo convierte, véase Sección 3.14 de [12], en un espacio localmente convexo.

Una vez aclarado esto, diremos que una sucesión de distribuciones sobre Ω $\{\Lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a la distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, hecho que notaremos por $\{\Lambda_k\} \to \Lambda$, si $\{\Lambda_k\}$ converge a Λ en la topología débil* de $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, si:

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda_k\phi = \Lambda\phi \;\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Enfatizamos que, en particular, si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente integrables, diremos que $\{f_k\}$ converge a la distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (en el sentido de las distribuciones) cuando

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi(x) f_k(x)dx = \Lambda(\phi) \;\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A modo de ejemplo, para ilustrar lo 'fácil' que resulta converger en este sentido, citamos las siguientes proposiciones:

Proposición 1.2.2. *Sean* $\Lambda_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *tales que para cada* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *existe* $\lim_{k\to\infty} \Lambda_K(\phi)$. *Entonces la aplicación* $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\Lambda(\phi) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_K(\phi) \;\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

es lineal y continua ($\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$) *y para todo multi-índice* α *se tiene que:*

$$D^\alpha\Lambda_k \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{\to} D^\alpha\Lambda.$$

Demostración. Sea un compacto $K \subset \Omega$. Puesto que $\Lambda(\phi) = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k(\phi)$ existe para toda $\phi \in \mathcal{D}_K$, y dado que $\mathcal{D}_K$ es espacio de Fréchet, el *teorema de Banach-Steinhaus* (ver Teorema 2.8 de [12]) implica que la restricción de Λ a $\mathcal{D}_K$ es continua. Aplicando el teorema 1.1.12 obtenemos la continuidad de Λ y como la linealidad es clara concluimos que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En tal caso:

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \lim_{k\to\infty} \Lambda_k(D^\alpha \phi) = \lim_{k\to\infty} (D^\alpha \Lambda_k)(\phi).$$

□

Proposición 1.2.3. *Consideremos* $\Lambda_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *y* $g_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *tales que* $\{\Lambda_k\} \to \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *en sentido* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *y* $\{g_k\} \to g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *en el sentido* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. *Entonces*

$$\{g_k \Lambda_k\} \to g\Lambda.$$

Demostración. La prueba es consecuencia del Teorema 2.17 de [12]. □

1.3. Distribuciones a nivel local

Sean Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dado un abierto no vacío $\emptyset \neq \omega = \omega^0 \subset \Omega$ diremos que Λ_1 y Λ_2 son localmente iguales sobre ω, afirmación que notaremos por $\Lambda_1 = \Lambda_2$ en ω, si

$$\Lambda_1(\phi) = \Lambda_2(\phi)\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Esta definición nos permite estudiar distribuciones a nivel local y, como veremos, describir globalmente una distribución a partir de su comportamiento local. Previamente, demostramos un lema sobre particiones de la unidad que nos será útil en el futuro.

Lema 1.3.1 (Existencia de particiones de la unidad en Ω). *Sea* $\Gamma \subset \tau_{\mathbb{R}^n}$ *una colección de abiertos euclídeos cuya unión es* Ω *(en adelante, a un subconjunto* Γ *de estas características lo llamaremos recubrimiento por abiertos de* Ω*). Entonces existe una sucesión* $\{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *de funciones test tal que* $0 \leq \psi_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *verificando:*

i) *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $\omega \subset \Gamma$ *tal que* $sop(\psi_k) \subset \omega$.

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ *para todo* $x \in \Omega$.

iii) *Para todo compacto* $K \subset \Omega$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y un abierto* $W = W^0 \supset K$ *tal que* $\sum_{k=1}^{n_0} \psi_k(x) = 1$ $\forall x \in W$.

Notemos que de ii) y iii) se deduce que cada punto de Ω *tiene un entorno que sólo interseca con un número finito de* $sop\phi_k$. *Por esto, a una tal colección* $\{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *la llamaremos* PARTICIÓN DE LA UNIDAD LOCALMENTE FINITA SUBORDINADA AL RECUBRIMIENTO Γ.

Demostración. Sea $S \subset \Omega$ un subconjunto denso y numerable de Ω. Tomemos ahora la sucesión $\{\overline{B}(p_k, r_k)\}$ de todas las bolas cerradas de centro $p_k \in S$ y $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ y tal que existe $\omega \in \Gamma$ verificando $\overline{B}(p_k, r_k) \subset \omega$. En tal caso, podemos expresar

$$\Omega = \bigcup B(p_k, r_k/2).$$

Utilizando la función meseta estándar definida en el apéndice A, encontramos funciones $\phi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ tales que $0 \leq \phi_k \leq 1$ verificando:

$$\phi_k|_{B(p_k,r_k/2)} = 1 \text{ y } \phi_k|_{\Omega\setminus\overline{B}(p_k,r_k)} = 0.$$

Definimos ahora por inducción la sucesión de funciones test en Ω $\{\psi_k\}$ dada por:

$$\psi_1 = \phi_1$$
$$\psi_{k+1} := \phi_{k+1} \prod_{j=1}^{k} (1 - \phi_j) \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Comprobemos que esta sucesión es la que buscamos. Puesto que fuera de $\{\overline{B}(p_k, r_k)\}$ ϕ_k se anula, tomando como ω el abierto en el que hemos exigido que esté $\{\overline{B}(p_k, r_k)\}$

cuando hemos definido la sucesión de bolas cerradas concluimos trivialmente *i)*. Por inducción podemos comprobar fácilmente que

$$\sum_{j=1}^{k} \psi_j = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_j) \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Usando que $\phi_k|_{B(p_k, r_k/2)} = 1$ se deduce que

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j(x) = 1 \ \forall x \in \bigcup_{j=1}^{m} B(p_j, r_j/2)$$

lo que nos da *ii)*. Por último, si $K \subset \Omega$ compacto, encontramos un número finito m de bolas abiertas de la forma $B(p_k, r_k/2)$ que lo contienen (recordemos que éstas recubrían todo Ω) y $K \subset \cup_{k=1}^{m} B(p_k, r_k/2)$, de donde, junto con la última ecuación, concluimos *iii)*. □

Teorema 1.3.2. *Sea Γ un recubrimiento por abiertos de $\emptyset \neq \Omega = \Omega^0 \subset \mathbb{R}$ y supongamos que para cada $\omega \in \Gamma$ tenemos una distribución $\Lambda_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$ de forma que*

$$\Lambda_{\omega'} = \Lambda_{\omega''} \ en \ \omega' \cap \omega'' \ \forall \omega' \cap \omega'' \neq \emptyset.$$

Entonces existe una única distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\Lambda = \Lambda_\omega \ en \ \omega \ \forall \omega \in \Gamma.$$

