



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Máster en Didáctica de la Matemática
Departamento de Didáctica de la Matemática
Curso 2024 / 2025

Trabajo de Fin de Máster

**RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO Y SENTIDO ESPACIAL EN LA
FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**

Ángel Enrique Sánchez Colín

Granada, 2025



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

**Máster en Didáctica de la Matemática
Departamento de Didáctica de la Matemática
Curso 2024 / 2025**

Trabajo de Fin de Máster

**Razonamiento geométrico y sentido espacial en la formación de
profesorado de educación primaria**

Presentado por
D. Ángel Enrique Sánchez Colín

Dirigido por
D. Rafael Ramírez Uclés

Fdo.: D. Ángel Enrique Sánchez Colín

Fdo.: D. Rafael Ramírez Uclés

A mis hijos Germán y Rubén

RESUMEN

En este trabajo de fin de máster se caracterizan los niveles de razonamiento geométrico y el sentido espacial de un grupo de Futuro Profesorado de Educación Primaria (FPEP) mediante la aplicación de un cuestionario. En la muestra participaron 54 sujetos (32 mujeres y 22 hombres) de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz. Se diseñaron cuatro tareas de enseñanza para establecer conexiones extra-matemáticas con elementos artísticos y teselaciones, que sirvieron como instrucción para responder el cuestionario. Las tareas se llevaron a cabo en la asignatura Didáctica de las matemáticas I y el cuestionario se aplicó en la asignatura Didáctica de las matemáticas II. Los resultados revelan que la mayoría de los sujetos alcanzaron los niveles 2 y 3 de Van Hiele y manifestaron varias combinaciones de los componentes del sentido espacial. Además, se encontró una relación entre alcanzar un mayor nivel de Van Hiele con una mayor manifestación de componentes del sentido espacial.

Palabras clave: Sentido espacial, Visualización, Razonamiento geométrico, Niveles de Van Hiele, Teselaciones, Formación de profesorado.

ABSTRACT

This master's thesis characterizes the levels of geometric reasoning and spatial sense of a group of preservice teachers through the application of a questionnaire. The sample consisted of 54 students (32 women and 22 men) from the Faculty of Educational Sciences at the University of Cádiz. Four teaching tasks were designed to establish extra-mathematical connections with artistic elements and tessellations, that served as instruction for answering the questionnaire. The tasks were carried out in the course mathematics didactics I and the questionnaire was administered in the course mathematics didactics II. The results reveal that most students reached levels 2 and 3 of Van Hiele and displayed various combinations of components of the spatial sense. Furthermore, a relationship was found between achieving a higher level of Van Hiele with a greater manifestation of components of the spatial sense.

Keywords: Spatial sense, Visualisation, Geometric reasoning, Van Hiele levels, Tessellations, Preservice teachers.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	6
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	9
3. ANTECEDENTES	11
4. MARCO TEÓRICO	16
4.1 Modelo de Van Hiele	16
4.2 Modelo de Sentido Espacial	17
4.3 Transformaciones y movimientos en el plano (isometrías)	21
5. METODOLOGÍA	23
5.1 Diseño de la investigación	24
5.2 Tareas de enseñanza previas al cuestionario	24
5.2.1 Tarea 1. Polígonos regulares	25
5.2.2 Tarea 2. Poliedros y antiprismas	25
5.2.3 Tarea 3. Transformación de imagen figurativa	25
5.2.4 Tarea 4. Construcción de mosaicos geométricos	26
5.3 Cuestionario	26
5.4 Categorías para el análisis del cuestionario	29
6. RESULTADOS	31
6.1 Rendimiento de las tareas de enseñanza	31
6.2 Análisis del cuestionario (modelo de sentido espacial)	36
6.3 Análisis del cuestionario (modelo de Van Hiele aplicado a isometrías)	40
6.4 Errores y dificultades	44
6.5 Relaciones entre razonamiento geométrico y sentido espacial	45
7. CONCLUSIONES	50
7.1 Conclusiones generales	50
7.2 Limitaciones de la investigación	53
7.3 Implicaciones para la enseñanza	54
7.4 Líneas futuras que se derivan de este trabajo	54
8. REFERENCIAS	55

1. INTRODUCCIÓN

La mejora educativa en las universidades españolas tiende a estar acompañada de estrategias con iniciativas propias, enfocadas hacia la transformación de los procedimientos y las prácticas tradicionales que se llevan a cabo en las aulas. Su finalidad es potenciar las capacidades del estudiantado e implementar metodologías que proporcionen una alternativa adicional en su aprendizaje autónomo, y les permita desarrollar con mayor eficacia las competencias establecidas en su etapa formativa sin dejar de atender los aspectos generales del currículo, las nuevas tecnologías y su didáctica, ni los métodos de instrucción y los programas formativos (Real Decreto 822/2021, 2021). En Educación Matemática se contemplan los conocimientos que deben impartirse, cómo serán impartidos y la didáctica que requiere saber el Futuro Profesorado de Educación Primaria (a quienes llamaremos FPEP de aquí en adelante) para que en su desempeño profesional puedan transmitirlos. Dichos conocimientos deberían estar estrechamente relacionados con los contenidos del currículo de matemáticas de Educación Primaria en cada una de las comunidades autónomas, por ejemplo, con el de Andalucía (Junta de Andalucía, 2023) que se enfoca en conseguir el mayor desarrollo posible de las competencias y la adquisición de conocimientos del estudiantado. En esta versión del currículo, los saberes básicos se encuentran estructurados en torno al concepto de “*sentido matemático*” y está compuesto por seis bloques: sentido numérico; sentido de la medida; sentido espacial; sentido algebraico; sentido estocástico y sentido socio-afectivo, como se aprecia en el diagrama de la *Figura 1*.

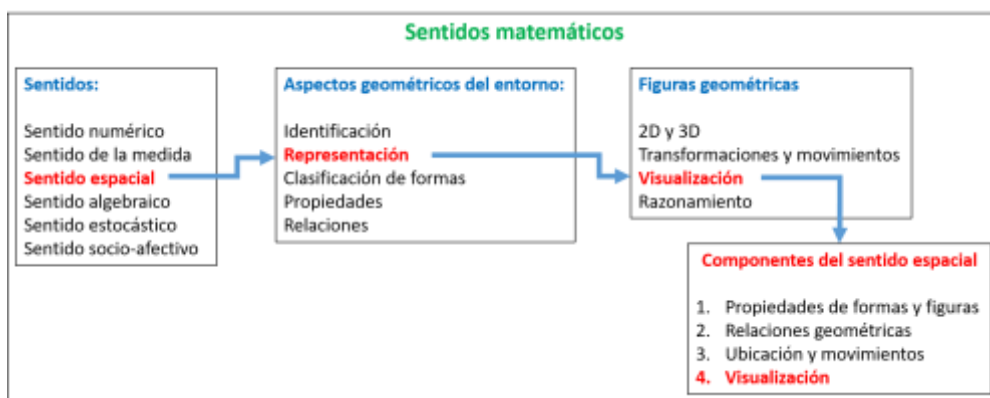


Figura 1. Diagrama esquemático basado en el BOJA 104/2023 y Flores et al., 2015.

Los sentidos matemáticos abarcan las competencias adquiridas por el alumnado en las dimensiones cognitiva y afectiva mediante los saberes básicos que integran el conocimiento, la destreza y las actitudes. En particular, el sentido espacial permite comprender los aspectos geométricos del entorno, identificar los elementos y representarlos, clasificar sus formas, propiedades y sus relaciones, sus movimientos, y visualizarlos en el plano o en el espacio. En el diagrama anterior, la proyección del sentido espacial sobre los aspectos del entorno geométrico permite introducir el concepto de sus componentes (Flores et al., 2015), los cuales serán explicados en el marco teórico.

La visualización forma parte principal de los dos primeros niveles en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1986). Este modelo sigue utilizándose en estudios recientes para conocer el razonamiento geométrico de los FPEP en su etapa formativa inicial (Övez y Özdemir, 2024), para medir el conocimiento geométrico que necesitan sobre la enseñanza de las propiedades y características de las formas y figuras (Yi et al, 2022), o para conocer su capacidad en las demostraciones geométricas (Manero y Arnal-Bailera, 2021). Sin embargo, no es un modelo que se haya utilizado específicamente en la geometría de las transformaciones, que juegan un papel muy importante en las habilidades que un sujeto necesita para formar imágenes mentales, transformarlas y manipularlas en su mente (Lean y Clements, 1981). La visualización espacial contribuye a incrementar el desarrollo cognitivo y el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cualquier nivel educativo (Battista et al., 1982). Del Grande (1987; 1990) y Gutiérrez (1992) asociaron los procesos de transformación de las imágenes con capacidades psicológicas para medir la habilidad de visualización, como pueden ser: identificación visual, constancia perceptual, percepción de posiciones espaciales, relaciones espaciales, discriminación visual, memoria visual y rotación mental.

En el currículum actual, adquieren relevancia el sentido espacial y la visualización porque tienen un carácter funcional para aplicarlos en diferentes contextos. Además, se cuenta con una diversidad de tareas para incrementar las habilidades de visualización desde diferentes enfoques que nos permiten establecer conexiones “extra-matemáticas”. Las conexiones extra-matemáticas se refieren a las relaciones con elementos de otras áreas, con elementos socio-culturales y con el arte. Son de utilidad para comprender las ideas y procesos matemáticos (Kenedi, 2019; Vargas et al., 2024). En la literatura podemos encontrar una variedad de estudios que establecen conexiones extra-matemáticas con elementos artísticos, por ejemplo, Ward (2003) afirmó que la implementación de tareas

que involucran la construcción de mosaicos y teselaciones en forma manual o digital puede incrementar las habilidades de visualización de los FPEP porque facilita el reconocimiento de transformaciones y de movimientos en el plano. Además, les permite establecer conexiones de manera natural con aspectos artísticos y multiculturales de otras disciplinas. De forma similar, Gutiérrez (2005) sugirió que las teselaciones y recubrimientos en la obra gráfica del artista M. C. Escher, pueden aplicarse desde un enfoque didáctico-matemático de la visualización con diferentes grados de dificultad, dependiendo del nivel educativo, y pueden aplicarse incluso en los programas formativos de los FPEP, ya que resultan ser de gran utilidad para enseñar los movimientos y transformaciones en las prácticas educativas. Rumanová y Smiesková (2015) utilizaron las teselaciones de Escher para diseñar problemas de visualización y despertar la creatividad de los FPEP. Afirmaron que las teselaciones son un medio apropiado para la motivación y activación en Educación Matemática.

Para los propósitos de este Trabajo de Fin de Máster (TFM), se diseñaron tareas que permitieron establecer conexiones extra-matemáticas con elementos artísticos y teselaciones. Se pretende establecer relaciones entre el modelo de Van Hiele, plenamente asentado en la investigación y en los planes de formación del FPEP, y los componentes del sentido espacial que marcan las nuevas directrices curriculares. Se diseñó un cuestionario para que los FPEP manifestaran su razonamiento geométrico y sentido espacial. El cuestionario se enfoca en los niveles de razonamiento geométrico y en los componentes del sentido espacial que pueden manifestar durante su etapa formativa.

Este TFM se estructura de la siguiente manera: en la Sección 2 se describe el problema que se aborda y los objetivos de investigación, enfocados hacia la enseñanza y el aprendizaje de la geometría para FPEP. La Sección 3 corresponde con los antecedentes que se relacionan con las tareas que aquí se presentan. En la Sección 4 se describe el marco teórico que sustenta este trabajo, abarca el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele y el sentido espacial, en el que se aborda el concepto de visualización. También se describe el concepto de las isometrías. La sección 5, explica la metodología llevada a cabo, en la que se describen las tareas de enseñanza previas al cuestionario, las cuales sirvieron como instrucción para homogeneizar los conocimientos de los FPEP y responder el cuestionario. En la Sección 6 se muestra el análisis y los resultados obtenidos. Finalmente, la Sección 7 proporciona las conclusiones y la perspectiva que se tiene para extender el estudio hacia futuras investigaciones.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Hace veinticinco años que en los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se establecieron los programas de instrucción para capacitar al estudiantado de todos los niveles educativos en lo que respecta a la visualización espacial y el razonamiento geométrico, en la aplicación de transformaciones, en el uso de simetrías y en el modelado geométrico. La finalidad era que desarrollasen su autonomía para analizar situaciones matemáticas y resolver problemas de la vida real.

Las generaciones de estudiantes de principios del siglo XXI son las que ahora se están recibiendo en las universidades para formarse en su carrera profesional. La realidad nos muestra que todavía se encuentran dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En el campo de la Educación Matemática se han estudiado los diferentes factores que intervienen al respecto. La mayoría de los investigadores coincide en que hay una deficiencia atribuida a las limitaciones de los planes de estudio y a la posible falta de preparación del profesorado, o porque quizás no se atiende en su totalidad a los contenidos que están incluidos en su asignatura (Hernández et al., 2002). Podría ser también porque algunos profesores enfocan de manera muy simplificada los contenidos geométricos de esta disciplina (Báez e Iglesias, 2003). Se han hecho esfuerzos en publicar manuales y libros de contenido geométrico que abordan las necesidades didácticas y educativas de los FPEP, como el que publicaron Godino y Ruiz (2002). También se ha contribuido en el diseño de las prácticas para cubrir los contenidos de las asignaturas que forman los programas de estudios en algunas universidades (Bolea et al., 2008). Sin embargo, las carencias de conocimientos geométricos en la formación inicial de los FPEP todavía persisten hasta nuestros días. Como un ejemplo, la asignatura Didáctica de las matemáticas I (DMI) que se imparte en el segundo año del grado en Educación Primaria de la Universidad de Cádiz, solamente tiene incluido un subtema dedicado a la geometría, el cual puede ser cubierto en tan sólo tres horas de clase. La asignatura Didáctica de las matemáticas II (DMII), que es impartida en el tercer año, ni siquiera incluye contenidos de la geometría. Por esta razón, se diseñaron tareas de instrucción y un cuestionario para

abordar las temáticas establecidas en el NCTM mencionadas al principio de esta sección, las cuales fueron aplicadas a un grupo de FPEP de esta Universidad.

Investigar en el campo de la visualización espacial permitirá conocer las habilidades de visualización espacial y los niveles de razonamiento geométrico que se espera alcanzar por parte de los FPEP durante su etapa formativa. Este estudio podría conducir hacia la elaboración de nuevas propuestas y diseños de tareas que incentiven el aprendizaje de los contenidos deficitarios en la geometría. Para ello, el estudio se apoya en trabajos recientes en donde los sujetos de las muestras se encuentran en situaciones similares (Bonyah y Larbi, 2021; Övez y Özdemir, 2024; Putri, 2017; Yi et al., 2022).

Por otro lado, se contrastaría una teoría clásica y bien sustentada como la de Van Hiele con las nuevas directrices curriculares que presenta en la actualidad el sentido espacial. A partir del interés que motiva esta investigación surgieron las siguientes preguntas:

¿Qué razonamiento geométrico y sentido espacial manifiestan los FPEP al resolver tareas geométricas?

¿Qué relación existe entre razonamiento geométrico (niveles de Van Hiele) y sentido espacial (componentes)?

Para responder estas preguntas se plantearon los siguientes objetivos:

- *Objetivo general.*

Identificar el razonamiento geométrico y el sentido espacial de un grupo de FPEP en sus respuestas a un cuestionario.

- *Objetivo específico 1.*

Caracterizar los niveles de razonamiento geométrico y los componentes del sentido espacial con el cuestionario.

