Conocimiento especializado de un profesor sobre el aprendizaje del límite de una función al predecir el desempeño de sus estudiantes

Dayana De Los Reyes, Lidia Hernández-Rebollar y Eric Flores-Medrano

Se describe el conocimiento de un profesor sobre las características del aprendizaje matemático al predecir el desempeño de sus estudiantes ante actividades del límite funcional. Esto fue posible gracias al uso del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas como fundamento teórico y herramienta de análisis. Se implementó un estudio de caso instrumental con un profesor de matemáticas de bachillerato, quien resolvió tres actividades sobre límite. El profesor predijo que sus estudiantes tendrían dificultad para percibir la aproximación de una sucesión a un valor de interés en el registro gráfico, pero no en el numérico, exhibiendo su conocimiento didáctico.

Términos clave: Aprendizaje; Cálculo Diferencial; Conocimiento didáctico; Modelo MTSK; Predicción

Teacher's Specialized Knowledge about the learning of the limit of a function when predicting the performance of their students

The teacher's knowledge of the characteristics of mathematical learning was used to predict the performance of their students in functional limit activities. This was possible thanks to the use of the Specialized Mathematics Teacher Knowledge model as a theoretical foundation and analytical tool. An instrumental case study was implemented with a high school mathematics teacher, who solved three limit activities. The teacher predicted that their students would have difficulty perceiving the approximation of a sequence to a value of interest in the graphical record, but not in the numerical one, demonstrating their didactic knowledge.

Keywords: Didactic knowledge; Differential Calculus; MTSK Model; Learning; Prediction

De Los Reyes, D., Hernández-Rebollar, L. y Flores-Medrano, E. (2025). Conocimiento especializado de un profesor sobre el aprendizaje del límite de una función al predecir el desempeño de sus estudiantes. *PNA, 19*(4), 347-370. https://doi.org/10.30827/pna.v19i4.30587

Conhecimento especializado do professor sobre a aprendizagem do limite de uma função ao prever o desempenho de seus alunos

Descreve-se o conhecimento de um professor sobre as características da aprendizagem matemática ao prever o desempenho de seus alunos diante de atividades de limite funcional. Isso foi possível graças ao uso do modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática como fundamento teórico e ferramenta de análise. Foi implementado um estudo de caso instrumental com um professor de matemática do ensino médio, que resolveu três atividades sobre limite. O professor previu que seus alunos teriam dificuldade em perceber a aproximação de uma sequência a um valor de interesse no registro gráfico, mas não no numérico, demonstrando seu conhecimento didático.

Palavras-chave: Aprendizagem; Cálculo Diferencial; Conhecimento Didático; Modelo MTSK; Predição

Dentro de la formación que tiene el personal docente, una línea que se ha investigado, cada vez con más auge, es aquella que pretende identificar los conocimientos que despliega el profesorado de matemáticas cuando desempeña diferentes roles. Se han realizado investigaciones sobre el conocimiento que emplea cuando realiza planificaciones de clase (p. ej., Otero-Valega et al., 2023), explica un determinado objeto matemático (p. ej., Sosa et al., 2015), utiliza teorías de aprendizaje o de enseñanza en el desarrollo de sus clases (p. ej., Sánchez, 2022), así como la manera en que interpreta las respuestas de sus estudiantes (p. ej., Gómez, 2019), entre otros aspectos.

Este interés por encontrar formas efectivas de estudiar el conocimiento profesional del profesor y comprender los procesos que lleva a cabo para su adquisición, uso y desarrollo, ha motivado a los investigadores a realizar distintas propuestas que permitan indagar sobre la labor del profesor (p. ej., Ball et al., 2008). Particularmente, en esta investigación nos hemos planteado el uso del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés), por su consideración de aquellos elementos que, en su conjunto, hacen especializado el conocimiento del profesorado de matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Dentro de este conocimiento especializado del profesor se ha detectado la necesidad de identificar conocimientos específicos que le permitan reconocer, analizar y comprender determinados procesos de aprendizaje de las matemáticas y entender su génesis, lo que se refleja en la capacidad de interpretar las producciones de los estudiantes y anticipar posibles razonamientos, conocer errores frecuentes, dificultades de aprendizaje recurrentes o las concepciones erróneas que podrían tener sus estudiantes (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

Estas dos competencias del profesor, interpretar y anticipar, se consideran de mucha utilidad, ya que el profesor puede formular predicciones sustentadas sobre el posible comportamiento matemático de los estudiantes e ir modificando actividades seleccionadas teniendo en consideración múltiples posibilidades respecto a la forma de proceder de los estudiantes y, a la vez, de cómo potencializar estas hipotéticas maneras de resolución (Flores-Medrano et al., 2022).

Por todo lo anterior, y de acuerdo con Llinares et al. (2016), se considera importante y fundamental elaborar predicciones en la práctica docente, ya que estas les dan a los profesores la perspectiva de diversos y posibles escenarios a los cuales se puede enfrentar en el aula durante la implementación de ciertas actividades.

Ahora bien, es oportuno aclarar la postura que se asume en este estudio del término predicción del comportamiento matemático del alumnado. Para esto, se tiene en cuenta lo dicho por Gómez (2019), quien la describe como aquella conjetura de algo que ha de suceder, respecto a las posibles maneras de proceder de los estudiantes ante una determinada tarea matemática. Dicho de otra manera, este término hace referencia a aquellas tareas de enseñanza en las que los docentes deben generar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes ante un problema, actividad o tarea (Llinares et al., 2016).

En esta investigación se optó por analizar las categorías del Conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM, por sus siglas en inglés), subdominio del modelo MTSK, el cual, por su naturaleza, nos permite observar e interpretar cómo este tipo de conocimiento interviene en la toma de decisiones por parte del profesor cuando se está desarrollando un trabajo matemático en el aula. Es decir, da a conocer cómo el profesor secuencia y anticipa la forma en que los estudiantes desarrollarán el trabajo matemático (Flores-Medrano et al., 2015).

