

UNIVERSIDAD DE GRANADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA



Tesis doctoral

**SENTIDO ESPACIAL EN LAS EVALUACIONES
ESCRITAS DE URUGUAY**

María Isabel Elvas Fernández

GRANADA, 2024

UNIVERSIDAD DE GRANADA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

**SENTIDO ESPACIAL EN LAS EVALUACIONES ESCRITAS DE
URUGUAY**

Tesis doctoral presentada por:
María Isabel Elvas Fernández

Dirigida por:
Dr. Rafael Ramírez Uclés

GRANADA, 2024

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: María Isabel Elvas Fernández
ISBN: 978-84-1195-748-9
URI: <https://hdl.handle.net/10481/103194>

Este trabajo forma parte de una de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Además, obtiene financiación de la ANEP. CES. Exp. 2023-25-3-008641. Resol. N°1310.

AGRADECIMIENTOS

A Gabriela Bernasconi, por encender la llama, por despertar en mi la idea, por ser la primera en creer que era una posibilidad en mi carrera profesional incursionar en el doctorado, después de acompañarme en el trabajo de fin del máster en Gestión Educativa.

A Pablo Flores, que dio respuesta a mis primeras inquietudes, con su entusiasmo y gusto por la docencia me ayudó a descubrir en la etapa en la que estoy como docente, y acompañó con cercanía y con la responsabilidad que lo caracteriza el proceso del trabajo final de máster en Didáctica de la Matemática.

A Rafael Ramírez, que aceptó acompañarme en la elaboración de este proyecto, por su generosidad y compromiso, por enseñarme acerca de la investigación en Didáctica de la Matemática, por animarme en todo momento.

A los dos Colegios, donde trabajé y trabajo que hicieron posible la realización del proyecto. Uno porque abrió sus puertas para que pudiera hacer la investigación con sus estudiantes y facilitó los recursos requeridos. El otro porque con generosidad me posibilitó tiempos en momentos apremiantes.

A tres personas, Isabel Ramírez, Fabiana Pieri y Silvio Alfonso, que con sus aportes enriquecieron el proceso del proyecto, desde el análisis de datos, a las traducciones para los artículos o a la diagramación de alguna de las figuras que contiene.

A mis Amigas, las de la infancia y las que la vida me fue regalando, por su apoyo constante, por creer y tirar para adelante, por escuchar y estar cerca.

A mi familia y en especial dedico este trabajo a **mis padres**.

“Mientras enseño continúo buscando, indagando. Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educó y me educó. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad”.

Paulo Freire, Pedagogo latinoamericano

RESUMEN

En este trabajo se analizan las componentes del sentido espacial que se manifiestan en la resolución de tareas de evaluación propuestas por PISA, en el contenido espacio y forma. Para ello, se describen las características de las tareas de evaluación tanto de PISA como de aula relacionadas con contenido geométrico; se determinan las expectativas de aprendizaje en cuanto a competencias matemáticas, procesos cognitivos y componentes del sentido espacial. Además, se identifican las componentes del sentido espacial en las respuestas a las tareas de evaluación de PISA, de 122 estudiantes de 15-16 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo; se categorizan los errores que manifiestan estos estudiantes cuando las resuelven; y se relaciona el rendimiento alcanzado en las tareas de aula con la manifestación del sentido espacial en las tareas de PISA.

La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo. Su diseño corresponde a la aplicación de una metodología propia de la didáctica de la matemática, el análisis didáctico. El análisis aborda las características de las tareas, las competencias matemáticas, los procesos cognitivos y las componentes del sentido espacial como expectativas de aprendizaje. Además, a partir del análisis se obtienen relaciones entre el rendimiento y las habilidades de visualización y el manejo de conceptos geométricos en algunas de las tareas.

Los resultados muestran semejanzas en las características de las tareas: ante la complejidad cognitiva y en la tipología de tareas; las diferencias vienen dadas en el contexto de las tareas y en el formato de las respuestas. Otras semejanzas se manifiestan en las competencias matemáticas de comunicar y representar, en el proceso cognitivo de comprender, en el manejo de conceptos geométricos y en la habilidad de percepción de las relaciones espaciales.

De las conclusiones obtenidas se destaca que el alto rendimiento en las tareas de PISA garantiza alto resultado en las tareas de aula, pero no al revés, el buen rendimiento en las tareas de aula no implica un alto resultado en las tareas de PISA; y el bajo rendimiento en el aula conlleva bajo resultado en PISA. Además, muestran que los errores asociados al sentido espacial más frecuentes responden a la incorrecta interpretación de enunciados y de gráficos y se vinculan más a un bajo desarrollo de las habilidades de visualización que al conocimiento de los conceptos geométricos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	20
1.1. Introducción.....	20
1.1.1. Producción científica vinculada a la investigación.....	25
1.1.2. Estructura del informe de investigación.....	26
1.2. Planteamiento del problema.....	28
1.2.1. Justificación de la investigación.....	28
1.2.2. Problema de investigación.....	32
1.2.3. Objetivos de la investigación.....	33
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES.....	34
2.1. Características de las tareas.....	34
2.2. Expectativas de aprendizaje.....	35
2.3. Componentes del sentido espacial en tareas.....	36
2.4. Los errores en la resolución de tareas.....	39
CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO.....	43
3.1. Sentido espacial.....	44
3.1.1. Habilidades espaciales vinculadas al sentido espacial.....	44
3.1.2. Términos y conceptos vinculados con el sentido espacial.....	49
3.1.2.1. Habilidades espaciales.....	50
3.1.2.2. Pensamiento y razonamiento espacial.....	52
3.1.2.3. Pensamiento y razonamiento geométrico.....	54
3.1.3. Origen, concepto y componentes del sentido espacial.....	56
3.1.4. Concepto, componentes del sentido espacial y habilidades de visualización consideradas en este estudio.....	58
3.1.5. Errores y su clasificación.....	62
3.2. Características de las tareas de evaluación.....	64
3.3. Expectativas de aprendizaje.....	69
3.3.1. Expectativas de aprendizaje y sus concepciones.....	69
3.3.2. Expectativas de aprendizaje y competencias educativas.....	71
3.3.3. Expectativas de aprendizaje y el sentido espacial.....	73
3.3.4. Rendimiento de los estudiantes.....	74

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	76
4.1. Diseño de la investigación	76
4.2. Fase 1. Conceptualización del sentido espacial	78
4.3. Fase 2. Características de las tareas de evaluación	79
4.3.1. Selección y recolección de las tareas	79
4.3.1.1 Tareas de evaluación de PISA	80
4.3.1.2 Tareas de evaluación de aula	80
4.3.2. La recolección de datos	81
4.3.3. Determinación de las categorías de análisis	82
4.3.4. Análisis de las características de las tareas de evaluación	82
4.4. Fase 3. Expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación	84
4.4.1. Determinación de las categorías de análisis	84
4.4.2. Análisis de las expectativas de aprendizaje.....	86
4.4.2.1. Análisis de las competencias matemáticas	86
4.4.2.2. Análisis de los procesos cognitivos	88
4.4.2.3. Análisis de las componentes del sentido espacial	89
4.4.2.4. Triangulación de datos	92
4.5. Fase 4. Manifestaciones del sentido espacial.....	92
4.5.1. La recolección de datos	92
4.5.1.1. Recolección de la resolución de tareas de evaluación de PISA	93
4.5.1.2. Recolección de resultados en tareas de evaluación de aula.....	93
4.5.2. Sujetos de la investigación	93
4.5.3. Clasificación de respuestas de las tareas de evaluación de PISA	94
4.5.4. Análisis del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA	95
4.5.5. Los errores en las tareas de evaluación de PISA.....	100
4.5.5.1. Determinación de las categorías de análisis	100
4.5.5.2. Categorías de análisis	101
4.5.6. Análisis del rendimiento de los estudiantes en las tareas de evaluación.....	102
CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	104
5.1. Características de las tareas de evaluación	105
5.1.1. Contexto	106
5.1.2. Tipología del enunciado	107
5.1.3. Complejidad cognitiva	107
5.1.4. Formato de la respuesta.....	108

5.2. Expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación	109
5.2.1. Competencias educativas	109
5.2.1.1. Competencias matemáticas	109
5.2.1.2. Procesos cognitivos	111
5.2.2. Componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación	113
5.2.3. Rendimiento de los estudiantes en las tareas de evaluación	116
5.3. Componentes del sentido espacial	117
5.3.1. Resultados cualitativos	118
5.3.1.1. Grupo de estudiantes con bajo rendimiento en la prueba de aula	119
5.3.1.2. Grupo de estudiantes con alto rendimiento en la prueba de aula	126
5.3.2. Relación entre variables	131
5.3.3. Resultados cuantitativos	134
5.3.3.1. El rendimiento relacionado con las otras variables del sentido espacial	135
5.3.3.2. Análisis de regresión del rendimiento	142
5.3.4. Errores en las tareas de evaluación de PISA	143
5.3.4.1. Errores en la manifestación del sentido espacial	144
5.3.4.2. Errores no específicos del sentido espacial	147
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES	150
6.1. Las características de las tareas de evaluación	150
6.2. Las expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación	151
6.2.1. Competencias educativas	152
6.2.2. Las componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación	152
6.3. Manifestación del sentido espacial	153
6.3.1 Los errores en las tareas de evaluación de PISA.....	156
6.4. Limitaciones de la investigación.....	158
6.4. Aportaciones del estudio.....	158
6.5. Líneas futuras.....	161
REFERENCIAS	163
ANEXO 1. TAREAS DE EVALUACIÓN SELECCIONADAS	1
Tareas de evaluación de PISA	1
Tareas de evaluación de aula	14
ANEXO 2. RESOLUCIÓN DE LAS TAREAS DE EVALUACIÓN SELECCIONADAS	16
Tareas de evaluación de PISA	16
Tareas de evaluación de aula	20

ANEXO 3. CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS	24
Tareas de evaluación de PISA	24
Tareas de evaluación de aula	30
ANEXO 4. TABLAS EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE POR TAREA.....	34
Tareas de evaluación de PISA	34
Tareas de evaluación de aula	46
ANEXO 5. TABLAS DEL SENTIDO ESPACIAL POR TAREA	52
Tareas de evaluación de PISA	52
Tareas de evaluación de aula	62
ANEXO 6. PROTOCOLO DE APLICACIÓN DE LAS TAREAS DE PISA	67
ANEXO 7. RESULTADOS EN LAS TAREAS DE EVALUACIÓN	68
ANEXO 8. ANÁLISIS DEL SENTIDO ESPACIAL EN TAREAS DE PISA	72
Tarea Heladería 1	72
Suma total de manifestación del manejo de conceptos geométricos por tarea	77
Suma total de manifestación de habilidades de visualización por tarea	78
Suma total de manifestación del sentido espacial por tarea.....	79
Suma total de manifestación del sentido espacial por tarea y estudiante	80
ANEXO 9. ERRORES EN TAREAS DE PISA	81
1. Descripción de los errores por estudiante en cada tarea	81
2. Agrupación y división de los errores en las tareas.....	117
3. Generalización de los errores	122
4. Frecuencia de los errores en cada tarea.....	126
ANEXO 10. ANÁLISIS CUANTITATIVO.....	127
ANEXO 11. SÍNTESIS DE LAS COMPONENTES DEL SENTIDO ESPACIAL.....	143
Tabla síntesis de las componentes del sentido espacial agrupadas.....	148
Tabla de las sumas de las componentes del sentido espacial para análisis SPSS.....	154
Tablas de correlaciones.....	158

Índice de Tablas

Tabla 1. Concepto y componentes de la habilidad espacial	50
Tabla 2. Conceptos de pensamiento espacial	53
Tabla 3. Razonamiento espacial.....	54
Tabla 4. Aspectos del pensamiento geométrico	55
Tabla 5. Concepto de sentido espacial	57
Tabla 6. Tipología de errores	63
Tabla 7. Contextos de las tareas de evaluación.....	67
Tabla 8. Competencias educativas	72
Tabla 9. Referencias de tareas seleccionadas.....	81
Tabla 10. Características de las tareas de evaluación.....	82
Tabla 11. Características en la tarea N1	83
Tabla 12. Características en la tarea A4.....	83
Tabla 13. Competencias matemáticas	84
Tabla 14. Procesos cognitivos.....	85
Tabla 15. Categorías y subcategorías del sentido espacial.....	86
Tabla 16. Competencias matemáticas en la tarea N1	87
Tabla 17. Competencias matemáticas en la tarea A4.....	87
Tabla 18. Procesos cognitivos en la tarea N1.....	88
Tabla 19. Procesos cognitivos en la tarea A4.....	88
Tabla 20. Componentes del sentido espacial en pregunta H1	90
Tabla 21. Componentes del sentido espacial en A2.....	91
Tabla 22. Grupos de estudiantes según el rendimiento en las pruebas de geometría.....	94
Tabla 23. Clasificación de respuestas en tareas de PISA	94
Tabla 24. Suma del manejo de conceptos geométricos en tareas de PISA	97
Tabla 25. Suma de las habilidades de visualización en tareas de PISA	97
Tabla 26. Sumas totales de C y H por cada tarea de evaluación de PISA.....	98
Tabla 27. Suma del sentido espacial en tareas de PISA.....	98
Tabla 28. Intervalos de puntuación del sentido espacial y sus componentes por tarea.....	99
Tabla 29. Intervalos de puntuación del sentido espacial y sus componentes	99
Tabla 30. Categorización de errores en tarea N1	100

Tabla 31. Generalización de errores en tarea N1	101
Tabla 32. Errores en el sentido espacial y en matemáticas en general en tareas de PISA	101
Tabla 33. Grupos de estudiantes según las respuestas correctas en las tareas de PISA	103
Tabla 34. Características de las tareas de evaluación de PISA y de aula	105
Tabla 35. Competencias educativas en tareas de evaluación de PISA y de aula	109
Tabla 36. Componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA y de aula ...	113
Tabla 37. Sentido espacial por grupo de estudiantes.....	118
Tabla 38. Estudiantes del grupo bajo	119
Tabla 39. Resultados del grupo bajo y nivel bajo del sentido espacial	120
Tabla 40. Resultados del grupo bajo y nivel alto del sentido espacial	123
Tabla 41. Estudiantes del grupo alto	127
Tabla 42. Resultados del grupo alto y nivel bajo del sentido espacial	127
Tabla 43. Correlaciones significativas entre G2 y sentido espacial en conjunto	133
Tabla 44. Correlaciones significativas entre N1 y sentido espacial en conjunto	134
Tabla 45. Correlaciones significativas entre nota y manejo de conceptos geométricos.....	135
Tabla 46. Manejo de conceptos geométricos en común.....	135
Tabla 47. Correlaciones significativas entre nota y habilidades de visualización.....	136
Tabla 48. Habilidades de visualización en común en cinco preguntas	136
Tabla 49. Clasificación de respuestas y frecuencia de errores en tareas de PISA.....	143

Índice de Figuras

Figura 1. Fases de la investigación.....	26
Figura 2. Proceso entre habilidad y habilidades espaciales.....	48
Figura 3. Conexión entre la diversidad de terminología y conceptos.	55
Figura 4. Conexión entre las componentes del sentido espacial	60
Figura 5. Plantilla de las sumas parciales de propiedades de las formas en la tarea H1	96
Figura 6. Plantilla de las sumas parciales de la percepción de la posición en el espacio en H1 .	96
Figura 7. Resolución de la tarea AP por E56	121
Figura 8. Resolución de la tarea H1 por E99	121
Figura 9. Resolución de la tarea H por E23	124
Figura 10. Resolución de la tarea PE por E2.....	125
Figura 11. Resolución de la tarea G2 por E111	125
Figura 12. Resolución de la tarea H por E60	129
Figura 13. Resolución de la tarea H por E43	130
Figura 14. Resolución de la tarea H por E63	130
Figura 15. Resolución de la tarea AP por E33	142
Figura 16. Resolución de la tarea N1 por E57	145
Figura 17. Resolución de la tarea H1 por E20	145
Figura 18. Resolución de la tarea G2 por E50	147
Figura 19. Resolución de la tarea H2 por E64	148
Figura 20. Resolución de la tarea N2 por E25	149
Figura 21. Resolución de la tarea N2 por E52	149

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Introducción

Este documento responde al trabajo final exigido como requisito en el Doctorado en Ciencias de la Educación en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Granada, de los cursos 2021/2024. Comprende una investigación educativa sobre las pruebas propuestas para evaluar el aprendizaje geométrico, el sentido espacial en los estudiantes* de 15-16 años que cursan el primer año de bachillerato uruguayo, antes de iniciada la reforma educativa por la que transita actualmente el país.

Los intereses que dan origen a la investigación son principalmente dos, los mismos que motivaron un estudio piloto realizado como trabajo de fin de máster en Didáctica de la Matemática: los provenientes de la actuación docente y los derivados de los bajos resultados obtenidos por Uruguay en la evaluación de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) /PISA (Programme for International Student Assessment).

El ejercicio de la profesión docente en distintos cursos de secundaria, en básica al inicio y en los últimos años en bachillerato, en instituciones públicas y privadas, han permitido constatar la diversidad de criterios en los profesores al momento de medir los aprendizajes de los estudiantes a través de las pruebas escritas.

En relación con los resultados en PISA, el estudiante promedio uruguayo alcanza el nivel 1 de desempeño, de los seis niveles de puntajes que se definen en orden creciente, por tanto, es capaz de realizar funciones básicas como responder a preguntas bien definidas que involucran contextos familiares donde la información está toda presente y cumplir con acciones que resultan obvias en respuesta a los estímulos dados (Administración Nacional de Educación Pública [ANEP], 2022).

* En este informe se utiliza el masculino para de un modo genérico referirnos a las profesoras y los profesores, las y los docentes, las y los estudiantes, las y los investigadores, y dar así fluidez a la lectura.

Se supone, además, que los docentes no se sienten cómodos con las mediciones de PISA, las resonancias y reacciones en el profesorado ha sido diferente ante la publicación de los resultados después del 2003, año en que Uruguay comienza a participar de un estudio internacional de aprendizajes de los estudiantes, donde el dominio fue la cultura matemática (ANEP, 2004).

Numerosas investigaciones coinciden en que varias reformas del currículo en matemáticas tienen su origen en los resultados de los estudios internacionales, enfocados en los logros de los estudiantes y en las competencias que desarrollan, siendo una de ellas la alfabetización matemática (Shimizu et al., 2018).

Para lograr una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se desarrollan investigaciones sobre las expectativas de aprendizaje, su determinación e incidencia sobre el aprendizaje de los estudiantes. El establecimiento de metas y objetivos de enseñanza se vincula a los procesos de planificación de los docentes, a la toma de decisiones en el aula y a los efectos significativos logrados en los estudiantes. La determinación y explicitación de las expectativas de aprendizaje desempeña un papel importante a la hora de perfeccionar la capacidad de los estudiantes y de configurar las condiciones de aprendizaje (De Long et al., 2005).

Además, la capacidad de pensar espacialmente fue reconocida a finales del siglo XIX, como una de las facetas cruciales de la inteligencia humana y, desde entonces, investigadores de diferentes ramas de la ciencia han llevado a cabo una intensa investigación en esta área (Maresch y Sorby, 2021). Más que nunca, nuestro mundo moderno basado en la tecnología necesita aprender a pensar espacialmente por lo que algunos estudios proponen incorporar el pensamiento espacial en el currículo contemporáneo (Diezmann y Lowrie, 2009); otros enfatizan la alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales como fundamentos para los trabajos en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas [STEM] (Novitasari et al., 2021), y se busca que los estudiantes tengan el hábito de pensar espacialmente y que desarrollen el pensamiento espacial de manera crítica e informada (National Research Council [NRC], 2006). Las expectativas de aprendizaje en tanto objetivos y competencias, obran como herramientas organizadoras del currículo, fundamentan el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades didácticas vinculadas al sentido espacial (Lupiáñez, 2009).

A partir del reconocimiento de la importancia de la alfabetización espacial y el desarrollo de habilidades espaciales, y la relevancia de la determinación de expectativas de aprendizaje como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, en este trabajo se busca focalizar en estos dos aspectos señalados, precisar las expectativas de aprendizaje vinculadas a la geometría y determinar las componentes del sentido espacial, en tareas propuestas en mediciones internacionales y en las propuestas por docentes en el aula, con una atención particular por la información que brindan los errores en los que incurren los estudiantes de 15-16 años cuando resuelven las tareas.

Algunos investigadores al analizar la interacción entre la didáctica de la matemática y la visualización encuentran beneficioso el uso de la visualización en la mejora de la educación matemática (Presmeg, 2006); mientras que otros consideran que el desarrollo de las habilidades espaciales tiene una estrecha relación con la mejora del desempeño en matemáticas (Mix et al., 2020). Sin embargo, se necesita mucha más investigación que describa con claridad y mayor precisión cómo la conceptualización geométrica interactúa con la visualización durante el desarrollo (Battista, 2007). Además, es un desafío para los investigadores tomar la diversidad de estudios y consolidarlos para mostrar las implicaciones y aplicaciones a los profesores de modo que la comprensión de la geometría se construya sobre una base firme (Owens y Outhred, 2006). Se agrega que aprender a diagnosticar expectativas de aprendizaje y considerar los objetivos de aprendizaje como hipótesis que pueden comprobarse empíricamente añaden una dimensión crítica al significado de las expectativas y definen una competencia importante para mejorar la enseñanza a ser desarrollada por los profesores (Hiebert et al., 2018).

Desde la investigación, se reconoce un continuo trabajo relacionado con el razonamiento espacial, la medición geométrica y la visualización relacionada con la geometría. También ha habido un enfoque continuo en el desarrollo del conocimiento de los estudiantes con respecto a la comprensión de figuras geométricas, definiciones y relaciones de inclusión, identificación de formas y problemas de lenguaje involucrados en la resolución de tareas geométricas (Jones y Tzekaki, 2016). Asimismo, otros estudios exploran el pensamiento de los estudiantes sobre tareas matemáticas que incorporan representaciones visuales, en particular, aquellas que imponen una gran demanda de habilidad espacial (Diezmann y Lowrie, 2009).

El National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000), acentúa el aspecto funcional del aprendizaje geométrico, dirigido a desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, y propone que para la resolución de problemas utilicen “la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico” (p.43). La OCDE, en consonancia con los contenidos propuestos en los estándares curriculares de NCTM (2000), en el proyecto PISA, para geometría define el contenido espacio y forma, y relaciona el estudio de las formas con el espacio cercano y su construcción conceptual. El objetivo general de PISA es informar el desarrollo del razonamiento espacial de los estudiantes, en qué medida son capaces de utilizar conocimientos y habilidades formadas durante la escolarización para resolver problemas que le permitan participar en la sociedad. El contenido espacio y forma implica reconocer patrones y figuras, entender las propiedades y las posiciones relativas de los objetos geométricos y buscar diferencias y semejanzas entre los componentes de las formas (ANEP, 2017b).

En Uruguay, los currículos oficiales de la enseñanza secundaria en los cursos de geometría enfatizan los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras y su correspondiente formalización. Así, en primero de bachillerato la enseñanza de la geometría está centrada en el método de los lugares geométricos. Algunos documentos nacionales entienden la evaluación como una herramienta pedagógica donde “la valoración conceptual, junto con la calificación pertinente, motiva a los estudiantes a seguir aprendiendo” (Consejo de Educación Secundaria [CES], 2020, p.2); y permite “establecer apreciaciones acerca de los procesos de aprendizaje” (ANEP, 2017a, p. 27).

Los docentes responden a las líneas de trabajo que aparecen en los programas oficiales en secundaria de matemática, que en geometría expresan la importancia del tratamiento experimental de las figuras y sus relaciones que permita conjeturar, argumentar y justificar situaciones geométricas; escribir adecuadamente los algoritmos de construcción; además del “planteamiento de problemas que permitan construcciones geométricas” (CES, 2010a, p. 4). Una enseñanza que dista de la resolución de problemas a partir del contexto y la realidad inmediata del estudiante (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2003).

OCDE/PISA define la competencia matemática de una persona como la capacidad “para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las

necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OECD, 2003, p. 24; OECD, 2004, p. 26). Se presenta un sentido amplio y funcional de las matemáticas enfocado al desarrollo competencial del individuo.

Por su parte, Flores et al. (2015) entienden el sentido espacial como una forma intuitiva de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas” (pp.129-130).

Para una comprensión más profunda del proceso de enseñanza y aprendizaje geométrico, en particular del sentido espacial, un foco del trabajo está puesto en los errores, como una línea de investigación definida en tareas matemática específicas. Los errores se entienden como datos objetivos que constituyen un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje. Se reconoce que los errores son el resultado de procesos muy complejos donde intervienen diversos aspectos del proceso educativo: el currículo establecido, las características personales y profesionales del profesor, y el centro educativo y sus interacciones con el entorno social y cultural donde se ubica (Rico, 1995).

Este estudio analiza las evaluaciones escritas en el nivel secundario de Uruguay, porque en ellas se trata de medir los aprendizajes y se manifiestan los aspectos que se consideran relevantes. Con esta investigación se busca aportar información sobre las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial requeridas a estudiantes de 15-16 años, a partir de dos tipologías de tareas de evaluación, las tareas de evaluación de PISA (TEP) en el contenido espacio y forma y las tareas de evaluación de aula (TEA) propuesta por docentes para evaluar el contenido geométrico correspondiente a primero de bachillerato uruguayo. Se hace particular énfasis en apreciar las componentes del aprendizaje funcional de la geometría, el sentido espacial, que se exige en las pruebas de aula uruguayas, con objeto de comprender los puntos en común y de diferencia que tienen con las tareas de PISA. Mientras que, con el fin de comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, también se pretende aportar información sobre los errores en el sentido espacial que manifiestan estudiantes de primer año de bachillerato de Uruguay al momento de resolver las tareas de PISA.

1.1.1. Producción científica vinculada a la investigación

Durante el proceso de esta investigación, a partir de los resultados del estudio piloto se elaboraron dos comunicaciones y un póster. La primera comunicación y correspondiente presentación se llevó a cabo en el Congreso Uruguayo de Educación Matemática 9 [CUREM 9] con el título: “diferencias en la evaluación de los docentes de secundaria y las pruebas PISA” (Elvas et al, 2024). La presentación del póster se realizó en el 45° Congreso del grupo internacional de Psicología de la Educación Matemática (45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 45) con el título: “components of the spatial sense in PISA activities for secondary education” (Elvas et al., 2022b). La segunda comunicación se presentó en el XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) con título: “habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en Secundaria” (Elvas et al., 2022a).

Además, a partir de los datos recogidos y analizados en esta investigación se elaboraron tres artículos que se presentaron en tres revistas científicas con factor de impacto según el Scientific Journal Rankings [SJR], ubicadas en los cuartiles Q2 y Q3 en la categoría “Educación”. El estado de los artículos en relación con la decisión de las revistas es a la fecha del depósito de la tesis. El primer artículo lleva por título “análisis del sentido espacial en estudiantes de secundaria: evaluación en PISA y en el aula” (Elvas y Ramírez, en prensa) y está aprobado en la revista española Avances de Investigación en Educación Matemática [AIEM], que está situada en el cuartil 2 (Q2) según SJR, y en 2023 situada en el cuartil 4 (Q4) según el Journal Citation Reports [JCR] El segundo, con el título “análisis de errores en estudiantes de secundaria al resolver actividades de PISA asociadas al sentido espacial”, se presentó en la revista brasileña Boletim de Educação Matemática [BOLEMA], situada en el cuartil 3 (Q3). El resultado hasta el momento, por parte de la edición, es con modificaciones menores que se realizan para su posterior aprobación. El tercero se presentó en la revista mexicana Educación Matemática, situada en el cuartil 3 (Q3), que lleva por título “análisis comparativo en la evaluación en geometría: PISA y pruebas propuestas por docentes”, se encuentra en espera de la resolución por parte de la edición de la revista, con la información inicial que la editorial le dió paso a la revisión por pares.

1.1.2. Estructura del informe de investigación

El proceso de la investigación que da lugar al presente informe se desarrolla en cuatro fases (ver figura 1).



Figura 1. Fases de la investigación

La primera está vinculada a la revisión bibliográfica relativa al sentido espacial y permite su conceptualización y determinación de las componentes. La segunda fase atiende a las características de las tareas, que se analizan a partir de las propuestas de las dos tipologías tareas de evaluación, TEP (tareas de evaluación propuestas en PISA) y TEA (tareas de evaluación propuestas en el aula por los docentes). La tercera fase enfatiza las expectativas de aprendizaje como competencias educativas analizadas a partir de la

resolución de expertos de las TEP y la resolución de docentes de las TEA. La última fase, constituye el centro del estudio y examina la manifestación del sentido espacial a partir de la resolución de 122 estudiantes de las TEP, sus errores y su rendimiento en las TEA.

El presente informe de investigación está organizado en seis capítulos. El primero, presenta la justificación del estudio y su relevancia para la comunidad científica, la formulación del problema y la definición de los objetivos general y específicos que se pretenden afrontar.

El segundo capítulo presenta el estado del arte, revisa los antecedentes relativos a las características de las tareas, las expectativas de aprendizaje vinculadas al sentido espacial, los referidos a las componentes del sentido espacial como tema central de la investigación y los errores correspondientes al sentido espacial.

El capítulo tres define el marco teórico en el que se sustenta esta investigación. El primer apartado, dedicado al sentido espacial: su origen e historia; se determina la terminología y correspondiente conceptualización vinculada al sentido espacial como son la habilidad y las habilidades espaciales, el pensamiento y razonamiento espacial, y el pensamiento y razonamiento geométrico; se presenta también origen, concepto y componentes del sentido espacial. Se finaliza el apartado con la concepción, las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que se emplean en este estudio; y se definen y categorizan los errores que los estudiantes manifiestan durante el aprendizaje del sentido espacial y de las matemáticas en general. Se presenta otro apartado dedicado a las expectativas de aprendizaje vinculadas al sentido espacial entendidas como competencias matemáticas y procesos cognitivos; se definen las características de las tareas que se van a analizar; y se atiende el rendimiento de los estudiantes como una forma de recoger evidencias acerca de los resultados de aprendizaje.

El cuarto capítulo establece el marco metodológico del estudio y el análisis de las tareas. El primer apartado presenta el diseño, naturaleza y características de la investigación; los criterios de selección y determinación de los sujetos e instrumentos, y los procedimientos de obtención de datos y su interpretación. Se disponen y establecen aquí las categorías del análisis definidas en el marco teórico. En el segundo apartado se describe la forma en la que se lleva adelante el análisis de las características de las TEP y TEA. Se atiende el análisis de las expectativas de aprendizaje, como competencias matemáticas y procesos

cognitivos cuando se trabajan contenidos geométricos. El énfasis se realiza en el análisis del sentido espacial en las TEP a través de métodos cuantitativos y también cualitativos, con una mirada particular sobre el análisis de los errores realizados al resolverlas.

El capítulo cinco presenta la discusión de los resultados relativos a las características de las tareas y a las expectativas de aprendizaje, como competencias educativas, competencias matemáticas y procesos cognitivos y, además, se agrega una comparativa entre las tareas que atiende los resultados de aprendizaje obtenidos en las TEP y las TEA. Se presentan los resultados provenientes del análisis cuantitativo y cualitativo de las componentes del sentido espacial, se atiende el vínculo entre ambos y se profundiza en los resultados relativos a los errores manifestados al resolver las TEP.

En el último capítulo, se muestran las conclusiones que se extraen de la investigación, en relación con las características de las tareas, las expectativas de aprendizaje vinculadas al sentido espacial, las específicas sobre las componentes del sentido espacial y los errores relacionados con su proceso de aprendizaje. Además, se reconocen algunas de las limitaciones que se vislumbran del estudio y se expresan las posibles líneas que quedan abiertas, que pueden dar lugar a nuevas investigaciones.

1.2. Planteamiento del problema

En la fase de la evaluación, la recopilación de información para tomar decisiones sobre los estudiantes está presente en múltiples aspectos del sistema educativo. Para producir información confiable y válida sobre el conocimiento matemático de los estudiantes es fundamental tener especificaciones claras sobre lo que los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer (Webb, 2007). Las tareas de evaluación en el aula y externas son sumativas y certifican los logros o el potencial de las personas (William, 2007). En esta investigación unas certifican el rendimiento de los estudiantes en geometría y las otras, la manifestación del sentido espacial. Este capítulo desarrolla tres aspectos que constituyen la fundamentación de la investigación: la justificación, la definición del problema y la determinación de los objetivos general y específicos.

1.2.1. Justificación de la investigación

Las TEP evalúan la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de la vida cotidiana y demandan para ser superadas del desarrollo del razonamiento espacial, que en

el contenido espacio y forma involucra las semejanzas y diferencias entre los componentes de las formas, reconocer patrones y figuras, comprender las propiedades y las posiciones relativas de los objetos geométricos (ANEP, 2017b). Por su parte, la enseñanza y aprendizaje de la geometría presente en el currículo oficial uruguayo de matemáticas en la educación secundaria prioriza los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras, los movimientos en el plano y su formalización (ANEP, 2017a).

La geometría es una compleja red interconectada de conceptos, formas de razonamiento y sistemas de representación que se utiliza para conceptualizar y analizar entornos espaciales físicos e imaginarios. El pensamiento geométrico consiste en la invención y uso de sistemas conceptuales formales para investigar la forma y el espacio (Battista, 2007).

La enseñanza de la geometría en Uruguay se desarrolla de forma progresiva de acuerdo con los programas oficiales propuestos por el CES de la ANEP, y utiliza los conocimientos aprendidos en primaria. Primero de bachillerato se considera un año de articulación entre la enseñanza obligatoria y los cursos posteriores de bachillerato, donde el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría se centra en el método de los lugares geométricos. Los conceptos de “circunferencia, círculo, mediatriz, bisectriz y elementos notables de un triángulo, se mencionarán en el momento que sea necesario para el tratamiento de otros temas” (CES, 2010b, p.2). En relación con el algoritmo de resolución se enfatiza el cuidado por “la expresión matemática correcta” (CES, 2010b, p.2).

En los cursos de geometría de los currículos oficiales de la enseñanza secundaria uruguayo se busca trabajar diferentes aspectos relacionados con los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras y su correspondiente formalización. Aspectos que Flores et al. (2015) consideran y proponen dentro del concepto de sentido espacial que se asume en esta investigación.

El NCTM (2000), acentúa el aspecto funcional del aprendizaje geométrico, dirigido a desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, y propone que para la resolución de problemas utilicen “la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico” (p.43).

En los informes de PISA en Uruguay se observa bajo rendimiento en la puntuación promedio obtenida en matemáticas, ya que en 2003 fue 422, en 2006 y 2009 fue 427 puntos, en 2012 fue 409, en 2015 y 2018, fueron 418 puntos y en 2022 vuelven a ser 409 puntos (ANEP, 2023). Esto significa que el estudiante promedio accede al nivel 1 de desempeño, de los seis niveles de puntuación definidos. El estudiante uruguayo es capaz de responder a preguntas que involucran contextos familiares donde la información está toda presente y las preguntas están bien definidas (ANEP, 2022). Si bien los resultados en el contenido espacio forma dan la mejor puntuación en promedio en relación con otras áreas, únicamente el 8,6% de los estudiantes alcanza un nivel 4 o superior (ANEP, 2013). Las evaluaciones a gran escala y en el aula se basan en principios sólidos similares (Stylianou, 2001). Un desafío para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes es la mejora de la coherencia e interacción entre ambos tipos de evaluación (Suurtamm et al., 2016). Los resultados de las evaluaciones son apropiados para comprender el currículo (Aguilar y Ortigao, 2012).

Esta investigación se propone como objetivo describir y categorizar las componentes del sentido espacial, que incluye el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización requeridas a estudiantes de 15-16 años cuando resuelven tareas de evaluación en geometría propuestas por los docentes en el aula y tareas de PISA, en el contenido espacio y forma.

Este estudio pretende aportar información sobre la coherencia entre la evaluación del aprendizaje geométrico en las pruebas internacionales y las realizadas por el profesorado en el aula. El análisis de los resultados permitirá concretar los aspectos que establecen las semejanzas y diferencias con el rendimiento obtenido por los estudiantes en la evaluación propuesta por sus docentes; y busca aportar información sobre los errores que manifiestan los estudiantes cuando resuelven las tareas de PISA en el contenido espacio y forma.

Además, esta investigación procura brindar elementos sobre las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial requeridas a estudiantes de 15-16 años que cursan primero de bachillerato de Uruguay, en las tareas de evaluación propuestas por docentes en el aula y por PISA.

Para ello se proponen cuatro tipologías de categorías que tienen como punto de partida la resolución de las TEP por parte de expertos basados en un estudio piloto. Una categoría

describe el sentido espacial en las TEA y se considera la resolución de dos docentes; y en las TEP se consideran las respuestas de 122 estudiantes uruguayos de 15-16 años que cursan primer año de bachillerato, docentes y estudiantes pertenecen a una institución educativa privada de Montevideo. Otra categoría profundiza en los errores que manifiestan los 122 estudiantes en las respuestas a las TEP. La tercera categoría detalla las características de las tareas de evaluación del aprendizaje geométrico. La cuarta categoría refiere a las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial en las TEP, en el contenido espacio y forma, y en las tareas de evaluación propuestas por cuatro docentes del centro educativo mencionado cuando evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos, contenido curricular correspondiente a geometría.

Las TEP no responden al perfil de actividades matemáticas más comunes en las aulas tradicionales centradas en el dominio de algoritmos y realización de ejercicios de aplicación directa de fórmulas y procedimientos (Sáenz y Bruno, 2018). El análisis de los errores del colectivo de estudiantes permitirá comprender los resultados de las evaluaciones internacionales y marcar pautas de actuación que sean de utilidad para el profesorado, para los desarrolladores de currículos y de políticas educativas como para los investigadores en la mejora de las prácticas educativas en el aula (Gris et al., 2019).

El estudio puede resultar significativo por la categorización de indicadores para identificar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial. Obtener esta información permite a los docentes, por un lado, diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas vinculadas con el conocimiento geométrico (Presmeg, 2006). Por otro, determinar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial en la evaluación a gran escala y en el aula, contribuye a la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

Asimismo, se considera relevante el aporte del trabajo en dos sentidos. Por un lado, la categorización propuesta establece indicadores para identificar las componentes del sentido espacial, lo que permite obtener información más precisa en relación con la evaluación del conocimiento geométrico. Por otro lado, la identificación de la relación entre la manifestación del sentido espacial en las tareas de PISA y el rendimiento de los estudiantes en la evaluación propuesta por los docentes en el aula permite reconocer las

distintas perspectivas y enfoques curriculares de los docentes en la enseñanza de la geometría.

Otro aporte proviene de la categorización de los errores relacionados con el sentido espacial, que permite obtener información en relación con el conocimiento geométrico y la identificación de los aspectos concretos que dificultan el aprendizaje geométrico, y brinda elementos a los docentes para ayudar a los alumnos a establecer conexiones entre registros visuales y simbólicos de las mismas nociones matemáticas (Presmeg, 2006). Además, proporciona información que ayuda a describir cómo la conceptualización geométrica interactúa con la visualización durante el desarrollo (Battista, 2007).

1.2.2. Problema de investigación

A partir de los intereses que motivan esta investigación planteados anteriormente, se persigue la principal pregunta de investigación:

- ¿Qué componentes del sentido espacial manifiestan los estudiantes de secundaria, de 15-16 años que cursan primero de bachillerato, cuando resuelven tareas propuestas en evaluaciones de PISA en el contenido espacio y forma?

Para responderla, se marca una trayectoria de investigación abordando las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las características de las TEP, en contenido espacio y forma, y las TEA en geometría?
- ¿Qué expectativas de aprendizaje en cuanto a competencias matemáticas, procesos cognitivos, y componentes del sentido espacial se evidencian en las tareas propuestas en evaluaciones tanto, de PISA en el contenido espacio y forma, como de aula cuando los docentes evalúan los conocimientos geométricos?
- ¿Qué errores manifiestan los estudiantes cuando resuelven TEP en el contenido espacio y forma?
- ¿Qué relación se establece entre los errores encontrados y las componentes del sentido espacial?
- ¿Qué relación se establece entre el rendimiento en la evaluación de los conocimientos geométricos en el aula y el sentido espacial manifestado en las TEP?

De este modo se considera que el problema de investigación está centrado en analizar las tareas de evaluación planteadas para el contenido geométrico: se examinan las componentes del sentido espacial y los errores que manifiestan los estudiantes de 15-16 años que cursan primero de bachillerato; las expectativas de aprendizaje en cuanto a competencias matemáticas, procesos cognitivos y las características de las tareas. Se estudian las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que están presentes en las tareas propuestas en las evaluaciones de algunos docentes de secundaria y las tareas referidas al contenido, espacio y forma, de las evaluaciones de PISA.

Al considerar las preguntas planteadas, en el siguiente apartado se formulan el objetivo general y los objetivos específicos que orientan este estudio.

1.2.3. Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación es describir las componentes del sentido espacial que se manifiestan en la resolución de las TEP en el contenido espacio y forma.

Los objetivos específicos que se proponen para poder abordar los distintos aspectos contenidos en el general son los siguientes:

- O1. Describir las características de las TEP y TEA relativas al contexto, tipología del enunciado, complejidad cognitiva y formato de respuesta.
- O2. Determinar las expectativas de aprendizaje en cuanto a competencias matemáticas, procesos cognitivos y componentes del sentido espacial que se evidencian en TEP y TEA.
- O3. Establecer diferencias y semejanzas para evaluar el aprendizaje geométrico entre TEP y TEA.
- O4. Identificar las componentes del sentido espacial en las respuestas de los estudiantes de 15-16 años, en las TEP.
- O5. Identificar y categorizar los errores que manifiestan los estudiantes de 15-16 años cuando resuelven las TEP.
- O6. Relacionar el rendimiento alcanzado en las TEA y la manifestación del sentido espacial en las TEP.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

El interés de esta investigación está en determinar las componentes del sentido espacial que manifiestan los estudiantes de 15-16 año al resolver tareas de evaluación de geometría, formuladas en PISA en el contenido espacio y forma. En este apartado se revisan los antecedentes relacionados con las características de las tareas y las expectativas de aprendizaje evidenciadas en las propuestas de las tareas, y las componentes del sentido espacial y los errores expresados por los estudiantes al resolver las tareas de evaluación.

2.1. Características de las tareas

El aprendizaje de las matemáticas se detecta y confirma delimitando actuaciones que hacen uso de unos conocimientos y dan respuesta a unas tareas con características determinadas (Lupiáñez, 2009). Caraballo et al. (2011) analizan tareas de evaluación que constituyen una prueba diagnóstica de la competencia matemática, elaborada por las comunidades autónomas españolas, para estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria para evaluar el ajuste a los requerimientos de PISA. Las características de las tareas que atienden son: el contenido, entre ellos espacio y forma, el contexto, los niveles de complejidad y las competencias. Reconocen que las tareas diseñadas se refieren a un contexto, atienden a un contenido matemático y se pueden categorizar en un nivel de complejidad. Sin embargo, hay una tendencia en las tareas a favorecer el contexto público y el nivel de complejidad de reproducción. Concluyen que, si bien responden a la caracterización del modelo matemático de PISA, deben reevaluar el diseño de las tareas para que la prueba diagnóstica se adecue mejor a las evaluaciones PISA.

Otros estudios atienden las características de las tareas en matemáticas, pero no directamente vinculadas al sentido espacial. El interés de los investigadores por las demandas cognitivas no es nuevo, Benedicto et al. (2015) trabajan con problemas de patrones geométricos y analizan la demanda cognitiva de las tareas a través de los cuatro niveles definidos por Smith y Stein (1998): memorización, algoritmos sin conexiones, algoritmos con conexiones y hacer matemáticas. Concluyen que “el nivel de demanda

cognitiva necesario para resolver correctamente un problema no es único y que un factor clave para analizar la dificultad de un problema son las resoluciones” (p. 163).

Otra investigación analiza los enunciados de las tareas, la forma en que estudiantes de séptimo grado, procesan la información y la comprensión de los diferentes enunciados, para abordar el proceso de resolución de problemas matemáticos. Concluye que no hay un sólo tipo de problema con una estructura de representación específica que favorezca la comprensión de los estudiantes, sino que cada representación tiene sus debilidades y fortalezas que conociéndolas pueden ser tratadas para mejorar la comprensión del problema matemático y favorecer su resolución (Arévalo, 2009).

2.2. Expectativas de aprendizaje

Para la mejora de los aprendizajes, las investigaciones revelan que la formulación de expectativas de aprendizaje brinda ventajas potenciales en la enseñanza de las matemáticas y juega un papel importante a la hora de perfeccionar la capacidad de los estudiantes para reflexionar críticamente, establecer criterios para justificar la validez científica de sus ideas y determinar la importancia del aprendizaje realizado durante los cursos (De Long et al., 2005).

Aunque no vinculadas a tareas de PISA, algunas investigaciones relacionan expectativas de aprendizaje y sentido espacial. El estudio de Chen et al. (2009), analiza las expectativas de aprendizaje en estudiantes de primaria, relacionadas con la medición, que involucran área y volumen, en los grados 1 a 8 en varios estados de EE. UU. y países asiáticos de alto rendimiento en Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS], incluidos Singapur, Taiwán y Japón. Los resultados indican que el contenido de matemáticas, la ubicación de grado y el nivel cognitivo de las expectativas de aprendizaje relacionados con temas de medición seleccionados varían marcadamente entre estados y países. La variabilidad en las expectativas de aprendizaje da como resultado diferencias en las oportunidades de aprender. Son varios los factores que influyen en lo que aprenden los estudiantes y pueden contribuir a un mayor rendimiento en matemáticas: las expectativas de aprendizaje, el docente que imparte la instrucción y la forma en la que organiza el tema. El plan de estudios de matemáticas, tal como se describe en los marcos curriculares estatales o nacionales, también puede contribuir a las diferencias en el aprendizaje de los estudiantes.

Se han realizado investigaciones que buscan establecer un vínculo entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas. En Chile, Martínez (2015) investiga a través de las pruebas del sistema nacional de evaluación de la calidad del aprendizaje para matemáticas en octavo año de la enseñanza básica, y concluye que las altas expectativas de aprendizaje de los docentes sobre las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes generan mejores resultados en las pruebas y al revés, las expectativas bajas perjudican el logro educativo de los estudiantes. En Australia, Sullivan et al. (2010), analizan la implementación de una tarea matemática por tres docentes diferentes, y afirman que las expectativas de aprendizaje definidas por cada docente influyen positivamente en el éxito en el ítem de evaluación del tema trabajado. En Taiwán, Lin et al. (2009), investigan las relaciones entre el rendimiento de los estudiantes en matemáticas y las características de sus antecedentes, a través de la evaluación del rendimiento estudiantil en matemáticas que se aplica a estudiantes de 11 años que cursan sexto grado de primaria, y obtienen como resultado que la orientación a establecer expectativas de aprendizaje es más significativa que el estatus socioeconómico para predecir el desempeño en matemáticas. En China, Guo y Leung (2021), investigan la relación entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento en matemáticas, de estudiantes de quinto y sexto grado de primaria con diferencias étnicas. Los resultados muestran una relación favorable entre la orientación a establecer metas de aprendizaje y los logros de los estudiantes.

2.3. Componentes del sentido espacial en tareas

Uno de los intereses de esta investigación es operativizar la medida del sentido espacial. En las investigaciones no hay consenso en la definición y la terminología asociada al sentido espacial, presentando matices de diferencia conforme con la disciplina que lo requiere: se utilizan, entre otros, habilidad espacial, pensamiento e imaginación espacial de los estudiantes. La noción de sentido espacial tiene uno de sus orígenes en el NCTM (2000) que propone que todos los estudiantes desarrollen el sentido espacial y la capacidad de usar propiedades y relaciones geométricas para resolver problemas en matemáticas y en la vida cotidiana.

En distintos países y contextos se han realizado investigaciones, que son antecedentes directos de este estudio, de aspectos relacionados con el sentido espacial en tareas

geométricas de PISA. Por ejemplo, en Tailandia, Firmansyah et al. (2019) analizan el rendimiento y las dificultades que tienen los estudiantes de una escuela secundaria para resolver tareas de PISA en el contenido espacio y forma. Los estudiantes son categorizados en grupos según los niveles de Van Hiele, mediante la aplicación de una prueba de geometría. Concluyen que quienes estaban en el nivel de visualización fueron capaces de alcanzar el 50% de indicadores en la etapa de visualización y el 33,3% en el nivel de análisis. Murtiyasa et al. (2019), analizan el pensamiento de los estudiantes de una escuela secundaria privada de Surakarta (Indonesia) en la resolución de problemas geométricos basados en PISA. Concluyen que la mayoría de los estudiantes se sitúan en un nivel medio de pensamiento (alrededor del 72%), menos estudiantes están en un nivel bajo de pensamiento (20%), y la menor cantidad de estudiantes se sitúan en el nivel alto (8%). Los niveles 1 y 2 de PISA son niveles que los estudiantes alcanzan fácilmente, mientras que alcanzan con dificultad los niveles 3-6 de PISA. También en Indonesia, Novitasari et al. (2021), identifican y describen la relación entre la representación y el razonamiento espacial que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas PISA. Los sujetos fueron dos estudiantes de tercer grado de secundaria con alto nivel de inteligencia visual-espacial. Los resultados mostraron que: existe una relación entre representación y razonamiento espacial; los estudiantes combinan sus representaciones y razonamiento espacial al dar y probar sus respuestas; y los estudiantes aplican el razonamiento espacial en forma de visualización espacial y rotación mental. Además, las representaciones más utilizadas son la representación visual (76,25%) y la representación simbólica (20%).

Aunque ya no contextualizadas en pruebas PISA, otros trabajos han medido el sentido espacial en tareas de evaluación externa. Los análisis de los resultados en evaluaciones estandarizadas marcan líneas de actuación en cuanto a los diseños curriculares. Por ejemplo, tras investigar el razonamiento espacial en la evaluación nacional anual de Sudáfrica, Dhlamini et al. (2019) recomiendan transformar el plan de estudios de ese país para que se centre en desarrollar las habilidades espaciales de los alumnos. Los resultados que presentan es que la mayoría de los estudiantes recuerdan y manipulan el razonamiento geométrico espacial irrelevante; recuperan imágenes mentales irrelevantes y comunican orientaciones espaciales defectuosas, lo que concluye en juicios inapropiados no aplicables al contexto de los problemas.

El interés de las investigaciones en el campo de las capacidades espaciales por el desarrollo del razonamiento espacial surge no solo por ser un componente importante de la acción y el pensamiento humanos, sino por su estrecha relación con el pensamiento y el conocimiento geométrico. Los resultados de los estudios indican un bajo desarrollo de habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones y transformaciones espaciales, así como la comprensión de las dimensiones y la posición (Jones y Tzekaki, 2016). Otros estudios buscan evidencias empíricas de cómo los estudiantes de 7° grado (de 12 a 13 años) utilizan representaciones para deducir información y resolver problemas geométricos, en este caso, un experimento en el aula con cubos. Es de particular interés porque el objeto geométrico que se representa es tridimensional mientras que el medio de representación es bidimensional. Los resultados muestran que los estudiantes que alcanzaron las soluciones correctas pudieron manipular mentalmente las representaciones y razonar sobre ellas, no así quienes fallaron en responder (Fujita et al., 2017). Otros estudios se refieren a los procesos de toma de perspectiva que se pueden diferenciar según requieren o no rotar mentalmente en la posición de la otra persona. En este caso el estudio se realiza con estudiantes universitarios entre 18 y 25 años, de Lovaina, Bélgica. En los resultados parece más probable que se identifique directamente la relación entre el frente o los ojos de la persona y el objeto. Además, es posible que la toma de perspectiva visual se base en procesos básicos de toma de perspectiva espacial (Suurtes et al., 2013).

Vinculados a la relación entre componentes del sentido espacial y el rendimiento al momento de resolver tareas en matemática se encuentran varios estudios. Diversos trabajos han resaltado el papel que desempeña en el rendimiento en la resolución de tareas la manifestación de determinados aspectos del sentido espacial. Los resultados de algunos estudios establecen una relación directa entre las habilidades espaciales de los niños de primaria, el desarrollo espacial y su rendimiento en resolver tareas en matemáticas (Mix et al., 2020; Möhring et al., 2021). Otros trabajos miden la imaginación espacial y el control conceptual de las figuras en la elección de estrategias para la resolución de tareas geométricas (Miragliotta y Baccaglini, 2017; Plath, 2012).

Diferentes investigaciones han operativizado algunos aspectos relacionados con el sentido espacial para mostrar una relación espacial positiva con el rendimiento en distintas áreas. Algunas de ellas buscan medir el uso de conceptos y habilidades espaciales vinculados con la enseñanza de la geografía (Bednarz y Lee, 2011), así como

el desarrollo y la formación del pensamiento espacial a través del uso de tecnologías geoespaciales (De Miguel, 2015). Otras investigaciones miden los efectos de la visualización espacial y de objetos con relación a la creatividad artística y científica (Kozhevnikov et al., 2013).

En los trabajos mostrados se refleja el interés por la consideración de diversos aspectos en la resolución de las tareas de evaluación: razonamiento geométrico, visualización, representaciones, habilidades espaciales, entre otros. Para responder a las preguntas planteadas en esta investigación se van a atender las componentes del sentido espacial requeridas para resolver las tareas de PISA y de aula.

2.4. Los errores en la resolución de tareas

La presencia de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento es una cuestión permanente, compleja y delicada, por lo que existen diversas investigaciones preocupadas por el proceso para adquirir un conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar (Rico, 1995). La enseñanza y aprendizaje se enriquece cuando se logra trabajar, debatir y analizar los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, en particular de la geometría (Gotte y Mántica, 2021).

Los análisis de los resultados en evaluaciones estandarizadas acerca de los errores de los estudiantes marcan líneas de actuación en cuanto a tomar decisiones pedagógicas, favorecer la práctica docente e informar al estudiante acerca de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, Villarroel et al. (2012), tras analizar resoluciones de tareas de PISA 2009, concluyen que, en los problemas largos, las dificultades estarían en el corto tiempo de concentración de los estudiantes y la estrategia de resolución de encontrar la respuesta correcta en vez de construirla. En los problemas de más de una variable, el error aumenta, los estudiantes razonan en forma adecuada pero incompleta, consideran alguno de los aspectos, pero no todos. En tareas que entregan datos en distintos formatos, cuando el estudiante se encuentra ante los textos discontinuos (gráficos, tablas, otros) se le dificulta integrar la información en una respuesta correcta. En los problemas contextualizados se hace difícil seleccionar una estrategia que conduzca a resolverlos.

Otras investigaciones analizan los errores de los estudiantes al momento de resolver tareas que contemplan componentes del sentido espacial. Los estudios de Diezmann y Lowrie (2009), se centran en el conocimiento de los niños sobre mapas de posición, una prueba sobre lenguajes gráficos en matemáticas. Los resultados revelan dificultades clave, incluida la interpretación incorrecta del vocabulario, prestar atención a los enfoques incorrectos en los mapas y pasar por alto información crítica, además de otros errores generales como adivinar la respuesta e interpretar mal la pregunta.

Otros trabajos analizan los errores de los estudiantes en el tratamiento de la medida geométrica. La medición juega un papel central en el razonamiento sobre todos los aspectos de nuestro entorno espacial (Battista, 2007). Algunos atienden el proceso de iteración de la unidad de longitud y concepto de longitud. Los errores encontrados en alumnos de primaria fueron procedimentales, en la técnica del uso de la regla, y conceptuales, en comprender la construcción de una escala (Bragg y Outhred, 2000; Watson et al. 2013). La comprensión de los estudiantes de secundaria del área como una cuantificación de la superficie y sus características espaciales fue investigada por Outhred y Mitchelmore (2004) quienes encuentran que la mayor dificultad es considerar el área como un concepto abstracto de multiplicación; mientras que Furinghetti y Paola (1999) afirman que la dificultad está en la ausencia de una definición matemática clara y concisa de área que provoca en los estudiantes de secundaria dos errores: confusión entre área y perímetro, y creer que existen una relación directa entre ellos. Fernández y De Bock (2013), encuentran que el error de los estudiantes está en tratar las relaciones entre longitud y área, o entre longitud y volumen, como lineales en lugar de cuadráticas y cúbicas respectivamente, la dificultad radica en la distinción entre dimensionalidad y direccionalidad. La medición del ángulo es otro escollo para los estudiantes, las dificultades varían desde comprender el ángulo como un atributo de la forma y la noción de ángulo desde una perspectiva estática o dinámica (Masuda, 2009).

Diferentes investigaciones se centran en analizar y clasificar los errores que manifiestan los estudiantes de nivel terciario o universitario, cuando resuelven tareas geométricas. Bocco y Canter (2010), encuentran que los errores que repiten con mayor frecuencia son: utilizar datos de forma errónea; inventar datos; confundir el concepto involucrado en la resolución del ejercicio (confunden superficie con perímetro, diámetro con perímetro, asociar superficie de un área cualquiera con la superficie de un cuadrado); no relacionar

el concepto con las unidades que le corresponden; conversión incorrecta de unidades o bien operar sin tener en cuenta las unidades involucradas, ante el desconocimiento de la fórmula apropiada inventar una; realizar operaciones aritméticas de forma defectuosa; operar sin relacionar con la situación planteada; y no comprender el enunciado del problema. Ramírez et al. (2018) analizan los errores que cometen estudiantes de secundaria con talento matemático al resolver tareas de geometría de argumentación visual y los clasifican en: establecer falsas analogías entre plano y espacio, no discutir todos los casos posibles y generalizar a partir de ejemplos concretos; y del uso incorrecto de técnicas de razonamiento y de manejo de contenidos y procedimientos matemáticos.

Se encuentran siete categorías de errores en estudiantes de ingeniería: errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos, errores de razonamiento, de transferencia, de técnica, de tecnología y errores azarosos (Franchi y Hernández, 2004). Con estudiantes de profesorado de matemáticas, Gotte y Mántica (2021) encuentran que los errores que manifiestan a la hora de resolver tareas son de siete tipos: tres referidos al empleo impreciso de lenguaje matemático y de definiciones, axiomas y propiedades geométricas; dos referidos a la acción de demostrar; uno con relación al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades.

Otras investigaciones realizadas con estudiantes de secundaria durante el aprendizaje de figuras y cuerpos geométricos tienen una finalidad didáctica, caracterizar los errores con el fin de concretar estrategias de diseño de la unidad, y brindar información al profesor de los procesos de aprendizaje que suceden en el aula, y al estudiante, como oportunidad para modificar su estructura cognitiva (Moral-Sánchez et al., 2021; Tovar y Mayorga, 2015).

La detallada investigación de Clements y Sarama (2007) acerca de la composición y descomposición de formas, describe el proceso cognitivo que lleva a relacionar las partes con el todo y muestra que cada parte desempeña un único papel funcional en la estructura del patrón. Los estudios se realizan en distintas edades y afirman que los niños poseen múltiples estrategias de análisis espacial como las de los adultos. El desarrollo incluye ambas componentes del análisis espacial: identificación de las partes en una forma geométrica e integración de esas partes en un todo coherente. La dificultad es tener una cognición madura, resultado de un proceso de desarrollo en el que las partes y el todo están interrelacionados a través de niveles jerárquicos.

Se han realizado investigaciones de los errores que manifiestan los estudiantes durante el proceso de representar en 2D cuerpos geométricos tridimensionales en distintos países y contextos. Por ejemplo, en Chile, Ramírez et al. (2023), atienden los errores que cometen estudiantes de tercer y cuarto año (16-18 años) en el dibujo de vistas ortogonales de figuras 3D y de figuras 3D desde vistas ortogonales. Los resultados muestran mayor error en la representación de vistas superiores y vistas traseras y en el apartado principal del cuestionario más de la mitad de las respuestas no coinciden con la correcta, así las dificultades en la manipulación mental y en las habilidades espaciales quedan manifiestas. Por su parte, Saralar et al. (2018) trabajan con estudiantes de séptimo año (12-13 años) del Reino Unido. El análisis muestra que a los estudiantes les resultó difícil construir dibujos ortogonales e isométricos, si bien fueron mejores los resultados en dibujos ortogonales sobre los dibujos isométricos; además los autores establecen un listado de errores específicos para cada tipología de dibujo con la perspectiva de elaborar lecciones que ayuden a superar los errores. Mientras que Fujita et al. (2017), en Japón, presentan los hallazgos, con estudiantes de séptimo grado (12-13 años) cuando representan en 2D cuerpos geométricos 3D. Los estudiantes manifestaron dificultades en manipular mentalmente las representaciones y razonar sobre ellas para alcanzar soluciones correctas.