- *Objetivo específico 2.*

Establecer relaciones entre los niveles de razonamiento geométrico y los componentes de sentido espacial manifestados.

3. ANTECEDENTES

Para abordar los objetivos de investigación en este TFM, se presentaron a los FPEP varias tareas de enseñanza relativas a isometrías, contextualizadas en el ámbito artístico asociado a los mosaicos. Estas tareas pueden llevarse a la práctica con FPEP para incrementar sus habilidades de visualización y razonamiento geométrico. También pueden conducirles a obtener un mayor rendimiento académico. Watson y Ohtani (2015) señalaron que las tareas como fundamento del aprendizaje, podemos resolverlas, transformarlas y modificarlas desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica, incluso, podemos diseñar tareas multidisciplinarias que contribuyan para incrementar la motivación y el aprendizaje significativo cuando se abordan aspectos científico-creativos. Lyublinskaya y Cabral (2023) utilizaron herramientas digitales como el software de geometría dinámica *GeoGebra* para instruir a profesores de Educación Primaria, en geometría de transformaciones. Las autoras afirmaron que la integración del software y el arte incrementan la creatividad de los docentes y la comprensión de las isometrías para sus fines pedagógicos. Revelo y Bedoya (2025) realizaron actividades y talleres para enseñar geometría a través de las artes visuales a los FPEP, apoyándose en los contenidos curriculares de la educación básica para generar propuestas de formación docente e integrar estas dos disciplinas. En los talleres que se imparten para FPEP sobre geometría, es común asociar las isometrías y los movimientos en el plano con la obra gráfica del artista M. C. Escher, o con los mosaicos que decoran los palacios nazaríes, los cuales, siguen siendo de interés para su estudio e instruir a FPEP y docentes que se encuentran en servicio (Contreras et al., 2016; Mazzitelli, 2017). Así mismo, se siguen utilizando los patrones geométricos islámicos en las clases que se imparten para FPEP con el fin de establecer “contextos interdisciplinarios” (Mutlu, 2025). En ocasiones, el estudio de teselaciones irregulares como las de Penrose, también pueden ser un complemento adicional y un refuerzo en la etapa formativa de los FPEP (Martínez-Artero, 2019).

Las teselaciones no son utilizadas únicamente para construir mosaicos, sino que pueden ser útiles para reforzar y actualizar los conocimientos geométricos de los docentes que se encuentran en servicio (Morales y Rubio, 2020). También pueden aplicarse en la demostración de teoremas. Por ejemplo, Martínez et al. (2020) emplearon teselaciones poligonales para demostrar el teorema de los catetos y de la altura como una extensión al

teorema de Pitágoras. En estudios avanzados para especialistas en matemáticas, Stiven y Ramírez (2019) propusieron una demostración rigurosa de dos teoremas para construir teselaciones “regulares-isométricas” en el plano Euclidiano. Este tipo de teselaciones corresponden con las configuraciones de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares que todos conocemos.

La geometría juega un papel muy importante al interactuar con las artes visuales porque actúa como un punto de encuentro de dos disciplinas. Ambas se sustentan por los mismos elementos: líneas, formas y figuras, simetrías, patrones, escala y proporción. Además, utilizan el dibujo como una herramienta común para representar los objetos en dos y tres dimensiones. Nutov (2021) por ejemplo, incluyó en sus tareas elementos artísticos y fractales para consolidar los conceptos del “cero” y del “infinito” que los FPEP deben conocer. En el caso opuesto, los estudiantes que se preparaban para ser artistas visuales, estuvieron incursionando en estudios geométricos más profundos para comprender y asimilar el concepto de “infinito potencial”, al que asociaron con la idea de crecimiento ilimitado y de continuidad (Pallarés y Pallarés, 2022). Éstos últimos, emplearon simetrías rotatorias para desarrollar sus habilidades de visualización y orientación espacial. Las isometrías creadas con tecnologías digitales por los FPEP, igualmente son de gran apoyo para la visualización, el diseño de tareas y la resolución de problemas geométricos (Thaqi y Giménez, 2014).

Otro tipo de investigaciones demostraron que el desarrollo de la creatividad y visualización en los FPEP puede surgir al establecer conexiones extra-matemáticas a partir de una serie de imágenes fotográficas, interpretándolas para diseñar una tarea de geometría que haga alusión al contenido de la imagen (Vargas et al., 2023). Berciano y Gutiérrez (2015) propusieron un experimento con FPEP proporcionándoles una caja de cartón con la que deberían ser capaces de describir e interpretar sus características físicas de forma verbal, hacer representaciones gráficas en dos y tres dimensiones y explicar los conceptos matemáticos involucrados. Hay otros estudios que involucraron modelado en 3D con diferentes softwares como el *SketchUp*, empleado como una herramienta para la integración de tecnologías digitales en la rotación espacial de los objetos (Turgut y Uygan, 2014). En entornos similares y estudios recientes se investigaron los procesos para que los FPEP puedan alcanzar la generalización en un contexto de dibujo tridimensional conociendo la superficie total de un cuerpo sólido y proyectando sus caras en dos dimensiones (Kurban y Yanik, 2024). También se han aplicado cuestionarios que

abarcan los niveles de visualización en el conocido modelo de Van Hiele (Firmansyah et al., 2019) y se ha hecho la evaluación comparativa entre los test psicométricos y las tareas de geometría aplicada a estudiantes con talento matemático (Ramírez y Flores, 2017).

En la publicación del segundo manual de investigación sobre la Psicología de la Educación matemática (PME), Jones y Tzekaki (2016) hicieron una revisión de los trabajos publicados desde 2005 a 2015 relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Los diferentes enfoques abarcan una variedad de temas, entre los que se incluye: el razonamiento geométrico, la visualización espacial, la medida, los cuestionarios y test, conocimiento y desarrollo de los estudiantes y futuros docentes, así como el diseño de tareas. En este apartado de tareas, Xistouri y Pitta-Pantazi (2006) demostraron que la rotación de imágenes mentales y su perspectiva, así como las transformaciones relacionadas con las simetrías pueden crear conexiones entre la capacidad espacial y el pensamiento geométrico. Packang y Kongtahn (2007) utilizaron trabajos artísticos como una herramienta creativa para reconocer las figuras geométricas. Pitta-Pantazi y Christou (2009) definieron diferentes estilos de creatividad en matemáticas para incentivar a los estudiantes en el desarrollo de razonamiento geométrico, el pensamiento creativo, la fluidez y la flexibilidad matemática utilizando imágenes y objetos.

Por otro lado, Mountain (2019) y Schoevers et al. (2019) comentaron que en algunos países ya se está implementando de manera oficial la integración de contenidos artísticos en los currículos de matemáticas para que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias que les permitan interiorizar los conocimientos matemáticos, movilizar el pensamiento lógico e incrementar el desarrollo de su creatividad. Esto coincide con la propuesta de Uribe et al. (2014) en la que afirmaron que el concepto y aplicación de las teselaciones debería incluirse en los currículos de Educación Infantil y Primaria de las escuelas españolas para llevar a la práctica tareas con nuevos saberes escolares, matemáticos y artísticos, ya que les permite desarrollar el pensamiento geométrico y espacial del alumnado. Aunado a esto, los materiales recortables, artísticos y manipulativos como el *Pattern blocks*, resultan de gran utilidad para el desarrollo de las prácticas educativas en la etapa básica escolar (Garzón et al., 2015; Hidalgo y Ruiz, 2023). De igual manera, las artes plásticas pueden actuar como estrategia didáctica para el desarrollo de pensamiento geométrico (Santos, 2024), o las herramientas digitales

como el software *Scratch* que permite crear teselaciones, abordar la estética matemática y seguir un rol generativo evaluativo y motivacional del alumnado (Gökdağ et al., 2022).

Las habilidades de visualización y sentido espacial pueden medirse en todos los niveles educativos utilizando diferentes herramientas metodológicas y enfocándose principalmente en las habilidades cognitivas de los sujetos. Roura y Ramírez (2021) por ejemplo, utilizaron la Prueba de Actitudes Primarias (PMA), que permite evaluar los factores básicos de inteligencia, el factor espacial en particular. En esta prueba encontraron que más del 50 % de los FPEP alcanzaron una visualización media. Ghorbani et al. (2024) utilizaron el Método de Ciencia Cognitiva de Seguimiento Ocular (ETCSM, Eye Tracking Cognitive Science Method) para evaluar los niveles de Van Hiele en FPEP. Encontraron que cerca del 40 % de los participantes se encuentra entre el Nivel 1 y Nivel 2. Baranovic (2024) utilizó el método visual-analítico de observación dirigida (VAMDO Visual-Analytical Method of Directed Observation) para medir el conocimiento geométrico y las habilidades de visualización en FPEP. Aplicó un test justo antes de iniciar un curso de geometría euclidiana y volvió a aplicarlo justo después de terminar. El test consistía en preguntas asociadas con los niveles de Van Hiele. Observó que el rendimiento académico de los FPEP puede mejorar cuando la enseñanza se adapta a sus conocimientos previos y el aprendizaje va acompañado del conocimiento geométrico y las habilidades visoespaciales. Yorulmaz y Çilingir (2021) aplicaron la Escala de Auto-Eficacia Geométrica (GSE), que permite medir la confianza de los sujetos en su habilidad para resolver problemas de geometría. La prueba fue aplicada en un estudio con FPEP, cuyos resultados indicaron un valor medio de auto-eficacia geométrica alcanzado por los participantes. Putri (2017) utilizó el Test de Pardue de Visualización Espacial (PSVT), que permite medir la habilidad de un sujeto para manipular y rotar objetos en el espacio de forma mental. Con esta prueba midió las habilidades de visualización en futuros docentes de matemáticas. Sus resultados mostraron que más del 50 % de los sujetos evaluados alcanzó un nivel intermedio de visualización. Cruz y Ramírez (2018) emplearon la Prueba de Aptitudes Mentales (PMA), en la que se evalúan 5 de 7 aptitudes, aplicando un “Test de Factor E” que permite evaluar la visualización estática, definida como “la aptitud para interpretar y reconocer objetos que cambian de posición en el espacio manteniendo su estructura interna”. Con esta prueba, los autores evaluaron a estudiantes de Educación Secundaria y caracterizaron los ítems correspondientes del cuestionario aplicado a partir de los componentes del sentido espacial. Sus resultados

mostraron que la mayoría de los sujetos manifestó mayor número de errores en ítems relacionados con la percepción de figura-contexto y la discriminación visual. Demirel y Cetin (2023) aplicaron el Test de Visualización Espacial (SVT), que se enfoca en la habilidad de visualizar y manipular figuras y formas geométricas en la mente de los sujetos. Esta prueba la aplicaron a estudiantes de segundo grado de primaria y obtuvieron como resultado un nivel bajo de visualización espacial. Jaime y Gutiérrez (1989) plantearon una propuesta para evaluar los niveles de Van Hiele aplicando el modelo a isometrías en el plano. Utilizaron figuras distintas para mostrar los movimientos e hicieron estudios con estudiantes de Educación Primaria, cuyos niveles alcanzados se encontraban entre el Nivel 1 y Nivel 2.

La gran variedad de los estudios mencionados y que anteceden esta investigación se enfocan en el uso de diferentes elementos artísticos, principalmente en las teselaciones y los mosaicos debido a su utilidad para enseñar la geometría de transformaciones y los movimientos en el plano. Además, son empleados como recursos didácticos para generar conexiones extra-matemáticas entre la geometría y el arte.

Los distintos métodos y técnicas aplicadas para medir los niveles de razonamiento geométrico y las habilidades de visualización, coinciden en su mayoría, en que los FPEP alcanzan niveles intermedios según el modelo de Van Hiele. De igual manera, sus habilidades de visualización se encuentran en valores medios. Estos resultados conducen a los investigadores a crear nuevas propuestas de enseñanza-aprendizaje de la geometría para que los FPEP puedan asimilar los contenidos geométricos desde otro enfoque y les conduzca a un mayor rendimiento académico.

4. MARCO TEÓRICO

En relación con el marco teórico, aquí se describen los principales elementos de los modelos utilizados en el TFM, el de Van Hiele y el de sentido espacial, así como una introducción a las transformaciones y movimientos en el plano (isometrías), en donde se explican los conceptos de teselaciones y mosaicos geométricos.

4.1 Modelo de Van Hiele.

El modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986) ha sido hasta ahora uno de los más estudiados en los programas formativos del profesorado. En este modelo, el razonamiento geométrico de una persona podría incrementarse paulatinamente al superar cada uno de los cinco niveles de aprendizaje que lo constituyen. Estos niveles se resumen de la siguiente manera:

- Nivel 1 (visualización) que consiste en la percepción global de las figuras geométricas, enfocándose en sus propiedades visuales o físicas.
- Nivel 2 (Análisis) donde se reconocen las propiedades y elementos que componen las figuras.
- Nivel 3 (Deducción informal) para reconocer las relaciones de implicación que ligán las propiedades de las figuras geométricas y su clasificación.
- Nivel 4 (Deducción formal) es necesario para el razonamiento matemático formal, además de comprender y realizar demostraciones de manera autónoma.
- Nivel 5 (Rigor) que es el más avanzado y requiere trabajar con diferentes sistemas axiomáticos, con dos o más geometrías distintas y tener dominio para relacionar axiomas y teoremas establecidos en esas geometrías.

Éste último nivel, en principio, solamente puede ser alcanzado por especialistas en matemáticas. Sin embargo, estudios recientes propusieron nuevas metodologías para que puedan alcanzarlo quienes hayan superado el nivel 4 (Arnal-Bailera y Manero, 2024). En la Tabla 1 se resume este modelo.

Tabla 1. *Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1986)*

Nivel	Características
Nivel 1	Percepción de objetos geométricos en conjunto; apariencia física, descripción; no reconoce la forma explícita.
Nivel 2	Percepción de componentes y propiedades de los objetos geométricos; descripción de figuras, propiedades y relación entre ellas; experimenta la creación de nuevas figuras y propiedades; clasificación de objetos a partir de sus propiedades.
Nivel 3	Descripción formal de figuras; clasificación lógica y formal, razonamiento matemático; demostración lógica.
Nivel 4	Deducción y demostración lógica-formal; establecimiento de axiomas.
Nivel 5	Conocimiento de axiomas y teoremas; análisis y demostración rigurosa; comparación entre diferentes geometrías.

La relevancia evidente de este modelo ha permitido plantear propuestas para identificar el nivel de razonamiento geométrico en diversas prácticas educativas, en particular, las relacionadas con isometrías en el plano. La propuesta de Jaime y Gutiérrez (1989) consideró únicamente cuatro niveles, jerarquizados como se muestra en la Tabla 2. Dicha propuesta puede aplicarse a tareas que estén relacionadas con las isometrías.

Tabla 2. *Modelo de Van Hiele aplicado a isometrías (Jaime y Gutiérrez, 1989, p. 133)*

Nivel	Características
Nivel 1	Identificación visual de traslaciones, rotaciones y simetrías estáticas. Reconocimiento estático. Identificación de figuras isométricas. Reconocimiento dinámico (movimiento realizado automáticamente).
Nivel 2	Descubrimiento experimental de elementos /propiedades de isometrías.
Nivel 3	Deducción experimental de relaciones y propiedades de las isometrías. Justificación de propiedades y relaciones ya conocidas. Definición formal de traslación, rotación y simetría. Descomposición de isometrías.
Nivel 4	Visión global de las isometrías planas. Demostración formal de sus propiedades. En la estructura grupal se toma en cuenta las relaciones existentes entre las isometrías que son generalizadas.

