DISEÑO ECONÓMICO DE LOS GRÁFICOS DE CONTROL

RAÚL AMOR-PULIDO

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Universitario de Cartuja
C.P. 18071 Granada (Granada)

JUAN FRANCISCO MUÑOZ ROSAS

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Universitario de Cartuja
C.P. 18071 Granada (Granada)

ENCARNACIÓN ÁLVAREZ VERDEJO

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Universitario de Cartuja
C.P. 18071 Granada (Granada)

PABLO J. MOYA FERNÁNDEZ

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Campus Universitario de Cartuja
C.P. 18071 Granada (Granada)

e-mail Raúl Amor Pulido: ramor@ugr.es

Resumen

En las últimas décadas, el Control de Calidad mediante Gráficos de Control ha sido ampliamente estudiado mediante Técnicas Cuantitativas. Su uso en los procesos de fabricación ha ido en aumento, dado su principal objetivo de mejorar la calidad de los productos que salen al mercado. No obstante, uno de los aspectos que han recibido menor atención, pero que empieza a considerarse en los últimos años, es el relativo a los Gráficos de Control basados en criterios económicos. La idea de esta metodología es obtener determinados parámetros de los Gráficos de Control, pero minimizando el coste de dicho proceso. Para ello se tiene que tener en cuenta los costes del muestreo, de la posible producción de artículos no válidos, de la investigación y corrección de las disfunciones del proceso, de la posible parada del mismo, etc. En este trabajo se resumen las principales líneas de investigación que se han seguido, y algunas de las soluciones propuestas, las cuales se han podido validar desde el punto de vista práctico gracias a la mejora continua de los programas informáticos.

Palabras clave: Control de Calidad, Gráficos de Control, Técnicas Cuantitativas, plan económico.

Área Temática: Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.

Abstract

In recent decades, the Statistical Quality Control via Control Charts has been extensively studied by using Quantitative Techniques. The use of control charts for the manufacturing processes are increasing, since its main purpose is to improve the quality of products coming to market. However, the control charts based on economic criteria is a topic which has received less attention. The idea of this methodology is to obtain some parameters related to control chart but minimizing the manufacturing cost of the process. For this purpose, we should consider the costs of sampling, the possible generation of invalid articles, etc. In this paper, we summarize the main research lines about this topic and the proposed solutions, which are validated from a practical point of view, and using the improved software.

Key Words: Quality Control, Control Charts, Quantitative Techniques, Economic plan.

Thematic Area: Quantitative Methods for Economics and Business.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha existido un importante desarrollo del Control de Calidad en la fabricación de productos, dentro de la filosofía japonesa de la Calidad Total, para proporcionar al cliente no solo productos que satisfagan sus expectativas, sino también al precio más económico posible.

En este trabajo, nos vamos a centrar en su economía relacionada con la fabricación de los productos, que está muy relacionada con el Control de Calidad, puesto que en el control de la calidad de la producción podemos detectar falsas alarmas (error de tipo I) y no detectar artículos defectuosos (error de tipo II), lo cual genera costes en la producción.

A la hora de realizar el control de calidad de un proceso de fabricación a través de, por ejemplo, gráficos de control de la media, lo primero que hay que realizar es especificar el valor de tres parámetros fundamentales para el mismo:

- El tamaño muestral, *n.*
- La frecuencia de muestreo o tiempo transcurrido entre dos muestras consecutivas, *h*.
- Los límites de control, establecidos en $\pm k\sigma_{\bar{X}}$.

El tamaño muestral *n* consiste en el número de productos o artículos a inspeccionar, y los cuales se utilizarán para la obtención del gráfico de control de la media. Un gráfico de control consiste en la representación de un determinado estadístico y obtenido para muestras sucesivas, las cuales se seleccionan con la frecuencia h anteriormente comentada. En tales productos observados al azar se observa el valor de una característica de calidad *X*. En los gráficos de control de la media también se representan los llamados límites de control, separados a una distancia de $k\sigma_{\bar{X}}$, donde la constante suele fijarse en 3, y $\sigma_{\bar{X}}$ denota la desviación típica de la media muestral, es decir,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde σ denota la desviación típica de la característica de calidad. Por simplicidad, se ha considerado el ejemplo del gráfico de control de la media, además de ser el gráfico de control más conocido y utilizado en la práctica. Para más información sobre éste y otros gráficos de control relevantes puede consultarse Montgomery (2009).