En los trabajos mostrados se refleja el interés de las investigaciones por los errores que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas geométricas. Para responder a las preguntas planteadas en este estudio se van a atender los errores generales y los relacionados con el sentido espacial al resolver las TEP y se desarrollan aspectos teóricos vinculados con las dificultades y errores en matemáticas.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

El interés de esta investigación está centrado en analizar las tareas de evaluación planteadas para el contenido geométrico. En este capítulo se van a operativizar los conceptos de sentido espacial, a partir de las diferentes terminologías y definiciones que proporcionan distintos investigadores. El análisis conceptual es uno de los elementos del ciclo del análisis didáctico, y consiste en examinar en profundidad las nociones básicas y los conceptos sobre el conocimiento matemático, su historia y fundamentos, su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje (Rico, 2013).

El capítulo tiene tres apartados: establecer qué entendemos por sentido espacial como finalidad de la enseñanza de la geometría, determinar las características de las tareas, examinar el concepto de expectativas de aprendizaje y su concreción en la dimensión matemática que se aborda, la geometría.

El primer apartado está orientado a analizar el sentido espacial de los estudiantes de 15-16 años en la resolución de las pruebas PISA, y los errores que manifiestan cuando las resuelven. El segundo apartado busca caracterizar las tareas de evaluación. Se determinan y conceptualiza: el contexto de las tareas, las tipologías de los enunciados, la complejidad cognitiva que implican y el formato de las respuestas. El tercer apartado requiere buscar criterios para analizar las expectativas de aprendizaje que evidencian las tareas de evaluación. Se desarrollan aspectos teóricos referidos a: expectativas de aprendizaje, competencias educativas, el rendimiento de los estudiantes, concretando en el contenido vinculado con el sentido espacial.

Para ello se presenta la revisión de los resultados provenientes de las investigaciones relacionadas con los errores en la resolución de tareas y con el sentido espacial o con la diversidad de terminología que engloba, comenzando por reconocer que el término lo empiezan a usar los autores de los estándares curriculares y de evaluación de 1989 (Wheatley, 1990). Por último, se revisan los aportes de los estudios referidos a las características de las tareas y a las expectativas de aprendizaje vinculadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.1. Sentido espacial

Se toma como punto de partida la revisión de la literatura de las investigaciones realizadas desde la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, de la geometría y en particular aquellas centradas en el sentido espacial y las diferentes terminologías que se relacionan. Los estudios encontrados se dividen en dos partes de acuerdo con su terminología. La primera aborda las investigaciones encontradas que reflejan el origen e historia del término sentido espacial. La segunda recoge los estudios hallados a partir de una búsqueda bibliográfica acotando el período a los últimos veinte años, considerando la diversidad de terminología que se puede asociar al sentido espacial. Así se logran identificar los diferentes aspectos que lo constituyen, se determinan las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que se emplean en esta investigación.

3.1.1. Habilidades espaciales vinculadas al sentido espacial

Las primeras investigaciones que aluden a lo que actualmente llamamos sentido espacial emplea el término habilidad espacial, diferenciando entre orientación y rotación mental, entre otras. En las habilidades espaciales parece haber acuerdo que hay un componente innato pero otros aprendidos, con lo que las habilidades se desarrollan y se enseñan. En su manifestación en la enseñanza se estudia la influencia del contexto cultural del estudiante, de la enseñanza y del docente que la imparte. Entre estas habilidades espaciales, la visualización espacial ocupa un papel central y tiene su propio recorrido (ver figura 2).

El inicio de la investigación sistemática sobre el tema de la **habilidad espacial** se le atribuye a Galton (1883), interesado en el análisis de los factores de prueba. Los estudios de Spearman (1927) y Thurstone (1938) se centran en la habilidad espacial y numérica pero no en la habilidad matemática. Por su parte, MacFarlane (1964) detalla la relación entre habilidad espacial y habilidad matemática, considera que la capacidad espacial involucra percibir, retener y reconocer un patrón o figura en su correcta proporción y como un todo organizado.

Sin embargo, los estudios de Michael et al. (1957) muestran que es inadecuado concebir a la habilidad espacial como un constructo unitario. Nutren esta visión los aportes de McGee (1979), al distinguir la orientación espacial de la visualización espacial como habilidades espaciales.

En esta misma línea se orientan los estudios que hablan en plural de **habilidades espaciales** (Clements y Wattanawaha, 1978). Mientras que otros se dedican a relacionar en la escuela primaria las habilidades espaciales con el rendimiento en matemáticas y distinguen habilidades espaciales de bajo y alto nivel. Las primeras vinculadas a la visualización de configuraciones bidimensionales sin que requiera transformarlas mentalmente, y las segundas asociadas a la visualización y transformación mental de configuraciones tridimensionales (Guay y McDaniel, 1977).

Para la investigación se transforma en un área problemática la distinción entre: la habilidad espacial, como una cualidad individual posiblemente heredada; y las habilidades espaciales, como capacidades a desarrollar en la persona, a ser atendidas durante el proceso de enseñanza.

En tanto que **las habilidades espaciales se desarrollan**, se consideran los aportes de la psicología del desarrollo. Ocupa un lugar central la visión piagetiana, con los estudios realizados sobre la geometría espacial y las transformaciones geométricas (Piaget e Inhelder, 1956 y Piaget et al., 1960), y posteriormente, sobre conceptos espaciales y geométricos (Martin, 1976 y Lesh, 1976), atravesados por las críticas a las edades, etapas, lenguaje matemático y las evidencias que avalan sus hallazgos. Otras visiones de la psicología del desarrollo proponen tres niveles de representación: enactivo, icónico y simbólico (Bruner, 1964); y sensorio motor, perceptivo y contemplativo (Werner, 1964). Asimismo, van Hiele (1959) integra las concepciones de la psicología en la enseñanza de las matemáticas, más alineado con la propuesta de Werner que con las de Bruner o Piaget.

Otros investigadores buscan establecer una relación entre el desarrollo de las habilidades espaciales y **los aspectos culturales** del estudiante. En los estudios por diferencia de género, las puntuaciones más altas son alcanzadas por los niños que se ven favorecidos por haber realizado durante su enseñanza cursos vinculados con el espacio (Fennema y Sherman, 1977). Otros estudios atienden a diferencias motivadas por el lenguaje, la interacción social, el contexto físico y el ámbito ocupacional (Berry, 1971; Bishop, 1979; Mitchelmore, 1980).

Se valora la **educación formal** dentro del contexto del estudiante, por tanto, no faltan las investigaciones que consideran como factor determinante en las habilidades espaciales el enfoque de la enseñanza. Algunos estudios se centran en que el uso de materiales

manipulativos y estructurados durante la enseñanza mejora la capacidad espacial (Bishop, 1972, 1973; Marriott, 1978; Mitchelmore, 1980). Otro enfoque que, si bien tiene problemas en su metodología y generalidad de los resultados, se ocupa de las interacciones de aptitud-tratamiento (ATI), explora la relación entre los diversos métodos de enseñanza y las diferentes aptitudes del alumno para que las utilice al máximo (Radatz, 1979; Webb y Carry, 1975; Young y Becker, 1979). Mientras otro enfoque se centra en establecer diferencias individuales en las habilidades espaciales y generar prácticas de enseñanza que favorezcan el desarrollo de habilidades espaciales específicas involucradas en la interpretación figurativa (Brinkmann, 1966; Dawson, 1967; Frandsen y Holder, 1969; Lean y Clements, 1981; Saunderson, 1973). En cambio, investigaciones recientes sugieren dictar cursos de intuición visual antes que los cursos deductivos de geometría puesto que serían relevantes para lograr una buena adaptación en la sociedad tecnológica actual, que requiere del desarrollo de las habilidades espaciales (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Guillén, 2001; Mariotti, 2001; Rivera, 2011; Stylianou, 2001).

En la educación formal, hay estudios interesados por **el rol del docente** en el desarrollo de las habilidades espaciales dentro del aula, cuyos resultados llegan a ser diversos. Algunos investigadores concluyen que es sutil la influencia del docente en tanto que el desarrollo de las habilidades espaciales es individual y personal (Kent y Hedger, 1980; Presmeg, 1986). Sin embargo, otros estudios analizan cómo el contexto del aula puede influir en la resolución de problemas espaciales, considerando que la interacción alumno-docente influye en las percepciones y vínculos que establecen los estudiantes al momento de dar sus respuestas (Owens y Outhred, 2006). Parece necesario realizar investigaciones que atiendan el desarrollo de las habilidades espaciales de los docentes y sus efectos en el proceso individual de los estudiantes.

Es relevante en las investigaciones **la visualización espacial**. Algunos trabajos diferencian la visualización espacial de la orientación espacial (McGee, 1979); otros investigan el vínculo entre la visualización espacial y la resolución de problemas, y logran establecer una relación positiva entre la visualización espacial y el tiempo dedicado a ver información esencial para obtener la solución, y la reducción del tiempo dedicado a ver material no esencial (Fry, 1988). La investigación de Bishop (1989) para la manipulación de las imágenes mentales, físicas y visuales, presenta dos tipologías de procesos: el procesamiento visual (VP), que convierte información abstracta o no figurativa en

imágenes visuales, o transforma imágenes visuales ya formadas en otras; y la interpretación de información figurativa (IFI), que permite extraer información a partir de comprender e interpretar las representaciones visuales.

Los estudios de Zimmerman y Cunningham (1991) profundizan sobre los vínculos que puede favorecer la tecnología informática con los procesos de visualización matemática. Los hallazgos de Yerushalmy et al. (1999) y Parzysz (1999) enfatizan que la visualización puede ser poderosa no solo en geometría y trigonometría, sino también en álgebra. Estudios más recientes introducen los softwares de geometría dinámica para trabajar la visualización espacial de los estudiantes (Arcavi y Hadas, 2002; Hadas y Arcavi, 2001; Markopoulos y Potari, 1999; Pratt y Davison, 2003; Sinclair, 2003).

Gutiérrez (1996) valora la visualización como una actividad que hace uso de elementos espaciales o visuales, sean físicos o mentales, para resolver problemas y probar propiedades. La considera compuesta por cuatro elementos: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización.

Así, define la *imagen mental* como cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales. La *representación externa* pertinente a la visualización es cualquier tipo de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades, incluidas imágenes, dibujos o diagramas, que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y razonar visualmente. El *proceso de visualización* lo entiende como una acción mental o física donde están involucradas las imágenes mentales; considera dos procesos involucrados en la visualización: interpretación visual de la información, para crear imágenes mentales; e interpretación de imágenes mentales, para generar información. Las *habilidades de visualización* son necesarias para realizar los procesos con imágenes mentales específicas en un problema determinado; las principales habilidades son: percepción figura-fondo, constancia perceptiva, rotación mental, percepción de posiciones espaciales, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual (Gutiérrez, 1996).

Por su parte, Stylianou (2001) vincula las imágenes visuales con la resolución de problemas matemáticos y estudia esta relación en su investigación. Mientras que Breen (1997) describe el pensamiento matemático marcado por dos tipos de tendencia: la

comprensión intuitiva, con énfasis en los procesos de visualización y en las imágenes, y la abstracción.

Algunas investigaciones destacan que es una línea de interés estudiar la interacción entre la visualización y la didáctica de las matemáticas, buscando aclarar cómo la pedagogía puede mejorar el uso y el poder de la visualización en beneficio de la educación matemática, es un tema continuo e importante, además de ser un área hasta ahora descuidada (Fernández, 2013; Presmeg, 1991, 2006; Woolner, 2004).

En relación con los **esquemas de imágenes mentales**, Dörfler (1991), propone cuatro tipos de esquemas: figurativo, operativo, relacional y simbólico; e induce a que dan significado en matemática. Asimismo, varios autores valoran el procesamiento de imágenes como fundamental para el razonamiento matemático (Wheatley, 1997; Wheatley y Brown, 1994).

Algunos estudios consideran como parte importante para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas favorecer la interacción entre **las representaciones externas e internas**. La representación interna o imaginaria visual sustenta la creación de un dibujo o diagrama o una disposición espacial, y se infiere a partir de las interacciones con la producción de la representación externa (Duval, 1999; Goldin, 2007; Presmeg, 2006).

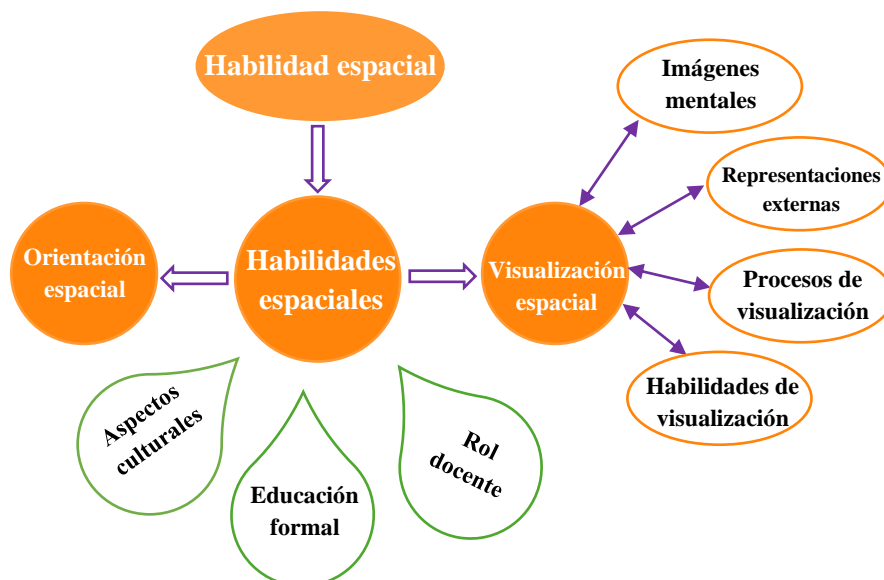


Figura 2. Proceso entre habilidad y habilidades espaciales.

En síntesis, algunos investigadores aluden a la habilidad espacial mientras otros refieren a habilidades espaciales. Diferencian entre orientación y visualización espacial, entre

otras. La visualización espacial ocupa un papel central y tiene su propio recorrido, distinguen entre imágenes mentales, representaciones externas, proceso de visualización y habilidades de visualización. Parece haber acuerdo en que en las habilidades espaciales hay un componente innato y otros aprendidos con lo que las habilidades se desarrollan y se enseñan. Se estudia en el proceso de desarrollo la influencia del contexto cultural del estudiante, de la enseñanza y del docente que la imparte (ver figura 2).

3.1.2. Términos y conceptos vinculados con el sentido espacial

La capacidad de pensar espacialmente es una de las habilidades cognitivas fundamentales de los humanos. Les permite moverse en su entorno, apuntar a objetivos, planificar rutas, estimar distancias y velocidades, reconocer la posición de objetos espaciales en relación unos con otros y entre otros (Maresch y Sorby, 2021).

Además, los investigadores en educación concuerdan en reconocer el vínculo positivo entre el aprendizaje de la geometría y el rendimiento en matemática (Houdement, 2017; Owens y Outhred, 2006; Riastuti et al., 2017). La geometría no solo desarrolla las habilidades cognitivas de los estudiantes, sino que también forma en el proceso de pasar del pensamiento concreto al abstracto. La geometría ayuda a los estudiantes a analizar e interpretar el mundo, y también les proporciona herramientas que se pueden aplicar en otros campos matemáticos (Riastuti et al., 2017).

Muchas investigaciones indican que las brechas de conocimiento entre los diferentes niveles de rendimiento en matemáticas aparecen en gran parte debido a la falta de conexión entre el conocimiento informal e intuitivo de los niños y las matemáticas escolares (Clements y Sarama, 2007).

Se ha encontrado una diversidad en la terminología que se emplea en torno al sentido espacial. Se aprecia una agrupación de términos dependiendo de la conceptualización que presenta cada investigación, llegando a que parecieran incluirse entre sí. Se parte de los conceptos más básicos para llegar a los más concretos y estrechamente vinculados con el sentido espacial según se detalla: habilidad y habilidades espaciales, pensamiento y razonamiento espacial, y pensamiento y razonamiento geométrico (ver figura 2).

3.1.2.1. *Habilidades espaciales*

Los estudios encontrados concuerdan en que la habilidad espacial se define como una colección de manifestaciones vinculadas con la formulación, representación y manipulación de imágenes reales o mentales (Acar, 2014; Berciano y Gutiérrez, 2015; Diezmann y Lowrie, 2009; Grüßing, 2012; Mizzi, 2017; Plath y Ruwisch, 2012; Xistouri y Pitta, 2006). La mayoría de los autores agrupan estas habilidades espaciales en dos factores o categorías: visualización espacial y orientación espacial (Acar, 2014; Berciano y Gutiérrez, 2015; Xistouri y Pitta, 2006). Algunos autores agregan nuevas categorías: las habilidades de percepción visual (Diezmann y Lowrie, 2009; Mizzi, 2017), las relaciones espaciales (Plath y Ruwisch, 2012), la rotación mental (Grüßing, 2012). En la tabla 1 se presentan los autores que la emplean, el concepto de habilidad espacial, en caso de explicitarlo, las habilidades que la componen, y los autores referentes para hacer tales afirmaciones.

Tabla 1. *Concepto y componentes de la habilidad espacial*

Autores	Concepto	Componentes	Autores referentes
Xistouri y Pitta (2006)	Habilidad espacial o capacidad espacial, la definen como la capacidad de formular imágenes mentales y manipular estas imágenes en la mente. Con dos componentes de las habilidades espaciales: la visualización espacial y la orientación espacial.	La visualización espacial como la comprensión y ejecución de movimientos imaginados de objetos en espacios con dos y tres dimensiones. La orientación espacial como la comprensión y operación sobre las relaciones entre las posiciones de los objetos en el espacio con respecto a la propia posición.	Lean y Clements (1981) Clements y Battista (1992)
Diezmann y Lowrie (2009)	Hablan de habilidad espacial que incluye habilidades espaciales particulares y habilidades de percepción espacial.	Habilidades espaciales particulares, como la visualización espacial o la orientación espacial. Varias habilidades de percepción espacial, como la coordinación ojo-motora; percepción figura-fondo; constancia perceptiva; percepción de la posición en el espacio; percepción de las relaciones espaciales;	McGee (1979) Del Grande (1990)

		discriminación visual o memoria visual.	
Grüßing (2012)	Las habilidades espaciales se consideran requisitos previos importantes para el aprendizaje de las matemáticas. En particular los hallazgos empíricos muestran que las habilidades espaciales se relacionan positivamente con el rendimiento en matemáticas.	Distingue las siguientes dimensiones: visualización, rotación mental, y orientación espacial.	Fennema y Sherman (1977) Lohman (1988)
Plath y Ruwisch (2012)	<p>Describen las habilidades espaciales como la competencia de operar mentalmente con objetos de dos o tres dimensiones. Las habilidades espaciales implican la generación, retención, recuperación y transformación de información visuoespacial.</p> <p>Las habilidades espaciales deben verse como un concepto complejo que es parte fundamental del concepto de inteligencia y puede dividirse en diferentes componentes.</p>	En la inteligencia humana diferencia tres subfactores dentro del factor 'espacio': relaciones espaciales, visualización y orientación espacial.	Rost (1977) Collom et al. (2001) Thurstone (1938, 1950) McGee (1979) Linn y Petersen (1985) Carpenter y Just (1986) Maier (1999)
Acar (2014)	Habla de habilidad espacial. La habilidad espacial en dos partes: la orientación espacial y la visualización espacial.	<p>La visualización espacial significa que el sujeto debe ser imaginado como las rotaciones de los objetos en el espacio.</p> <p>La orientación espacial significa que el sujeto debe ser reconocido y las relaciones entre las diversas partes de una configuración y su propia posición son comprendidas.</p>	Bishop (1980) Harris (1981) McGee (1979) Clements y Sarama (2007) Comité del Consejo Nacional de Investigación sobre Primera Infancia (2009)
Berciano y Gutiérrez (2015)	La visualización espacial se puede definir como la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión.	La capacidad de visualización espacial como una colección de procesos involucrados en la generación y manipulación de imágenes mentales, así como en la orientación del dibujo de figuras o diagramas en papel o pantallas de computadora.	Sarama y Clements (2009) Presmeg (2006)

Jones y Tzekaki (2016)	Capacidades espaciales: rotación mental, aprehensión de la figura, toma de perspectiva, desempeño en la simetría, visualización espacial.	Distingue tres factores principales de la capacidad espacial: relaciones espaciales, visualización y orientación espacial.	Thurstone (1950)
Mizzi (2017)	La habilidad espacial se define como una colección de habilidades que cambian o apoyan la percepción del espacio y se pueden representar mentalmente o en términos reales usando diferentes representaciones del conocimiento espacial. Describe varias habilidades espaciales que se asignan en tres categorías, operaciones espacio-visuales y habilidades visuales.	Operaciones espacio-visuales. Consisten en acciones mentales sobre objetos espaciales y acciones reales en el espacio. Las habilidades que incluyen son la capacidad de construir o reproducir mentalmente objetos, transformar sus características espacio-visuales, por ejemplo, su posición o forma, modelar, dibujar y describir objetos espaciales reales y su transformación. Habilidades visuales. Consiste en la interpretación y construcción de diferentes formas de representación de objetos espacio-visuales, tales como modelos, gráficos y la descripción de configuraciones.	Pinkernell (2003)

3.1.2.2. *Pensamiento y razonamiento espacial*

El *pensamiento espacial* (*spatial thinking*) se presenta como sinónimo del pensar como acción interiorizada de Piaget (Meissner, 2006). Algunos autores vinculan el pensamiento espacial con la orientación espacial, es un pensamiento que encuentra significado en la forma, tamaño, orientación, ubicación, dirección o trayectoria de objetos, procesos o fenómenos, o las posiciones relativas en el espacio de múltiples objetos, procesos o fenómenos (Acar, 2014). Otros hablan de pensamiento visual como el proceso mental de percibir, reconocer y retener en la memoria, aludiendo a la forma en que un individuo adquiere y procesa la información visual (Jones y Tzekaki, 2016). El pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, se usa para representar y manipular información en el aprendizaje y resolución de problemas (Clements y Battista, 1992). En la tabla 2 se presentan otros conceptos del pensamiento espacial.

Tabla 2. *Conceptos de pensamiento espacial*

Autores	Concepto
NRC (2006)	El pensamiento espacial se basa en una amalgama constructiva de tres elementos: conceptos de espacio, herramientas de representación y procesos de razonamiento. Depende de comprender el significado del espacio y utilizar las propiedades del espacio como vehículo para estructurar problemas, encontrar respuestas y expresar soluciones. Al visualizar las relaciones dentro de las estructuras espaciales, se puede percibir, recordar y analizar las propiedades estáticas y, a través de transformaciones, las propiedades dinámicas de los objetos y las relaciones entre los objetos.
Maresch y Sorby (2021)	El pensamiento espacial se utiliza como un término general que abarca varios conceptos, como la percepción espacial, la capacidad espacial, la percepción visual o la inteligencia espacial. Se utiliza como un término general común y unificador para la capacidad humana de dirigir estímulos ópticos recibidos por el ojo al cerebro, para poder interpretar estos estímulos y reconocer objetos espaciales.

El *razonamiento espacial (spatial reasoning)* consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de objetos, relaciones y transformaciones espaciales (Clements y Battista, 1992). Se emplean términos como razonamiento espacial, habilidad espacial, inteligencia espacial, espacialidad, vinculada a la estructuración espacial, como la operación mental de construir una organización o forma para un objeto o conjunto de objetos; determina la naturaleza, forma o composición del objeto al identificar sus componentes espaciales, relacionar y combinar estos componentes y establecer interrelaciones entre los componentes y los nuevos objetos (Houdement, 2017).

El razonamiento espacial siempre ha sido una capacidad vital para la acción y el pensamiento humanos, pero no siempre se lo ha identificado o apoyado en la enseñanza (Jones y Tzekaki, 2016). Algunos estudios revelan la importancia y la necesidad de desarrollar el razonamiento espacial de los estudiantes y su impacto en el proceso creativo y continuo de reconfiguración del espacio (Thom, 2018).

En la actualidad, las investigaciones sobre el razonamiento espacial han mostrado que se usa en la vida laboral, cotidiana y académica (Owens, 2017). Más aún, se ha encontrado que requieren de este tipo de razonamiento los estudiantes de STEM, así como de otras carreras universitarias, por ejemplo, arquitectura, artes, diseño gráfico, geología y química. Diferentes estudios señalan su complejidad dado que involucra interacciones entre acciones y competencias para comprender y transformar objetos y relaciones espaciales (Ortiz y Sandoval, 2018). En la tabla 3 se presenta la concepción de razonamiento espacial que tienen algunos autores.

Tabla 3. *Razonamiento espacial*

Autores	Concepto
Battista (2007)	El razonamiento espacial como la capacidad de ver, inspeccionar y reflexionar sobre objetos, imágenes, relaciones y transformaciones espaciales. El razonamiento espacial incluye generar imágenes, inspeccionarlas para responder preguntas sobre ellas, transformar y operar con imágenes y mantener imágenes al servicio de otras operaciones.
Varzi (2007)	El razonamiento espacial no es un asunto abstracto, significa razonar sobre entidades situadas en el espacio, y tales entidades tienen una estructura espacial.
Acar (2014)	La estructuración espacial se define como el proceso de organización de conceptos bidimensionales y tridimensionales. Se relaciona con seleccionar, coordinar, unificar y registrar en la memoria un conjunto de objetos mentales y acciones.
Jones y Tzekaki (2016)	El razonamiento espacial requiere de la intuición visual y de la visualización, entendida como la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual.
Miragliotta y Baccaglioni (2017)	El razonamiento espacial incluye cuatro clases de procesamiento de imágenes: generar una imagen; inspeccionar una imagen para responder preguntas sobre ella; transformar y operar sobre una imagen; mantener una imagen al servicio de alguna otra operación mental.
Ortiz y Sandoval (2018)	El razonamiento espacial se considera como un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel mental) y transformar (a nivel físico) el espacio donde vive o desarrolla una tarea. La perspectiva de sistema permite representar interacciones, movimiento y yuxtaposición entre acciones, elementos y competencias emergentes.

3.1.2.3. *Pensamiento y razonamiento geométrico*

Numerosos matemáticos y educadores matemáticos han sugerido que la habilidad espacial y las imágenes visuales juegan papeles vitales en el pensamiento matemático. Una parte interesante al observar la actividad de los estudiantes es identificar sus estilos de pensamiento: analítico, geométrico y armónico. De acuerdo con la clasificación de Krutetskii, tienen *pensamiento geométrico* (*geometric thinking*) aquellos estudiantes que prefieren utilizar esquemas visuales-pictóricos en sus procesos de razonamiento (Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 2017).

Se han realizado investigaciones sobre tres perspectivas del desarrollo del pensamiento geométrico: Piaget, van Hiele y la ciencia cognitiva con el modelo de cognición de Anderson, el modelo de resolución de problemas de Greeno y las redes de procesamiento distribuido en paralelo (Clements y Battista, 1992). Detrás de la mayor parte del pensamiento geométrico está el razonamiento espacial (Battista, 2007).

El pensamiento geométrico se describe esencialmente como un conglomerado de diversas actividades y habilidades matemáticas características. Estas son, por un lado, necesarias para el aprendizaje de la geometría orientado a la comprensión y por otro, pueden

desarrollarse mediante el aprendizaje de la geometría (Hattermann et al., 2015). En la tabla 4 se presentan algunos aspectos que constituyen el pensamiento geométrico considerado por Hattermann et al. (2015) y por Mizzi (2017).

Tabla 4. Aspectos del pensamiento geométrico

Autores	Aspectos
Hattermann et al. (2015)	Se pueden derivar cinco aspectos del pensamiento geométrico: imaginación espacial y estructuración espacial, formación de conceptos, uso de representaciones, resolución de problemas, argumentar y demostrar.
Mizzi (2017)	El pensamiento geométrico, incluye habilidades como reconocer y comprender objetos espaciales, describirlos y transformarlos considerando sus características geométricas. Las habilidades dentro de esta categoría incluyen la reducción de sólidos a su forma geométrica, patrón o estructura para facilitar los procesos de resolución de problemas.

El *razonamiento geométrico (geometric reasoning)* consiste ante todo en la invención y uso de sistemas conceptuales formales para investigar la forma y el espacio (Battista, 2007). El razonamiento geométrico requiere del razonamiento espacial (Clements y Battista, 1992; Miragliotta y Baccaglini, 2017).

En conclusión, parece que las habilidades espaciales son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas. Además, el razonamiento espacial nutre el razonamiento geométrico, pero el razonamiento geométrico necesita otras habilidades, como definir y clasificar; mientras que los problemas espaciales, como orientarse en un lugar desconocido, no puede asimilarse a tareas geométricas (Houdement, 2017). Se elabora la figura 3 para establecer la relación entre la diversidad de terminología presentada antes.

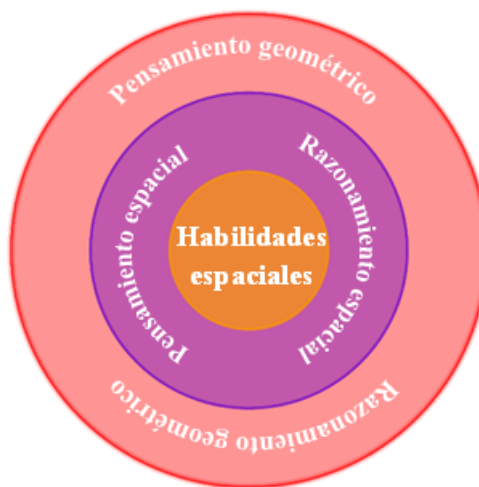


Figura 3. Conexión entre la diversidad de terminología y conceptos.

En síntesis, parece que las habilidades espaciales están en el núcleo de la diversidad de terminología encontrada y llegan, además, a que parecieran incluirse entre sí. Se parte de los conceptos más básicos de habilidades espaciales para llegar a los más concretos y estrechamente vinculados con el sentido espacial como son el pensamiento y razonamiento espacial, y el pensamiento y razonamiento geométrico.

3.1.3. Origen, concepto y componentes del sentido espacial

Sirve de nexo entre las terminologías presentadas anteriormente y el sentido espacial, la afirmación de Wheatley (1990), “los autores de los estándares (NCTM, 1989) utilizan el término **sentido espacial** para referirse a lo que se ha conocido por una variedad de otras etiquetas, desde visualización espacial, razonamiento espacial, percepción espacial e imágenes visuales hasta rotaciones mentales” (p.10). Se podría decir entonces “que cada uno de estos estudios está considerando el sentido espacial” (Owens y Outhred, 2006, p.89).

Vinculado con las primeras ideas de habilidad o habilidades espaciales, Clements y Sarama (2007) afirman que el ser humano nace con un sentido fundamental de la cantidad, así como con sentido espacial y una propensión a buscar patrones.

Los psicólogos han estudiado el sentido espacial y las habilidades espaciales durante años, y solo recientemente los educadores matemáticos se han interesado seriamente en la relación entre las habilidades espaciales y el desarrollo de conceptos geométricos (Del Grande 1990).

De acuerdo con las distintas concepciones del sentido espacial, se puede afirmar que este constructo incluye las terminologías presentadas anteriormente y sus concepciones. En relación con la habilidad y habilidades espaciales, según Del Grande (1990), el sentido espacial no consiste en una sola destreza o habilidad. Vinculado al razonamiento y pensamiento espacial, según Tzekaki e Ikonomou (2009), el sentido espacial se relaciona con la capacidad de percibir el mundo, representarlo, establecer relaciones y transformarlo. Asociado al razonamiento y pensamiento geométrico, según Houdement (2017) el sentido espacial se refiere a la capacidad de reconocer y manipular las propiedades de los objetos y las relaciones entre ellos. Así, en la tabla 5 se recogen algunos autores con sus respectivas concepciones del sentido espacial.

Tabla 5. *Concepto de sentido espacial*

Autores	Concepto
NCTM (1989)	Sentido espacial puede definirse como la capacidad de “captar el mundo externo” (Freudenthal).
Del Grande (1990)	Sentido espacial suele denominarse percepción espacial o visualización espacial. La percepción espacial no consiste en una sola destreza o habilidad. Hoffer, 1977 sugiere siete habilidades de percepción visual: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual.
Tzekaki e Ikononou (2009)	El sentido espacial se vincula con la capacidad de percibir el mundo espacial y representarlo mentalmente. Las representaciones espaciales son construcciones mentales relacionadas con la información espacial: objetos, formas, orientación, ubicación y propiedades espaciales, relaciones y transformaciones.
Lupiáñez y Rico (2015)	Plantean que el sentido espacial es un campo del sentido matemático.
Houdement (2017)	La noción de sentido espacial vinculada al razonamiento espacial (o habilidad espacial, inteligencia espacial, o espacialidad), se refiere a la capacidad de reconocer y manipular (mentalmente) las propiedades espaciales de los objetos y las relaciones espaciales entre los objetos. Los ejemplos de razonamiento espacial incluyen: ubicar, orientar, descomponer y recomponer, equilibrar, diagramar, simetría, navegar, comparar, escalar y visualizar. El sentido espacial vinculado con la estructuración espacial y lo define como: la operación mental de construir una organización o forma para un objeto o conjunto de objetos. Determina la naturaleza, forma o composición del objeto al identificar sus componentes espaciales, relacionar y combinar estos componentes y establecer interrelaciones entre los componentes y los nuevos objetos.
Cruz y Ramírez, (2018)	El sentido espacial es un conjunto complejo de competencias interconectadas que interactúan necesariamente para relacionarse con el espacio.

El desarrollo del sentido espacial es un objetivo central de la enseñanza de matemáticas que engendra la resolución de problemas en particular y la realización de matemáticas en general. Un fuerte sentido espacial permite a los estudiantes generar soluciones basadas en imágenes. Sin sentido espacial, un estudiante solo puede actuar mecánicamente con formas y símbolos que tienen poco significado (Wheatley y Reynolds, 1999).

La importancia del sentido espacial se demuestra por su identificación como una dimensión especial de la inteligencia, inteligencia espacial, que define la capacidad de percibir el mundo espacial y representarlo mentalmente con precisión. Esta construcción mental, como proceso y como resultado, plasma el mundo (objetos y hechos) en la mente del individuo facilitando su funcionalidad. La mayor parte de la interacción de los niños con el entorno natural y social requiere el uso de representaciones espaciales apropiadas necesarias para manejar y enfrentar situaciones espaciales (Tzekaki e Ikononou, 2009).

Los tres aspectos principales del sentido espacial que parecen más esenciales para "captar el mundo" y para desarrollar el pensamiento matemático son: la visualización espacial, la orientación espacial y la forma (van Nes y de Lange, 2007; van Nes y van Eerde, 2010). Estos aspectos pueden reconocerse en los fundamentos de los currículos integrales de matemáticas para los grados medios, como matemáticas en contexto (van Nes y de Lange, 2007).

La visualización espacial implica la capacidad de representar mentalmente los movimientos de objetos espaciales de dos y tres dimensiones. En tareas de visualización espacial, toda o parte de una representación puede ser movida o alterada mentalmente; la capacidad de realizar transformaciones basadas en objetos donde el marco de referencia del observador permanece fijo y se mueven las posiciones de los objetos (Clements y Sarama, 2007; van Nes y de Lange, 2007; van Nes y van Eerde, 2010).

Otro aspecto del sentido espacial con la que se puede captar el mundo es la orientación espacial, que ya fue definida como una de las habilidades espaciales que componen la habilidad espacial. Se refiere al modo cómo hacemos nuestro camino en el espacio. En la orientación espacial, el sistema de representación de sí mismo en relación con el objeto está en trabajo de construcción porque el espectador reorienta en cada ocasión el yo imaginado (Clements y Sarama, 2007; van Nes y de Lange, 2007; van Nes y van Eerde, 2010).

El tercer aspecto del sentido espacial es la forma. Tiene que ver con la manipulación mental de formas espaciales desde una perspectiva fija. Implica hacer referencia a formas y figuras, así como a estructuras familiares como el propio cuerpo, o figuras geométricas, como mosaicos, y patrones geométricos, o como configuraciones de puntos en dados o fichas de dominó (Clements y Sarama, 2007; van Nes y de Lange, 2007; van Nes y van Eerde, 2010).

3.1.4. Concepto, componentes del sentido espacial y habilidades de visualización consideradas en este estudio

En este apartado se establece el concepto de sentido espacial que se emplea en esta investigación, para lo que se determinan las componentes del sentido espacial y las habilidades de visualización que ofician de sustento teórico de esta investigación. Se

entiende que abarcan y sintetizan las distintas concepciones y aspectos presentados anteriormente.

Se ha considerado la conceptualización del sentido espacial de Tzekaki e Ikonou (2009) y Houdement (2017) sin embargo, la operativización que utiliza Flores et al. (2015) en relación con el manejo de conceptos geométricos resulta favorable para los objetivos de esta investigación. De igual modo sucede con los tres aspectos principales que constituyen el sentido espacial propuestos por van Nes y de Lange (2007), y van Nes y van Eerde, (2010): la visualización espacial, la orientación espacial y la forma, y se considera más operativo dividir estos tres aspectos en varias componentes según Flores et al (2015). En relación con la visualización se utiliza el marco teórico de Gutiérrez (1996) que considera las habilidades de visualización de Del Grande (1990).

Flores et al. (2015) describen el sentido espacial como un modo intuitivo de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas” (pp.129-130). Además, lo conciben constituido por tres componentes: conceptos geométricos y propiedades de las formas; relaciones geométricas; ubicación y movimientos, y orientación. Agregan la visualización como una componente transversal que establece conexiones entre las tres anteriores y da fortaleza al sentido espacial, si bien la conexión entre las componentes retroalimenta y fortalece el sentido espacial en su conjunto, como se muestra en la figura 4.

La componente conceptos geométricos y propiedades de las formas implica conocer formas y figuras, que incluye identificarlas, definir las, construirlas y caracterizarlas. Manejar relaciones geométricas implica reconocerlas y establecerlas, apreciando cualidades de las formas y los cuerpos geométricos. La ubicación y los movimientos requiere la capacidad para situar los elementos en el plano y en el espacio, realizar movimientos e identificar regularidades y elementos invariantes; y la orientación espacial es entendida como la capacidad para comprender cómo se disponen los elementos en el espacio y no confundirlos.

La destreza necesaria para visualizar los conceptos geométricos, la visualización, se entiende como “un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y

útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras objetos y modelos geométricos” (Flores et al., 2015, p. 133).

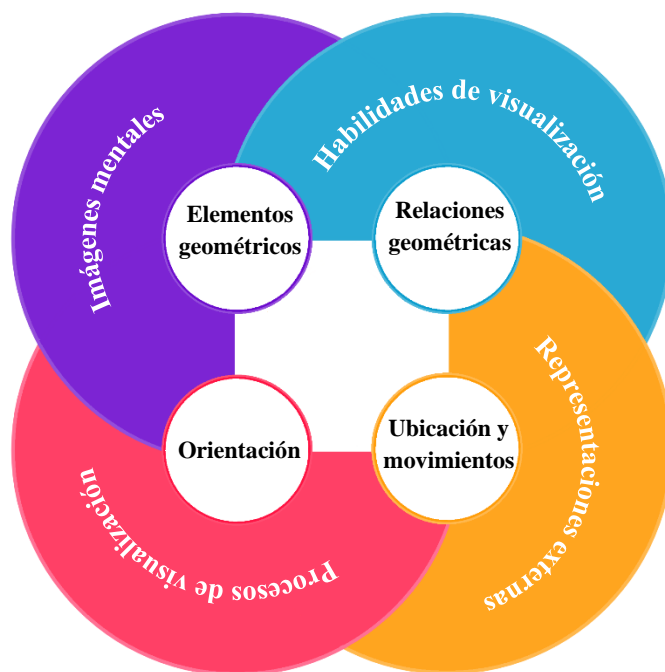


Figura 4. Conexión entre las componentes del sentido espacial

En este marco se considera, siguiendo a Gutiérrez (1996), la visualización integrada por cuatro elementos que han sido descritos anteriormente: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización.

Algunos estudios aluden a la interacción entre representaciones externas e internas como parte fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La representación interna o imaginaria visual se infiere a partir de las interacciones con la producción de la representación externa, es una etapa básica y subyace a la creación de un dibujo o diagrama o a la combinación de objetos (Goldin, 2007; Presmeg, 2006). En cuanto a los procesos del pensamiento espacial, Maresch y Sorby (2021) señalan la percepción visual como una etapa preliminar de la capacidad espacial. Le sigue la orientación espacial que implica el cambio mental de perspectivas espaciales.

De los elementos que componen la visualización, en este trabajo se pone el foco en las habilidades de visualización, por adquirir un papel relevante en los distintos procesos de

la resolución de una tarea matemática para interpretar visualmente la información desde las representaciones externas y las imágenes mentales (Gutiérrez, 1996).

Las habilidades espaciales se definen como aquellas que cambian o apoyan la percepción del espacio y pueden representarse mentalmente o en términos reales usando el conocimiento espacial (Mizzi, 2017). Del Grande (1987 y 1990) se basa en los materiales de prueba producidos por Frostig y Horne (1964) y por Hoffer (1977) para establecer siete **habilidades de visualización** relevantes para la percepción espacial, considerando cinco de los primeros y las otras dos del segundo autor: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Además, afirma que son los educadores “los que deben relacionar la base teórica con la práctica pedagógica para ayudar a los alumnos a mejorar su sentido espacial, que consiste en las habilidades necesarias para el éxito futuro en las matemáticas y también en otros campos” (Del Grande, 1990, p.20).

La habilidad *coordinación ojo-motor* la entiende como la capacidad de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo; las actividades geométricas que involucra son, por ejemplo, trazar figuras o rellenar regiones con pautas o sin ellas, construir estructuras con bloques. La *percepción figura-contexto* es el acto visual de identificar un componente específico en una situación e implica cambios en la percepción de figuras contra fondos complejos donde se utilizan formas que se cruzan y "ocultan"; las actividades que involucra son, por ejemplo, localizar una figura entre un conjunto de figuras superpuestas, completar o ensamblar una figura, observar similitudes y diferencias.

La *conservación de la percepción* es la capacidad de reconocer que un objeto tiene ciertas regularidades, propiedades invariantes como el tamaño, la forma y la textura, aunque cambio de posición o deje de verse completo; las actividades geométricas involucradas son, por ejemplo, identificar figuras que tienen la misma forma y diferente tamaño, ordenar objetos según su tamaño, identificar figuras que tienen el mismo tamaño y forma, reconocer el mismo objeto desde diferentes puntos de vista.

La *percepción de la posición en el espacio* es la capacidad de determinar la relación de un objeto con otro objeto o con el observador; las actividades que involucra son, por ejemplo, rotar figuras enteras, cambiar de posición y realizar inversiones.

La percepción de las relaciones espaciales es la capacidad de ver dos o más objetos relacionados con uno mismo o entre sí en el espacio; las actividades geométricas son, por ejemplo, construir una estructura con cubos, completar una secuencia y encontrar el camino más corto a un objetivo.

La discriminación visual es la capacidad de identificar las similitudes y diferencias entre objetos, las actividades de clasificar y ordenar objetos y formas geométricas son un ejemplo.

La memoria visual es la capacidad de recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista; las actividades de copiar una figura dada en otras condiciones y recuerda objetos que estaban en determinado lugar.

Con esta caracterización se identifica el sentido espacial y las habilidades de visualización en términos de creación de imágenes, involucrando procesos y estrategias funcionales que distan de un enfoque tradicional de la enseñanza de la geometría (Owens y Outhred, 2006).

3.1.5. Errores y su clasificación

Para complementar las conductas observables de los estudiantes, el análisis cognitivo prevé la atención a lo que son capaces de hacer y a las limitaciones que pueden surgir en el proceso de aprendizaje (Lupiáñez, 2009).

Desde la perspectiva de ahondar en las limitaciones en el proceso de aprendizaje, se presenta la concepción de error, en la que hay diferentes investigaciones que difieren en las denominaciones que usan: ideas erróneas, obstáculos, dificultades y errores. Con el fin de determinar las categorías se presentan taxonomías existentes acerca del error y algunos estudios específicos sobre errores en geometría, en particular los que atienden alguna componente del sentido espacial.

La noción de error y sus denominaciones se sustenta en reflexiones de epistemólogos y filósofos de la ciencia que se interesan por el conocimiento erróneo, que en educación deriva en una teoría de la didáctica de las matemáticas. Así, por ejemplo, Bachelard plantea la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición inevitable del

error como parte constitutiva del conocimiento, esta noción la retoma Brousseau para la didáctica de la matemática, con la teoría de las situaciones didácticas (Rico 1995).

Si un estudiante brinda una respuesta incorrecta a una cuestión matemática, la respuesta es errónea, la solución brindada es un error en relación con la situación propuesta. Los errores son concebidos como elementos estables en el proceso de aprendizaje. Las respuestas o producciones incorrectas que se plantean se consideran como señales, manifestaciones visibles de dificultades e incluso del fracaso en el logro del correcto aprendizaje de las matemáticas (Lupiáñez, 2009; Rico, 1995; Socas, 1997).

Conocer el tipo de error que manifiestan los estudiantes permite al docente seleccionar las estrategias que optimicen la enseñanza, favorezca la superación de los errores y facilite la adquisición de un nuevo conocimiento, de conceptos correctos y completos que el estudiante pueda relacionar con fluidez según le interese (Franchi y Hernández, 2004; Gutiérrez, 2006).

De acuerdo con las diferentes tipologías de errores consultadas en las investigaciones, se presentan algunas que nos permiten diferenciar tipos de errores. En la tabla 6 se recogen estas investigaciones, además, de cuatro estudios que plantean errores específicos relacionados con el sentido espacial.

Tabla 6. *Tipología de errores*

Autor	Criterio de clasificación de errores	Tipología de errores
Radatz (1979)	Clasifica los errores a partir del procesamiento de la información, las representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades. Establece cinco categorías generales.	Errores debidos a la dificultad del lenguaje. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Errores debido a rigidez del pensamiento. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
Movshovitz et al. (1987)	A partir del análisis de las soluciones de los estudiantes realizada por expertos, hacen una clasificación empírica de los errores fundamentada en el conocimiento matemático y establecen seis categorías descriptivas.	Errores debidos a datos mal utilizados Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje. Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente. Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados. Errores debidos a la falta de verificación en la solución. Errores técnicos.
Socas (1997)	Clasifica los errores en el aprendizaje de las matemáticas en	Errores que tienen su origen en un obstáculo. Errores que tienen su origen en la ausencia de

	el nivel secundario de acuerdo con su origen, en tres grandes categorías.	sentido.
Astolfi (1999)	Propone una clasificación de errores desde una perspectiva general, que agrupa en ocho categorías.	Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas. Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas. Errores debidos a los procesos adoptados. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad. Errores que tienen su origen en otra disciplina. Errores causados por la complejidad del contenido.
Owens y Outhred (2006)	Investigan acerca de la complejidad de la medición.	Errores en el concepto y la estructura de las unidades.
Diezmann y Lowrie (2009)	Investigan acerca de la interpretación de gráficos.	Errores en la interpretación de gráficos.
Clemens y Sarama (2007)	La investigación se centra en el desarrollo de aprendizaje de las matemáticas, en particular para las formas.	Errores en interrelacionar la parte con el todo.
Battista (2007)	La investigación sobre el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, centrada en la medida geométrica	Errores en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria.

3.2. Características de las tareas de evaluación

En este apartado se presentan las características de las tareas en la enseñanza de las matemáticas escolares. La finalidad de una tarea de enseñanza define a la expectativa de aprendizaje que se busca trabajar (Moreno y Ramírez, 2016).

Se define la tarea matemática como una propuesta para el estudiante, “que solicita su actividad en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p.186).

La resolución de la tarea permite evaluar el dominio de una determinada competencia matemática por parte de quien la resuelve y obtiene un perfil general del dominio de su competencia matemática (Niss y Højgaard, 2011). PISA considera que la competencia matemática es esencial para describir, explicar y predecir el mundo; y que mejora las oportunidades de vida de los estudiantes (OCDE, 2016).

La función de una tarea matemática depende de la fase de la secuencia de enseñanza y aprendizaje en la que se implemente: las tareas iniciales buscan motivar y relacionar con la realidad, y conocer aprendizajes previos; las tareas de desarrollo fomentan la interrogación y el cuestionamiento, ejercitan, elaboran y construyen significados; las tareas de cierre sacan de contexto, aplican y sintetizan (Moreno y Ramírez, 2016). En particular, las tareas de cierre tienen por propósito generar una representación grupal o individual, la función de síntesis y estructuración, y promover acciones de recapitular, relacionar y orientar nuevos aprendizajes. Los estándares curriculares (NCTM, 2000) afirman que la evaluación debe proporcionar información útil a los profesores y a los estudiantes, y apoyar el aprendizaje de las matemáticas significativas.

La evaluación establece el vínculo entre el currículo implementado y el logrado. El primero se refiere a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que el docente realiza en su clase. El currículo alcanzado por su parte atiende a lo que aprenden los estudiantes, se manifiesta a través de sus logros y se observa o infiere de sus acciones en respuesta a tareas y actividades de evaluación (Santos y Cai, 2016). En Uruguay, los documentos de educación secundaria entienden la evaluación desde una perspectiva comprensiva y formativa, como componente integrado de la enseñanza y al aprendizaje; como un medio para la acreditación de los aprendizajes y de los procesos de enseñanza; y debe ser acorde con los objetivos previstos en cada actividad y asignatura (CES, 2020).

La evaluación permite hacer inferencias referidas a los estudiantes, a los planes de estudio o sobre la enseñanza. Así como el currículo promulgado en el aula y el evaluado deben brindar información y mejorar el aprendizaje de forma productiva y positiva, las evaluaciones externas no deberían operar aisladamente del aula. Estas evaluaciones, externas y en el aula, interactúan entre sí y se basan en principios similares de sólida evaluación, la coherencia entre las dos ayudaría al éxito de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

Una evaluación válida y completa de las competencias matemáticas de una persona debe basarse en la identificación de las características y el alcance de las actividades matemáticas en las que la persona está involucrada (Niss y Højgaard, 2011).

Construir un conjunto de tareas matemáticas adecuadas para demostrar de forma válida, fiable y clara, la presencia de una determinada competencia matemática en una persona

presupone que existan o puedan crearse instrumentos que permitan detectar, caracterizar y juzgar el alcance y la profundidad del dominio de la competencia, en la forma en que se expresa en la actividad individual (Niss y Højgaard, 2011).

Dado que el objetivo de PISA es evaluar la competencia matemática de los estudiantes, propone una estructura organizativa para el conocimiento del contenido matemático basada en los fenómenos matemáticos que subyacen a amplias clases de problemas, y que han motivado el desarrollo de conceptos y procedimientos matemáticos específicos, incluyendo en particular el contenido espacio y forma (OECD, 2017).

El NCTM (2000) plantea que el estudio de la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas. La evaluación en geometría debe proponer, entre otros aspectos, analizar características y propiedades de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Dentro de la diversidad de características que constituyen una tarea, en este estudio se atienden cuatro aspectos que se consideran relevantes: los contextos en que se formulan, la tipología de los enunciados, el grado de complejidad y el formato en que se presentan las respuestas.

Contextos de las tareas. La situación o contexto es la parte del mundo del estudiante en la que se localizan las tareas que se le plantean, y de este modo las dota de significado. Comprender el contexto matemático es importante para los ciudadanos del mundo moderno. La elección de estrategias y representaciones matemáticas apropiadas depende del contexto en el que surge el problema matemático. Es decir, para resolver problemas e interpretar situaciones en contextos personales, ocupacionales, sociales y científicos, es necesario recurrir a ciertos conocimientos y comprensiones matemáticas (OECD, 2017). En la tabla 7 se muestran los cuatro contextos de tareas considerados por diferentes autores (Caraballo et al., 2011; Moreno y Ramírez, 2016; OECD, 2017).

El modelo matemático ofrecido por PISA considera las situaciones y los contextos, donde el contexto de cada tarea presenta una situación que el estudiante, al finalizar la enseñanza obligatoria, puede abordar y resolver mediante la activación de sus conocimientos, comprensión o habilidades matemáticas.

Tabla 7. *Contextos de las tareas de evaluación*

Contexto	Descripción
Personal	Se centran en actividades de uno mismo, de la familia o del grupo de pares. Incluyen (pero no se limitan a) aquellos que involucran preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación y finanzas personales.
Educativo, ocupacional o laboral	Se centran en el mundo del trabajo. Pueden involucrar (pero no se limitan a) cosas tales como medición, cálculo de costos y pedido de materiales para la construcción, nómina/contabilidad, control de calidad, programación/inventario, diseño/arquitectura y toma de decisiones relacionadas con el trabajo. Los contextos ocupacionales pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no cualificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional.
Social o público	Se centran en la propia comunidad (ya sea local, nacional o global). Pueden involucrar (pero no limitarse a) aspectos tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de manera personal, el foco de los problemas está en la perspectiva comunitaria.
Científico	Se relacionan con la aplicación de las matemáticas al mundo natural y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Estos contextos pueden incluir (pero no limitarse a) áreas como el tiempo o el clima, la ecología, la medicina, las ciencias espaciales, la genética, las mediciones y el propio mundo de las matemáticas. Los elementos que son intramatemáticos, donde todos los elementos involucrados pertenecen al mundo de las matemáticas, entran dentro del contexto científico.

Enunciados de las tareas. Los enunciados de las tareas están formados por una parte que da contexto a la tarea que se presenta en un texto o en tablas, cuadros, gráficos o diagramas, y por otra, por una o más preguntas asociadas a la situación (ANEP, 2023). Según Arévalo (2009), los enunciados pueden expresarse en forma de texto, esquema o en representación aritmética.

El enunciado en forma de texto describe la información relevante e irrelevante para obtener la solución. En forma esquemática se escribe el enunciado con una instrucción corta y se agrega información importante a través de tablas, gráficos, dibujos y otros. En forma aritmética se presenta el enunciado describiendo variables y datos numéricos (Arévalo, 2009).

Complejidad cognitiva de las tareas. La complejidad de una tarea matemática es una de las variables más importantes, porque proporciona fundamento para ordenar y secuenciar las tareas; y se pueden adaptar a diferentes ritmos de aprendizaje de los estudiantes. Se distinguen tres grados de dificultad: reproducción, conexión y reflexión (Moreno y Ramírez, 2016).

Reproducción: Engloba los ejercicios que son relativamente familiares y que exigen la reiteración de los conocimientos practicados (Moreno y Ramírez, 2016). Tareas que “requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido” (Caraballo et al., 2011, p.310).

Conexión: Plantean mayores exigencias para su interpretación, y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos para alcanzar una solución (Moreno y Ramírez, 2016). Tareas que “requieren que el estudiante muestre que puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos” (Caraballo et al., 2011, p.310).

Reflexión: Las tareas del nivel de reflexión requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados (Moreno y Ramírez, 2016). “Situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema” (Caraballo et al., 2011, p.310).

Formato de respuestas de las tareas. Se utilizan tres tipos de formato de respuesta para evaluar la competencia matemática en PISA: ítems de respuesta construida abierta, respuesta construida cerrada, y preguntas de respuesta seleccionada (opción múltiple simple y compleja). Los ítems de respuesta construida abierta requieren una respuesta escrita algo extensa por parte del estudiante. En dichos ítems también se puede pedir al estudiante que muestre los pasos seguidos o que explique cómo llegó a la respuesta (OECD, 2017).

Los ítems de respuesta construida cerrada proporcionan un entorno más estructurado para presentar soluciones a problemas, y producen una respuesta del estudiante que puede juzgarse fácilmente como correcta o incorrecta. Las respuestas construidas cerradas más frecuentes son números únicos. Los elementos de respuesta seleccionada requieren que los estudiantes elijan una o más respuestas entre varias opciones. Se utiliza un número aproximadamente igual de cada uno de estos formatos de respuesta para construir los instrumentos de la encuesta (OECD, 2017).

3.3. Expectativas de aprendizaje

Este apartado se estructura a partir de las variadas denominaciones de los investigadores sobre las expectativas de aprendizaje: metas, competencias, objetivos, demandas y resultados. Se las busca poner en diálogo y se las examina desde diversos niveles del currículo, las competencias educativas y los procesos cognitivos acerca de un contenido determinado a través de la demanda formulada en tareas concretas. Para Lupiáñez (2009), en matemáticas, las expectativas de aprendizaje se expresan en tres niveles: en demandas de actuación, en contenidos y en tareas. Para aclarar estos conceptos se presentan las competencias y los procesos cognitivos en educación matemática; el rendimiento de los estudiantes a través de la actuación en la resolución de TEP y TEA; y en cuanto a contenidos, el concepto de sentido espacial y sus componentes.

3.3.1. Expectativas de aprendizaje y sus concepciones

Algunos autores emplean indistintamente, metas, resultados y objetivos de aprendizaje para transmitir información sobre el tipo de fin educativo que interesa discutir (De Long et al., 2005).

Lupiáñez (2009) define las expectativas de aprendizaje en cualquier disciplina, como “aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes” (p. 77).

Las expectativas de aprendizaje también son consideradas como uno de los organizadores del currículo, como herramientas que permiten articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997); o como “herramientas para aclarar el pensamiento, dividir el aprendizaje en componentes, crear un orden lógico para el aprendizaje y demostrar que una intervención de aprendizaje es exitosa” (Gander, 2006, p. 9).

Parece que hubiera acuerdo en que hay dos niveles en las expectativas de aprendizaje: un nivel más general del aprendizaje de las matemáticas, a largo plazo, en el que se habla de metas y competencias matemáticas; otro nivel más específico, a corto plazo, en relación con lecciones, contenidos matemáticos o cursos, donde se habla de objetivos de enseñanza (Castro et al., 2022; García, 2015).

En las expectativas de aprendizaje a largo plazo, De Long et al. (2005), hablan de meta para referirse a los fines generales y de gran escala de la educación que se logran como respuesta a un conjunto de acciones educativas, de un proceso educativo; mientras que Rico y Lupiáñez (2008) hablan de competencias para situarlas en una perspectiva amplia y comprensiva, que en matemáticas fundamentalmente se refieren a “procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de conocimientos y destrezas” (p.71), y describen los procesos cognitivos que orientan la formación a largo plazo.

Las expectativas de aprendizaje pueden ser consideradas en tres niveles de concreción de objetivos en el currículo: de una etapa, describe los resultados generales de toda una etapa o ciclo educativo; de un curso, describe los resultados esperados de seguir un programa, afectan a una asignatura; de un tema, describe resultados esperados de un tema concreto, afectan a una unidad temática (Rico y Lupiáñez, 2008).

Cuando las expectativas de aprendizaje actúan como objetivos, lo pueden hacer como objetivos educativos u objetivos de aprendizaje. Algunos autores utilizan el término objetivo para referirse a los pasos educativos discretos con los estudiantes, son específicos, concretos, limitados y conectados con áreas específicas matemáticas (De Long et al., 2005). Otros se refieren a objetivos específicos como “niveles concretos de expectativas de aprendizaje, que se expresan como capacidades y se muestran mediante conductas observables, relativos a una disciplina, una asignatura o un tema concreto y referidos a tareas de una complejidad establecida y vinculadas al currículo” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 68). Estos objetivos específicos concretan capacidades en relación con unos contenidos y a unas situaciones problemáticas concretas. Mientras otros autores consideran que los objetivos describen los resultados de aprendizaje como resultado de la instrucción que se enmarcan en términos de algún contenido de una materia y una descripción de lo que se debe hacer con ese contenido, a la vez que agregan que los objetivos educativos pueden ser un medio para determinar la congruencia de objetivos, actividades y evaluaciones educativas en una unidad, curso o plan de estudios (Krathwohl, 2002).

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se concretan en el desarrollo y logro de capacidades vinculadas con los conocimientos matemáticos que se espera que adquieran los escolares durante su etapa formativa obligatoria. La capacidad se muestra en la destreza y aptitud con que los estudiantes actúan y pueden usar sus conocimientos para

realizar tareas y resolver problemas en diferentes situaciones y contextos. Los objetivos en matemáticas suelen enunciar expectativas de aprendizaje con distintos grados de generalidad (Flores y Lupiáñez, 2016). En las matemáticas escolares es usual considerar tres niveles de concreción de objetivos, correspondientes a tres ámbitos de decisión: el área disciplinar, el curso o edad escolar y el tema o concreción del contenido.