4.2 Sentido espacial

Hasta ahora, el sentido espacial ha sido considerado como una capacidad vital para el pensamiento y las acciones humanas, pero no siempre ha sido identificado o soportado de manera formal en el ámbito educativo (Whiteley et al., 2015). Hay autores que definen

el sentido espacial como “un modo intuitivo de entender el plano y el espacio para identificar cuerpos, formas y sus relaciones, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas” (Flores et al., 2015. p. 129). El modelo de sentido espacial que establecieron estos mismos autores se representa de manera esquemática en la *Figura 2*.



Figura 2. Representación esquemática del modelo de sentido espacial (Flores et al., 2015).

Este modelo consiste en tres componentes principales y uno más, que actúa como componente integrador de los tres:

- 1) *Las características y propiedades de las formas y figuras.* En este componente, se identifican las figuras por sus nombres, se trabaja la definición, la construcción, la representación y la caracterización.
- 2) *Las relaciones entre las formas y los cuerpos geométricos.* Aquí se aprecian las cualidades en las figuras y cuerpos geométricos como la longitud, semejanza, perpendicularidad, paralelismo.
- 3) *La ubicación, los movimientos y transformaciones (isometrías).* En este componente la geometría se convierte en algo dinámico, se buscan referentes para situarse en el plano y en el espacio, manejar las coordenadas y saber aplicar movimientos y detectar regularidades en las figuras.
- 4) *Visualización.* Es un componente integrador de los tres componentes anteriores. Es el que permite hacer estimaciones y/o mediciones para conocer el grado de habilidad y/o la capacidad de visualización geométrica de un sujeto.

Las características de cada componente se desglosan en la Tabla 3.

Tabla 3. *Modelo de sentido espacial (Flores et al., 2015)*

Componente	Características
Componente 1	Conocimiento de características y propiedades de las formas y cuerpos geométricos en el plano y en el espacio.
Componente 2	Reconocer y establecer relaciones geométricas entre las formas y los cuerpos geométricos.
Componente 3	Ubicación y movimientos que se pueden realizar con las formas y los cuerpos geométricos en el plano o en el espacio.
Componente 4 (integradora)	Integra los tres componentes anteriores en una visualización generalizada de imágenes, procesos y habilidades para analizar, transformar y comunicar información visual de los objetos y conceptos geométricos, reales o imaginarios.

La importancia de la relación que existe entre la visualización espacial y el aprendizaje de la geometría ha sido ampliamente estudiada desde diferentes enfoques matemáticos (Fernández, 2013; Gutiérrez, 2006; Presmeg, 2006; Presmeg et al., 2016). Hasta ahora, la visualización no tiene una sola definición debido a que en las últimas décadas la investigación en educación matemática se ha incrementado de manera significativa y cada vez se hacen nuevas aportaciones. Algunos autores la definieron como “la habilidad, los procesos, los productos de creación, interpretación, uso y reflexión de las fotografías, imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de describir y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión” (Sarama y Clements, 2009. p. 183). Para los propósitos de este TFM se hace referencia la definición de Ángel Gutiérrez:

En este contexto, hay que entender la *visualización* como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (*imágenes*) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (*imágenes mentales*). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta.
(Gutiérrez, 2006, p. 27).

Con esta definición se resalta la importancia de la visualización en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en distintos aspectos como la representación y transformación de objetos e imágenes y la comunicación de resultados matemáticos. Tiwari et al. (2021)

establecieron que las habilidades de visualización pueden ser “la combinación de virtudes como la creatividad, la imaginación, la determinación, la perseverancia, constancia y la diligencia, y que no toda la visualización es efectiva, por lo que hay que practicarla para que se convierta en una habilidad”. Aunado a esto, Bishop (1989) describió en su momento dos procesos de visualización que se presentan cuando se utilizan imágenes:

- a) Interpretación de la información figurativa (IFI): es el proceso que tiene lugar al intentar leer, comprender e interpretar una imagen para extraer información de ella.
- b) Pensamiento visual de la información (VP): es el proceso que tiene lugar al convertir información no visual en imágenes, o al transformar una imagen ya formada en otra.

Para medir las habilidades de visualización Del Grande (1990) y Gutiérrez (1992) asociaron estos dos procesos con capacidades psicológicas que pueden relacionarse con la geometría, por ejemplo:

1. *Coordinación ojo-motor*. Es la habilidad para coordinar la visión ocular con el movimiento del cuerpo.
2. *Percepción de figura y contexto*. Es la habilidad de reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
3. *Conservación de la percepción*. Es la habilidad de reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades, como la forma o el tamaño, aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
4. *Percepción de la posición en el espacio*. Es la habilidad de relacionar un objeto con el observador o con otro objeto que actúa como referencia.
5. *Reconocimiento de relaciones espaciales*. Es la habilidad de identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.).
6. *Discriminación visual*. Es la habilidad de comparar dos imágenes o dos objetos en la misma imagen e identificar sus semejanzas y diferencias visuales.
7. *Memoria visual*. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista, pero que ya no se ven, o han sido cambiados de posición.

4.3 Transformaciones y movimientos en el plano (isometrías).

En Educación Matemática, la geometría de transformaciones se enfoca en las habilidades de un sujeto para desarrollar el pensamiento lógico y el sentido espacial. Las transformaciones (isometrías) se refieren a los movimientos o cambios de posición en el plano o en el espacio de una forma o figura geométrica sin que se alteren sus propiedades. De forma general se trabaja con cuatro isometrías en el plano: traslación, rotación, simetría axial y simetría central. Hay autores que a la combinación de una simetría axial con una traslación le llamaron “simetría con deslizamiento” o “reflexión deslizada” (Martin, 1982). Una sucesión de reflexiones deslizadas conduce a la construcción de frisos, que son los recubrimientos de una región del plano limitada por dos rectas paralelas. Mientras que, una combinación de isometrías, puede conducir a la construcción de mosaicos, como se explica más adelante en este apartado. Para los propósitos de este TFM sólo se consideraron cuatro isometrías en el plano, cuyas definiciones por Noceti (s/f) se describen de la siguiente manera:

1) *Traslación*. Es la transformación que a cada punto P de una figura se le asocia mediante un vector otro punto P' tal que $PP' = \mathbf{v}$. Las traslaciones conservan la forma y el tamaño de las figuras.

2) *Rotaciones o giros*. Dado un punto P del plano, un centro de giro O , un ángulo α y un sentido de giro, el punto que resulta de aplicar a P el giro de centro O y ángulo positivo o negativo α , es P' , tal que el ángulo POP' sea igual a α y OP sea congruente con OP' .

3) *Simetría central*. Dada una figura en el plano y un punto O , una simetría central de dicha figura con centro en O es la transformación que aplicada a cualquier punto P de la figura le corresponde otro punto P' , tal que la distancia de O a P es igual a la distancia de O a P' y los puntos P , O y P' pertenecen a una misma recta.

4) *Simetría axial*. Dada una figura en el plano y un punto O , una simetría axial de dicha figura según un eje “ e ” es la transformación que aplicada a cualquier punto P de la figura le corresponde otro punto P' , tal que la distancia del eje “ e ” a P es igual a la distancia del eje “ e ” a P' y los puntos P , O y P' pertenecen a una recta perpendicular al eje “ e ”. En la *Figura 3* se muestra una representación esquemática de las isometrías en el plano.

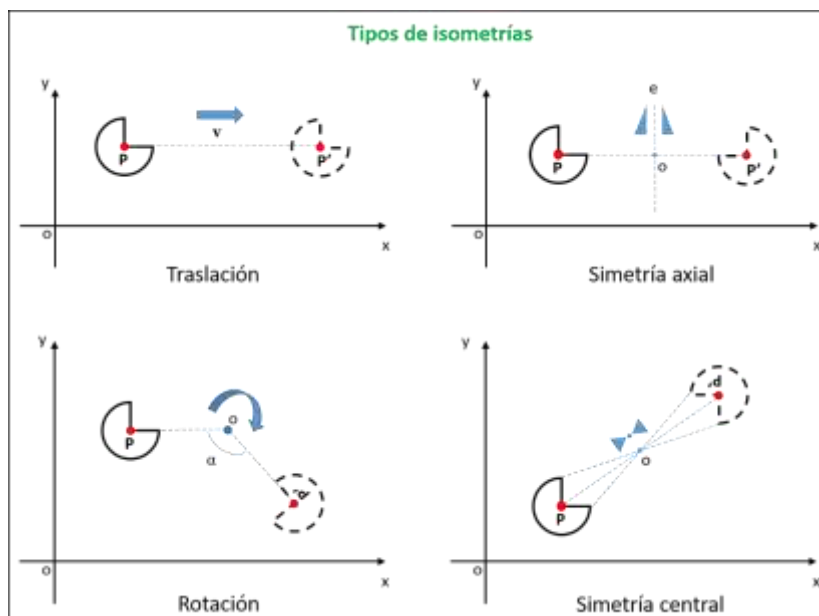


Figura 3. Tipos de isometrías en el plano. Fuente: Elaboración propia.

Las isometrías, han sido ampliamente estudiadas en los mosaicos nazaríes desde diferentes enfoques matemáticos y didácticos (Gutiérrez, 2005; Ramírez y Fernández-Plaza, 2018; Torres, 1987). De igual manera, el concepto de teselación ha sido empleado en diversas prácticas educativas que van desde Educación Infantil y Primaria hasta los estudios universitarios (Garzón et al., 2015; Uribe et al., 2014). En términos generales, teselar una superficie plana significa que, mediante una figura patrón, se cubre la totalidad de una superficie sin que se superpongan ni dejen huecos. A esta superficie limitada, suele llamársele mosaico geométrico si las teselas que lo conforman presentan isometrías. Las teselaciones más comunes son las poligonales regulares con un patrón triangular, cuadrangular, o hexagonal; en cada caso el patrón es el mismo en todos los vértices, como se muestra en la Figura 4.



Figura 4. Teselación triangular, cuadrangular y hexagonal. Fuente: Elaboración propia.

5. METODOLOGÍA

En relación con los aspectos metodológicos, aquí se presenta el diseño de la investigación. Se comenta un estudio previo realizado con un grupo piloto de estudiantes del máster en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Granada. Se describen cuatro tareas previas a la investigación, que sirvieron como instrucción para homogeneizar los conocimientos y responder a un cuestionario diseñado para que los FPEP manifestaran su razonamiento geométrico (niveles de Van Hiele) y sentido espacial (componentes). Por último, se muestra la determinación de las categorías para el análisis del cuestionario, el cual sirvió como instrumento de análisis.

5.1 Diseño de la investigación

La metodología empleada para este estudio es de tipo cualitativa y de carácter descriptivo porque se especifican las características de los objetos analizados (Hernández et al., 2014), cuyo análisis en particular, es de contenido visual y de texto (Rico, 2013). En el estudio participaron 54 sujetos (32 mujeres y 22 hombres) con edades comprendidas entre 20 y 22 años que cursaban la asignatura Didáctica de las matemáticas II (DMII) en tercer año del grado en educación primaria en la Universidad de Cádiz. El instrumento de análisis fue un cuestionario diseñado para contextualizar los componentes del sentido espacial en mosaicos geométricos desde un punto de vista didáctico para identificar las habilidades de visualización de los FPEP (Ward, 2003; Gutiérrez, 2005). En este cuestionario se consideraron como unidad de análisis las respuestas a cada uno de los 16 ítems.

Este TFM se centra particularmente en la geometría de transformaciones y movimientos en el plano (isometrías). Las competencias relativas a la investigación, además del conocimiento de los modelos teóricos, requieren del diseño y análisis de tareas con potencial para comparar el razonamiento geométrico con el sentido espacial y la capacidad de analizar ambos modelos teóricos en futuros docentes. Previamente a la investigación del cuestionario que aquí se describe, se realizó un estudio piloto para indagar en la complejidad de la tarea implicada en el cuestionario y su potencial de análisis. Se caracterizaron los niveles de Van Hiele en un grupo de 14 estudiantes del

máster de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada que cursaban la asignatura Didáctica de la geometría. El grupo era heterogéneo, incluyendo profesorado en activo de primaria, secundaria y universidad, así como recientes egresados/as de los grados de Matemáticas y Educación Primaria. A los sujetos se les había presentado el modelo de Van Hiele y el de sentido espacial como referentes teóricos para la caracterización del razonamiento geométrico. Las tareas realizadas en ese estudio piloto favorecieron que tres participantes manifestaran características propias del Nivel 4, asociadas con la categoría de visión global de las isometrías (ver Tabla 2 del marco teórico); el resto de participantes, manifestó características propias de los Niveles 1, 2 y 3 asociadas a las categorías que se indican en esa misma tabla. Los resultados obtenidos en ese estudio son consistentes con los encontrados por Arnal-Bailera y Manero (2021).

5.2 Tareas de enseñanza previas al cuestionario

Previamente al cuestionario, como investigador y profesor de la asignatura DM1, el autor de este TFM diseñó cuatro tareas de enseñanza que fueron consideradas para la evaluación del curso. La finalidad de estas tareas fue homogeneizar los conocimientos de geometría en los sujetos, por lo que se llevaron a cabo durante el curso DM1. Las cuatro tareas sirvieron como refuerzo en las competencias matemáticas relativas al manejo de instrumentos de dibujo y en los conceptos básicos de geometría euclidiana. Con las Tareas 1 y 2 se pretende activar habilidades de visualización como la conservación de la percepción y el reconocimiento de relaciones espaciales (paralelismo y perpendicularidad, simetría, posición relativa), para ello se construyeron polígonos regulares, poliedros y antiprismas. En la Tarea 3 se pretende observar los dos procesos de visualización (VP) y (IFI) descritos por Bishop (1989), que ocurren al transformar una imagen ya formada en otra y a partir de la última, extraer información visual de ella. Con esta tarea los sujetos desarrollan su creatividad. Con la Tarea 4 se pretende desarrollar habilidades de visualización como la conservación de la percepción y la memoria visual al aplicar traslaciones, rotaciones y simetrías (isometrías en el plano) a una figura compuesta por varios elementos geométricos. Además, esta tarea permite establecer conexiones extra-matemáticas con elementos artísticos a través de teselaciones y mosaicos. En el currículo de la asignatura DM1, estas cuatro tareas juegan el papel de atender las necesidades y cubrir las carencias de la geometría que se establecieron en los

principios y estándares del NCTM (2000), relacionados con la capacitación en el razonamiento geométrico y el sentido espacial. En adición, sirvieron para contestar el cuestionario, que fue considerado como instrumento de análisis para esta investigación y se describe en el apartado 5.3 de esta sección.

5.2.1 Tarea 1. Polígonos regulares

Consiste en construir de forma manual seis polígonos regulares de n lados ($n=3, 4, 5, 6, 7$, y 8) inscritos en una circunferencia de 3 cm de radio. Se pide encontrar la relación existente entre las áreas y perímetros de cada polígono con respecto a la circunferencia y el círculo. Se permite utilizar lápiz de grafito para resaltar los trazos. Es necesario el uso de regla y compás. Se dispuso de 1.5 horas de clase para realizar esta actividad y la entrega fue en una cartulina blanca tamaño A4.

5.2.2 Tarea 2. Poliedros y antiprismas

Consiste en construir de forma manual dos poliedros de base triangular (tetraedro y octaedro), un antiprisma cuadrangular y un antiprisma hexagonal. Se pide llevar a cabo la conversión de una figura plana en un cuerpo tridimensional, manteniendo las dimensiones de 3 cm por lado en todos los triángulos utilizados. Se permite el uso de regla, compás y lápiz de grafito para trazar las líneas. Se dispuso de 3 horas de clase para realizar esta actividad. La entrega de los poliedros y antiprismas fue en físico, contruidos con cartulina blanca.