Por su parte, el gráfico de control de la fracción defectuosa o de la proporción de artículos defectuosos es el más conocido en el caso de gráficos de control basados en atributos. El principal objetivo de este trabajo es realizar una revisión exhaustiva de los diseños económicos para gráficos de control, lo que supone un primer paso para realizar nuevas contribuciones para la realización de gráficos de control basados en proporciones y construidos a partir de criterios económicos, es decir, gráficos de control de la proporción de artículos defectuosos que pretenden reducir el coste de los estudios de control de calidad de las empresas.

El diseño del gráfico de control consiste en la elección de estos tres parámetros. Tradicionalmente, se han elegido basándose en criterios estadísticos (basados por ejemplo en los errores de tipo I y II), pero no en criterios económicos y, como se puede ver, éstos pueden tener bastante influencia en la producción del artículo:

- El coste de la toma de las muestras.
- El coste de tomar más muestras si se producen avisos.
- El coste de la investigación de un estado de fuera de control.
- El coste de la investigación y corrección de la causa que ha provocado la situación de fuera de control.
- El coste de la puesta en el mercado de artículos defectuosos.

Por tanto, el diseño de los gráficos de control se puede clasificar dentro del diseño estadístico y del diseño económico. El objetivo del diseño estadístico es minimizar la longitud media de racha (*ARL*) del proceso en situación de fuera de control cuando la *ARL* del proceso bajo control es fija. Por otro lado, el objetivo del diseño económico es minimizar el coste esperado por hora del proceso de control, considerando el tiempo que está bajo control, y los costes anteriormente mencionados.

Para el diseño económico de los gráficos de control, se consideran las siguientes hipótesis:

- Existe un único estado bajo control.
- El proceso puede tener varios estados fuera de control, siendo cada uno de ellos consecuencia de una causa distinta.
- Al empezar, el proceso está bajo control.
- Los pasos de un estado a otro se consideran instantáneas.
- Se considera que el paso de sistema bajo control a fuera de control debido a causas asignables sigue un proceso de Poisson de media λ (número de veces que aparecen las causas por unidad de tiempo).

- El proceso, una vez que ha pasado a estado fuera de control, solo puede volver al estado bajo control tras solucionar la causa asignable que lo ha producido.
- En cuanto se detecta una situación de fuera de control, se estudia la causa asignable que lo ha producido.
- La producción no se detiene durante el tiempo de investigación de la causa asignable que ha producido el fuera de control.

Podemos considerar los siguientes costes para el diseño económico de los gráficos de control:

- Realización del muestreo y contrastes.
- Investigación de un fuera de control y corrección de la causa asignable que lo provoca.
- La fabricación de artículos defectuosos.

Respecto del coste de realización del muestreo y contrastes, suele consistir en una cantidad fija a_1, que incluye los salarios de los trabajadores encargados, los materiales, etc., más una cantidad variable a_2, que corresponde con la toma de las muestras y la representación de los gráficos de control. Por tanto, el coste para una muestra de tamaño *n* será $a_1 + na_2$.

Los costes de investigación y posible corrección de los procesos que están fuera de control se han estudiado desde diversos puntos de vista. Existen autores que defienden que los costes de investigar falsas alarmas difieren de los costes de corrección de causas asignables, por lo que habría que considerar en el modelo diferentes coeficientes de coste. Además, el coste de reparación o corrección del proceso puede depender del tipo de causa asignable que lo ha provocado, por lo que si tuviéramos *s* estados de fuera de control distintos, necesitaríamos *s*+1 coeficientes de costes distintos. Otros autores consideran que no es necesaria tanta precisión, sino que se puede considerar un único coeficiente de coste que represente el coste medio de la investigación y corrección de una señal de fuera de control.