3.3.2. Expectativas de aprendizaje y competencias educativas

Los estudios de las últimas décadas manifiestan que el término competencia tiene asociado una variedad de definiciones. Una persona que posee competencia dentro de un campo es alguien capaz de dominar los aspectos esenciales de ese campo de manera efectiva e incisiva, y con una visión general y certeza de juicio (Niss y Højgaard, 2011). Mientras que Weinert (2004), define la competencia “como un sistema bastante especializado de habilidades y capacidades necesarias o suficientes para alcanzar una meta específica” (p. 95). Desde el enfoque funcional la “competencia se define como la habilidad para enfrentar con éxito demandas complejas en un contexto determinado” (Rychen, 2008, p. 10).

Una competencia matemática es una disposición bien informada para actuar apropiadamente en situaciones que involucran un cierto tipo de desafío matemático (Niss y Højgaard, 2011). La OECD (2017) define la competencia matemática como “la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos” (p. 67). Además, considera que el desarrollo de la competencia matemática “ayuda a las personas a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a emitir los juicios y decisiones bien fundamentados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (p. 67).

De acuerdo con el marco de la OECD (2017) la definición de competencia matemática se puede analizar relacionando tres aspectos: los procesos, el contenido y los contextos. Son de interés en este apartado los procesos matemáticos porque describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto del problema con las matemáticas y así resolverlo, y las capacidades que subyacen a esos procesos. Señala siete capacidades cognitivas: comunicar; matematizar; representar; razonar y argumentar; idear estrategias para la

resolución de problemas; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; y usar herramientas matemáticas.

Vinculadas a estas capacidades cognitivas, algunos autores consideran que la competencia matemática la conforman un conjunto de ocho competencias, que son independientes y relativamente distintas, sin embargo, pueden estar relacionadas entre sí o no tan claramente delimitadas que no haya superposición. Cada una de las competencias permite llevar a cabo ciertos tipos de actividades matemáticas basándose en conocimientos fácticos y habilidades concretas. Las consideran en dos grupos, el primero referido a la capacidad de hacer y responder preguntas en y con las matemáticas formado por cuatro competencias: pensamiento matemático, abordar problemas, modelado y razonamiento. El otro grupo alude a la capacidad de manejar el lenguaje y las herramientas matemáticas: representar, manejar símbolos y lenguaje formal, comunicar, y uso de ayudas y herramientas (Niss y Højgaard, 2011).

Por su parte, Krathwohl (2002) habla de los objetivos educativos que ayudan a clasificar metas, objetivos o estándares educativos, compuestos por dos dimensiones: el conocimiento y los procesos cognitivos. Los objetivos más importantes de la educación implican procesos que van desde comprender hasta hacer síntesis. Por lo tanto, la dimensión de los procesos cognitivos está constituida por seis categorías: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear (ver tabla 8).

Tabla 8. *Competencias educativas*

Krathwohl (2002)	Procesos cognitivos	<p>Recordar. Como recuperar conocimientos relevantes de la memoria a largo plazo, que se puede traducir como identificar o reconocer.</p> <p>Comprender. Determinar el significado de las instrucciones tradicionales incluidos orales, escritos y gráficos, que se puede dividir en interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar y explicar.</p> <p>Aplicar. Significa realizar o utilizar un procedimiento en una determinada situación, que se traduce en ejecutar o implementar.</p> <p>Analizar. Significa desintegrar el material en las partes que lo constituyen y detectar cómo las partes se relacionan entre sí, a una estructura o a un propósito general, que se traduce en diferenciar organizar o atribuir.</p> <p>Evaluar. Significa emitir juicios basados en criterios y estándares, que se traduce en comprobar y criticar.</p> <p>Crear. Juntar elementos para formar un todo coherente o hacer un producto original que implica, generar, planificar y producir.</p>
---------------------	------------------------	--

Niss y Højgaard (2011); OECD (2017)	Competencias matemáticas	<p>Comunicar. Leer, decodificar e interpretar declaraciones, preguntas, tareas u objetos permite al individuo formar un modelo mental de la situación, paso importante para comprender, aclarar y formular un problema. Durante el proceso de solución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios. Una vez encontrada una solución, es posible que se necesite presentar a otros la solución, y una explicación o justificación.</p> <p>Matematizar. Implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática (que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo), o interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemáticos en relación con el problema original. Describe las actividades matemáticas involucradas.</p> <p>Representar. Implica seleccionar, interpretar, traducir y utilizar una variedad de representaciones para capturar una situación, interactuar con un problema o presentar un trabajo. Las representaciones mencionadas incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.</p> <p>Razonar y argumentar. Implica procesos de pensamiento con raíces lógicas que exploran y vinculan elementos del problema para hacer inferencias a partir de ellos, verificar una justificación dada o proporcionar una justificación de declaraciones o soluciones a problemas.</p> <p>Idear estrategias para la resolución de problemas. Implica un conjunto de procesos críticos de control, que guían a un individuo a reconocer, formular y resolver problemas de manera efectiva. Se caracteriza por seleccionar o idear un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver problemas derivados de una tarea o contexto, así como guiar su implementación.</p> <p>Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Implica comprender, interpretar, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático (incluidas expresiones y operaciones aritméticas) regido por convenciones y reglas matemáticas; comprender y utilizar construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales; y utilizar algoritmos con estas entidades.</p> <p>Usar herramientas matemáticas. Incluyen herramientas físicas, como instrumentos de medición, calculadoras y herramientas informáticas. Los estudiantes deben saber utilizarlas y conocer sus limitaciones.</p>
-------------------------------------	--------------------------	--

3.3.3. *Expectativas de aprendizaje y el sentido espacial*

Las expectativas de aprendizaje para matemáticas, “expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de las actuaciones de los estudiantes ante las tareas” (Lupiáñez, 2009, p. 77). Estos conocimientos habilitan a la persona que los domina a tener un conjunto de puntos de vista que le permiten una descripción general y juicio de las relaciones entre las matemáticas y las condiciones y oportunidades en la naturaleza, la sociedad y la cultura (Niss y Højgaard, 2011).

La comprensión del contenido matemático y la capacidad de aplicar ese conocimiento a la solución de problemas contextualizados significativos es importante para los ciudadanos del mundo moderno (OECD, 2017).

El NCTM (2000), considera que la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar la visualización, el modelado geométrico y el razonamiento espacial para resolver problemas. Su estudio debe proponer, analizar propiedades y características de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Las continuas investigaciones relacionadas con el sentido espacial manifiestan la complejidad de acciones e interacciones involucradas al resolver tareas que lo implican (Ortiz y Sandoval, 2018). Diversos trabajos consideran necesaria la inteligencia espacial para la resolución de problemas (Riastuti et al., 2017). Mientras que los estudios en educación de la geometría han abarcado el razonamiento y pensamiento espacial, añadiendo la visualización (Jones y Tzekaki, 2016), y la relación positiva con la resolución de problemas (Stylianou, 2001). Así el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de la geometría aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

3.3.4. Rendimiento de los estudiantes

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas desde el punto de vista de los contenidos se plantean a través de las tareas y se manifiestan por medio de las actuaciones y los logros de los estudiantes (Rico y Lupiáñez, 2016).

La OECD (2017), en uno de los contenidos propuestos por PISA, espacio y forma, describe la comprensión que se espera sobre un conjunto de conceptos y habilidades básicos. La competencia matemática en el área de espacio y forma implica una variedad de actividades como comprender la perspectiva, crear y leer mapas, transformar formas con y sin tecnología, interpretar vistas de escenas tridimensionales desde varias perspectivas y construir representaciones de formas. Dichas actividades se ponen de manifiesto en las diversas tareas propuestas en cada medición.

Las expectativas de aprendizaje se expresan como capacidades, y se evidencian a través de conductas observables de los estudiantes en la realización de tareas relativas a un tema

específico con una complejidad determinada, o al conocimiento matemático que se espera que hayan adquirido en el transcurso de una etapa escolar (Lupiáñez, 2009).

Nuestra investigación pretende apreciar qué resultados se pueden esperar que manifiesten los alumnos de una etapa en dos situaciones: cuando resuelven las tareas PISA en el contenido espacio y forma, y cuando resuelven las tareas de una unidad temática relativa a lugares geométricos.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen las fases durante la investigación, reflejo del proceso realizado. En primer lugar, se presenta el análisis didáctico como método que ha guiado el diseño de la investigación. Le siguen los apartados que describen cada una de las fases. La primera fase describe la revisión de literatura científica en torno al tema central, el sentido espacial y terminologías que se pueden vincular con ese concepto. La segunda fase atiende a las características de las tareas de evaluación, se muestra la recolección y selección de las TEP y las TEA, se determinan las categorías para su análisis y se presentan ejemplos del análisis realizado.

La tercera fase responde a las expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación. Con las tareas ya seleccionadas se determinan las categorías para su análisis: competencias matemáticas, procesos cognitivos y componentes del sentido espacial, y se exponen ejemplos del análisis realizado. La cuarta fase atiende a la manifestación del sentido espacial en la resolución de los estudiantes, se muestra la recolección de datos, la determinación de los sujetos en esta fase de la investigación, la clasificación de las respuestas a las TEP, la determinación de las categorías de análisis para las componentes del sentido espacial y de los errores de los estudiantes al resolver las tareas y el análisis realizado del sentido espacial.

4.1. Diseño de la investigación

La investigación se caracteriza por su enfoque cualitativo que se fundamenta en la “perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones” (Hernández et al., 2014, p. 9) de las personas y sus instituciones, en este caso, la educación. El enfoque cualitativo se caracteriza por una variedad de marcos de interpretación, todos ellos analizan tanto los aspectos manifiestos y explícitos como los subyacentes e implícitos. Además, tiene un carácter descriptivo, “los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (Hernández et al., 2014, p. 92).

Su diseño corresponde a la aplicación de una metodología propia de la didáctica de la matemática, el análisis didáctico. Se emplea como un método preciso y reglado para comprender textos, en nuestro caso las tareas estandarizadas liberadas de PISA y tareas de evaluación propuestas por docentes en el aula. El análisis didáctico maneja categorías matemáticas y educativas; subraya la precisión de ideas y juicios; trabaja a través de la división de lo complejo en partes más simples mediante la definición de categorías; y se caracteriza como método por el orden, la coherencia y una estructura bien determinada, en nuestro caso se analizan las TEP y las TEA (Rico y Fernández, 2013).

El análisis didáctico es un método de investigación que atiende los problemas de la didáctica de la matemática y “se centra en entender e interpretar la estructura, la organización, el comportamiento y las conexiones de los procesos de su enseñanza y aprendizaje” (Rico, 2012, p. 59). En este estudio se busca comprender las demandas al estudiante, de las componentes del sentido espacial presentes en las TEP y TEA.

El análisis conceptual “revisa en profundidad los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sobre sus fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje” (Rico, 2013, p. 16). En este estudio el análisis conceptual se realiza para caracterizar el sentido espacial y establecer las categorías de análisis del sentido espacial.

Otro elemento del análisis didáctico es el análisis de contenido que se caracteriza por analizar el significado simbólico de los mensajes, depende del contexto y su significado es diverso. El análisis de contenido acredita “lo oculto, lo latente, lo no aparente, lo potencial inédito, lo «no dicho», encerrado en todo mensaje” (López, 2002, p.173). Su aplicación permite analizar el contenido latente en un texto y “en la investigación educativa puede ayudarnos a inferir significados interpretativos a un texto” (Rico y Fernández, 2013, p. 9).

En educación matemática, se emplea como “un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (discurso del profesor, textos y producciones escolares)” (Rico, 2013, p. 18), en este estudio las tareas de las evaluaciones escritas de los docentes de matemática de primero de bachillerato y las tareas de las evaluaciones

externas que ofrece PISA 2012. Se analiza el contenido del sentido espacial requerido en cada tarea y se establecen categorías de análisis.

Otra de las componentes del análisis didáctico es el análisis cognitivo, que busca organizar hasta dónde se aprenden determinados conocimientos acerca de un tópico, centrado sobre las expectativas de aprendizaje, así como sobre las dificultades de aprendizaje empíricas y conocidas, y sobre los errores que se detectan en la práctica (Rico y Fernández, 2013). En este estudio, se busca también comprender los conocimientos de los estudiantes acerca del sentido espacial a través del análisis de las expectativas de aprendizaje manifiestas en las propuestas de TEA y TEP, y los errores que muestran los estudiantes cuando resuelven las TEP.

4.2. Fase 1. Conceptualización del sentido espacial

Para la primera fase de la investigación, el análisis conceptual presentado en el marco teórico en el apartado 3.1, se realiza una búsqueda bibliográfica, una revisión de la literatura científica, en relación con el sentido espacial. Se busca cumplir con el criterio de exhaustividad, se identifican los documentos relevantes que existen sobre el sentido espacial (Ocaña y Fuster, 2021). La búsqueda se acota a los últimos 20 años y se realiza en la colección principal de dos bases de datos: Scopus y Web of Science. La búsqueda en español proporciona pocos resultados y alguno de los autores ya se consideran dentro de la bibliografía consultada.

En Scopus se busca con las palabras en inglés: *spatial thinking*, *spatial abilities*, *spatial reasoning* or *spatial skills*, *spacial sense*, que pudieran aparecer en título, resumen o palabras clave. Del resultado aparecen 92.803 entre artículos de revistas, capítulos de libros, actas de congresos y tesis. Cuando se limita al área de las matemáticas quedan 7532 resultados. Después se excluyen casi todas las áreas, se deja matemáticas, psicología y ciencias sociales, y quedan 602 resultados. Se excluyen palabras clave, se dejan las referidas a espacial, matemática, primaria, secundaria y quedan 215 resultados. Se hace una segunda búsqueda en Scopus con las mismas palabras en inglés que antes y se agrega el operador “o”, se obtienen 274 resultados, un número mayor de documentos para revisar que en la anterior.

La búsqueda en la colección principal de Web of Science utiliza los mismos cinco términos: *spatial thinking*, *spatial abilities*, *spatial reasoning*, *spatial skills* or *spatial sense*; y en ese orden, aparecen 181.922 resultados entre artículos de revistas, capítulos de libros, actas de congresos y tesis. Se limitan las áreas de investigación a matemáticas y quedan 487 resultados, se excluyen todas las áreas temáticas, solo se dejan matemática e investigación educativa y quedan 271 resultados. Se vuelven a filtrar los resultados por categorías solo se dejan: matemáticas, psicología, matemáticas aplicadas e investigación en educación y quedan 140 resultados.

Se extraen los relacionados a robótica, topología, lógica, estadística, computación, algunos estudios de corte psicológicos y los relacionados con la medida en geometría y otras ramas de la matemática como la aritmética, el álgebra, la derivación. Finalmente son 61 los documentos con los que se trabaja: artículos, capítulos de libros, actas de congresos *Psychology of Mathematics Education (PME)* 30, 32, 33, 35 y 36, actas de *Conference European society for Research in Mathematics Education (CERME)* 9 y 10, acta de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* XXII.

Este proceso permite la agrupación y clasificación posterior, no ya por autor, sino por terminología directamente vinculadas al sentido espacial: habilidad y habilidades espaciales, razonamiento y pensamiento espacial, razonamiento y pensamiento geométrico.

4.3. Fase 2. Características de las tareas de evaluación

Para la segunda fase de la investigación se realiza el análisis de contenido atendiendo a las características de las tareas de evaluación. Es necesario seleccionar y recolectar las TEP y las TEA, establecer las categorías de análisis, hacer la recolección de los datos y realizar el análisis con las categorías y subcategorías definidas.

4.3.1. Selección y recolección de las tareas

En esta investigación se observan las tareas propuestas en evaluaciones. La selección y recolección de las tareas de esta investigación implica dos procesos diferentes, el referente a la recolección de las TEP y la recolección y selección de las TEA.

4.3.1.1 Tareas de evaluación de PISA

Con relación a las 20 tareas liberadas por PISA en los años 2000, 2003 y 2012, se seleccionan las ocho de PISA 2012 correspondientes al contenido espacio y forma. El criterio para su selección es que permanecieron como referencia y preparación para la última medición del 2022. Se descartan las tareas interactivas porque los enlaces encontrados no permiten su acceso.

Las TEP referidas al contenido espacio y forma (ver anexo 1) y su codificación para este estudio son: compra de un apartamento (AP); heladería, pregunta 1, 2 y 3 (H1, H2 y H3); vertido de petróleo (PE); barcos a vela, pregunta 1, 3 y 4 (B1, B3 y B4); la noria, pregunta 1 y 2 (N1 y N2); una construcción con dados (DA); garaje, pregunta 1 y 2 (G1 y G2); y puerta giratoria, pregunta 1, 2 y 3 (P1, P2 y P3).

Como el interés del estudio está puesto en las componentes del sentido espacial, se descartan las tres preguntas de los barcos a vela (B1, B3 y B4) porque en su resolución buscan una respuesta numérica, sin que se requiera de las componentes del sentido espacial para resolverlas, dos de ellas son de múltiple opción y la tercera precisa cálculos numéricos para responderla (ver tabla 9).

4.3.1.2 Tareas de evaluación de aula

Para el proceso de recolección y selección de las TEA propuestas por los docentes, se determina el curso de primero de bachillerato porque en ese nivel se encuentran los alumnos con 15-16 años, corte etario en el que se lleva a cabo la evaluación de PISA. Además, se tienen en cuenta las tareas de evaluación correspondientes al contenido curricular de geometría, por tanto, son tareas que evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010b).

Se solicitó a la dirección de una institución educativa privada de Montevideo el acceso a las evaluaciones realizadas, en el año lectivo 2022, por los cuatro profesores de primero de bachillerato con un total de seis grupos en ese curso: dos profesores con dos grupos y los otros dos profesores con un grupo. Las pruebas están constituidas por tres tareas. Las tareas de los docentes fueron planteadas en una situación de evaluación para medir el aprendizaje geométrico (ver anexo 1).

Como el interés del estudio está en el sentido espacial, se tiene acceso a 18 tareas distribuidas en seis pruebas de evaluación referidas a lugares geométricos, correspondientes a los seis grupos de primero de bachillerato. Cada una de las pruebas tiene la misma estructura y similitud de exigencias en las tareas. Se seleccionan dos pruebas de evaluación planteadas por dos profesores con uno y dos grupos a cargo, ya que las pruebas que no se seleccionan se diferencian por cambios menores en los datos. Por tanto, son seis las TEA seleccionadas que se codifican con Ai, desde A1 hasta A6 (ver tabla 9).

En síntesis, las tareas de evaluación que constituyen esta investigación son 19: trece preguntas correspondientes a las siete tareas de PISA y seis actividades de las propuestas de aula (ver anexo 1). A partir de este momento, se denominan tareas de evaluación tanto las trece preguntas de PISA (TEP) y las seis tareas de aula (TEA). En la tabla 9 se establecen las referencias adjudicadas a cada tarea para facilitar el proceso de análisis de la información.

Tabla 9. *Referencias de tareas seleccionadas*

Tareas de PISA 2012		Tareas de aula	
Compra de apartamento	AP	Actividad 1	A1
Heladería	H1	Actividad 2	A2
	H2	Actividad 3	A3
	H3	Actividad 4	A4
Vertido de Petróleo	PE	Actividad 5	A5
La noria	N1	Actividad 6	A6
	N2		
Construcción con dados	DA		
Garaje	G1		
	G2		
Puerta Giratoria	P1		
	P2		
	P3		

4.3.2. La recolección de datos

La recolección de datos para las características de las tareas se realiza a partir de los enunciados de las tareas y la resolución de dos expertos, investigadora y director, para las TEP y de dos docentes para las TEA. Se les solicita que analicen todas las posibles resoluciones de las tareas atendiendo la diversidad de estrategias de resolución de los estudiantes, de igual modo se les solicita a los docentes (ver anexo 2).

4.3.3. Determinación de las categorías de análisis

La determinación de las categorías de análisis se ajusta a los objetivos que se plantean en esta investigación. Para la creación de categorías es necesario tener en cuenta que sean: pertinentes, adaptadas a los objetivos y contenidos; y exclusivas, por lo que un mismo elemento del contenido no puede ser clasificado en categorías diferentes (López, 2002).

Para las características de las tareas se establecen cuatro categorías (ver tabla 10): los contextos, la tipología de los enunciados, la complejidad cognitiva y el formato de las respuestas, definidas en el marco teórico con la caracterización que se realiza en el apartado 3.2. La categoría contextos de las tareas tiene cuatro subcategorías: personal; educativo, ocupacional o laboral; público o social; y científico (Caraballo et al., 2011). La tipología de los enunciados de las tareas tiene tres subcategorías: en forma de texto, esquemática y aritmética (Arévalo, 2009). El grado de complejidad cognitiva se mide en tres subcategorías: reproducción, conexión y reflexión (Moreno y Ramírez, 2016). El formato de las respuestas tiene tres subcategorías: respuesta construida abierta, respuesta construida cerrada y preguntas de respuesta seleccionada de opción múltiple simple o compleja (OECD, 2017).

Tabla 10. *Características de las tareas de evaluación*

Características	Valores
Contexto	Personal, educativo/ocupacional, público o social y científico.
Tipología del enunciado	En forma de texto, esquemática y aritmética.
Complejidad cognitiva	Reproducción, conexión, reflexión.
Formato de la respuesta	Respuesta construida abierta, respuesta construida cerrada y preguntas de respuesta seleccionada (opción múltiple simple y compleja).

4.3.4. Análisis de las características de las tareas de evaluación

Para el análisis de las tareas en relación con las características, se parte del análisis realizado en un estudio piloto que durante su realización recibió el aporte de un experto y dos docentes (Elvas, 2021). Además, en esta investigación se consideran los aportes de dos expertos, investigadora y director, a la vez que modifican algunas de las categorías, realizan un nuevo análisis porque las tareas difieren de las del estudio piloto.

El análisis se realiza a partir de las diferentes resoluciones de las 19 tareas, trece TEP y seis TEA, que forman parte de esta investigación. De este modo, para cada tarea se confecciona una tabla con las evidencias que dan cuenta de las subcategorías correspondientes al contexto, a la tipología del enunciado, a la complejidad cognitiva y al formato de respuesta de cada una de estas tareas (ver anexo 3).

En este apartado se presentan a modo de ejemplo, una TEP, N1, y una TEA, A4, seleccionadas por el nivel de complejidad, de conexión, definido en el marco teórico (Moreno y Ramírez, 2016). Las tareas en el nivel de conexión exigen establecer relaciones entre distintas representaciones para alcanzar la solución (Caraballo et al., 2011).

El análisis de las características se realiza a partir de la propuesta y resolución de las 19 tareas, TEP y TEA (ver anexo 3). En la tabla 11 (anexo 3, tabla 6) se presenta como ejemplo el análisis de las características en la tarea N1.

Tabla 11. *Características en la tarea N1*

Características	Valores
Contexto	Una noria gigante corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	Para identificar una noria se presenta una foto. La representación gráfica del enunciado está dada por una vista lateral de la noria. Texto breve que favorece la ubicación de la situación. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Establecer la ubicación del centro de la norial, la altura en la que se encuentra en relación con el cauce del río. Condiciones que exige una interpretación textual y visual de la información para establecer conexiones.
Formato de la respuesta	La respuesta exige un número determinado. Respuesta construida cerrada.

En la tabla 12 (anexo 3, tabla 17) se presenta como ejemplo de una TEA el análisis de las características en la tarea A4.

Tabla 12. *Características en la tarea A4*

Características	Valores
Contexto	Determinar los puntos del plano, es una situación específicamente matemática, perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes, con elementos geométricos y con sugerencias para la realización de la actividad. La representación gráfica muestra la situación dos semirrectas que determinan un ángulo, se señala su vértice y un punto interior. La

Complejidad cognitiva	<p>representación gráfica completa la información relevante de los datos geométricos.</p> <p>Exige conocer todos los lugares geométricos vistos en el curso.</p> <p>Exige interpretar la representación gráfica brindada porque se trabajará en ella.</p> <p>Es necesario saber trazar bisectriz y mediatriz con lápiz y papel.</p> <p>Determinar los puntos equidistantes de los lados de un ángulo y asociar a la bisectriz del ángulo.</p> <p>Determinar los puntos equidistantes de dos puntos fijos y asociar a la mediatriz de un segmento.</p> <p>Interceptar la mediatriz y la bisectriz y seleccionar el punto que cumple las dos condiciones a la vez.</p> <p>Para acceder a la solución se necesita emplear conocimiento matemático y analizar por tal necesita proceso de conexión.</p>
Formato de la respuesta	<p>La respuesta exige señalar con precisión el punto que resuelve la situación y explicitarlo en forma escrita. Respuesta construida abierta.</p>

4.4. Fase 3. Expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación

Para la tercera fase de la investigación se realiza el análisis de contenido atendiendo a las expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación vinculadas con las competencias educativas y con las componentes el sentido espacial. Con las tareas ya seleccionadas y la recolección de datos realizada en la fase anterior, en esta fase se establecen las categorías y subcategorías de análisis para las expectativas de aprendizaje y se realiza el análisis.

4.4.1. Determinación de las categorías de análisis

Las expectativas de aprendizaje vinculadas con las competencias educativas incluyen dos categorías: competencias matemáticas y procesos cognitivos. En cada categoría se determinan las subcategorías descritas y definidas en el marco teórico con la caracterización que se realiza en el apartado 3.3.2.

Para la categoría competencias matemáticas, se definen siete subcategorías (ver tabla 13): comunicar, matematizar, representar, razonar y argumentar, idear estrategias para la resolución de problemas, utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; y usar herramientas matemáticas (OECD, 2017).

Tabla 13. *Competencias matemáticas*

Competencia	Definición
Comunicar.	Leer, decodificar e interpretar declaraciones, preguntas, tareas u objetos permite al individuo formar un modelo mental de la situación, paso importante para

	comprender, aclarar y formular un problema. Durante el proceso de solución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios. Una vez encontrada una solución, es posible que se necesite presentar a otros la solución, y una explicación o justificación.
Representar.	Implica seleccionar, interpretar, traducir y utilizar una variedad de representaciones para capturar una situación, interactuar con un problema o presentar el trabajo de uno. Las representaciones mencionadas incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.
Matematizar.	Implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática (que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo), o interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemáticos en relación con el problema original. Describe las actividades matemáticas involucradas.
Razonar y argumentar.	Implica procesos de pensamiento con raíces lógicas que exploran y vinculan elementos del problema para hacer inferencias a partir de ellos, verificar una justificación dada o proporcionar una justificación de declaraciones o soluciones a problemas.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	Implica un conjunto de procesos de control críticos que guían a un individuo a reconocer, formular y resolver problemas de manera efectiva. Se caracteriza por seleccionar o idear un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver problemas derivados de una tarea o contexto, así como guiar su implementación.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Implica comprender, interpretar, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático (incluidas expresiones y operaciones aritméticas) regido por convenciones y reglas matemáticas; comprender y utilizar construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales; y utilizar algoritmos con estas entidades.
Usar herramientas matemáticas.	Incluyen herramientas físicas, como instrumentos de medición, calculadoras y herramientas informáticas. Los estudiantes deben saber utilizarlas y conocer sus limitaciones.

Para la categoría procesos cognitivos, se establecen seis subcategorías (ver tabla 14): recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear, descritas y definidas en el marco teórico (Krathwohl, 2002).

Tabla 14. *Procesos cognitivos*

Procesos Cognitivos	Definición
Recordar	Como recuperar conocimientos relevantes de la memoria a largo plazo que se puede traducir como identificar o reconocer.
Comprender	Determinar el significado de las instrucciones tradicionales incluidos orales, escritos y gráficos, que se puede dividir en interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar y explicar.
Aplicar	Significa realizar o utilizar un procedimiento en una determinada situación, que se traduce en ejecutar o implementar.
Analizar	Significa desintegrar el material en las partes que lo constituyen y detectar cómo las partes se relacionan entre sí, a una estructura o a un propósito general, que se traduce en diferenciar, organizar o atribuir.
Evaluar	Significa emitir juicios basados en criterios y estándares, que se traduce en comprobar y criticar.
Crear	Juntar elementos para formar un todo coherente o hacer un producto original que implica, generar, planificar y producir.

Las expectativas de aprendizaje vinculadas con las componentes del sentido espacial incluyen dos categorías: manejo de conceptos geométricos y las habilidades de

visualización. Para cada una de las categorías se determinan las subcategorías que fueron descritas y definidas en el marco teórico con la caracterización que se realiza en el apartado 3.1.4. (ver tabla 15). Para la categoría manejo de conceptos geométricos se definen cinco subcategorías: conceptos de las figuras, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos, y orientación (Flores et al., 2015); para las habilidades de visualización se definen siete subcategorías: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual, memoria visual (Del Grande, 1990).

Tabla 15. *Categorías y subcategorías del sentido espacial*

Componentes del sentido espacial	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos
	Propiedades de las formas
	Relaciones geométricas
	Ubicación y movimientos
	Orientación
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor
	Percepción figura-contexto
	Conservación de la percepción
	Percepción de la posición en el espacio
	Percepción de las relaciones espaciales
	Discriminación visual
	Memoria visual

4.4.2. Análisis de las expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se analizan para las competencias educativas involucradas en las propuestas de las tareas geométricas TEP y TEA, en sus dos categorías: competencias matemáticas y procesos cognitivos (ver anexo 4). Así también se analizan para las componentes del sentido espacial en sus dos categorías: manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización (ver anexo 5). En este apartado se presentan las tablas de las tareas N1 y A4, ambas con nivel de complejidad de conexión.

4.4.2.1. Análisis de las competencias matemáticas

El análisis relativo a las expectativas de aprendizaje como competencias matemáticas considera la resolución de expertos de las TEP y la resolución de los docentes de las TEA. Para cada tarea se completan las tablas con los aportes de dos expertos, investigadora y

director (ver anexo 4). La tabla 16 (anexo 4, tabla 11) presenta las competencias matemáticas requeridas y el modo en que se manifiesta en la resolución de la tarea N1.

Tabla 16. *Competencias matemáticas en la tarea N1*

Competencia matemática	Descripción en N1
Comunicar.	Interpretar que el diámetro de la noria es 140 m. Comprender que el punto más alto se encuentra a 150 m sobre el río. Interpretar que es necesario buscar información en el gráfico. Interpretar que la letra M señala el centro de la noria.
Representar.	Identificar que P es el punto más bajo de la noria. Interpretar que la distancia en P y el río es 10m, que R es el punto más alto de la noria y que 150m representa la distancia entre R y el río. Identificar por las flechas el sentido antihorario de giro de la noria.
Matematizar.	Identificar que la noria se corresponde con una circunferencia. Interpretar que la ubicación del punto más alto es la distancia entre el punto más alto de la noria y el río. El centro y diámetro de la noria son el centro y diámetro de una circunferencia. La medida del segmento MP es igual al radio de la circunferencia. El giro de la noria es una rotación de centro M, en sentido antihorario.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	-- Calcular la medida del segmento MP. Sumar la distancia de P al río. La distancia del punto más alto al río, restar la distancia del punto más bajo al río, es igual al diámetro. Se divide entre dos y se le suma la distancia de P al río. El diámetro se divide entre 2 y se le suma la distancia de P al río.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Sumas, restas y división de medidas de segmentos.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

La tabla 17 (anexo 4, tabla 33) presenta las competencias matemáticas requeridas para resolver la tarea de aula, A4.

Tabla 17. *Competencias matemáticas en la tarea A4*

Competencia	Descripción en la tarea A4
Comunicar.	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: equidistan de dos puntos fijos A y B y de dos semirrectas Bx y By.
Representar.	Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo y que B es el vértice.
Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Identificar que los puntos que equidistan de los puntos A y B están en la mediatriz. Trazar la mediatriz. Identificar que los puntos que equidistan de dos semirrectas que son lados de un ángulo se encuentran en la bisectriz. Trazar la bisectriz del ángulo xBy.

Idear estrategias para la resolución de problemas.	--	Señalar el punto que cumple las dos condiciones.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.		Semirrectas Bx y By.
Usar herramientas matemáticas.		Uso de regla y compás.

4.4.2.2. Análisis de los procesos cognitivos

El análisis relativo a los procesos cognitivos como expectativas de aprendizaje también considera la resolución de expertos de las TEP y la resolución de los docentes de las TEA. Para cada tarea se completan las tablas con los aportes de dos expertos, investigadora y director (ver anexo 4). La tabla 18 (anexo 4, tabla 12) por su parte presenta los procesos cognitivos que son requeridos a los estudiantes para resolver la tarea N1.

Tabla 18. *Procesos cognitivos en la tarea N1*

Procesos Cognitivos	Descripción en N1
Recordar	--
Comprender	Interpretar que el diámetro de la noria es 140 m. Comprender que el punto más alto se encuentra a 150 m sobre el río. Interpretar que la letra M señala el centro de la noria. Identificar que P es el punto más bajo de la noria. Interpretar que la distancia en P y el río es 10m, que R es el punto más alto de la noria. Identificar por las flechas el sentido antihorario de giro de la noria.
Aplicar	La suma de distancias.
Analizar	Las medidas involucradas, el diámetro de la noria y la distancia de la noria al cauce del río.
Evaluar	--
Crear	--

La tabla 19 (anexo 4, tabla 34) por su parte presenta los procesos cognitivos que son requeridos a los estudiantes para resolver la tarea A4.

Tabla 19. *Procesos cognitivos en la tarea A4*

Procesos Cognitivos	Descripción en la tarea A4
Recordar	Definición mediatriz y bisectriz como lugar geométrico.
Comprender	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: equidistar de dos puntos fijos A y B y de dos semirrectas Bx y By. Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y los puntos de la bisectriz.
Analizar	Los puntos que cumplen las dos condiciones a la vez.

Evaluar	Todos los puntos que equidistan de A y B están en la mediatriz. Todos los puntos que equidistan de Bx y By pertenecen a la bisectriz.
Crear	Trazar la mediatriz del segmento AB y la bisectriz del ángulo xBy. Determinar el punto intersección de la mediatriz con la bisectriz.

4.4.2.3. Análisis de las componentes del sentido espacial

Se realiza un análisis de contenido de las resoluciones de las 19 tareas que forman parte de este estudio con la mirada puesta en identificar, en cada paso de la resolución, las componentes del sentido espacial requeridas al estudiante, de 15-16 años que cursa primero de bachillerato, en el momento que las resuelve.

En este estudio, en primer lugar, se analizan las resoluciones de las TEP por expertos y de las TEA por docentes, para determinar las componentes del sentido espacial requeridas. La resolución amplia y detallada de las tareas es triangulada por parte de dos expertos, se recuperan y completan las realizadas en un estudio previo que solo atendía las habilidades de visualización de dos tareas, garaje y puerta giratoria (Elvas et al., 2022a). De cada una de las 19 tareas, se consideran las posibles estrategias de resolución, con el fin de analizar las componentes a priori del sentido espacial que se ponen en juego a la hora de resolverlas (Elvas et al., 2022b). Para todas las tareas se confecciona una tabla con las componentes del sentido espacial, en sus dos categorías y correspondientes subcategorías (ver anexo 5).

Se tiene la resolución de expertos de las TEP y la resolución de los docentes de las TEA, 19 tareas en total. Para todas las tareas, se describen las manifestaciones de las componentes del sentido espacial requeridas en la resolución.

En este apartado se presentan a modo de ejemplo, una TEP, H1, y una TEA, A2, seleccionadas por el nivel de complejidad de reflexión definido en el marco teórico (Moreno y Ramírez, 2016). Las tareas en el nivel de reflexión requieren competencias más complejas, en situaciones poco estructuradas (Caraballo et al., 2011).

Por ejemplo, la tabla 20 (ver anexo 5, tabla 2) se confecciona para la resolución de una TEP, la pregunta 1 de la heladería, que solicita calcular la longitud total del borde del mostrador, muestra el análisis de las componentes del sentido espacial requeridas para resolverla. En la componente del manejo de conceptos geométricos, en particular, conceptos, la descripción de las manifestaciones es “aplica el concepto de triángulo rectángulo, segmento y medida de segmentos”, “reconoce la unidad de medida como

medida directa de longitud”, “aplica teorema de Pitágoras como medida indirecta de longitud”, es decir que, para resolver es necesario considerar que los lados del mostrador se pueden asociar a segmentos, se necesita conocer la medida de esos segmentos y reconocer la unidad de medida, en particular para determinar la medida del segmento oblicuo es preciso reconocer un triángulo rectángulo y aplicar teorema de Pitágoras. Así con cada componente se analizan los requerimientos para resolver la tarea.

Tabla 20. *Componentes del sentido espacial en pregunta H1*

Componentes del sentido espacial		HELADERÍA: Pregunta 1
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Aplicar el concepto de triángulo rectángulo, segmento y medida de segmento. Reconocer la unidad de medida como medida directa de longitud. Aplicar el teorema de Pitágoras como medida indirecta de la longitud.
	Propiedades de las formas	Identificar el segmento correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Aplicar el teorema de Pitágoras. Obtener la longitud total como suma de tres partes.
	Relaciones geométricas	Reconocer que la distancia entre dos puntos de un segmento horizontal o vertical es igual a la medida del segmento que determinan. Identificar que la medida de un segmento oblicuo es igual a la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se determina con ese par de puntos. Determinar la perpendicularidad entre segmentos.
	Ubicación y movimientos Orientación	Determinar la longitud del mostrador como la unión de tres segmentos consecutivos. Utilizar coordenadas. Comprensión del mapa. Localización de la parte externa del mostrador. Identificar las posiciones relativas de los tres segmentos: uno horizontal, uno vertical y uno oblicuo.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinar el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento oblicuo del borde del mostrador.
	Percepción figura-contexto	Identificar la unidad de medida de la baldosa. Identificar los tres segmentos que forman el mostrador. El oblicuo determina un triángulo rectángulo.
	Conservación de la percepción	Identificar que ambas figuras son rectángulos. Identificar que se conserva la unidad de medida en cualquier posición y la medida de los segmentos cuando los cambios de posición. Medir directamente los catetos sin tener las baldosas, tapadas por el mostrador.
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar que un segmento es vertical, otro horizontal y el otro segmento es oblicuo.
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar que la longitud del borde del mostrador es la suma de medida de los segmentos que lo componen. Identifica hipotenusa y catetos.
	Discriminación visual	Diferenciar los segmentos que constituyen el borde. Formar el triángulo rectángulo. Identificar que todas las unidades de medida son la misma en las baldosas.

Memoria visual Reconocer la forma del triángulo rectángulo en cualquier posición.

Otro ejemplo se muestra en la tabla 21 (ver anexo 5, tabla 15) que ofrece el análisis de una tarea de aula, la A2, con nivel de complejidad de reflexión, igual que la tarea de PISA antes presentada.

Tabla 21. *Componentes del sentido espacial en A2*

Componentes del sentido espacial		Actividad 2
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Aplicar el concepto de distancia y medida, semiplano y ángulo. Aplicar el concepto de circunferencia, bisectriz y mediatriz como lugar geométrico.
	Propiedades de las formas	Identificar que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Identificar que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo. Identificar que los puntos de la circunferencia distan una distancia fija del centro.
	Relaciones geométricas	Reconocer que B y D pertenecen a cada lado del ángulo. Reconocer que la distancia de CB es diferente de la distancia de CD. Aplicar que la distancia entre un punto interior a una circunferencia y el centro es menor que el radio. Aplicar que la distancia entre un punto exterior a una circunferencia y el centro es mayor que el radio.
	Ubicación y movimientos	Reconocer que el punto G es interior a la circunferencia de radio 4cm. Reconocer que el punto H es exterior a la circunferencia de radio 4cm. Reconocer que el punto A pertenece al semiplano de borde la mediatriz del segmento BC, que contiene a B.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	--
	Percepción figura-fondo	--
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar que G es interior y H es exterior a la circunferencia.
	Percepción de las relaciones espaciales	Reconocer que el punto A es interior a un semiplano de borde la mediatriz del segmento BC. Reconocer segmentos de igual longitud.
Discriminación visual	Reconocer los puntos que están a igual, menor o mayor distancia	
Memoria visual	--	

4.4.2.4. Triangulación de datos

Con el fin de garantizar la validez del estudio, los investigadores aplican la triangulación de datos (Hernández et al., 2014). En primer lugar, las TEP se analizan de manera separada por dos expertos, investigadora y director, y se acuerdan las diferencias para establecer las categorías a priori. Las TEA las resuelven dos docentes y se consensuan los procedimientos de resolución. A partir de esas respuestas, los dos expertos triangulan las componentes del sentido espacial.

En la fase 4 las resoluciones de los estudiantes se triangulan únicamente por los estudiantes y se vio que era adecuada la coincidencia y el resto del análisis lo realiza la investigadora.

4.5. Fase 4. Manifestaciones del sentido espacial

La cuarta fase atiende a las componentes del sentido espacial en las TEP cuando son manifestadas por los estudiantes. Para realizar el análisis cognitivo es necesario establecer los elementos que constituyen la investigación: los sujetos de la investigación, los instrumentos para la toma de datos, la clasificación de las respuestas, con las categorías definidas en el apartado anterior se realiza el análisis de las resoluciones de los estudiantes a las TEP. Se atiende el error como parte de los procesos de aprendizaje y se determinan las categorías a posteriori. Se consideran los resultados de los estudiantes en las TEP y se compara con el rendimiento alcanzado en las TEA.

4.5.1. La recolección de datos

Este estudio se caracteriza por su enfoque cualitativo que tiene como aspecto fundamental la obtención de datos, convertidos en información de situaciones o procesos en profundidad. Interesa hacer registro de los “datos, ya que toda investigación de carácter empírico abarca una multitud de unidades portadoras de información” (López, 2002, p. 175). A través de la recolección de datos se hace acopio de datos de las unidades de análisis, un ejemplo de ellas son los procesos, que los definen como “conjuntos de actividades, tareas o acciones que se realizan con un fin determinado” (Hernández et al., 2014, p. 398).

4.5.1.1. Recolección de la resolución de tareas de evaluación de PISA

La recolección de datos se realiza, por una parte, a través de la aplicación de las trece TEP. Se determina que se resuelven en 80 minutos correspondiente a dos horas de clase, que no siempre fueron consecutivas. Se dividen las tareas en dos cuestionarios para su aplicación a los seis grupos de primero de bachillerato, 155 estudiantes de 15-16 años, de un colegio privado de Montevideo. El primer cuestionario aplicado contiene las siguientes tareas: H1, H2, H3, N1, N2, G1 y G2, y lo responden 142 estudiantes. Mientras que el segundo queda constituido por las tareas: P1, P2, P3, AP, PE y DA, y lo responden 133 estudiantes.

Se construye el protocolo de aplicación de las tareas (ver anexo 6). Se define que los aplicadores de los cuestionarios son los docentes de matemática y los profesores tutores de los grupos. Se tiene un breve encuentro con cada uno para explicar el protocolo, a la vez se le envía por correo para que lo tengan de fácil acceso. Se preparan 12 sobres en total, para los seis grupos con cada uno de los cuestionarios. Cada sobre contiene la cantidad de cuestionarios según el número de estudiantes de cada grupo de primero de bachillerato: 1° A con 26 estudiantes, 1° B con 26, 1° C con 25, 1° D con 26, 1° E con 26 y 1° F con 26 estudiantes; y se le adjunta el protocolo de aplicación. El período de aplicación de las TEP en los seis grupos de primero de bachillerato es de tres meses.

4.5.1.2. Recolección de resultados en tareas de evaluación de aula

Por otra parte, se recopilan los resultados que obtienen los 149 estudiantes que asisten a la prueba de geometría propuestas por el profesorado. Es oportuno explicitar que el rango de las calificaciones para bachillerato en 2022, en Uruguay es de 1 a 12; y que los estudiantes resuelven las tareas a lápiz y papel, no son tareas para ser resueltas a través de programas de geometría como geogebra.

4.5.2. Sujetos de la investigación

Los estudiantes de 15-16 años han trabajado con los docentes en geometría en el curso de primero de bachillerato, según establece el currículo uruguayo, el método de los lugares geométricos (CES, 2010b). Se consideran las resoluciones de los estudiantes que asisten a las dos sesiones de cuestionarios de las TEP y a la prueba de geometría. Los sujetos de esta fase de la investigación son los 122 estudiantes que participan en las tres instancias, y se codifican como Ei, desde E1 hasta E122.

La división de los resultados de los 122 estudiantes se realiza, según el rendimiento alcanzado en las pruebas de aula, es decir, de acuerdo con las calificaciones que logran en las pruebas de geometría propuestas por el profesorado. Para el análisis se dividen en tres grupos según el criterio de evaluación que la institución educativa privada propone.

Los resultados de los 122 estudiantes se dividen en tres grupos: bajo, calificación menor o igual a 4, que significa menos del 50% de la prueba realizada con acierto y el rendimiento es considerado insuficiente; medio, del 5 al 8 donde se encuentran los estudiantes que realizaron entre el 50% y el 74% de la prueba con acierto y el rendimiento va desde apenas aceptable hasta bueno; y alto, del 9 al 12, donde se encuentran los estudiantes que realizaron entre el 75% y el 100% con acierto, cuyo rendimiento va desde muy bueno a excelente. A partir de ahora se nombran grupo bajo, medio y alto (ver tabla 22).

Tabla 22. Grupos de estudiantes según el rendimiento en las pruebas de geometría

	Rango total	G. Bajo	G. Medio	G. Alto
Calificaciones en pruebas de geometría	[1,12]	[1,4]	(4,8]	(8,12]
Cantidad de estudiantes	122	28	52	42

4.5.3. Clasificación de respuestas de las tareas de evaluación de PISA

Con el fin de analizar los errores manifiestos como parte del análisis cognitivo se clasifican las resoluciones de las trece TEP, de los 122 estudiantes. Para ello se dividen en grupos excluyentes, su suma corresponde al total de estudiantes. Los cuatro grandes grupos son (ver anexo 7): “sin hacer”, significa que no responde la pregunta; “bien resuelta”, llega a la respuesta esperada a través de alguna de las posibles estrategias de resolución; “no aporta información”, cuando hay una respuesta errónea sin registro del camino realizado para llegar a ella; “con errores”, cuando el estudiante manifiesta errores en su proceso de resolución (ver tabla 23).

Tabla 23. Clasificación de respuestas en tareas de PISA

Preguntas	Sin hacer	Bien resuelta	No información	Con errores
AP	16	81	0	25
H1	18	46	2	56
H2	28	24	2	68
H3	26	28	14	54

PE	56	4	11	51
N1	10	64	0	48
N2	11	60	0	51
DA	14	102	2	4
G1	9	110	0	3
G2	36	26	3	57
P1	32	66	5	19
P2	86	7	4	25
P3	36	67	0	19

Hay tareas que por su resolución no requieren realizar registro del procedimiento, puede ser una operación mental o una respuesta de múltiple opción, como sucede con: N1, N2 y G1. En estos casos, cuando no se logra la respuesta correcta esperada, se considera que hay error en el proceso de razonamiento, ninguna respuesta se adjudica a “no aporta información” sino que se incluye en el grupo “con error”.

4.5.4. Análisis del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA

El interés central de la investigación está en las componentes del sentido espacial, con el fin de profundizar en ello, se analizan las componentes del sentido espacial que manifiestan los 122 estudiantes de 15-16 años que cursan primero de bachillerato, cuando resuelven las TEP. Para el análisis se consideran los elementos que constituyen las tablas anteriores con las componentes del sentido espacial.

Por ejemplo, en la tabla 20, en la componente manejo de conceptos geométricos, propiedades de las formas, “identifica el segmento correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo”, “aplica el teorema de Pitágoras”, “obtiene la longitud total como suma de tres partes”, estos tres aspectos constituyen las columnas de una plantilla y las filas la componen cada uno de los E_i , con i de 1 a 122. Para cada una de las trece TEP la investigadora construye una plantilla (ver anexo 8).

La plantilla se completa con: “sí”, si ese aspecto está considerado en la respuesta del estudiante; “no”, si en la respuesta no aparece; “sr”, sin registro, si no hay registro de cómo obtuvo la respuesta; “sh” sin hacer, si el estudiante deja sin hacer la pregunta. Además, se deja constancia del error cuando lo hubiera cometido.

Para la contabilización, se construye una segunda plantilla donde se transforman en 1 los “sí” y los “sr” correctos, mientras pasan a ser 0 los “no”, “sh”, y “sr” incorrectos. De esta manera, se dispone de un indicador numérico para cada estudiante en el que se contabiliza

el número de manifestaciones de cada una de las componentes para cada una de las TEP. Para continuar con el ejemplo de la heladería, pregunta 1, la figura 5 presenta los indicadores numéricos de dos estudiantes para la componente manejo de conceptos geométricos, en particular, propiedades de las formas: el primer estudiante en su resolución no manifiesta haber considerado el segmento oblicuo como la hipotenusa de un triángulo rectángulo (0), no manifiesta haber aplicado el teorema de Pitágoras (0), pero sí considera la longitud del mostrador como la suma de tres partes (1) (ver anexo 8).

HELADERÍA - Pregunta 1			
Manejo de conceptos geométricos			
Propiedades de las formas			
La hipotenusa es un segmento	Aplica el teorema de Pitágoras	Longitud como suma de tres partes	Suma Propiedades de las formas
0	0	1	1
1	1	1	3

Figura 5. Plantilla de las sumas parciales de propiedades de las formas en la tarea H1

Le sigue el proceso de construcción de la plantilla con las sumas parciales de cada componente del sentido espacial, relativas al manejo de conceptos geométricos y a las habilidades de visualización (ver anexo 8). Por ejemplo, en la figura 5, la última columna suma las manifestaciones de los estudiantes en la componente del manejo de conceptos geométricos, en particular suma las manifestaciones en las propiedades de las formas en la tarea H1. La figura 6, por su parte muestra una de las habilidades de visualización, la percepción de la posición en el espacio, para la tarea H1: en la tabla 20 se describe “identifica que un segmento es vertical, otro horizontal y el otro segmento es oblicuo”, que constituyen las columnas y las filas son los Ei, de 1 a 122. La última columna presenta la suma de la manifestación de estos aspectos.

HELADERÍA - Pregunta 1			
Habilidades de visualización			
Percepción de la posición en el espacio			
Identifica el segmento vertical	Identifica el segmento horizontal	Identifica el segmento oblicuo	Suma percepción de posición en el espacio
0	0	0	0
1	1	1	3

Figura 6. Plantilla de las sumas parciales de la percepción de la posición en el espacio en H1

En la etapa final, se suman todos los aspectos considerados en cada una de las componentes, para obtener la suma de las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto, es decir que se suman los aspectos considerados en cada categoría, para cada

una de las tareas y discriminado por estudiante, lo que permite obtener indicadores para cada componente del sentido espacial correspondiente al número de manifestaciones.

Por ejemplo, se suman las manifestaciones de una de las componentes del sentido espacial, el manejo de conceptos geométricos, para ello se suman, las sumas parciales correspondientes a: conceptos geométricos, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos, y orientación. Además, se suman las manifestaciones de las habilidades de visualización: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Por último, se suma las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto, compuesta por la suma de los conceptos geométricos y la suma de las habilidades de visualización (ver anexo 8).

A partir de estas planillas, se realizan dos tipos de análisis complementarios para las TEP, uno cuantitativo y el otro cualitativo. El análisis cuantitativo proporciona datos objetivos numéricos que se comprenden y matizan con los resultados provenientes del análisis cualitativo.

Se elabora la plantilla de las sumas totales por tarea y categoría del sentido espacial. Por un lado, la tabla 24 muestra un extracto de la suma de manejo de conceptos geométricos (ver anexo 8).

Tabla 24. *Suma del manejo de conceptos geométricos en tareas de PISA*

Est	AP	H1	H2	H3	PE	N1	N2	DA	G1	G2	P1	P2	P3	TOTAL
E1	14	5	0	0	0	2	13	0	16	0	10	0	4	64
E2	12	15	9	12	5	9	13	10	16	0	10	9	4	124
E3	14	16	0	0	0	2	13	10	16	0	10	0	4	85

Por otro, la tabla 25 expone un extracto de los puntajes alcanzados por estudiante y tarea, en la manifestación de las habilidades de visualización (ver anexo 8).

Tabla 25. *Suma de las habilidades de visualización en tareas de PISA*

Est	AP	H1	H2	H3	PE	N1	N2	DA	G1	G2	P1	P2	P3	TOTAL
E1	8	5	0	0	0	0	2	0	7	0	5	0	-	27
E2	9	17	10	6	6	2	2	6	7	0	5	3	-	73

Con esta información se elabora la plantilla de las sumas por pregunta de cada tarea y por estudiante, se considera por un lado el manejo de conceptos geométricos (se codifica C) y por otro las habilidades de visualización (se codifica H). Así, en la tarea de la heladería, en la pregunta 1, la variable H1_C y H1_H, significa respectivamente, la suma de manifestaciones del manejo de conceptos geométricos y de las habilidades de visualización, en la resolución de la tarea. De este modo se tiene por cada estudiante, 26 variables, 13 para el manejo de conceptos geométricos y 13 para las habilidades de visualización que se corresponden con las 13 TEP. Además, se tiene la variable proveniente de la calificación obtenida por el estudiante en la evaluación propuesta por los docentes en el aula. En la tabla 26 se muestra, a modo de ejemplo, un extracto de la tabla 2 que se encuentra en el anexo 11.

Tabla 26. Sumas totales de C y H por cada tarea de evaluación de PISA

Estudiante	AP_C	AP_H	H1_C	H1_H	H2_C	H2_H	H3_C	H3_H	NOTA
E1	14	8	5	5	0	0	0	0	6
E2	12	9	15	17	9	10	12	6	4
E3	14	9	16	17	0	0	0	0	5

En síntesis, se tiene la suma por pregunta de la puntuación alcanzada en la manifestación del manejo de conceptos geométricos y en las habilidades de visualización, de los 122 estudiantes cuando resuelven las TEP, además se agrega en una última columna las calificaciones (notas) obtenidas en las pruebas de aula.

El proceso finaliza con la suma total de la manifestación del sentido espacial por estudiante y por tarea. Así, la tabla 27 resume la suma total, suma de la manifestación del manejo de conceptos geométricos (tabla 24) y de las habilidades de visualización (tabla 25), que reúne el sentido espacial manifestado por cada estudiante (ver anexo 8).

Tabla 27. Suma del sentido espacial en tareas de PISA

Est	AP	H1	H2	H3	PE	N1	N2	DA	G1	G2	P1	P2	P3	TOTAL
E1	22	10	0	0	0	2	15	0	23	0	15	0	4	91
E2	21	32	19	18	11	11	15	16	23	0	15	12	4	197
E3	23	33	0	0	0	2	15	16	23	0	15	0	4	131

Por ejemplo, el E1, tiene 64 puntos en el manejo de conceptos geométricos y 27 puntos en las manifestaciones de las habilidades de visualización, así obtiene 91 puntos en el sentido espacial.

Las sumas totales de manejo de conceptos geométricos, habilidades de visualización y sentido espacial, por tarea y por estudiante, se clasifican en tres niveles: bajo, medio y alto. El rango total de la puntuación $[0, n]$ se divide en tres intervalos: $(0, n/3]$, $(n/3, 2n/3]$ y $(2n/3, n]$ para determinar los niveles bajo, medio y alto. La máxima puntuación de cada pregunta, tarea y componente del sentido espacial se obtiene sumando las puntuaciones del camino de resolución que explicita mayor manifestación de conceptos geométricos, de habilidades de visualización y, por tanto, mayor puntuación del sentido espacial. Se presenta en la tabla 28 el sentido espacial por tarea y los respectivos niveles con sus intervalos de puntuación.

Tabla 28. *Intervalos de puntuación del sentido espacial y sus componentes por tarea*

Tarea	Conceptos geométricos	Habilidades de visualización	Sentido Espacial	SE Bajo	SE Medio	SE Alto
Apartamento	[0,14]	[0,10]	[0,24]	[0,8]	(8,16]	(16,24]
Heladería	[0,40]	[0,38]	[0,78]	[0,26]	(26,52]	(52,78]
Vertido de petróleo	[0,8]	[0,7]	[0,15]	[0,5]	(5,10]	(10,15]
Noria	[0,22]	[0,8]	[0,30]	[0,10]	(10,20]	(20,30]
Dados	[0,10]	[0,7]	[0,17]	[0,5]	(5,11]	(11,17]
Garaje	[0,29]	[0,8]	[0,45]	[0,15]	(15, 30]	(30,45]
Puerta giratoria	[0,25]	[0,33]	[0,33]	[0,11]	(11, 22]	(22,33]

Se realiza la suma y se calcula la puntuación total que un estudiante podría alcanzar a lo largo de todas las tareas, se obtienen los valores máximos en el manejo de conceptos geométricos, en las habilidades de visualización y en el sentido espacial. Las puntuaciones máximas también se dividen en tres niveles: bajo, medio y alto, como se puede ver en la tabla 29.

Tabla 29. *Intervalos de puntuación del sentido espacial y sus componentes*

Componentes del sentido espacial	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Manejo de conceptos geométricos	[0,148]	[0,49]	(49,98]	(98,148]
Habilidades de visualización	[0,94]	[0,31]	(31,62]	(62,94]
Sentido espacial	[0,242]	[0,80]	(80,161]	(161,242]

Se identifica una limitación al establecer el puntaje total necesario para resolver correctamente cada tarea. Como se consideran los diferentes caminos de resolución de los estudiantes se generan subcategorías que son excluyentes. Por lo tanto, el resultado final máximo por componente del sentido espacial no resulta de la suma total de todas las subcategorías que la integran. Si bien se reconoce que el puntaje total es similar porque la diferencia de puntos entre quien emprende un camino u otro es poca. Esto hace que los niveles alto, medio y bajo por tarea y por estudiante no se vean afectados. Se considera de valor que, en relación con las componentes del sentido espacial, no se agregan categorías a posteriori, lo que significa que fueron previstos todos los posibles caminos de resolución de los 122 estudiantes por parte de los expertos.

En síntesis, se tienen los 122 estudiantes divididos en tres grupos: bajo, medio y alto de acuerdo con el rendimiento obtenido en las pruebas de aula (ver tabla 19). Y también se clasifican en los tres niveles antes definidos: bajo, medio y alto, según la puntuación alcanzada en el manejo de conceptos geométricos, en las habilidades de visualización y en el sentido espacial cuando resuelven las TEP (ver tabla 29).

4.5.5. Los errores en las tareas de evaluación de PISA

Se realiza un análisis cognitivo de las resoluciones de las trece TEP con la mirada puesta en identificar, las dificultades empíricas y los errores que comete el estudiante de 15-16 años que cursa primero de bachillerato en cada paso del proceso de resolución que lo condujo a obtener una respuesta que no era la esperada.

4.5.5.1. Determinación de las categorías de análisis

En primer lugar, para cada una de las trece TEP se describen los errores que presentan los estudiantes de acuerdo con el registro encontrado en cada resolución y se le asocia una categoría de error. En la tabla 30 (anexo 9.1, tabla 6), se presenta como ejemplo el proceso realizado para la tarea N1.

Tabla 30. *Categorización de errores en tarea N1*

Est	Error	Síntesis	Categoría
E1	Error 75m mitad de 150	Diámetro e interpretación	e2 e8
E2			
E15	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8

Luego se agrupan los errores en cada tarea, se los divide en errores relativos al sentido espacial y en errores generales en matemáticas. A la vez que se establece cuántos estudiantes dejaron sin hacer la pregunta, cuántos la hicieron bien y cuántos no dejan registro (ver anexo 9.2).

La tercera etapa busca generalizar el error más allá del problema y la actuación particular, lo que permite agrupar errores de diferentes estudiantes y asociarlos a las investigaciones que se definen en el marco teórico. Como ejemplo, la tabla 31 (anexo 9.3) presenta la generalización de errores en la tarea N1. El proceso finaliza con la determinación de la frecuencia, número de estudiantes que incurren en el error, discriminado por tarea (ver anexo 9.4).

Tabla 31. *Generalización de errores en tarea N1*

Tarea	Error sentido espacial	Otros errores
Noria 1	Confusión con el concepto de diámetro. e2	Dificultad para leer o interpretar la consigna. e5
	Dificultad para interpretar el diagrama. e8	Dificultad con ubicar "estar sobre". e5
	Confusión con el concepto de centro y de cfa e2	

4.5.5.2. *Categorías de análisis*

En cuanto a las limitaciones en el aprendizaje, se atienden en particular los errores en las resoluciones de las TEP. A partir de las tipologías de errores en matemáticas y de los resultados de investigaciones específicas, con relación a ciertos aspectos del sentido espacial dispuestos en el marco teórico, y después de realizar una síntesis de los errores en las respuestas de los 122 estudiantes, se establecen a posteriori 10 errores como categorías de análisis. La tabla 32 presenta una síntesis de los errores que se utilizan en este estudio, los primeros seis corresponden al sentido espacial, del e1 al e6; y los otros responden a errores en matemáticas del e7 al e10.