Si bien el KFLM se refiere a las características del proceso de aprendizaje, también incluye las habilidades para identificar los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas de los estudiantes acerca de un contenido matemático particular, con lo cual, es necesario que el profesor adquiera la habilidad de saber anticiparse sobre cómo piensan las matemáticas los estudiantes (Sosa et al., 2013). En la investigación realizada por Otero-Valega et al. (2023), en la que se estudió las relaciones entre subdominios del MTSK, se identificó que el KFLM se relaciona con los demás subdominios de conocimiento del modelo, mostrando así la importancia de anticiparse a los diversos fenómenos de aprendizaje y de tenerlos en cuenta en la planificación de la clase.

De este modo, en nuestro estudio se pretende describir el conocimiento de un profesor sobre las características de aprendizaje al predecir el desempeño de sus estudiantes ante actividades del límite de una función. El concepto de límite de una función es fundamental, tanto a nivel preuniversitario como universitario, por lo que ha llevado a muchos investigadores a estudiar su naturaleza en el campo del proceso de su enseñanza y aprendizaje (Guerrero y Hernández, 2020).

Acerca del límite de una función en un punto, se han reportado diversas dificultades. Por ejemplo, dificultades que se relacionan con el concepto de función, con el concepto de límite (Hitt, 2003; Vrancken et al., 2006) y con la conversión entre sistemas de representación, donde se han reportado obstáculos didácticos por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional (Blázquez y Ortega, 2001). También, dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, que no siempre se obtiene por sustitución, así como dificultades para plantear situaciones en las que se aplique el concepto de límite (Fernández-Plaza, 2010). Además, a los estudiantes se les dificulta vincular la existencia de un límite con la existencia e igualdad de los límites laterales e identificar el límite de una función en el registro gráfico o en el simbólico, pero lo determinan con éxito usando métodos algebraicos (La Plata, 2014). Esto concuerda con lo reportado en profesores en servicio, en donde la dependencia de procedimientos algebraicos en la evaluación del límite impide coordinar las aproximaciones del dominio y del rango utilizando la función, pues se suele concebir al límite solo en términos de aproximaciones y definir para funciones continuas (De Los Reyes y Hernández-Rebollar, 2024).

Marco teórico

El fundamento teórico de este estudio es el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, conocido por sus siglas en inglés como MTSK. Este modelo se caracteriza por tener una dualidad: es una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y, al mismo tiempo, es una herramienta metodológica que hace posible el análisis de las distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores et al., 2013).

El MTSK se considera un modelo analítico con carácter descriptivo del conocimiento del profesor de matemáticas, lo cual hace posible la interpretación del conocimiento especializado del profesor de manera integral (Escudero-Ávila et al., 2015). Dentro del MTSK se considera el conocimiento que posee un profesor de matemáticas en términos del Conocimiento matemático (MK), del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y de un conjunto de concepciones y creencias sobre las matemáticas, cómo se enseñan y cómo se aprenden (Carrillo-Yáñez et al., 2018), como se muestra en la figura 1.

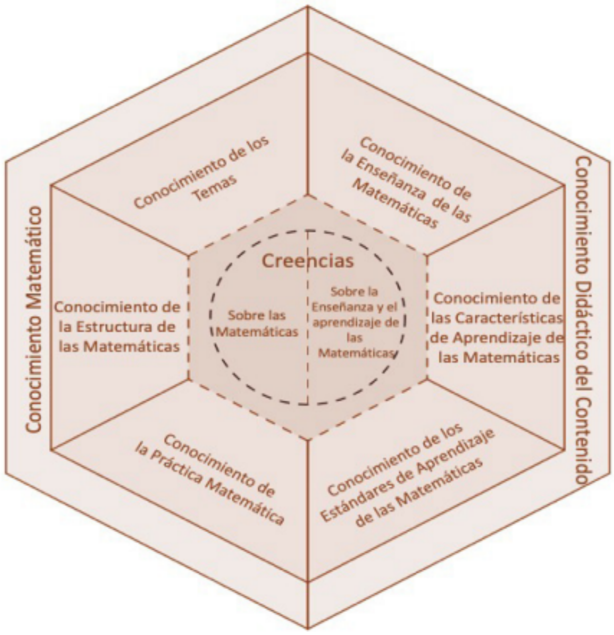


Figura 1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas – MTSK (Carrillo-Yáñez et al., 2018)

Para efectos de esta investigación, se detallará a continuación el subdominio del Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) con sus respectivas categorías, el cual está contenido en el PCK. Para una descripción más detallada del resto de subdominios y sus categorías se recomienda ver Carrillo-Yáñez et al. (2018).

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas

El Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno frente a las actividades y tareas matemáticas. En este sentido, se entiende que hace referencia al conocimiento de las características del proceso de aprehensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes, y del conocimiento sobre teorías de aprendizaje, personales o institucionalizadas, que pueda tener el profesor. También incluye el conocimiento de las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, con relación al aprendizaje de un determinado contenido, así como también los conocimientos sobre las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Asimismo, de acuerdo con Escudero-Ávila y Carrillo (2020), el foco central del KFLM está en reconocer al contenido matemático como objeto de aprendizaje, centrándose en los conocimientos del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general y respondiendo a la necesidad de identificar los conocimientos que hacen posible que el profesor reconozca, analice y comprenda determinados procesos de aprendizaje de las matemáticas y entender su génesis.

Por tanto, el estudio de este conocimiento cobra relevancia, ya que permite entender, entre otras cosas, qué elementos requiere el profesor para anticiparse a los modos de pensamiento del estudiante, cómo interpreta sus producciones y lenguaje matemático, así como la manera en la que identifica, aprovecha y devuelve las oportunidades de aprendizaje que surgen a partir de la actividad matemática de los estudiantes (Sosa et al., 2015). Este subdominio se subdivide en cuatro categorías, que se describen a continuación.

El conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

Se refiere a la reflexión sobre las posibles fortalezas, dificultades, errores u obstáculos que puedan surgir en los procesos de aprendizaje de un contenido específico (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

Las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje

Se incluyen aquí los conocimientos del profesor sobre los procesos y estrategias, típicos o no habituales que se pueden seguir en una determinada tarea matemática (Sosa et al., 2013), así como la terminología utilizada para hablar de contenidos específicos (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático

Tiene en cuenta la necesidad de considerar los conocimientos del profesor sobre estas expectativas e intereses, así como el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de la matemática (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

El conocimiento de teorías formales y personales de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.