5.2.3 Tarea 3. Transformación de imagen figurativa

Consiste en transformar una imagen figurativa en elementos geométricos para construir un cuadro. Se permite cualquier material recortable (papel, cartulina, tela, cartón, plástico). Se sugiere colocar los elementos compositivos en una distribución triangular en todo el cuadro porque al unirlo con otros cuadros de las mismas características, la distribución triangular pasará a formar una composición nueva basada en formas rectangulares. Esto permitió introducir a los sujetos en las nociones básicas de teselaciones y mosaicos geométricos. En esta actividad se dispuso de 3 horas de clase, su entrega fue en una cartulina negra tamaño A4. En la *Figura 5* se muestran estas tres tareas de forma esquemática.

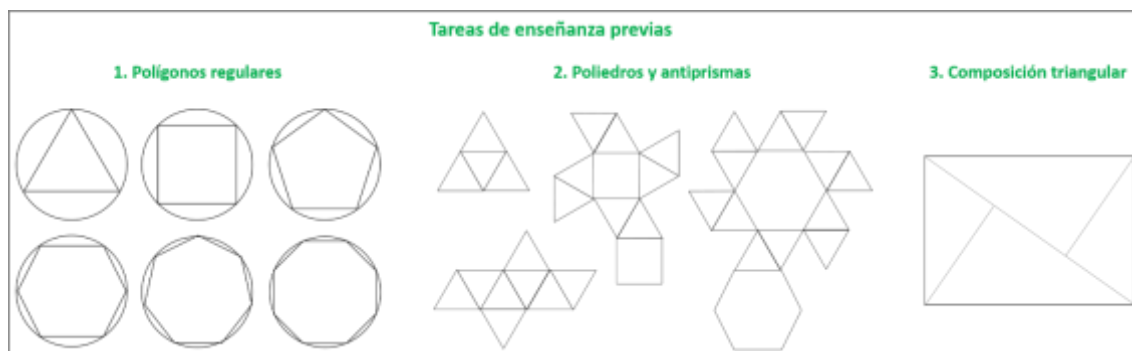


Figura 5. Tareas de enseñanza previas al cuestionario. Fuente: Elaboración propia.

5.2.4 Tarea 4. Construcción de mosaicos geométricos

Esta tarea consiste en elegir una de las cuatro teselas mostradas en la Figura 6 para construir de forma manual un mosaico de ocho piezas. Cada tesela mide 6 x 10 cm. Pueden aplicarse isometrías de forma arbitraria. Se permite el uso de regla, escuadra, cartabón y compás, así como un lápiz de grafito para resaltar las líneas de trazo. La aplicación de nomenclatura, color o tramas es opcional. Además, se debe elaborar un informe escrito que incluya la interpretación geométrica de la tesela elegida y del mosaico construido. La interpretación geométrica debe escribirse de manera sistemática basándose en el modelo de Van Hiele. Para esta tarea se emplearon 6 horas de clase y su entrega fue en físico, en una cartulina blanca tamaño A4.

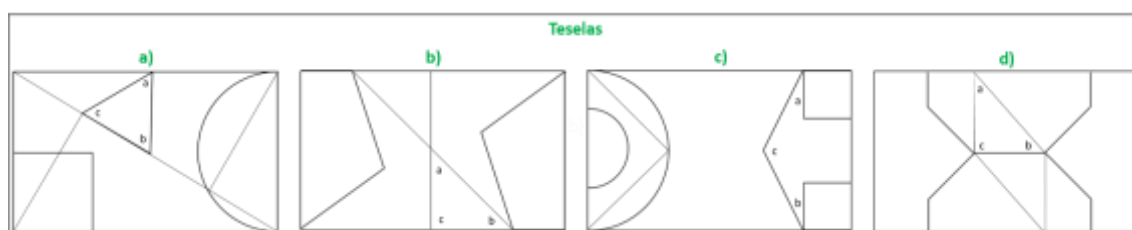


Figura 6. Teselas como elemento generador del mosaico. Fuente: Elaboración propia.

5.3 Cuestionario

El uso de test y cuestionarios ha demostrado ser una herramienta eficaz para analizar el sentido espacial de los FPEP (Cruz y Ramírez, 2018; Roura y Ramírez, 2021), aun cuando las capacidades de respuesta de un sujeto se encuentran entre un componente y otro. De igual manera los cuestionarios diseñados con preguntas abiertas han sido útiles para

evaluar el grado de adquisición de razonamiento geométrico mediante los niveles de Van Hiele. En los años 90 se hicieron esfuerzos por estandarizar un modelo de test que permita evaluar los niveles de Van Hiele de una forma eficaz. Aplicaron preguntas abiertas referentes a distintos tópicos de geometría, en particular a los polígonos y cuadriláteros (Crowley, 1989; Gutiérrez y Jaime, 1995; Jaime y Gutiérrez, 1994). En el presente, todavía se siguen utilizando los cuestionarios como un referente para conocer los niveles de Van Hiele en FPEP (Arnal-Bailera y Manero, 2021; Baranovic, 2024).

Como investigador y profesor de la asignatura DMII, el autor de este TFM diseñó un cuestionario para considerarlo como instrumento de análisis en esta investigación, el cual fue aplicado al final del curso de DMII. En dicho cuestionario se incluyeron preguntas abiertas y figuras de varios mosaicos con el fin de encontrar la tesela generadora y sus movimientos realizados. Los mosaicos que se presentan en este cuestionario están basados en la Tarea 4, en donde a partir de una tesela y aplicar diferentes movimientos en el plano los mosaicos se fueron construyendo. El mosaico número 3, que permite responder a los ítems 3-6, está coloreado en diferentes tonos de grises con el fin de representar la tridimensionalidad. Para su interpretación, pueden asociarse tres habilidades de visualización como la percepción de figura y contexto, la conservación de la percepción y la discriminación visual. También es posible identificar los niveles de Van Hiele.

Varias preguntas que se incluyeron en el cuestionario, por ejemplo, las de los ítems 8 y 9, hacen referencia a las habilidades de visualización (Componente 4) como la percepción de figura y contexto, la conservación de la percepción, el reconocimiento de las relaciones espaciales y la discriminación visual. El ítem 1, está asociado a la habilidad de discriminación visual, o el ítem 2, que se asocia a la habilidad de la memoria visual. Además, permitió identificar las relaciones que existen entre el razonamiento geométrico (niveles) y el sentido espacial (componentes).

El cuestionario que se muestra en la *Figura 7* fue diseñado para identificar los niveles de Van Hiele y los componentes del sentido espacial que manifestaron los sujetos de la muestra en esta investigación. Para los niveles de Van Hiele, se utilizó la propuesta de Jaime y Gutiérrez (1989) descrita en el marco teórico. El cuestionario fue aplicado en el aula durante una sesión de clase en el curso DMII, por lo que se dedicaron 1.5 horas para resolverlo.

Cuestionario de sentido espacial

1. a) ¿Cuáles figuras son congruentes con A? ¿Por qué son congruentes?
b) Identifica y señala las transformaciones que se han realizado en B, C, D y E con respecto a la figura A. Justifica tu respuesta.



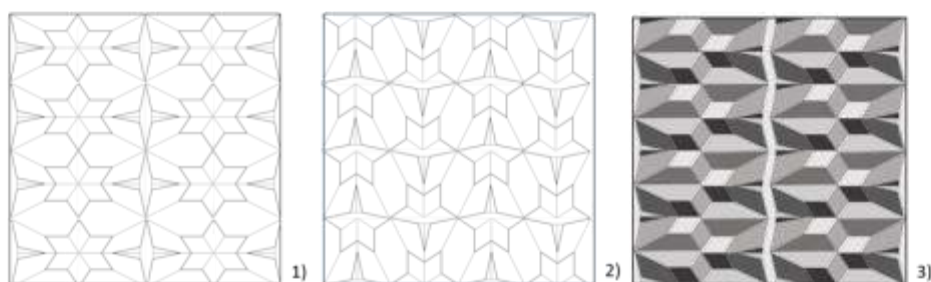
2. a) Dibuja el dado girándolo a: $+90^\circ$ horizontal; -90° vertical; $+180^\circ$ vertical; -45° horizontal; 45° vertical.



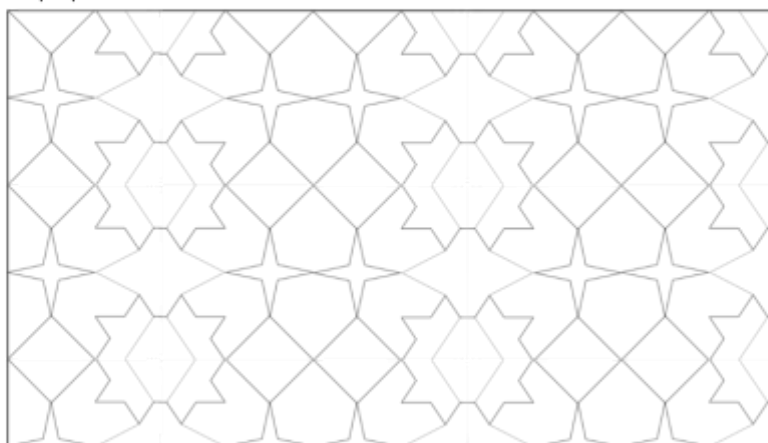
- b) Dibuja el dado de tres formas diferentes (descomponiendo las caras en el plano con sus puntos correspondientes).



3. Identifica el elemento generador en cada uno de estos tres mosaicos.
4. Señala los movimientos o transformaciones que se emplearon para generar cada mosaico.
5. Describe las diferencias entre el mosaico 1 y 2; entre el 1 y 3; entre el 2 y 3.
6. ¿Qué relaciones tienen entre ellos?



7. a) En este mosaico, identifica los hexágonos con una *H*, los rombos con *R*, los cuadrados con *C*, los polígonos cóncavos con *V*, los polígonos estrellados con *E*.
b) Define las propiedades de cada uno de ellos.



8. a) Elige un elemento interno del mosaico e identifica su transformación señalando con un rotulador: su centro de giro; su eje de simetría, o sus puntos de traslación.
b) Describe las propiedades de esta transformación.
9. a) Identifica y señala dos transformaciones distintas a la anterior.
b) ¿Qué relación tienen entre ellas?
10. a) Hallar el elemento generador (tesela) del mosaico. ¿cómo lo has conseguido? Explica.

Figura 7. Cuestionario para evaluar el sentido espacial. Fuente: Elaboración propia.

5.4 Categorías para el análisis del cuestionario

Con el fin de contrastar la teoría clásica de Van Hiele con las nuevas directrices curriculares que presenta en la actualidad el sentido espacial, se establecieron categorías para ambos modelos.

Las categorías para el modelo de Van Hiele son las mismas que fueron establecidas en la propuesta de Jaime y Gutiérrez (1989) descrita en el marco teórico (Tabla 2). En la Tabla 4 se han agregado las siglas correspondientes a cada categoría para facilitar el análisis. IVI, REF y RDF, están asociadas con el Nivel 1, que es el reconocimiento de figuras estáticas y dinámicas (isometrías). DEE, se asocia con el Nivel 2, que es el descubrimiento experimental al practicar las isometrías en el plano. DER, JPR, DFRT y DI, están asociadas con el Nivel 3, en el que se exigen deducciones, definiciones y justificaciones de propiedades de las isometrías, así como su descomposición para describir las partes que las integran. VGI, DFP y EGR, se asocian al Nivel 4, que corresponde con la visión global de las isometrías en conjunto y la demostración formal de sus propiedades.

Tabla 4. *Modelo de Van Hiele aplicado a isometrías (Jaime y Gutiérrez, 1989, p. 133)*

Nivel	Categoría	Características
Nivel 1	IVI	Identificación visual de traslaciones, rotaciones y simetrías estáticas.
	REF	Reconocimiento estático. Identificación de figuras isométricas.
	RDF	Reconocimiento dinámico (movimiento realizado automáticamente).
Nivel 2	DEE	Descubrimiento experimental de elementos /propiedades de isometrías.
Nivel 3	DER	Deducción experimental de relaciones y propiedades de las isometrías.
	JPR	Justificación de propiedades y relaciones ya conocidas.
	DFRT	Definición formal de traslación, rotación y simetría.
	DI	Descomposición de isometrías.
Nivel 4	VGI	Visión global de las isometrías planas.
	DFP	Demostración formal de sus propiedades.
	EGR	En la estructura grupal se toma en cuenta las relaciones existentes entre las isometrías que son generalizadas.

Las categorías para el modelo del sentido espacial, fueron establecidas con base en lo descrito en el marco teórico (Tabla 3). Se conformaron tras la prueba piloto, considerando tanto la resolución de expertos como la de los estudiantes analizados. Estas categorías permiten evaluar los cuatro componentes y se desglosan en la Tabla 5. FGM está asociada con el Componente 1 (Conocimiento de características y propiedades de las formas y figuras). FAC y EGM se asocian al Componente 2 (Establecer relaciones geométricas

entre las figuras). RMT, TFA y DRP están asociadas con el Componente 3 (Ubicación y movimientos que se pueden realizar con las formas y figuras). VIC y RIM integran en una visualización global las imágenes generadas (mosaicos, patrones, nuevas formas y figuras geométricas), están asociadas a las habilidades de discriminación visual, percepción de la figura-contexto y las relaciones espaciales.

Tabla 5. *Categorías para el análisis del cuestionario (modelo de sentido espacial)*

Componente	Categoría	Descripción
Componente 1 (Reconocimiento)	FGM	Identificó/señaló las figuras geométricas en los mosaicos y/o definió sus propiedades.
Componente 2 (Relaciones)	FAC	Identificó/señaló las figuras congruentes del ítem 1a).
	EGM	Identificó el elemento generador de los mosaicos y/o sus movimientos.
Componente 3 (Movimientos)	RMT	Describió relaciones /movimientos de teselas con centro de giro, vector, ejes.
	TFA	Identificó las transformaciones en las figuras del ítem 1b).
	DRP	Dibujó los dados con rotaciones /Transformó los dados en el plano (6 caras).
Componente 4 (Visualización)	VIC	Mostró habilidades de visualización como la conservación de la percepción: reconoció que en las isometrías las figuras no cambian su forma o tamaño, aunque cambien de posición. Dibujó/señaló distintas isometrías a la vez, con su centro de giro, ángulo, ejes de simetría, vectores, y explicó sus relaciones.
	RIM	Mostró habilidades de visualización como el reconocimiento de relaciones espaciales (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa). Describió/justificó adecuadamente las diferencias/relaciones de las isometrías en los mosaicos con argumentos geométricos y matemáticos.

Como investigador y profesor de la asignatura DMII, el autor de este TFM realizó el análisis del cuestionario tras consensuar las categorías de análisis con profesorado experto en sentido espacial.

6. RESULTADOS

Previamente a la descripción de los resultados del cuestionario, también se describe en esta sección el rendimiento de las tareas de enseñanza como elemento descriptivo de la muestra. En lo que respecta al instrumento de análisis (cuestionario), fue analizado con el modelo de sentido espacial para identificar los componentes y características que manifestaron los sujetos. También se hizo un análisis de este cuestionario con el modelo de Van Hiele aplicado a isometrías para identificar los niveles alcanzados por los sujetos, y para encontrar las relaciones existentes entre los componentes y niveles de ambos modelos.