Tabla 32. *Errores en el sentido espacial y en matemáticas en general en tareas de PISA*

Autor	Error	Categoría
Radatz (1979)	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: producidos por la alta demanda que implica el análisis y síntesis perceptivos involucrados en la situación matemática.	e1
Movshovitz et al. (1987)	Errores debido al uso de teoremas o definiciones deformada: incluye los errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema, definición o fórmula reconocibles, por ejemplo, aplicar un	e2

	teorema sin las condiciones necesarias.	
Owens y Outhred (2006)	Error en el concepto y la estructura de las unidades al medir los atributos organizados espacialmente de longitud, área y volumen.	e3
Diezman y Lowrie (2009)	Error en la interpretación de gráficos: involucra la interacción entre un sistema de símbolos visuales, y procesos perceptuales y cognitivos.	e4
Clements y Sarama (2007)	Error en interrelacionar la parte con el todo: la composición y descomposición de las formas es el resultado de un proceso cognitivo que interrelaciona niveles jerárquicos, aislar las partes, organizarlas de forma contigua, combinarlas de manera integradora y crear unidades más complejas.	e5
Battista (2007)	Error en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria: el proceso de abstraer iteraciones unitarias suficientes para medir varios atributos geométricos es complejo.	e6
Movshovitz et al. (1987)	Errores técnicos: incluye los errores de cálculo, la manipulación de signos algebraicos, la ejecución de algoritmos básicos y los errores al tomar datos de una tabla.	e7
Socas (1997)	Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: derivan de la falta de concentración, bloqueos, olvidos, ansiedad y otras.	e8
Astolfi (1999)	Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: surgen por la mala comprensión de las consignas de trabajo, sean orales o escritas.	e9
	Errores en los procesos adoptados: surgen cuando el estudiante se aparta del método dado en clase y utiliza otro procedimiento.	e10

Las categorías de errores definidas se establecen a posteriori y se realiza un proceso de síntesis, en etapas, de los errores manifiestos por los estudiantes en las 13 tareas y en cada una de las resoluciones (ver anexo 9).

Interesa señalar que no se consideran los procedimientos que no conducen a encontrar la solución de cada una de las tareas porque no responden a los objetivos de este estudio.

4.5.6. Análisis del rendimiento de los estudiantes en las tareas de evaluación

Para el análisis del rendimiento de los estudiantes se tienen en cuenta las resoluciones de las TEP y TEA, de los 122 estudiantes de 15-16 años que son sujetos de esta fase de la investigación. Los resultados en las TEP atienden el acierto en la respuesta, considerando la cantidad de respuestas con acierto obtenida por cada estudiante; mientras que en las TEA se considera la calificación obtenida por el estudiante en la prueba de evaluación propuesta por los docentes.

Para las TEP se construyen tablas que reúnen la información de la respuesta de los 122 estudiantes a cada una de las trece TEP. Las respuestas se clasifican y codifican en: bien “B”, mal “M”, con error “ce”, sin terminar “st” y sin hacer “sh” (ver anexo 7).

En este estudio se consideran las respuestas correctas. El rango de respuestas correctas es de 0 a 13, que se clasifica en tres niveles: bajo, menos del 50% de respuestas correctas;

medio, entre 50% y el 75%; y alto, más del 75% de respuestas correctas. El rango de puntuación $[0, n]$ se divide en tres intervalos: $[0, n.0,5]$, $(n.0,5, n.0,75]$ y $(n.0,75, n]$ correspondientes con los niveles (ver tabla 33).

Tabla 33. *Grupos de estudiantes según las respuestas correctas en las tareas de PISA*

	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Respuestas correctas	[0,13]	[0,6]	(6,9]	(9,13]
Cantidad de estudiantes	122	85	29	8

Mientras que, para el rendimiento en la prueba de evaluación sobre lugares geométricos, propuesta por los docentes en el aula, se accede a las calificaciones que obtienen los 122 estudiantes. Se dividen en tres grupos: bajo, medio y alto según el rendimiento obtenido en las pruebas de aula, de acuerdo con las calificaciones que obtienen en las pruebas de geometría propuestas por el profesorado conforme se explica en el apartado 4.5.1.2. recolección de resultados en tareas de aula (ver tabla 19).

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta investigación tiene por objetivos identificar las componentes del sentido espacial, el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización que manifiestan estudiantes de 15-16 años en la resolución de las TEP.

Para la clasificación de las características de las tareas, se utiliza la presentada por Caraballo et al. (2011) en relación con el contexto; para la tipología del enunciado se considera la realizada por Arévalo (2009); para los niveles de complejidad cognitiva la que proponen Moreno y Ramírez (2016) y la que formula la OECD (2017) para el formato de la respuesta (ver anexo 3). Se confecciona la tabla 34 que señala ausencia o presencia en la resolución de la subcategoría analizada.

Para operativizar la presentación de resultados dentro de las expectativas de aprendizaje, se parte de la formulación de las tareas y se consideran las dos categorías por separado: las competencias educativas por un lado y los procesos cognitivos por otro. Para las competencias educativas se utiliza la clasificación presentada por la OECD (2017) en relación con las competencias matemáticas y para los procesos cognitivos se considera la realizada por Krathwohl (2002) y se confecciona la tabla 35 que sintetiza presencia o ausencia de la subcategoría analizada en cada tarea (ver anexo 4).

Además, se busca establecer relaciones entre el rendimiento de los estudiantes en las TEP y las TEA. Para presentar los resultados obtenidos por los 122 estudiantes, se consideran las respuestas correctas en las TEP y las calificaciones alcanzadas en las TEA. A las calificaciones se le asigna el nombre de variable “nota”.

Mientras que para los resultados acerca de las componentes del sentido espacial, se sintetiza la información referida a cada categoría con sus correspondientes subcategorías definidas en el marco teórico, esta vez agrupándolas de acuerdo con su procedencia en general, es decir, TEP y TEA. Luego, la información sintetizada anterior se muestra en conjunto y presentando en paralelo, las manifestaciones de las componentes del sentido espacial en las TEP y TEA. Se confeccionan así tres tablas que se encuentran en el anexo 5. Además, se sintetiza la información acerca de las componentes del sentido espacial, en

sus dos categorías: manejo de conceptos geométricos (Flores et al., 2015) y habilidades de visualización (Del Grande, 1990), en la tabla 36 se señala ausencia o presencia de la componente en la resolución de cada una de las 19 tareas.

En relación con los errores, se utiliza la clasificación definida en el marco teórico y explicitada en la tabla 22, con los primeros seis errores correspondientes al sentido espacial, del e1 al e6; y los otros relativos a errores en matemáticas del e7 al e10. Se construye la tabla 49 que marca la frecuencia de cada error por TEP.

En síntesis, los resultados atienden a las fases trabajadas con las correspondientes categorías que se establecen en la metodología de esta investigación: las características de las tareas, las expectativas de aprendizaje expresadas en las competencias educativas y las componentes del sentido espacial, la manifestación de los estudiantes del sentido espacial y de los errores en la resolución de las tareas y el rendimiento de los estudiantes en ambas tipologías de tareas. De este modo se discuten los hallazgos encontrados en las TEP y las TEA según corresponda.

5.1. Características de las tareas de evaluación

Acerca de las características de las tareas se consideran las subcategorías: el contexto según la distinción que plantean Caraballo et al. (2011), la tipología del enunciado que presenta Arévalo (2009), los niveles de complejidad cognitiva que establecen Moreno y Ramírez (2016), y los formatos de respuesta de acuerdo con la clasificación que presenta la OEDC (2017), a partir del anexo 3 se construye la tabla 34 que contiene la información sintetizada, en cuanto a presencia o ausencia en las TEP y en las TEA.

Tabla 34. *Características de las tareas de evaluación de PISA y de aula*

Tarea	Contexto	Tipología	Complejidad cognitiva	Formato de la respuesta
AP	Laboral	Texto con datos irrelevantes. Esquemática.	Conexión	Construida cerrada.
H1	Laboral	Esquemática.	Reflexión	Construida abierta.
H2	Laboral	Esquemática.	Reflexión	Construida abierta.
H3	Laboral	Texto. Esquemática.	Reflexión	Construida cerrada.
PE	Científico	Esquemática.	Reflexión	Construida cerrada.
N1	Laboral	Esquemática.	Conexión	Construida cerrada.
N2	Laboral	Texto. Esquemática.	Conexión	Opción múltiple simple.

DA	Personal	Esquemática.	Conexión	Construida cerrada.
G1	Laboral	Texto con datos irrelevantes. Esquemática.	Conexión	Opción múltiple simple.
G2	Laboral	Esquemática.	Reflexión	Construida abierta.
P1	Científico	Esquemática.	Reflexión	Construida cerrada.
P2	Científico	Texto. Esquemática.	Reflexión	Construida cerrada.
P3	Científico	Texto. Esquemática.	Conexión	Opción múltiple simple.
A1	Científico	Texto. Esquemática.	Conexión	Construida abierta.
A2	Científico	Texto. Esquemática.	Reflexión	Construida abierta.
A3	Científico	Texto. Esquemática.	Conexión	Construida abierta.
A4	Científico	Texto. Esquemática.	Conexión	Construida abierta.
A5	Científico	Texto. Esquemática.	Reflexión	Construida abierta.
A6	Científico	Texto. Esquemática.	Conexión	Construida abierta.

5.1.1. Contexto

Tareas de PISA. Ocho de las preguntas, contenidas en cuatro tareas propuestas presentan un contexto laboral: la heladería, en colocar un nuevo borde al mostrador, en el revestimiento de su suelo o en la ubicación de mesas; la noria, en ubicar la altura de su centro o la posición de una persona; el garaje, en su compra o en el área de su techo; y la compra de un apartamento, en determinar su área. Mientras que el ángulo entre dos hojas de una puerta giratoria, la longitud de la abertura de esta o cantidad de personas que pueden ingresar son clasificadas en PISA como contexto científico, así como el vertido de petróleo. La construcción con dado, se considera un contexto personal, en tanto que elemento vinculado al juego.

Tareas de aula. Todas las tareas propuestas presentan un contexto científico en tanto que todos los elementos que intervienen provienen del mundo matemático. Por ejemplo, se determinan los puntos del plano con algunas condiciones (A1 y A4), se justifican proposiciones a partir de la información geométrica brindada (A2 y A5), se escribe en lenguaje natural y se representa gráficamente una proposición brindada en lenguaje simbólico (A3 y A6).

En suma, las tareas de PISA del estudio, en su mayoría se contextualizan en situaciones laborales, mientras las de aula son en contextos científicos.

5.1.2. Tipología del enunciado

Tareas de PISA. Por los datos brindados en el enunciado de las tareas, todas se clasifican en forma esquemática dado que los dibujos, diseños o esquemas brindan información relevante para la resolución y en tres de ellas en su esquema se agregan datos irrelevantes. Cuatro de las tareas además se categorizan en forma de texto, H3, N2, P2 y P3, es decir que proporciona datos relevantes para la solución; las otras que presentan texto, los datos no son relevantes.

Tareas de aula. Todas las tareas, por los datos brindados en el enunciado, se clasifican en forma esquemática dado que los dibujos, diseños o esquemas brindan información relevante para la resolución. Además, todas se categorizan en forma de texto porque proporciona datos relevantes para la solución. También, en todas no hay presencia de datos irrelevantes, sea en el esquema o en el texto.

En suma, todas las tareas presentan sus datos en forma esquemática. Todas las TEA además hacen uso del texto para presentar datos relevantes, mientras que así lo hacen sólo algunas TEP. Una diferencia es la aparición en los enunciados de PISA de datos irrelevantes mientras que en las TEA todos los datos brindados son necesarios para obtener la solución.

5.1.3. Complejidad cognitiva

Tareas de PISA. Siete de las tareas exigen un nivel de complejidad de reflexión en tanto que se precisa deducir los elementos para acceder a la resolución. Las otras seis tareas se consideran en niveles de conexión, en tanto que exigen resolver problemas no rutinarios, algunas de ellas tienen una mayor demanda de interpretación de los datos, si bien la resolución se obtiene con algoritmos conocidos como puede ser girar el garaje o sumar los puntos de los dados para encontrar la respuesta correcta.

Tareas de aula. Cuatro tareas exigen un nivel de complejidad de conexión en tanto que implica resolver problemas no rutinarios, algunas de ellas tienen una mayor demanda de interpretación de los datos, si bien la resolución se obtiene con algoritmos conocidos como puede ser la construcción de lugares geométricos. Mientras que las otras dos tareas se consideran en niveles de reflexión en tanto que se precisa explicar y justificar los resultados.

En suma, en las TEP que exigen un nivel de reflexión, todas solicitan una medida por respuesta y en cuatro de ellas es preciso conocer un algoritmo directo de resolución; mientras que, en las dos TEA, requieren justificar afirmaciones a partir de datos que no responden a algoritmos conocidos. Además, el resto de las tareas exigen un nivel de conexión: en las TEP salvo N2, G1 y CA se requiere de un número por respuesta mientras que las TEA suponen cierto grado de comprensión de los datos, ya que los lugares geométricos no se citan en el enunciado, se debe comenzar por seleccionar cuál de los posibles es necesario utilizar, conocer su procedimiento de obtención y combinarlo con otro para determinar lo solicitado.

5.1.4. Formato de la respuesta

Tareas de PISA. Tres tareas exigen una respuesta construida abierta, en tanto que requieren escribir los pasos seguidos para llegar a la respuesta. Mientras que siete tareas exigen una respuesta construida cerrada porque requieren un número como respuesta. En cuanto a las respuestas seleccionadas, tres tareas exigen respuesta de opción múltiple simple. En todos los casos, salvo en N2, G1 y AP, independiente del formato todas requieren de una medida o un número por respuesta.

Tareas de aula. Todas las tareas exigen una respuesta construida abierta, en tanto que requieren dar cuenta del proceso realizado para obtener la respuesta.

En síntesis, la mayoría de las respuestas son construidas abiertas, en el caso de las TEP, son tres y la respuesta solicitada es una medida; mientras que, en las TEA, son todas y cuando hay medidas es una medición para la construcción solicitada.

En conclusión, en relación con las características de las tareas, se ha observado que no hay diferencias relevantes en cuanto a la complejidad cognitiva de las TEA en relación con las TEP, ambas exigen niveles de conexión y reproducción. No hay diferencias importantes en la tipología de las tareas, salvo por la aparición de datos irrelevantes en la TEP. Sin embargo, las diferencias se establecen en cuanto al formato de respuesta, todas las TEA exigen una respuesta construida abierta mientras que la mayoría de las TEP requieren una respuesta construida cerrada; y sobre todo las diferencias suceden en el contexto de las tareas, en las TEA predomina el contexto científico, mientras que en las TEP presentan situaciones laborales. Estas diferencias podrían responder a los fines que persiguen las TEA, evaluar un contenido geométrico determinado enmarcado en las

exigencias del currículum de Uruguay antes de la reforma educativa por la que transita el país; y los fines de las evaluaciones externas, las TEP que buscan medir las competencias adquiridas por los estudiantes al finalizar la educación obligatoria.

5.2. Expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación

En este apartado, para presentar los resultados, se busca establecer relaciones entre las TEP y TEA, para ello se siguen las dos categorías de las competencias educativas y el rendimiento de los estudiantes al resolver ambas tipologías de tareas.

5.2.1. Competencias educativas

Acerca de las competencias educativas demandas en las TEP y las TEA, tanto de los procesos cognitivos según la clasificación de Krathwohl (2002) como de las competencias matemáticas que distingue la OECD (2017), se confecciona la tabla 35, a partir del anexo 4 que muestra la presencia o ausencia de la competencia requerida.

Tabla 35. *Competencias educativas en tareas de evaluación de PISA y de aula*

Competencias educativas		A	H	H	H	P	N	N	D	G	G	P	P	P	A	A	A	A	A	A
		P	1	2	3	E	1	2	A	1	2	1	2	3	1	2	3	4	5	6
Competencias matemáticas	Comunicar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Matematizar		x	x	x	x	x				x	x	x	x						
	Representar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Razonar y argumentar	x						x	x	x		x		x						
	Idear estrategias para la resolución de problemas.		x	x	x	x	x				x		x							
	Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.		x	x		x	x	x			x	x	x			x	x	x	x	x
	Usar herramientas matemáticas.		x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x		x	x	
	Procesos cognitivos	Recordar	x	x	x	x	x		x		x	x	x			x	x	x	x	x
Comprender	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	
Aplicar		x	x		x		x	x		x	x	x	x		x			x		
Analizar	x		x	x	x	x				x					x	x	x	x	x	
Evaluar		x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Crear										x					x		x	x		

5.2.1.1. Competencias matemáticas

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren dos de las competencias matemáticas: comunicar y representar. Comunicar alude a leer e interpretar la tarea indicada, por

ejemplo, la longitud de la parte externa del mostrador, la superficie total del tejado, la longitud del arco de abertura en la puerta giratoria, las cuatro longitudes en el apartamento, entre otros. Mientras que representar alude a decodificar la información presentada en el mapa, por ejemplo, identificar la parte externa de la interna, deducir que el diámetro de la noria es 140 m, que el ancho del tejado se encuentra en la vista frontal del garaje, que las tres hojas de la puerta giratoria dividen a un ángulo completo en tres secciones iguales o que el apartamento se puede dividir en dos rectángulos de los que se conocen sus dimensiones.

Otras dos competencias son mayormente requeridas en las TEP, usar herramientas matemáticas y matematizar, en ese orden. La herramienta matemática que se requiere es la calculadora, a la hora de los cálculos que se necesitan realizar en todas las tareas menos en el garaje y en la compra de un apartamento. Mientras que matematizar las situaciones de la vida real significa, por ejemplo, transformar la longitud del mostrador en unión de segmentos, el área del suelo de la heladería en el área de un rectángulo, la noria en una circunferencia, la superficie total del tejado en el área de dos rectángulos iguales. En algunas tareas se plantea directamente la situación matemática como es el caso de la pregunta 1 del garaje, la compra de un apartamento y la construcción con dados.

En menor medida y en orden decreciente algunas tareas requieren también, utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; idear estrategias para la resolución de problemas; y razonar y argumentar.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren cuatro de las competencias: comunicar; representar; razonar y argumentar; y utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comunicar se refiere a leer e interpretar la consigna de la tarea, por ejemplo, los puntos que están a más de 3cm de un punto fijo, los puntos que equidistan de dos semirrectas, los puntos que equidistan de dos puntos fijos; así como presentar resultados, por ejemplo, escribir en palabras del estudiante una proposición dada en lenguaje simbólico. Mientras que representar alude a decodificar la información dada en el mapa, por ejemplo, asociar que dos semirrectas son los lados de un ángulo, interpretar un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz.

Razonar y argumentar implica vincular elementos para inferir y justificar declaraciones, por ejemplo, las tareas A2 y A4 que requieren justificar las proposiciones indicando si

son verdaderas o falsas a partir de la información brindada en el enunciado. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas requiere comprender y utilizar proposiciones en lenguaje simbólico basadas en definiciones, por ejemplo, $d(A, G) < d(G, C)$; $d(H, A) > 4 > d(A, G)$; $A = \{P \in \pi / d(P, \overline{BA}) \leq d(P, \overline{BC})\}$.

En menor medida, solo cuatro tareas requieren, usar las herramientas matemáticas de regla y compás. Sin embargo, idear estrategias para la resolución de problemas, no es requerida en las tareas de aula para resolverlas.

En síntesis, las semejanzas entre las TEP y las TEA se manifiestan en que todas las tareas requieren de dos competencias: comunicar y representar. En el caso de las TEP el comunicar refiere a leer, decodificar la información presentada en el mapa e interpretar la tarea indicada. Las TEA además requieren que expliciten la solución. Mientras que las diferencias se establecen en que las TEP requieren idear estrategias para la resolución y las TEA no lo requieren tanto. A su vez, todas las TEA requieren razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico mientras que en las TEP son solo algunas.

En conclusión, en relación con las competencias matemáticas, se podría decir que todas las TEA demandan un mayor número de competencias matemática que las TEP. Todas las TEA requieren comunicar, representar, razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico y formal, mientras que las TEP requieren comunicar y representar. Estos resultados podrían estar asociados a la demanda de interpretación del lenguaje simbólico expresado en los enunciados de las TEA y la solicitud de justificación de procedimientos y proposiciones enunciadas en las TEA, no sucede así en las TEP.

5.2.1.2. Procesos cognitivos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución de un proceso cognitivo, comprender, que implica interpretar el significado de las consignas escritas en palabras y en gráficos que constituyen el enunciado, los ejemplos se corresponden con los indicados en las dos competencias antes descritas, comunicar y representar.

Otros procesos cognitivos requeridos en la mayoría de las TEP son recordar, aplicar y evaluar. Algunas tareas precisan recordar, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, el cálculo de áreas de polígonos, longitud de la circunferencia o el ángulo llano entre otros. Otras requieren aplicar, por ejemplo, la suma de segmentos para obtener la longitud total, la

suma o resta de áreas para obtener la solicitada, el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de un segmento, y la composición o descomposición de figuras. Algunas tareas requieren evaluar si el resultado obtenido es coherente con la situación planteada.

Menos de la mitad de las tareas requieren analizar, es decir, desintegrar en partes para poder encontrar una solución, por ejemplo, determinar la superficie total del suelo de la tienda excluidos área de servicio y mostrador, las condiciones que se establecen para ubicar los conjuntos de mesas en el área de mesas, los datos de la vista frontal y lateral del garaje para identificar largo y ancho del tejado, entre otros. Sólo la pregunta 2 del garaje requiere crear el rectángulo que representa el tejado, no está dado en el enunciado, si bien están sus elementos.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución de cuatro procesos cognitivos: recordar, comprender, analizar y evaluar. Recordar implica recuperar conocimientos relevantes, por ejemplo, la definición de circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugares geométricos. Comprender supone interpretar el significado del enunciado: en las consignas escritas en palabras, los ejemplos se corresponden con los indicados en la competencia de comunicar, antes descripta; y en los gráficos, por ejemplo, un punto exterior o interior a una circunferencia requiere inferir que la distancia con el centro es mayor o menor que el radio. Analizar implica desintegrar en partes una proposición por ejemplo para poder afirmar si es verdadera o falsa. Evaluar, implica emitir juicios, por ejemplo, integrar las partes de la proposición y afirmar su verdad o falsedad.

Otro proceso cognitivo requerido en cuatro de las TEA es crear, armar un producto, por ejemplo, las tareas A3 y A6, donde se debe representar gráficamente una proposición dada en lenguaje simbólico. Mientras que aplicar es requerido sólo en dos tareas, A1 y A4, implica utilizar un procedimiento conocido, en estos casos, el trazado de los cuatro lugares geométricos: circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas.

En síntesis, el proceso cognitivo requerido en todas las tareas es comprender, que implica interpretar el significado de las consignas escritas y gráficas que constituyen el enunciado y se vincula directamente con las dos competencias en común, comunicar y representar. Se diferencian en el proceso cognitivo de crear. Las TEA juntan elementos para formar un todo coherente, intersecan lugares geométricos para determinar los puntos que

cumplen con algunas condiciones, mientras que la pregunta 2 del garaje es la única TEP que lo requiere. Asimismo, las TEP requieren de aplicar procedimientos matemáticos para resolver las situaciones planteadas de la vida real, a diferencia de las TEA, que parten de situaciones matemáticas y solo dos de ellas, A1 y A4, requieren ejecutar un procedimiento conocido como es la construcción de lugares geométricos. Otra diferencia es que las TEA no requieren de idear estrategias para la resolución de problemas.

En conclusión, en relación con los procesos cognitivos, todas las tareas, las TEA y las TEP requieren para su resolución de comprender. Las TEA exigen además en la resolución de recordar, analizar y evaluar, por tanto, se podría decir que las TEA requieren de procesos más complejos que las TEP.

5.2.2. Componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación

La primera síntesis de información se realiza a partir de los análisis agrupados en el anexo 5 se confecciona la tabla 36 que sintetiza la información, en cuanto a ausencia o presencia, acerca de las componentes del sentido espacial, manejo de conceptos geométricos (Flores et al., 2015) y habilidades de visualización (Del Grande, 1990), en las TEP y las TEA.

Tabla 36. Componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA y de aula

Componentes del sentido espacial		A	H	H	H	P	N	N	D	G	G	P	P	P	A	A	A	A	A	A
		P	1	2	3	E	1	2	A	1	2	1	2	3	1	2	3	4	5	6
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Propiedades de las formas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Relaciones geométricas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Ubicación y movimientos	x	x	x	x		x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Orientación	x	x	x	x	x	x		x	x	x		x							
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor		x	x	x										x		x	x		x
	Percepción figura-contexto	x	x	x	x	x		x	x	x	x				x			x		
	Conservación de la percepción	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x			x					
	Percepción de la posición en el espacio	x	x		x			x	x	x	x	x	x			x				x
	Percepción de las relaciones espaciales	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x
	Discriminación visual	x	x	x	x	x				x	x	x			x		x	x	x	x
	Memoria visual	x	x	x	x															

5.2.2.1. Manejo de conceptos geométricos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como triángulo, rectángulo, paralelogramo, trapecio, ángulo, circunferencia, distancia, medida directa e indirecta de longitud y de área entre otros.

Todas menos P3, requieren del empleo de las propiedades de las formas tales como la aplicación del teorema de Pitágoras y de áreas de polígonos, la longitud como suma o resta de longitudes, conservación de la distancia en los movimientos, composición y descomposición de áreas. A la vez, están implicadas las relaciones geométricas tales como paralelismo entre lados y caras; perpendicularidad entre segmentos, lados consecutivos y caras; distancia entre puntos de un segmento horizontal, vertical u oblicuo y entre objetos; amplitud de un sector de circunferencia, ángulos completos y obtusos, entre otras.

Mientras que la mayoría de las preguntas, 10 de las 13 requieren: la ubicación y los movimientos en todas salvo G2, PE y DA; la orientación aparece en todas salvo N2, P1 y P3.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugar geométrico; distancia y medida, semiplano y ángulo entre otros. A la vez, requieren del empleo de las propiedades de las formas tales como: puntos interiores, exteriores y en la circunferencia están a una distancia del centro menor, mayor o igual que el radio; puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo; puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento; puntos de la unión de paralelas distan una distancia fija de una recta.

En todas las tareas están implicadas también, las relaciones geométricas tales como: la distancia del centro de la circunferencia a un punto interior es menor que a un punto exterior; dos puntos como intersección de una recta y una circunferencia; un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz; puntos que cumplen con dos condiciones: estar una distancia constante de un punto fijo y de una recta, entre otras. Asimismo, son requeridas la ubicación y los movimientos: por ejemplo, la posición de puntos en relación con una circunferencia, interiores, exteriores o pertenecientes a ella; todos los puntos que

equidistan de dos puntos fijos están alineados; o todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo están alineados.

En síntesis, todas las tareas, TEP y TEA, requieren conocer conceptos geométricos. La mayoría hacen uso de las propiedades, de las relaciones geométricas, de la ubicación y el uso de los movimientos para obtener la solución. Una diferencia la puede establecer la orientación, son varias TEP que la requieren para la resolución mientras que las TEA es sólo una.

En conclusión, en relación con el manejo de conceptos geométricos, pareciera que hay más semejanzas que diferencias entre las TEP y las TEA. La diferencia la establece la orientación requerida en las TEP, no así en las TEA.

5.2.2.2. Habilidades de visualización

Tareas de PISA. Las habilidades visuales más requeridas para resolver las tareas de PISA son cinco: percepción de las relaciones espaciales, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción figura-contexto y discriminación visual, aparecen entre ocho y once de las preguntas para su resolución. Mientras que la coordinación ojo-motor y la memoria visual son utilizadas en tres y cuatro preguntas, las tres de la heladería y en la compra de un apartamento.

Se puede afirmar que no hay una habilidad que sea necesaria para la resolución de todas las tareas. Asimismo, las habilidades, coordinación ojo-motor y memoria visual, son poco requeridas, en una o dos tareas aparecen, en la heladería y en la compra de un apartamento.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución la percepción de las relaciones espaciales, por ejemplo, percibir la igualdad de distancias, puntos que cumplen con equidistar de los extremos de un segmento y pertenecer a la circunferencia; puntos que cumplen con estar 3cm de un punto fijo y 2cm de una recta.

Además, hay dos habilidades visuales más requeridas para resolver las TEA: la coordinación ojo-motor y discriminación visual, aparecen en cuatro y cinco de las tareas. Mientras que la percepción figura-contexto, conservación de la percepción y percepción

de la posición en el espacio son utilizadas en una y dos de las tareas. Por su parte, la memoria visual no es requerida para la resolución de las tareas.

Se puede afirmar que son necesarias para la resolución de todas las tareas, cuatro aspectos del manejo de conceptos geométricos: conocer conceptos geométricos, las propiedades de las formas, las relaciones geométricas y la ubicación y movimientos; y una habilidad de visualización, la percepción de las relaciones espaciales. Asimismo, la orientación, la percepción figura-contexto, conservación de la percepción y percepción de la posición en el espacio son poco requeridas. Mientras que la memoria visual, no es requeridas para resolver las tareas de aula.

En síntesis, la habilidad de visualización requerida en la mayoría de las tareas es la percepción de las relaciones espaciales. Mientras que las TEP precisan de la conservación de la percepción, la percepción de la posición en el espacio y en menor medida la percepción figura-contexto; en las TEA por su parte se requiere de la coordinación ojo-motor y discriminación visual, necesarias para construir e identificar, en particular cuando se trabaja con regla y compás.

En conclusión, en relación con las habilidades de visualización, se podría afirmar que hay más diferencias que semejanzas entre las TEP y las TEA. Las diferencias se podrían adjudicar a que las TEA precisan para su resolución construir con regla y compás mientras que las TEP no lo requieren.

5.2.3. Rendimiento de los estudiantes en las tareas de evaluación

Tareas de PISA. La tabla 20 contiene la información sintetizada acerca de las tareas bien resueltas en las TEP. Permite afirmar que menos del 70% de los estudiantes alcanza a realizar hasta seis de las 13 preguntas de PISA, que el 24 % de los estudiantes logra realizar entre 7 y 9 preguntas con acierto y que tan solo el 6% de los estudiantes logran realizar más de 10 preguntas con acierto, sólo uno logra responder las 13 con acierto. Las preguntas respondidas con acierto por más del 83% de los estudiantes son dos: la pregunta 1 del garaje y la construcción con dados; más del 52% y menos del 83% de los estudiantes respondieron con acierto a: la compra de un apartamento, puerta giratoria 1 y 3, y la pregunta 1 de la noria. Mientras que menos del 6% de los estudiantes respondieron con acierto a la puerta giratoria 2 y el vertido de petróleo.

Tareas de aula. La tabla 19 contiene la información sintetizada acerca de las calificaciones obtenidas por los estudiantes al realizar la prueba de geometría propuesta por los docentes en el aula. Permite afirmar que el 23% de los estudiantes alcanza a realizar menos de la mitad de la prueba con acierto, y que el 34% de los estudiantes logran resolver con acierto más de las $\frac{3}{4}$ partes de la prueba, mientras que el 43% de los estudiantes logra resolver con acierto más de la mitad y menos de las $\frac{3}{4}$ partes de la prueba.

Para estudiar las semejanzas entre las TEP y las TEA se van a describir el grupo alto-alto y el grupo bajo-bajo. El primer grupo significa que realiza más de 9 TEP con acierto y obtiene más de 8 en la calificación de las TEA. El grupo bajo-bajo realiza menos de 7 TEP con acierto y obtiene una calificación menor de 6 en las TEA.

Grupo alto-alto. De los ocho estudiantes que logran resolver con acierto más de 9 preguntas en las TEP, seis de ellos obtienen una calificación mayor a 8, los otros dos tienen un 7. Mientras que de los 42 estudiantes que obtiene una calificación mayor a 8, pertenecientes al grupo de rendimiento alto en las TEA, 23 de ellos (54%) logran responder correctamente menos de la mitad de las preguntas, menos de 7 preguntas por lo que pertenecen al grupo bajo de las TEP.

Grupo bajo-bajo. De los 85 estudiantes que responden con acierto menos de 7 preguntas en las TEP, como ya se dijo 23 obtienen una calificación mayor a 8 y 24 obtienen una calificación menor a 5, todos los demás están en el grupo de rendimiento medio. Mientras que de los 28 estudiantes que obtienen una calificación menor a 5, pertenecientes al grupo de rendimiento bajo en las TEA, 4 de ellos logran responder correctamente 7 preguntas, pertenecen al grupo medio; mientras todos los demás pertenecen al grupo bajo de las TEP.

En síntesis, se puede decir que los estudiantes que logran un número alto de respuestas correctas en las TEP logran también un buen rendimiento en las pruebas de evaluación propuestas por los docentes en el aula. Mientras que los estudiantes que obtienen bajos resultados en las pruebas de aula logran resolver con acierto muy pocas TEP.

5.3. Componentes del sentido espacial

Nuestro interés en este apartado se centra en comprender la manifestación del sentido espacial en las pruebas PISA. Para ello vinculamos el análisis cualitativo de las

manifestaciones del sentido espacial en las TEP con el rendimiento alcanzado en las TEA. Para tener una perspectiva global de la relación entre las componentes del sentido espacial en cada tarea se agregan los resultados del análisis cuantitativo.

5.3.1. Resultados cualitativos

Los primeros resultados se obtienen al relacionar las variables: grupo de estudiantes según el rendimiento en las TEA y el nivel del sentido espacial en las TEP. De este modo, tendremos por ejemplo un estudiante que pertenece al grupo medio en el rendimiento en las TEA que obtuvo un nivel de sentido espacial, bajo, medio o alto, en todas las TEP. Asimismo, sucede con los estudiantes de los otros grupos como se muestra en la tabla 37, que se construye a partir de los datos que se encuentran en el anexo 8. Los porcentajes se calculan sobre el total de integrantes que tiene cada grupo de estudiantes.

Tabla 37. Sentido espacial por grupo de estudiantes

	Manejo conceptos geométricos (MCG)			Habilidades de visualización (HV)			Sentido espacial (SE)			T
	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	
G. Bajo	6 (0.21)	17(0.61)	5 (0.18)	8 (0.29)	18(0.64)	2(0.07)	7 (0.25)	16(0.57)	5 (0.18)	28
G. Medio	6 (0.12)	24(0.46)	22(0.42)	10(0.19)	29(0.56)	13(0.25)	5 (0.10)	28(0.54)	19(0.36)	52
G. Alto	0 (0.00)	17(0.40)	25(0.60)	2 (0.04)	20(0.48)	20(0.48)	1 (0.02)	18(0.43)	23(0.55)	42
	12	58	52	20	67	35	13	62	47	T

Con el fin de establecer las diferencias y semejanzas entre el rendimiento obtenido por los estudiantes en la prueba propuesta por los docentes y el sentido espacial manifestado en la resolución de las TEP, el análisis en profundidad se realiza del grupo bajo y el alto. Para establecer semejanzas, se pone especial atención al grupo bajo con nivel bajo de sentido espacial y el grupo alto con nivel alto de sentido espacial, mientras que para establecer las diferencias se analiza el grupo bajo con un nivel alto del sentido espacial y el grupo alto con un nivel bajo del sentido espacial.

No obstante, resaltamos que, de los 52 estudiantes del grupo medio, cerca de la mitad muestran un nivel medio en el desarrollo del manejo de conceptos geométricos (46%), de las habilidades de visualización (56%) y del sentido espacial en su conjunto (54%). Sólo el 8%, 4 de estos estudiantes tienen un nivel bajo de desarrollo de conceptos geométricos, de habilidades de visualización y de sentido espacial, si bien hay algún estudiante más en ese nivel en cada componente (ver tabla 39). Mientras que hay un 25%, 13 estudiantes

que obtienen nivel alto en todas las categorías; además hay 10 estudiantes que lo alcanzan en el manejo de conceptos geométricos y solo 6 de ellos lo obtienen en el sentido espacial en su conjunto. En términos generales, los estudiantes que obtuvieron un rendimiento medio en las pruebas de los docentes han logrado un nivel medio o alto en el sentido espacial, y son pocos los que alcanzaron un nivel bajo.

5.3.1.1. Grupo de estudiantes con bajo rendimiento en la prueba de aula

De los 28 estudiantes del grupo bajo (ver tabla 19), más de la mitad tienen un nivel medio del sentido espacial (57%), del manejo de conceptos geométricos (61%) y de las habilidades de visualización (64%) (ver tabla 41). Si bien son 14 estudiantes, el 50% de ellos, que alcanzan el nivel medio en todas las categorías de análisis (ver tabla 38).

Tabla 38. *Estudiantes del grupo bajo*

	Nivel	Estudiantes
MCG	Bajo	E59, E56, E99, E110, E91, E66
	Medio	E86, E92, E116, E38, E64, E90, E76, E108, E120, E10, E25, E21, E18, E19, E24, E102, E105
	Alto	E8, E111, E107, E23, E2
HV	Bajo	E59, E56, E110, E86, E91, E38, E92, E99
	Medio	E66, E116, E76, E21, E64, E25, E10, E108, E102, E18, E24, E120, E19, E107, E105, E90, E111, E23
	Alto	E8, E2
SE	Bajo	E59, E56, E110, E91, E99, E66, E86
	Medio	E92, E38, E116, E64, E76, E21, E25, E108, E10, E90, E120, E18, E24, E102, E19, E105
	Alto	E107, E111, E23, E8, E2

Destacan los resultados obtenidos en dos tareas: el vertido de petróleo y la construcción con dados. En el PE, la mayoría de los estudiantes, 21 de los 28, manifiestan bajo manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización, obtienen cero puntos en el sentido espacial, dejan sin hacer o escriben un resultado equívoco, pero no dejan registro de su forma de alcanzar la solución. Mientras que, en la DA, 26 estudiantes de los 28, manifiestan alto dominio del sentido espacial.

Nivel bajo en las componentes del sentido espacial

Sólo el 18%, 5 estudiantes, obtienen bajos resultados en todas las categorías de análisis: E56, E59, E91, E99 y E110. Asimismo, hay dos estudiantes más que obtienen el nivel

bajo en el sentido espacial y en alguna de las componentes: el E66 en el manejo de conceptos geométricos y el E86 en las habilidades de visualización. Además, hay dos estudiantes: E38 y E92, que están en el nivel bajo de las habilidades de visualización, sin embargo, alcanzan el nivel medio del sentido espacial (ver tabla 38).

Con el fin de establecer semejanzas, se analizan los 7 estudiantes que pertenecen al grupo bajo y alcanzan un bajo nivel de manifestación del sentido espacial (ver tabla 38). Todos los estudiantes no responden al menos una de las tareas y llegan a ser hasta cuatro las tareas no respondidas. En la tarea de la DA todos los estudiantes logran un nivel alto y responden con acierto, por tanto, no es la responsable de los bajos resultados. Se analizan las otras seis tareas (ver tabla 39).

Tabla 39. Resultados del grupo bajo y nivel bajo del sentido espacial

	AP	H	PE	N	DA	G	P	TOTAL	Calificaciones
E59	14	2	0	0	16	0	0	32	4
E56	10	0	0	0	16	26	0	52	3
E110	0	0	0	0	16	23	19	58	3
E91	24	2	0	2	16	15	4	63	3
E99	16	25	9	0	16	0	0	66	2
E66	22	30	5	0	16	0	0	73	4
E86	0	6	0	19	16	16	19	76	3

En la *compra de un apartamento*, son 5 estudiantes los que logran responder y lo hacen con acierto ya que alcanzan niveles medio y alto en el sentido espacial. La mayor dificultad en el manejo de conceptos geométricos se manifiesta en la ubicación y movimientos y en la orientación, no logran identificar los dos rectángulos involucrados en la suma o en la resta de áreas para obtener el área total; mientras que las habilidades de visualización con menor puntuación son la percepción figura-contexto, percepción de las relaciones espaciales y la discriminación visual. Por ejemplo, el E56 señala cuatro dimensiones, pero con ellas no puede calcular el área del apartamento, no logra identificar los rectángulos involucrados y sus respectivas medidas (ver figura 7).

En la *heladería*, son 5 los estudiantes que logran responder, sólo uno alcanza el nivel medio, los otros están en el nivel bajo. Una de las dificultades es identificar la parte externa del mostrador y la otra está en obtener la medida del lado oblicuo, que debía identificarse con la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver figura 8).

Este es el plano del apartamento que los padres de Jorge quieren comprar a una agencia inmobiliaria.



Pregunta 1

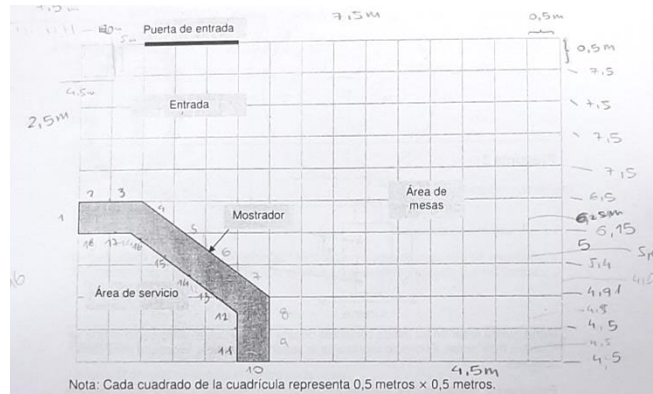
PM00FQ01 - 0 1 9

Para calcular la superficie (área) total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular la superficie de cada una y sumar todas las superficies.

No obstante, existe un método más eficaz para calcular la superficie total en el que sólo tienes que medir 4 longitudes. Señala en el plano anterior las **cuatro** longitudes necesarias para calcular la superficie total del apartamento.

Figura 7. Resolución de la tarea AP por E56

Los 7 estudiantes no logran identificar el triángulo rectángulo, por lo que se ven con menor puntuación todas las categorías del manejo de conceptos geométricos: conceptos, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos y la orientación.



Nota: Cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5 metros x 0,5 metros.

Pregunta 1

PM00LQ01 - 0 1 2 9

María quiere colocar un nuevo borde a lo largo de la parte externa del mostrador. ¿Cuál es la longitud total del borde que necesita? Escribe tus cálculos.

Necesita 9 m de longitud total del borde.
 porque si cada cuadrícula es 0,5 m contas
 cuantos bordes de cuadrículas hay de 0,5m
 y multiplicas 0,5 por el total de bordes
 de cuadrículas.
 $0,5 \times 18 = 9m$

Figura 8. Resolución de la tarea H1 por E99

Mientras que las habilidades de visualización con menor puntuación son: la coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, percepción de la posición en el espacio y la discriminación visual. El E99, por ejemplo, no identifica la parte externa del mostrador y para determinar la longitud del borde numera los cuadrados involucrados y asume con error que todos los segmentos de cada cuadrado que forma el mostrador miden igual que el lado del cuadrado (ver figura 8).

En *el vertido de petróleo*, los dos estudiantes que responden utilizan conceptos como estimación, escala, área de polígonos y cálculo de área por exceso, pero no logran utilizar la composición y descomposición de figuras para la resolución. Se ve un uso reducido de las propiedades de las formas, las relaciones geométricas y la orientación. Mientras que las habilidades de visualización que no logran utilizar son: la percepción figura-contexto, la percepción de relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual.

En *la noria*, los dos estudiantes que responden utilizan el concepto de circunferencia y distancia, pero les cuesta ubicar el centro de la noria a la mitad de la distancia del diámetro y a 10 m del cauce del río, se manifiesta en no utilizar las propiedades de las formas, las relaciones geométricas, la ubicación y los movimientos y la orientación. La única habilidad de visualización que se pone en juego en la resolución es la percepción de las relaciones espaciales que no utilizan ya que no logran identificar la medida del radio a partir de la altura señalada.

En el *garaje*, son cuatro estudiantes los que logran responder, utilizan el concepto de prisma, rectángulo, paralelogramo y de perspectiva, pero les cuesta la distancia relativa entre objetos. Se ve el uso reducido de las propiedades de las formas, las relaciones geométricas, la ubicación y movimientos y la orientación. Mientras que dos de ellos, no logran utilizar en forma adecuada las habilidades de visualización salvo la percepción figura-contexto.

En la *puerta giratoria*, son tres los estudiantes que responden alguna de las preguntas y lo hacen con acierto. Como no hay respuesta de las tres preguntas no se puede establecer los motivos, si fue por falta de tiempo o por no saber cómo responder.

En líneas generales, en cuanto a las semejanzas, el grupo bajo de estudiantes con bajo nivel de manifestación del sentido espacial, tienen un comportamiento homogéneo ya que no logran resolver el vertido de petróleo, la noria y la puerta giratoria; resuelven en mayor

medida, en orden creciente la tarea del garaje, heladería y compra del apartamento; y todos resuelven con acierto la construcción con dados.

Nivel alto en las componentes del sentido espacial

Sólo el 8%, 2 estudiantes, obtienen puntuaciones altas en todas las categorías de análisis: E2 y E8. Asimismo, hay tres estudiantes más que obtienen el nivel alto en el sentido espacial y en el manejo de conceptos geométricos: E23, E107 y E111 (ver tabla 37).

Con el fin de establecer diferencias, se analizan estos 5 estudiantes del grupo bajo que alcanzan un nivel alto de manifestación del sentido espacial (ver tabla 37). Todos los estudiantes logran un nivel alto y responden con acierto dos tareas, la noria y la construcción con dados. Se podría interpretar que las dificultades de estas tareas no se relacionan con las dificultades que presentan las tareas propuestas por los docentes y no explican el bajo rendimiento en las pruebas. Se analizan las otras cinco tareas, en particular el vertido de petróleo que sólo un estudiante logra responder y alcanza una puntuación media en el sentido espacial (ver tabla 40).

Tabla 40. *Resultados del grupo bajo y nivel alto del sentido espacial*

	AP	H	PE	N	DA	G	P	TOTAL	Calificaciones
E107	22	53	0	25	16	29	19	164	4
E111	12	63	0	25	16	29	19	164	4
E23	21	45	0	30	16	33	24	169	4
E8	20	49	0	30	16	37	19	171	4
E2	21	69	11	26	16	23	31	197	4

En la *compra de un apartamento*, son 4 estudiantes los que logran responder con acierto ya que alcanzan nivel alto en el desarrollo del sentido espacial. Solo un estudiante se analiza en profundidad, E111, que logra el nivel medio en las componentes del sentido espacial. La mayor dificultad en el manejo de conceptos geométricos se manifiesta en la ubicación y movimientos y en la orientación, no identifica los dos rectángulos involucrados en la suma o en la resta de áreas para obtener el área total; mientras que en todas las habilidades de visualización obtiene cero puntos, menos en la percepción de la posición en el espacio y la percepción de las relaciones espaciales. Específicamente, señala cuatro dimensiones con las que puede calcular el área del apartamento, pero no identifica los rectángulos involucrados y sus respectivas medidas (ver figura 10).

En la heladería, los 5 estudiantes responden. Sólo tres logran en nivel alto en la manifestación del sentido espacial, los otros dos, E8 y E23 están en el nivel medio, que se analizan en profundidad las respuestas. La mayor dificultad se presenta en la pregunta 3, donde deben ubicar los conjuntos, una mesa con cuatro sillas en el área de mesas, se brinda una representación de la composición del conjunto y se establecen dos condiciones para situar a cada conjunto, estar al menos a 0,5 m de las paredes y de los otros conjuntos. Cada cuadrado de la cuadrícula de la heladería mide 0.5 m de lado. Las dificultades son: determinar que cada conjunto ocupa nueve cuadrados, interpretar los gráficos de la heladería y del conjunto y atender a las dos condiciones. El E8 no responde y el E23 responde con error, adjudica 6 cuadrados a cada conjunto y considera la línea divisoria de la zona de mesas como pared (ver figura 9), por lo que se ven con menor puntuación todas las categorías del manejo de conceptos geométricos y es casi nula la puntuación que obtiene en las habilidades de visualización.

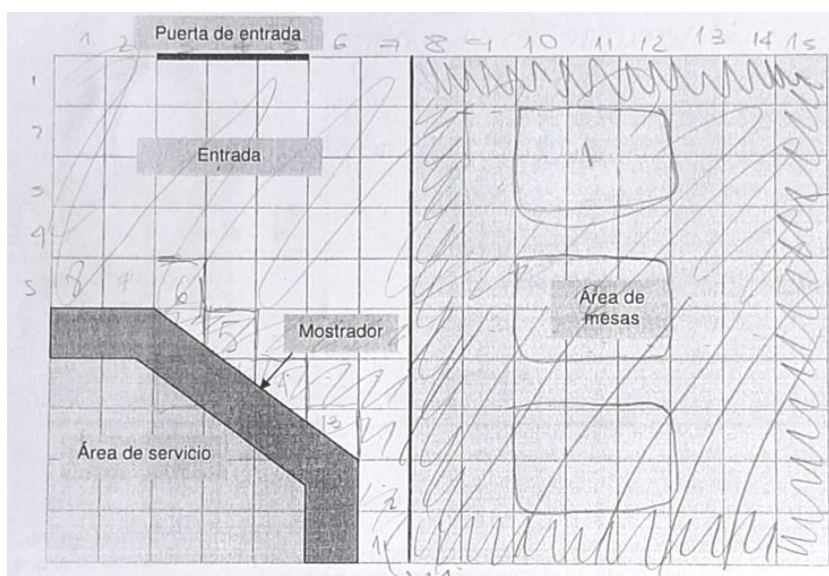


Figura 9. Resolución de la tarea H por E23

En el vertido de petróleo, solo un estudiante responde, E2, obtiene nivel medio en el manejo de conceptos geométricos, se ve un uso reducido de las propiedades de las formas y las relaciones geométricas; y obtiene un nivel alto en las habilidades de visualización si bien presenta dificultades en la discriminación visual, logra identificar un rectángulo que contiene el vertido de petróleo pero no lo puede dividir en otros polígonos que lo ayuden a calcular un área más cercana a la que en realidad ocupa el vertido de petróleo (ver figura 10).



Figura 10. Resolución de la tarea PE por E2

En el *garaje*, son dos estudiantes los que logran un nivel alto de manifestación del sentido espacial y los otros tres, E2, E107 y E111 obtienen un nivel medio porque no responden o lo hacen con error a la pregunta 2. Las dificultades que presenta G2 son: interpretar los datos brindados en el gráfico y determinar el ancho del tejado para calcular el área. En el caso del E111, comete varios errores relacionados con el manejo de conceptos geométricos: conceptos geométricos, propiedades de las formas, relaciones geométricas y la orientación; y es casi nulo el uso de las habilidades de visualización (ver figura 11).

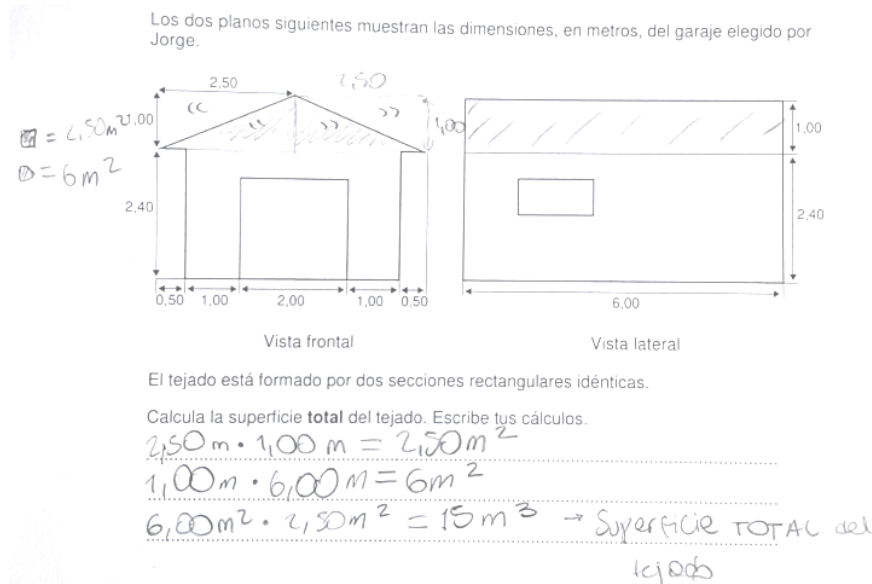


Figura 11. Resolución de la tarea G2 por E111

En la *puerta giratoria*, son dos los estudiantes que manifiestan un nivel alto de manifestación del sentido espacial y los otros tres, E8, E107 y E111 obtienen un nivel medio, no responden la pregunta 2. Mientras que las otras dos preguntas las responden

con acierto, utilizan en forma adecuada el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización.

En el manejo de conceptos geométricos, todos los estudiantes obtienen una puntuación de nivel medio o bajo en al menos dos de las tareas y llegan hasta tres, salvo el E23 que tiene cero puntos en una única tarea, el vertido de petróleo.

Estos cinco estudiantes responden todas las tareas salvo el vertido del petróleo que solo un estudiante, E2, logra responderla. Se puede interpretar que las dificultades con las que se encuentran los estudiantes en la tarea del vertido del petróleo podrían relacionarse con las dificultades que tienen al momento de responder las tareas propuestas por los docentes.

En líneas generales, en cuanto a las diferencias, el grupo bajo de estudiantes con alto nivel de manifestación del sentido espacial tiene un comportamiento bastante homogéneo, obtiene una calificación de 4 en las pruebas propuestas por los docentes; responden todas las tareas salvo el vertido de petróleo y alcanzan niveles medio y alto de manifestación del sentido espacial; las puntuaciones medias las obtienen cuando manifiestan menor dominio de las habilidades de visualización.

En síntesis, el estudiantado con rendimiento bajo en la prueba propuesta por los docentes, en su mayoría alcanzan en las TEP un nivel medio de manifestación del sentido espacial. Tanto los estudiantes con bajo y alto nivel de manifestación del sentido espacial de este grupo logran un menor dominio de las habilidades de visualización que del manejo de conceptos geométricos.

5.3.1.2. Grupo de estudiantes con alto rendimiento en la prueba de aula

De los 42 estudiantes del grupo alto (ver tabla 19), más de la mitad tienen alto el sentido espacial en su conjunto (55%) (ver tabla 36), con un alto manejo de los conceptos geométricos (60%) y de las habilidades de visualización (48%). Si bien son 20 estudiantes, el 48% de ellos, que alcanzan el nivel alto en todas las categorías de análisis. Destacan los resultados del nivel bajo: en el manejo de conceptos geométricos, no hay estudiantes; en las habilidades de visualización, son dos estudiantes, E88 y E130; y en el sentido espacial es el estudiante E88 (ver tabla 41).

Tabla 41. *Estudiantes del grupo alto*

	Nivel	Estudiantes
MCG	Bajo	---
	Medio	E88, E130, E119, E123, E118, E141, E132, E124, E85, E129, E128, E52, E121, E69, E74, E87, E82
	Alto	E126, E51, E136, E48, E60, E83, E65, E27, E93, E75, E50, E100, E78, E55, E30, E62, E49, E44, E54, E104, E32, E96, E113, E63, E43
HV	Bajo	E88, E130
	Medio	E141, E123, E85, E87, E118, E132, E119, E124, E126, E82, E65, E74, E83, E60, E48, E121, E69, E129, E52, E128
	Alto	E100, E51, E27, E50, E75, E136, E93, E55, E78, E30, E32, E54, E62, E49, E104, E44, E43, E96, E63, E113
SE	Bajo	E88
	Medio	E130, E123, E141, E119, E118, E85, E132, E124, E87, E129, E128, E121, E69, E52, E74, E82, E126, E48
	Alto	E60, E83, E65, E51, E136, E27, E100, E93, E75, E50, E78, E55, E30, E62, E49, E32, E54, E44, E104, E96, E113, E63, E43

Nivel bajo en las componentes del sentido espacial

Para establecer diferencias se analiza el grupo alto con un nivel bajo del sentido espacial que se reduce al estudiante E88. Se explica el nivel alcanzado ya que no responde cuatro de las tareas: vertido de petróleo, construcción con dados, garaje y puerta giratoria (ver tabla 42).

Tabla 42. *Resultados del grupo alto y nivel bajo del sentido espacial*

	AP	H	PE	N	DA	G	P	TOTAL	Calificación
E88	11	45	0	23	0	0	0	79	10

En la *compra de un apartamento*, logra responder y lo hace con acierto ya que alcanza nivel medio en la manifestación del sentido espacial. La mayor dificultad en el manejo de conceptos geométricos se expresa en la ubicación y movimientos y en la orientación, no logra identificar los dos rectángulos involucrados en la suma o en la resta de áreas para obtener el área total; mientras que las habilidades de visualización con menor puntuación son la coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, conservación de la percepción, la discriminación visual y la memoria visual.

En la *heladería* obtiene puntuación alta en el manejo de conceptos geométricos sin embargo presenta baja puntuación en la mayoría de las habilidades de visualización, salvo en la conservación de la percepción.

En *la noria* alcanza el nivel alto en la manifestación del sentido espacial, también en el manejo de conceptos geométricos si bien es la tarea que exige menos habilidades de visualización (ver tabla 40). Además, el E130 es el otro estudiante que obtiene nivel bajo en las habilidades de visualización (ver tabla 39).

En líneas generales, en cuanto a las diferencias, el único estudiante del grupo alto de estudiantes con bajo nivel de manifestación del sentido espacial obtiene una calificación de 10 en las pruebas propuestas por los docentes. En las tres tareas que responde, obtiene puntuación alta en el manejo de conceptos geométricos y menor puntuación en las habilidades de visualización, y deja cuatro tareas sin responder.

Nivel alto en las componentes del sentido espacial

De los 23 estudiantes que logran una alta manifestación del sentido espacial, alcanzan también el nivel alto en manejo de conceptos geométricos. Sin embargo, no todos, son 20 los que logran alto las habilidades de visualización, mientras que los tres restantes obtienen puntuación media: E60, E65 y E83.

Con el fin de establecer semejanzas entre los estudiantes con nivel alto de manifestación del sentido espacial, se analizan las habilidades de visualización de los tres estudiantes que tienen alto el rendimiento y el manejo de conceptos geométricos, y con puntuación media en las habilidades de visualización. Obtienen puntuación media o baja en las habilidades de visualización de al menos dos de las tareas de PISA. Casi todos responden con acierto las habilidades de visualización en la tarea de la construcción con dado y en el garaje. En la tarea de la noria responden con acierto o con coherencia con el error al determinar el punto P, dado que su ubicación en el mapa puede dar lugar a confusión.

En *la compra de un apartamento*, un estudiante obtiene puntuación alta, los otros dos obtienen puntuación media. Los tres identifican con acierto cuatro medidas para calcular el área del apartamento, pero en la respuesta de uno de ellos no hay evidencias de cómo las usaría, no logra adjudicar esas medidas a lados de rectángulos a los que se les puede calcular el área. Se manifiesta menor desarrollo de las habilidades de visualización: la percepción figura-contexto, la conservación de la percepción y la discriminación visual.

En *la heladería*, un estudiante obtiene puntuación alta, los otros dos obtienen puntuación media. La dificultad se presenta al momento de calcular la superficie del suelo de la tienda

excluidos el área de servicio y mostrador, dividen el suelo de la heladería en varios polígonos, y el área cercana al mostrador es la más difícil de calcular. Las habilidades de visualización que evidencian menor manifestación son: la percepción figura-contexto y la percepción de las relaciones espaciales. El E60, cuenta cada cuadrado y en el caso de la zona cercana al mostrador completa cuadrados y lo hace en forma correcta (ver figura 12).

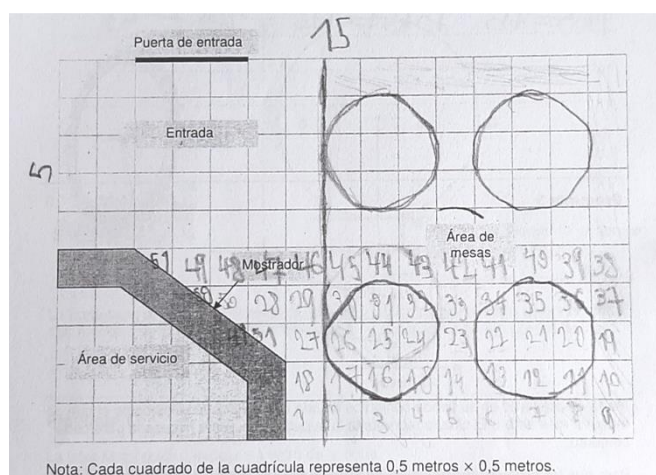


Figura 12. Resolución de la tarea H por E60

En *el vertido de petróleo*, dos estudiantes obtienen nivel medio y uno obtiene nivel bajo. Las habilidades de visualización con menor puntuación son: la percepción figura-contexto, la conservación de la percepción, la discriminación visual y la memoria visual.