Se describe en esta categoría lo que sabe el profesor sobre literatura referente a la Educación Matemática como disciplina científica, específicamente, resultados acerca del aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como a teorizaciones personales que surgen de la experiencia propia o consensuada (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020).

Método

La presente investigación es de tipo cualitativa (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018) y se implementó un estudio de caso (Bassey, 2003) como diseño metodológico, siendo este de tipo instrumental ya que, de acuerdo con Stake (2007), permite abarcar la complejidad de un caso en específico con la intención de comprenderlo, pero no será el caso en sí mismo el foco de atención, sino que se busca comprender la teoría alrededor del fenómeno de estudio. En esta investigación, el caso será un profesor de matemáticas y la actividad de predecir el proceder de sus estudiantes ante un conjunto de tareas sobre el límite de una función hará posible la caracterización de sus conocimientos.

Se utilizó como perspectiva metodológica una aproximación *top-down* (Grbich, 2013), en la que se usa el subdominio KFLM del Modelo MTSK y sus categorías para realizar el análisis del conocimiento profesional, es decir, estas categorías se consideran la lente con la que son observados los datos y que permiten describir el conocimiento especializado del profesor sobre el límite de una función cuando hace predicciones. Después de realizar el análisis se planteó un conjunto de descriptores que nos permitieron explicar las evidencias de conocimiento exhibidas por el profesor. Es decir, los descriptores, mostrados en la Tabla 1, emergieron del análisis realizado.

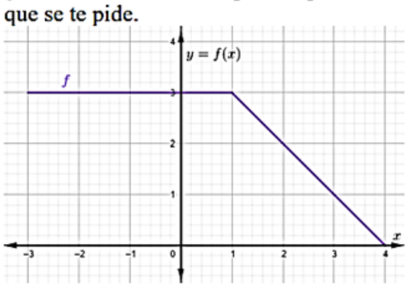
El informante es un ingeniero químico, docente en servicio. Al momento de su participación cursaba un máster en Educación Matemática y tenía 15 años de experiencia docente en nivel secundaria, medio superior y superior.

Respecto a la recolección de datos, se aplicó un instrumento con tres actividades tomadas de Morante (2020) sobre el límite de una función (ver figura 2), cuyo propósito fue que el profesor, por medio de su resolución, conociera en profundidad cada problema y, a su vez, pensara sobre las posibles respuestas que sus estudiantes podían dar al mismo.

Luego, a través de una entrevista semiestructurada, se corroboraron evidencias sobre el conocimiento del profesor que se identificaron al revisar su solución a las actividades (ver figura 2). En esta entrevista se le cuestionó sobre la forma en la que él las había resuelto y sobre cómo pensaba que sus estudiantes las resolverían. Las preguntas, en su mayoría, se diseñaron teniendo en cuenta las categorías del KFLM, ya que la actividad de predecir se relaciona mayoritariamente con este subdominio del MTSK. Dichas preguntas también se relacionaron con el concepto de límite, el rol del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje y algunas otras surgieron al escuchar las respuestas del informante y se formularon para profundizar o clarificar lo que él decía. La entrevista fue realizada a través de la plataforma Zoom, grabada y transcrita en abril del 2022 y tuvo una duración de dos horas y quince minutos.

Específicamente, al iniciar la entrevista, se presentaron las actividades al informante, se explicó que las tres actividades a resolver eran sobre el límite de una función en un punto, se comentó el objetivo de la entrevista y el tiempo estimado para esta. Adicionalmente, al presentar las tres actividades, la investigadora leyó los incisos de las actividades. El desarrollo de la entrevista fue de la manera siguiente: el informante resolvía una actividad y al terminarla la investigadora le planteaba preguntas para profundizar sobre sus respuestas y después sobre la forma en que podrían responder sus estudiantes. Finalmente, al terminar las actividades, el informante compartió por el chat de la plataforma el documento PDF con las actividades resueltas, escritas a mano.

Actividad N°1.
Considera la siguiente representación gráfica de una función f para responder lo que se te pide.



a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-3	0	0.8	...	1	...	1.4	2	4
$f(x)$				...	3	...			

b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 1$.

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(1) = 3$.

d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

e. Calcula $\lim_{x \to 1} f(x)$

Actividad N°2.
Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{4 - 3x}$$

a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-1.30	-1.22	-1.15	-1.05	-1.02	...	-1	...	-0.98	-0.95	-0.93	-0.90	-0.88
$f(x)$						...		...					

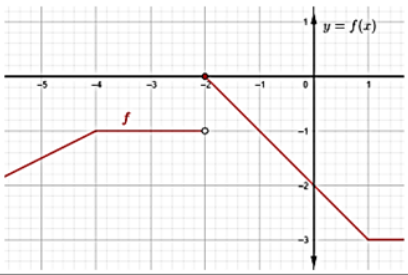
b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -1$.

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-1)$.

d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

e. Calcula $\lim_{x \to -1} f(x)$

Actividad N°3.
Utiliza la siguiente representación gráfica de la función f para responder lo que se te pide.



a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-6	-4	-2.8	-2.4	-2.2	...	-2	...	-1.8	-1.4	-1.2	-1	2
$f(x)$						...		...					

b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -2$.

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-2)$.

d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

e. Calcula $\lim_{x \to -2} f(x)$

Figura 2. Actividades resueltas por el profesor (Morante, 2020)

RESULTADOS

En esta sección se presentan los conocimientos del profesor informante cuando se le solicitó hacer predicciones sobre lo que harían sus estudiantes ante las actividades de la figura 2 que previamente él había resuelto. En este trabajo, se presentan aquellos que muestran el KFLM del profesor, debido a que las predicciones realizadas por él son evidencias de conocimiento de este subdominio.

Los conocimientos que evidenció el profesor al resolver las actividades se reportaron en De Los Reyes y Hernández-Rebollar (2024).