Demostración. Sea $\{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ una partición de la unidad asociada a Γ construida como en el Lema anterior y consideremos un abierto $\omega_k \in \Gamma$ tal que $\text{sop}(\psi_k) \subset \omega_k$. En tal caso, dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ podemos escribir $\phi = \phi \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi \psi_k$ que es una suma finita, pues $\text{sop}(\phi)$ es compacto. Puesto que además hemos tomado ψ_k de forma que $\text{sop}(\psi_k \phi) \subset \text{sop}(\psi_k) \subset \omega_k \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ podemos definir la aplicación $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante

$$\Lambda(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_k}(\psi_k \phi),$$

que es claramente lineal. Veamos que Λ es continua. Sea $\left\{\phi_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ una sucesión de funciones test tal que $\left\{\phi_k\right\} \to 0$ en la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$. Como para cada $j \in \mathbb{N}$ encontramos $K_j \subset \Omega$ compacto y tal que $\operatorname{sop}(\phi_j) \subset K_j$, usando *iii)* del lema 1.3.1 encontramos $m_j \in \mathbb{N}$ y $W_j \supset K_j$ tal que

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_k = 1 \ \forall x \in W_j$$

por lo que para $j \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\Lambda(\phi_j) = \sum_{j=1}^{m_j} \Lambda_{\omega_k}(\psi_k \phi_j).$$

Cuando $j \to \infty$ tenemos $\left\{\phi_k \phi_j\right\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ y la continuidad de los Λ_{ω_k} nos da $\Lambda(\phi_j) \to 0$. Usando la caracterización 1.1.12 concluimos que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veamos que la distribución Λ es la que buscamos. Tomemos $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ con $\omega \in \Gamma$. Entonces para $j \in \mathbb{N}$ se tiene $\psi_j \phi \in \mathcal{D}(\omega_j \cap \omega)$. Como $\Lambda_{\omega'} = \Lambda_{\omega\prime}$ en $\omega' \cap \omega''$ para cualesquiera ω', $\omega'' \in \Gamma$ tenemos $\Lambda_{\omega_j}(\psi_j \phi) = \Lambda_{\omega}(\psi_j \phi)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y

$$\Lambda(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_j}(\psi_j \phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{\omega}(\psi_j \phi) = \Lambda_{\omega}(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \phi) = \Lambda_{\omega}(\phi),$$

como buscábamos. Por último comprobamos la unicidad tomando $\overline{\Lambda} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\overline{\Lambda} = \Lambda_\omega$ en ω para todo $\omega \in \Gamma$. En tal caso, para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ debe verificarse que

$$\overline{\Lambda}(\phi) = \overline{\Lambda}(\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\Lambda}(\psi_k \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_k}(\psi_k \phi) = \Lambda(\phi).$$

$\square$

1.4. Soporte de Distribuciones

Orientamos esta sección a generalizar el concepto de *soporte de una función*. Supongamos $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que Λ SE ANULA en un abierto $\emptyset \neq \omega = \omega^0 \subset \Omega$

si $\Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega)$. Sea $\Gamma = \{\omega \subset \Omega : \Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\omega)\}$ y denotemos por W a la unión de todos los ω donde Λ se anula, esto es, $W = \bigcup_{\omega \in \Gamma} \omega$; definimos el Soporte de la distribución Λ como el complementario de W en Ω. Veamos que además Λ se anula en W. Sea $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad localmente finita asociada al recubrimiento Γ de W. En tal caso, para $\phi \in \mathcal{D}(W)$, se tiene:

$$\Lambda(\phi) = \Lambda(\sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \phi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Lambda(\psi_k \phi) = 0,$$

donde hemos usado que $\mathrm{sop}(\phi)$ es compacto (y la serie es una suma finita) y que $\mathrm{sop}(\psi_k \phi) \subseteq \mathrm{sop}(\psi_k) \subset \omega_k \in \Gamma \ \forall k \in \mathbb{N}$. A la hora de manejarnos con este nuevo concepto, el siguiente resultado, cuya prueba se encuentra en 6.24 de [12]; nos será útil:

Proposición 1.4.1. *Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se verifica:*

i) Si para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene $sop(\phi) \cap sop(\Lambda) = \emptyset$, entonces $\Lambda(\phi) = 0$.

ii) Si $sop(\Lambda) = \emptyset$ entonces $\Lambda = 0$.

iii) Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de forma que existe $\Omega \supset V = V^0 \supset sop(\Lambda)$ y tal que $\psi(x) = 1 \ \forall x \in V$. Entonces $\psi\Lambda = \Lambda$.

iv) Si $sop(\Lambda)$ es un compacto de Ω, entonces Λ tiene orden finito; de hecho existen $C > 0$ $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\Lambda(\phi)| \leq C||\phi||_N \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Además, Λ se puede extender de forma única a un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

1.5. Convolución

Dedicaremos esta última sección del capítulo a generalizar la definición de producto de convolución al conjunto de las distribuciones sobre un abierto $\Omega \subset$

$\mathbb{R}^n$. Comenzaremos deduciendo cómo actuaría la convolución cuando sus factores son una distribución y una función test para después, tras comprobar que ciertas propiedades del producto de convolución de funciones se mantienen, definir la convolución de dos distribuciones, aunque bajo ciertas hipótesis.

Comenzamos recordando que para $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ la CONVOLUCIÓN de u y v $(u * v) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se define por:

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \cdot v(x - y) dy \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

siempre que tal integral esté definida, al menos, para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y fijemos $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos $(\tau_x(u)), \tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por:

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x) \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$
$$\tilde{u}(y) = u(-y) \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Puesto que

$$(\tau_x \tilde{u})(y) = \tilde{u}(y - x) = u(x - y),$$

se tiene

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tau_x \tilde{u})(y) dy.$$

de donde intuimos que la definición natural de CONVOLUCIÓN DE LA FUNCIÓN TEST $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Y LA DISTRIBUCIÓN $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(u * \phi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, debería ser la función sobre Ω:

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \tilde{\phi}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

pues basta darse cuenta de que estas dos últimas expresiones coinciden para funciones $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localmente integrables.

Por otro lado, si buscamos conseguir que la relación para funciones localmente integrables dada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x u)(y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tau_{-x}v)(y)dy$$

siga siendo válida, podemos definir la traslación de la distribución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ $(\tau_x u) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mediante:

$$(\tau_x u)(\phi) = u(\tau_{-x}\phi) \;\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Nota. *Para comprobar que $(\tau_x u)$ es una distribución basta usar la caracterización de la continuidad por sucesiones.*

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades de este producto recién definido. Probaremos aquí las dos primeras mientras que la prueba de la tercera puede consultarse en 6.30.c de [12].

Proposición 1.5.1. *Sean $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ϕ, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se verifican:*

i) $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \;\forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *y*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

iii) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi$.