El coste relacionado con la producción de artículos defectuosos incluye la clasificación y retirada de los artículos defectuosos, así como los costes de reparación o sustitución asociados a la garantía, además de la publicidad negativa hacia la empresa. La mayor parte de los autores modelizan este coste mediante un coeficiente de coste individual promedio expresado por unidad de tiempo o por número de unidades del producto.

Los modelos económicos de control de calidad, se suelen formular usando una función de coste total por unidad de tiempo que expresa las relaciones entre el diseño de los parámetros del gráfico de control y las tres clases de costes vistos con anterioridad. El proceso productivo, su seguimiento y ajuste se considera como una serie de ciclos independientes a lo largo del tiempo. Todo ciclo comienza con el proceso de producción en un estado de bajo control y continúa hasta que se produce una señal de fuera de control, la cual estudiamos y corregimos, volviendo al estado bajo control, comenzando un nuevo ciclo.

Consideramos *E*(*T*) la longitud esperada de un ciclo y *E*(*C*) el coste total esperado a lo largo de un ciclo, de manera que el coste esperado por unidad de tiempo *E*(*A*), también denominada *LRAC*, es:

$$E(A) = LRAC = \frac{E(C)}{E(T)}$$

A esta ecuación se le aplican técnicas cuantitativas para obtener el diseño del gráfico de control con el menor coste posible.

Algunos autores han hecho alguna variación en la expresión anterior, sustituyendo *E*(*T*) por el número esperado de unidades producidas durante el ciclo (longitud esperada de un ciclo), calculando el coste medio de un ciclo, que está expresado en función del número de productos en lugar de la unidad de tiempo.

En el problema anterior hay que tener en cuenta que las variables aleatorias *C* (coste total del ciclo) y *T* (duración del ciclo) son dependientes y, por tanto, el valor esperado de su cociente no es igual al cociente de sus valores esperados; mientras que para el cálculo del *LRAC* se hace a partir del cociente de sus valores esperados. Esto se justifica debido a que la serie producción-control-ajuste del proceso que va acumulando sus costes se puede modelizar mediante un proceso estocástico denominado *Proceso de renovación con recompensa*, que tiene la propiedad de que su coste medio por unidad de tiempo es el cociente entre la recompensa o coste medio del ciclo y la duración media del mismo.

Duncan (1956) fue el primero que introdujo condiciones económicas la metodología de optimización económica en el gráfico de control de la media, utilizando el tamaño muestral *n*, la frecuencia de muestreo *h* y los límites de control para minimizar el coste del proceso. Los costes consisten en los propios del muestreo y los del contraste, entre los que están el aumento del coste cuando el proceso está fuera de control, el coste de una falsa alarma y los costes de investigación y reparación.

Taylor (1968) extendió este tipo de estudios con el diseño económico de los gráficos CUSUM. Por su parte, Torng, Montgomery y Cochran (1994) y Ho y Case (1994) desarrollaron de manera independiente los procedimientos para el diseño económico de los gráficos EWMA. Zhu y Park (2013) presentan un paquete de R que resuelve el diseño económico de estos tres tipos de gráficos de control.

2. PRELIMINARES

En la década de los 50 se empezó a trabajar en los gráficos de control teniendo en cuenta un cierto aspecto económico.

Uno de los primeros trabajos fue de Girshick y Rubin (1952), que consideran un proceso de fabricación en el que pretenden minimizar el coste medio por unidad de tiempo correspondiente al control de calidad del proceso considerando cuatro estados posibles: dos de funcionamiento (bajo control estadístico y fuera de control) y dos de reparación, decidiendo detener o no la producción a partir de probabilidades a posteriori de los estados del proceso. Este trabajo tuvo una gran importancia teórica, pero no práctica, ya que para su resolución se utilizaban ecuaciones diferenciales con una complicada solución. La importancia teórica fue debida a que fueron los primeros investigadores que propusieron el criterio del coste esperado por unidad de tiempo y mostraron que era apropiado para este modelo.