En la *puerta giratoria*, cada uno de los tres estudiantes alcanza un nivel diferente: bajo, medio y alto, en las habilidades de visualización. Uno de ellos no responde la tarea, otro no responde la pregunta 2 y el que alcanza el nivel alto comete errores al interpretar la consigna en P1, al calcular la longitud de la circunferencia en la P2.

Los dos estudiantes que obtienen la mayor puntuación en el sentido espacial, el E63 y el E43, con 224 y 229 puntos respectivamente, tienen alto el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización en la resolución de todas las tareas de PISA, también es alto su rendimiento en las pruebas, con una calificación de 12 y 9, en ese orden (ver figura 13 y 14).

Además, hay un estudiante, E126 que tiene la prueba con la máxima calificación y nivel alto en el manejo de conceptos geométricos, pero tiene puntuación media en las habilidades de visualización que hace medio el sentido espacial. Este estudiante

manifiesta nivel alto en el manejo de conceptos geométricos en cuatro tareas y altas las habilidades de visualización en tres de ellas: heladería, construcción con dados y garaje. En las tareas de: compra de apartamento, noria y puerta giratoria, obtiene mejor puntuación en el manejo de conceptos geométricos que en las habilidades de visualización. Además, deja sin hacer: una pregunta P2, y la tarea completa del PE.

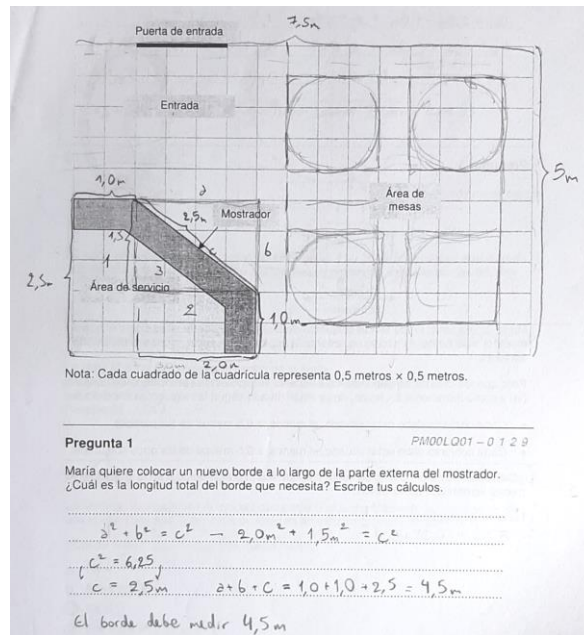


Figura 13. Resolución de la tarea H por E43

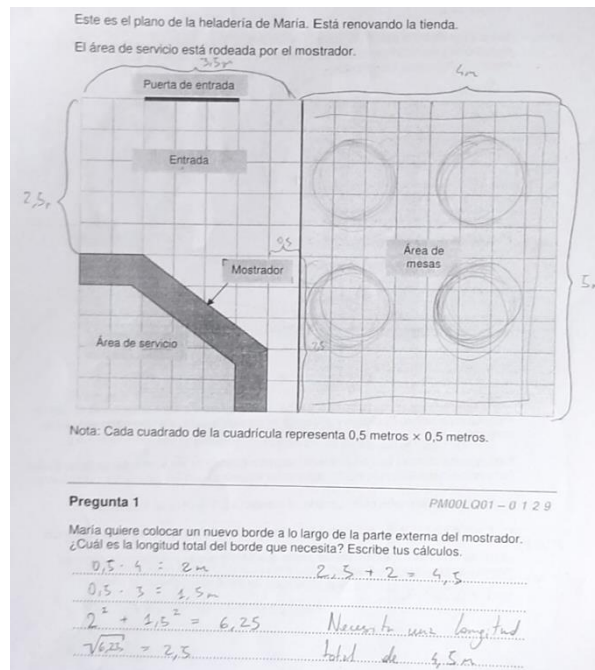


Figura 14. Resolución de la tarea H por E63

En síntesis, los estudiantes del grupo alto, con alto rendimiento en la prueba propuesta por los docentes, en su mayoría logran en las TEP un nivel alto en la manifestación del sentido espacial, solo un estudiante alcanza el nivel bajo.

5.3.2. Relación entre variables

Se realiza un análisis de correlación (Hernández et al, 2014) entre las distintas variables de manejo de conceptos geométricos y también entre las de habilidades de visualización (ver anexo 10). En cuanto al manejo de conceptos geométricos, G2_C es la variable que correlaciona significativamente con más variables asociadas al manejo de conceptos geométricos (ver tabla 38). Además, en relación con las habilidades de visualización, N1_H es la variable que correlaciona en forma significativa con más variables asociadas a las habilidades de visualización (ver tabla 39). Se interpreta el significado de los resultados por separado para el manejo de conceptos geométricos, para las habilidades de visualización y para el sentido espacial en su conjunto si corresponden a la misma tarea.

Los resultados del análisis de correlación ponen en evidencia que, en el manejo de conceptos geométricos, hay dos preguntas, G2_C y N1_C que correlacionan en forma significativa con el manejo de conceptos geométricos de 11 y 8 preguntas respectivamente. El manejo de conceptos geométricos de G2_C correlaciona con el manejo de conceptos geométricos de 11 preguntas: AP_C, H1_C, H2_C, H3_C, N1_C, N2_C, G1_C, P1_C, P2_C y P3_C. Seis preguntas con error .00, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, P1_C, N1_C, H1_C, G1_C, P3_C y H3_C. Dos preguntas con error menor a .01, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, N2_C, P2_C. Dos preguntas, con error menor a .05, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson: AP_C y H2_C (ver anexo 10).

También el manejo de conceptos geométricos de N1_C correlaciona con el manejo de conceptos geométricos de manera significativa en ocho preguntas: AP_C, H1_C, H2_C, H3_C, N2_C, G1_C, G2_C y P1_C. Seis preguntas y el rendimiento, con error .00, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, G2_C, N2_C, G1_C, H1_C, H2_C y P1_C. Dos preguntas con error menor al .01, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson: AP_C y H3_C (ver anexo 10).

El manejo de conceptos geométricos de G2_C y N1_C correlaciona con todas las tareas de PISA en alguna de sus preguntas, salvo con el vertido del petróleo y la construcción con datos.

Los resultados del análisis de correlación ponen de relieve que, en las habilidades de visualización, hay dos preguntas que correlacionan con 9 y 10 preguntas respectivamente. Las habilidades de visualización de G2_H correlaciona con las habilidades de visualización de manera significativa en nueve preguntas: AP_H, H1_H, H2_H, H3_H, PE_H, N1_H, G1_H, P1_H y P2_H. Cinco preguntas, con error .00, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, P1_H, N1_H, H3_H, H1_H y G1_H. Tres preguntas con error menor a .01, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson: P2_H, AP_H, PE_H. Una pregunta, H2_H, con error menor a .05. También, las habilidades de visualización de N1_H correlaciona con las habilidades de visualización de 10 preguntas: AP_H, H1_H, H2_H, H3_H, PE_H, G1_H, G2_H, N2_H, P1_H y P2_H. Cuatro preguntas con error .00, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, G1_H, G2_H, H1_H y H2_H. Cuatro preguntas, con error menor a .01, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson, H3_H, AP_H, N2_H y P1_H. Dos preguntas, con error menor a .05, en orden decreciente según el coeficiente de Pearson: PE_H y P2_H (ver anexo 10).

Las habilidades de visualización de G2_H y N1_H correlacionan con todas las tareas de PISA en alguna de sus preguntas, salvo con la construcción con datos.

Se considera de interés analizar el sentido espacial de las dos preguntas, G2 y H1, para caracterizar los elementos comunes de las tareas de PISA con relación al sentido espacial.

Pregunta G2. Los resultados revelan que G2 correlaciona, en forma significativa con nueve preguntas en el sentido espacial en su conjunto porque correlaciona con el manejo de conceptos geométricos y con las habilidades de visualización de AP, H1, H2, H3, PE, N1, G1, P1 y P2 (ver tabla 43). Asimismo, G2 correlaciona en forma significativa con el sentido espacial en su conjunto, con error menor a .01 en seis preguntas: H1, H3, N1, G1, P1 y P2; y con error menor a .05, en tres preguntas: AP, H2 y PE. Se puede afirmar que G2 correlaciona con el sentido espacial en su conjunto en seis tareas: la compra de apartamento; la heladería, en sus tres preguntas; el vertido de petróleo; la noria, en la pregunta 1; el garaje, en la pregunta 1; y con la puerta giratoria, en dos preguntas, 1 y 2.

Mientras que G2 correlaciona con el manejo de conceptos geométricos, en forma significativa con error menor a .01, en dos preguntas: N2_C y P3_C.

Tabla 43. *Correlaciones significativas entre G2 y sentido espacial en conjunto*

AP_C	H1_C	H2_C	H3_C	PE_C	N1_C	G1_C	P1_C	P2_C
0,231, p=.010	0,428, p=.000	0,221, p=.014	0,335, p=.000	0,206, p=.023	0,447, p=.000	0,369, p=.000	0,501, p=.000	0,250, p=.006
AP_H	H1_H	H2_H	H3_H	PE_H	N1_H	G1_H	P1_H	P2_H
0,263, p=.003	0,345, p=.000	0,197, p=.029	0,371, p=.000	0,245, p=.007	0,434, p=.000	0,327, p=.000	0,434, p=.000	0,266, p=.003

La resolución de la pregunta G2, tienen elementos en común con las preguntas con las que correlaciona, en relación con el manejo de conceptos geométricos demanda conocer: conceptos de, triángulo rectángulo y rectángulos, medida indirecta de longitud y de área; propiedades de las formas, aplicar el teorema de Pitágoras y el área del rectángulo; relaciones geométricas, lados opuestos de un rectángulo son paralelos y los consecutivos son perpendiculares, un lado del rectángulo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo a determinar; y la orientación, localizar los elementos en las diferentes perspectivas que se presentan en un mapa. Mientras que en las habilidades de visualización requiere hacer uso de: la coordinación ojo-motor, determinar una nueva figura que no está determinada en el mapa; percepción figura-contexto, identificar medidas que corresponden a objetos y distancias entre objetos; conservación de la percepción, percibir la inclinación aunque no se vea en el mapa; percepción de la posición en el espacio, comprender y determinar las medidas que intervienen aunque no aparezcan directamente en el mapa; percepción de las relaciones espaciales, identificar un segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo; y discriminación visual, diferenciar elementos y reconocer los comunes.

Pregunta N1. Los resultados evidencian que N1 correlaciona, en forma significativa con ocho preguntas en el sentido espacial en su conjunto porque correlaciona con el manejo de conceptos geométricos y con las habilidades de visualización de AP, H1, H2, H3, N2, G1, G2 y P1 (ver tabla 44). Asimismo, N1 correlaciona en forma significativa con el sentido espacial en su conjunto, con error menor a .00 en cinco preguntas: H1, H2, G1, G2 y P1; y con error menor a .05, en tres preguntas: AP, H3 y N2. Se puede afirmar que N1 correlaciona con el sentido espacial en su conjunto en cinco tareas: la compra de apartamento; la heladería, en sus tres preguntas; la noria, en la pregunta 2; el garaje, en sus dos preguntas; y con la puerta giratoria, en la pregunta 1. Mientras que N1

correlaciona, en forma significativa con error menor a .05, con las habilidades de visualización en dos preguntas: PE_H y P2_H.

Tabla 44. *Correlaciones significativas entre N1 y sentido espacial en conjunto*

AP_C	H1_C	H2_C	H3_C	N2_C	G1_C	G2_C	P1_C
0,302, p=.001	0,428, p=.000	0,387, p=.000	0,275, p=.002	0,447, p=.000	0,437, p=.000	0,447, p=.000	0,319, p=.000
AP_H	H1_H	H2_H	H3_H	N2_H	G1_H	G2_H	P1_H
0,308, p=.001	0,404, p=.000	0,384, p=.000	0,309, p=.001	0,308, p=.001	0,445, p=.000	0,434, p=.000	0,302, p=.000

La resolución de la pregunta N1, tiene elementos en común con las tareas con las que correlaciona, en relación con el manejo de conceptos geométricos supone conocer: conceptos de distancia, circunferencia y radio; propiedades de las formas, suma y resta de longitudes; relaciones geométricas, relación entre dos distancias conocidas; ubicación y movimientos, ubicar elementos cumpliendo condiciones; orientación, localizar elementos en el mapa. Mientras que en la habilidad de visualización requiere hacer uso de la percepción de las relaciones espaciales, identificar medidas de segmentos que cumplen algunas condiciones.

En síntesis, se puede afirmar que G2 demanda conocer concepto de triángulo rectángulo y rectángulo, medida indirecta de longitud y área y localizar elementos en el mapa con relación al manejo de conceptos geométricos, así como comprender, identificar y determinar medidas que cumplen condiciones en cuanto a las habilidades de visualización. Mientras que N1, requiere concepto de distancia y localizar en el mapa en cuanto a manejo de conceptos geométricos y la percepción de las relaciones espaciales de identificar medidas que cumplen condiciones en relación con las habilidades de visualización. Se puede interpretar que una mayor manifestación de estos conceptos geométrico y habilidades de visualización se ha relacionado con una mayor manifestación del sentido espacial en la mayoría de las preguntas de PISA.

5.3.3. Resultados cuantitativos

Se realiza un análisis de correlación (Hernández et al, 2014) entre todas las variables correspondientes al sentido espacial, para manejo de conceptos geométricos: AP_C, H1_C, H2_C, H3_C, PE_C, N1_C, N2_C, DA_C, G1_C, G2_C, P1_C, P2_C, P3_C, y para habilidades de visualización: AP_H, H1_H, H2_H, H3_H, PE_H, N1_H, N2_H,

DA_H, G1_H, G2_H, P1_H, P2_H, P3_H, y la variable nota. Se utiliza el paquete estadístico SPSS (v.19 para Windows). La significación estadística se fijó en un intervalo de confianza del 95% con $p < .05$ como criterio. Para las variables con correlación significativa con la variable nota, también se realiza un análisis de regresión (ver anexo 10).

5.3.3.1. El rendimiento relacionado con las otras variables del sentido espacial

Los primeros resultados se obtienen, a través del análisis de correlación (Hernández et al, 2014), al relacionar en cada pregunta las variables: nota y manejo de conceptos geométricos; y nota y habilidades de visualización.

La nota correlaciona significativamente con el manejo de conceptos geométricos en seis preguntas: H1_C, H2_C, H3_C, N1_C, N2_C y G2_C (ver tabla 45).

Tabla 45. Correlaciones significativas entre nota y manejo de conceptos geométricos

H1_C	H2_C	H3_C	N1_C	N2_C	G2_C
0,311**, $p = .000$	0,271**, $p = .002$	0,339**, $p = .000$	0,380**, $p = .000$	0,307**, $p = .001$	0,246**, $p = .006$

** . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

En la tabla 46 se presenta el manejo de conceptos geométricos que requiere del estudiante las seis preguntas para resolverlas, se agrupan tres, H1_C, H3_C, N1_C, y las otras tres, H3_C, N2_C y G2_C, según la demanda que tienen en común.

Tabla 46. Manejo de conceptos geométricos en común

	H1_C, H3_C y N1_C	H2_C, N2_C y G2_C
Conceptos	De diámetro, círculo, medida directa e indirecta de longitud.	De algún polígono, de área, de medida directa e indirecta de longitud o de ángulos.
Propiedades de las formas	De suma y resta de longitudes, polígonos circunscritos en una circunferencia.	Teorema de Pitágoras, composición y descomposición de figuras, conservación de la distancia y de las formas.
Relaciones geométricas	De distancia entre objetos.	De suma o resta de área, a igual tiempo igual recorrido, comparación de distancias.
Ubicación y movimientos	Para ubicar elementos cumpliendo determinadas condiciones	Unión de figuras conocidas forman una requerida, ubicación de objetos en una rotación, posición relativa entre objetos.
Orientación	Para localizar y disponer elementos en un mapa	--

Tres preguntas, H1, H3 y N1, tienen en común que requieren del estudiante: los conceptos geométricos, diámetro, círculo, medida directa e indirecta de longitud; las propiedades de

las formas, suma y resta de longitudes, polígonos circunscriptos en una circunferencia; las relaciones geométricas, la distancia entre objetos; la ubicación y los movimientos, ubicar elementos cumpliendo determinadas condiciones; y la orientación, localizar y disponer elementos en un mapa. Las otras tres preguntas, H2, N2 y G2, demandan del estudiante la aplicación de: los conceptos geométricos, de algún polígono, de área, de medida directa e indirecta de longitud o de ángulos; las propiedades de las formas, teorema de Pitágoras, composición y descomposición de figuras, conservación de la distancia y de las formas; las relaciones geométricas, suma o resta de área, a igual tiempo igual recorrido, comparación de distancias; y la ubicación y movimientos, unión de figuras conocidas forman una requerida, ubicación de objetos en una rotación, posición relativa entre objetos. Se puede interpretar que un mayor rendimiento en la prueba de evaluación se relaciona con una mayor manifestación del manejo de conceptos geométricos antes mencionados de estas seis tareas.

Por otro lado, la nota correlaciona significativamente con las habilidades de visualización en ocho preguntas: AP_H, H1_H, H2_H, H3_H, N1_H, N2_H, G1_H y G2_H (ver tabla 47).

Tabla 47. *Correlaciones significativas entre nota y habilidades de visualización*

AP_H	H1_H	H2_H	H3_H	N1_H	N2_H	G1_H	G2_H
0,227*, <i>p</i> =.012	0,296**, <i>p</i> =.001	0,361**, <i>p</i> =.000	0,367**, <i>p</i> =.000	0,390**, <i>p</i> =.000	0,293**, <i>p</i> =.001	0,204*, <i>p</i> =.024	0,246**, <i>p</i> =.006

** . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

Tres preguntas, H2_H, H3_H y N1_H, tienen en común que exigen del estudiante, la habilidad de percepción de las relaciones espaciales, identificar medidas de segmentos con relación a otros o vincular áreas. Además, en la tabla 48 se muestran las habilidades de visualización requeridas al estudiante en las otras cinco preguntas que se agrupan en tres, H1_H, N2_H y G2_H y las otras dos, AP_H y G1_H, según la demanda que tienen en común.

Tabla 48. *Habilidades de visualización en común en cinco preguntas*

H1_H, N2_H y G2_H	AP_H y G1_H
-------------------	-------------

Percepción figura-contexto.	Identificar puntos, segmentos o medidas en un mapa.	Identificar figuras tridimensionales por su perspectiva en el plano o una figura compuesta por otras dos.
Conservación de la percepción.	La circunferencia es invariante en la rotación, conservación de la unidad de medida y la medida de segmentos en cualquier posición.	Relaciones de lateralidad o cercanía, identificar rectángulos, aunque no estén determinados sus lados.
Percepción de la posición en el espacio.	Un punto se transforma en otro en la rotación, posición de segmentos en el plano, comprender medidas según la perspectiva.	Identificar segmentos como la suma de otros dos, posición relativa con relación a otros objetos.
Percepción de las relaciones espaciales.	Puntos correspondientes en la rotación, longitud de un segmento como la suma de otros. identificar dimensiones en diferentes vistas.	La relación entre áreas de objetos, la relación de cercanía y lejanía entre objetos.
Discriminación visual.	—	Diferenciar figuras según los elementos que se suministran en el mapa, división del mapa en rectángulos.

Otras tres preguntas H1, N2 y G2, precisan que el estudiante utilice: percepción figura-contexto, identificar puntos, segmentos o medidas en un mapa; la conservación de la percepción, la circunferencia es invariante en la rotación, conservación de la unidad de medida y la medida de segmentos en cualquier posición. Además, requieren de: la percepción de la posición en el espacio, un punto se transforma en otro en la rotación, posición de segmentos en el plano, comprender medidas según la perspectiva; y percepción de las relaciones espaciales, puntos correspondientes en la rotación, longitud de un segmento como la suma de otros, identificar dimensiones en diferentes vistas. Dos preguntas, AP y G1, demandan del estudiante: la percepción figura-contexto, identificar figuras tridimensionales por su perspectiva en el plano o una figura compuesta por otras dos; la conservación de la percepción, relaciones de lateralidad o cercanía, identificar rectángulos, aunque no estén determinados sus lados; percepción de la posición en el espacio, identificar segmentos como la suma de otros dos, posición relativa con relación a otros objetos. Además, requieren de: la percepción de las relaciones espaciales, la relación entre áreas de objetos, la relación de cercanía y lejanía entre objetos; y la discriminación visual, diferenciar figuras según los elementos que se suministran en el mapa, división del mapa en rectángulos. Se puede interpretar que un mayor rendimiento en la prueba de evaluación se relaciona con una mayor manifestación de las habilidades de visualización antes mencionadas de estas ocho tareas.

Los resultados ponen de manifiesto que el rendimiento correlaciona, en forma significativa, con seis preguntas en el sentido espacial en su conjunto, porque correlaciona

con el manejo de conceptos geométricos y con las habilidades de visualización de H1, H2, H3, N1, N2 y G2. Se puede afirmar que el rendimiento correlaciona con el sentido espacial en su conjunto en tres tareas: la heladería, en sus tres preguntas; la noria, en sus dos preguntas; y el garaje, en la pregunta 2. Asimismo, el rendimiento correlaciona en forma significativa con las habilidades de visualización en dos preguntas: AP_H y G1_H.

Se analizan las tareas y preguntas donde el rendimiento correlaciona con el sentido espacial en su conjunto, y con las habilidades de visualización anteriormente mencionadas.

En la *heladería*, el rendimiento correlaciona con las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto. Los estudiantes que tienen un buen número de manifestaciones del manejo de conceptos geométricos y de las habilidades de visualización obtienen un buen rendimiento en las pruebas en el aula. Para comprender esta relación, se analizan las dificultades que presenta cada pregunta. En la *pregunta 1*, una de las dificultades es identificar la parte externa del mostrador y la otra está en obtener la medida del lado oblicuo, que debía identificarse con la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Los estudiantes que no logran identificar el triángulo rectángulo se ven con menor puntuación en todas las categorías del manejo de conceptos geométricos. Mientras que las habilidades de visualización con menor puntuación son: la coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, percepción de la posición en el espacio y la discriminación visual. En la *pregunta 2*, la dificultad se presenta al calcular la superficie del suelo de la tienda excluidos el área de servicio y mostrador. El manejo de conceptos geométricos con menor manifestación es: las propiedades de las formas, las relaciones geométricas y la orientación. Las habilidades de visualización que evidencian menor manifestaciones son: la percepción figura-contexto y la percepción de las relaciones espaciales. En la *pregunta 3*, se deben ubicar los conjuntos, una mesa con cuatro sillas, en el área de mesas. Se brinda una representación del conjunto y se establecen dos condiciones para situarlos: estar al menos a 0,5 m de las paredes y de los otros conjuntos. Las dificultades son: determinar que cada conjunto ocupa nueve cuadrados, interpretar los gráficos de la heladería y del conjunto, y atender a las dos condiciones. El manejo de conceptos geométricos con menor manifestación es: las propiedades de las formas, un cuadrado circunscribe a una circunferencia; las relaciones geométricas, distancia y solapamiento entre conjuntos; y la orientación, disponer los conjuntos de acuerdo con los sistemas de referencia y con las

condiciones establecidas. Las habilidades de visualización con menor manifestación son: la percepción figura-contexto, determinar que son nueve baldosas que ocupa cada conjunto; y percepción de las relaciones espaciales, identificar que son cuatro los conjuntos que caben en el área de mesas.

En *la noria* el rendimiento correlaciona con las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto. Los estudiantes que manifiestan un buen manejo de los conceptos geométricos y de las habilidades de visualización en la resolución de las preguntas de la noria obtienen en general un buen rendimiento en las pruebas en el aula, si bien es la tarea que exige menos manifestaciones de las habilidades de visualización. Se analizan las dificultades que presenta cada pregunta. En la *pregunta 1*, la dificultad se presenta al ubicar el centro de la noria a la mitad de la distancia del diámetro y a 10 m del cauce del río, se manifiesta en no utilizar las propiedades de las formas, las relaciones geométricas, la ubicación y los movimientos y la orientación. La única habilidad de visualización que se pone en juego es la percepción de las relaciones espaciales, identificar la medida del radio a partir de la altura señalada, que no siempre logran determinar con acierto. En la *pregunta 2*, una de las dificultades es identificar los puntos P, Q, R y S en el lugar que le corresponde y la otra es establecer la relación entre el tiempo y el ángulo de rotación de la noria, que se expresa en no utilizar las relaciones geométricas y la ubicación y movimientos. Las habilidades de visualización con menor manifestaciones son: percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales.

En el *garaje*, en la *pregunta 2*, el rendimiento correlaciona con las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto. Los estudiantes que tienen un buen número de manifestaciones del manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización tienen también un buen rendimiento en las pruebas de aula. Las dificultades se presentan al interpretar los datos brindados en el gráfico y determinar el ancho del tejado para calcular el área. Los errores en el manejo de conceptos geométricos se relacionan con: conceptos geométricos, propiedades de las formas, relaciones geométricas y la orientación; y es casi nulo el uso de las habilidades de visualización.

En el *apartamento*, el rendimiento correlaciona con las manifestaciones de las habilidades de visualización. Una de las dificultades está en identificar los dos rectángulos en los que se puede componer o descomponer la superficie del apartamento que permita identificar las cuatro longitudes involucradas. Las habilidades de visualización con menor

puntuación son: la coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, conservación de la percepción, discriminación visual y memoria visual.

En el *garaje*, en la *pregunta 1*, el rendimiento correlaciona con las habilidades de visualización. Una de las dificultades es establecer la relación de distancia y la lateralidad entre puerta y ventana del garaje. Las habilidades de visualización con menor puntuación son: percepción de la posición en el espacio, percepción figura-contexto y discriminación visual y no se ponen en juego: coordinación ojo-motor y memoria visual.

En síntesis, dado que hay un número mayor de variables de habilidades de visualización que de manejo de conceptos geométricos que correlacionan con la nota, se puede interpretar que las habilidades de visualización adquieren un papel destacado en la relación que se establece entre el rendimiento en la prueba que proponen los docentes en el aula y las manifestaciones del sentido espacial en las tareas de PISA. Si bien son reducidas las habilidades de visualización que se emplean.

De acuerdo con los resultados se establece una relación directa entre el alto rendimiento de los estudiantes en las pruebas de geometría propuestas por los docentes, y las altas manifestaciones del manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización empleadas para resolver la mayoría de las tareas de PISA. De igual modo sucede entre el rendimiento y las manifestaciones del sentido espacial cuando es bajo (Mix et al., 2020; Möhring et al., 2021).

Del análisis de correlación se desprende que el rendimiento no correlaciona con el manejo de conceptos geométricos de siete preguntas: AP_C, PE_C, DA_C, G1_C y las tres preguntas de la puerta giratoria P1_C, P2_C y P3_C; asimismo no se puede establecer relación con las habilidades de visualización de cuatro preguntas: PE_H, DA_H y las dos primeras preguntas de la puerta giratoria, P1_H y P2_H, porque la resolución de P3_H no se advierte que requiera de habilidades de visualización. Se puede afirmar que el rendimiento no correlaciona en mayor medida con el manejo de conceptos geométricos que con las habilidades de visualización.

Los resultados ponen de manifiesto que el rendimiento no correlaciona con tres tareas en el sentido espacial en su conjunto, es decir en manejo de conceptos geométricos y en habilidades de visualización de: PE, DA y las tres preguntas de P. Mientras que el rendimiento no correlaciona con dos tareas en el manejo de conceptos geométricos: AP_C

y G1_C. Se analizan las tareas y preguntas donde el rendimiento no correlaciona con el sentido espacial en su conjunto, y con el manejo de conceptos geométricos anteriormente mencionadas.

En el *vertido de petróleo*, son 73 estudiantes los que no responden o lo hacen mal, son sólo 18 que responden con acierto, estos resultados podrían explicar que no haya correlación con el rendimiento en las pruebas propuestas por los docentes en el aula. Los estudiantes que responden utilizan conceptos como estimación, escala, área de polígonos y cálculo de área por exceso, pero no logran utilizar la composición y descomposición de figuras para la resolución. Se ve un uso reducido de las propiedades de las formas, las relaciones geométricas y la orientación. Mientras que las habilidades de visualización que no logran utilizar son: la percepción figura-contexto, la percepción de relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual. Por ejemplo, el E2, manifiesta un uso reducido de las propiedades de las formas y las relaciones geométricas y en las habilidades de visualización presenta dificultades en la discriminación visual. Logra identificar un rectángulo que contiene el vertido de petróleo, pero no lo puede dividir en otros polígonos que lo ayuden a calcular el área con mayor precisión.

En la *construcción con dado*, son 18 alumnos los que no responden o lo hacen mal, todos los demás estudiantes responden con acierto, por tanto, no permite establecer una relación con los resultados en las pruebas propuestas en el aula.

En la *puerta giratoria*, son 37 estudiantes los que no responden o lo hacen mal, todos los demás lo hacen con acierto. En los estudiantes que responden se presentan mayores dificultades en las habilidades de visualización, percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales, que en el manejo de conceptos geométricos; es en la pregunta 2 donde se observan la mayor diferencia.

En la *compra de un apartamento*, con relación al manejo de conceptos geométricos son 16 estudiantes los que no responden y 31 que lo hacen con error, todos los demás estudiantes responden con acierto. La mayor dificultad en el manejo de conceptos geométricos se manifiesta en la ubicación y movimientos y en la orientación, no logran identificar los dos rectángulos involucrados en la suma o en la resta de áreas para obtener el área total, por ejemplo, el E33, muestra dificultades para identificar las cuatro dimensiones involucradas en la resolución (ver figura 15).

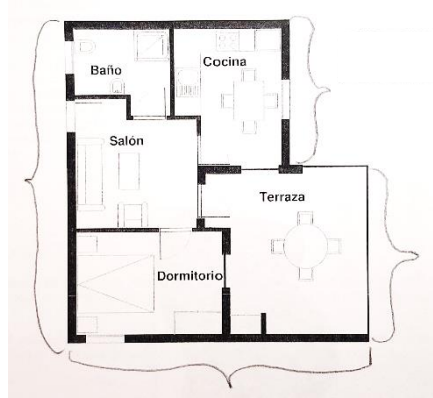


Figura 15. Resolución de la tarea AP por E33

En el *garaje*, en la *pregunta 1* son 110 estudiantes que responden con acierto, solo 12 no responden o lo hacen con error. Los que responden con error utilizan el concepto de prisma, rectángulo, paralelogramo y de perspectiva, pero les cuesta la distancia relativa entre objetos. Se ve el uso reducido de las propiedades de las formas, las relaciones geométricas, la ubicación y movimientos y la orientación.

5.3.3.2. Análisis de regresión del rendimiento

En un segundo momento se pretende ver, sabiendo que hay correlación, la forma en que el rendimiento predice el comportamiento de estas variables. Se realiza un análisis de regresión (Hernández et al, 2014) entre el rendimiento y las catorce variables con las que correlaciona, seis correspondientes al manejo de conceptos geométricos: N1_C, N2_C, H1_C, H2_C, H3_C y G2_C; y ocho a las habilidades de visualización: AP_H, H1_H, H2_H, H3_H, N1_H, N2_H, G1_H y G2_H, siendo la nota la variable dependiente. Los resultados de la regresión total es que el rendimiento se relaciona en forma significativa con error menor a .05 con dos variables, una de manejos de conceptos geométricos y una de habilidades de visualización, correspondientes a una única pregunta, H2 (ver anexo 10).

El resultado anterior en la pregunta H2 se interpreta a partir de las manifestaciones del sentido espacial en su conjunto. Un mayor rendimiento en la prueba formulada por los docentes en el aula predice una mayor manifestación de sentido espacial en la pregunta H2, por lo que se podrían establecer semejanzas entre el rendimiento en la prueba de aula propuesta por los docentes y el manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización requeridos para resolverla.

Pregunta H2. La pregunta 2 de la heladería, solicita calcular el área de una superficie cuyos datos vienen dados en un mapa. El área solicitada se puede calcular por suma o resta de áreas de polígonos conocidos. En el anexo 5, tabla 3 se muestra el manejo de conceptos geométricos requeridos y se detallan las habilidades de visualización demandadas al estudiante para resolverla.

Del anexo 5, tabla 3 se deduce que el manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización requeridos para la resolución de H2 son los que mejor predicen el rendimiento del estudiantado en la prueba de aula propuesta por los docentes. En la regresión presentan menor error de significatividad las habilidades de visualización con .012, que el manejo de conceptos geométricos con .041. Se puede interpretar este hecho para establecer una de las principales semejanzas entre el rendimiento en geometría del estudiantado analizado tanto en la prueba formulada por los docentes en el aula como en las tareas de PISA, específicamente en la pregunta H2.

5.3.4. Errores en las tareas de evaluación de PISA

Para mostrar los resultados en relación con los errores de los estudiantes al resolver las TEP, abordamos cada uno de los errores en el sentido espacial, las formas de manifestación en cada una de las tareas y su relación con las componentes del sentido espacial, utilizando los referentes determinados en la metodología de la investigación con las definiciones de los distintos autores (Battista, 2007; Clements y Sarama, 2007; Diezman y Lowrie, 2009; Movshovitz et al.,1987; Owens y Outhred, 2006; Radatz, 1979). Asimismo, se atienden los errores generales que afectan también el desempeño de los estudiantes según la definición de los autores (Astolfi, 1999; Movshovitz et al.,1987; Socas, 1997). A partir del anexo 9 se construye la tabla 49 que detalla la distribución de frecuencia de los errores en cada una de las 13 preguntas.

Tabla 49. *Clasificación de respuestas y frecuencia de errores en tareas de PISA*

Tarea	Sin hacer	Bien resuelta	No información	Con errores	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
AP	16	81	0	25	19		1		7				3	2
H1	18	46	2	56		5	13	12	10	26	2	1		15
H2	28	24	2	68	4	14	2		25	26	2	1		11
H3	26	28	14	54	1	18	1	25		1	2			11
PE	56	4	11	51		3	1		37	26	3		1	10
N1	10	64	0	48		27		43						27

N2	11	60	0	51	3	30				2	15			
DA	14	102	2	4	2	2				1				
G1	9	110	0	3	3	3								
G2	36	26	3	57	23	6	9	17	29	5	1	1		
P1	32	66	5	19	2				1	17				
P2	86	7	4	25	18				5	2	3			
P3	36	67	0	19	15				3	1				
					55	75	45	152	79	111	19	7	86	28

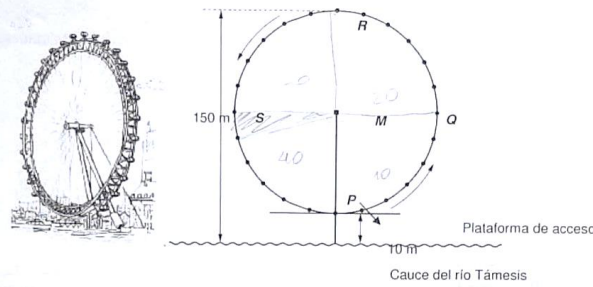
5.3.4.1. Errores en la manifestación del sentido espacial

Los errores en el sentido espacial se distribuyen de manera diferente en las tareas de PISA y sus respectivas preguntas. Se presenta la manifestación de cada error en las respectivas preguntas y se establece la relación con las componentes del sentido espacial menos desarrolladas. Además, en cada caso, se ejemplifica con la resolución de un estudiante, de la tarea que tiene mayor frecuencia del error.

Error debido a dificultades para obtener información espacial (e1) aparece en siete de las preguntas, sólo en dos con una frecuencia mayor a cuatro, entre 19 y 23 estudiantes. El error se manifiesta al reconocer e identificar los elementos necesarios en un diagrama que permitan aplicar propiedades o definiciones. Las componentes del sentido espacial asociadas son la orientación, la percepción de las relaciones espaciales y de las posiciones en el espacio. La resolución del E111 de la tarea G2 muestra el e1, se evidencia una de sus dificultades al identificar en las dos vistas dadas las dimensiones que necesita ubicar y determinar para alcanzar la respuesta esperada (ver figura 11).

Error debido al uso de teoremas o definiciones deformadas (e2) aparece en siete de las preguntas, sólo en tres con una frecuencia mayor a seis, entre 14 y 27 estudiantes. El error se manifiesta en conocer la medida indirecta del área de polígonos y circunferencia, así como en la determinación de propiedades, entre ellas el teorema de Pitágoras. Las componentes del sentido espacial asociadas son las propiedades de las formas y las relaciones geométricas, y la percepción de las relaciones espaciales. La resolución del estudiante 57 (E57) de la tarea N1 muestra el e2, su respuesta no es la esperada y en sus registros manifiesta confusión del concepto de radio y diámetro de una circunferencia, así como dificultad en la percepción de las relaciones espaciales, en ubicar el centro (ver figura 16).

A la orilla de un río se encuentra una noria gigante. Fijate en el dibujo y en el diagrama que se muestran a continuación.



La noria tiene un diámetro exterior de 140 metros y su punto más alto se encuentra a 150 metros sobre el cauce del río. Da vueltas en el sentido indicado por las flechas.

Pregunta 1

PM934Q01 - 0 1 9

La letra M del gráfico señala el centro de la noria.
¿A cuántos metros (m) sobre el cauce del río se encuentra el punto M?

Respuesta: 75 m

Figura 16. Resolución de la tarea N1 por E57

Error en el concepto y la estructura de las unidades al medir los atributos organizados espacialmente de longitud, área y volumen (e3), aparece en siete de las preguntas si bien sólo en tres de ellas con una frecuencia mayor a dos. El error se manifiesta la mayoría de las veces al confundir área y perímetro, en menor medida la confusión entre área y volumen, y entre la distancia entre dos puntos de una circunferencia y la longitud del arco que ellos determinan. Las componentes del sentido espacial asociadas son los propios conceptos geométricos implicados y el poco desarrollo de la percepción de las relaciones espaciales. La H1 es la actividad con mayor frecuencia del e3, un ejemplo lo presenta el estudiante 20 (E20) que confunde los conceptos de área y perímetro y pareciera no percibir que los bordes del mostrador son segmentos a los que se les puede determinar su longitud (ver figura 17).

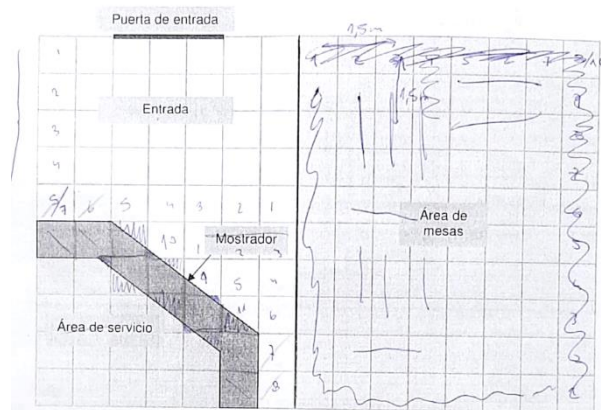


Figura 17. Resolución de la tarea H1 por E20

Error en la interpretación de gráficos (e4), es el error más frecuente, aparece en nueve de las preguntas, en seis de ellas con una frecuencia entre 12 y 43 estudiantes. El error se manifiesta en interpretar diagramas, en identificar en ellos datos necesarios para la resolución y en utilizar a la vez los datos o las condiciones para alcanzar la respuesta esperada. Las componentes del sentido espacial asociadas son las habilidades de visualización, percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio. La resolución del estudiante 57 (E57) de la tarea N1 muestra el e4 cuando le asigna el nombre P al punto más cercano a la letra, sin poder interpretar que los puntos que tenían nombre se correspondían con los puntos cardinales (ver figura 15).

Error en interrelacionar la parte con el todo (e5) aparece en cuatro tareas con una frecuencia entre 7 y 37 estudiantes. El error se manifiesta en la composición y descomposición de figuras geométricas, cuando no se considera que un segmento se obtiene como la suma de dos o tres menores, cuando no se determinan las formas (polígonos o circunferencias) en las que se puede dividir un área para poder calcularla o cuando la división obtenida no se aproxima a la superficie real de la forma, sino que es solo por exceso o por defecto. Las componentes del sentido espacial asociadas son las relaciones geométricas, la orientación, la percepción figura-contexto y la discriminación visual. La frecuencia mayor la tiene la tarea del vertido de petróleo, donde los estudiantes para calcular el área solo determinan un rectángulo exterior, se les dificulta visualizar que podían descomponerlo en polígonos menores para obtener una aproximación más precisa del área, un ejemplo es la resolución del estudiante 2 (E2) (ver figura 10).

Error en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria (e6) aparece en siete de las preguntas, sólo en cuatro con una frecuencia mayor a dos, entre 26 y 29 estudiantes. El error se manifiesta en identificar la unidad de medida, en el uso de medida directa o en realizar las conversiones convenientes a las unidades solicitadas. En el sentido espacial se ven poco desarrollados los conceptos geométricos. La resolución del estudiante 111 (E111) de la tarea G2 muestra el e6, en la confusión de su respuesta, se solicita el cálculo de un área y responde con unidades cúbicas, además cuando multiplica unidades cuadradas, le dan cúbicas (ver figura 14).

En síntesis, el error en la manifestación del sentido espacial que tiene mayor frecuencia es el error en la interpretación de gráficos (e4), se le asocian dificultades en las habilidades de visualización, percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio.

Le sigue el error en realizar de manera significativa y correcta la iteración unitaria (e6), se ven poco desarrollados los conceptos geométricos. Con menor frecuencia está el error debido al uso de teoremas o definiciones deformadas (e2), las componentes del sentido espacial asociadas son las propiedades de las formas y las relaciones geométricas, y la percepción de las relaciones espaciales. Con una frecuencia similar, está el error de interrelacionar la parte con el todo (e5), las componentes del sentido espacial asociadas son las relaciones geométricas, la orientación, la percepción figura-contexto y la discriminación visual. Las frecuencias más bajas las tienen e1 y e3, error debido a dificultades para obtener información espacial (e1) y errores al medir longitud, área y volumen (e3).

5.3.4.2. Errores no específicos del sentido espacial

Los otros cuatro errores son menos específicos en relación con el sentido espacial, más generales en matemáticas: e7, e8, e9 y e10, si bien no se establece un vínculo directo con el desarrollo del sentido espacial influyen en el rendimiento en geometría de los estudiantes, en el contenido espacio y forma, evaluado en las tareas de PISA.

Error técnico (e7) aparece en siete de las preguntas, en todos los casos con una frecuencia menor a seis. El error se manifiesta la mayor parte de las veces en los cálculos operatorios y en algún caso como error de conteo. La resolución del estudiante 50 (E50), de la tarea G2 muestra el e7, en los errores operatorios en la resolución, ya que eleva al cuadrado un miembro de la igualdad (ver figura 18).

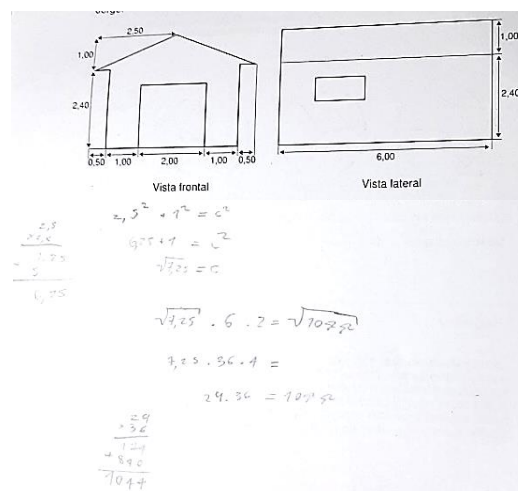


Figura 18. Resolución de la tarea G2 por E50

Error que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales (e8) aparece en cinco preguntas con una frecuencia menor a cuatro, su manifestación en todos los casos es que el estudiante realiza acciones que no concluye en una respuesta, pareciera falta de confianza en su forma de pensar y en su estrategia de resolución. Este error a diferencia de los otros da lugar a la interpretación del observador. La resolución del estudiante 64 (E64) de la tarea H2 muestra el e8, realiza la división del suelo de la heladería en polígonos convenientes, calcula correctamente las áreas si bien no es un método convencional, pero no concluye, no da una respuesta, pareciera no tener confianza en su estrategia de resolución (ver figura 19).

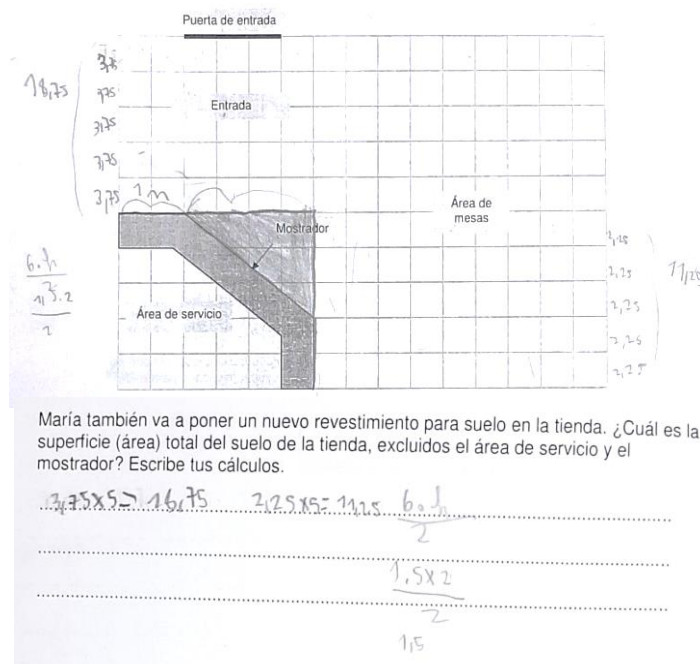


Figura 19. Resolución de la tarea H2 por E64

Error debido a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo (e9) aparece en ocho de las respuestas con una frecuencia entre 11 y 27 en cinco de ellas. El error se manifiesta en comprender e interpretar la consigna y las condiciones que establece el enunciado de la tarea. La dificultad aparece en la interpretación de algunas expresiones en concreto, por ejemplo, en H1 “la parte externa”, en N1 “sobre el cauce del río” o “el punto de acceso, P” y en P1 “el ángulo formado por dos hojas”. La resolución del E25, de la N1, muestra el e9, la dificultad de identificar el punto de acceso P como el punto más cercano al cauce del río, no le permite ubicar la respuesta correcta (ver figura 20).

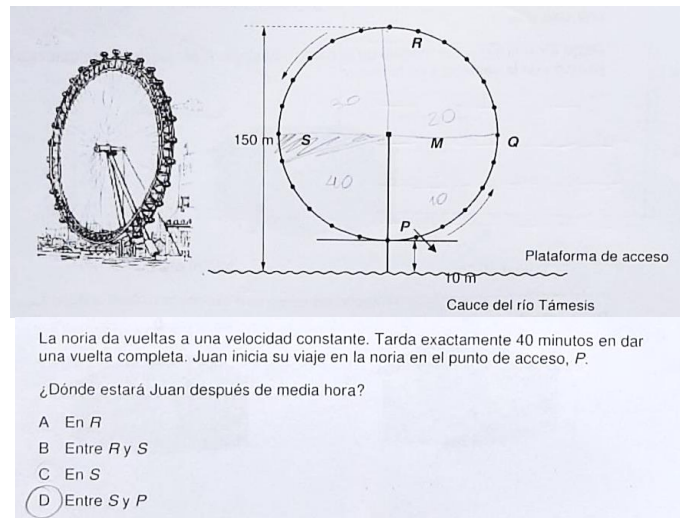


Figura 20. Resolución de la tarea N2 por E25

Error en los procesos adoptados (e10) aparece en cuatro respuestas y solo en dos con una frecuencia de 10 y 15 estudiantes. El error se manifiesta en procedimientos inadecuados, en la imposibilidad de determinar la causa del error o en la falta de continuidad a la estrategia de resolución iniciada. La resolución del estudiante 52 (E52) de la tarea N2 muestra el e10, en la confusión de su respuesta no se determinan la causa del error (ver figura 21)

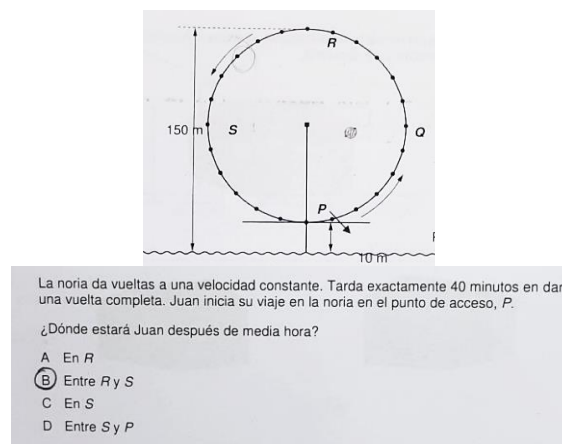


Figura 21. Resolución de la tarea N2 por E52

En síntesis, el error no específico del sentido espacial que tiene mayor frecuencia es el error debido a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo (e9) que se manifiesta en comprender e interpretar la consigna y las condiciones que establece el enunciado de la tarea. Con menor frecuencia aparecen los errores técnicos, operatorios (e7) y error en los procesos (e10). El que menos aparece o es más difícil de detectar porque da lugar a la interpretación del observador es el error por dificultades afectivas y emocionales (e8).

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

A partir de los resultados del análisis, este capítulo presenta las conclusiones que buscan dar respuesta al objetivo de investigación relativo a la manifestación del sentido espacial por los estudiantes uruguayos en el contenido espacio forma de las pruebas PISA. Para ello, se responde a los objetivos específicos relativos al análisis realizado de las tareas de evaluación de PISA y las propuestas en el aula por los docentes, estableciendo semejanzas y diferencias en cuanto a sus características, expectativas y componentes del sentido espacial. También se relaciona la manifestación del sentido espacial con el rendimiento obtenido en la prueba de evaluación de los docentes y los errores cometidos por los estudiantes en la prueba PISA.

Se tienen en consideración los resultados de los investigadores que constituyen los antecedentes de este estudio y los referentes que componen el marco teórico. Además, se plantean algunas de las limitaciones reconocidas durante el proceso y se dejan planteadas las perspectivas y líneas abiertas para futuras investigaciones.

6.1. Las características de las tareas de evaluación

En relación con los objetivos planteados, O1 y O3, se ha conseguido categorizar las características de las tareas de evaluación en geometría, las TEP y las TEA. Se han establecido indicadores de análisis que han permitido identificar características de las tareas a través de los contextos (Caraballo et al., 2011), las tipologías del enunciado (Arévalo, 2009), la complejidad cognitiva (Moreno y Ramírez, 2016) y el formato de la respuesta (OECD, 2017). Se ha conseguido operativizar el análisis de los contextos, los enunciados, la complejidad cognitiva y el formato de las respuestas, lo que permite obtener información acerca del currículo promulgado en el aula y en una etapa educativa sobre la enseñanza de la geometría, la coherencia entre los dos favorece el éxito de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

Una semejanza entre las tareas surge ante la complejidad cognitiva, todas las tareas las TEA y las TEP, exigen un desempeño de conexión o de reflexión en su resolución, si bien la reflexión en las TEP concluye en una medida como respuesta y en las TEA implica

explicar y justificar (Benedicto et al., 2015). Estos resultados difieren de los obtenidos por Caraballo et al. (2011) donde en la prueba diagnóstica las tareas demandan niveles de reproducción. Se acuerda con los resultados obtenidos por Benedicto et al. (2015) que la complejidad cognitiva necesaria para resolver correctamente una tarea no es única y un elemento central para analizar la dificultad de una tarea son las resoluciones de los estudiantes.

Otra semejanza sucede en la tipología de tareas, todas presentan sus datos en forma esquemática además hacen uso de texto para presentar datos relevantes (Arévalo, 2009). Sin embargo, se diferencian por la presencia de datos irrelevantes en las TEP. Se acuerda con los resultados de Arévalo (2009) que cada forma de representación tiene sus debilidades y fortalezas que conociéndolas pueden ser tratadas para favorecer la resolución y atender la dificultad de los estudiantes al procesar información presentada en cada tipología de tarea.

Una diferencia entre las tareas viene dada por el contexto, en su mayoría las TEP presentan un contexto laboral, mientras que todas las TEA un contexto científico (Caraballo et al., 2011). Otra diferencia sucede con el formato de las respuestas, todas las tareas de aula requieren una construida abierta, implica la construcción individual de la respuesta, en vez las tareas de PISA brindan los tres formatos de respuestas presentados, es decir, respuesta construida abierta, respuesta construida cerrada y preguntas de respuesta seleccionada de opción múltiple simple o compleja (OECD, 2017) con la salvedad que las de construcción abierta requieren una medida.

6.2. Las expectativas de aprendizaje en las tareas de evaluación

En relación con los objetivos planteados, O2 y O3, por un lado, se ha conseguido categorizar y clasificar las expectativas de aprendizaje como competencias educativas para cada una de las tareas de PISA 2012 y de los docentes. Por otro, se han establecido relaciones entre los resultados de aprendizaje encontrados en los estudiantes al resolver las tareas de evaluación en geometría.

Se han establecido indicadores de análisis que han permitido identificar las expectativas de aprendizaje a través de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, requeridos a los estudiantes de 15-16 años que permiten una mejora en la configuración

de las condiciones de aprendizaje (De Long et al., 2005). Se ha conseguido operativizar el análisis de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, lo que permite obtener información más precisa en relación con las capacidades espaciales, lo que facilita entre otros, tomar decisiones didácticas que favorezcan la práctica docente y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Jones y Tzekaki, 2016; Ortiz y Sandoval, 2018; Riastuti et al., 2017).

6.2.1. Competencias educativas

De acuerdo con los resultados se establecen que las dos competencias matemáticas requeridas en todas las tareas son comunicar y representar, directamente vinculadas con comprender, proceso cognitivo requerido también en todas ellas. Sin embargo, se evidencian algunas diferencias, ya que las TEA exigen una mayor demanda de dos competencias asociadas a la argumentación y la utilización de lenguaje simbólico (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2017). De igual modo sucede con el proceso cognitivo de crear necesario en las TEA y no requerido en las TEP. Las competencias, comunicar y representar, y el proceso cognitivo de crear, se relacionan con el acceso a la información brindada y solicitada en las tareas y a su explicitación en la respuesta, con la forma de crear un todo coherente en la solución, evidencian el alcance de la actividad matemática en la que el estudiante está involucrado cuando resuelve tareas de evaluación en geometría (Niss y Højgaard, 2011). Una diferencia entre las TEA y las TEP viene dada por las competencias matemáticas de: razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico y formal, requeridas en todas las TEA.

6.2.2. Las componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación

En relación con los objetivos planteados, O2 y O3, se ha conseguido operativizar el análisis de las componentes del sentido espacial, del manejo de conceptos geométricos y de las habilidades de visualización para cada una de las tareas de PISA 2012.

Se han definido categorías de análisis que han permitido establecer indicadores para identificar las componentes del sentido espacial. Se ha conseguido operativizar el análisis del sentido espacial lo que permite obtener información más precisa en relación con la evaluación del conocimiento geométrico (Mix et al., 2020; Möhring et al., 2021).

A partir de la información sintetizada de las tareas de PISA 2012, se establece con Bednarz y Lee (2011), una relación positiva entre el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización. El manejo conceptual geométrico más requerido son los conceptos, propiedades y relaciones geométricas, en menor medida la ubicación y movimientos y la orientación (Flores et al., 2015). Mientras que las habilidades de visualización más requeridas son: percepción de las relaciones espaciales y conservación de la percepción. En menor medida, percepción figura-contexto, percepción de la posición en el espacio y discriminación visual (Del Grande, 1990).

Se puede afirmar que, en todas las tareas, TEA y TEP, son mayores las demandas de manejo de conceptos geométricos que de las habilidades de visualización. La enseñanza de los docentes busca desarrollar los conceptos, relaciones geométricas, la ubicación, los movimientos, además la percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio, si bien no es posible establecer el grado de desarrollo real en los estudiantes (Jones y Tzekaki, 2016).

6.3. Manifestación del sentido espacial

En relación con los objetivos planteados, O4 y O6, por un lado, se han establecido diferencias y semejanzas a partir del análisis del rendimiento en las pruebas de geometría propuesta por los docentes y el nivel de manifestación del sentido espacial que alcanzan al resolver las tareas de PISA 2012. Por otro, se ha logrado identificar las componentes del sentido espacial que manifiestan los estudiantes en las respuestas de las tareas.

Al resolver las tareas de PISA 2012, del contenido espacio y forma, la mayoría de los estudiantes alcanzan un nivel medio en cuanto a manifestación del sentido espacial (51%), le sigue el nivel alto (39%) y menos estudiantes se ubican en el nivel bajo (10%). Quedan invertidos los resultados en los niveles alto y bajo con relación a los obtenidos por algunos investigadores, ya que en el nivel alto se concentra el menor porcentaje de estudiantes (8%) y en el nivel bajo, se duplica el porcentaje (20%) (Firmansyah et al., 2019; Murtiyasa et al., 2019).

De acuerdo con los resultados provenientes del análisis cuantitativo y cualitativo, se establece una relación directa entre el grupo alto, los estudiantes con alto rendimiento en las pruebas de geometría propuestas por los docentes, y el nivel alto de manejo de

conceptos geométricos y habilidades de visualización manifiestas para resolver las tareas de PISA 2012. De igual modo sucede entre el rendimiento y el sentido espacial cuando es bajo (Mix et al., 2020; Möhring et al., 2021). También se afirma que es mayor el manejo de conceptos geométricos con relación al dominio de las habilidades de visualización.

Los estudiantes con bajo rendimiento evidencian menor manifestación del manejo de conceptos geométricos en las propiedades de las formas, en las relaciones geométricas y en la orientación. Los estudiantes con bajo y alto rendimiento presentan dificultades en el uso de las habilidades de visualización: percepción figura-contexto y percepción de las relaciones espaciales, en menor medida la conservación de la percepción y la discriminación visual, lo que dificulta la aplicación al contexto de los problemas de forma adecuada (Dhlamini et al., 2019).

Se puede decir que los estudiantes que logran un número alto de respuestas correctas en las tareas de PISA logran también un buen rendimiento en las pruebas de evaluación propuestas por los docentes en el aula. Mientras que los estudiantes que obtienen bajos resultados en las pruebas de aula logran resolver con acierto muy pocas tareas de PISA.

La conducta observable a través de la realización de las tareas relativas a un tema específico o al conocimiento geométrico de una etapa (Lupiáñez, 2009) permite inferir en esta investigación que obtener buenos resultados en las tareas de PISA parece garantizar buen rendimiento en el curso, pero no al revés. Asimismo, obtener bajo rendimiento en el curso, en general implica tener bajos resultados en las tareas de PISA que miden los contenidos de una etapa, pero no sucede al revés en tanto que hubo bajos resultados en PISA con muy buen rendimiento en las pruebas de aula.

Uno de los objetivos del estudio es brindar información acerca de la coherencia entre la evaluación del aprendizaje geométrico en las pruebas internacionales y las realizadas por el profesorado en el aula (Suurtamm et al., 2016). Para favorecer la coherencia se habla de semejanzas y diferencias entre las dos evaluaciones.

Para establecer las semejanzas se sintetiza el análisis realizado del grupo alto con nivel alto de sentido espacial y el grupo bajo con nivel bajo del sentido espacial. Una de las semejanzas encontradas es que, en todos los casos, grupo alto o bajo, los estudiantes logran mejores puntuaciones en el manejo de conceptos geométricos que en las

habilidades de visualización. Si bien los estudiantes del grupo bajo alcanzan niveles medios en el manejo de conceptos geométricos y niveles bajos en las habilidades de visualización. Mientras quienes pertenecen al grupo alto obtienen nivel alto en la manifestación del sentido espacial en su conjunto.

El número de casos que marca las diferencias es minoritario, proviene de la síntesis del análisis realizado del grupo bajo con nivel alto de sentido espacial y el grupo alto con bajo nivel de sentido espacial. La diferencia se establece en el grupo bajo de estudiantes que obtienen un nivel alto en la manifestación del sentido espacial, con un mayor manejo de conceptos geométricos; y en el grupo alto que alcanza un bajo nivel de manifestación del sentido espacial, en particular presentan dificultades en las habilidades de visualización.

Se considera de interés los resultados provenientes del análisis de correlación entre las variables del sentido espacial de todas las TEP. Permiten afirmar que el manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización requeridos para resolver dos tareas, G2 y H1, parecen ser necesarias en la resolución de la mayoría de las TEP (Jones y Tzekaki, 2016).