Demostración.
i) Fijemos $y \in \mathbb{R}^n$. Sin más que operar:

$$\tau_x(u * \phi)(y) = u * \phi(y - x) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi})$$
$$(\tau_x u) * \phi(y) = \tau_x u(\tau_y \widetilde{\phi}) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi})$$
$$u * (\tau_x \phi)(y) = u(\tau_y \widetilde{\tau_x \phi}) = u(\tau_y \phi(x - \cdot)) = u(x - y - \cdot) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi}).$$

ii) Aplicando u a la identidad

$$\tau_x(\widetilde{D^\alpha \phi}) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tau_x \widetilde{\phi}$$

obtenemos

$$(u * (D^\alpha \phi))(x) = ((D^\alpha u) * \phi)(x),$$

que es parte de *ii)*. Para comprobar el resto tomamos $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ y para $r > 0$ definimos $\xi_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re})$. Aplicando *i)*:

$$\xi_r(u * \phi) = u * (\xi_r \phi).$$

Si hacemos $r \to 0$, $\xi_r \phi \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} D_e \phi$ y en consecuencia

$$\tau_x \widetilde{\xi_r \phi} \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \tau_x \widetilde{D_e \phi}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\lim_{r \to 0} u * (\xi_r \phi) = u * (D_e \phi)(x)$$

Por lo que $D_e(u * \phi) = u * (D_e \phi)$ y sólo queda iterar para obtener *ii)*. $\square$

Usando esta nueva definición de convolución no es difícil comprobar que toda distribución puede verse como límite (en la topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$) de una sucesión de funciones diferenciables.

Proposición 1.5.2. *Sea $\left\{h_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones verificando:*

$$h_j(x) = j^n h(jx), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

para cierta $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $h \geq$ y $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$. Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, entonces:

i) $\lim\limits_{j \to \infty} \phi * h_j \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{=} \phi.$

ii) $\lim\limits_{j \to \infty} u * h_j \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}{=} u.$

Demostración. Comencemos tomando $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. En tal caso

$$\phi * h_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) h_j(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) j^n h(j(x-y))dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(-yj^{-1}+x)h(y)dy.$$

Como h y ϕ tienen soporte compacto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y concluir que $\phi * h_j$ converge uniformemente a ϕ sobre compactos de $\mathbb{R}^n$. Haciendo lo propio con $D^\alpha \phi$ concluimos *i)*. Usando lo que acabamos de comprobar junto con *iii)* de 1.5.1 y la continuidad de u sobre $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$u(\widetilde{\phi}) = (u * \phi)(0) = \lim_{j \to 0} u * (h_j * \phi)(0) = \lim_{j \to 0} (u * h_j) * \phi(0) = \lim_{j \to 0} u * h_j(\widetilde{\phi})$$

Donde $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es arbitraria. Usando la caracterización de convergencia en la topología débil* obtenemos *ii)*. □

El siguiente resultado recoge una propiedad clave del producto objeto de estudio.

Teorema 1.5.3. *Sean* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $L\phi = u * \phi,\ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* L *es una aplicación lineal y continua verificando:*

$$\tau_x L = L \tau_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

Recíprocamente, si $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *es lineal, continua y verifica* $\tau_x L = L\tau_x\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. *existe* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $L\phi = u * \phi \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Además tal* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *es única.*

Demostración. Por 1.5.1 $\tau_x(u * \phi) = u * \tau_x$. Para comprobar la continuidad basta ver que al restringirnos a cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ la aplicación $L : \mathcal{D}_K \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es continua. Como ambos son espacios de Frechet podemos aplicar el teorema de la gráfica cerrada (consultar Teorema 2.15 de [12]). Supongamos pues que $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

es una sucesión de funciones en $\mathcal{D}_K$ convergiendo a $\phi \in \mathcal{D}_K$ y que $\{u * \phi_j\} \to f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y veamos que $f = u * \phi$. Fijado $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\{\tau_x \widetilde{\phi_j}\} \to \tau_x \widetilde{\phi}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ y

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} u(\tau_x \widetilde{\phi_j}) = u(\tau_x \widetilde{\phi}) = u * \phi(x).$$

Para probar el recíproco definamos $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por $u(\phi) = (L\widetilde{\phi})(0)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La continuidad de u deriva de que tanto la aplicación $\phi \to \widetilde{\phi}$ como la evaluación en cero son aplicaciones continuas. Por tanto $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y

$$(L\phi)(x) = \tau_{-x}(L\phi)(0) = L(\tau_{-x}\phi)(0) = u(\widetilde{\tau_{-x}\phi}) = u(\tau_x \widetilde{\phi}) = u * \phi(x).$$

Vemos la unicidad supongamos $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tales que $L(\phi) = u_1 * \phi = u_2 * \phi \;\; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces $(u_1 - u_2) * \phi = 0 \;\; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por lo que

$$(u_1 - u_2)(\widetilde{\phi}) = (u_1 - u_2) * \phi(0) = 0 \; \forall \; \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y $u_1 = u_2$ en $\mathbb{R}^n$.

□

Supongamos ahora $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto. Por la proposición 1.4.1 podemos extender de forma única a u para que esta sea un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. En estas condiciones podemos definir la CONVOLUCIÓN DE $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ CON SOPORTE COMPACTO Y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mediante la fórmula:

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \tilde{\phi}) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Al igual que antes, el siguiente resultado, de prueba desarrollada con detalle en 6.35 de [12]; sigue siendo cierto.

Proposición 1.5.4. *Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto y $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

i) $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *y*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Si además $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*:*

iii) $u * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

iv) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi = (u * \psi) * \phi.$

Para acabar la sección desarrollaremos la prometida definición de convolución de distribuciones (cuando al menos una tiene soporte compacto) enunciando finalmente un resultado que nos será útil más tarde.

Sean $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, con $\mathrm{sop}(u)$ o $\mathrm{sop}(v)$ compacto en $\mathbb{R}^n$. Definimos $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$L\phi = u * (v * \phi), \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Comprobemos que está bien definido. Si v tiene soporte compacto entonces $v * \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $L\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, si el compacto es $\mathrm{sop} u$ $v * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $L\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Notemos que además $\tau_x L = L\tau_x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. En estas condiciones definimos la CONVOLUCIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ DE, AL MENOS UNA, SOPORTE COMPACTO como la distribución $u * v : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u * v(\phi) = L\widetilde{\phi}(0) = u * (v * \widetilde{\phi})(0).$$

Antes de proseguir comprobemos que, en efecto, $u * v$ es una distribución. Consideremos $\phi_j \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$. Puesto que la convolución de distribuciones y funciones test es continua se tiene $v * \widetilde{\phi_j} \overset{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$. Si $\mathrm{sop} v$ es compacto tenemos $v * \widetilde{\phi_j} \overset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\to} 0$ y usando de nuevo la continuidad de la convolución de distribuciones y funciones test obtenemos lo que buscábamos. Si por el contrario $\mathrm{sop} u$ compacto basta recordar que la extensión de u a $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ que hemos tomado para definir la convolución de distribuciones de soporte compacto y funciones derivables es continua. Por último notemos que, por la prueba de 1.5.3, la distribución $u * v$ y la aplicación L están relacionadas por la fórmula

$$L\phi = (u * v) * \phi, \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

es decir, $u * v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ está caracterizada por:

$$(u * v) * \phi = u * (v * \phi), \ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

A continuación enunciamos algunas propiedades, cuya prueba puede encontrarse en 6.37 de [12].