Dentro del KFLM que el profesor exhibió, se evidenciaron dos categorías correspondientes al subdominio en mención: Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas y Formas en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático. En la Tabla 1 se presentan los descriptores que explican el conocimiento exhibido por el profesor en cada una de dichas categorías. En los párrafos posteriores se presentan las evidencias de los conocimientos identificados.

Tabla 1
KFLM exhibido por el profesor

Categorías del KFLM		Descriptores
Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	KFLM-1	Conoce que los estudiantes no tendrán dificultad con la tabulación, pero que pueden tener errores en el uso de la calculadora.
	KFLM-2	Conoce y prevé las fortalezas y debilidades de los estudiantes para identificar la aproximación en el dominio de la función.
	KFLM-3	Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades en la manipulación de la expresión algebraica de una función.
	KFLM-4	Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función.
	KFLM-5	Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades y fortalezas cuando calculan el límite de una función.
Formas en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático	KFLM-6	Conoce la manera en que los estudiantes interactúan con una tabla de valores.
	KFLM-7	Conoce las diferentes formas en que los estudiantes interactúan con la gráfica de una función para obtener su expresión algebraica.
	KFLM-8	Conoce las formas en las que sus estudiantes verifican la expresión algebraica de una función, por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas.
		Conoce las formas en las que sus estudiantes verifican la expresión algebraica de una función, por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas.

Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas

El profesor, al responder sobre la forma en la que espera que sus estudiantes interactúen con las actividades propuestas, da a conocer algunas debilidades o fortalezas que considera que ellos pueden llegar a manifestar.

KFLM-1 Conoce que los estudiantes no tendrán dificultad con la tabulación, pero que pueden tener errores en el uso de la calculadora

Esta evidencia de conocimiento está relacionada con el inciso (a) de las actividades, en el que se pide obtener, por medio de la tabulación, las imágenes de la función para los valores de x propuestos en cada actividad.

De manera general, el profesor considera que realizarlo será una fortaleza que tendrán sus estudiantes, afirmando que es un registro que conocen y que usualmente trabajan en las actividades que resuelven en el aula de clase. De hecho, argumenta que en caso de que exista un error por parte de ellos, este puede atribuirse al uso de la calculadora en la evaluación de los valores de interés pertenecientes al dominio de la función. De aquí, el profesor da a conocer que cuando la función es presentada en registro gráfico, entonces la tabulación no será un inconveniente pues ellos recurrirán a la gráfica de esta. Es decir, sabe que sus estudiantes no tendrán dificultad para obtener las imágenes de una función, dada en el registro gráfico, y colocarlas en una tabla.

> *Con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente, solo que lo metan mal a la calculadora, eso sería un inconveniente, porque no notarían el comportamiento de la función. Ese sería más con respecto al uso de la herramienta.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Es importante resaltar la habilidad del profesor informante para anticipar que no tendrán dificultades en la tabulación, tal como se ha evidenciado en estudios en los que se utilizaron actividades similares a las de esta investigación. Un ejemplo es la realizada por Analco y Hernández-Rebollar (2020), en la que el 100% de los estudiantes que participaron en la investigación lograron evaluar la función en puntos cada vez más cercanos al valor de interés en el registro algebraico y en el registro gráfico, completando la tabla correctamente.

KFLM-2 Conoce y prevé las fortalezas y debilidades de los estudiantes para identificar la aproximación en el dominio de la función

Esta evidencia está vinculada al inciso (b) de las actividades, en el que se pregunta por el comportamiento de los valores de x en términos de la aproximación, es decir, a qué valor se aproximan. En un momento de la entrevista, el profesor comenta que los estudiantes saben que cierta función es una parábola, pero que no saben cómo se aproximan los puntos, dando indicios de que él considera que percibir la aproximación en el registro gráfico puede representar una dificultad para ellos.

> *Si le ponemos una función, saben que es una parábola, porque únicamente conocen el registro gráfico, pero no conocen cómo se aproximan los puntos, por ejemplo, cuando x tiende a cero…* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Sin embargo, comenta para la segunda actividad que sus estudiantes podrían usar la tabla de valores para identificar la forma en que se aproximan los valores del dominio al valor de interés, tanto por la izquierda como por la derecha, siendo esto una fortaleza.

> *De igual manera, observar a través de la tabla la forma creciente y decreciente de los puntos, cuando se aproximan al punto acordado, en este caso, por ejemplo, en -2, que te vas aproximando de -6, –4, -2.8, -2.4, -2.2, el orden de las secuencias también les ayudaría mucho, esa sería una de sus fortalezas.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Del mismo modo, predice para la primera actividad, en la que aparece una gráfica, pero también una tabla, que identificarían la aproximación en el dominio de la función.

> *Identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando [está] yendo a -1, pues es que se está aproximando a ese -1.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

De acuerdo con estas predicciones dadas por el profesor se puede decir que él conoce que identificar o no la aproximación de una sucesión de valores en el dominio depende del registro en que esta sea presentada. Él afirmó que identificar esta aproximación en el registro gráfico sería una debilidad, pero en el registro tabular sería una fortaleza.

KFLM-3 Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades en la manipulación de la expresión algebraica de una función

El profesor en la actividad N°1 considera que sus alumnos, al tratar diferentes registros de representación para una función, pueden tener dificultad al manipular la expresión algebraica de la función. Esto, debido a que el profesor sabe que, al trabajar con funciones, usualmente sus alumnos utilizan dicha expresión para calcular su dominio, rango, hacer la tabulación o para graficarla y, en funciones como la de la primera actividad, en la que la función solo se presenta en el registro gráfico, considera que el tratamiento de esta en su registro algebraico puede ser una debilidad para sus estudiantes.

> *Considero que la parte un poco más complicada sería tratarla como una función en forma algebraica, es decir, a través de expresiones matemáticas […] consideraría yo que es un poco lo que les podría costar un poquito de complejidad debido al manejo de expresiones algebraicas.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Se considera importante dedicar unas líneas a la función por partes, ya que, en dos de las actividades resueltas por el profesor, las funciones presentadas son de este tipo, en particular, en la actividad N°3, el profesor comentó:

> *El hecho de manejar funciones segmentadas o por partes podría presentar una dificultad en los muchachos.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Con respecto a esto y, a lo que el docente predice que harán matemáticamente sus alumnos, considera que manipular este tipo de funciones puede presentar una debilidad para ellos ya que cuando intentan encontrar la expresión algebraica de la función para posteriormente evaluar el límite en el punto de interés esperan encontrar una expresión única para todo el dominio de la función, entonces, encontrarse con una función de este tipo, que puede tener diferentes comportamientos en determinados intervalos en su dominio, representa para ellos una dificultad.