Una de las principales semejanzas entre las TEA y las TEP, a partir de los resultados del análisis de regresión, proviene de la resolución de la tarea H2 acerca del rendimiento en geometría del estudiantado analizado. El manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización requeridos para la resolución de H2 son los que mejor predicen el rendimiento del estudiantado en la prueba de aula propuesta por los docentes (Firmansyah et al. (2019).

Se considera relevante que tanto las TEP como las TEA buscan evaluar el aprendizaje del manejo de conceptos geométricos en todos sus aspectos salvo en la orientación que establece la diferencia de las TEP sobre las TEA (Flores et al., 2015). Además, los resultados permiten afirmar que la mayoría de las TEA, salvo la A6, no requieren de la orientación espacial para su resolución, sin embargo, utilizan habilidades de visualización como, por ejemplo, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y coordinación ojo-motor (McGee, 1979).

En relación con el sentido espacial, en los resultados se determina que las habilidades de visualización manifiestan mayores diferencias que semejanzas entre TEP y las TEA.

Todas las tareas requieren de la percepción de las relaciones espaciales. Sin embargo, las diferencias se establecen porque las TEP precisan de la conservación de la percepción y la percepción de la posición en el espacio, mientras que las TEA requieren de la coordinación ojo-motor y discriminación visual (Del Grande, 1990).

6.3.1 Los errores en las tareas de evaluación de PISA

En relación con el objetivo planteado, O5, por un lado, se ha conseguido categorizar y clasificar los errores en el sentido espacial y otros errores no tan vinculados para cada una de las tareas de PISA 2012. Por otro, se han establecido relaciones entre los errores encontrados y las componentes del sentido espacial, el manejo de conceptos geométricos y las habilidades de visualización.

Esto ha permitido establecer indicadores de análisis a posteriori que han permitido identificar los errores en el sentido espacial y otros errores en matemáticas en general. Se ha conseguido operativizar el análisis de los errores lo que permite obtener información más precisa en relación con las capacidades espaciales, el desarrollo del conocimiento geométrico y su relación con la resolución de problemas que permite entre otros, tomar decisiones pedagógico didácticas que favorezcan la práctica docente y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Jones y Tzekaki, 2016; Moral-Sánchez et al., 2021; Riastuti et al., 2017).

De acuerdo con los resultados se establecen dos errores vinculados que interfieren en el acceso a la información brindada y solicitada en las tareas de PISA 2012. Uno de los errores en el sentido espacial, el e4, es el predominante por las nueve veces que aparece en las 13 preguntas, permite afirmar con Diezmann y Lowrie (2009), que la interpretación de gráficos en matemática es una práctica más problemática que rutinaria. Las dificultades muestran coincidencia con los investigadores, en los enfoques incorrectos de los diagramas y en pasar por alto información relevante, que se atribuye a un escaso desarrollo de las habilidades de visualización, percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio. Relacionado al anterior, con características matemáticas más generales, acerca de la comprensión e interpretación del enunciado, el e9 (Astolfi, 1999), con similar relevancia por las ocho veces que aparece en las respuestas, se une a las dificultades clave señaladas por otros investigadores como la interpretación incorrecta del vocabulario e interpretar mal la pregunta (Diezmann y Lowrie, 2009) y no comprender la

formulación del problema (Bocco y Canter, 2010). También Villarroel et al. (2012) señala la dificultad que representa para el estudiante integrar la información que se entrega en distintos formatos.

En relación con el sentido espacial, dos de los errores, el e3 y el e6, vinculados con la medida geométrica (Battista, 2007) parecieran que su dificultad radica en un bajo desarrollo de los conceptos geométricos, sea en el concepto de unidad, de longitud, de área, en el proceso de iteración de la unidad (Watson et al., 2013; Owens y Outhred, 2006; Outhred y Mitchelmore, 2004; Bragg y Outhred, 2000), así como en la confusión entre área y perímetro, longitud y área o longitud y volumen (Fernández y de Bock, 2013; Furinghetti y Paola, 1999) o las dificultades que se presentan con la noción de ángulo (Masuda, 2009).

La relación entre los errores, e1, e2 y e5, se basa en la dificultad de un escaso desarrollo de las relaciones geométricas y la orientación (Jones y Tzakaki, 2016). Se manifiesta en la poca capacidad de establecer una interrelación jerárquica entre el todo y las partes que implica la composición y descomposición de figuras geométricas (Clemens y Sarama, 2007). O la dificultad en generar información relevante a partir de diferentes representaciones como fue demandado en varias tareas, por ejemplo, identificar triángulos rectángulos que no estaban marcados, ubicar conjuntos en un espacio integrando condiciones (Radatz, 1979).

La mayoría de los errores en el sentido espacial, e1, e2, e3, e4 y e5, tienen en común la dificultad de tener un escaso desarrollo de algunas habilidades de visualización: la percepción figura-contexto y la discriminación visual, en el e5; y la percepción de las relaciones espaciales y la percepción de las posiciones en el espacio, presentes en los otros cuatro. Este resultado se une a las dificultades en la comprensión de las dimensiones y la posición que plantean Jones y Tzekaki (2016) y a los resultados de los estudios referidos a las representaciones en 2D de cuerpos geométricos tridimensionales que manifiestan dificultades en la manipulación mental y en las habilidades espaciales (Fujita et al., 2017; Ramírez et al., 2023; Saralar et al., 2018).

Los errores generales, e7, e8 y e10, parecieran tener menor incidencia en la resolución de actividades geométricas, por su reducida aparición en las respuestas o por su escasa frecuencia en los estudiantes. Si bien en los resultados de otros estudios aparece: la

dificultad en los procedimientos matemáticos y en la selección de una estrategia adecuada (Ramírez et al., 2018; Villarroel et al., 2012); la dificultad técnica y de realizar operaciones (Bocco y Canter, 2010; Franchi y Hernández, 2004); y la dificultad emocional (Villarroel et al., 2012).

6.4. Limitaciones de la investigación

Se identifican algunas limitaciones en el proceso de la investigación. Una de ellas es la muestra de tareas, las liberadas por PISA sin poder acceder a las tareas interactivas, se reconoce la importancia para el mundo tecnológico en el que vivimos, poder medir también las manifestaciones del sentido espacial a través de programas de geometría dinámica.

En relación con las tareas, el trabajo se limita a una muestra muy concreta y a unas tareas muy específicas. La investigación se completaría si se contara con una mejor variedad de sujetos, con más tareas y si se dispusiera de otros instrumentos para recoger los datos, como por ejemplo entrevistas a docentes y estudiantes. Pese a ello, se considera favorable al trabajo poder analizar las respuestas de los estudiantes a las TEA.

Otra limitación es la muestra de docentes y de estudiantes, por centrar el estudio en una sola institución educativa. Para dar mayor sustento a los resultados se podría extender el estudio a más estudiantes que abarquen otras realidades, incrementar el número de docentes involucrados, incluir los procesos de enseñanza, las expectativas de los docentes que aporte información sobre posibles causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia definido por PISA.

6.4. Aportaciones del estudio

Este estudio ha podido aportar información sobre la coherencia entre la evaluación del aprendizaje geométrico en las pruebas internacionales y las realizadas por el profesorado en el aula. A partir del análisis de los resultados se pudieron establecer semejanzas y diferencias con el rendimiento obtenido por los estudiantes en la evaluación propuesta por sus docentes y las propuestas externas.

A través de identificar la relación entre la manifestación del sentido espacial en las tareas de PISA y el rendimiento de los estudiantes en la evaluación propuesta por los docentes en el aula permite reconocer las distintas perspectivas y enfoques curriculares de los docentes en la enseñanza de la geometría.

Se reconoce como aporte para los investigadores la conceptualización y operativización del sentido espacial que se logra en este trabajo. La categorización propuesta establece indicadores para identificar las componentes del sentido espacial, lo que permite obtener información más precisa en relación con la evaluación del conocimiento geométrico.

La operativización del trabajo para caracterizar las tareas de evaluación permite comprender mejor las diferencias entre las evaluaciones externas e internas. Por ejemplo, se puede orientar a los docentes a que utilicen contextos más allá de los científicos, enunciados que tengan información más amplia de los datos necesarios para resolver la tarea y con diversidad de formatos en las respuestas para familiarizar a los estudiantes con las evaluaciones externas (Caraballo et al., 2011).

La categorización de indicadores para identificar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial que se logra permite obtener información a los docentes, por un lado, diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas vinculadas con el conocimiento geométrico (Presmeg, 2006). Por otro, determinar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial en la evaluación a gran escala y en el aula, contribuye a la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

El análisis realizado de las expectativas aporta información de qué competencias son las que establecen las diferencias, razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico. Asimismo, se reconoce como aporte identificar las competencias requeridas en ambas tipologías de tareas, como son representar y comunicar, si estas competencias no se trabajaran en las aulas los estudiantes no podrían abordar las pruebas externas (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2017).

El análisis de los procesos cognitivos permite reconocer que las tareas de aula favorecen más de recordar, analizar y evaluar. Por lo que se podrían diseñar propuestas de enseñanza más afines con lo que se pide en las evaluaciones externas que es comprender y aplicar (Krathwohl, 2002).

El análisis de las componentes del sentido espacial que permite dividir en aspectos observables en las resoluciones de los estudiantes el conocimiento geométrico. Se ha visto que determinadas habilidades están más presentes, la coordinación ojo-motor, la percepción de las relaciones espaciales y la discriminación visual y otras se manifiestan menos como la percepción figura-contexto, la percepción de la posición en el espacio y conservación de la percepción, esto puede dar orientaciones para trabajar en clase tareas de enseñanza que fomenten el desarrollo de habilidades específicas (Houdement, 2017).

Se reconoce como aportes para la investigación en tareas de evaluación: la categorización del sentido espacial en manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización, la categorización de los errores y la categorización de las expectativas de aprendizaje en competencias educativas, y en las características de las tareas. El método de análisis permite trabajar con muestras mayores, con respuestas de estudiantes y comparar con otros países para brindar elementos objetivos en el diseño de tareas de aula y estandarizadas, y el diseño de unidades para la formación del profesorado y para los desarrolladores de currículos.

El análisis presentado permite identificar las dificultades concretas que se han manifestado en cada una de las tareas, discriminando las que provienen de un bajo nivel en cada una de las componentes. Estos matices pueden ser elementos de análisis por parte del profesorado y de las instituciones educativas para comprender y favorecer la coherencia entre las evaluaciones internacionales y las realizadas en el aula (Gotte y Mántica, 2021).

Uno de los intereses del estudio es aportar información acerca de los errores relativos al sentido espacial en los estudiantes de primer año de bachillerato. Se puede considerar que el estudio de los errores es el primer paso para superar un problema que enfrenta no solo la educación en Uruguay sino también la de otros países, como es el bajo rendimiento en matemáticas, alcanzado por los estudiantes en exámenes internacionales como muestran los resultados obtenidos en PISA (Villarroel et al., 2012).

La categorización de los errores relacionados con el sentido espacial ha permitido obtener información en relación con el conocimiento geométrico y la identificación de los aspectos concretos que dificultan el aprendizaje geométrico, y permite brindar elementos a los docentes para ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre registros

visuales y simbólicos de las mismas nociones matemáticas (Presmeg, 2006). Además, proporciona información que ayuda a describir cómo la conceptualización geométrica interactúa con la visualización durante el desarrollo (Battista, 2007). Toda esta información es relevante para el análisis cognitivo requerido para la planificación de la enseñanza.

6.5. Líneas futuras

El estudio permite establecer algunas líneas de trabajo relacionadas con el origen de las tareas de aula, se podría realizar una investigación que diversifique los orígenes de las tareas de aula proveniente de diferentes instituciones educativas que permita corroborar o no los resultados que se obtienen en este.

Se podría completar la información con entrevistas a estudiantes de los tres niveles de manifestación del sentido espacial, bajo, medio y alto, que ayudarían a comprender mejor el proceso que realizan para alcanzar la resolución de las tareas de PISA y analizar en mayor profundidad los errores en los que incursionan.

Así como se encontraron semejanzas y diferencias entre las tareas de PISA y de aula, para el contenido espacio y forma y los contenidos de geometría del currículo, dentro del dominio de la cultura matemática en PISA aparece cambio y relaciones que se puede vincular con contenidos curriculares que desarrollen el sentido algebraico; o incertidumbre y datos con el sentido estocástico.

Se podría completar la información con entrevistas a los docentes de primero de bachillerato de la institución educativa en la que se llevó a cabo la investigación, el análisis podría ayudar a comprender los énfasis de los docentes en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Se podría desarrollar un estudio con docentes, que aporte estrategias y hacer un diseño de secuencia de tareas que favorezca el aprendizaje competencial y funcional de la geometría.

Parece ser una posible línea de investigación atender el desarrollo de las habilidades espaciales de los docentes y sus efectos en el proceso individual de los estudiantes (Owens y Outhred, 2006). Así como fortalecer la práctica pedagógica para ayudar a los estudiantes a mejorar su sentido espacial necesario para el éxito futuro en las matemáticas y en otros campos (Del Grande, 1990).

Se podrían extender la comparación a otras evaluaciones externas distintas de la evaluación PISA, haciendo uso de la categorización del sentido espacial que se realiza en este estudio, por ejemplo, las pruebas TIMSS (Chen et al., 2009).

Si bien se reconocen investigaciones, aún queda camino por transitar acerca de cómo la didáctica puede mejorar el uso y el poder de la visualización en beneficio de la educación matemática (Fernández, 2013; Presmeg, 2006).

REFERENCIAS

- Acar, E. (2014). The reflection of spatial thinking on the interactional niche in the family. En U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, R. Vogel (Eds.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 conference* (pp.85-107). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4678-1_7
- Aguilar, G. y Ortigao, M. (2012). Letramento em matemática: um estudo a partir dos dados do PISA 2003. *Bolema*, 26 (42A), 1-21. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100002>
- ANEP. (2004). *La evaluación de la “cultura matemática” en PISA 2003. Marco conceptual y actividades de las pruebas*. Gerencia de Investigación y Evaluación. <https://www.anep.edu.uy/codicen/dspe/division-investigacion/departamento-evaluacion-aprendizajes/pisa/2003>
- ANEP. (2013). *Uruguay en PISA 2012. Informe de resultados*. División de investigación, evaluación y estadística (DIEE). <https://www.anep.edu.uy/codicen/dspe/division-investigacion/departamento-evaluacion-aprendizajes/pisa/2012/publicaciones>
- ANEP. (2017a). *Marco curricular de referencia nacional (MCRN). Una construcción colectiva*. ANEP. [https://mcrn.anep.edu.uy/sites/default/files/Documento MCRN agosto 2017.pdf](https://mcrn.anep.edu.uy/sites/default/files/Documento%20MCRN%20agosto%202017.pdf)
- ANEP. (2017b). *Uruguay en PISA 2015. Informe de resultados*. DIEE.
- ANEP. (2022). *Uruguay en PISA 2018. Informe de resultados*. DIEE.
- ANEP. (2023). *Uruguay en PISA 2022. Informe de resultados*. DIEE.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematical visualization*. Cinvestav – IPN.
- Arévalo, M. (2009). Comprensión de enunciados de problemas matemáticos. *Respuestas*, 14 (2), 5-10. <https://doi.org/10.22463/0122820X.516>
- Astolfi, J.P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Diada.

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, (pp. 843-908). NCTM. Information Age Publishing.
- Bednarz, R. y Lee, J. (2011). The components of spatial thinking: empirical evidence. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 21, 103–107. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.07.048>
- Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). SEIEM.
- Berciano, A. y Gutiérrez, G. (2015). How to improve spatial visualization ability of preservice teachers of childhood education: a teaching experiment. *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2755-2761).
- Berry, J.W. (1971). Ecological and cultural factors in spatial perceptual development. *Canadian Journal of Behavioural Science*, 3(4), 324-336. <https://doi.org/10.1037/h0082275>
- Bishop, A.J. (1972). Use of structural apparatus and spatial ability – a possible relationship. *Psychology of Mathematics Education Workshop*. Chelsea College.
- Bishop, A.J. (1973). The use of structural apparatus and spatial ability – a possible relationship. *Research in Education*, 9, 43-49. <https://doi.org/10.1177/003452377300900104>
- Bishop, A.J. (1979). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 135-146. <https://doi.org/10.1007/BF00230984>
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.
- Bocco, M. y Canter, C. (2010). Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de Educación*, 53(2), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie5321742>
- Bragg, P., y Outhred, L. (2000). Students' knowledge of length units: do they know more than rules about rulers? En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 2, (pp. 97–104). PME.

- Breen, C. (1997). Exploring imagery in P, M and E. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference, 2*, (pp. 97-104). Gummerus.
- Brinkmann, E. H. (1966). Programmed instruction as a technique for improving spatial visualization. *Journal of Applied Psychology*, 50, 179-184. <https://doi.org/10.1037/h0023068>
- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15. <https://doi.org/10.1037/h0044160>
- Caraballo, R.M., Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2011). Pruebas autonómicas de diagnóstico para evaluar la competencia matemática en educación secundaria. En M. Marín, G. Fernández García, L.J. Blanco y M. Palarea (Coords.), *Investigación en educación matemática XV*, 307-318. SEIEM.
- Castro Rodríguez, E., Ruiz Hidalgo, J. F., Lupiáñez Gómez, J. L., Fernández Plaza, J. A., Rico Romero, L., Segovia Alex, I. y Flores Martínez, P. (2022). Specific mathematics learning objectives expressed by teachers in training. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(2), em0675. <https://doi.org/10.29333/iejme/11670>
- Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NCTM. Macmillan.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1* (pp. 461-556). NCTM. IAP.
- Clements, M. A. y Wattanawaha, N. (1978). The classification of spatial tasks suitable for the classroom. En D. Williams, (ed.), *Learning and applying mathematics*. Australian Association of Mathematics Teachers.
- CES. (2010a). *Programa de matemática primer año. Ciclo básico, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP.
- CES. (2010b). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP. <https://www.ces.edu.uy/index.php/propuesta-educativa/20207>
- CES. (2020). *Orientaciones vinculadas con la evaluación de los aprendizajes: la calificación*. Administración Nacional de Educación Pública.

<https://www.ces.edu.uy/index.php/noticias/30734-orientaciones-vinculadas-con-la-evaluacion-de-los-aprendizajes-la-calificacion>

- Chen, J. C., Reys, B. J. y Reys, R. E. (2009). Analysis of the learning expectations related to grade 1-8 measurement in some countries. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 1013-1031. <https://doi.org/10.1007/s10763-008-9148-5>
- Clemens, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NCTM. Macmillan.
- Clemens, D. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, (pp. 461-556). NCTM. IAP.
- Cruz, A. y Ramírez, R. (2018). Componentes del sentido espacial en un test de capacidad espacial. En L. J. Rodríguez- Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII* (pp. 211-220). SEIEM.
- Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics, 19*, (pp. 67-76). Mathematical Association of America.
- Dawson, J. L.M. (1967). Cultural and physiological influences upon spatial-perceptual processes in West Africa. Part 1. *International Journal of Psychology*, 2, 115-128. <https://doi.org/10.1080/00207596708247208>
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. En M. M. Lindquist (Ed.) *Learning and teaching geometry, K-12. Yearbook*, 49, (pp. 126-135). NTCM.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20. <https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014>
- De Long, M., Winter, D. y Yackel, C. (2005). Student learning objectives and mathematics teaching. *PRIMUS*, 15(3), 226-258. <https://doi.org/10.1080/10511970508984119>
- De Miguel, R. 2015. Del pensamiento espacial al conocimiento geográfico a través del aprendizaje activo con tecnologías de la información geográfica. *Giramundo*, 2(4), 7-13. <https://doi.org/10.33025/grgcp2.v2i4.668>

- Dhlamini, Z.B., Chuene, K., Masha, K. y Kibirige, I. (2019). Exploring grade nine geometry spatial mathematical reasoning in the South African Annual National Assessment. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(11), 1-17. <https://doi.org/10.29333/ejmste/105481>
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: An evidence base for instruction. *Proceedings of PME 33*, 2, (pp. 417–424). PME.
- Dörfler, W. (1991). Meaning: image schemata and protocols. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 1, (pp.17-32). Program Committee of the 15th PME Conference.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, (pp. 3-26). Gummerus.
- Elvas, I. (2021). (TFM). Sentido espacial en las evaluaciones escritas en Secundaria. Universidad de Granada.
- Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022a). Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 249-257). SEIEM
- Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022b). Components of the spatial sense in PISA activities for secondary education. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (p. 345). PME.
- Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2024). Diferencias en la evaluación de los docentes de secundaria y las pruebas PISA. En D. Pagés y M. Olave (Eds.), *Actas del noveno Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 36-50). Semur ediciones.
- Elvas, I. y Ramírez, R. (En prensa). *Análisis del sentido espacial en estudiantes de secundaria: evaluación en PISA y en el aula*. AIEM.
- Fennema, E. y Sherman, J. A. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and socio-cultural factors. *American*

- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.
- Fernández, C., y de Bock, D. (2013). Does the confusion between dimensionality and ‘directionality’ affect students’ tendency towards improper linear reasoning? En A.M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.) *Proceedings of PME 37 International Conference, 2*, (pp. 297–304). PME.
- Firmansyah, F.F., Sunardi Susanto, E. Y. y Ambarwati, R. (2019). The uniqueness of visual levels in resolving geometry of shape and space content based on van Hiele’s theory. *Journal of Physics*, 1-8. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012076>
- Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje escolar. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp.125-140). Pirámide.
- Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Pirámide.
- Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63-71.
- Frandsen, A. N. y Holder, J. R. (1969). Spatial visualization in solving complex verbal problems. *Journal of Psychology*, 73, 229-233. <https://doi.org/10.1080/00223980.1969.10544972>
- Frosting, M. y Horne, D. (1964). *The Forsting program for the development of visual perception*. Follett Publishing.
- Fry, C. J. (1988). Fijación ocular durante la lectura y solución de problemas verbales que contienen información extraña: relación con la capacidad de visualización espacial. En A. Borbas (Ed.). *Actas de la 12ª Conferencia Internacional PME, 1*, (pp. 326-333). PME-NA.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H. y Kunimune, S. (2017). Students’ geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. *The*

- Journal of Mathematical Behavior*, 46, 96-111.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Furinghetti, F. y Paola, D. (1999). Exploring students' images and definitions of area. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 2, (pp.345–352). PME.
- Galton, F. (1883). *Inquiries into the human faculty and its development*. Macmillan.
<https://doi.org/10.1037/14178-000>
- Gander, S. L. (2006). Throw out learning objectives! In support of a new taxonomy. *Performance Improvement*, 45(3), 9-15.
<https://doi.org/10.1002/pfi.2006.4930450304>
- García, B. (2015). Competencias Matemáticas, Expectativas de Aprendizaje y Enculturación Matemática. *Escenarios*, 13 (1), 22-33.
<https://doi.org/10.15665/esc.v13i1.549>
- Goldin, G.A. (2007). Representation in school mathematics a unifying research perspective. En J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). NCTM.
- Götte, M. y Mántica, A.M. (2021). Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior. *Epsilon*, II (108), 27-44.
- Gris, G., dos Santos, L. y dos Santos, J. (2019). Uma Revisão Sistemática de Variáveis Relevantes na Produção de Erros em Matemática. *Bolema*, 33 (64), 649-671.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a10>
- Grüßing, M. (2012). Spatial abilities an mathematics achievement among elementary school children. En B. Ubuz (Ed.), *Proceeding of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 1 (p. 306). PME.
- Guay, R. B. y McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education* 8, 211-215. <https://doi.org/10.2307/748522>
- Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 415-431.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3992>
- Guo, M. y Leung, F. K. S. (2021). Achievement goal orientations, learning strategies, and mathematics achievement: a comparison of Chinese Miao and Han students. *Psychology in the Schools*, 58(1), 107–123. <https://doi.org/10.1002/pits.22424>

- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference, 1* (pp. 3-19). Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz y M. de la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.
- Gutiérrez, Á. (2017). Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: teoría y práctica. En H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A.P. Canavaro, J.P. da Ponte (Eds.), *O ensino e a aprendizagem da geometria*, 27-39. Instituto de Educación, Universidad de Lisboa.
- Hadas, N. y Arcavi, A. (2001). Relearning mathematics – the case of dynamic geometrical phenomena and their unexpected Cartesian representations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 3, (pp. 81-88). Utrecht University.
- Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S y Sträßer, R. (2015). Geometrie: leitidee raum und form. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.G. Weigand (Eds.), *Handbuch der mathematikdidaktik* (pp. 185-220). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_7
- Hernández Sampieri, R.; Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.
- Hiebert, J., Morris, A. y Spitzer, S. (2018). Diagnosing learning goals: an often-overlooked teaching competency. En T. Leuders, K. Philipp, y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic competence of mathematics teachers. Mathematics Teacher Education*, 11, (pp. 193-206). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66327-2_10
- Hoffer, A. (1977). *Mathematics resource project: geometry and visualization*. Creative Publications.
- Houdement, C. (2017). Traveling in spatiality, in spatial sense. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 621-628). DCU Institute of Education and ERME. ISBN 978-1-873769-73-7

- Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.109–149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Kent, D. y Hedger, K. (1980). Growing tall. *Educational Studies in Mathematics* 11, 137-179. <https://doi.org/10.1007/BF00304354>
- Kozhevnikov, M., Kozhevnikov, M., Chen Jiao Yu, C. y Blazhenkova, O. (2013). Creativity, visualization abilities, and visual cognitive style. *British Journal of Educational Psychology*, 83, 196–209. <https://doi.org/10.1111/bjep.12013>
- Krathwohl, D. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: an overview. *Theory into practice*, 41 (4), 212 – 254. College of education, The Ohio State University. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2
- Lean, G. A. y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-33. <https://doi.org/10.1007/BF00311060>
- Lesh, R. (1976). Transformation geometry in elementary school: some research issues. En J. L. Martin (Ed.), *Space and geometry*. ERIC/SMEAC, (pp. 185-243). Columbus.
- Lin, C., Hung, P., Lin, S. W., Lin, B., y Lin, F. (2009). The power of learning goal orientation in predicting student mathematics achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 551-573. <https://doi.org/10.1007/s10763-008-9132-0>
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Lupiañez, J. L. (2009). (Tesis doctoral). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (p. 45). Pirámide.
- MacFarlane, I. (1964). *Spatial ability: its educational and social significance*. University of London Press.

- Maresch, G. y Sorby, S. (2021). *Perspectives on spatial thinking. Journal for geometry and graphics*, 25 (2), 271-293.
- Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 257-281. <https://doi.org/10.1023/A:1013357611987>
- Markopoulos, C. y Potari, D. (1999). Forming relationships in three-dimensional geometry through dynamic environments. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference*, 3, (pp. 73-280). Technion.
- Marriott, P. (1978). Fractions: now you see them, now you don't. En D. Williams (Ed.), *Learning and applying mathematics*. Australian Association of Mathematics Teachers.
- Martin, J. L. (Ed.). (1976). *Space and geometry*. ERIC/SMEAC. Columbus.
- Martínez, F. (2015). *El rol de las expectativas docentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática*. (Tesis). Universidad de Chile.
- Masuda, T. (2009). Cultural effects on visual perception. En E. B. Goldstein (Ed), *Encyclopedia of perception*, 1 (pp.339-343). Sage Publisher.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86, 889-918. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.86.5.889>
- Meissner, H. (2006). Development of spatial abilities. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 1 (p. 299). PME.
- Michael, W. B., Guilford, J. P., Fruchter, B. y Zimmerman, W. S. (1957). The description of spatial-visualization abilities. *Educational and Psychological Measurement*, 17, 185-199. <https://doi.org/10.1177/001316445701700202>
- Miragliotta, E. y Baccaglioni-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 3952-3959). DCU Institute of Education and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01950545>

- Mitchelmore, M.C. (1980). Three-dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 205-216. <https://doi.org/10.1007/BF00304356>
- Mix, K.S., Levine, S.C., Cheng, YL, Stockton, J.D. y Bower, C. (2020). Effects of spatial training on mathematics in first and sixth grade children. *Journal of Educational Psychology*, 1-39.
- Mizzi, A. (2017). *The Relationship between Language and Spatial Ability*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20632-1>
- Möhring, W., Ribner, A.D., Segerer, R., Libertus, M.E., Kahl, T., Troesch, L. M. y Grob, A. (2021). Developmental trajectories of children's spatial skills: Influencing variables and associations with later mathematical thinking. *Learning and instruction*, 75, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101515>
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañá, T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2021). Evaluación inicial como catalizador para el diseño de unidades de aprendizaje de Geometría en Educación Secundaria. *Revista Épsilon*, 107, 47-57.
- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-258). Editorial Pirámide.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavski, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14. <https://doi.org/10.2307/749532>
- Murtiyasa, B., Rejeki, S., Setyaningsih, R. y Merdekawati, A. (2019). Students' Thinking in Solving Geometric Problems Based on PISA Levels. *Journal of Physics*, 1-7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1320/1/012068>
- NCR (2006). *Learning to think spatially: GIS as a support system in the K-12 curriculum*. NAP.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University, Department of Science, systems and models, IMFUFA.

- Novitasari, D., Nasrullah, A., Triutami, T.W., Apsari, R.A. y Silviana, D. (2021). High level of visual-spatial intelligence's students in solving PISA geometry problems. *Journal of Physics*, 1-9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1778/1/012003>
- Ocaña, Y. y Fuster, D. (2021). The bibliographical review as a research methodology. *Revista Tempos e Espaços em Educação*, 14(33), e15614. <https://doi.org/10.20952/revtee.v14i33.15614>
- OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. OECD.
- OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. OECD. <https://doi.org/10.1787/9789264006416-en>
- OCDE (2016). *Panorama de la educación 2015: indicadores de la OCDE* Fundación Santillana. <https://doi.org/10.1787/eag-2015-es>.
- OECD (2017). *PISA 2015 assessment and analytical framework: science, reading, mathematic, financial literacy and collaborative problem solving*. PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264281820-en>.
- Ortiz, A. y Sandoval, I. (2018). Representaciones de cuerpos geométricos: una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 427-436). SEIEM.
- Outhred, L., y Mitchelmore, M. (2004). Students' structuring of rectangular arrays. In M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 3, (pp. 465–472). PME.
- Owens, K. (2017). The role of culture and ecology in visuospatial reasoning: the power of ethnomathematics. En M. Rosa et al. (eds.), *Ethnomathematics and its diverse approaches for mathematics education*, ICME-13 Monographs, (pp.209-233). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59220-6_9
- Owens, K. y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. Á. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_005

- Parzysz, B. (1999). Visualization and modeling in problem solving: from algebra to geometry and back. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1*, (pp. 212-219). Technion.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Routledge y Kegan Paul.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul.
- Plath, M. (2012). Strategien bei Raumvorstellungsaufgaben. Erste Ergebnisse einer Untersuchung mit Kindern im vierten Schuljahr. En: Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 4-10). GDM.
- Plath, M. y Ruwisch, S. (2012). Elementary school children solve spatial tasks a variety of strategies. En T. Y. Tso (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, (pp. 305-312). PME.
- Pratt, D. y Davison, I. (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. En N. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 4*, (pp.31-38). IGPME.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.
- Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. En Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference, 3*, (pp.191-198). Program Committee of the 15th PME Conference.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp.205-236). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in mathematics Education, 10* (3), 163-172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- Ramírez, B., González, M. y Zambrano, R. (2023). Errores que cometen los estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media en vistas ortogonales de figuras geométricas 3D. *Revista Chilena de Educación Matemática, 15*(2), 46-62. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.125>

- Ramírez, R., Flores, P. y Ramírez, I. (2018) Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 21(1), 29-56. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2112>
- Riastuti, N., Mardiyana, M. y Pramudya, I. (2017). Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. *Journal of Physics: Conference Series* 895 (1), 1-6. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012029>
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 60-108). Grupo Editorial Iberoamericano.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.39-59). Ice-Horsori.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39 – 63. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4>
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.
- Rico, L. y Fernández Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Coord.), *Análisis didáctico en educación matemática*, (pp.1-22).
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Alianza.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2016). Aprender las matemáticas escolares. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 41-60). Pirámide.
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-0014-7>
- Rychen, D.S. (2008). *Investigación internacional sobre competencias básicas para la vida*. USAID, Programa estándares e investigación educativa.

- Sáenz, C. y Bruno, G. (2018). Calibración, autoconcepto y competencia matemática. *Avances de investigación en educación matemática*, 14, 1-14. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.178>
- Saunderson, A. (1973). The effect of a special training programme on spatial ability test performance. *New Guinea Psychologist*, 5, 15-23.
- Santos, L. y Cai, J. (2016). Currículum and Assessment. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.153–185). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_5
- Saralar, I., Ainsworth, S., y Wake, G. (2018). Middle school students' errors in two-dimensional representations of three dimensional shapes. *Research in Mathematics Education*, 20(2), 1-3. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1482475>
- Shimizu, Y., Vithal, R., Arzanello, F., Ruiz, A., Cuoco, A., Bosch, M., Gholam, S., Morony, W. y Zhu, Y. (2018). Discussion document. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Proceedings the 24th ICMI study* (pp. 571-588). University of Tsukuba.
- Sinclair, M. P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. En N. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, (pp. 191-198). IGPME.
- Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344>
- Spearman, C. E. (1927). *The abilities of man: their nature and measurement*. Macmillan.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la secundaria*. ICE/Horsori. p.124-154.
- Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 4, (pp.225-232). Utrecht University.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163>

- Surtees, A., Apperly, I. y Samson, D. (2013). Similarities and differences in visual and spatial perspective-taking processes. *Cognition*, 129, 426–438. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.06.008>
- Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment* (pp. 27-33). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7>
- Thom, J. (2018). (Re)(con)figuring space: three children’s geometric reasonings. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank y C. Benz (Eds.), *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (pp.131-158). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_8
- Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Psychometric Monographs, 1-121.
- Tovar, E. y Mayorga, L. (2015). Errores en el aprendizaje de figuras y cuerpos geométricos en educación media general. *Revista Ciencias de la Educación*, 25 (45), 174-186.
- Tzekaki, M. e Ikonomidou, A. (2009). Investigating spatial representations in early childhood. En M.Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 5 (pp. 241-248). PME.
- van Hiele, P. M. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'Association des Professeurs de l'Enseignement Public*, 198, 199-205.
- van Nes, F y de Lange, J. (2007). Mathematics education and neurosciences: relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The mathematics enthusiast*, 4 (2), 210-229. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1072>
- van Nes, F. y van Eerde, D. (2010). Spatial structuring and the development of number sense: a case study of young children working with blocks *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 145–159. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.08.001>
- Varzi, A. (2007). Spatial reasoning and ontology: part, wholes, and locations. En M. Aiello, I. Pratt-Hartmann y J. van Benthem (eds.), *Handbook of spatial logics* (pp. 945–1038). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5587-4_15
- Villarreal, V. (2012). *Caracterización del tipo de errores y aciertos comunes que cometen los estudiantes en los ítems de preguntas abiertas y cerradas de la Prueba PISA*

- en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias*. Fondo de investigación y desarrollo en educación (FONIDE).
- Watson, A., Jones, K. y Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: research-based guidance for ages 9–19*. Oxford University Press.
- Webb, L.F. y Carry, L.R. (1975). Interaction of spatial visualization and general reasoning abilities with instructional treatment in quadratic inequalities: a follow-up study. *Journal for Research in Mathematics Education* 6, 132-140. <https://doi.org/10.2307/748754>
- Webb, N. (2007). Mathematics content specification in the age of assessment. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2 (pp.1111-1142). NCTM. IAP.
- Weinert, F. (2004). Concepto de competencia: una aclaración conceptual. En D. S. Rychen y L. H. Salganick (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp.94-127). Fondo de Cultura Económica.
- Werner, H. (1964). *Comparative psychology of mental development*. International Universities Press.
- Wheatley, G. H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 10-11. <https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0010>
- Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. En L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images*. (pp. 281-297). Erlbaum.
- Wheatley G. H. y Brown, D. (1994). The construction and representation of images in mathematical activity. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference, I*, (p. 81). Program Committee of the 18th PME Conference.
- Wheatley, G. y Reynolds, A. (1999). Image maker: developing spatial sense. *Teaching children mathematics*, 5 (6), 374- 378. <https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0374>
- William, D. (2007). Keeping learning on track. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2 (pp.1053-1098). NCTM. IAP.
- Woolner, P. (2004). A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference, 4*, (pp. 449-456). Bergen University College.

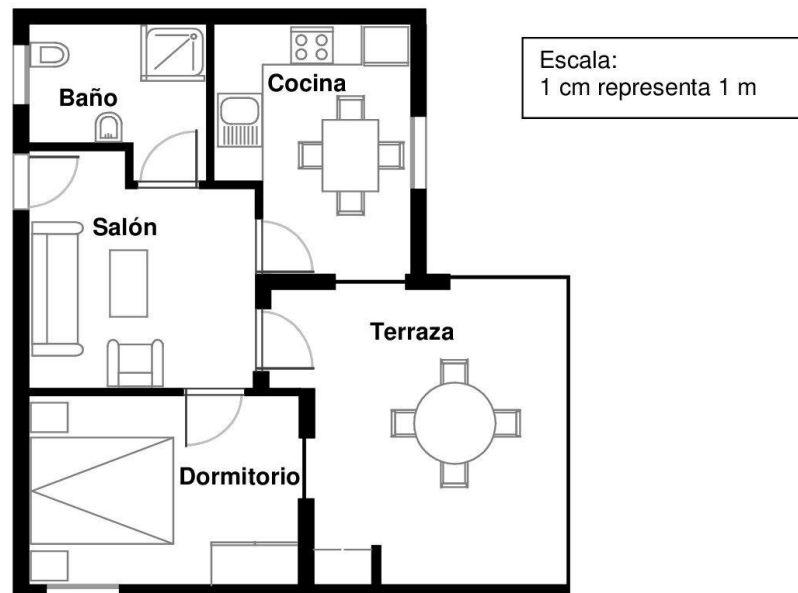
- Xistouri, X. y Pitta-Pantazi, D. (2006). Spatial rotation and perspective taking abilities in relation to performance in reflective symmetry tasks. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 5 (pp. 425-432). PME.
- Yerushalmy, M., Shternberg, G. y Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1*, (pp.197-211). Technion.
- Young, C.D. y Becker, J.P. (1979). The interaction of cognitive aptitudes with sequences of figural and symbolic treatments of mathematical inequalities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 24-36. <https://doi.org/10.2307/748744>
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.

ANEXO 1. TAREAS DE EVALUACIÓN SELECCIONADAS

Tareas de evaluación de PISA

COMPRA DE UN APARTAMENTO

Este es el plano del apartamento que los padres de Jorge quieren comprar a una agencia inmobiliaria.



Pregunta 1

PM00FQ01 – 0 1 9

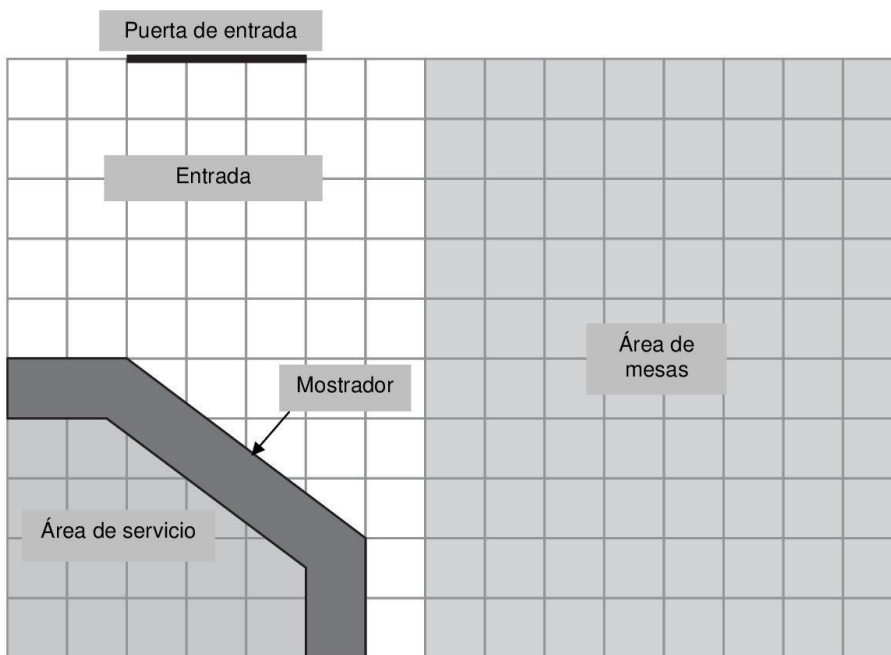
Para calcular la superficie (área) total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular la superficie de cada una y sumar todas las superficies.

No obstante, existe un método más eficaz para calcular la superficie total en el que sólo tienes que medir 4 longitudes. Señala en el plano anterior las **cuatro** longitudes necesarias para calcular la superficie total del apartamento.

HELADERÍA

Este es el plano de la heladería de María. Está renovando la tienda.

El área de servicio está rodeada por el mostrador.



Nota: Cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5 metros \times 0,5 metros.

Pregunta 1

María quiere colocar un nuevo borde a lo largo de la parte externa del mostrador. ¿Cuál es la longitud total del borde que necesita? Escribe tus cálculos.

.....

.....

.....

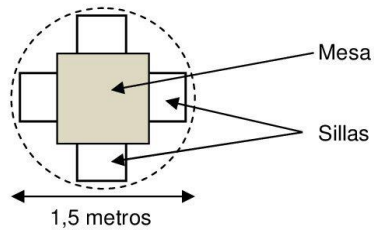
.....

Pregunta 2

María también va a poner un nuevo revestimiento para suelo en la tienda. ¿Cuál es la superficie (área) total del suelo de la tienda, excluidos el área de servicio y el mostrador? Escribe tus cálculos.

.....
.....
.....

Pregunta 3



María quiere tener en su tienda conjuntos de una mesa y cuatro sillas como el que se muestra más arriba. El círculo representa la superficie de suelo necesaria para cada conjunto.

Para que los clientes tengan suficiente espacio cuando estén sentados, cada conjunto (tal y como representa el círculo) debe estar situado según las siguientes condiciones:

- Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de las paredes.
- Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de los otros conjuntos.

¿Cuál es el número máximo de conjuntos que María puede colocar en la zona de mesas sombreada de su tienda?

Número de conjuntos:

VERTIDO DE PETRÓLEO

Un petrolero chocó contra una roca en medio del mar y produjo un agujero en los tanques de almacenamiento de petróleo. El petrolero se encontraba a unos 65 km de tierra. Unos días después, el petróleo se había extendido tal y como se muestra en el siguiente mapa.



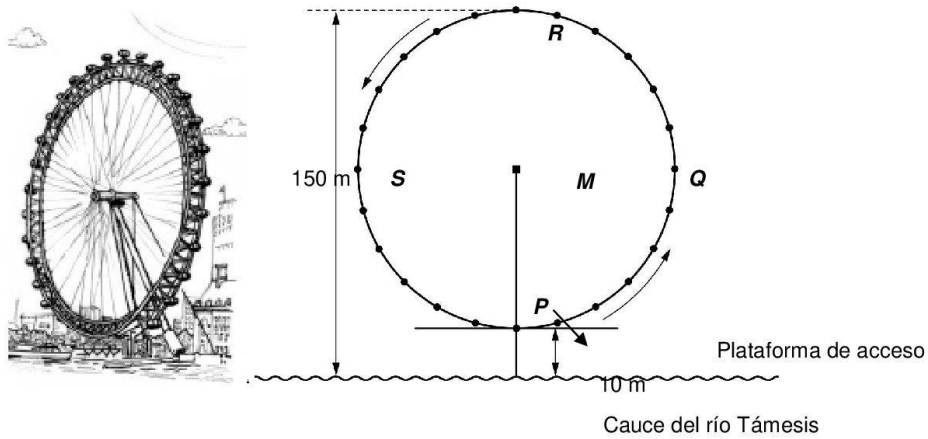
Pregunta 1

Utilizando la escala del mapa, calcula la superficie (área) del vertido de petróleo en kilómetros cuadrados (km^2).

Respuesta: km^2

LA NORIA

A la orilla de un río se encuentra una noria gigante. Fíjate en el dibujo y en el diagrama que se muestran a continuación.



La noria tiene un diámetro exterior de 140 metros y su punto más alto se encuentra a 150 metros sobre el cauce del río. Da vueltas en el sentido indicado por las flechas.

Pregunta 1

La letra *M* del gráfico señala el centro de la noria.
¿A cuántos metros (m) sobre el cauce del río se encuentra el punto *M*?

Respuesta:..... m

Pregunta 2

La noria da vueltas a una velocidad constante. Tarda exactamente 40 minutos en dar una vuelta completa. Juan inicia su viaje en la noria en el punto de acceso, *P*.

¿Dónde estará Juan después de media hora?

- A En *R*
- B Entre *R* y *S*
- C En *S*
- D Entre *S* y *P*

UNA CONSTRUCCIÓN CON DADOS

En la siguiente fotografía se muestra una construcción realizada con siete dados idénticos cuyas caras están numeradas del 1 al 6.



Vista desde arriba, sólo pueden verse 5 dados en la construcción.

Pregunta 1

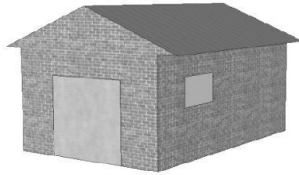
¿Cuántos puntos pueden verse en total con la construcción vista desde arriba?

Número de puntos vistos:

GARAJE

La gama «básica» de un fabricante de garajes incluye modelos de una sola ventana y una sola puerta.

Jorge elige el siguiente modelo de la gama «básica». A continuación se muestra la posición de la ventana y de la puerta.

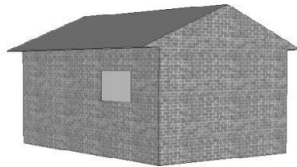


Pregunta 1

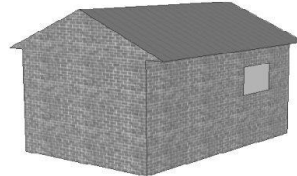
Las siguientes ilustraciones muestran distintos modelos «básicos» vistos desde la parte posterior. Sólo una de las ilustraciones se corresponde con el modelo anterior elegido por Jorge.

¿Qué modelo eligió Jorge? Rodea con un círculo A, B, C o D.

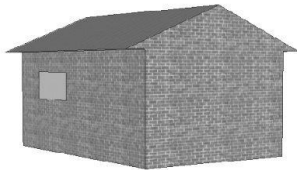
A



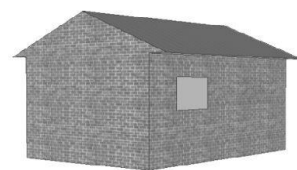
B



C

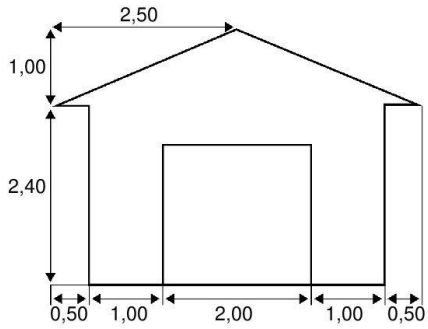


D



Pregunta 2

Los dos planos siguientes muestran las dimensiones, en metros, del garaje elegido por Jorge.



Vista frontal



Vista lateral

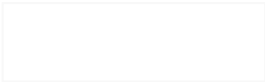
El tejado está formado por dos secciones rectangulares idénticas.

Calcula la superficie **total** del tejado. Escribe tus cálculos.

.....

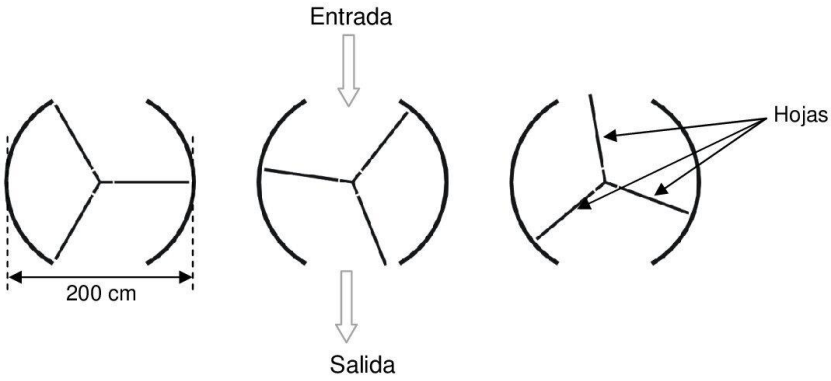
.....

.....



PUERTA GIRATORIA

Una puerta giratoria consta de tres hojas que giran dentro de un espacio circular. El diámetro interior de dicho espacio es de 2 metros (200 centímetros). Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.



Pregunta 1

PM995Q01 – 0 1 9

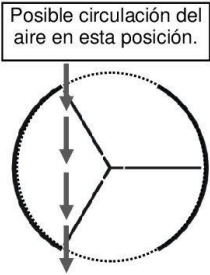
¿Cuánto mide (en grados) el ángulo formado por dos hojas de la puerta?

Medida del ángulo: °

Pregunta 2

PM995Q02 – 0 1 9

Las dos **aberturas** de la puerta (la sección punteada en el dibujo) son del mismo tamaño. Si estas aberturas son demasiado anchas las hojas giratorias no pueden proporcionar un espacio cerrado y el aire podría entonces circular libremente entre la entrada y la salida, originando pérdidas o ganancias de calor no deseadas. Esto se muestra en el dibujo de al lado.



¿Cuál es la longitud máxima del arco en centímetros (cm) que puede tener cada abertura de la puerta para que el aire no circule nunca libremente entre la entrada y la salida?

.....
.....
.....

Longitud máxima del arco: cm

Pregunta 3

La puerta da 4 vueltas completas en un minuto. Hay espacio para dos personas en cada uno de los tres sectores.

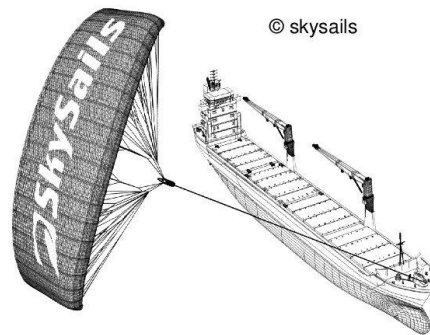
¿Cuál es el número máximo de personas que pueden entrar en el edificio por la puerta en 30 minutos?

- A 60
- B 180
- C 240
- D 720

BARCOS DE VELA

El noventa y cinco por ciento del comercio mundial se realiza por mar gracias a unos 50.000 buques cisterna, graneleros y buques portacontenedores. La mayoría de estos barcos utilizan diesel.

Los ingenieros pretenden utilizar la energía eólica para sustentar los barcos. Su propuesta consiste en enganchar velas-cometa a los barcos y utilizar el poder del viento para reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible sobre el medio ambiente.



Pregunta 1

PM923Q01

Una ventaja de utilizar una vela-cometa es que esta vuela a una altura de 150 m. Allí, la velocidad del viento es, aproximadamente, un 25% mayor que sobre la cubierta del barco.

¿A qué velocidad, aproximadamente, sopla el viento en una vela-cometa cuando sobre la cubierta de un buque portacontenedor la velocidad del viento es de 24 km/h?

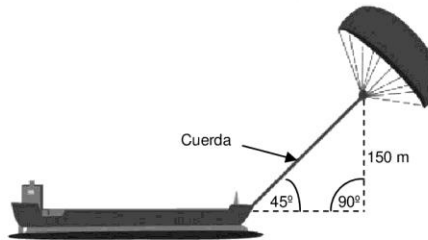
- A 6 km/h
- B 18 km/h
- C 25 km/h
- D 30 km/h
- E 49 km/h

Pregunta 3

PM923Q03

Aproximadamente, ¿qué longitud debe tener la cuerda de la vela-cometa para tirar del barco en un ángulo de 45° y estar a una altura vertical de 150 m, tal y como se muestra en el dibujo de la derecha?

- A 173 m
- B 212 m
- C 285 m
- D 300 m



Nota: El dibujo no está a escala.
© skysails

Pregunta 4

PM923Q04 - 0 1 9

Debido al elevado precio del diesel, de 0,42 zeds por litro, los propietarios del barco *NewWave* están pensando en equiparlo con una vela-cometa.

Se calcula que una vela-cometa como esta puede reducir el consumo total de diesel en torno a un 20%.

Nombre: *NewWave*

Tipo: buque de carga

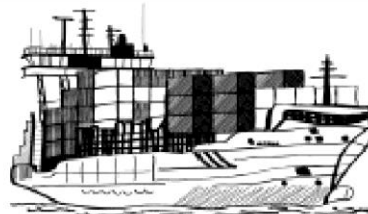
Eslora: 117 metros

Manga: 18 metros

Capacidad de carga: 12.000 toneladas

Velocidad máxima: 19 nudos

Consumo de diesel al año sin una vela-cometa: aproximadamente, 3.500.000 litros



El coste de equipar al *NewWave* con una vela-cometa es de 2.500.000 zeds.

¿Tras cuántos años, aproximadamente, el ahorro de diesel cubrirá el coste de la vela-cometa? Justifica tu respuesta por medio de cálculos.

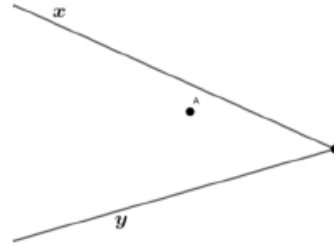
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Número de años:

Tareas de evaluación de aula

Actividad 1:

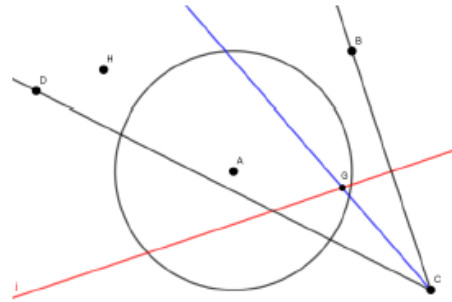
Determina los puntos del plano (identifícalos con algún color distintivo) que estén a más de 3 cm de A y equidisten de \overleftrightarrow{Bx} y \overleftrightarrow{By} . (No borres los trazos realizados).



Actividad 2:

A partir de la figura y de la siguiente información:

- Pinta de azul la \overleftrightarrow{CG} . \overleftrightarrow{CG} es la bisectriz del ángulo convexo con vértice en C.
- Pinta de roja la recta j (que pasa por G). j es la mediatriz del segmento que tiene como extremos B y C.
- La circunferencia tiene centro A y radio 4 cm.



A partir de la información brindada anteriormente, justifica cada una de las proposiciones indicando si es verdadera o falsa.

- a) Todos los puntos azules están a igual distancia de D que de B.
- b) $d(A, G) = d(G, C)$
- c) $d(A, B) < d(A, C)$
- d) $d(H, A) > 4 > d(A, G)$

Actividad 3:

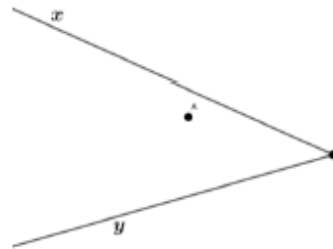
Escribe con tus palabras la siguiente proposición y represéntala gráficamente:

$$A = \{P \in \pi / d(P, \overleftrightarrow{BA}) \leq d(P, \overleftrightarrow{BC})\}$$



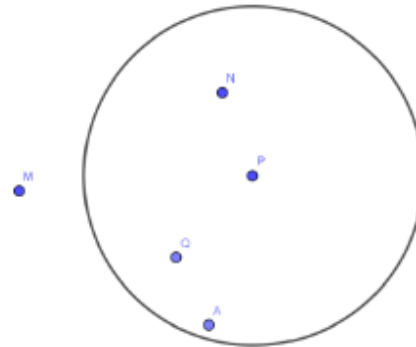
Actividad 4

Determina los puntos del plano (identificalos con algún color distintivo) que equidisten de A y B , y también de \overline{Bx} y \overline{By} . (No borres los trazos realizados).



Actividad 5

En la siguiente figura se observa una circunferencia de centro P y radio 4 cm . También se sabe que los puntos Q y A pertenecen a la mediatriz del segmento que tiene como extremos a los puntos N y M .



A partir de la información brindada anteriormente, justifica cada una de las proposiciones indicando si es verdadera o falsa.

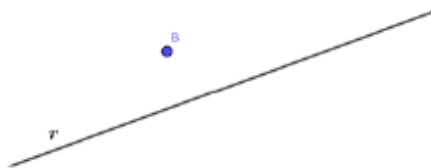
- Los puntos A , Q y N pertenecen a la circunferencia de centro P y radio 4 cm
- $d(P, N) < d(P, M)$
- Existen infinitos puntos de la circunferencia que equidistan de M y N .

Actividad 6

- Dado un punto B y una recta r , escribe en idioma español la siguiente proposición expresada en lenguaje simbólico:

$$A = \{P \in \pi / d(P, B) = 3 \wedge d(P, r) = 2\}$$

- En el siguiente dibujo, se sabe que el punto B está a 1 unidad de r . Encuentra, haciendo los trazados necesarios, al menos dos puntos del conjunto A .



ANEXO 2. RESOLUCIÓN DE LAS TAREAS DE EVALUACIÓN SELECCIONADAS

Tareas de evaluación de PISA

Compra de un apartamento

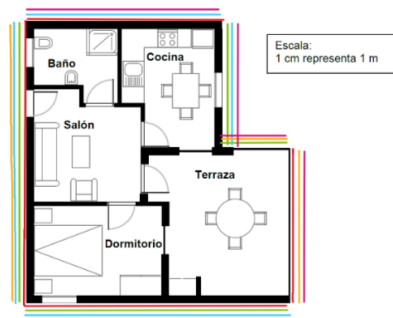
Resolución 1

Compra de un apartamento

Pregunta 1



Las cuatro medidas señaladas



Heladería

Resolución 1

Heladería

Nota: cada cuadrado mide 0,5 x 0,5 m

Pregunta 1

$$2^2 + 1,5^2 = AB^2$$

$$AB = \sqrt{6,25}$$

$$\text{Largo exterior del mostrador} = 4 + 1 + \sqrt{6,25} = 4,5 \text{ m}$$

Pregunta 2

Área Revestimiento = Área Tienda - Área Mostrador y Servicio

$$\text{Área Tienda} = 7,5 \times 5 = 37,5 \text{ m}^2$$

$$\text{Área Mostrador y Servicio} = 3 \times 2,5 - \frac{2 \times 1,5}{2} = 6 \text{ m}^2$$

$$\text{Área Revestimiento} = 37,5 - 6 = 31,5 \text{ m}^2$$

$$\text{Área Tienda} = 15 \times 10 = 150 \text{ c}$$

$$\text{Área de Mostrador y Servicio} = 6 \times 5 - 6 = 24 \text{ c}$$

$$\text{Área Revestimiento} = 150 - 24 = 126 \text{ c}$$

$$\text{Área Revestimiento} = 126 \times 0,5 \times 0,5 = 31,5 \text{ m}^2$$

Pregunta 3

$$\text{Área Conjuntos} = 3 \times 3 = 9 \text{ c}$$

$$\text{Área Conjunto y bordes} = 4 \times 5 = 20 \text{ c}$$

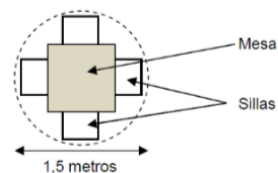
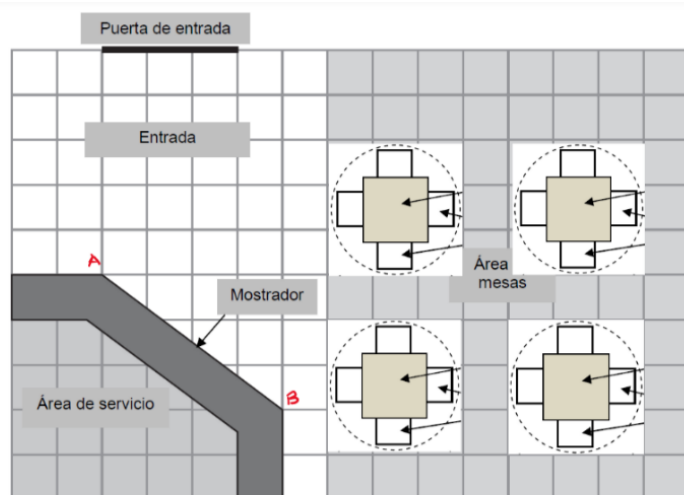
$$\text{Área Mesas} = 8 \times 10 = 80 \text{ c}$$

$$20 \times 4 = 80 \text{ c}$$

$$\text{Número de Conjuntos} = 4$$

Dibujar los Conjuntos en el Área de Mesas

$$\text{Entran 4 Conjuntos}$$



Vertido de petróleo

Resolución 1

Vertido de petróleo

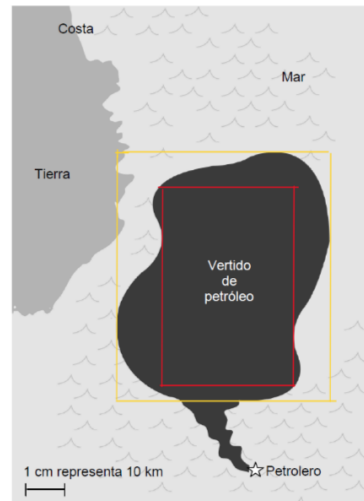
Pregunta 1

$$\text{Área } \blacksquare = 3,5 \times 4 = 14 \text{ km}^2$$

$$\text{Área } \blacksquare = 5 \times 4,2 = 21 \text{ km}^2$$

$$\text{Área diferencia} = \frac{21 - 14}{2} = 3,5 \text{ km}^2$$

$$\text{Área Petróleo} = 21 - 3,5 = 17,5 \text{ km}^2$$



La noria

Resolución 1

La Noria

Pregunta 1

Diámetro exterior de la noria 140 m

Radio Noria: $140/2 = 70 \text{ m}$

Altura de M = $70+10$

Altura de M = 80m

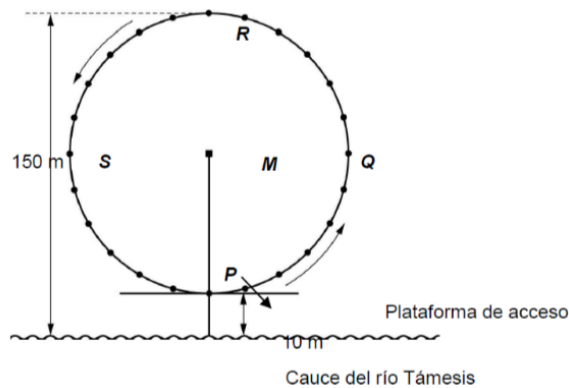
Pregunta 2

Vuelta completa: 40 min

1/4 de vuelta = 10 min

3/4 de vuelta = 30 min

Juan está en S



- A En R
- B Entre R y S
- C En S
- D Entre S y P

Construcción con dados

Resolución 1

Construcción con dados

Pregunta 1

$$5+5+1+4+2 = 17$$

Número de puntos vistos = 17



Garaje

Pregunta 1 - Resolución 1

$S_e(E) = G$
 $S_e(D) = H$
 $S_e(C) = I$
 $S_e(B) = J$
 $S_e(A) = F$

$S_e(ABCDEJ) = FJIHG$

Ventana $\in DEJI \Rightarrow$ Ventana $\in HGBC$

$S_e(DEJI) = HGBC$

Se descartan las posiciones B y D

$R_{JI, 90}(H) = H', H' \in ID$
 $R_{JI, 90}(I) = I$
 $R_{JI, 90}(J) = J$
 $R_{JI, 90}(G) = G', G' \in JE$

Se descarta la posición A

La solución es la posición B

Resolución 2

Se descartan las ventanas que están cercanas a la pared del fondo (pared en que no hay puerta): A y D, porque la única ventana está cerca de la pared de enfrente (la puerta).