Proposición 1.5.5. *Sean $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

i) Si sop(u) o sop(v) es compacto entonces $u * v = v * u$.

ii) Si sop(u) o sop(v) es compacto entonces sop$(u * v) \subset$ sop$(u) +$ sop(v).

iii) Si al menos dos de sop(u), sop(v) o sop(w) son compactos, entonces $(u * v) * w = u * (v * w)$.

Para finalizar el capítulo comprobaremos, prácticamente a modo de ejemplo, ciertas particularidades de la medida de Dirac.

Corolario 1.5.6. *Sean $u, v, w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

i) Si δ es la medida de Dirac y $\alpha \in \mathbb{N}_0$, entonces $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$. En particular $u = \delta * u$.

ii) Si al menos uno de sop(u) o sop(v) es compacto entonces $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$.

Demostración.

i) Notemos que para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\delta * \phi(x) = \delta(\tau_x \widetilde{\phi}) = \widetilde{\phi}(-x) = \phi(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Por *ii)* de la proposición 1.5.1 y *iii)* de la 1.5.5:

$$(D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi) = u * D^\alpha(\delta * \phi) = u * D^\alpha \delta * \phi$$

ii) Es consecuencia de *i)* de y de *iii)* y *i)* de la proposición 1.5.5:

$$D^\alpha(u * v) = D^\alpha \delta * (u * v) = ((D^\alpha \delta) * u) * v = D^\alpha u * v$$

y

$$((D^\alpha \delta) * u) * v = (u * (D^\alpha \delta)) * v = u * ((D^\alpha \delta) * v) = u * (D^\alpha v).$$

□

Capítulo 2

Transformada de Fourier

Si bien a lo largo del capítulo anterior desarrollamos el conjunto donde resolveremos nuestro problema, en esta segunda parte del trabajo introduciremos una herramienta clave para alcanzar nuestro objetivo: la transformada de Fourier. Dedicaremos una primera sección a recordar cómo actuaba esta aplicación sobre funciones complejas para después generalizar la misma al conjunto de las distribuciones. Tras introducir en el segundo apartado un nuevo espacio de funciones, al que denominaremos Clase de Schwarz $\mathcal{S}_n$ y en el que la transformada de Fourier resultará ser una biyección lineal y continua de $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{S}_n$, dedicaremos la última sección a un tipo muy particular de distribuciones, que llamaremos temperadas y que resultarán ser los elementos de una suerte de dual topológico de $\mathcal{S}_n$; cuya característica esencial es llevarse especialmente bien con la transformada de Fourier.

Comenzamos este capítulo aclarando la notación que seguiremos a lo largo del mismo. En adelante denominaremos Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ Normalizada a la medida m_n definida por

$$dm_n(x) = (2\pi)^{-n/2}dx.$$

Notemos que esto permite redefinir los espacios L_p, así como sus correspondientes normas, y el producto de convolución usando esta nueva medida en lugar de la estándar.

Por comodidad, para $t \in \mathbb{R}^n$ definimos una especie de EXPONENCIAL GENERALIZADA mediante:

$$e_t(x) = \exp(i(x \cdot t)) = \exp(i \sum_{j=1}^{n} t_j x_j), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Unas sencillas operaciones nos permiten comprobar que

$$e_t(x + y) = e_t(x)e_t(y), \ \ \forall x, \, y \in \mathbb{R}^n$$

y e_t resulta ser un homomorfismo del grupo aditivo de $\mathbb{R}^n$ en el grupo multiplicativo de los complejos de norma unidad. Notemos que trivialmente $e_t(x) = e_x(t), \ \ \forall x, t \in \mathbb{R}^n$.

Para acabar este apartado sobre notaciones comentamos qué entenderemos por operadores diferenciales. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0$ es un multi-índice definimos, para simplificar la notación, el operador D_α mediante

$$D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

Notemos que ahora, para $\alpha \in \mathbb{N}_0$ multi-índice y $t \in \mathbb{R}^n$:

$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t.$$

Sea ahora $P \in \mathcal{P}\left[\mathbb{C}^n\right]$ un polinomio de n variables de coeficientes complejos, esto es,

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \xi^\alpha = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n$$

donde $a \subset \mathbb{N}_0^n$ es una familia de multi-índices y $c_\alpha \in \mathbb{C} \ \ \forall \alpha \in A$. Definimos los operadores diferenciales (que actuarán sobre funciones infinitamente derivables)

$P(D)$ y $P(-D)$ mediante

$$P(D) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha D_\alpha \text{ y}$$

$$P(-D) = \sum_{\alpha \in A} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha$$

y conviene darse cuenta de que $P(D)e_t = P(t)e_t, \ \forall t \in \mathbb{R}^n$.

2.1. Transformada de Fourier para funciones integrables

Recordemos ahora la definición de transformada de Fourier de una función. Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su TRANSFORMADA DE FOURIER como la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n \ \ \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

En ocasiones abusaremos del lenguaje y llamaremos también transformada de Fourier a la aplicación que lleva f en $\hat{f}$, que denotaremos por $\mathcal{F}$. Notemos también que

$$(f * e_t)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_t(-x) dm_n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_- t(x) dm_n x = \hat{f}.$$

Teniendo en cuenta la nueva notación, aplicando los teoremas de Fubini, del cambio de variable y operando obtenemos algunas propiedades básicas que recopilamos en el siguiente enunciado.

Proposición 2.1.1. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene:*

i) $(\tau_x f)\hat{} = e_{-x} \hat{f}$

ii) $(e_x f)\hat{} = \tau_x \hat{f}$

iii) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

iv) Si $\lambda > 0$ *y tomamos* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *dad por* $h(x) = f(x/\lambda)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

2.2. La clase de Schwarz

En esta sección introduciremos un tipo muy particular de funciones integrables que conformarán un espacio idóneo para trabajar con la transformada de Fourier definida en la sección anterior.

Se dice que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es RÁPIDAMENTE DECRECIENTE si

$$\sup_{|\alpha|<N} \Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big\{(1+|x|^2)^N |D^\alpha f(x)|\big\}\Big\} < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}_0.$$

Notemos que el hecho de que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ sea rápidamente decreciente equivale a que las funciones $P \cdot D^\alpha f$ estén acotadas para todo polinomio P y todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}$ por una cota común. Además si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es rápidamente decreciente P un polinomio de variable real n dimensional y coeficientes complejos y $N \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $|P(1+|\cdot|^2)^N D^\alpha f|$ es una función acotada para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice tal que $|\alpha| \leq N$, por lo que $PD^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definimos la CLASE (O ESPACIO) DE SCHWARZ como el conjunto formado por todas las funciones rápidamente decrecientes. Esto es:

$$\mathcal{S}_n = \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{|\alpha|<N} \Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big\{(1+|x|^2)^N |D^\alpha f(x)|\big\}\Big\} < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}_0 \Big\}$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{S}_n$ es un espacio vectorial. Además, para cada $N \in \mathbb{N}_0$, la aplicación $|\cdot| : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$|f|_N = \sup_{|\alpha|<N} \Big\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big\{(1+|x|^2)^N |D^\alpha f(x)|\big\}\Big\} \quad \forall f \in \mathcal{S}_n$$

es una norma en $\mathcal{S}_n$, por lo que podemos usar 1.37 de [12] y concluir que la familia de normas así definidas hacen de $\mathcal{S}_n$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. El siguiente resultado recoge algunas propiedades que nos serán útiles más adelante. La prueba del mismo puede encontrarse en Teorema 7.4 de [12].