KFLM-4 Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función

También se identifica que para el inciso (d), en el cual se solicita: "Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x", el profesor considera que para describir este tipo de comportamiento sus estudiantes van a recurrir a manipular la expresión algebraica de la función y no lo harán en términos de la aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de la función.

Del mismo modo, en diversas ocasiones el profesor da evidencias de un conocimiento que se relaciona con los errores que él considera que van a cometer sus estudiantes cuando describen el comportamiento de determinadas funciones en actividades similares a las aplicadas en esta investigación. Por ejemplo, errores al calcular el dominio o el rango de la función y al evaluar el límite de la función. Anticipa que también se encontrarán errores debido a que los alumnos esperan encontrar una sola expresión algebraica para una función, situación que no ocurre en la actividad N°1 pues es una función definida por partes:

> *Pensar que el comportamiento de la función es único en todo el segmento, ese podría ser un error. De repente ellos van a querer involucrar a una función que nos dé esos valores de acuerdo con seguir los patrones de la tabla. De igual manera, intentar o no definir correctamente el dominio, es decir, que no identifiquen bien o correctamente de qué intervalo a qué intervalo es. También, en la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Se observa en el fragmento anterior que el profesor relaciona el inciso (d) con procedimientos algebraicos. Sin embargo, este inciso hace referencia a un proceso en el que se puede coordinar la aproximación de una sucesión de valores en el dominio con la aproximación que ocurre en el rango de la función. Con esto, da a conocer que él considera que sus estudiantes tendrán dificultades para describir el comportamiento de la función en términos de la aproximación. Pero su predicción no informa si sus estudiantes podrán o no evidenciar el proceso de aproximación coordinado.

KFLM-5 Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades y fortalezas cuando calculan el límite de una función

Al evaluar el límite de una función, el profesor también hace referencia a algunas de las dificultades que puedan presentar sus alumnos para comprender el concepto del límite de una función como una aproximación. Esta predicción se relaciona con el inciso (e) de las actividades, en el que se pide de manera explícita calcular el límite de la función en cierto valor de interés. El profesor mencionó para la primera actividad, inciso (e):

> *Se guiarían mucho por la gráfica, de hecho, primero resolverían el límite, pero seguramente dirían que cuando x=4 la función es cero, eso es lo que ellos asumirían que cuando x=4 el punto es (4,0). Sin embargo, como que todavía no se concibe el concepto de límite correctamente.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Es importante mencionar que cuando el profesor dice “primero resolverían el límite”, se refiere a que sus estudiantes evaluarían $x = 4$ en la expresión algebraica de la función para determinar el límite de dicha función en ese punto. Sin embargo, como la función solo se presenta en el registro gráfico, él anticipa que sus alumnos primero obtendrían su expresión algebraica y luego sustituirían el valor de interés en la función. Así, al predecir, exhibe el conocimiento de que sus alumnos calculan el límite por sustitución y que no lo conciben correctamente.

El profesor continúa manifestando el hecho de que considera que el concepto de aproximación y la noción que tienen los alumnos de este representa una dificultad para sus estudiantes, afirmando nuevamente que ellos considerarán que el valor del límite es la imagen del punto de interés, anticipando que tendrán dificultad para entender la causalidad que se produce en la aproximación que ocurre tanto en el dominio como en el rango de la función.

> *Creo que eso es lo que les costaría un poco de trabajo, identificar que es una aproximación, que mientras más te aproximes a cuatro, pues más vas a llegar en tu imagen, vas a tender a cero, pero que no llegas a ese punto, sino digamos que vas a aproximarlo.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Formas en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático

Con respecto al conocimiento sobre las formas en que los alumnos razonan y proceden matemáticamente el profesor dio evidencias de la manera en que él espera que sus estudiantes resuelvan las actividades, las cuales se presentan a continuación.

KFLM-6 Conoce la manera en que los estudiantes interactúan con una tabla de valores

El profesor conoce la manera como sus estudiantes interactúan con una tabla de valores, ya que él menciona que observando la gráfica de la función ellos podrán identificar las imágenes de la función para el valor de x en cuestión. Esto sería en el caso de que la función venga representada en su registro gráfico o, en su defecto, que los estudiantes hayan trazado un esbozo de la gráfica de la función. Ahora bien, para actividades en las cuales la función viene representada en el registro algebraico (como es el caso de la segunda actividad), el profesor espera que lleven a cabo la tabulación evaluando en la expresión algebraica los valores de x y que, en caso de presentar un inconveniente en dicha evaluación, estaría relacionado con el uso de la calculadora al ingresar de forma incorrecta algún valor, tal como se reportó en la evidencia KFLM-1.

> *…como ya tenemos la gráfica entonces, si esperara que identifiquen puntos en la gráfica para poder completar la tabla […] no tendrían inconveniente solo que lo metan mal a la calculadora porque no notarían el comportamiento de la función.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

El profesor también espera que, por medio de la tabulación, sus estudiantes puedan describir el comportamiento de la función, es decir, que utilizarían lo resuelto en el inciso (a) para responder lo solicitado en el inciso (d). El profesor hace énfasis en utilizar dos puntos de la tabla de valores para calcular la pendiente, la ecuación de la recta, y continuar con el dominio, el rango de la función. Esto lo enfatiza en la primera actividad donde los tramos de la función son rectas.

En esta instancia el profesor comparte un hecho interesante, mencionando que consideraría importante presentarle a los estudiantes funciones con las cuales no estén acostumbrados a trabajar, que no sean rectas, y menciona las funciones cuadráticas y las funciones cúbicas. Hace esta anotación porque él considera que con estas últimas funciones los estudiantes tendrán que recurrir a otras estrategias diferentes a las que utilizan con las funciones lineales para obtener la expresión algebraica de la función.