Se descarta la ventana que vista de atrás está a la derecha: B, porque la ventana vista desde adelante (desde la puerta) está a la derecha.

Solución: C, porque la ventana está cercana a la pared de enfrente (de la puerta, opuesta a la que se ve sin puerta) y vista desde atrás está a la izquierda, por tanto, vista desde adelante está a la derecha. Ambas situaciones se corresponden con la posición que se muestra en la foto de frente.

Resolución 3

Por azar. El estudiante selecciona posibilidades sin motivos.

Pregunta 2 - Resolución 1

Pregunta 2: GARAGE

1m $2,5\text{m}$
 $hip^2 = 1^2 + (2,5)^2$
 $hip = \sqrt{1 + 6,25}$
 $hip = \sqrt{7,25}$
 $hip = \sqrt{\frac{29}{4}}$
 $hip = \frac{\sqrt{29}}{2}$
 $\text{ancho techo} = \frac{\sqrt{29}\text{m}}{2}$

1m 6m
 larg de techo
 Techo 6m
 $\frac{\sqrt{29}\text{m}}{2}$
 $\text{Área de techo} = 6 \cdot \frac{\sqrt{29}}{2} = 3\sqrt{29}\text{m}^2$
 $\text{Área de los dos techos} = 6\sqrt{29}\text{m}^2$

Puerta giratoria

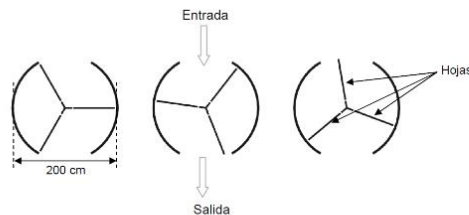
Resolución 1

Puerta giratoria

Pregunta 1

$360^\circ : 3 = 120^\circ$

Medida del ángulo: 120°



Pregunta 2

Longitud cfa = $2\pi r$

Longitud Puerta = $2 \times \pi \times 100$

Longitud abertura = $\frac{200\pi}{6}$

Longitud máxima de la abertura = $\frac{100\pi}{3}$



Pregunta 3

4 vueltas completas en 1 min
2 personas por sector

6 personas por vuelta

24 personas en 1 min

$24 \times 30 = 720$

Número máx de personas en 30 min: 720

- A 60
- B 180
- C 240
- D 720**

Barcos a vela

Resolución 1

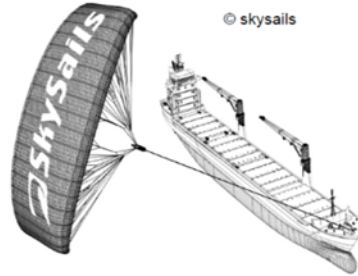
Barcos a Vela

Pregunta 1

$$24 \times 0,25 = 6$$

$$24 + 6 = 30$$

- A 6 km/h
- B 18 km/h
- C 25 km/h
- D 30 km/h**
- E 49 km/h



Pregunta 3

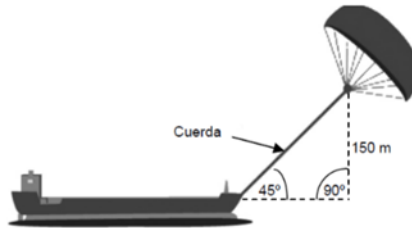
$$C^2 = 150^2 + 150^2$$

$$C = \sqrt{150^2 + 150^2}$$

$$C = \sqrt{45000}$$

$$C = 212 \text{ m}$$

- A 173 m
- B 212 m**
- C 285 m
- D 300 m



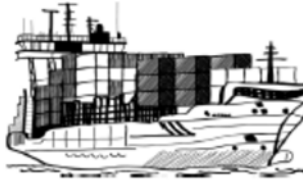
Pregunta 4

Consumo de diesel por año sin vela 3.500.000 l

$$20\% \text{ de } 3.500.000 = 700.000$$

$$700.000 + 3.500.000 = 4.200.000$$

Número de años: 1,5



Tareas de evaluación de aula

Actividad 1

Resolución 1

Actividad 1:
Determina los puntos del plano (identificalos con algún color distintivo) que estén a más de 3 cm de A y equidisten de \overline{Bx} y \overline{By} . (No borres los trazos realizados).

Solución

Actividad 1

- Los puntos que están a 3 cm de A pertenecen a la $\odot A, 3\text{cm}$, los que están a más de 3 cm, están en el exterior de la cfa.
- Los puntos que equidistan de \overline{Bx} y \overline{By} pertenecen a la bisectriz de $\angle B$.

Actividad 2

Resolución 1

Actividad 2

- a) Falso, los puntos azules equidistan de los semirectores \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CD} . (si C equidistara de B y D , la bisectriz coincidiría con la \overline{BC} , pero no hay información que afirme eso).
- b) Falso, no hay información para hacer esa afirmación.
- c) Verdadero. A pertenece al semiplano de borde la \overline{AB} que contiene a B .
- d) Verdadero. H es exterior a \overline{AB} , $\therefore AH > 4\text{cm}$.
 G es interior a \overline{AB} , $\therefore AG < 4\text{cm}$.

Actividad 3

Resolución 1

Actividad 3:
Escribe con tus palabras la siguiente proposición y represéntala gráficamente:
 $A = \{P \in \pi / d(P, \overrightarrow{BA}) \leq d(P, \overrightarrow{BC})\}$

Solución

Actividad 3

A es el conjunto de los puntos P del plano π cuya distancia a la semirecta de origen B que contiene a A es menor o igual a su distancia a la semirecta de origen B que contiene a C .

Nota: en este ejercicio no se trabaja con "hasta donde" hay que probar, salvo que lo sea un límite claro.

Actividad 4

Resolución 1

Nombre..... Fecha.....
Apellidos..... Curso..... Grupo.....
Firma (A)

Puntos que equidistan de A y de B
 Puntos que equidistan de \overline{BA} y \overline{BN}
 Punto que equidista de A y B y también de \overline{BA} y \overline{BN}

Actividad 5

Resolución 1

a) FALSO pues son interiores a la circunferencia.
b) VERDADERO pues P es el centro de la cfa, y N es un punto interior a la cfa ($d(P,N) < r$) y T es un punto exterior ($d(P,T) > r$).
c) FALSO. Existen solo dos que se obtienen al intersectar la mediatriz del segmento \overline{ST} con la cfa.

Actividad 6

Resolución 1

Nombre..... Nº..... Fecha.....
Asignatura..... Curso..... Grupo.....

a) A es el conjunto de puntos del plano que distan 3 de B y 2 de r

b)

- Puntos que distan 3 de B .
- Puntos que distan 2 de r
- Puntos de A .

ANEXO 3. CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS

Tareas de evaluación de PISA

Compra de un apartamento

Tabla 1. *Características en la tarea AP*

Características	Valores
Contexto	La medida del área de un apartamento es una situación real a nivel científico.
Tipología del enunciado	La gráfica del enunciado está dada por un corte transversal del plano del apartamento. Permite identificar las cuatro medidas necesarias para calcular la superficie total del apartamento. Texto largo que contextualiza la situación, con datos irrelevantes. Se destaca en negrita “cuatro” longitudes.
Complejidad cognitiva	Presentación esquemática de toda la situación. Exige habilidades de visualización para descomponer o componer la superficie del apartamento en figuras geométricas conocidas a las que se le pueda calcular el área. Para identificar las cuatro longitudes se necesita un proceso de conexión.
Formato de la respuesta	Se deben señalar longitudes dadas en la gráfica. Es una respuesta construida cerrada.

Heladería 1

Tabla 2. *Características en la tarea HI*

Características	Valores
Contexto	La renovación de una heladería corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	La gráfica del enunciado está dada en una vista desde arriba de la heladería que permite ubicar el mostrador rodeando el área de servicio. Texto breve que contextualiza la situación “la parte externa” y orienta en la búsqueda de la solución, “la longitud total”. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Establecer vínculos entre la ubicación de la puerta de entrada y el mostrador para identificar la parte externa del mostrador. Exige una interpretación visual de la información extraer la matemática incluida en la situación, requiere un nivel de reflexión.
Formato de la respuesta	Se solicita que se escriban los cálculos realizados. Respuesta construida abierta.

Heladería 2

Tabla 3. *Características en la tarea H2*

Características	Valores
Contexto	El revestimiento del suelo de la heladería corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	La gráfica del enunciado está dada en una vista desde arriba de la heladería que permite ubicar el área de servicio y mostrador. Texto breve que contextualiza la situación “superficie total” y orienta en la búsqueda de la solución, “excluido”. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Establecer vínculos entre el área total y el área de servicio y mostrador. Exige asociar polígonos con la forma del suelo de la heladería. Exige una interpretación visual de la información extraer la matemática incluida en la situación, requiere un nivel de reflexión.
Formato de la respuesta	Requiere hacer cálculos para encontrar el área solicitada. Respuesta construida abierta.

Heladería 3

Tabla 4. *Características en la tarea H3*

Características	Valores
Contexto	El revestimiento del suelo de la heladería corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	La gráfica del enunciado está dada en una vista desde arriba de la heladería y del conjunto de mesa y cuatro sillas para ubicar en el área de mesas. Presentación en texto que establece condiciones para ubicar los conjuntos y esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Establecer la relación entre el área que ocupa cada conjunto en el área en los que se deben ubicar. Respetar las condiciones que se establecen. Exige una interpretación visual de la información extraer la matemática incluida en la situación, requiere un nivel de reflexión.
Formato de la respuesta	Requiere establecer un único número como respuesta. Es una forma de respuesta construida cerrada.

Vertido de petróleo

Tabla 5. *Características en la tarea PE*

Características	Valores
Contexto	Choque de un petrolero contra una roca en el mar, es una situación real a nivel científico.

Tipología del enunciado	El mapa del enunciado muestra el vertido de petróleo en el mar y muestra la ubicación de la tierra. Presenta la escala de la realidad en el mapa. En el texto se contextualiza la situación y se hace una sugerencia para alcanzar la superficie del vertido. Presentación esquemática de la situación.
Complejidad cognitiva	Exige conocer el cálculo de área por exceso o defecto. Descomponer o componer la superficie del vertido en polígonos conocidos. Uso de escalas. En el texto presenta datos irrelevantes en referencia de la distancia a la que se encuentra de la tierra. Para encontrar una aproximación de la superficie del vertido se necesita un proceso de reflexión.
Formato de la respuesta	Si bien la respuesta requiere de un número que indica la cantidad de km ² que mide la superficie del vertido, es preciso realizar cálculos que permitan determinar el número. La respuesta es construida cerrada.

Noria 1

Tabla 6. *Características en la tarea N1*

Características	Valores
Contexto	Una noria gigante corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	Para identificar una noria se presenta una foto. La representación gráfica del enunciado está dada por una vista lateral de la noria. Texto breve que favorece la ubicación de la situación. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Establecer la ubicación del centro de la norial, la altura en la que se encuentra en relación con el cauce del río. Condiciones que exige una interpretación textual y visual de la información para establecer conexiones.
Formato de la respuesta	La respuesta exige un número determinado. Respuesta construida cerrada.

Noria 2

Tabla 7. *Características en la tarea N2*

Características	Valores
Contexto	Una persona subida en la noria corresponde a una situación real a nivel personal.
Tipología del enunciado	Para contextualizar la situación se presenta un texto breve, con información precisa y relevante para la resolución. Se complementa con la vista lateral de la noria. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Determinar la ubicación de una persona en la noria al cabo de un tiempo, según la velocidad de giro de la noria. Requiere de habilidades de visualización para logra la ubicación de la persona en la noria. Exige una

Formato de la respuesta	interpretación textual y visual de la información para establecer conexiones. Se presentan cuatro opciones posibles de respuesta. El estudiante debe elegir una de ellas. Pregunta de respuesta seleccionada, opción múltiple simple.
-------------------------	--

Construcción con datos

Tabla 8. *Características en la tarea DA*

Características	Valores
Contexto	La construcción con datos refiere a una situación de la vida real a nivel personal.
Tipología del enunciado	El mapa es una foto frontal de la construcción con datos. Tiene orientación desde dónde se debe mirar la construcción, la vista desde arriba. Presenta un texto breve que confirma la normalidad de los datos. Presentación esquemática de la situación.
Complejidad cognitiva	Requiere de habilidades de visualización para identificar las caras que se deben considerar en la vista desde arriba, además de completar la cara semi oculta. Reconocer por la distribución de los puntos, a qué cara refiere. Exige un nivel de conexión.
Formato de la respuesta	La respuesta exige dar un número que responde a la suma de los puntos en la vista desde arriba. La respuesta es construida cerrada.

Garaje 1

Tabla 9. *Características en la tarea G1*

Características	Tarea G1
Contexto	Un fabricante de garaje corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	Las gráficas del enunciado están dadas en perspectiva cónica, con dos puntos de fuga, que diferencia el frontal, que es más grande. Texto breve que contextualiza la situación y orienta en la búsqueda de la solución, “solo una”. La representación gráfica del garaje en tres dimensiones con vista frontal presenta los datos de ubicación de ventana y puerta. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Asociar las dos representaciones en tres dimensiones del garaje, la frontal y la de fondo. Exige habilidades de visualización para lograr la rotación adecuada del garaje. Establecer vínculos entre la ubicación de la puerta y la ventana dadas como referencia y ver en qué lugar quedan en la vista del fondo. Exige una interpretación visual de la información para establecer conexiones.
Formato de la respuesta	Se presentan cuatro opciones posibles de respuesta. El estudiante debe elegir una de ellas. Pregunta de respuesta seleccionada, opción múltiple simple.

Garaje 2

Tabla 10. *Características en la tarea G2*

Características	Tarea G2
Contexto	Un fabricante de garaje corresponde a una situación real a nivel ocupacional o laboral.
Tipología del enunciado	Texto breve que contextualiza la situación. La representación gráfica del garaje en dos dimensiones con vista frontal y lateral. La multiplicidad de datos, relevantes e irrelevantes ofrecen dificultad. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Asociar las dos representaciones en dos dimensiones del garaje, la frontal y la de fondo. Asociar las dimensiones que se corresponden entre las dos vistas. Discriminar datos necesarios de los que no. Determinar qué dato le falta. Recurrir a una estrategia conocida para determinar el dato desconocido, el ancho del techo. Considerar el nuevo rectángulo y sus dimensiones para poder calcular el área y luego duplicar esa área. Exige una reflexión para poder trazar el camino de resolución, elaborar la estrategia de resolución.
Formato de la respuesta	Para realizar el cálculo solicitado debe hacer cálculos previos a través de algoritmos conocidos. El camino de resolución del problema demanda creatividad y conocimientos previos. Pregunta de respuesta abierta.

Puerta giratoria 1

Tabla 11. *Características en la tarea P1*

Características	Tarea P1
Contexto	Una puerta giratoria de la que se brinda la imagen vista desde arriba y se solicita el ángulo formado entre dos de las hojas corresponde a una situación real a nivel científico.
Tipología del enunciado	Texto breve que contextualiza la situación y brinda un dato que no es relevante. La representación gráfica de la puerta giratoria vista desde arriba permite deducir que los ángulos entre las hojas son iguales. Presentación esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Exige deducir de la representación gráfica que los ángulos entre las hojas de la puerta son iguales. Exige un conocimiento preciso, saber que el ángulo completo mide 360° . El camino de resolución es la aplicación de un algoritmo sencillo. Para acceder a la solución se necesita emplear conocimiento matemático y analizar por tal necesita proceso de reflexión.
Formato de la respuesta	La respuesta requiere de un número determinado, la media del ángulo formado por dos hojas de la puerta. Respuesta construida cerrada.

Puerta giratoria 2

Tabla 12. *Características en la tarea P2*

Características	Tarea P2
Contexto	Una puerta giratoria de la que se brinda la imagen vista desde arriba y se solicita la longitud de un arco corresponde a una situación real a nivel científico.
Tipología del enunciado	Texto largo que contextualiza la situación, pero no brinda datos relevantes. La representación gráfica de la puerta giratoria vista desde arriba permite deducir que las partes cerradas de la puerta tienen igual amplitud que entre dos hojas. Presentación esquemática de la información relevante.
Complejidad cognitiva	Exige asociar la longitud de los arcos a la longitud de la circunferencia y por tanto recordar la fórmula del perímetro. Deducir de la representación gráfica que la longitud de la parte cerrada de la puerta se corresponde a la distancia entre dos de las hojas. Asociar que la distancia entre las hojas es igual. Ver que la parte abierta por tanto se corresponde a una parte cerrada, para luego partir en dos. Para acceder a la solución se necesita emplear conocimiento matemático y analizar por tal necesita proceso de reflexión.
Formato de la respuesta	Si bien la respuesta requiere de un número determinado, la longitud máxima del arco para que el aire no circule libremente entre la entrada y la salida, hay espacio para hacer el planteo de los cálculos. No deja de ser una respuesta construida cerrada.

Puerta giratoria 3

Tabla 13. *Características en la tarea P3*

Características	Valores
Contexto	Una puerta giratoria de la que se brinda la imagen vista desde arriba y se solicita la cantidad de personas que pueden circular al cabo de 30 minutos, sabiendo que da cuatro vueltas en un minuto y que caben dos personas en cada uno de los tres sectores de la puerta. La cantidad de personas corresponde a una situación real a nivel científico.
Tipología del enunciado	Texto que contextualiza la situación y brinda datos relevantes. La representación gráfica de la puerta giratoria vista desde arriba permite ubicar a dos personas en cada sector y a seis personas en los tres sectores. Presentación de texto y esquemática de toda la situación.
Complejidad cognitiva	Exige deducir que en cada vuelta entran seis personas, en cada minuto 24 personas. El camino de resolución es la aplicación de un algoritmo sencillo que permite calcular las personas que pueden circular al cabo de 30 minutos. Para acceder a la solución se necesita emplear un algoritmo matemático, por tal necesita un proceso de conexión.

Formato de la respuesta	Se presentan cuatro opciones de cantidad de personas posibles. El estudiante debe elegir una de ellas. Pregunta de respuesta seleccionada, opción múltiple simple.
-------------------------	--

Tareas de evaluación de aula

Actividad 1

Tabla 14. *Características en la tarea A1*

Características	Tarea A1
Contexto	Determinar los puntos del plano, es una situación específicamente matemática, perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes, con elementos geométricos y con sugerencias para la realización de la actividad. La representación gráfica muestra la situación dos semirrectas que determinan un ángulo, se señala su vértice y un punto interior. La representación gráfica completa la información relevante de los datos geométricos.
Complejidad cognitiva	Exige conocer todos los lugares geométricos vistos en el curso. Exige interpretar la representación gráfica brindada porque se trabajará en ella. Es necesario saber trazar bisectriz y circunferencia con lápiz y papel. Determinar los puntos equidistantes de los lados de un ángulo y asociar a la bisectriz del ángulo. Descifrar los elementos de una circunferencia. Determinar la región afuera círculo a través de la expresión “a más de 3 cm”. Interceptar las figuras y seleccionar los puntos que cumplen las dos condiciones a la vez, con la precisión de excluir los puntos del borde. Para acceder a la solución se necesita emplear conocimiento matemático, analizar y armar un plan, por tal necesita proceso de conexión.
Formato de la respuesta	La respuesta exige señalar con precisión, cuál o cuáles puntos resuelven la situación. Además de explicitarlos en forma escrita. Respuesta construida abierta.

Actividad 2

Tabla 15. *Características en la tarea A2*

Características	Valores
Contexto	Justificar proposiciones matemáticas, es una situación específica perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto largo con los datos relevantes, con elementos geométricos y con sugerencias para la realización de la actividad. La representación gráfica muestra la situación, dos semirrectas que determinan un ángulo se señala su vértice y dos puntos, uno en cada lado del ángulo; una

Complejidad cognitiva	<p>tercera semirrecta que es su bisectriz; la mediatriz del segmento determinado por el vértice y el punto que pertenece a uno de los lados del ángulo, que corta las tres semirrectas. Una circunferencia con centro un punto interior al ángulo (señalado) y está toda contenida en el semiplano de borde el mismo lado del ángulo que contiene al ángulo. Además, se señalan dos puntos más, interior al ángulo y exterior a la circunferencia, y el punto de corte de la bisectriz con la mediatriz que corta las tres semirrectas. La representación gráfica completa la información relevante de los datos geométricos.</p> <p>Exige conocer todos los lugares geométricos vistos en el curso.</p> <p>Exige interpretar la representación gráfica brindada.</p> <p>Exige conocer el lenguaje simbólico porque así se presentan las proposiciones.</p> <p>Identificar las propiedades que cumple cada elemento geométrico dado en el enunciado para justificar las cuatro afirmaciones.</p> <p>Para determinar si son verdaderas o falsas las afirmaciones se necesita emplear conocimiento matemático y analizar, por tal necesita proceso de conexión.</p>
Formato de la respuesta	<p>La respuesta exige justificar con las propiedades que cumplen los lugares geométricos involucrados y explicitarlas en forma escrita. Respuesta construida abierta.</p>

Actividad 3

Tabla 16. *Características en la tarea A3*

Características	Valores
Contexto	Interpretar el lenguaje simbólico, es una situación específicamente matemática, perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes, la propiedad que cumplen los puntos del plano. La representación gráfica presenta tres puntos no alineados y completa la información relevante de los datos geométricos.
Complejidad cognitiva	Exige interpretar el lenguaje simbólico. Exige el pasaje de lenguaje simbólico al lenguaje natural y a la representación gráfica. Se necesita emplear conocimiento matemático y analizar, por tal necesita proceso de conexión.
Formato de la respuesta	La respuesta exige escribir en lenguaje natural la propiedad que cumplen los puntos del conjunto dado y representarlos en la gráfica. Respuesta construida abierta.

Actividad 4

Tabla 17. *Características en la tarea A4*

Características	Valores
-----------------	---------

Contexto	Determinar los puntos del plano, es una situación específicamente matemática, perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes, con elementos geométricos y con sugerencias para la realización de la actividad. La representación gráfica muestra la situación dos semirrectas que determinan un ángulo, se señala su vértice y un punto interior. La representación gráfica completa la información relevante de los datos geométricos.
Complejidad cognitiva	Exige conocer todos los lugares geométricos vistos en el curso. Exige interpretar la representación gráfica brindada porque se trabajará en ella. Es necesario saber trazar bisectriz y mediatriz con lápiz y papel. Determinar los puntos equidistantes de los lados de un ángulo y asociar a la bisectriz del ángulo. Determinar los puntos equidistantes de dos puntos fijos y asociar a la mediatriz de un segmento. Interceptar la mediatriz y la bisectriz y seleccionar el punto que cumple las dos condiciones a la vez. Para acceder a la solución se necesita emplear conocimiento matemático y analizar por tal necesita proceso de conexión.
Formato de la respuesta	La respuesta exige señalar con precisión el punto que resuelve la situación y explicitarlo en forma escrita. Respuesta construida abierta.

Actividad 5

Tabla 18. *Características en la tarea A5*

Características	Valores
Contexto	Justificar proposiciones matemáticas, es una situación específica perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes y con elementos geométricos. La representación gráfica muestra la situación, una circunferencia con centro (señalado). Dos puntos, uno interior y otro exterior a la circunferencia. Dos puntos interiores a la circunferencia y pertenecientes a la mediatriz del segmento determinado por los puntos interior y exterior a la circunferencia. La representación gráfica completa la información relevante de los datos geométricos.
Complejidad cognitiva	Exige conocer todos los lugares geométricos vistos en el curso. Exige interpretar la representación gráfica brindada. Exige conocer el lenguaje simbólico porque así se presentan las proposiciones. Identificar las propiedades que cumple cada elemento geométrico dado en el enunciado para justificar las tres afirmaciones.

Formato de la respuesta	Para determinar si son verdaderas o falsas las afirmaciones se necesita emplear conocimiento matemático y analizar, por tal necesita proceso de conexión. La respuesta exige justificar con las propiedades que cumplen los lugares geométricos involucrados y explicitarlas en forma escrita. Respuesta construida abierta.
-------------------------	---

Actividad 6

Tabla 19. *Características en la tarea A6*

Características	Valores
Contexto	Interpretar el lenguaje simbólico, es una situación específicamente matemática, perteneciente al ámbito académico, situación científica.
Tipología del enunciado	Texto breve con los datos relevantes, la propiedad que cumplen los puntos del plano. La representación gráfica presenta una recta y un punto exterior a ella, para facilitar ejemplo de puntos que cumplen con la condición dada.
Complejidad cognitiva	Exige interpretar el lenguaje simbólico. Exige el pasaje de lenguaje simbólico al lenguaje natural y a la representación gráfica. Se necesita emplear conocimiento matemático y analizar, por tal necesita proceso de conexión.
Formato de la respuesta	La respuesta exige escribir en lenguaje natural la propiedad que cumplen los puntos del conjunto dado y representarlos en la gráfica. Respuesta construida abierta.

ANEXO 4. TABLAS EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

POR TAREA

Tareas de evaluación de PISA

Compra de un apartamento

Tabla 1. *Competencias en la tarea AP*

Competencia	Descripción en la tarea AP
Comunicar.	Comprender que para calcular el área del apartamento no es necesario calcular el área de cada espacio.
Representar.	Interpretar el apartamento en su totalidad. Identificar que el ancho mayor se forma con los otros dos anchos y que el largo mayor se forma con los otros largos menores.
Matematizar.	El ancho mayor es un segmento que es suma de los dos anchos menores. El largo mayor es un segmento que es suma de los dos largos menores. Considerar la superficie del apartamento como la suma de dos rectángulos horizontales. Considerar la superficie del apartamento como la resta de un rectángulo mayor y uno menor.
Razonar y argumentar.	--
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	--
Usar herramientas matemáticas.	--

Tabla 2. *Procesos cognitivos en la tarea AP*

Procesos Cognitivos	Descripción en AP
Recordar	Las dimensiones involucradas en la medida indirecta del área de rectángulos.
Comprender	Comprender que para calcular el área del apartamento no es necesario calcular el área de cada espacio. Interpretar el apartamento en su totalidad. Identificar que el ancho mayor se forma con los otros dos anchos y que el largo mayor se forma con los otros largos menores.
Aplicar	--
Analizar	Diferenciar las cuatro dimensiones necesarias para calcular el área del apartamento.
Evaluar	--

Crear --

Heladería 1

Tabla 3. *Competencias en la tarea H1*

Competencia	Descripción en H1
Comunicar.	Interpretar la escala, cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5m x 0,5m. Identificar un nuevo borde a la parte externa del mostrador.
Representar.	Interpretar del gráfico que la longitud del mostrador está constituida por tres partes: horizontal, vertical y oblicuo. Identificar la parte externa del mostrador.
Matematizar.	Identificar que la longitud del mostrador equivale a calcular la longitud de tres segmentos. La parte oblicua del mostrador se corresponde con un segmento oblicuo, que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	-- Calcular el segmento horizontal, el vertical y el oblicuo. La longitud del mostrador a escala es la suma de los segmentos. Aplicar la escala para pasar a metros.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Teorema de Pitágoras.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 4. *Procesos cognitivos en la tarea H1*

Procesos Cognitivos	Descripción en H1
Recordar	La longitud total como la suma de sus partes. El teorema de Pitágoras.
Comprender	Interpretar la escala, cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5m x 0,5m. Identificar un nuevo borde a la parte externa del mostrador. Interpretar del gráfico que la longitud del mostrador está constituida por tres partes: horizontal, vertical y oblicuo. Identificar la parte externa del mostrador.
Aplicar	El teorema de Pitágoras para calcular la longitud del segmento oblicuo. La escala dada para determinar la longitud del segmento horizontal y vertical. La suma de los segmentos para encontrar la longitud total del borde de la parte externa del mostrador.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Heladería 2

Tabla 5. *Competencias en la tarea H2*

Competencia	Descripción en H2
-------------	-------------------

Comunicar.	Interpretar el suelo de la tienda, excluido el área de servicio y el mostrador. Interpretar del gráfico que el suelo de la tienda lo puedo dividir en partes.
Representar.	Identificar que se quiere revestir todo el suelo de la tienda menos la parte de servicio y mostrador.
Matematizar.	Identificar que el área del suelo de la tienda se corresponde con el área de un rectángulo. El área de servicio y mostrador se la puede dividir en un rectángulo y un trapecio, entre otros.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	-- Calcular el área de la heladería Calcular el área de servicio y mostrador como suma de áreas de trapecio y rectángulo. Restar área total de la heladería menos el área de servicio y mostrador. Puede ser como suma de polígonos. Aplicar la escala para pasar a metros.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Área de los diferentes polígonos: rectángulo, trapecio y triángulo.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 6. *Procesos cognitivos en la tarea H2*

Procesos Cognitivos	Descripción en H2
Recordar	La medida indirecta del área de rectángulos y triángulo.
Comprender	Interpretar el suelo de la tienda, excluido el área de servicio y el mostrador. Interpretar del gráfico que el suelo de la tienda se puede dividir en partes. Identificar que se quiere revestir todo el suelo de la tienda menos la parte de servicio y mostrador.
Aplicar	Calcula el área de los rectángulos y triángulo rectángulo. El área total como la suma de las áreas de las partes.
Analizar	Las partes en las que se puede dividir el suelo de la heladería, para poder calcular el área del suelo que se desea revestir.
Evaluar	--
Crear	--

Heladería 3

Tabla 7. *Competencias en la tarea H3*

Competencia	Descripción en H3
Comunicar.	Interpretar las condiciones de ubicación de los conjuntos: a 0,5m de las paredes y 0,5m entre los conjuntos. Interpretar que una de las dimensiones del conjunto de la mesa y sillas es 1,5m o 3c (cuadrados). Interpretar que los conjuntos se deben colocar en la zona de mesas sombreada de la tienda.
Representar.	Interpretar que el área de mesas se corresponde con el área del suelo de la tienda sombreada de gris.

Matematizar.	<p>Dibujar las circunferencias de diámetro 1,5 m o 3c, o los cuadrados de lado 1,5m o 3c.</p> <p>Considerar que los conjuntos deben estar separados a 0,5m de las paredes y entre ellos.</p> <p>Si el cálculo fue algebraico, corroborar que el número de conjuntos cabe en el área de mesas.</p> <p>Identificar que el área de mesas es un rectángulo de 5m x 4m o 10c x 8c.</p> <p>Interpretar que el conjunto de la mesa y sillas está circunscripto por una circunferencia de diámetro 1,5 m o por un cuadrado de lado 1,5 m o 3 c.</p> <p>Cada conjunto ocupa 9 cuadrados del suelo de la tienda.</p>
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	<p>--</p> <p>Comenzar a ubicar conjuntos por el ángulo superior derecho del área de mesas, dibujar circunferencia o cuadrado de 1,5 m de lado en las condiciones establecidas.</p> <p>Comenzar por el ángulo superior izquierdo y sólo se deja 0,5 de una pared y entre ellos.</p> <p>Igual que los anteriores, pero para los ángulos inferiores.</p> <p>Calcular el área de cada conjunto y los correspondientes retiros, así ocupan un cuadrado de 2m de lado o un círculo de diámetro 2m.</p> <p>Calcular el área total de mesas.</p> <p>Dividir el área total de mesas entre el área de un conjunto y corroborar la respuesta encontrada.</p>
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Usar herramientas matemáticas.	<p>Área de las diferentes formas: rectángulo, cuadrado o círculo.</p> <p>Uso de calculadora.</p>

Tabla 8. *Procesos cognitivos en la tarea H3*

Procesos Cognitivos	Descripción en H3
Recordar	La medida indirecta de área de un cuadrado y del rectángulo.
Comprender	<p>Interpretar las condiciones de ubicación de los conjuntos: a 0,5m de las paredes y 0,5m entre los conjuntos.</p> <p>Interpretar que una de las dimensiones del conjunto de la mesa y sillas es 1,5m o 3c (cuadrados).</p> <p>Interpretar que los conjuntos se deben colocar en la zona de mesas.</p> <p>Interpretar que el área de mesas se corresponde con el área del suelo de la tienda sombreada de gris.</p> <p>Cada conjunto está contenido en una circunferencia de diámetro 1,5 m o 3c, o en un cuadrado de lado 1,5m o 3c.</p>
Aplicar	<p>Calcula el área del cuadrado que contiene al conjunto de mesa y sillas.</p> <p>Calcula el área del rectángulo del área de mesas.</p>
Analizar	--
Evaluar	Si el cálculo fue algebraico, corroborar que el número de conjuntos cabe en el área de mesas.
Crear	--

Vertido de petróleo

Tabla 9. Competencias en la tarea PE

Competencia	Descripción en la tarea PE
Comunicar.	Interpretar la escala, 1cm representa 10km. Comprender el área del vertido del petróleo.
Representar.	Identificar que el vertido del petróleo no se puede asociar a una única figura geométrica conocida.
Matematizar.	Identificar que el vertido del petróleo puede descomponerse en polígonos conocidos.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	-- Armar una grilla cuadriculada, de 1x1 que contenga el vertido de petróleo y sumar áreas. Determinar un rectángulo que contenga al vertido y otro interior al vertido (por exceso y por defecto). Sumar sus áreas y dividir entre 2. Dividir en polígonos conocidos y calcular las áreas de los polígonos. El área del vertido será la suma de las áreas.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Áreas de polígonos conocidos. Cálculo de áreas por exceso y por defecto.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 10. Procesos cognitivos en la tarea PE

Procesos Cognitivos	Descripción en PE
Recordar	Área como composición de áreas. Áreas por exceso y por defecto.
Comprender	Interpretar la escala, 1cm representa 10km. Comprender el área del vertido del petróleo. Identificar que el vertido del petróleo no se puede asociar a una única figura geométrica conocida.
Aplicar	División del vertido en polígonos convenientes.
Analizar	Organizar polígonos dentro del vertido para cubrirlo. Construir una rejilla que permita aproximar áreas. Construir un polígono o circunferencia mayor, otra menor, sumar sus áreas y dividirlos entre dos.
Evaluar	--
Crear	Una estrategia para poder calcular el área.

Noria 1

Tabla 11. Competencias en la tarea N1

Competencia	Descripción en N1
Comunicar.	Interpretar que el diámetro de la noria es 140 m. Comprender que el punto más alto se encuentra a 150 m sobre el río. Interpretar que es necesario buscar información en el gráfico.

Representar.	Interpretar que la letra M señala el centro de la noria. Identificar que P es el punto más bajo de la noria. Interpretar que la distancia en P y el río es 10m, que R es el punto más alto de la noria y que 150m representa la distancia entre R y el río. Identificar por las flechas el sentido antihorario de giro de la noria.
Matematizar.	Identificar que la noria se corresponde con una circunferencia. Interpretar que la ubicación del punto más alto es la distancia entre el punto más alto de la noria y el río. El centro y diámetro de la noria son el centro y diámetro de una circunferencia. La medida del segmento MP es igual al radio de la circunferencia. El giro de la noria es una rotación de centro M, en sentido antihorario.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	-- Calcular la medida del segmento MP. Sumar la distancia de P al río. La distancia del punto más alto al río, restar la distancia del punto más bajo al río, es igual al diámetro. Se divide entre dos y se le suma la distancia de P al río. El diámetro se divide entre 2 y se le suma la distancia de P al río.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Sumas, restas y división de medidas de segmentos.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 12. *Procesos cognitivos en la tarea N1*

Procesos Cognitivos	Descripción en N1
Recordar	--
Comprender	Interpretar que el diámetro de la noria es 140 m. Comprender que el punto más alto se encuentra a 150 m sobre el río. Interpretar que la letra M señala el centro de la noria. Identificar que P es el punto más bajo de la noria. Interpretar que la distancia en P y el río es 10m, que R es el punto más alto de la noria. Identificar por las flechas el sentido antihorario de giro de la noria.
Aplicar	La suma de distancias.
Analizar	Las medidas involucradas, el diámetro de la noria y la distancia de la noria al cauce del río.
Evaluar	--
Crear	--

Noria 2

Tabla 13. *Competencias en la tarea N2*

Competencia	Descripción en la tarea N2
-------------	----------------------------

Comunicar.	Interpretar la velocidad constante, que la noria demora 40' en dar una vuelta completa y que el punto de acceso es P. Comprender que media hora es 30'.
Representar.	Identificar que el asiento en P al cabo de 40' vuelve a estar en P. La noria tiene 24 asientos.
Matematizar.	Identificar que la noria se corresponde con una circunferencia. Los 24 asientos se corresponden con los 24 puntos. En 40' da una vuelta completa, P vuelve a P. En 40' los 24 puntos giran una vuelta completa.
Razonar y argumentar.	Si en 40' da una vuelta completa, en 10' da un $\frac{1}{4}$ de vuelta y en 30' da $\frac{3}{4}$ de vuelta. P después de 10' va a estar en Q, después de 20' en R y después de 30 en S. Si en 40' los 24 puntos giran una vuelta completa, en 10' giran 6 puntos, en 20' giran 12, en 30' giran 18 puntos.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Regla de tres. División y multiplicación.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 14. *Procesos cognitivos en la tarea N2*

Procesos Cognitivos	Descripción en N2
Recordar	Rotación de una circunferencia.
Comprender	Interpretar la velocidad constante, que la noria demora 40' en dar una vuelta completa y que el punto de acceso es P. Comprender que media hora es 30'. Identificar que el asiento en P al cabo de 40' vuelve a estar en P. La noria tiene 24 asientos.
Aplicar	Si en 40' da una vuelta completa, en 10' da un $\frac{1}{4}$ de vuelta y en 30' da $\frac{3}{4}$ de vuelta. P después de 10' va a estar en Q, después de 20' en R y después de 30 en S. Si en 40' los 24 puntos giran una vuelta completa, en 10' giran 6 puntos, en 20' giran 12, en 30' giran 18 puntos.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Construcción con dados

Tabla 15. *Competencias en la tarea DA*

Competencia	Descripción en la tarea DA
Comunicar.	Interpretar que la construcción tiene 7 dados y que en la vista desde arriba se ven 5 dados.
Representar.	Identificar los cinco dados involucrados en la vista desde arriba.

Matematizar.	Uno de los dados tiene una parte oculta, pero la distribución de los puntos permite identificar que son 4 puntos en esa cara. Identificar los puntos de cada cara. Completar la cara oculta. Sumar todos los puntos.
Razonar y argumentar. Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	--
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 16. *Procesos cognitivos en la tarea DA*

Procesos Cognitivos	Descripción en DA
Recordar	--
Comprender	Interpretar que la construcción tiene 7 dados y que en la vista desde arriba se ven 5 dados. Identificar los 5 dados involucrados en la vista desde arriba. Uno de los dados tiene una parte oculta, pero la distribución de los puntos permite identificar que son 4 puntos en esa cara.
Aplicar	Sumar los puntos que se ven en la vista desde arriba.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Garaje 1

Tabla 17. *Competencias en la tarea G1*

Competencia	Descripción en la tarea G1
Comunicar.	Interpretar los elementos del garaje: solo una ventana y solo una puerta. Interpretar la parte posterior del garaje. Comprender la correspondencia entre parte posterior y el modelo dado.
Representar.	Identificar la posición cercana entre la puerta y la ventana. En la vista frontal la ventana está a la derecha de la puerta. En la vista posterior, no hay puerta, hay una pared. La ventana está a la izquierda y más lejos de la pared posterior.
Matematizar.	Identificar las posiciones relativas entre puerta y ventana, entre pared posterior y ventana. Identificar que el modelo se rota 90° para quedar en las posiciones A y C; y rota 180° para quedar en las posiciones B y D.

Razonar y argumentar.	Cambiar al observador de lugar, de la parte frontal a la parte posterior. Identificar la posición de la ventana más lejos de la pared posterior y del lado izquierdo. Rotar el modelo del garaje, 180° y la ventana queda en la cara oculta. Rotar el garaje 90° y la ventana queda a la izquierda y lejos de la pared posterior.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Rotación
Usar herramientas matemáticas.	--

Tabla 18. *Procesos cognitivos en la tarea G1*

Procesos Cognitivos	Descripción en G1
Recordar	Rotación.
Comprender	Interpretar los elementos del garaje: solo una ventana y solo una puerta. Interpretar la parte posterior del garaje. Comprender la correspondencia entre parte posterior y el modelo dado. Identificar la posición cercana entre la puerta y la ventana. En la vista frontal la ventana está a la derecha de la puerta. En la vista posterior, no hay puerta, hay una pared. La ventana está a la izquierda y más lejos de la pared posterior.
Aplicar	Rotación mental del garaje. Posición relativa entre puerta y ventana.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Garaje 2

Tabla 19. *Competencias en la tarea G2*

Competencia	Descripción en la tarea G2
Comunicar.	Interpretar las medidas dadas son en metros. El tejado está compuesto por dos secciones rectangulares idénticas.
Representar.	Identificar que la superficie total del tejado corresponde a la superficie de dos rectángulos idénticos. El largo del garaje de la vista lateral es el largo del rectángulo. La hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma en la vista frontal es el ancho del rectángulo.
Matematizar.	Interpretar de la vista frontal el ancho del tejado y de la vista lateral el largo del tejado.
Razonar y argumentar.	--
Idear estrategias para la resolución de problemas.	Calcular el ancho del tejado, la hipotenusa del triángulo rectángulo de la vista frontal. Calcular el área del rectángulo y multiplicarlo por dos.

Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Teorema de Pitágoras. Medida indirecta del área de un triángulo y rectángulo.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 20. *Procesos cognitivos en la tarea G2*

Procesos Cognitivos	Descripción en G2
Recordar	El teorema de Pitágoras. El cálculo de área de un rectángulo.
Comprender	Interpretar los datos de la vista frontal y de la vista lateral. El ancho del tejado se corresponde con la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El largo del tejado se corresponde con el largo de la vista lateral. El tejado esta formado por dos rectángulos idénticos.
Aplicar	Aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1,00 y 2,50. Calcular el área del rectángulo: medida de la hipotenusa x el largo. Multiplicar por dos el área del rectángulo.
Analizar	Determinar la medida del ancho. Identificar la medida del largo. El área se obtiene de multiplicar la medida del ancho por la del largo. El área total resulta de multiplicar por dos el área del rectángulo.
Evaluar	El resultado es en m ²
Crear	El ancho se determina a partir de la información de la vista frontal. El largo de la vista lateral. Se crea un nuevo rectángulo que corresponde a una de las partes del tejado.

Puerta giratoria 1

Tabla 21. *Competencias en la tarea P1*

Competencia	Descripción en la tarea P1
Comunicar.	Comprender el funcionamiento de una puerta giratoria y que las tres hojas dividen al espacio en tres sectores iguales. Interpretar el diámetro interior de 2m (200cm). Comprender que dos hojas de la puerta forman uno de los tres sectores.
Representar.	Interpretar la vista desde arriba de la puerta giratoria, que las tres representaciones son de la misma puerta, cada una brinda una información diferente: el diámetro, por donde entra y salen las personas y se señalan las 3 hojas.
Matematizar.	La trayectoria de la puerta giratoria es una circunferencia. El diámetro de la puerta es el diámetro de la circunferencia. Cada hoja de la puerta es un plano, los tres planos dividen al espacio en tres sectores iguales. Determinar ángulos entre planos son los formados por dos hojas de la puerta. En la vista desde arriba, ángulos en el plano. El ángulo llano se divide en tres ángulos iguales.
Razonar y argumentar.	Dividir el ángulo llano en tres.

Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	División de grados.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 22. *Procesos cognitivos en la tarea P1*

Procesos Cognitivos	Descripción en P1
Recordar	Un ángulo llano mide 360° .
Comprender	Comprender el funcionamiento de una puerta giratoria y que las tres hojas dividen al espacio en tres sectores iguales. Interpretar el diámetro interior de 2m (200cm). Comprender que dos hojas de la puerta forman uno de los tres sectores. Interpretar la vista desde arriba de la puerta giratoria, que las tres representaciones son de la misma puerta, cada una brinda una información diferente: el diámetro, por donde entra y salen las personas y se señalan las 3 hojas.
Aplicar	La medida del ángulo llano la divide entre 3, correspondiente a los tres sectores.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Puerta giratoria 2

Tabla 23. *Competencias en la tarea P2*

Competencia	Descripción en la tarea P2
Comunicar.	Comprender que las dos aberturas son de igual tamaño y que la longitud es de un arco de circunferencia.
Representar.	Interpretar en la vista desde arriba de la puerta giratoria que el diámetro es de 200cm. El ángulo formado por dos hojas se corresponde con una de las paredes de la puerta, partes cerradas.
Matematizar.	La trayectoria de la puerta giratoria es una circunferencia. El diámetro de la puerta es el diámetro de la circunferencia. La longitud de un arco depende de la longitud de la circunferencia. El ángulo formado por dos hojas le corresponde una longitud de arco igual a la tercera parte del perímetro de la circunferencia. Una abertura se corresponde con la sexta parte de la circunferencia.
Razonar y argumentar.	--
Idear estrategias para la resolución de problemas.	Determinar el radio de la circunferencia. Calcular el perímetro de la circunferencia, dividirlo entre 3 y entre 2. El perímetro de la circunferencia dividido 6.

Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Perímetro de la circunferencia. División de longitudes.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 24. *Procesos cognitivos en la tarea P2*

Procesos Cognitivos	Descripción en P2
Recordar	Medida indirecta del perímetro de una circunferencia.
Comprender	Comprender que las dos aberturas son de igual tamaño y que la longitud es de un arco de circunferencia. Interpretar en la vista desde arriba de la puerta giratoria que el diámetro es de 200cm. El ángulo formado por dos hojas se corresponde con una de las paredes de la puerta, partes cerradas.
Aplicar	Calcula el perímetro de la circunferencia y lo divide entre 6.
Analizar	Atribuye a la amplitud del ángulo formado por dos hojas la longitud de arco igual a la tercera parte del perímetro de la circunferencia. Atribuye que una abertura es la sexta parte de la circunferencia.
Evaluar	--
Crear	--

Puerta giratoria 3

Tabla 25. *Competencias en la tarea P3*

Competencia	Descripción en la tarea P3
Comunicar.	Comprender que la puerta da 4 vueltas completas en 1 minuto, en cada sector de la puerta entran dos personas. Las personas que pueden entrar al cabo de 30'.
Representar.	--
Matematizar.	En cada sector entran 2 personas, en una vuelta pueden entrar 6 personas. La puerta da 4 vueltas en 1', al cabo de 1' pueden entrar 24 personas. Al cabo de 30', 720 personas.
Razonar y argumentar.	--
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Multiplicaciones sucesivas.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de calculadora.

Tabla 26. *Procesos cognitivos en la tarea P3*

Procesos Cognitivos	Descripción en P3
Recordar	--
Comprender	Comprender que la puerta da 4 vueltas completas en 1 minuto, en cada sector de la puerta entran dos personas. Las personas que pueden entrar al cabo de 30'.
Aplicar	Multiplicaciones sucesivas.

	En cada sector, dos personas. En los tres sectores, 6 personas. En 1' da 4 vueltas, que corresponde a 24 personas. En 30', 720 personas.
Analizar	--
Evaluar	--
Crear	--

Tareas de evaluación de aula

Actividad 1

Tabla 27. Competencias en la tarea A1

Competencia	Descripción en la tarea A1
Comunicar.	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: más de 3cm de un punto fijo A y equidistan de dos semirrectas Bx y By.
Representar.	Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo.
Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Identificar que los puntos que están a más de 3cm de un punto fijo están fuera de un círculo. Trazar la circunferencia. Marcar los puntos fuera del círculo. Identificar que los puntos que equidistan de dos semirrectas que son lados de un ángulo se encuentran en la bisectriz. Trazar la bisectriz del ángulo xBy. Señalar la semirrecta que cumple con las dos condiciones.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Semirrectas Bx y By.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de regla y compás.

Tabla 28. Procesos cognitivos en la tarea A1

Procesos Cognitivos	Descripción en A1
Recordar	Definición circunferencia y bisectriz como lugar geométrico.
Comprender	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: más de 3cm de un punto fijo A y equidistan de dos semirrectas Bx y By. Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la circunferencia y los puntos de la bisectriz.
Analizar	Los puntos que cumplen las dos condiciones a la vez.
Evaluar	Todos los puntos que están a más de 3cm de A están fuera del círculo. Todos los puntos que equidistan de Bx y By pertenecen a la bisectriz.

Crear	Trazar la circunferencia y determinar los puntos fuera del círculo. Trazar la bisectriz. Determinar los puntos que pertenecen a la bisectriz y están fuera del círculo.
-------	---

Actividad 2

Tabla 29. Competencias en la tarea A2

Competencia	Descripción en la tarea A2
Comunicar.	Interpretar la condición que cumplen los puntos de la bisectriz de un ángulo; los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos de una circunferencia.
Representar.	Interpretar que G es intersección de una bisectriz con una mediatriz; que H es exterior a la circunferencia; D y B pertenecen a lados diferentes de un ángulo.
Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Dos puntos cualesquiera de los lados de un ángulo no equidistan de los puntos de la bisectriz. Para la afirmación b), no hay suficiente información para afirmar verdad o falsedad. La mediatriz de un segmento divide al plano en dos semiplanos. El punto A pertenece a uno de los semiplanos por tanto está más cerca de uno de los extremos del segmento que del otro. Puntos interiores o exteriores a una circunferencia distan del centro, una distancia menor o mayor que el radio.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Semirrectas CG. Igualdad y desigualdad de distancias.
Usar herramientas matemáticas.	--

Tabla 30. Procesos cognitivos en la tarea A2

Procesos Cognitivos	Descripción en A2
Recordar	Definición de bisectriz, mediatriz y circunferencia como lugar geométrico y de semiplano. Intersección de dos rectas es un punto. Puntos interiores y exteriores a la circunferencia. Distancia entre puntos.
Comprender	Interpretar la condición que cumplen los puntos de la bisectriz de un ángulo; los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos de una circunferencia. Interpretar que G es intersección de una bisectriz con una mediatriz; que H es exterior a la circunferencia; D y B pertenecen a lados diferentes de un ángulo.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la bisectriz. La mediatriz divide al plano en dos semiplanos. Los puntos de un semiplano están más cerca de unos de los extremos del segmento que del otro. La relación de distancia entre un punto interior, exterior con el centro de la circunferencia.
Analizar	Diferenciar en cada afirmación la verdad o falsedad a partir de la proposición dada y los datos que se dan en la tarea.
Evaluar	Comprobar la verdad o falsedad de cada afirmación.
Crear	--

Actividad 3

Tabla 31. *Competencias en la tarea A3*

Competencia	Descripción en la tarea A3
Comunicar.	Interpretar una proposición en lenguaje matemático. Escribir la proposición en lenguaje natural.
Representar.	Interpretar que tres puntos no alineados determinan un ángulo con uno de ellos como vértice. Considerar que el punto B es el vértice.
Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Identificar que es un conjunto de puntos del plano que cumplen con una condición. La condición es estar a menor distancia de una semirrecta que de otra, siendo las semirrectas lados de un ángulo. Los puntos que están a igual distancia de los lados del ángulo son los puntos de la bisectriz. Se traza la bisectriz. Todos los puntos que están a menor distancia una de uno de los lados, son los puntos del semiplano de borde la bisectriz que contiene al lado del ángulo. Los determinan.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Semirrectas B_x y B_y . Un conjunto de puntos del plano que cumplen con una condición. Distancia, desigualdad de distancias.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de regla y compás.

Tabla 32. *Procesos cognitivos en la tarea A3*

Procesos Cognitivos	Descripción en A3
Recordar	Definición de bisectriz como lugar geométrico, distancia y semiplano.
Comprender	Interpretar una proposición en lenguaje matemático. Escribir la proposición en lenguaje natural. Interpretar que tres puntos no alineados determinan un ángulo con uno de ellos como vértice. Considerar que el punto B es el vértice.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la bisectriz. Los puntos del semiplano determinado por la bisectriz en relación con los lados del ángulo.
Analizar	Los semiplanos determinados por la bisectriz de un ángulo. La relación de distancia entre los puntos de un semiplano y cada lado del ángulo.
Evaluar	El semiplano cuyos puntos cumplen con estar más cerca de un lado del ángulo que del otro.
Crear	Trazar el ángulo, la bisectriz y señalar el semiplano indicado.

Actividad 4

Tabla 33. Competencias en la tarea A4

Competencia	Descripción en la tarea A4
Comunicar.	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: equidistan de dos puntos fijos A y B y de dos semirrectas Bx y By.
Representar.	Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo y que B es el vértice.
Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Identificar que los puntos que equidistan de los puntos A y B están en la mediatriz. Trazar la mediatriz. Identificar que los puntos que equidistan de dos semirrectas que son lados de un ángulo se encuentran en la bisectriz. Trazar la bisectriz del ángulo xBy. Señalar el punto que cumple las dos condiciones.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Semirrectas Bx y By.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de regla y compás.

Tabla 34. Procesos cognitivos en la tarea A4

Procesos Cognitivos	Descripción en A4
Recordar	Definición mediatriz y bisectriz como lugar geométrico.
Comprender	Interpretar que los puntos que cumplen dos condiciones: equidistar de dos puntos fijos A y B y de dos semirrectas Bx y By. Asociar las semirrectas Bx y By como los lados del ángulo dado en la figura. Considerar que el punto A es interior al ángulo.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y los puntos de la bisectriz.
Analizar	Los puntos que cumplen las dos condiciones a la vez.
Evaluar	Todos los puntos que equidistan de A y B están en la mediatriz. Todos los puntos que equidistan de Bx y By pertenecen a la bisectriz.
Crear	Trazar la mediatriz del segmento AB y la bisectriz del ángulo xBy. Determinar el punto intersección de la mediatriz con la bisectriz.

Actividad 5

Tabla 35. Competencias en la tarea A5

Competencia	Descripción en la tarea A5
Comunicar.	Interpretar la condición que cumplen los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos interiores y exteriores a una circunferencia.
Representar.	Interpretar que M es exterior a la circunferencia y que Q, A y N son interiores a la circunferencia.

Matematizar.	--
Razonar y argumentar.	Los puntos A, Q y N son interiores a la circunferencia por tanto pertenecen al círculo, no a la circunferencia. La distancia entre el centro y un punto interior a la circunferencia es menor que la distancia del centro a un punto exterior. Los puntos que equidistan de M y N son infinitos, pero los que equidistan de M y N y están en la circunferencia son sólo dos (intersección de recta con circunferencia).
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Desigualdad de distancias.
Usar herramientas matemáticas.	--

Tabla 36. *Procesos cognitivos en la tarea A5*

Procesos Cognitivos	Descripción en A5
Recordar	Definición de mediatriz y circunferencia como lugar geométrico. Puntos interiores y exteriores a la circunferencia.
Comprender	Interpretar la condición que cumplen los puntos de la mediatriz de un segmento y los puntos interiores y exteriores a una circunferencia. Interpretar que M es exterior a la circunferencia y que Q, A y N son interiores a la circunferencia.
Aplicar	La propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz. La relación de distancia entre un punto interior, exterior con el centro de la circunferencia. La intersección de una recta con una circunferencia tiene como máximo dos puntos.
Analizar	Diferenciar en cada afirmación la verdad o falsedad a partir de la proposición dada y los datos que se dan en la tarea.
Evaluar	Comprobar la verdad o falsedad de cada afirmación.
Crear	--

Actividad 6

Tabla 37. Competencias en la tarea A6

Competencia	Descripción en la tarea A6
Comunicar.	Interpretar una proposición en lenguaje matemático. Escribir la proposición en lenguaje natural.
Representar.	Interpretar la unidad como la distancia del punto B a la recta r. Trazar la recta perpendicular a r por B.
Matematizar.	--

Razonar y argumentar.	Identificar que es un conjunto de puntos del plano que cumplen con dos condiciones. Una condición es estar a 3 del punto B, en una circunferencia de centro B y radio 3. Se traza la circunferencia. Otra condición es distar 2 de la recta r, se encuentran en la unión de paralelas. Se trazan las paralelas a r. Los puntos del conjunto A son 3, una recta es secante a la circunferencia y la otra es tangente.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	--
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Distancia entre puntos y entre punto y recta. Un conjunto de puntos del plano que cumplen con dos condiciones. Distancia entre puntos, distancia entre punto y recta.
Usar herramientas matemáticas.	Uso de regla y compás.

Tabla 38. *Procesos cognitivos en la tarea A6*

Procesos Cognitivos	Descripción en A6
Recordar	Definición de circunferencia y unión de paralelas como lugar geométrico y distancia.
Comprender	Interpretar una proposición en lenguaje matemático. Escribir la proposición en lenguaje natural.
Aplicar	Interpretar la distancia entre dos puntos y entre un punto y una recta. La propiedad que cumplen los puntos de la circunferencia. La propiedad que cumplen los puntos de la unión de paralelas.
Analizar	Diferenciar los puntos de la circunferencia, los puntos de la unión de paralelas.
Evaluar	Comprobar que los puntos que cumplen con las dos condiciones son sólo tres.
Crear	Determinar las 3u a partir de la dada en el gráfico. Trazar la circunferencia de centro B y radio 3u. Trazar las paralelas a r, a 2u de distancia.