Teorema 2.2.1.

i) *$\mathcal{S}_n$ es un espacio de Fréchet.*

ii) *Si $p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}^n, C]$ es un polinomio, $g \in \mathcal{S}_n$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice las aplicaciones*

$$f \to Pf$$
$$f \to gf$$
$$f \to D^\alpha f$$

son aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{S}_n$.

iii) *Si $f \in \mathcal{S}_n$ y $P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}^n, \mathbb{C}]$*

$$(P(D)f)\hat{} = P\hat{f}$$
$$(Pf)\hat{} = P(-D)\hat{f}$$

iv) *La transformada de Fourier es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{S}_n$.*

Antes de enunciar el teorema de inversión, el cual será el resultado más trascendental de esta sección, desarrollamos a modo del lema un ejercicio de cálculo de la transformada de Fourier de cierta función conocida.

Lema 2.2.2. *Supongamos $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida por $\phi_n(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\phi_n \in \mathcal{S}_n$, $\hat{\phi_n} = \phi_n$ y*

$$\phi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_n dm_n.$$

Demostración. El hecho de que $\phi_n \in \mathcal{S}_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ es obvio. Usando la primera identidad de *iii)* del teorema 2.2.1 vemos que tanto $\widetilde{\phi_1}$ como ϕ_1 verifican la ecuación diferencial:

$$y(x) + xy'(x) = 0.$$

Además

$$\widetilde{\phi_1}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1 \; dm_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}x^2} \; dx = 1 = \phi_1(0).$$

y por unicidad $\tilde{\phi_1} = \phi_1$. Puesto que

$$\phi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \phi_1(x_k) \ \ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

tendremos

$$\widetilde{\phi_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \tilde{\phi_1}(x_k) \ \ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

y $\phi_n = \tilde{\phi_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ahora la igualdad del enunciado es clara. □

El siguiente teorema pone de manifiesto la bondad del espacio $\mathcal{S}_n$ respecto a la transformada de Fourier, que será crucial para extender tal herramienta, en la medida de lo posible, al espacio de las distribuciones. La prueba se encuentra en 7.6 de [12].

Teorema 2.2.3. ***Teorema de Inversión.***

i) *Si* $g \in \mathcal{S}_n$ $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g} e_x dm_n \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, continua y biyectiva de inversa continua.*

iii) *Si* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} e_x dm_n \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ *se tiene que* $f = f_0$ *casi por doquier.*

Como consecuencia directa tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.4. *Sean $f, g \in \mathcal{S}_n$. Se tiene:*

i) $f * g \in \mathcal{S}_n$

ii) $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$

Demostración. Puesto que $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}_n$ por *iii)* de la proposición 2.1.1 tenemos

$$\mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))\mathcal{F}(\mathcal{F}(g)) = \tilde{f}\tilde{g} = \widetilde{fg} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(fg))$$

y basta aplicar $\mathcal{F}^{-1}$ para concluir *ii)*. Usando ahora que $fg \in \mathcal{S}_n$ tenemos por lo recién comprobado que $\hat{f} * \hat{g} \in \mathcal{S}_n$, pues la transformada de Fourier lleva funciones de $\mathcal{S}_n$ en funciones de $\mathcal{S}_n$. □

Para finalizar el presente apartado enunciamos un resultado clásico que podemos deducir de lo desarrollado en esta sección.

Teorema 2.2.5. ***Plancherel.*** *La transformada de Fourier define una isometría lineal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

2.3. Distribuciones Temperadas

Dedicaremos esta última sección del capítulo a adaptar los conceptos desarrollados en las dos primeras al espacio de las distribuciones. Comprobaremos que podemos ver el dual topológico de $\mathcal{S}_n$ como un subconjunto de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dualidad que aprovecharemos para extender la transformada de Fourier a este nuevo conjunto cuyos elementos dan nombre a este apartado. Dedicaremos el resto de sección a ver que determinadas propiedades de esta transformada siguen siendo ciertas en el conjunto de distribuciones temperadas.

El siguiente resultado, de prueba incluida en Theorem 7.10 de [12], pone de manifiesto que la relación entre los espacios $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es más estrecha aun de lo que *a priori* pudiera parecer.

Proposición 2.3.1. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio denso en $\mathcal{S}_n$ Además la aplicación inclusión de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}_n$ es continua.*

Consideremos ahora una aplicación $L : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$. Si denotamos a la aplicación inclusión por $i : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_n$ tenemos que la aplicación $u_L = L \circ i : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es un funcional lineal y continuo y por tanto $u_L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Notemos que además, por densidad, dos aplicaciones $L_1, L_2 : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ no pueden generar, por este método, el mismo funcional $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Tenemos así una fotocopia de $\mathcal{S}'_n$ dentro de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. A los elementos de este nuevo conjunto, al que también denotaremos por $\mathcal{S}'_n$, los denominaremos Distribuciones Temperadas.

Nota. *Es conveniente darse cuenta de que los elementos de $\mathcal{S}'_n$ son las distribuciones de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que tienen una extensión continua a $\mathcal{S}_n$.*

Como ejemplo de distribución temperada tenemos todas las distribuciones con soporte compacto. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de soporte compacto, podemos encontrar $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega = \Omega^0 \subset \mathbb{R}^n$ de forma que $\text{sop}(u) \subset \Omega$ y $\psi(x) = 1\ \forall x \in \Omega$. Definimos $u^* : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^n$ por $u^*(f) = u(\psi f)\ \ \forall f \in \mathcal{S}_n$. Si $f_j \to 0$ en $\mathcal{S}_n$ entonces $D^\alpha f_j \to 0$ uniformemente, $D^\alpha(\psi f_j) \to 0$ uniformemente y $\psi f_j \to 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. En tal caso u^* es continua en $\mathcal{S}_n$ y puesto que $u^*(\phi) = u(\phi),\ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que u^* es extensión de u. También son ejemplos de distribuciones temperadas los polinomios, las funciones medibles cuyo valor absoluto está acotado por un polinomio y toda función $g \in Ł^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ como se deduce de la siguiente proposición:

Proposición 2.3.2. *Sean $p \geq 1$ $N \in \mathbb{N}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible* *verificando*

$$C := \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^{-N} g(x)|^p dm_n x < \infty.$$

Entonces g es una distribución temperada.