> *Entonces, ya teniendo la tabla, ellos pueden describir cuál es el comportamiento de la función. Sería lo que más pudiesen hacer, utilizando dos puntos de las rectas […] habría que ver o sería interesante ver si le cambiamos la forma de la función, que no fuera una recta porque ahí sí cambiaría su definición de la función porque ya no sería la recta que ellos común o fácilmente pueden calcular, si le ponemos un segmento de parábola o un segmento de una función cúbica, pues sí cambiaría su definición y buscarían la forma de llegar a esa función.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Queda en evidencia que el profesor espera que sus estudiantes, usando la tabla, busquen la expresión algebraica de la función para describir su comportamiento. El profesor también manifiesta la forma en que sus estudiantes resuelven actividades como las que se implementaron en esta investigación.

> *Siempre inician con la tabulación cuando les das una función. Después que han tabulado pasan a la parte gráfica y luego, ya que tienen identificada la imagen de la función, empiezan con la forma algebraica. Ese sería su procedimiento al tratar una función.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

KFLM-7 Conoce las diferentes formas en que los estudiantes interactúan con la gráfica de una función para obtener su expresión algebraica

Esta evidencia guarda relación con la presentada en KFLM-4. En esta predicción el profesor también relaciona el inciso (d) con describir el comportamiento de la función en términos de una expresión algebraica y detallar aspectos como el dominio de la función.

> *Tenemos la gráfica, entonces sí esperase que identificaran puntos en la gráfica para poder completar la tabla […] esperaría que determinaran la ecuación de la recta, que es decreciente, su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro.* (Predicción del profesor, entrevista personal, abril de 2022)

Para esto, anticipa que sus estudiantes van a extraer información de la gráfica de la función, es decir, calcular su pendiente y la ecuación de la función, así como los intervalos en que la función crece y decrece, aspectos que no se pedían calcular en este inciso. A partir de esta predicción se identificó que lo que el profesor espera que hagan sus estudiantes guarda relación con lo que él resolvió en las actividades para este inciso. A continuación, se evidencia la manera en que el profesor resolvió este inciso en la primera y en la tercera actividad (figuras 3 y 4).

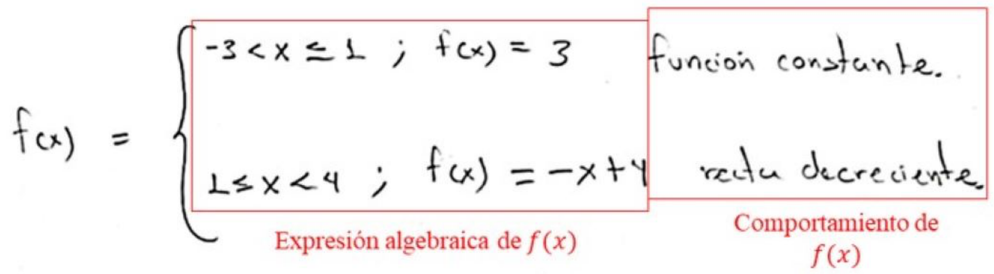


Figura 3. Proceder del profesor en la primera actividad

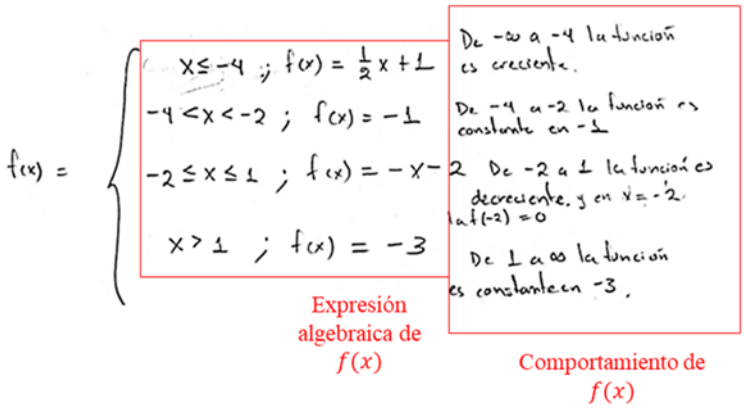


Figura 4. Proceder del profesor en la tercera actividad

En la figura 3 y la figura 4 se muestra la forma en que el profesor resuelve este inciso: calcula las expresiones algebraicas correspondientes a cada tramo de la función e informa sobre el crecimiento o el decrecimiento de la función. Con lo anterior, queda en evidencia cómo la manera de interactuar con el contenido matemático del profesor se relaciona con la forma en que él espera que sus estudiantes procedan matemáticamente en este tipo de actividades. De hecho, se cree que la razón por la que el profesor no calcula la expresión algebraica para describir el comportamiento de la función en la segunda actividad es porque dicha actividad ya la proporcionaba.

KFLM-8 Conoce las formas en las que sus estudiantes verifican la expresión algebraica de una función, por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas

Siguiendo con la expresión algebraica que el profesor espera que sus estudiantes calculen al resolver estas actividades, también considera que, una vez que sus alumnos hallen dicha expresión, entonces ellos recurrirán a graficar con el objetivo de verificar su respuesta, por medio de un software o realizando un esbozo a mano. Es decir, esta sería la forma en que él espera que sus estudiantes comprueben que la expresión obtenida es la correcta, y una vez que ellos verifiquen que su gráfica coincide con la gráfica proporcionada en la actividad, podrán estar seguros de la expresión obtenida y continuar con la descripción del comportamiento de la función. Esto es lo que el profesor afirma:

> *Yo sé que si tienen algunas dudas seguramente se lo llevarán a un software, también al celular, podrían utilizarlo, GeoGebra, por ejemplo y graficarían su función con lo que han obtenido para ver que efectivamente coincida con la gráfica que tú les estás presentando.* (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022)

Es notable la importancia que el profesor le da a que sus estudiantes encuentren una expresión algebraica para la función. Además, él predice que ellos la encontrarán y numera los posibles procedimientos o estrategias que implementarán para conseguirla. De esta forma, se cree que este hecho está relacionado con el uso que tendrá la forma algebraica para evaluar el límite de la función en el inciso e de las actividades.