6.1 Rendimiento de las tareas de enseñanza previas al cuestionario.

Para conocer el rendimiento de las Tareas 1-3 se establecieron las categorías de la Tabla 6. Se consideraron dos niveles de rendimiento en cada tarea (Alto y Bajo). Las categorías HIPR e HIPA corresponden con entregas correctas y completas, TEG al ser una actividad manual en la que la mayoría mostró predisposición fue considerada de rendimiento alto. DIG corresponde con los sujetos que tenían dificultades para dibujar las figuras de forma manual y DTG con los sujetos que no comprendieron esta actividad, por lo que, ambas se consideraron de bajo rendimiento.

Tabla 6. *Categorías para el rendimiento de las Tareas 1-3*

Categoría	Descripción
HIPR	Mostró habilidad con instrumentos geométricos y completó sin fallos los dibujos de polígonos regulares.
HIPA	Mostró habilidad con instrumentos geométricos y completó sin fallos los dibujos y cuerpos de poliedros y antiprismas.
TEG	Transformó adecuadamente la imagen figurativa en elementos geométricos y construyó un cuadro geométrico.
DIG	Dificultades con instrumentos geométricos / cometió muchos fallos.
DTG	Dificultades en la transformación geométrica. No comprendió el concepto.

En la Tabla 7 se muestra el rendimiento de las Tareas 1-3. En la Tarea 1, se observó que el 57 % de los sujetos presentaron dificultades al elaborar los polígonos inscritos en la

circunferencia. En la Tarea 2, al 68 % de los sujetos se les dificultó el trazado de los antiprismas en el plano y construir los poliedros. En cambio, en la Tarea 3, solo el 9 % de los sujetos no transformó correctamente la imagen figurativa. La libertad de acción en esta tarea condujo a los sujetos a mostrar mayor predisposición con los materiales recortables, comparándola con el rigor del dibujo técnico en las actividades anteriores. Más del 50 % de los sujetos manifestó no haber utilizado los instrumentos de dibujo salvo durante su etapa escolar en Educación Secundaria. Con base en los resultados obtenidos, el rendimiento de la Tarea 3 fue alto, mientras que, el de las Tareas 1 y 2 se considera que fue bajo. En la *Figura 8* se muestran ejemplos de las tareas realizadas. En la *Figura 9* se aprecia una combinación de cuadros formando un pequeño mosaico de cuatro piezas que se unen con mitades de retrato en los extremos. Esta combinación de cuadros se realizó durante una clase con el fin de introducir el concepto de teselaciones y mosaicos.

Tabla 7. *Rendimiento de las Tareas 1-3*

Tarea	Rendimiento			Dificultades	
	Categoría	N° sujetos	%	Categoría	%
Tarea 1	HIPR	23	43 %	DIG	57 %
Tarea 2	HIPR	17	32 %	DIG	68 %
Tarea 3	TEG	49	91 %	DTG	9 %



Figura 8. Tareas manuales de polígonos regulares y cuerpos geométricos.

Fuente: Elaboración por estudiantes de DMI.



Figura 9. Tarea manual: transformación de imágenes figurativas en elementos geométricos.

Fuente: elaboración de estudiantes de DMI.

Para conocer el rendimiento de la Tarea 4, se establecieron las categorías de la Tabla 8. Se consideraron tres niveles de rendimiento: Alto, Medio y Bajo, porque de esta manera es posible observar las deficiencias y las aptitudes de los sujetos, y establecer nuevas acciones para atender sus necesidades y superar esas carencias. Cuando el número de sujetos que supera una categoría es mayor que 40, el rendimiento es alto ($\text{Alto} > 75 \%$). Rendimiento medio, cuando el número de sujetos que supera una categoría está entre 27 y 40 ($50 \% < \text{Medio} < 75 \%$). Rendimiento bajo, si el número que supera una categoría es menor que 27 ($\text{Bajo} < 50 \%$).

Tabla 8. Categorías para el rendimiento de la Tarea 4. Construcción de mosaicos

Categoría	Descripción
PGT	Señaló / identificó y describió propiedades de figuras geométricas en las teselas.
CTT	Utilizó color o tramas para distinguir elementos geométricos en las teselas.
PNF	Señaló / identificó y describió propiedades y relaciones interfigurales de las nuevas formas y figuras generadas en el mosaico.
MDT	Realizó movimientos distintos a la traslación con las teselas.
CTM	Utilizó color/tramas para distinguir nuevos elementos geométricos en el mosaico.
EIM	Definió / explicó las isometrías aplicadas en los mosaicos.
VIG	Mostró habilidades de visualización como la conservación de la percepción: reconoció que en las isometrías las figuras no cambian su forma o tamaño aunque cambien de posición. Visualizó de forma global las isometrías en los mosaicos, construyó patrones y nuevos elementos interfigurales.
DFI	Mostró habilidades de visualización como el reconocimiento de relaciones espaciales: equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa. Demostró las propiedades de las isometrías / Identificó relaciones existentes

Las categorías PGT y CTT están asociadas con el reconocimiento estático e identificación de figuras isométricas. PNF, MDT y CTM se asocian con el descubrimiento experimental de elementos geométricos y propiedades de las isometrías. EIM es asociada con la definición formal de traslación, rotación y simetría. VIG fue asociada con la visión global de las isometrías planas y su estructura grupal o generalizada. DFI se asocia con la demostración de propiedades de las isometrías e identificación de relaciones existentes.

En la Tabla 9 se muestra el rendimiento de esta tarea. Aquí se observa que el menor porcentaje (5,5 %) ocurre porque solamente tres sujetos supieron definir y explicar las propiedades de las isometrías aplicadas en los mosaicos. La aplicación de color en las teselas y los mosaicos era opcional por lo que CTM obtuvo un rendimiento medio (65 %). En la visualización global (VIG), veinticinco sujetos construyeron mosaicos aplicando más de dos movimientos, identificaron patrones mediante el color y encontraron nuevos elementos interfigurales. Sin embargo, el rendimiento de esta categoría fue bajo (46 %). En esta tarea no fue requerida la demostración formal de las isometrías por considerarse inapropiada para que pudieran desarrollarla los FPEP, por esta razón la categoría DFI no fue considerada para el rendimiento de la tarea.

Tabla 9. *Rendimiento de la Tarea 4 por categorías*

Categoría	N° de sujetos que la superaron	Rendimiento (%)
PGT	53	98 %
CTT	52	96 %
PNF	53	98 %
MDT	48	89 %
CTM	35	65 %
EIM	3	5,5 %
VIG	25	46 %
DFI	0	0 %

La creación de mosaicos fue a partir de traslaciones, rotaciones y simetrías. El uso de color, tramas y nomenclatura para distinguir los elementos geométricos en las teselas, facilitó la interpretación para escribir sus reportes. La isometría más simple para ser utilizada es la traslación, pero con ésta no se logran los patrones para los que se han diseñado las teselas. En cambio, una reflexión o una rotación producen simetrías con las que pueden generarse diseños simétricos y armoniosos. La policromía aplicada, en las teselas (*Figura 10*), además de proporcionar un valor estético, permitió identificar nuevas

formas y figuras, establecer patrones y simetrías en los mosaicos, y distinguir los movimientos realizados.

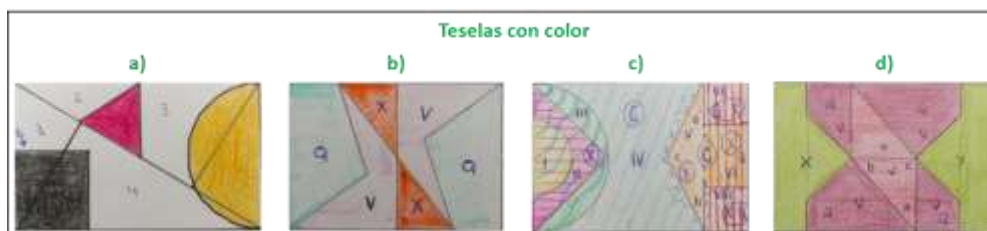


Figura 10. Teselas coloreadas. Fuente: Elaboración por estudiantes de DMI.

En los mosaicos que se aplicaron isometrías y colores arbitrarios se encontraron formas y figuras irregulares que podrían sugerir abstracciones geométricas. Las repeticiones de mosaicos eran de esperarse debido a que solamente había cuatro modelos de teselas, comparando con el número de sujetos que había en la muestra. Sin embargo, la variedad de aplicaciones del color en diferentes zonas sugiere que cada uno de los diseños sea considerado como una pieza auténtica, como puede apreciarse en la *Figura 11*.



Figura 11. Mosaicos coloreados. Fuente: Elaboración por estudiantes de DMI.

Los rendimientos obtenidos en estas cuatro tareas podrían considerarse como un indicativo sobre la necesidad de crear propuestas de este tipo para el desarrollo de las competencias matemáticas en el alumnado. La Tarea 3 permitió identificar una mayor predisposición hacia las prácticas manuales que involucran aspectos creativos con márgenes de libertad para su elaboración, comparándola con las Tareas 1 y 2, cuyo grado de precisión es necesario en las figuras planas para conseguir su transformación a los cuerpos tridimensionales. El hecho de que en estas dos tareas el rendimiento se encuentre

por debajo del 50 %, indica la necesidad de establecer nuevas acciones y propuestas para intentar superar las dificultades que se presentaron. En su mayoría fueron atribuidas a la falta de precisión en los trazos debido a no tener suficiente experiencia con el uso de los instrumentos geométricos, como el compás y las escuadras. El rendimiento en la Tarea 4, además de contribuir al desarrollo de las competencias procedimentales, permitió que los sujetos desarrollaran habilidades de visualización espacial. La aplicación de las isometrías para construir mosaicos, permitió desarrollar características del Componente 3 del modelo de sentido espacial, que corresponde con la ubicación y movimientos en el plano. La interpretación geométrica de la tesela en forma sistematizada basándose en el modelo de Van Hiele, permitió identificar que el nivel en que se encuentran los sujetos oscila entre el Nivel 2 y 3, relacionados con el análisis y la deducción informal. El hecho de que ningún sujeto haya superado la categoría DFI y que tan sólo tres sujetos hayan superado la categoría EIM, ambas relacionadas con las propiedades y demostración formal de las isometrías, indica la necesidad de establecer nuevas acciones y propuestas de tareas que conduzcan a la superación de estas dificultades, causadas quizás por la escasa formación en geometría que los FPEP han recibido durante sus estudios previos.

6.2 Análisis del Cuestionario (modelo del sentido espacial)

Como investigador y profesor de la asignatura DMII, el autor de este TFM realizó el análisis del cuestionario utilizando como triangulación la interpretación de las categorías por lo estudiantes participantes en la prueba piloto.

En la Tabla 10 se muestra el número de respuestas acertadas y respuestas erróneas de la aplicación del cuestionario. Se consideraron como fallos las preguntas parcialmente respondidas, con errores, o con manifestación de dificultades en la respuesta, y no respondida (N/R) a las preguntas que dejaron en blanco. Los ítems 7 a) y 7 b) fueron asociados con el Componente 1 del modelo de sentido espacial (reconocimiento de figuras y elementos geométricos). Estos dos ítems se asocian a este componente porque únicamente se pretende que el sujeto identifique y señale figuras geométricas e indica las propiedades de cada una. Los ítems 1 a), 3, 10 a) y 10 b) se asociaron con el Componente 2 (establecer relaciones entre las figuras) debido a que el ítem 1a) permite que el sujeto relacione las figuras mostradas para saber si son congruentes o no. El ítem 3 permite ver la relación de las figuras en conjunto para determinar un solo elemento generador del

mosaico, lo mismo sucede con los ítems 10 a) y 10 b), salvo que, en este último se pide al sujeto explicar cómo encontró el elemento generador. Los ítems 1 b), 2 a), 2 b), 4, 5, 6, 8 a), 8 b) se relacionaron con el componente 3 (ubicación y movimientos), porque permiten que el sujeto identifique y reconozca las isometrías establecidas en las figuras y en los mosaicos. Finalmente, los ítems 9 a) y 9 b) se asociaron con el Componente 4 (visualización). Se espera que en estos dos ítems el sujeto tenga desarrolladas las habilidades de visualización para poder responderlos.

En la Tabla 10 se observa que el mayor número de respuestas en blanco fue para los ítems 8 b) y 9 b), que corresponden con el establecimiento de relaciones entre las isometrías. Esto puede ser debido a la falta de comprensión en los conceptos de las isometrías o posiblemente a que los sujetos lo hayan olvidado y no supieran qué responder. Solamente un sujeto respondió correctamente el ítem 9 b) y cinco sujetos más lo respondieron, pero de manera incorrecta. En la relación entre preguntas acertadas con respecto a las preguntas respondidas se observó que el valor más bajo (0,07) ocurre con el ítem 6, encontrar las relaciones entre los mosaicos. En este caso, solamente 4 sujetos respondieron correctamente y 48 respondieron de manera errónea. En el caso contrario, los valores más altos (0,94 y 0,91) ocurren con los ítems 7a) y 7b), que están relacionados con la identificación y el reconocimiento de figuras geométricas. Después le siguen los valores (0,85 y 0,8) correspondientes a los ítems 2a), 1a) y 8a), relacionados con las transformaciones y los movimientos.

Tabla 10. *Respuestas al cuestionario*

Ítem	Aciertos	Fallos	N/R	Aciertos/Respondida
1 a	42	10	2	0,80
1 b	21	28	5	0,43
2 a	45	8	1	0,85
2 b	38	10	6	0,79
3	26	26	2	0,50
4	14	37	3	0,27
5	9	41	4	0,18
6	4	48	2	0,07
7 a	48	3	3	0,94
7 b	42	4	2	0,91
8 a	40	10	4	0,80
8 b	10	15	29	0,40
9 a	24	8	22	0,75
9 b	1	5	48	0,16
10 a	23	25	6	0,48
10 b	11	18	25	0,38

En la *Figura 12* se muestra la manifestación de los sujetos en cada una de las categorías de los cuatro componentes. En gris, se identifican tres sujetos (E15, E20 y E25) que se manifestaron en la única categoría del Componente 1. En rosa, dos sujetos (E3 y E27) se manifestaron en las categorías de los Componentes 1 y 2. En violeta, un sujeto (E38) se manifestó en los Componentes 1 y 3. En naranja, un sujeto (E49) se manifestó en los Componentes 2 y 3. En amarillo, 25 sujetos se manifestaron en las categorías de los Componentes 1, 2 y 3, y en verde, 24 sujetos se manifestaron en las categorías de los Componentes 1, 2, 3 y 4.

	C-1	C-2		C-3			C-4	
	FGM	FAC	EGM	RMT	TFA	DRP	VIC	RIM
E1	o	o	o	o		o		
E2	o	o		o		o	o	
E3	o	o						
E4	o	o		o		o		
E5	o	o		o		o		
E6	o	o	o	o		o	o	
E7	o	o	o	o		o		
E8	o		o	o		o		
E9	o	o	o	o			o	
E10	o		o	o	o		o	
E11	o			o	o	o		
E12	o			o	o	o		
E13	o	o		o	o	o	o	
E14	o		o	o	o	o		
E15	o							
E16	o	o	o	o		o		
E17	o	o		o	o		o	
E18	o		o	o		o	o	
E19	o	o		o		o	o	
E20	o							
E21	o		o	o		o	o	
E22	o	o		o		o	o	
E23	o		o	o	o	o		
E24	o		o	o		o		
E25	o							
E26	o	o		o		o	o	
E27	o	o						
E28	o	o	o	o		o	o	
E29	o	o		o		o		
E30	o	o	o	o		o	o	
E31	o	o	o	o		o	o	
E32	o	o	o	o			o	
E33	o	o	o	o	o	o		
E34	o	o		o	o	o	o	
E35	o	o	o	o	o	o	o	o
E36	o	o	o	o	o	o		
E37	o	o	o	o		o	o	
E38	o			o	o	o		
E39	o	o	o	o		o		
E40	o	o	o	o	o	o	o	
E41	o	o	o	o	o	o		
E42	o	o				o		
E43	o	o	o	o	o	o	o	
E44	o	o	o	o	o	o	o	
E45	o	o	o	o		o	o	
E46	o	o		o	o	o		
E47	o	o		o	o	o		
E48	o	o	o		o	o		
E49		o		o		o		
E50	o	o		o	o	o		
E51	o	o	o	o		o	o	
E52	o	o		o		o		
E53	o	o	o	o	o	o		
E54	o	o	o	o	o	o	o	

Figura 12. Manifestación de los sujetos en cada categoría de los cuatro componentes.