Demostración. Supongamos primero $p > 1$ y consideramos la distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por $\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} fg\, dm_n$. Tomemos $q > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando la desigualdad de Holder:

$$|\Lambda f| \leq C^{\frac{1}{p}} (\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{Nq} |f(x)| dm)^{\frac{1}{q}}$$

Tomemos ahora $M > 0$ de forma que

$$B = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{(N-m)q}\ dm_n x < \infty.$$

Entonces

$$|\Lambda f| \leq C^{\frac{1}{p}} (\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{(N-M)q} (1+|x|^2)^{Mq} |f(x)|^q\ dm_n x)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\leq C^{\frac{1}{p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1+|x|^2)^M |f(x)| \right\} B^{\frac{1}{q}}$$

y Λ es continua en $\mathcal{S}_n$. Ahora el caso $p = 1$ es claro. □

La prueba de la siguiente proposición es consecuencia inmediata de las definiciones y de *ii)* del teorema 2.2.1.

Proposición 2.3.3. *Sean $g \in \mathcal{S}_n$, $u \in \mathcal{S}'_n$ y $P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}^n, \mathbb{C}]$. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice se tiene que las distribuciones $D^\alpha u$, Pu y gu son temperadas.*

En este punto estamos en condiciones de generalizar la transformada de Fourier a nuestro caso. Para $u \in \mathcal{S}'_n$ definimos la TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPERADA u como la distribución $\mathcal{F}u : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{F}u(\phi) = \hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi}) \ \ \forall \phi \in \mathcal{S}_n$$

Notemos que, puesto que la aplicación $\phi \to \hat{\phi}$ es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{S}_n$ la transformada recién definida es en efecto un elemento de $\mathcal{S}'_n$. Comprobemos que además la transformada de funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ coincide con la transformada de la distribución u_f asociada:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u_f}(\phi) = u_f(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\phi} dm_n = \\
= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e_{-x}(y)\ dm_n y\ dm_n x = \\
= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_{-y}(x)\ dm_n x\ dm_n y = \\
= \int_{\mathbb{R}^n} \phi \hat{f}\ dm_n.
\end{aligned}
$$

Continuamos enunciando el resultado equivalente al teorema de inversión enunciado en la sección anterior.

Teorema 2.3.4.

i) La transformada de Fourier es una aplicación lineal, continua de y biyectiva $\mathcal{S}'_n$ en $\mathcal{S}'_n$ de inversa continua.

ii) Si $u \in \mathcal{S}'_n$ y $P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}^n, \mathbb{C}]$ entonces:

$$
\widehat{P(D)u} = P\hat{u}
$$
$$
\widehat{Pu} = P(-D)\hat{u}.
$$

Nota. *La topología que consideramos en $\mathcal{S}'_n$ es la topología débil* inducida por $\mathcal{S}_n$. Además, si denotamos por $\mathcal{F} : \mathcal{S}'_n \to \mathcal{S}'_n$ a la aplicación $\mathcal{F}u = \hat{u}$ tenemos $\mathcal{F}^4 u = u$ y $F^{-1}u = \mathcal{F}^3 u$.*

Lema 2.3.5. *Sea $P \in \mathcal{P}[\mathbb{R}^n, \mathbb{C}]$ un polinomio y δ la medida de Dirac. Se tiene:*

i) $\hat{1} = \delta$ y $\hat{\delta} = 1$

ii) $\widehat{P(D)\delta} = P$ *y* $\hat{P} = P(-D)\delta$

iii) *Sea* $u \in \mathcal{S}'_n$ *y consideremos* $\widetilde{u}$ *determinada por* $\widetilde{u}(\phi) = u(\widetilde{\phi})$. *Entonces* $\widehat{\hat{u}} = \tilde{u}$.

iv) $\widetilde{\delta} = \delta$

Demostración. Comenzamos fijando $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $u \in \mathcal{S}'_n$. Notemos que *ii)* es consecuencia directa del teorema 2.3.4. Operamos para comprobar las demás igualdades.

$$\hat{1}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\, dm_n = \phi(0) = \delta(\phi)$$
$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = 1(\phi)$$

donde hemos empleado el teorema de inversión 2.2.3. Por otro lado

$$\mathcal{F}^2 u(\phi) = u(\mathcal{F}^2(\phi)) = u(\tilde{\phi}) = \tilde{u}(\phi) \text{ y}$$
$$\tilde{\delta}(\phi) = \delta(\tilde{\phi}) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

□

Definimos la CONVOLUCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPERADA $u \in \mathcal{S}'_n$ Y LA FUNCIÓN RÁPIDAMENTE DECRECIENTE $\phi \in \mathcal{S}_n$ por

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \tilde{\phi}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Destacamos por su relevancia en operaciones posteriores un último resultado. Su prueba se encuentra en Theorem 7.19 [12].

Teorema 2.3.6. *Sean* $\phi \in \mathcal{S}_n$ *y* $u \in \mathcal{S}'_n$. *Entonces:*

i) $u * \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha) * \phi = u * (D^\alpha \phi) \;\; \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

ii) $u * \phi$ *es una distribución temperada.*

iii) $\widehat{u * \phi} = \hat{\phi}\hat{u}$.

iv) $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}_n$.

v) $\hat{u} * \hat{\phi} = \widehat{\phi u}$.

Capítulo 3

Teorema de Ehrenpreis-Malgrange

En este capítulo llegaremos al punto culminante del trabajo. Como veremos más adelante, el teorema de Ehrenpreis-Malgrange afirma que para cualquier operador diferencial en derivadas parciales no idénticamente nulo y de coeficientes complejos constantes $P \in \mathbb{C}[\partial_1, ..., \partial_n]$ fijada $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ **con soporte compacto** podemos encontrar una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que sea solución del problema

$$P(D)u = v \qquad [*].$$

Comenzaremos aclarando el concepto de *solución fundamental*, en el cual nos apoyaremos fuertemente para alcanzar nuestro objetivo. Una vez entendido esto veremos cómo estas soluciones especiales nos permiten generar las (que no tienen por qué ser únicas) de [*] para finalmente, tras alguna que otra consideración previa, desarrollar la demostración del teorema.

3.1. Soluciones fundamentales

En lo que respecta a los operadores diferenciales, durante este último capítulo utilizaremos la notación estándar en lugar de la que utilizamos a lo largo del capítulo anterior con el objetivo de simplificar la notación. Así dado $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ de la forma $P(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice llamaremos OPERADOR DIFERENCIAL ASOCIADO A P al operador $P(D) = \sum c_\alpha D^\alpha$. Además si P es un polinomio de grado $m \in \mathbb{N}_0$ denotaremos por P_m a la PARTE PRINCIPAL DE P:

$$P_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

y llamaremos *polinomio conjugado asociado a* P al polinomio

$$\overline{P}(x) = \sum \overline{c_\alpha} x^\alpha,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

que verifica $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})\ \ \forall z \in \mathbb{C}^n$. Como último comentario en lo que a notación se refiere recordamos que, dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ habíamos definido $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Para una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ escribiremos $\tilde{T}$ para denotar a la distribución que actúa de la forma

$$\tilde{T}(\phi) = T(\tilde{\phi})\ \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Como es natural, diremos que una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es una solución de [$*$] cuando para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se tenga la igualdad

$$(P(D)E)(\phi) = v(\phi).$$

Cuando E sea una solución de [$*$] para $v = \delta$, donde δ denota la medida de Dirac introducida en la definición 1.1.16, diremos que E es una SOLUCIÓN FUNDAMENTAL PARA EL OPERADOR $P(D)$. Comprobemos a continuación que, conocida una solución fundamental E_0 para $P(D)$ una solución de [$*$] vendrá dada por $E_0 * v$.