Con respecto a lo anterior es pertinente mencionar que el profesor podría encontrar el límite de la función utilizando la gráfica que proporciona la actividad (para la primera y la tercera actividad), es decir, observando en la gráfica a qué valor se aproximan las imágenes de la función cuando los valores en el dominio se aproximan a determinado valor de interés, o en su defecto, si la actividad no proporciona la gráfica (para la segunda actividad), recurrir a la tabla de valores en la que se puede observar el comportamiento mencionado anteriormente. Por tanto, la expresión algebraica no es necesaria.

En diferentes ocasiones el profesor mostró evidencias de conocimientos relacionadas con temas específicos como dominio, rango, crecimiento y decrecimiento de funciones. Sin embargo, estas evidencias de conocimiento están asociadas a las maneras en que el profesor acostumbra a resolver este tipo de actividades, pero que se alejan de lo que se solicitaba en la actividad. También, esta forma de proceder del profesor nos da señales del tipo de actividades que acostumbra a proponer a sus alumnos cuando enseña el tema de límite de una función.

Como se sabe, el profesor informante de esta investigación proporcionó predicciones con respecto al comportamiento matemático de sus estudiantes al resolver actividades relacionadas con el límite de una función. También, por las características del subdominio KFLM, sabemos que aquí el profesor debe anticiparse a la manera de proceder de sus estudiantes, identificando de esta manera sus conocimientos previos, errores, dificultades, fortalezas, estrategias, entre otros aspectos. Por ende, consideramos pertinente señalar que, de manera explícita, muchas de las evidencias de conocimiento proporcionadas por el profesor se ubican dentro de este subdominio.

Con base en lo anterior es posible afirmar que la habilidad de predecir tiene fuertes bases de conocimiento en el subdominio KFLM por la naturaleza de la actividad y que, al desarrollarla, los profesores de matemáticas desarrollan su conocimiento didáctico en Matemáticas.

CONCLUSIONES

En los resultados presentados en esta investigación se evidenciaron conocimientos del profesor informante correspondientes al subdominio KFLM (Tabla 1). De manera específica, el profesor consideró que realizar la tabulación de una función que está representada en el registro gráfico e identificar la aproximación de los valores en el dominio de una función representada en el registro numérico sería una fortaleza para sus estudiantes. También identificó algunas dificultades, por ejemplo, para identificar la aproximación que ocurre en el dominio cuando la función está representada en el registro gráfico, coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, comprender el límite como una aproximación y al manipular la expresión algebraica de la función.

Un aspecto que resalta en esta investigación es la relación que guarda la forma en la que el docente resolvió las actividades con la que predijo que sus estudiantes las resolverían. Se observó que hubo coincidencia cuando realizó la tabulación e identificaba la aproximación en el dominio de la función. Sin embargo, su predicción no coincidió con la forma en que resolvió cuando identificó a qué valor se aproximaban las imágenes y al coordinar cada proceso de aproximación a través de la función. De cierto modo, al aumentar la complejidad de las actividades en los últimos incisos, así como el nivel de análisis y comprensión que estos requerían, el profesor anticipó que sus estudiantes iban a tener dificultades y que iban recurrir a procedimientos algebraicos alejándose de la aproximación de la función, a pesar de que él sí coordinó estas aproximaciones.

Las dificultades predichas por el profesor coinciden con lo que ha sido reportado en otras investigaciones en las que estudiantes de nivel medio superior o superior resuelven actividades similares a las de este estudio (Analco y Hernández-Rebollar, 2020; Blázquez y Ortega, 2001; Fernández-Plaza, 2010; La Plata, 2014; Vrancken et al., 2006). Por ejemplo, las dificultades que predijo sobre la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango coinciden con lo reportado por Pons (2014) y Pérez (2019). Así, interpretamos que el profesor conoce el rendimiento académico de su alumnado y que la experiencia del profesor juega un papel fundamental al momento de elaborar predicciones, idea que concuerda con lo reportado por Gómez (2019). Es decir, el profesor informante tiene la experiencia y sensibilidad que le permitieron predecir conceptos claves en el aprendizaje del límite que han sido reportados en la literatura. Sin embargo, puede darse el caso de profesores que no consideren las dificultades, errores o fortalezas de sus estudiantes cuando aprenden sobre el límite de una función, por lo que es oportuno plantear investigaciones como esta con grupos de docentes de diferentes características. Se sugiere que la habilidad de elaborar predicciones por parte de los docentes tome relevancia, dado que se ha exhibido cómo se relaciona directamente con el conocimiento didáctico, la experiencia, la práctica docente, el diseño de actividades, la enseñanza y el aprendizaje de un tema, entre otros.

En las investigaciones realizadas por Fernández et al. (2015), Fernández et al. (2018), Gómez (2019), Llinares et al. (2016) y Montero y Callejo (2019) y se exhibe la importancia que tiene para un profesor llevar a cabo predicciones ya que dentro de este proceso el profesor pone en juego diversos tipos de conocimientos (matemáticos y didácticos) que, a su vez, ponen de manifiesto su experiencia y práctica docente, coincidiendo con los resultados de este estudio. Además, consideramos que la actividad de predecir enriquece la forma en que los profesores enseñan matemáticas, ya que, en actividades como planear clases, diseñar tareas o evaluaciones, los profesores se podrán anticipar pensando: ¿cuáles son sus conocimientos previos?, ¿cómo lo resolverán?, ¿qué errores pueden cometer?,

¿cómo identifico sus fortalezas?, ¿qué estrategias van a utilizar para resolver cierto ejercicio?, entre otras.

Así, se reitera la importancia de que los profesores de matemáticas reconozcan la necesidad de poseer un conocimiento específico con el que anticipen el pensamiento de sus estudiantes y predigan su posible comportamiento ante las distintas tareas. Lo anterior, con la finalidad de que estén preparados para atender los errores o dificultades que puedan surgir y potencializar las estrategias y fortalezas de sus estudiantes. Además, esta habilidad de predecir complementa la planificación de una clase o un tema específico porque ofrece distintos escenarios, que le permiten a los profesores elegir aquellos que concuerdan con las necesidades de su alumnado.