Este trabajo se ha desarrollado por otros autores:

- Savage (1962) introdujo una regla de parada en el proceso con la particularidad de que si la unidad inspeccionada es aceptable, el proceso de fabricación se mantiene, mientras que si es defectuosa el proceso se detiene hasta la corrección de sus anomalías. Savage calculó el intervalo de muestreo para el que se maximiza el beneficio medio por unidad de tiempo.
- Bather (1963) determina los límites óptimos de control a partir de los costes de operación y reparación, mediante una solución no cerrada que minimiza el *LRAC*.
- Ross (1971) estudia el problema considerando que el verdadero estado del proceso se conoce tan pronto como se observa una muestra.
- Taylor (1965) prueba que los procedimientos de control basados en tomar una muestra de tamaño constante en intervalos fijos de tiempo no son óptimos, sugiriendo que el tamaño muestral y la frecuencia de muestreo se deben determinar en cada momento a partir de la probabilidad a posteriori de que el proceso esté fuera de control. A pesar de ello, en la práctica se siguen utilizando muestras de tamaño constante en intervalos fijos debido a su simplicidad.

Todos estos trabajos tienen un interés fundamentalmente teórico, pues las reglas de decisión no son sencillas de aplicar en la práctica.

Es el trabajo de Duncan (1956) el más importante, ya que sus resultados sí se van a poder utilizar en la práctica.

3. MODELO ECONÓMICO DEL GRÁFICO DE LA MEDIA. EL MODELO DE DUNCAN

Duncan (1956) propone un modelo económico para el diseño económico del gráfico de control de la media. Este trabajo fue el primero que estudia el modelo de gráfico de control de Shewhart desde el punto de vista completamente económico, y el primero también que incorpora la metodología de la selección de parámetros del gráfico de control. Por todo ello, se puede decir que ha sido la base para muchos trabajos posteriores.

A partir del comentado trabajo de Girshick y Rubin (1952), Duncan desarrolla un criterio para maximizar el beneficio neto por unidad de tiempo de fabricación. Considera que el proceso se caracteriza por un estado de control μ_0 y la existencia de una única causa asignable de magnitud δ, que ocurre de forma aleatoria y que desplaza la media de μ_0 a los extremos $\mu_0+\delta$ ó $\mu_0-\delta$. El proceso se controla mediante un gráfico de control de la media con línea central en μ_0 y los límites de control $\mu_0 \pm k\sigma_{\bar{X}} = \mu_0 \pm k\, {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}$, anteriormente comentados. El proceso de muestreo consiste en tomar una muestra de tamaño *n* cada *h* horas. Cuando se produce una observación fuera de los límites de control se estudia la causa que la produce y el proceso sigue trabajando, de manera que el coste del ajuste y reparación no se tienen en cuenta como costes del proceso. Los parámetros μ_0, δ y σ son conocidos y el objetivo será estimar *n*, *h* y *k*.

La causa asignable se supone que sigue un proceso de Poisson con una ocurrencia de λ veces por hora, por lo que si el proceso se encuentra bajo control estadístico, el intervalo de tiempo que el proceso se mantiene bajo control es una variable con distribución exponencial de media $1/\lambda$ horas.

Si ocurre una causa asignable entre las muestras *j* y (*j*+1)-ésima, el tiempo esperado desde la observación *j*-ésima hasta que se manifiesta es:

$$\tau = E[t|jh < t < (j+1)h] = \frac{\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t}\lambda(t-jh)dt}{\int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t}\lambda\, dt} = \frac{1-(1+\lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1-e^{-\lambda h})}$$

La probabilidad de que ocurra una falsa alarma (error tipo I) será:

$$\alpha = [Z < -k] + P[Z > k] = 2 \cdot P[Z > k],$$

donde *Z* representa la distribución Normal estándar.