En efecto, aplicando el corolario 1.5.6, que nos permite introducir la derivada en la convolución así como utilizar que la medida δ hace de neutro para tal producto:

$$P(D)(E_0 * v) = (P(D)E_0) * v = \delta * v = v.$$

Por lo que nuestro problema se reduce a probar que siempre podemos encontrar una solución fundamental asociada a un operador $P(D)$ dado.

Para finalizar esta sección exponemos un par de lemas técnicos que nos ayudarán en el apartado final.

Lema 3.1.1. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ números complejos distintos. Entonces la única solución del sistema de ecuaciones*

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [0, m-1] \cap \mathbb{N}_0 \\ 1 & \text{si } k = m \end{cases}$$

viene dada por $a_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$.

Demostración. Como los $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$ son diferentes el determinante de Vandermonde no se anula y existe una única solución $(a_0, ..., a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ del sistema. Definamos $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$q(z) = \prod_{j=0}^{m} (z - \lambda_j), \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que puesto que q tiene un número finito de ceros, en concreto $m + 1$, podemos tomar $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que todos ellos estén contenidos en la bola abierta centrada en el origen y de radio N_0. Si ahora aplicamos el teorema de los residuos:

$$\int_{|z|=N_0} \frac{z^k}{q(z)} \, dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{m} \lim_{z\to\lambda_j} (z - \lambda_j) \frac{z^k}{q(z)} = 2\pi i \sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j^k}{q'(\lambda_j)}$$

para $k \in [0,m] \cap \mathbb{N}_0$. Como tal identidad es válida para todo $N \geq N_0$ se tiene:

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j^k}{q'(\lambda_j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=N_0} \frac{z^k}{q(z)}\, dz = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=N} \frac{z^k}{q(z)}\, dz =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(Ne^{it})^k}{q(Ne^{it})} Ni\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m \\ 1 & \text{si } k = m \end{cases}$$

Puesto que $q'(\lambda_j) = \prod_{k=0,k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)$ la prueba queda completada. $\square$

Lema 3.1.2. *Sean $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, y $S \in \mathcal{S}_n'$. Se verifica:*

i) $P(D)(e^{\zeta(\cdot)}T) = e^{\zeta(\cdot)}(P(D+\zeta)T)$.

ii) $P(D)\mathcal{F}^{-1}S = \mathcal{F}^{-1}(P(i(\cdot))S)$.

ii) $e^{\zeta(\cdot)}P(-D+\zeta) = P(-D+2\zeta)(e^{\zeta(\cdot)}\delta)$

donde hemos utilizado $(\cdot)$ para denotar a la variable n-dimensional y $\mathcal{F}$ para indicar la transformada de Fourier.

Demostración. Tanto la prueba de *i)* como la de *ii)* y *iii)* se basan en sendas cadenas de igualdades. Notemos que, por linealidad, es suficiente probar la igualdad para ciertos monomios de P. Fijado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice:

$$e^{\zeta(\cdot)}((D+\zeta)^\alpha T) = e^{\zeta(\cdot)} \left(\sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\zeta^\beta D^{\alpha-\beta} \right) T = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\zeta^\beta e^{\zeta(\cdot)} D^{\alpha-\beta} T =$$

$$= \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta} D^\beta e^{\zeta(\cdot)} D^{\alpha-\beta} T = D^\alpha(e^{\zeta(\cdot)}T).$$

Donde hemos usado el binomio de Newton y la fórmula de Leibniz para producto de funciones y distribuciones desarrollada en 1.2.1. Para la segunda identidad utilizaremos el teorema 2.2.1 teniendo en cuenta el cambio de notación. Concretamente, si fijamos $\phi \in \mathcal{S}_n$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ multi-índice y aplicamos que $\mathcal{F}(D^\alpha\phi) =$

$(i(\cdot))^\alpha \mathcal{F}\phi$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}S)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}^{-1}S(D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{F}^3 S(D^\alpha\phi) = \\
&= (-1)^{|\alpha|}S(\mathcal{F}^3 D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|}S(\mathcal{F}\widetilde{D^\alpha\phi}) = S(\mathcal{F}D^\alpha\widetilde{\phi}) = \\
&= S((i(\cdot))^\alpha\mathcal{F}\tilde{\phi}) = ((i(\cdot))^\alpha S)(\mathcal{F}\tilde{\phi}) = ((i(\cdot))^\alpha S)(\mathcal{F}^{-1}\phi) = \\
&= \mathcal{F}^{-1}(((i(\cdot))^\alpha S))(\phi).
\end{aligned}
$$

Utilizaremos *i)* para probar la última identidad. Si fijamos $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y operamos:

$$
\begin{aligned}
&e^{\zeta(\cdot)}(-D+\zeta)^\alpha\delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}e^{\zeta(\cdot)}(D-\zeta)^\alpha\delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}e^{2\zeta(\cdot)}e^{-\zeta(\cdot)}(D-\zeta)^\alpha\delta(\phi) = \\
&\overset{i)}{=} (-1)^{|\alpha|}e^{2\zeta(\cdot)}D^\alpha(e^{-\zeta(\cdot)}\delta)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha(e^{-\zeta(\cdot)}\delta)(e^{2\zeta(\cdot)}\phi) = (e^{-\zeta(\cdot)}\delta)(D^\alpha(e^{2\zeta(\cdot)}\phi)) = \\
&= (e^{-\zeta(\cdot)}\delta)\left(\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}D^{\alpha-\beta}(e^{2\zeta(\cdot)})D^\beta(\phi)\right) = (e^{-\zeta(\cdot)}\delta)\left(e^{2\zeta(\cdot)}\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(2\zeta)^{\alpha-\beta}D^\beta(\phi)\right) = \\
&= (e^{\zeta(\cdot)}\delta)\left(\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(2\zeta)^{\alpha-\beta}D^\beta(\phi)\right) = \sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(2\zeta)^{\alpha-\beta}(e^{\zeta(\cdot)}\delta)\left(D^\beta(\phi)\right) = \\
&\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(2\zeta)^{\alpha-\beta}(-1)^\beta D^\beta(e^{\zeta(\cdot)}\delta)(\phi) = (2\zeta-D)^\alpha(e^{\zeta(\cdot)}\delta)(\phi).
\end{aligned}
$$