Fuente: Elaboración propia.

Con base en la *Figura 12*, se observa que las únicas combinaciones de respuestas por categoría fueron: (C-1), (C-1 y C-2), (C-1 y C-3), (C-2 y C-3), (C-1, C-2 y C-3) y (C-1, C-2, C-3 y C-4), pero no se presentaron otras combinaciones como (C-2 y C-4) o (C-3 y C-4). Estos resultados indican que la manifestación en los componentes no es acumulativa.

Para los propósitos de este TFM, se asume que la manifestación de un Componente implica que los sujetos al menos hayan manifestado características en una de sus categorías, por lo que, con base en la *Figura 12*, se observa que 53 sujetos manifestaron el Componente 1. El Componente 2, lo manifestaron 48 sujetos. El Componente 3, fue manifestado por 49 sujetos, y en el Componente 4 se manifestaron 24 sujetos. El hecho de que solamente tres sujetos manifestaran características de los Componentes 1 y 2, y que tres sujetos manifestaran solamente características del Componente 1, puede ser debido a los errores cometidos por no haber comprendido las preguntas planteadas en el cuestionario, porque sus respuestas fueron fallidas, o porque no las respondieron. En la Tabla 11 se muestra un resumen de la manifestación de componentes por categoría.

Tabla 11. *Componentes del sentido espacial manifestados con el cuestionario*

Componente	Categoría	Nº de Sujetos que manifestaron la categoría	Nº de sujetos que manifestaron el componente	Porcentaje de sujetos que manifestaron el componente
Componente 1 (Reconocimiento)	FGM	53	53	98 %
Componente 2 (Relaciones)	FAC	41	48	89 %
	EGM	30		
Componente 3 (Movimientos)	RMT	44	49	91 %
	TFA	21		
	DRP	46		
Componente 4 (Visualización)	VIC	24	24	55 %
	RIM	1		

Estos resultados parecen evidenciar la posible influencia que tuvieron las tareas de enseñanza que se realizaron previamente. La Tarea 4, por ejemplo, en la que aplicaron diferentes isometrías para construir un mosaico, condujo a 49 sujetos (91 % de la muestra) a manifestar el Componente 3, relativo a la ubicación y movimientos en el plano. El hecho de que 24 sujetos (55 % de la muestra) hayan manifestado la categoría VIC y solamente un sujeto haya manifestado la categoría RIM del Componente 4, indica que estos sujetos desarrollaron habilidades de visualización como la percepción de figura-contexto, y

conservación de la percepción. Además, un sujeto desarrolló habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales. Esto llama la atención para crear nuevas acciones y propuestas que contribuyan en la manifestación de la última categoría establecida. La razón por la que solamente tres sujetos hayan podido manifestar el Componente 1 y únicamente dos sujetos hayan manifestado los Componentes 1 y 2, puede ser debido a diferentes factores como las dificultades observadas en las tareas de enseñanza, que no las hayan realizado, que no hayan comprendido las preguntas del cuestionario y por tanto que no las hayan respondido adecuadamente. Al ser el investigador el profesor de la asignatura y conocer a los sujetos de la muestra, podría decirse que estos sujetos son casos de estudiantes con bajo rendimiento académico en la clase, o que no asistieron a todas las sesiones de las tareas de enseñanza.

6.3 Análisis del Cuestionario (modelo de Van Hiele aplicado a isometrías)

Con base en la Tabla 10 del apartado anterior, para analizar el cuestionario con el modelo de Van Hiele aplicado a isometrías, los ítems 1 a), 1 b), 7 a), 7 b) y 10 b) fueron clasificados con el Nivel 1. Este nivel está asociado con la identificación visual de isomerías y reconocimiento de figuras estáticas y dinámicas. Los ítems asociados con este nivel permiten que el sujeto identifique y defina las propiedades de las figuras geométricas establecidas de forma independiente y que identifique las figuras con las que se produce una isometría en el interior del mosaico. Los ítems 2 a), 2 b), 3 y 10 a) fueron asociados con el Nivel 2, que es el descubrimiento experimental y las propiedades de las isometrías. Aquí, los ítems 2 a) y 2 b) permiten al sujeto experimentar con rotaciones de los dados y encontrar la tesela generadora de los mosaicos para responder a las preguntas. Los ítems 4, 5, 6, 8 a), 8 b) y 9 a), se asociaron con el Nivel 3 (propiedades, definición y descomposición de las isometrías). Aquí los ítems indican al sujeto que identifique al menos una isometría en el mosaico, a la que pueda definir y descomponer en partes y describir sus propiedades. Finalmente, los ítems 9 a) y 9 b) se asociaron con la categoría VGI (Visión Global de las Isometrías) del Nivel 4. Esta categoría fue establecida en la propuesta de Jaime y Gutiérrez (1989) que se describió en el marco teórico. En este análisis, VGI fue asumida como un conocimiento general de las cuatro isometrías conocidas: traslación, rotación, simetría axial y simetría central. Aquí, el sujeto debe ser capaz de identificarlas, representarlas, describirlas y definir sus propiedades. El ítem 9 a), pide al sujeto identificar al menos dos isometrías diferentes a la que ya ha identificado,

definido y descrito anteriormente en el ítem 8 a). En adición, el ítem 9 b), pide al sujeto establecer la relaciones entre todas las isometrías que ha identificado previamente.

Las categorías DFP (demostración formal de propiedades de las isometrías) y EGR (en la estructura grupal se toma en cuenta las relaciones existentes entre las isometrías que son generalizadas) requieren un conocimiento muy amplio en matemáticas, por esta razón, las respuestas de los FPEP no se manifestaron en estas dos categorías.

Para los propósitos de este TFM, se asume que alcanzar un Nivel de Van Hiele implica que los sujetos al menos hayan manifestado características en una de sus categorías, como se muestra en la *Figura 13*. En color gris, se identifica la manifestación de dos sujetos (E3 y E27) en las categorías del Nivel 1. En rosa, 14 sujetos manifestaron las categorías de los Niveles 1 y 2. En amarillo, 35 sujetos manifestaron las categorías de los Niveles 1, 2 y 3, y en verde, 3 sujetos manifestaron las categorías de los Niveles 1, 2, 3 y 4. Al ser el modelo de Van Hiele jerárquico, se asignaron colores a cada nivel, siendo el color verde el máximo nivel alcanzado. En todos los casos, salvo con el sujeto E15, alcanzar un nivel implicaba haber alcanzado los niveles anteriores de manera acumulativa.

En total, 53 sujetos alcanzaron el Nivel 1 y 52 alcanzaron el Nivel 2. El Nivel 3, fue alcanzado por 38 sujetos y el Nivel 4, lo alcanzaron únicamente 3 sujetos. El hecho de que sólo tres sujetos hayan alcanzado el Nivel 4, es debido a que la categoría VGI no establece explícitamente la demostración formal, como si lo hace la categoría DFP. En este cuestionario no se exigió la demostración formal de las propiedades y características de las isometrías, por lo que, ningún sujeto manifestó características de DFP. Tampoco manifestaron características de la categoría EGR, como era de esperarse, porque los sujetos de la muestra no son especialistas en matemáticas.

.

	N-1			N-2	N-3				N-4		
	IVI	REF	RDF	DEE	DER	JPR	DFTR	DI	VGI	DFP	EGR
E1	o	o		o	o		o	o			
E2	o			o	o			o			
E3	o	o									
E4	o	o		o				o			
E5	o	o		o				o			
E6	o	o		o			o	o			
E7	o	o		o		o		o			
E8		o		o	o			o			
E9	o	o		o				o			
E10		o	o	o			o	o			
E11		o		o				o			
E12		o	o	o			o	o			
E13	o	o		o			o	o			
E14		o	o	o			o	o			
E15				o							
E16	o	o		o							
E17	o	o	o	o				o			
E18		o		o	o			o			
E19	o	o		o				o			
E20		o		o							
E21		o		o	o			o			
E22	o	o		o				o			
E23		o	o	o		o			o		
E24		o		o				o			
E25		o		o							
E26	o	o		o				o			
E27	o	o									
E28	o	o		o				o			
E29	o	o		o				o			
E30	o	o		o				o			
E31	o	o		o				o			
E32	o	o		o				o			
E33	o	o		o							
E34	o	o		o				o			
E35	o	o	o	o				o			
E36	o	o		o		o		o			
E37	o	o		o		o	o	o			
E38		o	o	o							
E39	o	o		o							
E40	o	o		o				o			
E41	o	o	o	o	o						
E42	o	o		o							
E43	o	o	o	o	o	o		o			
E44	o	o	o	o		o		o	o		
E45	o	o	o	o		o		o			
E46	o	o	o	o							
E47	o	o		o							
E48	o	o		o							
E49	o			o							
E50	o	o	o	o							
E51	o	o		o				o			
E52	o	o		o							
E53	o	o	o	o				o			
E54	o	o	o	o	o	o		o	o		

Figura 13. Manifestación de los sujetos en cada categoría de los cuatro niveles.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 12 se muestra un resumen de los niveles alcanzados y la manifestación de los sujetos en cada categoría.

Tabla 12. *Niveles de Van Hiele alcanzados con el cuestionario*

Nivel	Categoría	Nº de Sujetos que manifestaron la categoría	Nº de sujetos que alcanzaron el Nivel	Porcentaje de sujetos que alcanzaron el Nivel
Nivel 1 (Reconocimiento estático / dinámico)	IVI	41	53	98 %
	REF	51		
	RDF	14		
Nivel 2 (Descubrimiento experimental)	DEE	52	52	96 %
Nivel 3 (Propiedades / Definición / Relaciones de isometrías)	DER	8	38	70 %
	JPR	8		
	DFRT	7		
	DI	37		
Nivel 4 (Visualización global / Demostración formal / Relación grupal de isometrías)	VGI	3	3	5,5 %
	DFP	0		
	EGR	0		

Estos resultados revelan que los mayores porcentajes se encuentran entre los Niveles 1 y 2 y que 38 sujetos (70 % de la muestra) se encuentran en el Nivel 3. Tan sólo tres sujetos (5,5 %) manifestaron características de la categoría VGI, relativa a la visión global de las isometrías, por lo que, según lo establecido para el análisis de este estudio, estos sujetos se encuentran en el Nivel 4 por haber manifestado al menos una de las categorías establecidas. La manifestación en esta categoría consistió en haber identificado, representado, descrito y definido las propiedades de al menos tres isometrías diferentes que se encuentran ocultas y distribuidas implícitamente en un mosaico, por lo que, se asume que los sujetos han mostrado tener la capacidad y un conocimiento global de las isometrías como para identificarlas y diferenciarlas, aun cuando se encuentran ocultas y distribuidas formando parte de un solo conjunto en el plano.

La demostración formal no estuvo incluida en los ítems del cuestionario por considerarla inapropiada para los sujetos de la muestra (son FPEP y no especialistas en matemáticas), y esta es la razón por la que ningún sujeto manifestó características de las categorías DFP y EGR. El hecho de que solamente dos sujetos hayan podido alcanzar únicamente el Nivel 1, podría ser por tratarse de un caso particular en el que los sujetos tienen bajo rendimiento académico en la clase, o porque no asistieron a todas las sesiones cuando se llevaron a cabo las tareas. La razón por la que sólo 14 sujetos hayan alcanzado el Nivel 2, puede ser debido a diferentes factores como las dificultades que se observaron en las tareas de

enseñanza, que no hayan comprendido las preguntas del cuestionario y, por tanto, que no las haya respondido adecuadamente.

6.4 Errores y dificultades

En este apartado se comenta algunos errores y dificultades encontradas al responder el cuestionario, no se consideraron como categorías de investigación, pero si aportaron información importante para la caracterización del razonamiento geométrico y sentido espacial de los sujetos. Los errores y dificultades más comunes fueron identificar las isometrías y los elementos interfigurales. Se encontró que diez sujetos confundieron los movimientos de traslación con una simetría axial. Tres sujetos identificaron el cuadrado como un rombo y lo etiquetaron como un polígono cóncavo. El hexágono que se encuentra entre los polígonos estrellados fue etiquetado como un rombo por cuatro sujetos, como se muestra en la *Figura 14*.



Figura 14. Errores al identificar isometrías y elementos interfigurales en el mosaico.

Fuente: Elaboración por estudiantes de DMII.

Otro error que se encontró fue visualizar las figuras del ítem 1a), que consiste en identificar las figuras congruentes. En las respuestas escritas, indicaron que todas eran congruentes, pero únicamente dos de ellas lo son. Una dificultad común fue visualizar y dibujar los dados al hacer las rotaciones. La representación tridimensional mediante un dibujo manual, tiene sus complicaciones, aunado a la descomposición de las seis caras del dado para transformarlo en una figura plana, como puede apreciarse en la *Figura 15*.



Figura 15. Errores y dificultades al girar los dados.

Fuente: Elaboración por estudiantes de DMII

Al encontrar el elemento generador de los mosaicos, 26 sujetos señalaron las estrellas o pequeños fragmentos de las figuras internas. El elemento generador es el mismo para los tres mosaicos, sin embargo, hay una clara diferencia en los movimientos realizados con la tesela para construirlos, no obstante, a 41 de los sujetos les resultó difícil distinguir estas diferencias, sus argumentos no estuvieron bien planteados en las respuestas escritas. La *Figura 16* muestra algunos ejemplos de estos errores.



Figura 16. Dificultades para identificar el elemento generador de los mosaicos.

Fuente: Elaboración por estudiantes de DMII.

De manera general, la variedad de aciertos y errores podría ser la razón por la que los sujetos manifestaron características de un componente y no de otro o de un nivel y no de otro. Las tareas previas de enseñanza tuvieron la finalidad de homogeneizar los conocimientos geométricos de todos los sujetos de la muestra, sin embargo, los errores detectados revelan que la asimilación de los conocimientos no fue homogénea. Esto puede comprobarse fácilmente, por ejemplo, hubo quienes identificaron correctamente las isometrías, pero no reconocieron correctamente los elementos geométricos de los mosaicos, o no supieron cómo establecer relaciones entre las isometrías.