La probabilidad de detectar la causa asignable en la muestra inmediatamente posterior a su aparición viene dada por la potencia del contraste:

$$1-\beta = P\left[Z < -k - \delta\sqrt{n}\right] + P\left[Z > k + \delta\sqrt{n}\right]$$

Duncan define un ciclo de producción como el intervalo de tiempo entre el comienzo de la producción (se supone que comienza en un estado bajo control) hasta que se detecta y soluciona la siguiente causa asignable. Este ciclo tiene cuatro fases:

1. El proceso está bajo control estadístico.
2. El proceso está fuera de control.
3. El tiempo que transcurre hasta que se toma una muestra y se detecta que el proceso está fuera de control.
4. El tiempo que transcurre hasta detectar la causa asignable que ha producido el fuera de control.

A continuación se presenta el valor de la longitud esperada de un ciclo, para la cual se tiene que tener en cuenta lo siguiente:

- La longitud esperada de un periodo bajo control es $\frac{1}{\lambda}$.
- El número de muestras necesarias para detectar que el proceso está fuera de control está relacionado con la probabilidad de su detección, y viene dada por $\frac{1}{1-\beta}$.
- La longitud esperada del periodo fuera de control es $\frac{h}{1-\beta} - \tau$.

- El tiempo necesario para tomar una muestra e interpretar los resultados es proporcional al tamaño de la muestra, es decir, gn.
- El tiempo necesario para detectar la causa asignable es una constante D.

Por tanto, la longitud esperada de un ciclo viene dada por la expresión

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D$$

A continuación se describen los distintos costes y beneficios que intervienen en el proceso:

- Sean V_0 y V_1 el beneficio neto por hora si el proceso está bajo control o fuera de control, respectivamente.
- Se supone que el precio de tomar una muestra de tamaño *n* es un coste fijo $a_1$más otro proporcional al tamaño de la muestra: $a_1 + a_2 n$.
- El número esperado de muestras extraídas en un ciclo es la longitud esperada del ciclo dividida entre el intervalo de tiempo transcurrido entre dos muestras consecutivas: $\frac{E(T)}{h}$.
- El coste de encontrar la causa del fuera de control es a_3 y el coste de investigar una falsa alarma es $a_3{}'$.
- El número esperado de falsas alarmas durante un ciclo es α veces el número esperado de muestras extraídas antes de que se produzca el aviso, es decir,

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} j \cdot P[\text{fuera de control entre } jh \text{ y } (j+1)h] =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} j \int_{jh}^{(j+1)h} e^{-\lambda t} \lambda \, dt = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} j\left(e^{-\lambda hj} - e^{-\lambda h(j+1)}\right) =$$

$$= \alpha(1 - e^{-\lambda h}) \sum_{i=0}^{\infty} j e^{-\lambda hj} = \alpha \frac{(1 - e^{-\lambda h})e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-\lambda h})^2} =$$

$$= \alpha \frac{e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-\lambda h})} = \frac{\alpha}{e^{\lambda h} - 1}$$

Por tanto, el beneficio neto esperado en un ciclo es:

$$E(C) = V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D\right) - a_3 - a_3{}' \frac{\alpha}{e^{\lambda h} - 1} - (a_1 + a_2 n) \frac{E(T)}{h}$$

Finalmente, el beneficio esperado por unidad de tiempo (*LRAC*) será:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D\right) - a_3 - a_3{}' \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1} - (a_1 + a_2 n)\frac{E(T)}{h}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} =$$

$$= \frac{V_0 \frac{1}{\lambda} + V_1 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D\right) - a_3 - a_3{}' \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h}$$

Si $a_4 = V_0 - V_1$ es el coste de penalización horario asociado con la producción en estado del proceso de fuera de control, tenemos:

$$E(A) = V_0 - \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} - \frac{a_4\left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D\right) + a_3 + a_3{}' \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D} = V_0 - E(L),$$

donde

$$E(L) = \frac{(a_1 + a_2 n)}{h} + \frac{a_4\left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D\right) + a_3 + a_3{}' \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D}$$

y *E*(*L*) representa la pérdida esperada por hora del proceso, siendo una función de los parámetros *n*, *h* y *k* del gráfico de control.