□

3.2. Teorema de Ehrenpreis-Malgrange.

Teorema 3.2.1. Ehrenpreis-Malgrange *Sean $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ un polinomio en $\mathbb{R}^n$ no idénticamente nulo y $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ una distribución con soporte compacto. Entonces el problema*

$$P(D)u = v \qquad [*]$$

admite una solución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. El razonamiento usado en la sección anterior nos permite simplificar nuestro problema a encontrar una solución fundamental para el operador diferencial $P(D)$. Puesto que P no es idénticamente nulo podemos encontrar $\eta \in \mathbb{R}^n$

tal que $P_m(\eta) \neq 0$ donde $m \in \mathbb{N}$ es el grado de P. Escojamos también números reales $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ distintos entre sí para definir $a_j = \prod_{k=0,k\neq j}^{m}(\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$ y consideremos la distribución

$$E_0 = \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}} \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\lambda_j \eta(\cdot)} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\overline{P(i(\cdot\cdot) + \lambda_j \eta)}}{P(i(\cdot\cdot) + \lambda_j \eta)} \right)$$

donde hemos usado la notación $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot)$ para referirnos a las dos variables n dimensionales distintas entre sí que manejamos. El resto de la prueba consistirá en demostrar que E_0 es la solución fundamental que buscamos. Puesto que para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo el conjunto $N = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^n : P(i\zeta + \lambda\eta) = 0\right\}$ es de medida nula en $\mathbb{R}^n$ tenemos

$$S(\cdot) = \frac{\overline{P(i(\cdot) + \lambda\eta)}}{P(i(\cdot) + \lambda\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'_n$$

y E_0 está bien definida. Aplicando sucesivamente *i)* y *ii)* del lema 3.1.2:

$$P(D)(e^{\zeta(\cdot)}\mathcal{F}^{-1}S) = e^{\zeta(\cdot)}P(D+\zeta)\mathcal{F}^{-1}S = e^{\zeta(\cdot)}\mathcal{F}^{-1}(P(i(\cdot\cdot)+\zeta)S)$$

para $\zeta \in \mathbb{R}^n$ fija. Sustituyendo:

$$P(D)\left(e^{\lambda\eta(\cdot)}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\overline{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}}{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}\right)\right) = e^{\lambda\eta(\cdot)}\mathcal{F}^{-1}(\overline{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}).$$

Puesto que además por el lema 2.3.5 tenemos $\mathcal{F}(p(D)\delta) = p(i(\cdot))$ para todo polinomio $p \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ se tiene:

$$\mathcal{F}^{-1}(\overline{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}) = \mathcal{F}^{-1}(\overline{P}(-i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)) = \overline{P}(-D+\lambda\eta)\delta$$

de donde, usando primero el lema 3.1.2 y el hecho de que $e^{\lambda\eta(\cdot)}\delta = \delta$, deducimos que :

$$P(D)\left(e^{\lambda\eta(\cdot)}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\overline{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}}{P(i(\cdot\cdot)+\lambda\eta)}\right)\right) = e^{\lambda\eta(\cdot)}\overline{P}(-D+\lambda\eta)\delta =$$

$$= \overline{P}(-D+2\lambda\eta)(e^{\lambda\eta(\cdot)}\delta) = \overline{P}(-D+2\lambda\eta)(\delta) = \lambda^m\overline{P_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k$$

para ciertas distribuciones $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Por nuestra elección de los coeficientes $a_0, ..., a_m$, basta aplicar el lema 3.1.1 para concluir que E_0 es **una** solución fundamental para el operador $P(D)$.

$\square$

Apéndice A

Apéndice: Una función meseta en $\mathbb{R}$

En esta sección construiremos una función $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte contenido en el intervalo $[-2, 2]$, simétrica y tal que $h(t) = 1 \forall t \in]-1, 1[$. Partimos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

No es difícil comprobar que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, pues es suficiente comprobar que y su gráfica será de la forma que aparece en la figura A.1.

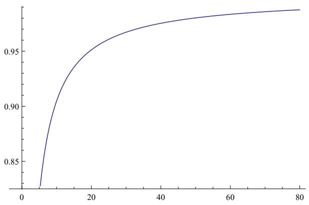
Definimos ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) := \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

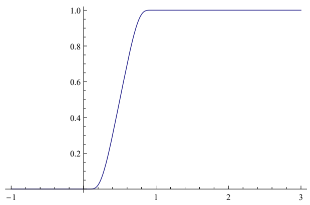
una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuyo grafo representamos también en la figura A.1. Por último tomamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) := g(t+2) \cdot g(2-t) \ \forall t \in \mathbb{R}$$

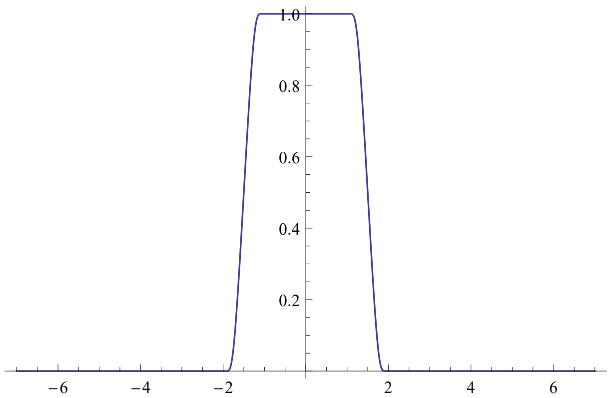
que será la función de clase $\mathcal{C}^\infty$ que buscábamos.



(a) Grafo de f



(b) Grafo de g



(c) Grafo de h

Figura A.1: Grafos

Bibliografía

[1] Acosta, M.D. Aparicio, C. Moreno y A. Villena A. R. *Apuntes de Análisis Matemático 1* . http://www.ugr.es/~dpto_am/miembros/aparicio/apuntes/apuntes-an-mat-i-1-11-06.pdf.

[2] Brezis, H. 2010. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media.

[3] Cañada, A. 2002. *Series de Fourier y Aplicaciones: Un Tratado Elemental, con Notas Históricas y Ejercicios Resueltos*. Madrid: Ediciones Pirámide, S.A.

[4] Conway, J.B. 1985. *A course in Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag.

[5] Rudin, W. 1987. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, Inc.

[6] König, H. *An explicit formula for fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients* . Proceedings of the American Mathematical Society. 1994; Vol. 120, (No. 4): 1315-1318.

[7] López, JL. *Sobre derivadas débiles, espacios de Sobolev, la delta de Dirac, el teorema de Lax-Milgram y aplicaciones*. http://www.ugr.es/~jllopez/LaxM.pdf.

[8] Payá, R. *Teoremas de la Aplicación Abierta y de la Gráfica Cerrada.* http://www.ugr.es/~rpaya/documentos/Funcional/AFTema9_2.pdff.

[9] Pérez FJ. *Curso de Ánálisis Complejo.* http://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf.

[10] Pérez, J. *Curvas y superficies.* http://wdb.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/raizCyS.pdf.

[11] Rosenzweig, M. *Hörmander's Staircase.* https://matthewhr.files.wordpress.com/2012/02/hormanders-staircase.pdf

[12] Rudin, W. 1991. *Functional Analysis.* 2ª Ed. Singapur: McGraw-Hill, Inc.

[13] Wagner, Peter. *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem.* The American Mathematical Monthly. 2009; Vol. 116 (No. 5): 457-462.