6.5 Relaciones entre razonamiento geométrico y sentido espacial

El análisis del cuestionario con los modelos descritos en el apartado anterior, permitió determinar las relaciones entre razonamiento geométrico y sentido espacial. Ambos se encuentran estrechamente ligados con la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

El modelo de Van Hiele está basado en cinco niveles progresivos de razonamiento que dependen más de la instrucción recibida que de las edades y nivel educativo de los sujetos. Permite planificar las fases de enseñanza en cada nivel conforme el sujeto avanza en el nivel inmediato anterior. El modelo de sentido espacial se enfoca en el concepto de

habilidades de visualización para reconocer, manipular, relacionar y hacer transformaciones de las formas en el espacio. Se basa en cuatro componentes, de los cuales, uno de ellos actúa como componente integrador de los otros tres. En este modelo, los sujetos pueden desarrollar habilidades de visualización en cualquiera de sus tres componentes. El modelo Van Hiele se fundamenta en una teoría consolidada hace aproximadamente medio siglo. Las propuestas del modelo del sentido espacial comenzaron hace apenas una década.

Con base en los resultados obtenidos y para responder a las preguntas de investigación, las relaciones existentes entre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele aplicado a isometrías y el modelo de sentido espacial, se describen de la siguiente manera:

- 1) *Sujetos con nivel bajo de Van Hiele.* Solamente dos sujetos (E3 y E27) identificados con color gris en la *Figura 13*, alcanzaron únicamente el Nivel 1, que corresponde con el reconocimiento estático y dinámico de las figuras que componen las isometrías en el mosaico proporcionado en el cuestionario. Estos sujetos se caracterizan porque la capacidad que mostraron en esta prueba solamente les permite reconocer, identificar y describir las propiedades de figuras geométricas. Estos mismos sujetos en el sentido espacial manifestaron el Componente 1 y solamente la categoría FAC del Componente 2, que corresponde con la identificación de figuras congruentes del ítem 1 a), asociado con la habilidad de conservación de la percepción. Por lo que, en el modelo de sentido espacial estos dos sujetos se caracterizan por su capacidad para reconocer, identificar y describir las propiedades de figuras geométricas.
- 2) *Sujetos con niveles intermedios de Van Hiele.* Los 14 sujetos que lograron alcanzar el Nivel 2, identificados con color rosa en la *Figura 13*, se caracterizan por la capacidad que mostraron en el descubrimiento experimental de los movimientos en el plano, esto es, por su capacidad de identificar diferentes isometrías. Estos 14 sujetos, en su mayoría, manifestaron características de los Componentes 1, 2 y 3 en el modelo de sentido espacial, donde se caracterizan por tener capacidad de ubicación, relacionar figuras y reconocer los movimientos en el plano. Solamente tres de estos sujetos (E15, E20 y E25) identificados con color gris en la *Figura 12*, se caracterizan por su capacidad de reconocer y describir figuras geométricas al manifestarse únicamente en el Componente 1. El Nivel 3

fue alcanzado por 35 sujetos, identificados con color amarillo en la *Figura 13*, los cuales, se caracterizan por su capacidad para establecer relaciones, descomponer isometrías en sus partes y definir sus propiedades. En el sentido espacial se les caracteriza por tener habilidades de visualización como la percepción de figura-contexto, la conservación de la percepción y la memoria visual. El hecho de que en ambos modelos un gran número de sujetos hayan alcanzado el Nivel 3 y manifestado el Componente 3, puede ser atribuido a la influencia que tuvo la realización de la Tarea 4, concerniente a la construcción de mosaicos.

- 3) *Sujetos con nivel alto de Van Hiele*. En el Nivel 4, solamente tres sujetos (E23, E44 y E54) identificados con color verde en la *Figura 13*, se manifestaron en una de las tres categorías (en VGI). Estos sujetos se caracterizan por haber adquirido un conocimiento global de las cuatro isometrías que se estudiaron en el curso. Además, por su capacidad de identificarlas, representarlas, describirlas y definir sus propiedades, incluso cuando se encuentran ocultas y distribuidas en un conjunto como es el caso de un mosaico. Esta categoría fue establecida en la propuesta de Jaime y Gutiérrez (1989) como Visión Global de las Isometrías (VGI), asumida en este análisis como un conocimiento global de las cuatro isometrías conocidas. En el modelo de sentido espacial estos tres sujetos manifestaron los Componentes 1, 2, 3 y 4, por lo que se caracterizan por tener habilidades de visualización como la percepción de figura-contexto, la conservación de la percepción, la memoria visual, y el reconocimiento de relaciones espaciales. La Tabla 13 muestra algunas de estas relaciones.

Tabla 13. Relaciones entre razonamiento geométrico (niveles) y sentido espacial (componentes)

	Van Hiele				Sentido Espacial			
	N1	N2	N3	N4	C1	C2	C3	C4
Nº de sujetos	2	14	35	3	3	2	25	24
Porcentaje	~4 %	26 %	65 %	5,5 %	~6 %	~4 %	46 %	44 %

En la Tabla 14, se presenta la muestra completa y la relación individual de los sujetos que alcanzaron los niveles y manifestaron los componentes. En esta tabla se observa que, los sujetos E3 y E27 alcanzaron únicamente el Nivel 1 en el modelo de Van Hiele, mientras

que, en el modelo de sentido espacial lograron manifestarse en el Componente 2. El sujeto E15, alcanzó únicamente el Nivel 2 en el modelo Van Hiele, pero únicamente se manifestó en el Componente 1 del modelo de sentido espacial. El sujeto E1 alcanzó el Nivel 3 y manifestó el Componente 3, similarmente los sujetos E44 y E54 alcanzaron el Nivel 4 y se manifestaron en el Componente 4.

Tabla 14. Sujetos que superaron los niveles de Van Hiele y los componentes del sentido espacial

Van Hiele				Sentido Espacial			
N1	N2	N3	N4	C1	C2	C3	C4
E3	E15	E1	E23	E15	E3	E1	E2
E27	E16	E2	E44	E20	E27	E4	E6
	E20	E4	E54	E25		E5	E9
	E25	E5				E7	E10
	E33	E6				E8	E13
	E38	E7				E11	E17
	E39	E8				E12	E18
	E42	E9				E14	E19
	E46	E10				E16	E21
	E47	E11				E23	E22
	E48	E12				E24	E26
	E49	E13				E29	E28
	E50	E14				E33	E30
	E52	E17				E36	E31
		E18				E38	E32
		E19				E39	E34
		E21				E41	E35
		E22				E42	E37
		E24				E46	E40
		E26				E47	E43
		E28				E48	E44
		E29				E49	E45
		E30				E50	E51
		E31				E52	E54
		E31				E53	
		E34					
		E35					
		E36					
		E37					
		E41					
		E41					
		E43					
		E45					
		E51					
		E53					

La jerarquía de los niveles de Van Hiele podría limitar el conocimiento geométrico de los sujetos más allá de tareas que requieran justificación debido a que el Nivel 4 se asocia con la demostración formal de las propiedades de las isometrías y con establecimiento de

relaciones entre ellas. Es decir, es complejo evidenciar el máximo nivel en tareas geométricas que no requieran justificaciones o argumentaciones. En cambio, en el sentido espacial se pueden abordar tareas que no impliquen necesariamente estas competencias matemáticas para el desarrollo de habilidades de la visualización.

Los resultados encontrados muestran que un nivel bajo de Van Hiele se corresponde con la manifestación de pocas componentes del sentido espacial. Mientras que, un nivel intermedio se corresponde con varias combinaciones de los componentes. En cambio, un nivel alto de Van Hiele se espera que corresponda con la manifestación de todos los componentes del sentido espacial.

7. CONCLUSIONES

Las conclusiones de este estudio se presentan como una revisión de los objetivos establecidos y su cumplimiento. Se comenta que los resultados obtenidos fueron contrastados con los encontrados en la literatura para comprobar su consistencia. Se exponen las limitaciones del estudio y las implicaciones que puede tener para la enseñanza. Por último, se muestra una perspectiva abierta para continuar en esta línea de investigación.

7.1 Conclusiones generales

Esta investigación estuvo centrada en identificar el razonamiento geométrico y el sentido espacial que los FPEP manifestaron al aplicarles un cuestionario, el cual fue diseñado con preguntas abiertas que se relacionan con las categorías establecidas en cada uno de los Niveles del modelo de Van Hiele y con cada uno de los componentes del modelo del sentido espacial. También estuvo centrada en encontrar las relaciones existentes entre ambos modelos.

Con el fin de homogeneizar los conocimientos geométricos en los sujetos de la muestra, se aplicaron cuatro tareas de enseñanza que sirvieron como instrucción. Las dos primeras tareas se relacionan con la geometría euclidiana, principalmente con polígonos regulares, poliedros y antiprismas. El rendimiento de estas dos tareas fue menor del 50 %, lo que indica que hay una necesidad de establecer nuevas acciones y propuestas para intentar superar las dificultades que se presentaron, sobre todo en las habilidades y destrezas procedimentales referentes al uso de instrumentos geométricos como las escuadras y el compás. En la tercera tarea el rendimiento fue del 91 %, lo que permitió identificar mayor predisposición hacia las prácticas manuales que involucran aspectos creativos y conocer los procesos de visualización de imágenes, como la interpretación de la información figurativa (IFI) y el pensamiento visual de la información (VP) establecidos por Bishop (1989). El alto rendimiento de la cuarta tarea (más del 90 %), sugiere que las conexiones extra-matemáticas establecidas con elementos artísticos como los mosaicos, son de gran utilidad para comprender los procesos matemáticos y pueden ser un buen indicio para la enseñanza-aprendizaje de los movimientos en el plano (Gutiérrez, 2005; Vargas, et al.,

2024; Ward, 2003). La construcción de mosaicos a partir de las teselas proporcionadas en esta tarea, condujo a que gran parte de los sujetos alcanzaran el Nivel 3 de Van Hiele y que se manifestaran en los Componentes 3 y 4, asociados con la ubicación y movimientos y la visualización. También contribuyó a que tres sujetos manifestaran la categoría que se relaciona con visión global de las isometrías en el Nivel 4. De igual manera, esta tarea contribuyó a que 24 sujetos manifestaran el Componente 4 del sentido espacial, el cual está asociado con las habilidades de visualización como la percepción de la figura y contexto, la conservación de la percepción, y la memoria visual.

Algunos errores que se detectaron en las respuestas del cuestionario no estaban considerados en los objetivos de investigación, pero sirvieron para la caracterización de los sujetos. Estos errores podrían conducir al planteamiento de nuevas acciones para la planificación de la docencia, por ejemplo, dando importancia principalmente a la geometría de las transformaciones y a la descripción de las relaciones interfigurales, que son necesarias para la manifestación de los primeros niveles de Van Hiele y el primer componente del sentido espacial. Esto fortalecería sus habilidades para la identificación, reconocimiento y comparación de las figuras geométricas entre sí, establecer sus diferencias, semejanzas, analogías y describir sus propiedades intrínsecas.

Las preguntas de investigación condujeron a plantear como objetivos identificar y caracterizar el razonamiento geométrico y el sentido espacial mediante las respuestas del cuestionario. Así como encontrar las relaciones existentes entre los niveles de Van Hiele y los componentes del sentido espacial.

En lo que respecta al primer objetivo y en relación con el razonamiento geométrico, se ha evidenciado que mayoritariamente los sujetos se sitúan en el Nivel 2 y Nivel 3 de Van Hiele. A estos sujetos se les caracteriza por su capacidad para identificar y descomponer isometrías en sus partes y definir sus propiedades. Los niveles alcanzados en esta investigación son consistentes con los encontrados en la literatura, por ejemplo, con los de Ghorbani et al. (2024), los de Arnal-Bailera y Manero (2021), y los de Mbatha y Bansilal (2023), cuyos estudios fueron realizados con FPEP. Hubo tres sujetos que manifestaron una categoría del Nivel 4, a estos sujetos se les caracteriza por su habilidad de identificar, representar, describir y definir las propiedades de las isometrías cuando se encuentran ocultas y distribuidas implícitamente formando parte de un solo conjunto en el plano, como es el caso de un mosaico. Para que estos sujetos alcancen plenamente el

Nivel 4, están condicionados a desarrollar competencias matemáticas de demostración y deducción formal, porque el hecho de haber identificado múltiples movimientos en un mosaico requería de justificar determinadas propiedades, aunque no evidenciaran demostración formal. En el caso contrario, sólo dos sujetos alcanzaron únicamente el Nivel 1, a estos sujetos se les caracterizan porque su capacidad solamente les permite reconocer, identificar y describir las propiedades de figuras geométricas.

En relación al sentido espacial, se ha evidenciado que mayoritariamente los sujetos manifiestan los Componentes 1, 2 y 3. A estos sujetos se les caracteriza por tener capacidad de ubicación, relacionar figuras y reconocer los movimientos en el plano. A los sujetos que se manifestaron en el Componente 4, se les caracteriza por sus habilidades de visualización como la percepción de figura-contexto, la conservación de la percepción, la memoria visual y el reconocimiento de relaciones espaciales. Estos sujetos forman el 55 % de la muestra. Un resultado similar fue encontrado por Roura y Ramírez (2021), quienes determinaron una visualización media para los sujetos de su estudio.

En cuanto al segundo objetivo, se ha evidenciado una relación existente entre un mayor nivel de razonamiento geométrico con una mayor manifestación de sentido espacial. Es decir, los sujetos que alcanzaron un nivel bajo de Van Hiele manifestaron sólo uno o dos componentes del sentido espacial. Mientras que, los que alcanzaron niveles intermedios manifestaron varias combinaciones de los componentes, y quienes alcanzaron un nivel alto, se manifestaron prácticamente en todos los componentes.

El razonamiento geométrico y el sentido espacial al estar estrechamente ligados con la enseñanza-aprendizaje de la geometría, inician su relación con el modelo de Van Hiele, cuya teoría se encuentra consolidada desde hace aproximadamente medio siglo, en cambio, la propuesta del modelo de sentido espacial hace apenas una década que comenzó a difundirse. Los cinco niveles de Van Hiele son progresivos en el razonamiento y no depende de la edad de los sujetos sino de la instrucción recibida para pasar de un nivel a otro. Estos niveles permiten planificar la enseñanza conforme avanza el sujeto en el nivel anterior. El modelo de sentido espacial, en cambio, se enfoca en las habilidades de visualización que pueden desarrollarse en cualquiera de sus componentes, como pueden ser: reconocer, manipular, relacionar y hacer transformaciones de las formas y figuras en el plano o en el espacio. En el modelo Van Hiele la visualización se desarrolla únicamente en los dos primeros niveles, mientras que, en el modelo de sentido espacial, el cuarto

componente actúa como un componente integrador en el que se pueden medir las habilidades de visualización establecidas por Del Grande (1990).

El Nivel 4 de Van Hiele está muy asociado con la deducción y demostraciones formales de las isometrías, así como en establecer relaciones entre ellas. En cambio, en el sentido espacial se pueden abordar una gran variedad de tareas que no impliquen estas competencias matemáticas, por ejemplo, la tarea de mosaicos que se propuso para este estudio contribuyó para que tres sujetos se manifestaran en una categoría del Nivel 4 y que estos sujetos a su vez, se manifestaran en los cuatro componentes del sentido espacial.

7.2 Limitaciones de la investigación

La muestra que se analizó no fue suficientemente numerosa para generalizar los resultados obtenidos. Además, estuvo condicionada por otras variables que no fueron consideradas en el estudio, por ejemplo, no fue posible realizar una triangulación del análisis con expertos en la materia. Sin embargo, las categorías que se establecieron para analizar el cuestionario, no solo revelaron las habilidades y destrezas de los sujetos, sino que también permitieron identificar errores y dificultades que pueden derivar en conocimientos nuevos a posteriori.

La falta de dominio con los instrumentos geométricos es una limitante para ampliar el estudio a muestras de sujetos más grandes debido a que requeriría mayor número de sesiones para homogeneizar las habilidades y destrezas.