Por tanto, maximizar el beneficio esperado por unidad de tiempo *E*(*A*) es equivalente a minimizar la pérdida esperada por hora del proceso *E*(*L*).

Duncan diseña el gráfico de control de la media basándose en la solución numérica aproximada de un sistema de derivadas parciales de primer orden respecto de los parámetros del gráfico de control, y mediante un proceso iterativo se calculan los valores óptimos de *n* y *k*, a partir de los que se obtiene el valor óptimo de *h*.

Diversos autores han realizado distintas aportaciones al modelo inicial de Duncan:

- Goel, Jain y Wu (1968) mejoran el procedimiento de Duncan cuando a_4 o *g* toman valores grandes, o cuando *δ* es pequeña. Además, realizan un estudio numérico de las superficies de coste que permite realizar el análisis de sensibilidad del modelo.
- Chiu y Wetherill (1974) simplifican el modelo de Duncan restringiendo la potencia del test a 1-*β* = 0.9 ó 0.95.
- Montgomery (1982) presenta un programa en FORTRAM que implementa la función de coste de manera iterativa.
- Zhu y Park (2013) presentan un paquete en R que también implementa el modelo de Duncan.

4. MODIFICACIONES AL MODELO DE DUNCAN

Hay dos hipótesis consideradas en el modelo de Duncan que, en muchos casos, no son realistas. Estas hipótesis son que el proceso puede continuar mientras se busca la causa del fuera de control y que no se considera el coste de eliminar la causa del fuera de control.

El proceso se detiene cuando se detecta un fuera control:

1. Si es una falsa alarma, se emplean D_0 horas con un coste $a_3{}'$.
2. Si realmente el proceso está fuera de control, se emplean D_1 horas y el coste es $a_3 + \Delta$, donde a_3 es el coste de descubrir la causa del problema y Δ es el coste de la eliminación del mismo.

Entonces, las fases del proceso son:

1. El proceso está bajo control estadístico con longitud esperada $\frac{1}{\lambda}$.
2. El proceso está fuera de control, con longitud esperada $\frac{h}{1-\beta}-\tau$.
3. Si se ha producido una falsa alarma, la duración esperada mientras ésta se detecta será viene dada por
$$\alpha D_0 \frac{e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}}.$$
4. Si el proceso está fuera de control, el tiempo medio necesario para su detección y solución es D_1.

Por tanto, la longitud esperada de un ciclo viene dada por la expresión

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau+\alpha D_0 \frac{e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}}+D_1$$

El beneficio neto esperado en un ciclo es:

$$E(C)=V_0 \frac{1}{\lambda}+V_1\left(\frac{h}{1-\beta}-\tau\right)-a_3{'} \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}-(a_3+\Delta)-(a_1+a_2 n) \frac{\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau}{h}$$

El beneficio medio por unidad de tiempo será:

$$E(A)=LRAC=\frac{E(C)}{E(T)}=\frac{V_0 \frac{1}{\lambda}+V_1\left(\frac{h}{1-\beta}-\tau\right)-a_3{'} \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}-(a_3+\Delta)-(a_1+a_2 n) \frac{\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau}{h}}{\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau+\alpha D_0 \frac{e^{-\lambda h}}{1-e^{-\lambda h}}+D_1}$$

Si $a_4=V_0-V_1$ es el coste de penalización horario asociado con la producción en estado del proceso de fuera de control, tenemos:

$$E(A)=V_0-E(L),$$

donde

$$E(L)=\frac{(a_1+a_2 n) \frac{\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau}{h}+(a_3+\Delta)+(V_0 D_0+a_3{'}) \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}+V_0 D_0+a_4\left(\frac{h}{1-\beta}-\tau\right)}{\frac{1}{\lambda}+\frac{h}{1-\beta}-\tau+\alpha D_0 \frac{\alpha}{e^{\lambda h}-1}+D_1}$$

Uno de los problemas del modelo es la hipótesis de que la duración media del intervalo de tiempo que el proceso está bajo control sigue una distribución exponencial, lo cual no es siempre cierto.