Realizar esta caracterización por medio de descriptores que exhiben las evidencias de conocimiento mostradas por el profesor fue posible gracias al sistema de categorías que subyacen en el modelo MTSK. Dichos descriptores surgieron en el análisis, como respuesta a la necesidad de describir las evidencias de conocimiento exhibidas por el profesor al resolver las actividades y al realizar las predicciones. Se sugiere que estos descriptores sean utilizados en futuras investigaciones en las que se caracterice el conocimiento especializado del límite de una función, específicamente, para el diseño de actividades que busquen encontrar evidencia de este subdominio, la elaboración de preguntas en un cuestionario, en una entrevista o como premisas que describan las evidencias de conocimiento del KFLM. Las actividades resueltas por el profesor fueron una pieza clave en esta caracterización de su conocimiento, ya que permitieron contextualizar al docente con el tema, con el tipo de ejercicios y, al mismo tiempo, le permitieron pensar cómo lo harían sus estudiantes.

Este estudio aporta información sobre el conocimiento especializado que puede tener un profesor con respecto a las fortalezas y debilidades de sus estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje del límite de funciones, así como de algunas maneras en que los estudiantes interactúan con dicho concepto. Dado que las investigaciones que estudian el Modelo MTSK y el límite de funciones son escasas, se considera que este trabajo puede aportar a esta línea de investigación y sentar bases para investigaciones futuras con un mayor número de profesores.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología de México por permitir a través de su financiamiento llevar a cabo esta investigación mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1180641. Asimismo, este trabajo ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00).

REFERENCIAS

Analco, A. y Hernández-Rebollar, L. (2020). Comprensión del concepto de límite función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. En F. Macías y D. Herrera. (Eds.), *Matemáticas y sus aplicaciones 15* (pp. 51-73). Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings.* Open University Press.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), 219-236.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

De Los Reyes, D. y Hernández-Rebollar, L. (2024). Una concepción algebrizada del límite como obstáculo para su comprensión en un profesor de bachillerato. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *9*, 1-24. https://doi.org/10.46618/iime.213

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 10*(1), 53-77. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Escudero-Ávila, D. y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática 32*(2), 8-38. https://doi.org/10.24844/em3202.01

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). SEIEM. http://hdl.handle.net/10045/51394

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* [Trabajo fin de Máster, Universidad de Granada, España]. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Ant_Fernandez.pdf

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. R. Richard (Eds.), *Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 473-484). Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Flores-Medrano, E., Gómez-Arroyo, D., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. (2022). What knowledge do teachers need to predict the mathematical behavior of students? *Mathematics*, *10*(16), 1-13. http://dx.doi.org/10.3390/math10162933

Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction.* Sage Publications.

Gómez, D. (2019). *Conocimientos que utilizan los profesores al predecir el posible comportamiento matemático de estudiantes en una actividad de introducción a sólidos de revolución*. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México].

Guerrero, J. y Hernández, L. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la teoría APOE. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 5*, 1-19. https://doi.org/10.46618/iime.70

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mc Graw Hill Education.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). Fondo de Cultura Económica.

La Plata, C. S. (2014). *Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú]. http://hdl.handle.net/20.500.12404/5570

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(8), 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). SEIEM.

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México]. https://hdl.handle.net/20.500.12371/11643

Otero-Valega, K., Juárez-Ruíz, E. y Zakaryan, D. (2023). Relaciones entre subdominios de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, *3*(1), 1-25. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.92

Pérez, A. (2019). *Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la Teoría APOE*. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México].

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. [Tesis doctoral, Universidad de Alicante, España]. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf

Sánchez, J. (2022). *¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado?* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México]. https://hdl.handle.net/20.500.12371/16421

Sosa, L., Aguayo, L. y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). Ediciones Díaz de Santos.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias,* *33*(2), 173-189. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4.ª ed.). Morata.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A. y Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, *29*, 9-19.

Dayana De Los Reyes
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
darec99@gmail.com

Lidia Hernández-Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
lidia.hernandez@correo.buap.mx

Eric Flores-Medrano
Universidad Complutense de Madrid, España
erflores@ucm.es

Recibido: abril de 2024. Aceptado: abril de 2025
doi: 10.30827/pna.v19i4.30587

ISSN: 1887-3987

TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE ABOUT THE LEARNING OF THE LIMIT OF A FUNCTION WHEN PREDICTING THE PERFORMANCE OF THEIR STUDENTS

Dayana De Los Reyes, Lidia Hernández-Rebollar and Eric Flores-Medrano

The concept of the limit of a function at a point is fundamental, both at pre-university and university levels, and its teaching poses one of the greatest challenges in education, as learning brings numerous difficulties related to abstraction, analysis, demonstration, among others. Thus, there arises the need to identify the knowledge of mathematics teachers when performing their role, specifically those that allow them to recognize, analyze, and understand certain processes of functional limit learning. The purpose of this study is to describe a teacher's knowledge about the characteristics of learning the limit of a function in predicting the performance of their students. To this end, the theoretical basis was the model of the Mathematics Teacher's Specialised. Knowledge. Specifically, one of its subdomains, the Knowledge of Features of Learning Mathematics, which through its categories made possible the classification and organization of the evidence of knowledge exhibited by the teacher when making predictions. Also, an instrumental case study was implemented with a high school mathematics teacher. The prediction activity by the teacher will allow the characterization of their knowledge. Data was collected through an instrument with three activities on the limit of a function and through a semi-structured interview. The results presented in this research showed knowledge of the informing teacher corresponding to the subdomain under study. Specifically, the teacher considered that tabulating a function represented in the graphical record and identifying the approximation of values in the domain of a function represented in the numerical record will be a strength for their students. They also identified some difficulties, for example, identifying the approximation that occurs in the domain when the function is represented in the graphical record, coordinating the approximation processes in the domain and in the range, understanding the limit as an approximation, and manipulating the algebraic expression of the function. With these results, it is concluded that the difficulties predicted by the teacher coincide with what has been reported in other research in which high school or higher-level students solve activities like those in this study, and it is inferred the experience and sensitivity of the teacher to predict key concepts in learning the limit of a function.