Los trabajos manuales podrían ser reemplazados por actividades y tareas digitales, pero se enfrentarían nuevo retos y dificultades, por ejemplo, el uso del software empleado para transformaciones o geometría dinámica requiere un tiempo de familiarización y aprendizaje para ejecutar los comandos.

El hecho de que los sujetos de esta muestra manifestaran características de algunas categorías asociadas a un determinado nivel o componente, pero no de otros, sugiere dar continuidad durante su etapa formativa para homogeneizar la manifestación de todas las categorías correspondientes con los niveles de Van Hiele y con los componentes del sentido espacial. Si se ampliara la muestra con un número mayor de sujetos, esta continuidad o seguimiento de los sujetos que se propone sería más difícil de alcanzar.

7.3 Implicaciones para la enseñanza

Las tareas de enseñanza que fueron previas a esta investigación y en particular la de construir mosaicos propiciaron la consecución de los resultados obtenidos, por lo que, se considera necesario implementar en los programas de formación de FPEP actividades educativas y tareas que contribuyan a la manifestación del Nivel 4 y del Componente 4 como lo sugieren Pandiscio y Knight, (2010). Las Tareas 1-3 que se realizaron aquí permitieron reforzar los conocimientos, habilidades y destrezas de los FPEP en la geometría euclidiana y retomar las prácticas manuales de geometría, las cuales están siendo reemplazadas casi por completo por las tecnologías digitales. La tarea manual de teselaciones y mosaicos contribuyó para el desarrollo de las competencias procedimentales y para incrementar las habilidades de visualización mediante movimientos y transformaciones en el plano. Esta tarea permitió establecer conexiones extra-matemáticas con elementos artísticos para incrementar su creatividad y comprender las ideas y los procesos matemáticos de las isometrías (Vargas et al., 2024).

7.4 Líneas futuras que se derivan de este trabajo

El estudio presentado en este TFM deja una perspectiva abierta para continuar con esta línea de investigación en una variedad de posibles aplicaciones. Podría extenderse por ejemplo, hacia estudios multidisciplinarios para encontrar conexiones intra/extra-matemáticas con diferentes elementos del arte, en la pintura, la escultura o la arquitectura, como lo hacen Gandfulfo y Lentinelli (2013) al abordar la geometría y el arte en diferentes niveles educativos desde un enfoque interdisciplinario. En las corrientes vanguardistas se parte del cubismo hasta llegar al abstraccionismo geométrico, en el que la forma y el color predominan sobre lo figurativo (De Micheli, 2000). La descomposición y transformación de imágenes figurativas en elementos geométricos siguiendo un orden sistemático para su interpretación, conducen hacia la motivación y activación del razonamiento geométrico. La elaboración de nuevas propuestas para el diseño y la creación de teselados geométricos podría abrir una nueva brecha para su análisis y estudio. La interpretación y recreación de obras artísticas que involucren alto contenido geométrico podría arrojar conocimientos nuevos en un estudio que esté relacionado con sus elementos compositivos (Mora, 2007). También podría ser considerada la transferencia del conocimiento geométrico de una manera creativa hacia otros contextos socio-culturales y educativos.

8. REFERENCIAS

- Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the Delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 537–560. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z>
- Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2021). La demostración en matemáticas. Perfiles de profesores en formación según sus niveles de Van Hiele. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M. T., González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 149-156). SEIEM.
- Báez, R. e Iglesias, M. (2003). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, 12, 67-87
- Battista, M. T., Wheatley, G. H., y Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340. <https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/749007>
- Baranovic, N. (2024). Teaching and learning geometry of preservice primary educations teachers based on the visual-analytical method of directed observation. En T. Lowrie, A. Gutiérrez y F. Emprin. (Eds.), *Pre-Proceedings of the 26th ICMI Study Conference. Advances in Geometry Education* (pp. 149-156). ICMI.
- Berciano, A. y Gutiérrez, G. (2015). How to improve spatial visualization ability of preservice teachers of childhood education: A teaching experiment. *Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2755-2761). hal-01289598
- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Bolea, P., Cañadas, M. C., Cid, E., Escolano, R., Gairín, J. M., Ibáñez, R., Muñoz, J. M. y Sancho, J. (2008). Diseño de prácticas en la geometría para maestros. En M. V. Sanagustín, J. P. Royo, M. C. Agustín y F. Cruz (Coords.), *II Jornadas de innovación docente, tecnologías de la información y de la comunicación e*

- investigación educativa en la Universidad de Zaragoza* (pp. 1-38). Universidad de Zaragoza.
- Bonyah, E. y Larbi, E. (2021). Assessing van Hiele's geometric thinking levels among elementary pre-service mathematics teachers. *African Educational Research Journal*, 9(4), 844-851. <https://doi.org/10.30918/AERJ.94.21.119>
- Contreras, G. J., Contreras, G. J. M. y Cañadas, F. G. (2016). Patrimonio y geometría de la Alhambra. Un Taller formativo para futuros profesores de primaria. En F. España Pérez (Ed.), *XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Matemáticas ni más ni menos* (pp. 340-345). Thales.
- Crowley, M. L. (1989). The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinkig about quadrilaterals. [Tesis doctoral, Universidad de Maryland]. Repositorio digital U.M. <https://doi.org/10.13016/ZHVS-HSUL>
- Cruz, A. y Ramírez, R. (2018). Componentes del sentido espacial en un test de capacidad espacial. En L. J. Rodríguez, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 211-220). SEIEM.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. En M. Montgomery, y A. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12* (pp. 127-135). National Council of Teachers of Mathematics.
- Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37(6), 14-20.
- De Micheli, M. (2000). *Las vanguardias artísticas del siglo XX*. Alianza.
- Demirel S. y Cetin, H. (2023). A test development study on spatial visualization for second-grade primary school students. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 16(1), 89-98. <http://dx.doi.org/10.26822/iejee.2023.316>
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.
- Firmansyah, F. F., Sunardi, E. Y., Susanto y Ambarwati, R. (2019). The uniqueness of visual levels in resolving geometry of shape and space content based on Van Hieles's theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211, 012076. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1211/1/012076>

- Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Pirámide.
- Gandfulfo, M. A. y Lentinello, C. (2013). *Geometría y arte, un abordaje interdisciplinario*. Lumen.
- Garzón, A. L., Duarte, D. J., Soto, M. R. y Sua, C. (2015). Movimientos en el plano a través de teselados. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 623-627.
- Ghorbani, M., Izadi, F. S., Roshan, S. S y Ebrahimpour, R. (2024). Assessing prospective teachers's geometric transformations thinking: A Van Hiele theory-based analysis with eye tracking cognitive science method. *Technology of Education Journal*, 18(1), 67-88.
- Godino, J. D. y Ruíz, F. (2002). *La geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada.
- Gökdağ, K., Özgeldi, M. y Yakin, I. (2022). Unveiling students's explorations of tessellations with scratch through mathematica aesthetics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(10), 2103-2121. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.2021306>
- Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática, Geometría* (pp. 44-59). CINVESTAV-PNFAPM.
- Gutiérrez, A. (2005). Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano. *Integra+*, 9, 15-28.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students reasoning in geometry. *Proceedings of the 19th international conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 11-18.
- Hernández, S. R.; Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.
- Hernández, V. M., Ríos, M. C. y Carrión, J. C. (2002). La formación inicial en matemáticas de los profesores de educación primaria y secundaria. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 4, 159-169.

- Hidalgo, R. I. y Ruiz, A. D. (2023). Embaldosamos hasta el infinito. *Suma*, 104, 69-74.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele model. *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 131-138.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th international conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 41-48.
- Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning geometry. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (p.p109–149). PME
- Junta de Andalucía. (2023). Orden del 30 de mayo de 2023, (BOJA núm. 104). Boletín Oficial de la Junta de Andalucía. 2 de junio de 2023. Junta de Andalucía. .
https://www.juntadeandalucia.es/boja/2023/104/BOJA23-104-00208-9731-01_00284747.pdf
- Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M. y Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal of Mathematics Education*, 10(1), 69-80.
<https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5416.69-80>
- Kurban, F. y Yanik, H. B. (2024). The process of pre-service mathematics teachers reaching spatial visualisation generalisations. *Journal of Pedagogical Research*, 8(4). 301-332. <https://doi.org/10.33902/JPR.202427803>
- Lean, G. A. y Clements, K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Lyublinskaya, I. y Cabral, M. (2023). Effect of GeoGebra explorations combined with art-based practices on in-service teachers' understanding of geometric transformations. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-9). hal-04412073. <https://hal.science/hal-04412073/>
- Manero, V. y Arnal-Bailera, A. (2021). Understanding proof practices of pre-service mathematics teachers in geometry. *Mathematics Teaching Research Journal*, 13(3), 99-130.
- Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry: an introduction to simmetry*. Springer
- Martínez-Artero, R. N. (2019). Las teselaciones de Penrose en el taller de matemáticas. *Números*, 100, 91-95.

- Martínez, S. J. E., Vásquez, B. M. V., García, Ch. A. y Infante, R. R. (2020). Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales. *Revista Pensamiento Matemático*, 10(1), 51-72.
- Mazzitelli, M. J. (2017). Mirar, sentir, pensar y crear. Desarrollo de habilidades básicas a través del estudio geométrico de mosaicos. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 255-266). CIBEM.
- Mbatha, M. y Bansilal, S. (2023). Using the Van Hiele theory to explain pre-service teachers' understanding of similarity in euclidean geometry. *Education Sciences*, 13(9), 861-878. <https://doi.org/10.3390/educsci13090861>
- Mora, S. J. A. (2007). Geometría dinámica para el análisis de obras de arte. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 83-99.
- Morales, R. G. y Rubio, G. N. (2020). Una experiencia con teselados usando Geogebra. *Uno, Revista de didáctica de las matemáticas*, 90, 65-71.
- Mountain, G. (2019). The effects of art integration on math achievement of 6th grade male students. *Journal of Applied and Educational Research*, 2(1), 4-15. <http://doi.org/10.58809/MYMA4144>
- Mutlu, Y. (2025). Prospective elementary mathematics teachers' view on the use of islamic geometric patterns in mathematics lessons. *Journal of STEM Teacher Institutes*, 5(1), 13-20.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17719>
- Noceti, H. (s/f). *Isometrías. Las transformaciones en el plano*. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. Ministerio de Educación de Argentina.
- Nutov, L. (2021). Integrating visual arts into the mathematics curriculum: the case of pre-service teachers. *Teaching and teacher education*, 97, 103218. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103218>
- Övez, F. T. D. y Özdemir, M. (2024). An examination of pre-service teachers' Van Hiele levels of geometric thinking and proof perception types in terms of thinking processes. *Educational Research Research and Reviews*, 19(1), 26-39. <https://doi.org/10.5897/ERR2023.4386>

- Pakang, J. y Kongtahn, P. (2007). Creative thinking and mathematics learning about circle of ninth-grade students through art work. *Proceedings of Psychology of Mathematics Education*, 31(1), 271-285.
- Pandiscio, E. A. y Knight, K. C. (2010). An investigation into the Van Hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. *Journal of Research in Education*, 20(1), 45-53.
- Pallarés, T. M. y Pallarés, T. M. E. (2022). Representación del infinito en el arte a través de la geometría. *Tsantsa Revista de Investigaciones Artísticas*, 13, 321-332.
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Mathematical creativity and cognitive styles. *Proceedings of Psychology of Mathematics Education*, 33(4), 377-384.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 205-235). Sense.
- Presmeg, N.C, Radford, L., Roth, W., y Kadunz, G. (2016). Semiotics in Mathematics Education. En G. Kaiser (Ed.), *13th International Congress of Mathematics Education Topical surveys* (pp. 1-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31370-2_1.
- Putri, R. O. E. (2017). Spatial skill profile of mathematics pre-service teachers. *Journal of Physics: Conference Series*, 947, 012065. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/947/1/012065>
- Ramírez, R. y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 179-196. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2152>
- Ramírez, R. y Fernández-Plaza, J.A. (2018). Isometrías en la resolución de problemas y obras de arte. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas* (pp. 143-155). Atrio.
- Real Decreto 822/2021, de 28 de septiembre, por el que se establece la organización de las enseñanzas universitarias y del procedimiento de aseguramiento de su calidad. Boletín Oficial del Estado, número 822, de 28 de septiembre de 2021. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2021/09/28/822/con>
- Revelo, M. I. y Bedoya, M. E. (2025). La geometría a través de las artes visuales: Diseño de una propuesta didáctica en educación básica. *IV Congreso de Educación*

- Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 1-9). CEMACYC.
<https://ponencias.ciaem-redumate.org/cemacyc/article/view/550/388>
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.
- Roura, R. y Ramírez, R. (2021). Sentido espacial en futuros maestros. En Diago, P. D., D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 537-544). SEIEM.
- Rumanová, L. y Smiesková, E. (2015). Creativity and motivation for geometric tasks designing in education. *Acta Didactica Napocensia*, 8(1), 49-56.
- Santos, N. R. (2024). *Las artes plásticas como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en la educación básica de secundaria*. [Tesis de Maestría, Universidad Francisco de Paula Santander]. Repositorio digital UFPS.
<https://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/9471>
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Schoevers, E.M., Leseman, P.P.M. y Kroesbergen, E.H. (2019). Enriching mathematics education with visual arts: Effects on elementary school students` ability in geometry and visual arts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(8), 1613-1634. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10018-z>
- Stivens, Q. A. y Ramírez, M., C. (2019). Teselaciones regulares-isométricas en el plano Euclidiano. *Revista Sigma*, 15 (1), 16-27.
<http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXV/1.pdf>
- Thaqi, X. y Giménez, J. (2014). Trayectorias iniciales de formación de profesores. El caso de las transformaciones geométricas. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(3), 253-275. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.53>
- Tiwari, S., Obradovic, D., Rathour, L., Mishra, L. N. y Mishra, V. N. (2021). Visualization in mathematics teaching. *Journal of Advances in Mathematics*, 21, 431-439. <https://doi.org/10.24297/jam.v21i.9136>
- Torres, V. M. (1987). *La Alhambra*. Epsilon
- Turgut M. y Uygan, C. (2014). Designing spatial visualisation tasks for middle school students with a 3D modelling software: An instrumental approach. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 22(2), 45-51.

- Uribe, G. S. M., Cárdenas, F. Ó. L. y Becerra, M. J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, 26(2), 135-160.
- Van Hiele, H.P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vargas, J. P., Venegas, Y. y Giménez, J. (2023). Diseño de tareas geométricas en la formación de futuros profesores de primaria. En C. Giménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 531-538). SEIEM.
- Vargas, H. J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de Educación Primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *Avances de investigación en educación matemática*, 25, 57-80. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6441>
- Ward, R. A. (2003). Teaching tessellations to preservice teachers using TesselMania! Deluxe: A vygotskian ppproach. *Information Technology in Childhood Education Annual*, 1, 69-78.
- Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2>
- Whiteley, W., Sinclair, N. y Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? En B. Davis y the Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years* (pp. 3–14). Routledge.
- Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. *Proceedings of the 30th international conference for the Psychology of Mathematics Education*, 5, 425–432.
- Yi, M., Wang, J., Flores, R. y Lee, J. (2022). Measuring pre-service elementary teachers' geometry knowledge for teaching 2-dimensional shapes. *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(8), em2137. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12220>
- Yorulmaz, A. y Çilingir, A. E. (2021). Do geometry self-efficacy and spatial anxiety predict the attitudes towards geometry? *Mimbar Sekolah Dasar*, 8(2), 205-216. doi:<https://doi.org/10.53400/mimbar-sd.v8i2.35914>.