Gibra (1971) considera que el tiempo ocurrido entre la extracción de la muestra, y la eliminación de la causa que provoca el fuera de control sigue una distribución Erlang. Además, define el *peor nivel de calidad del ciclo* (*PNCC*) como una cota superior del número medio de unidades defectuosas fabricadas durante un periodo fuera de control. Minimiza el coste medio con la restricción de que el *PNCC* tenga un valor fijado. Además, considera otro modelo en el que la media tiene una tendencia lineal que representa el desgaste, y determina las reglas para detener el proceso para reajustarlo y así evitar el fuera de control.

5. MODELO DE DUNCAN DE MÚLTIPLES CAUSAS ASIGNABLES

Duncan (1971) considera el caso con varias causas que pueden provocar el fuera de control, que es más realista. En concreto, considera s posibles causas, con tiempos de aparición que son variables aleatorias independientes y exponenciales. Considera un único estado bajo control $\mu = \mu_0$ y que el proceso no se detiene mientras se investiga la causa del fuera de control. Además, si se ha producido un fuera de control, éste permanece hasta que se detecta y repara la causa que lo produce y, mientras, no se presenta otra causa que genere otro fuera de control. En el mismo trabajo, Duncan elimina esta última condición, es decir, se permite una segunda causa y su efecto conjunto con la primera, desplaza la magnitud constante. La inclusión de esta hipótesis casi no modifica el coste mínimo del modelo inicial.

Knappenberger y Grandage (1969) propusieron un modelo económico para el gráfico X-media con s posibles causas, haciendo mínimo la esperanza del coste por unidad de producto, sin limitar la cantidad de causas que se pueden presentar.

Tanto Duncan como Knappenberger y Grandage llegan a la conclusión de que como estos modelos son mucho más complejos, si se considera un modelo con una sola causa que resuma bien la principal, se obtienen buenos resultados comparando con el modelo multicausal.

6. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se pueden obtener del modelo de Duncan son:

1. El tamaño muestral óptimo n depende principalmente de la magnitud del desplazamiento δ sufrido por la media en unidades de la desviación típica. Si el desplazamiento es grande, $\delta \geq 2$, tendremos tamaños muestrales pequeños, $2 \leq n \leq 10$; desplazamientos medios $1 \leq \delta \leq 2$ producen tamaños mayores, $10 \leq n \leq 20$; y desplazamientos muy pequeños $\delta \leq 0.5$ necesitan tamaños muestrales grandes, $n \geq 40$.
2. El coste $a_4$de penalización horario asociado con la producción en estado del proceso de fuera de control influye en el intervalo de tiempo h entre dos muestras consecutivas, de forma que un aumento de dicho coste implica una disminución del intervalo.
3. Los costes de encontrar la causa del fuera de control a_3 y de investigar una falsa alarma a_3' afectan bastante a la amplitud de los límites de control y, en menor medida, al tamaño muestral. Un aumento de dichos costes genera un aumento de los límites de control y del tamaño muestral, por lo que disminuye el nivel de significación α, con lo que disminuye la probabilidad de tener una falsa alarma.

4. La variación de los costes de muestreo influye en los tres parámetros del modelo. Al aumentar el coste fijo a_1, aumentará el intervalo entre dos muestras consecutivas *h*. Si el valor de cada muestreo unitario $a_2$es alto, los tamaños de las muestras *n* serán pequeños, el intervalo de tiempo *h* también será pequeño y la amplitud de los límites de control *k* también será pequeña.
5. Si se produce un cambio en la frecuencia de ocurrencia de la causa asignable de λ veces por hora, se modificará principalmente el valor de *h*, de manera que si λ disminuye, el valor de *h* deberá disminuir para tener más frecuencia en las muestras.
6. El diseño económico óptimo es bastante robusto frente a los errores de estimación de los coeficientes, por lo que es más conveniente sobreestimar los parámetros obtenidos. Pero es muy sensible a errores de estimación del estado de control μ_0, el desplazamiento δ y la desviación típica del proceso σ.
7. Los resultados obtenidos desaconsejan utilizar gráficos de control de diseño arbitrario, pues pueden producirse importantes penalizaciones económicas frente al modelo óptimo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está subvencionado por: el proyecto P11-SEJ-7090 de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía; el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) y; el Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada.

REFERENCIAS

BATHER, JA (1963): Control Charts and the Minimization of Costs. *Journal of the Royal Statistical Society,* (B), 25(1), 49–80.

CHIU, WK (1974): The Economic Design of Cusum Charts for Controlling Normal Means. *Journal of the Royal Statistical Society C*, 23(3), 420-433.

CHIU, WK; WETHERILL, GB(1974): A Simplified Scheme for the Economic Design of X-Charts, *Journal of Quality Technology*, 6(2), 63–69.

CHIU,WK; WETHERILL, GB (1975): Quality Control Practices. *International Journal of Production Research,* 13(2), 175–182.

CHUNG, K (1990): A Simplied Procedure for the Economic Design of X-Chart. *International Journal of Production Research*, 28(7), 1239-1246.

DUNCAN, AJ (1956): The Economic Design of Charts Used to Maintain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association*, 51, 228-242.

DUNCAN, AJ (1971): The Economic Design of X-Charts when there is a Multiplicity of Assignable Causes. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 107-121.

GIBRA, IN (1971): Economically Optimal Determination of the Parameters of $\bar{X}$-Control Chart. *Management Science*, 17 (9), 635-646.

GIRSHICK, MA; RUBIN, H (1952): A Bayesian Approach to a Quality Control Model. *Annals of Mathematical Statistics,* 23(1), 114–125.

GOEL AL; JAIN, SC; WU, SM (1968): An Algorithm for the Determination of the Economic Design of-Charts Based on Duncan's Model. *Journal of the American Statistical* 63, 304-320

HO, C; CASE, KE (1994): The Economically-Based EWMA Control Chart. *International Journal of Production Research*, 32, 2179-2186.

KNOTH, S (2012): Statistical Process Control. R package version 0.4.2, URL http://CRAN.R-project.org/package=spc.

LORENZEN, TJ; VANCE, LC (1986):The Economic Design of Control Charts: A Unied Approach. *Technometrics*, 28(1), 3-10.

MONTGOMERY, DC (2009): Statistical Quality Control. A Modern Introduction. *John Wiley & Sons*.

MONTGOMERY, DC (1982): Economic Design of an X Control Chart. *Journal of Quality Technology,* 14(1), 40–43.

NIKOLAIDIS, Y; RIGAS, G; TAGARAS, G (2007): Using Economically Designed Shewhart and Adaptive X-Charts for Monitoring the Quality of Tiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2), 233-245.

PARK, C (2012): Economic Design of X-Charts When Signals May Be Misclassied and the Bounded Reset Chart. *IIE Transactions*, 45(4), 436-448.

R CORE TEAM (2012): R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

ROSS, SM (1971): Quality Control Under Markovian Deterioration. *Management Science,* 17(9),587–596.

SANIGA, EM (1989): Economic Statistical Control-Chart Designs With an Application to X

and R Charts. *Technometrics*, 31(3), 313-320.

SAVAGE, IR (1962): Surveillance Problems. *Naval Research Logistics Quarterly,* 9(384),187–209.

TAYLOR, HM (1968): The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts. *Technometrics*, 10, 479-448.

TAYLOR, HM (1965): Markovian Sequential Replacement Processes. *Annals of Mathematical Statistics,* 36(1), 13–21.

TAYLOR, HM (1967): Statistical Control of a Gaussian Process. *Technometrics,* 9(1),29–41.

TORNG, JCC; MONTGOMERY, DC: COCHRAN, JK (1994): Economic Design of the EWMA Control Chart. *Economic Quality Control*, 9, 3-23

ZHU, W; PARK, C (2013): An R Package for the Economic Design of the Control Chart. *Journal of Statistical Software* 52(9), 1-24.