ANEXO 5. TABLAS DEL SENTIDO ESPACIAL POR TAREA

Tareas de evaluación de PISA

Compra de apartamento

Tabla 1. *Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: COMPRA APARTAMENTO*

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: COMPRA APARTAMENTO
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de rectángulo y medida directa o indirecta del área del rectángulo. Concepto de escala. Medida directa de longitudes (regla). Medida indirecta del área (fórmula).
	Propiedades de las formas Relaciones geométricas	Lados paralelos e iguales dos a dos. Paralelismo entre lados, dos a dos. Perpendicularidad entre lados consecutivos. Área como composición y descomposición. La medida de un segmento como la suma de otros dos. El largo y el ancho son las medidas de los lados.
	Ubicación y movimientos	El apartamento se puede formar como la resta de dos rectángulos o la suma de cada una de las habitaciones.
	Orientación	Localización de elementos en el mapa, el rectángulo mayor formado por largo y ancho mayor; rectángulo menor, en la esquina superior derecha, formado por largo y ancho de la esquina.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificación del rectángulo mayor y del rectángulo menor.
	Conservación de la percepción	Identificación de rectángulos, aunque incluso no estén sus lados.
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar los dos segmentos menores que sumados forman el largo e identificar los dos anchos menores que sumados forman el ancho.
	Percepción de las relaciones espaciales	La relación entre las áreas de los rectángulos para obtener el área del apartamento. Identificar los lados paralelos y los perpendiculares.
Discriminación visual	Diferenciar figuras por los elementos que suministra: rectángulo mayor y menor. División del mapa en rectángulos.	

Heladería 1

Tabla 2. Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: HELADERÍA

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: HELADERÍA
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Triángulo rectángulo, segmento y medida de segmento. Medida directa de la longitud, con la unidad de medida. Medida indirecta de la longitud, con teorema de Pitágoras.
	Propiedades de las formas	La hipotenusa de un triángulo rectángulo es un segmento. Aplicación del teorema de Pitágoras. Longitud como suma de tres partes.
	Relaciones geométricas	La distancia entre dos puntos de un segmento horizontal o vertical es igual a la medida del segmento que determinan. La medida de un segmento oblicuo es igual a la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se determina con ese par de puntos. Perpendicularidad entre segmentos.
	Ubicación y movimientos	La unión de tres segmentos consecutivos determina la longitud del mostrador. Uso de coordenadas.
	Orientación	Comprensión del mapa. Localización en el mapa de la parte externa del mostrador. Posiciones relativas de los tres segmentos: uno horizontal, uno vertical y uno oblicuo.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinación del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento oblicuo del borde del mostrador.
	Percepción figura-contexto	Identificar la unidad de medida de la baldosa. Identificación de los tres segmentos que forman el mostrador. El segmento oblicuo determina un triángulo rectángulo.
	Conservación de la percepción	Identificación que ambas figuras son rectángulos. Identificar que se conserva la unidad de medida en cualquier posición y la medida de los segmentos cuando los cambios de posición. Medir directamente los catetos sin tener las baldosas, tapadas por el mostrador.
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar que un segmento es vertical, otro es horizontal y el otro segmento es oblicuo.

Percepción de las relaciones espaciales	Identificar que la longitud del borde del mostrador es la suma de medida de los segmentos que lo componen. Identifica hipotenusa y catetos.
Discriminación visual	Diferenciar los segmentos que constituyen el borde. Formar el triángulo rectángulo. Reconocer que todas las unidades de medida son la misma en las baldosas.
Memoria visual	La forma del triángulo rectángulo en cualquier posición.

Heladería 2

Tabla 3. Componentes del sentido espacial en Pregunta 2: HELADERÍA

Componentes del sentido espacial		Pregunta 2: HELADERÍA
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de polígono y rectángulo. Áreas de polígonos, de rectángulo, trapecio y triángulo. Medida indirecta del área de un rectángulo y de un triángulo. Medida directa utilizando baldosas. Medida como descomposición de figuras.
	Propiedades de las formas	Composición y descomposición de polígonos. Un polígono se puede descomponer en rectángulos y triángulos. Área del rectángulo menos el triángulo rectángulo.
	Relaciones geométricas	El área de un polígono se puede calcular como la suma o resta de áreas de polígonos conocidos como rectángulos y triángulo rectángulo.
	Ubicación y movimientos	La unión de rectángulos y triángulo puede formar el área de servicios y mostrador.
	Orientación	El rectángulo del suelo de la heladería se lo puede descomponer en rectángulos y triángulo. Área de la entrada, se la descompone en rectángulos y triángulo o trapecio. Área de servicio y mostrador se los descompone en rectángulos y triángulos.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Trazado de rectángulos y triángulo rectángulo.
	Percepción figura-contexto	Determinación del polígono que forma el área de servicio y mostrador. Reconoce el rectángulo y el triángulo.
	Conservación de la percepción	La unidad de medida es la misma esté en la posición en la que esté.
	Percepción de la posición en el espacio	---

Percepción de las relaciones espaciales	Identificar que el área de la heladería es el área de un rectángulo menos el área del polígono que determina el área de servicio y el mostrador. Identificar hipotenusa y catetos.
Discriminación visual	Diferenciar los posibles polígonos en los que se puede dividir el suelo de la heladería. Todas las unidades de medida son la misma en las baldosas.
Memoria visual	La forma del rectángulo y del triángulo rectángulo en cualquier posición.

Heladería 3

Tabla 4. Componentes del sentido espacial en Pregunta 3: HELADERÍA

Componentes del sentido espacial		Pregunta 3: HELADERÍA
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de diámetro, círculo, rectángulo y cuadrado; distancia entre objetos y áreas. Medida indirecta del rectángulo (8x10).
	Propiedades de las formas	Un cuadrado puede circunscribir a un círculo.
	Relaciones geométricas	Figuras de tres dimensiones ocupan un espacio en el plano del suelo.
	Ubicación y movimientos	Solapamiento y distancia entre conjuntos. Posiciones de los conjuntos en el mapa. Ubicar los conjuntos en la misma línea empieza el área de mesas, cumple con estar a 0,5 del mostrador. Invarianza de la medida del conjunto por giros o traslaciones.
	Orientación	Disponer los conjuntos de acuerdo con los sistemas de referencia, con las condiciones establecidas.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Rellenar los cuadrados de 9 unidades en las condiciones establecidas.
	Percepción figura-contexto	Determinación de los cuatro cuadrados que pueden entrar en el rectángulo de la zona de mesas. Determinación de las nueve baldosas que ocupa cada conjunto (cuadrado).
	Conservación de la percepción	El área, el espacio que ocupa cada conjunto es invariante por giros o traslaciones. La medida vertical del conjunto es la misma que la horizontal (dada).
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar la posición relativa entre los conjuntos, con relación a las paredes. Identificar que el punto de partida para ubicar los conjuntos es la línea de la zona de mesas o el ángulo superior derecho o

Percepción de las relaciones espaciales	el ángulo inferior derecho. Al añadir los bordes, el conjunto son 20 cuadrados. Identificar que son cuatro los conjuntos (cuadrados) que caben en el área de mesas (rectángulo). Colocar los conjuntos en relación a los demás, sin solapamientos y con los espacios establecidos.
Discriminación visual	Distinguir los casos según se peguen al borde izquierdo o derecho.
Memoria visual	La forma del cuadrado circunscripto al círculo que contiene a la mesa con las sillas.

Vertido de petróleo

Tabla 5. Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: VERTIDO de PETRÓLEO

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: VERTIDO de PETRÓLEO
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Estimación. Área de polígonos. Escala. Cálculo de áreas por exceso y por defecto o por división en una unidad conveniente.
	Propiedades de las formas	Área como composición y descomposición.
	Relaciones geométricas	---
	Ubicación y movimientos	---
Habilidades de visualización	Orientación	Localizar los elementos en el mapa.
	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificar los polígonos en los que se puede dividir el área del vertido.
	Conservación de la percepción	Construcción del menor y mayor rectángulo.
	Percepción de la posición en el espacio	---
	Percepción de las relaciones espaciales	Medida de los lados. Perpendicularidad si utiliza rectángulos o triángulos rectángulos.
	Discriminación visual	División del vertido en polígonos.
Memoria visual	---	

Noria 1

Tabla 6. Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: LA NORIA

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: LA NORIA
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de circunferencia, distancia, diámetro, radio.
	Propiedades de las formas	El centro está a la mitad de la distancia del diámetro y a 10 m del cauce del río. Suma y resta de longitudes.

	Relaciones geométricas	El radio es la mitad del diámetro.
	Ubicación y movimientos	Ubicar el centro a la mitad de la circunferencia, pero no a la mitad de la distancia señalada.
	Orientación	Localizar los elementos en el mapa.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	---
	Conservación de la percepción	---
	Percepción de la posición en el espacio	---
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar medidas en segmentos paralelos, el radio a partir de la altura señalada.
	Discriminación visual	---
	Memoria visual	---

Noria 2

Tabla 7. Componentes del sentido espacial en Pregunta 2: LA NORIA

Componentes del sentido espacial	Pregunta 2: LA NORIA	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de ángulo, centro, radio y circunferencia. Rotación en el plano. Sentido de la rotación, antihorario. Proporcionalidad.
	Propiedades de las formas	La rotación cuyo centro es el centro de una circunferencia, transforma la circunferencia en la circunferencia: según el grado de giro, se modifican los puntos que se corresponden.
	Relaciones geométricas	Vuelta completa en una circunferencia es 360° y un cuarto de vuelta es 90°. Tiempos iguales, recorridos iguales.
	Ubicación y movimientos	Rotación 90° antihorario en 10 min, Rotación 180° antihorario en 20 min y Rotación 270° antihorario en 30 min.
	Orientación	---
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificar los puntos en la noria en cada movimiento.
	Conservación de la percepción Percepción de la posición en el espacio	En la rotación se conserva invariante la medida de la circunferencia. Identificar que el punto P se transforma en Q, en la rotación de 90° antihorario. Q se transforma en R. R se transforma en S. S se transforma en P cuando se completa una vuelta. O que el punto P se transforma en S en la rotación de 270° antihorario.

Percepción de las relaciones espaciales	Identificar que los puntos P, Q, R y S se corresponden en una Rotación de 90° antihorario. Identificar que el punto P se corresponde con S en la rotación de 270° antihoraria.
Discriminación visual	---
Memoria visual	---

Construcción con dados

Tabla 8. Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: CONSTRUCCIÓN DADOS

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: CONSTRUCCIÓN con DADOS
	Conceptos	Concepto de cubo, cuadrado. Perspectiva.
Manejo de conceptos geométricos	Propiedades de las formas	La cara superior de un cubo es un cuadrado.
	Relaciones geométricas	La posición “debajo de” es estar oculto. Los cubos de abajo en la torre, no se ven. Las caras verticales no cuentan en la vista desde arriba.
	Ubicación y movimientos Orientación	--- Localizar las caras en el dibujo, seleccionar las caras que se ven.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificar el puntaje de cada cara que se ve desde arriba.
	Conservación de la percepción	Identificar la cara que no se ve completa en uno de los dados, el 4.
	Percepción de la posición en el espacio	Situarse en la perspectiva superior, visión de los dados desde arriba.
	Percepción de las relaciones espaciales	Si un dado esta debajo de otro de la misma medida, las caras horizontales quedan ocultas y las verticales no cuentan en la perspectiva superior.
	Discriminación visual Memoria visual	--- ---

Garaje 1

Tabla 9. Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: GARAJE

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: GARAJE
	Conceptos	Concepto de prisma, rectángulo y paralelogramo. Perspectiva. Distancia relativa entre objetos.
Manejo de conceptos geométricos	Propiedades de las formas	Pentágonos, trapecios isósceles (casi rectángulos) y paralelogramos, para representar en perspectiva pentágono y rectángulos de paredes y tejado.

	Relaciones geométricas	Conservación de la distancia al cambiar el punto de vista. Paralelismo entre caras laterales, dos a dos. Perpendicularidad entre caras consecutivas laterales. Comparación de distancias en relación con el referente.
	Ubicación y movimientos	Posición relativa entre puerta y ventana, cercanía a cara de puerta, lateralidad (se ve a su izquierda).
	Orientación	Cambio de posición del garaje en las respuestas. Localizar los objetos en las distintas perspectivas. La capacidad de simetrizar la imagen visual del garaje, en las posiciones B y D y de girarlo a las posiciones A y C.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificación de posición de figura tridimensional por la posición respecto al fondo negro, pese a tratarse de una representación plana (en perspectiva, captación de la perspectiva).
	Conservación de la percepción	Identificación de las relaciones de lateralidad y cercanía entre ventana y cara de la puerta.
	Percepción de la posición en el espacio	Comprender la perspectiva desde otro punto de vista, identificación de la posición relativa con los otros elementos (fondo, cara opuesta a ventana).
	Percepción de las relaciones espaciales	Cercanía de la ventana con la puerta y lejanía de la ventana con la pared del fondo.
	Discriminación visual	Diferenciar figuras por los elementos que suministra (puerta, ventana, posición)
	Memoria visual	---

Garaje 2

Tabla 10. *Componentes del sentido espacial en Pregunta 2: GARAJE*

Componentes del sentido espacial	Pregunta 2: GARAJE
Conceptos	Triángulos rectángulos, rectángulos y altura (del techo). Medida indirecta de la longitud. Medida directa del área.
Propiedades de las formas	Teorema de Pitágoras, área del rectángulo.
Relaciones geométricas	Lados opuestos de un rectángulo son paralelos. Lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares. La altura es perpendicular a la horizontal. El lado del rectángulo del tejado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinado por dos medidas que no

Manejo de conceptos geométricos	Ubicación y movimientos	corresponden a ningún objeto físico (la mitad de la anchura del tejado y la altura del mismo)
	Orientación	--- Identificar que el rectángulo superior de la vista lateral no representa el techo. Localizar los elementos del rectángulo (del techo) en las diferentes perspectivas.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	Identificación de medidas que corresponden a objetos, como el largo del garaje se corresponde con el largo del techo. Identificación de distancias entre objetos, como los que determinan el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa al lado del tejado.
	Conservación de la percepción	Percibir la inclinación (el ancho y el largo en el techo), aunque no se vea en una de las vistas.
	Percepción de la posición en el espacio	Comprender las medidas según la perspectiva.
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar el largo del techo con el largo de la vista lateral. Identificar el ancho del techo como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Determinar un nuevo rectángulo para el techo.
	Discriminación visual	Diferenciar la altura del ancho techo. Reconocer elementos comunes en las dos perspectivas.
	Memoria visual	---

Puerta giratoria 1

Tabla 11. *Componentes del sentido espacial en Pregunta 1: PUERTA GIRATORIA*

Componentes del sentido espacial		Pregunta 1: PUERTA GIRATORIA
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Ángulos. Circunferencia, radio y diámetro. Proporcionalidad.
	Propiedades de las formas	Las tres puertas, de a dos forman ángulos iguales. El ángulo completo es 360°.
	Relaciones geométricas	Ángulos consecutivos, obtusos y ángulo completo.
	Ubicación y movimientos	Localización de los objetos en el dibujo, en las tres posiciones que se muestran, se conserva la amplitud de los sectores.
	Orientación	---
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	---
	Conservación de la percepción	Se conserva la amplitud de los sectores formados por las puertas. Percibir la circunferencia completa.
	Percepción de la posición en el espacio	Comprender las perspectivas desde arriba. Percibir que en cada representación las puertas han cambiado de posición.

Percepción de las relaciones espaciales	---
Discriminación visual	Identificar lo común entre las tres representaciones.
Memoria visual	---

Puerta giratoria 2

Tabla 12. *Componentes del sentido espacial en Pregunta 2: PUERTA GIRATORIA*

Componentes del sentido espacial	Pregunta 2: PUERTA GIRATORIA	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos geométricos	Ángulo completo, circunferencia, arcos de circunferencia, amplitud de un arco.
	Propiedades de las formas	Longitud de la circunferencia, radio, relación entre ángulo central y arco.
	Relaciones geométricas	Amplitud del sector formado por dos puertas es igual a una parte cerrada de la puerta giratoria. Las dos partes abiertas suman lo que una cerrada, son la mitad de 1/3 (parte cerrada de la puerta).
	Ubicación y movimientos	Identificar posiciones en que se puede producir circulación de aire.
Habilidades de visualización	Orientación	Asociar los tres sectores que forman las puertas con las partes abiertas y cerradas de la puerta giratoria. Capacidad para analizar el vínculo entre los sectores y las partes abiertas y cerradas.
	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	---
	Conservación de la percepción	---
	Percepción de la posición en el espacio	La parte cerrada de la puerta giratoria es igual al sector formado por dos puertas. Cada parte abierta es la mitad de la parte cerrada.
	Percepción de las relaciones espaciales	Determinar la relación entre los sectores y las partes cerradas y abiertas.
	Discriminación visual	---
Memoria visual	---	

Puerta giratoria 3

Tabla 13. *Componentes del sentido espacial en Pregunta 3: PUERTA GIRATORIA*

Componentes del sentido espacial	Pregunta 3: PUERTA GIRATORIA	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos geométricos	Rotación 360°. Sector angular. Proporcionalidad.
	Propiedades de las formas	---
	Relaciones geométricas	---
	Ubicación y movimientos	Identificar posiciones en que pueden ingresar las personas.
	Orientación	---

Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	---
	Percepción figura-contexto	---
	Conservación de la percepción	---
	Percepción de la posición en el espacio	---
	Percepción de las relaciones espaciales	---
	Discriminación visual	---
	Memoria visual	---

Tareas de evaluación de aula

Actividad 1

Tabla 14. Componentes del sentido espacial en Actividad 1

Componentes del sentido espacial	Actividad 1	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de circunferencia y bisectriz de un ángulo como lugar geométrico y de distancia.
	Propiedades de las formas	Todos los puntos de la circunferencia distan “r” del centro. Todos los puntos exteriores a la circunferencia están a una distancia mayor al radio. Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están a igual distancia de los lados del ángulo.
	Relaciones geométricas	La distancia entre A y el segmento de bisectriz interior a la circunferencia es menor a 3 cm (radio). Los puntos de la circunferencia están a 3 cm de A por tanto no van a formar parte de la solución. La semirrecta incluida en la bisectriz que se encuentren fuera de la circunferencia cumple las condiciones solicitadas. La intersección de las bisectrices con los puntos exteriores a la circunferencia cumple las condiciones solicitadas.
	Ubicación y movimientos	Posición relativa de los segmentos de las bisectrices con relación a la circunferencia.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinación de todos los puntos que cumplen con estar a más de 3cm y equidistantes de las \overline{Bx} y \overline{By} .
	Percepción figura-contexto	Considerar la semirrecta incluida en la bisectriz y exterior a la circunferencia.
	Conservación de la percepción	Reconocer la circunferencia en los tramos marcados para hallar la bisectriz.
	Percepción de la posición en el espacio	--

Percepción de las relaciones espaciales	Percibir la igualdad de distancias.
Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.
Memoria visual	--

Actividad 2

Tabla 15. Componentes del sentido espacial en Actividad 2

Componentes del sentido espacial	Actividad 2	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de distancia y medida, semiplano y ángulo. Circunferencia, bisectriz y mediatriz como lugar geométrico.
	Propiedades de las formas	Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo. Los puntos de la circunferencia distan una distancia fija del centro.
	Relaciones geométricas	B y D pertenecen a cada lado del ángulo. La distancia de CB es diferente de la distancia de CD. La distancia entre un punto interior a una circunferencia y el centro es menor que el radio. La distancia entre un punto exterior a una circunferencia y el centro es mayor que el radio.
	Ubicación y movimientos	El punto G es interior a la circunferencia de radio 4cm. El punto H es exterior a la circunferencia de radio 4cm. El punto A pertenece al semiplano de borde la mediatriz del segmento BC, que contiene a B.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	--
	Percepción figura-fondo	--
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar que G es interior y H es exterior a la circunferencia.
	Percepción de las relaciones espaciales	El punto A es interior a un semiplano de borde la mediatriz del segmento BC. Reconocer segmentos de igual longitud.
	Discriminación visual	Reconocer los puntos que están a igual, menor o mayor distancia
	Memoria visual	--

Actividad 3

Tabla 16. Componentes del sentido espacial en Actividad 3

Componentes del sentido espacial		Actividad 3
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de bisectriz como lugar geométrico y de distancia.
	Propiedades de las formas	Todos los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo. La bisectriz de un ángulo divide al plano en dos semiplanos.
	Relaciones geométricas	Los puntos buscados están más cerca de la semirrecta BA que de la BC.
	Ubicación y movimientos	Los tres puntos no alineados determinan un ángulo.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinar los lados del ángulo y la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con las condiciones establecidas.
	Percepción figura-fondo	--
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	--
	Percepción de las relaciones espaciales	Los puntos cumplen con estar a menor distancia de la semirrecta BA que de la BC. Percibir la igualdad de distancias.
	Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.
Memoria visual	--	

Actividad 4

Tabla 17. Componentes del sentido espacial en actividad 4

Componentes del sentido espacial		Actividad 4
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de circunferencia, mediatriz y bisectriz como lugar geométrico y distancia.
	Propiedades de las formas	Todos los puntos de la circunferencia distan una distancia constante del centro. Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento. Todos los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.
	Relaciones geométricas	Los puntos verdes equidistan de A y B. Los puntos azules equidistan de \overline{Bx} y \overline{By} . El punto rojo cumple con equidistar de A y B, y de \overline{Bx} y \overline{By} .
	Ubicación y movimientos	La posición del punto rojo como la intersección de dos lugares geométricos anteriores: mediatriz y bisectriz.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinar los puntos de la mediatriz, de la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con estar en la mediatriz y en la bisectriz.

Percepción figura-fondo	Considerar los puntos que son solución como intersección de la mediatriz y la bisectriz.
Conservación de la percepción	--
Percepción de la posición en el espacio	--
Percepción de las relaciones espaciales	Percibir la igualdad de distancias.
Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.
Memoria visual	--

Actividad 5

Tabla 18. Componentes del sentido espacial en Actividad 5

Componentes del sentido espacial	Actividad 5	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos geométricos	Concepto de circunferencia y mediatriz como lugar geométrico, y de distancia.
	Propiedades de las formas	Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento M y N. Todos los puntos de la circunferencia distan una distancia constante del centro. Los puntos interiores a la circunferencia distan menos que el radio del centro. Los puntos exteriores a la circunferencia distan más que el radio del centro.
	Relaciones geométricas	La distancia del centro a un punto interior es menor que a un punto exterior. La intersección de una recta (la mediatriz) y una circunferencia son dos puntos.
	Ubicación y movimientos	Los puntos N, Q y A son interiores a la circunferencia. Los puntos Q y A pertenecen a la mediatriz de MN. La intersección de la circunferencia y la mediatriz es dos puntos.
	Orientación	--
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	--
	Percepción figura-fondo	--
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar que N es interior y M es exterior a la circunferencia. Identificar que Q y A están alineados en la mediatriz del segmento MN.
	Percepción de las relaciones espaciales	Percibir la igualdad de distancias. Existen dos puntos que cumplen con equidistar de M y N y pertenecer a la circunferencia.
Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.	
Memoria visual	--	

Actividad 6

Tabla 19. Componentes del sentido espacial en Actividad 6

Componentes del sentido espacial	Actividad 6	
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Concepto de circunferencia y unión de paralelas como lugar geométrico y distancia.
	Propiedades de las formas	Todos los puntos de la circunferencia distan una distancia constante del centro. Los puntos de la unión de paralelas distan una distancia fija de una recta dada.
	Relaciones geométricas	Los puntos rojos distan 3cm de B. Los puntos verdes distan 2cm de la recta r. Los puntos azules cumplen con distar 3cm de B y 2cm de r.
	Ubicación y movimientos	Asociar la distancia entre dos puntos como el radio de una circunferencia. Asociar la distancia entre un punto y una recta a los puntos que se encuentran en una recta paralela.
	Orientación	Los puntos se encuentran en dos rectas paralelas.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	Determinar los puntos que están a 3cm de B. Determinar los puntos que están a 2cm de r. Determinar los puntos que cumplen con estar a 3cm de B y 2cm de r.
	Percepción figura-fondo	--
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	--
	Percepción de las relaciones espaciales	Percibir la igualdad de distancias. Son tres los puntos que cumplen con estar 3cm de B y 2cm de r.
	Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.
Memoria visual	--	

ANEXO 6. PROTOCOLO DE APLICACIÓN DE LAS TAREAS DE PISA

PROTOCOLO DE APLICACIÓN DE LAS TAREAS DE PISA 2012

Consideraciones para los docentes:

- Se solicita brindar a los estudiantes el cuadernillo con las ocho tareas seleccionadas.
- El tiempo de realización estipulado es de 2 horas (80') para todas las tareas.
- En el cuadernillo los alumnos deben poner su nombre y grupo.
- Se pueden aclarar dudas a los estudiantes que sean relativas a los enunciados, pero hay que intentar que sean autónomos tanto en la comprensión como en los procesos de resolución.

Consideraciones para los estudiantes antes de comenzar a trabajar en la resolución de las tareas:

- Las tareas propuestas para ser resueltas refieren a geometría.
- Forman parte de una investigación y no tienen el objetivo de evaluar el desarrollo del curso.
- Las tareas se pueden resolver en cualquier orden.
- Dejar registro en cada tarea de la resolución correspondiente.
- Está habilitado usar calculadora y útiles de geometría.

ANEXO 7. RESULTADOS EN LAS TAREAS DE EVALUACIÓN

Clasificación y codificación de los resultados de las tareas de PISA y de aula

	H1	H2	H3	N1	N2	G1	G2	P1	P2	P3	AP	PE	DA	B	M	st	ce	sh	Nota
E1	M	sh	M	M	M	B	sh	B	sh	B	B	sh	sh	4	4	0	0	5	6
E2	B	M	M	M	M	B	M	B	M	B	ce	ce	B	5	6	0	2	0	4
E3	B	M	M	M	M	B	M	B	sh	B	B	M	M	5	7	0	0	1	5
E4	B	sh	sh	B	B	B	B	B	sh	B	sh	sh	B	8	0	0	0	5	5
E5	B	M	M	B	B	B	ce	B	B	B	B	M	B	9	3	0	1	0	7
E8	ce	B	sh	B	B	B	sh	B	sh	B	sh	sh	B	7	0	0	1	5	4
E10	M	M	M	B	B	B	ce	M	M	M	B	M	sh	4	7	0	1	1	4
E11	B	st	sh	B	B	B	B	B	sh	B	sh	sh	B	8	0	1	0	4	6
E12	B	ce	sh	B	B	B	ce	B	sh	B	B	sh	B	8	0	0	2	3	6
E13	ce	M	B	B	B	B	M	B	M	M	ce	M	sh	5	5	0	2	1	7
E15	ce	M	M	M	M	B	B	B	M	M	B	M	B	5	7	0	1	0	7
E16	ce	sh	sh	B	B	B	M	B	M	B	B	sh	B	7	2	0	1	3	5
E17	ce	ce	M	M	M	B	M	M	sh	B	B	M	sh	3	6	0	2	2	5
E18	sh	M	B	B	M	B	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	5	2	0	0	6	4
E19	M	M	M	B	B	B	ce	M	M	B	M	M	B	5	7	0	1	0	1
E20	M	B	M	B	B	B	ce	B	sh	sh	B	M	B	7	3	0	1	2	7
E21	sh	sh	sh	B	M	B	B	B	M	B	B	sh	B	7	2	0	0	4	3
E23	M	M	M	B	B	B	M	M	M	B	B	sh	B	6	6	0	0	1	4
E24	M	M	M	M	B	B	M	B	M	B	M	M	B	5	8	0	0	0	3
E25	M	M	M	M	M	B	M	M	M	B	B	M	B	4	9	0	0	0	3
E27	sh	st	M	M	B	B	B	M	sh	B	B	sh	B	6	3	1	0	3	9
E28	ce	M	B	M	M	B	M	B	M	M	B	M	B	5	7	0	1	0	6
E29	M	M	M	M	B	B	M	B	sh	B	sh	sh	M	4	6	0	0	3	5
E30	B	B	B	B	B	B	B	B	sh	B	B	sh	B	11	0	0	0	2	10
E31	M	M	M	M	B	B	M	M	M	B	ce	sh	M	3	8	0	1	1	5
E32	M	ce	M	sh	M	B	B	B	sh	B	B	st	B	6	3	1	1	2	10
E33	B	M	M	M	B	B	sh	B	sh	M	ce	M	B	5	5	0	1	2	6
E34	B	B	M	sh	M	B	M	B	sh	B	ce	sh	B	6	3	0	1	3	8
E38	sh	sh	M	B	M	B	M	M	sh	M	M	sh	B	3	6	0	0	4	4
E40	B	ce	B	M	M	B	B	ce	ce	B	B	M	M	6	4	0	3	0	7
E41	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	13	0	0	0	0	7
E43	B	ce	B	B	B	B	B	B	B	B	B	ce	B	11	0	0	2	0	9
E44	B	ce	B	B	B	B	B	B	B	B	B	sh	B	11	0	0	1	1	10
E45	M	sh	sh	M	M	M	sh	M	M	B	M	sh	B	2	7	0	0	4	5
E46	B	sh	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	11	1	0	0	1	7
E47	sh	M	M	M	B	M	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	3	4	0	0	6	5
E48	M	B	M	B	B	B	sh	B	sh	B	ce	sh	B	7	2	0	1	3	11

E49	B	ce	B	B	B	B	M	B	sh	B	B	B	B	10	1	0	1	1	12
E50	M	ce	B	B	B	B	ce	M	sh	M	B	st	B	6	3	1	2	1	12
E51	B	B	ce	B	B	B	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	7	0	0	1	5	12
E52	B	B	B	M	M	B	sh	sh	sh	sh	B	M	B	5	3	0	0	4	11
E53	sh	sh	sh	B	M	B	sh	M	sh	sh	M	sh	B	3	3	0	0	7	7
E54	B	B	B	B	M	B	B	B	sh	sh	B	M	B	9	2	0	0	2	11
E55	ce	B	M	B	B	B	ce	M	sh	M	B	sh	B	6	3	0	2	2	9
E56	sh	sh	sh	sh	M	B	M	sh	sh	sh	ce	sh	B	2	2	0	1	8	3
E57	M	M	M	M	M	sh	sh	sh	sh	sh	ce	M	B	1	6	0	1	5	7
E58	sh	sh	M	M	B	B	M	sh	sh	B	M	sh	B	4	4	0	0	5	6
E59	M	M	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	M	M	B	1	5	0	0	7	4
E60	sh	M	B	M	B	B	ce	M	M	B	B	sh	B	6	4	0	1	2	9
E61	B	B	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	B	M	B	4	2	0	0	7	5
E62	M	B	B	B	B	B	ce	B	sh	M	B	B	B	9	2	0	1	1	11
E63	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	12	1	0	0	0	12
E64	ce	st	sh	sh	B	B	sh	sh	sh	M	sh	M	B	3	2	1	1	6	4
E65	B	B	M	B	M	B	M	sh	sh	B	B	M	M	6	5	0	0	2	9
E66	sh	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	M	M	B	1	3	0	0	9	4
E67	M	sh	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	ce	sh	B	1	2	0	1	9	5
E68	M	M	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	sh	M	B	1	4	0	0	8	6
E69	B	st	M	B	B	B	M	sh	sh	sh	B	sh	sh	5	2	1	0	5	12
E70	ce	sh	M	B	M	B	ce	M	M	B	B	M	B	5	5	0	2	1	7
E71	sh	sh	sh	M	M	B	sh	B	M	B	sh	sh	sh	3	3	0	0	7	6
E72	sh	M	M	sh	M	B	M	sh	sh	M	ce	M	B	2	6	0	1	4	5
E73	M	sh	M	B	B	B	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	5	2	0	0	6	7
E74	B	sh	sh	B	B	B	M	B	sh	B	B	sh	B	8	1	0	0	4	10
E75	M	B	B	B	M	B	B	B	sh	sh	B	sh	sh	7	2	0	0	4	10
E76	M	M	B	M	M	B	M	M	M	B	B	M	B	5	8	0	0	0	1
E77	M	M	sh	M	B	B	st	sh	sh	sh	B	st	B	4	3	2	0	4	7
E78	B	ce	B	B	M	B	B	B	sh	B	B	sh	sh	8	1	0	1	3	12
E81	B	sh	sh	B	M	B	M	B	sh	B	B	M	B	7	3	0	0	3	5
E82	ce	M	M	B	B	B	M	B	sh	sh	sh	sh	B	5	3	0	1	4	12
E83	B	sh	sh	B	M	B	M	B	sh	B	B	M	B	7	3	0	0	3	10
E84	B	sh	M	M	M	B	st	sh	sh	sh	sh	M	B	3	4	1	0	5	5
E85	B	M	sh	B	M	B	M	B	M	B	sh	sh	sh	5	4	0	0	4	9
E86	sh	M	M	M	B	B	sh	B	sh	B	sh	sh	B	5	3	0	0	5	3
E87	B	sh	sh	M	M	B	M	B	sh	B	B	sh	B	6	3	0	0	4	11
E88	B	sh	sh	M	B	sh	sh	sh	sh	sh	B	sh	sh	3	1	0	0	9	10
E89	B	M	B	B	B	B	B	B	M	M	B	M	B	9	4	0	0	0	8
E90	B	B	B	M	M	B	M	sh	sh	sh	M	sh	B	5	4	0	0	4	4
E91	M	sh	sh	M	M	M	M	M	sh	M	B	sh	B	2	7	0	0	4	3
E92	M	sh	sh	M	B	B	sh	M	sh	M	ce	sh	B	3	4	0	1	5	1
E93	ce	B	M	B	B	B	M	sh	sh	B	B	M	B	7	3	0	1	2	12
E94	M	M	M	B	M	B	B	B	M	B	B	sh	B	7	5	0	0	1	5
E95	M	M	sh	B	M	B	sh	B	sh	B	B	sh	B	6	3	0	0	4	6
E96	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	11	2	0	0	0	9
E97	M	M	B	M	M	B	sh	B	sh	B	B	sh	B	6	4	0	0	3	5
E98	B	M	B	M	M	B	M	M	sh	B	ce	M	B	5	6	0	1	1	8

E99	M	M	sh	M	sh	sh	sh	sh	sh	sh	M	M	B	1	5	0	0	7	2
E100	ce	B	M	B	M	B	B	M	M	B	B	M	B	7	5	0	1	0	11
E101	st	sh	M	M	B	B	M	B	sh	B	B	M	B	6	4	1	0	2	7
E102	B	M	B	M	M	B	sh	B	M	B	ce	sh	B	6	4	0	1	2	3
E103	M	M	M	M	M	B	ce	B	M	B	B	M	B	5	7	0	1	0	5
E104	B	M	B	B	M	B	B	M	sh	B	B	st	B	8	3	1	0	1	9
E105	M	sh	M	B	M	B	M	B	M	B	B	M	B	6	6	0	0	1	4
E106	B	ce	M	B	B	B	M	B	sh	B	B	ce	B	8	2	0	2	1	8
E107	M	M	B	B	M	B	M	B	sh	B	B	sh	B	7	4	0	0	2	4
E108	M	M	M	B	M	B	sh	B	sh	B	B	M	B	6	5	0	0	2	4
E109	B	M	B	M	B	B	B	B	sh	B	B	M	B	9	3	0	0	1	8
E110	sh	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	sh	M	M	sh	B	3	2	0	0	8	3
E111	B	B	M	B	M	B	M	B	sh	M	B	M	B	7	5	0	0	1	4
E112	M	sh	B	M	M	B	sh	B	M	B	B	M	B	6	5	0	0	2	5
E113	ce	M	B	B	B	B	ce	B	sh	B	B	ce	B	8	1	0	3	1	10
E114	M	M	M	B	M	B	B	B	M	B	B	ce	B	7	5	0	1	0	6
E115	M	M	B	M	M	B	M	B	sh	B	B	M	B	6	6	0	0	1	5
E116	sh	sh	sh	B	B	B	sh	sh	sh	sh	sh	sh	B	4	0	0	0	9	4
E117	M	ce	M	B	M	B	M	B	M	B	ce	M	B	5	6	0	2	0	5
E118	M	B	B	B	B	B	M	sh	sh	sh	ce	sh	M	5	3	0	1	4	9
E119	B	B	M	B	M	sh	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	5	2	0	0	6	9
E120	B	M	M	M	M	B	M	M	sh	sh	B	sh	sh	3	6	0	0	4	4
E121	M	B	M	B	B	B	sh	sh	sh	sh	M	sh	B	5	3	0	0	5	12
E122	sh	sh	M	M	M	B	M	B	M	st	sh	sh	B	3	5	1	0	4	8
E123	sh	sh	M	M	B	B	sh	B	sh	M	B	sh	B	5	3	0	0	5	11
E124	M	B	M	B	B	B	sh	sh	sh	sh	B	sh	sh	5	2	0	0	6	12
E125	sh	sh	sh	M	sh	B	M	M	sh	sh	B	sh	B	3	3	0	0	7	7
E126	sh	M	B	M	M	B	M	B	sh	B	M	sh	B	5	5	0	0	3	12
E128	B	B	M	B	B	B	sh	sh	sh	sh	B	M	B	7	2	0	0	4	10
E129	B	ce	B	sh	sh	B	M	B	sh	sh	sh	sh	B	5	1	0	1	6	9
E130	sh	sh	sh	M	B	B	M	B	sh	B	B	sh	sh	5	2	0	0	6	11
E132	M	B	M	B	B	B	sh	sh	sh	sh	sh	sh	B	5	2	0	0	6	9
E134	M	B	B	M	B	B	M	M	M	B	ce	sh	B	6	5	0	1	1	5
E136	M	sh	B	M	M	B	sh	B	M	M	B	sh	B	5	5	0	0	3	12
E138	sh	sh	sh	M	B	B	sh	sh	sh	sh	sh	sh	B	3	1	0	0	9	8
E139	sh	sh	M	B	B	B	M	B	sh	M	B	sh	M	5	4	0	0	4	8
E141	sh	sh	sh	B	M	B	sh	sh	sh	sh	B	sh	B	4	1	0	0	8	12

Tabla 2. Síntesis de sumas por tarea de PISA

	H1	H2	H3	N1	N2	G1	G2	P1	P2	P3	AP	PE	DA
B	42	27	36	63	58	110	23	65	6	67	77	4	102
M	42	44	56	47	55	3	46	24	31	19	13	45	7
st	1	4	0	0	0	0	2	0	0	1	0	4	0
ce	13	12	1	0	0	0	12	1	1	0	16	5	0
sh	23	35	29	12	9	9	39	32	84	35	16	64	13

Tabla 3. Síntesis de resultados por estudiante

Est	B	Nota	Est	B	Nota	Est	B	Nota
E1	4	6	E53	3	7	E96	11	9
E2	5	4	E54	9	11	E97	6	5
E3	5	5	E55	6	9	E98	5	8
E4	8	5	E56	2	3	E99	1	2
E5	9	7	E57	1	7	E100	7	11
E8	7	4	E58	4	6	E101	6	7
E10	4	4	E59	1	4	E102	6	3
E11	8	6	E60	6	9	E103	5	5
E12	8	6	E61	4	5	E104	8	9
E13	5	7	E62	9	11	E105	6	4
E15	5	7	E63	12	12	E106	8	8
E16	7	5	E64	3	4	E107	7	4
E17	3	5	E65	6	9	E108	6	4
E18	5	4	E66	1	4	E109	9	8
E19	5	1	E67	1	5	E110	3	3
E20	7	7	E68	1	6	E111	7	4
E21	7	3	E69	5	12	E112	6	5
E23	6	4	E70	5	7	E113	8	10
E24	5	3	E71	3	6	E114	7	6
E25	4	3	E72	2	5	E115	6	5
E27	6	9	E73	5	7	E116	4	4
E28	5	6	E74	8	10	E117	5	5
E29	4	5	E75	7	10	E118	5	9
E30	11	10	E76	5	1	E119	5	9
E31	3	5	E77	4	7	E120	3	4
E32	6	10	E78	8	12	E121	5	12
E33	5	6	E81	7	5	E122	3	8
E34	6	8	E82	5	12	E123	5	11
E38	3	4	E83	7	10	E124	5	12
E40	6	7	E84	3	5	E125	3	7
E41	13	7	E85	5	9	E126	5	12
E43	11	9	E86	5	3	E128	7	10
E44	11	10	E87	6	11	E129	5	9
E45	2	5	E88	3	10	E130	5	11
E46	11	7	E89	9	8	E132	5	9
E47	3	5	E90	5	4	E134	6	5
E48	7	11	E91	2	3	E136	5	12
E49	10	12	E92	3	1	E138	3	8
E50	6	12	E93	7	12	E139	5	8
E51	7	12	E94	7	5	E141	4	12
E52	5	11	E95	6	6			

ANEXO 8. ANÁLISIS DEL SENTIDO ESPACIAL EN TAREAS DE PISA

Tarea Heladería 1

Manejo de conceptos geométricos

Est	Conceptos				Propiedades de las formas				
	Triángulo rectángulo	Segmento	Medida de longitud	Medida directa de longitud	Medida indirecta de longitud (teorema de Pitágoras)	La hipotenusa es un segmento	Aplica el teorema de Pitágoras	Longitud como suma de tres partes	
E1	0	0	0	1	0	0	0	1	
E2	1	1	1	0	1	1	1	1	
E3	1	1	1	1	1	1	1	1	
E4	1	1	1	1	1	1	1	1	
E5	1	1	1	1	1	1	1	1	
E6	1	1	1	1	1	1	1	1	
E7	1	1	1	1	1	1	1	1	
E8	1	1	1	1	1	1	1	1	
E9	0	1	1	1	0	1	0	1	
E10	0	0	0	1	0	0	0	0	
E11	1	1	1	1	1	1	1	1	
E12	1	1	1	1	1	1	1	1	
E13	1	1	1	1	1	1	1	1	
E14	1	1	1	1	1	1	1	1	
E15	1	1	1	1	1	1	1	1	
E16	1	1	1	1	1	1	1	1	
E17	1	1	1	1	1	1	1	1	
E18	0	1	1	1	0	0	0	1	
E19	0	1	1	1	0	0	0	1	
E20	0	0	0	1	0	0	0	1	
E21	0	0	0	0	0	0	0	0	
E22	0	0	0	0	0	0	0	0	
E23	0	1	1	1	0	0	0	1	
E24	0	1	1	1	0	0	0	1	
E25	0	1	1	1	0	0	0	1	

Habilidades de visualización

Est	Coordinación ojo-motor	Percepción figura-contexto			Conservación de la percepción				
		Determina el triángulo rectángulo con el borde del mostrador	Identifica la unidad de medida de la baldosa	Identifica los tres segmentos que forman el mostrador	El segmento oblicuo determina un triángulo rectángulo	Identifica que las figuras son triángulos rectángulos	Se conserva la unidad de medida en cualquier posición	Se conserva la medida del segmento cuando cambia de posición	Mide directame nte los catetos con las baldosas tapadas
E1	0	0	1	0	0	1	1	1	
E2	1	1	1	1	1	1	1	1	
E3	1	1	1	1	1	1	1	1	
E4	1	1	1	1	1	1	1	0	
E5	1	1	1	1	1	1	1	0	
E6	1	1	1	1	1	1	1	0	
E7	1	1	1	1	1	1	1	0	
E8	1	1	1	1	1	1	1	0	
E9	0	1	1	0	0	0	0	0	
E10	0	0	1	0	0	1	0	0	
E11	1	1	1	1	1	1	1	0	
E12	1	1	1	1	1	1	1	0	
E13	1	1	1	1	1	1	1	0	
E14	1	1	1	1	1	1	1	0	
E15	1	1	1	1	1	1	1	0	
E16	1	1	1	1	1	1	1	0	
E17	1	1	1	1	1	1	1	0	
E18	0	1	1	0	0	1	1	0	
E19	0	1	1	0	0	1	1	0	
E20	0	1	1	0	0	1	1	1	
E21	0	0	0	0	0	0	0	0	
E22	0	0	0	0	0	0	0	0	
E23	0	1	1	0	0	1	1	0	
E24	0	1	1	0	0	1	1	0	
E25	0	1	1	0	0	1	1	0	

Tarea Heladería 1 – Sumas por componentes del sentido espacial

Estudiante	Conceptos						Suma Conceptos
	Triángulo rectángulo	Segmento	Medida de longitud	Medida directa de longitud (con la unidad de medida)	Medida indirecta de longitud (teorema de Pitágoras)		
E1	0	0	0	1	0	1	
E2	1	1	1	0	1	4	
E3	1	1	1	1	1	5	
E4	1	1	1	1	1	5	
E5	1	1	1	1	1	5	
E6	1	1	1	1	1	5	
E7	1	1	1	1	1	5	
E8	1	1	1	1	1	5	
E9	0	1	1	1	0	3	
E10	0	0	0	1	0	1	
E11	1	1	1	1	1	5	
E12	1	1	1	1	1	5	
E13	1	1	1	1	1	5	
E14	1	1	1	1	1	5	
E15	1	1	1	1	1	5	
E16	1	1	1	1	1	5	
E17	1	1	1	1	1	5	
E18	0	1	1	1	0	3	
E19	0	1	1	1	0	3	
E20	0	0	0	1	0	1	
E21	0	0	0	0	0	0	
E22	0	0	0	0	0	0	
E23	0	1	1	1	0	3	
E24	0	1	1	1	0	3	
E25	0	1	1	1	0	3	

Tarea Heladería 1 – Suma de manejo de conceptos geométricos

Manejo de conceptos geométricos

Estudiantes	Suma de conceptos geométricos	Suma de propiedades de las formas	Suma de relaciones geométricas	Suma de ubicación y movimiento	Suma de orientación	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS
E1	1	1	2	1	0	5
E2	4	3	3	2	3	15
E3	5	3	3	2	3	16
E4	5	3	3	2	3	16
E5	5	3	3	2	3	16
E6	5	3	3	2	3	16
E7	5	3	3	2	3	16
E8	5	3	3	2	3	16
E9	3	2	1	1	3	10
E10	1	0	1	0	2	4
E11	5	3	3	2	6	19
E12	5	3	3	2	3	16
E13	5	3	3	2	3	16
E14	5	3	3	2	3	16
E15	5	3	3	2	3	16
E16	5	3	3	2	2	15
E17	5	3	3	2	3	16
E18	3	1	1	1	3	9
E19	3	1	1	1	3	9
E20	1	1	2	1	0	5
E21	0	0	0	0	0	0
E22	0	0	0	0	0	0
E23	3	1	1	1	3	9
E24	3	1	1	1	3	9
E25	3	1	1	1	3	9

Tarea Heladería 1 – Suma total de manifestación del sentido espacial

Heladería 1				
Estudiantes	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS	SUMA DE HABILIDADES DE VISUALIZACION	SUMA DE HABILIDADES DE VISUALIZACION	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS Y HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN
E1	5	5	5	10
E2	15	17	17	32
E3	16	17	17	33
E4	16	16	16	32
E5	16	16	16	32
E6	16	16	16	32
E7	16	16	16	32
E8	16	16	16	32
E9	10	7	7	17
E10	4	7	7	11
E11	19	16	16	35
E12	16	16	16	32
E13	16	16	16	32
E14	16	16	16	32
E15	16	16	16	32
E16	15	15	15	30
E17	16	16	16	32
E18	9	10	10	19
E19	9	10	10	19
E20	5	6	6	11
E21	0	0	0	0
E22	0	0	0	0
E23	9	10	10	19
E24	9	10	10	19
E25	9	10	10	19

Suma total de manifestación del manejo de conceptos geométricos por tarea

	Compra de Apartamento	Heladería 1	Heladería 2	Heladería 3	Vertido de Petróleo
Estudiantes	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS	SUMA DE MANEJO DE CONCEPTOS
E1	14	5	0	0	0
E2	12	15	9	12	5
E3	14	16	0	0	0
E4	0	16	0	0	0
E5	14	16	7	11	5
E6	0	16	9	8	0
E7	14	16	9	9	0
E8	11	16	9	1	0
E9	0	10	0	0	0
E10	14	4	10	8	0
E11	12	19	9	0	0
E12	14	16	9	14	0
E13	6	16	3	14	0
E14	11	16	10	14	0
E15	12	16	3	11	4
E16	13	15	0	0	0
E17	13	16	9	8	0
E18	13	9	2	14	0
E19	8	9	7	0	5
E20	10	5	10	11	0
E21	12	0	0	0	4
E22	0	0	0	0	0
E23	12	9	10	8	0
E24	8	9	10	0	3
E25	10	9	9	11	0

Suma total de manifestación de habilidades de visualización por tarea

	Compra de Apartamento	Heladería 1	Heladería 2	Heladería 3	Vertido de Petróleo	
Estudian tes	SUMA DE HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA DE HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA DE HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA DE HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA DE HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	
E1	8	5	0	0	0	0
E2	9	17	10	6	6	6
E3	9	17	0	0	0	0
E4	0	16	0	0	0	0
E5	10	16	5	8	3	3
E6	0	16	7	1	0	0
E7	8	16	7	1	0	0
E8	9	16	7	0	0	0
E9	0	7	0	0	0	0
E10	10	7	4	3	0	0
E11	9	16	7	0	0	0
E12	9	16	7	12	0	0
E13	3	16	3	11	0	0
E14	9	16	8	11	0	0
E15	9	16	3	7	2	2
E16	8	15	0	0	0	0
E17	8	16	6	2	0	0
E18	8	10	1	11	0	0
E19	4	10	4	0	6	6
E20	5	6	5	6	0	0
E21	9	0	0	0	1	1
E22	0	0	0	0	0	0
E23	9	10	5	3	0	0
E24	4	10	5	0	5	5
E25	5	10	5	5	0	0

Suma total de manifestación del sentido espacial por tarea

	Compra de apartamento	Heladería 1	Heladería 2	Heladería 3	Vertido de Petróleo
Estudiantes	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRIC OS Y HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRIC OS Y HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRIC OS Y HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRIC OS Y HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN	SUMA MANEJO DE CONCEPTOS GEOMÉTRIC OS Y HABILIDADE S DE VISUALIZAC IÓN
E1	22	10	0	0	0
E2	21	32	19	18	11
E3	23	33	0	0	0
E4	0	32	0	0	0
E5	24	32	12	19	8
E6	0	32	16	9	0
E7	22	32	16	10	0
E8	20	32	16	1	0
E9	0	17	0	0	0
E10	24	11	14	11	0
E11	21	35	16	0	0
E12	23	32	16	26	0
E13	9	32	6	25	0
E14	20	32	18	25	0
E15	21	32	6	18	6
E16	21	30	0	0	0
E17	21	32	15	10	0
E18	21	19	3	25	0
E19	12	19	11	0	11
E20	15	11	15	17	0
E21	21	0	0	0	5
E22	0	0	0	0	0
E23	21	19	15	11	0
E24	12	19	15	0	8
E25	15	19	14	16	0

Suma total de manifestación del sentido espacial por tarea y estudiante

Estudiantes	AP	H1	H2	H3	PE	N1	N2	DA	G1	G2	P1	P2	P3	TOTAL	NOTA
E1	22	10	0	0	0	2	15	0	23	0	15	0	4	91	6
E2	21	32	19	18	11	11	15	16	23	0	15	12	4	197	4
E3	23	33	0	0	0	2	15	16	23	0	15	0	4	131	5
E4	0	32	0	0	0	11	19	16	23	22	15	0	4	142	5
E5	24	32	12	19	8	11	19	16	23	22	15	14	4	219	7
E6	0	32	16	9	0	11	19	0	23	0	15	4	4	133	9
E7	22	32	16	10	0	2	0	0	23	5	0	0	0	110	s/h
E8	20	32	16	1	0	11	19	16	23	14	15	0	4	171	4
E9	0	17	0	0	0	11	19	0	8	13	0	0	0	68	s/h
E10	24	11	14	11	0	11	19	0	23	5	10	11	0	139	4
E11	21	35	16	0	0	11	19	16	23	22	15	0	4	182	6
E12	23	32	16	26	0	11	19	16	23	22	15	0	4	207	6
E13	9	32	6	25	0	11	19	0	23	22	15	5	0	167	7
E14	20	32	18	25	0	11	19	16	23	22	15	0	4	205	s/h
E15	21	32	6	18	6	9	10	16	23	22	15	4	2	184	7
E16	21	30	0	0	0	11	19	16	23	10	15	4	4	153	5
E17	21	32	15	10	0	9	15	0	23	17	14	0	4	160	5
E18	21	19	3	25	0	11	15	16	23	10	0	0	0	143	4
E19	12	19	11	0	11	11	19	16	23	11	12	0	4	149	1
E20	15	11	15	17	0	11	19	16	23	22	15	0	0	164	7
E21	21	0	0	0	5	11	15	16	23	22	15	4	4	136	3
E22	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0	16	4
E23	21	19	15	11	0	11	19	16	23	10	15	5	4	169	4
E24	12	19	15	0	8	2	19	16	23	7	15	5	4	145	3
E25	15	19	14	16	0	2	15	16	23	8	0	5	4	137	3

ANEXO 9. ERRORES EN TAREAS DE PISA

1. Descripción de los errores por estudiante en cada tarea

1.1. Compra de un apartamento

Est	Errores	Síntesis	Categorías de errores
E4	s/h		
E13	Señala el largo mayor y los dos menores, y el ancho medio	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E19	Señala el largo y el ancho mayor.	Dimensiones	e1
E20	Marca el rectángulo vertical y horizontal mayor en el mapa	Dimensiones	e1
E24	Señala el largo y el ancho mayor. Señala otras medidas, pero las tacha y no hace nada con ellas.	Dimensiones	e1
E25	Marca el rectángulo vertical y horizontal mayor en el mapa	Dimensiones	e1
E29	s/h		
E31	Considera dos veces el largo mayor. Considera las cuatro de afuera.	¿?	e6
E33	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E34	37,6. Considera las 6 medidas y las suma	Área vs perímetro	e7
E38	Marca dos largos mayores, el ancho mayor y una diagonal	No se entiende	e6
E45	s/h		
E55	Marca el rectángulo vertical y horizontal mayor en el mapa	Dimensiones	e1
E56	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E57	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E58	Suma las habitaciones	Consigna	e5
E59	Considera los seis segmentos, selecciona los cuatro segmentos menores, que forman los dos más grandes.	√	
E60	Considera los cuatro segmentos menores, que forman los dos más grandes.	√	
E64	s/h		
E65	Considera los cuatro segmentos menores, que forman los dos más grandes. Considera los rectángulos horizontales.	√	
E67	Marca dos largos mayores, el ancho mayor y medio	Dimensiones	e1
E68	s/h		
E70	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho menor, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	

E71	s/h		
E72	Marca tres medidas.	Dimensiones	e1
E82	s/h		
E83	Considera los cuatro segmentos menores, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E84	s/h		
E85	s/h		
E86	s/h		
E88	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho menor, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E90	Marca dos largos mayores y dos ancho mayor	Dimensiones	e1
E92	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E95	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho medio, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E96	Considera los cuatro segmentos menores, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E98	considera 5 medidas, las cuatro de la resta y el largo medio también.	Dimensiones	e1
E99	Suma las habitaciones. Halla con error las superficies, mide mal los lados de las habitaciones.	Consigna	e5
E102	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E103	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho medio, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E105	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho medio, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E110	Comienza a medir las dimensiones de las habitaciones	Consigna	e5
E111	Considera los dos segmentos mayores, el largo medio y ancho menor, puede calcular el área no se sabe en qué rectángulos piensa.	√	
E116	s/h		
E117	Marca dos largos mayores, el ancho mayor y medio	Dimensiones	e1
E118	s/h		
E121	Marca dos largos mayores y dos anchos mayores	Dimensiones	e1
E122	s/h		
E126	Marca dos largos mayores y dos anchos mayores	Dimensiones	e1
E129	s/h		
E130	86,84 m ² . Error en medir el largo mayor, 10,7, en vez de 9,7 y el largo medio, 6,4 en vez de 5,4.	√	
E132	s/h		
E134	Considera el largo y los dos segmentos que suman el largo y el ancho mayor. Con esos segmentos no logra calcular el área.	Segmentos y Dimensiones	e9 e1
E138	s/h		
E139	76,52 m. Error al considerar el rectángulo de la esquina inferior para restar al rectángulo mayor. Hace los cálculos.	√	
E141			

1.2. Heladería 1

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	Considera el área del mostrador	área	e7
E3	4,5 m.	sin registro	
E8	Error en el teorema de Pitágoras	Pitágoras	e2
E15	responde en número de baldosas	Área	e7
E16	6,25 m. Confunde lo que le da Pitágoras con el largo total del mostrador.	Longitud	e9
E17	5 m. Mezcla unidades, metros y baldosas, dice $2\text{ m} + 3\text{ baldosas} = 5\text{ metros}$. Además, Pitágoras con error, multiplica las distancias al cuadrado, en vez de sumarlas)	Unidad y Pitágoras	e10 e2
E18	No concluye	Longitud	e9
E19	$8 \times 0,5 = 4\text{m}$ en el segmento oblicuo cuenta baldosas como en los segmentos vertical y horizontal.	Unidad y medida directa	e10
E20	$8 \times 0,5 \times 0,5 = 2\text{m cuadrados}$	Unidad, medida directa y Área	e10 e7
E21	s/h		
E23	$8 \times 0,5 = 4\text{m}$ en el segmento oblicuo cuenta baldosas como en los segmentos vertical y horizontal.	Unidad y medida directa	e10
E24	$8 \times 0,5 = 4\text{m}$ en el segmento oblicuo cuenta baldosas como en los segmentos vertical y horizontal.	Unidad y medida directa	e10
E25	4 m, 8 cuadrados	Unidad y medida directa	e10
E27	No concluye	Longitud	e9
E28	5,5m. Error, coloca un nuevo borde , agranda las dimensiones del mostrador, pero es consecuente en el cálculo	Enunciado	e5 - e8
E29	3,5 m. Le adjudica al largo del mostrador 7 cuadrados que multiplica por $0,5 = 3,5\text{ m}$.	Unidad y medida directa	e10
E30			
E31	3 m. Le adjudica al mostrador 6 baldosas. Cuenta baldosas de adentro del mostrador .	Unidad y longitud y parte externa del mostrador ¿?	e10 e9 e5 e8
E32	5,5 m porque cuenta como exterior lo que cubre el ancho del mostrador. No estaría del todo mal.	√	
E33	4,5 m cuenta 9 baldosas $\times 0,5 = 4,5$. Trabaja con todo el mostrador .	Unidad, Longitud y Enunciado o Sentido espacial ¿parte	e10 e9 e5 e8

		externa del mostrador?	
E38	s/h		
E45	Considera el área como 8 baldosas. $8 \times 0,5 \times 0,5 = 2m$	Unidad y Área	e10 e7
E46	4,45 m. Hace una escala propia, 1cm - 0,5m. El segmento oblicuo le da 2,45 m	√	
E47	No concluye	Longitud	e9
E48	4 m, 8 cuadrados	Unidad y medida directa	e10 e7
E50	No atiende la consigna. Responde 1 m porque hay espacio suficiente en el medio para agregar otro borde .	Enunciado	e5 - e8
E52	4,4 m. Error mide en centímetros el lado oblicuo del mostrador y le da 4,8. Dice 2cm es 1m, entonces 4,8cm serán 2,4m.	√	
E53	s/h		
E55	5 m. Error al hacer Pitágoras, multiplica en vez de sumar.	Pitágoras	e2
E56	s/h		
E57	$3m = 0,5 \times 6$. Adjudica 6 cuadrados al mostrador. Se estima que toma la zona interior del mostrador .	Enunciado o sentido espacial ¿?	e5 - e8
E58	No concluye	Longitud	e9
E59	s/h		
E60	s/h		
E62	4m. Error en el segmento oblicuo, le asigna 4 baldosas.	Unidad y medida directa	e10 e7
E64	5 m. Error al hacer Pitágoras, multiplica en vez de sumar.	Pitágoras	e2
E66	No concluye	Longitud	e9
E67	9cm en su escala, pero no lo pasa a metros	Medida directa - Conversión	e10
E68	Entiende que debe construir otro mostrador y lo hace proporcional, como los segmentos horizontales y verticales aumentan 0,25, asume que el oblicuo también. Por tanto $1,25 + 2,75 + 1,25 = 5,25$	Enunciado	e5 - e8
E70	Error en la medida de uno de los catetos, si bien en el mapa lo tiene bien.	Medida directa - Conversión	e10
E71	s/h		
E72	Estuvo intentando hacer un nuevo mostrador , como entendieron varios.	Enunciado	e5 - e8
E73	8,7cm en su escala, pero no lo pasa a metros. Hace regla de tres $2c - 1,9cm$ de borde, entonces 4,9cm de borde son 5,2cuadrados.	Medida directa - Conversión	e10
E75	$14,25 = 1 + 12,25 + 1$. Error al calcular la hipotenusa, no la calcula a través de un despeje 10 que asume que es igual a $2 + 1,5$ al cuadrado, es decir 3,5 al cuadrado.	Pitágoras	e2
E76	2,5m	sin registro	

E77	3,5 m= $0,5 \times 4 + 0,5 \times 3$. Le adjudica al segmento oblicuo 3 baldosas (las dibuja encima del mostrador).	Unidad y medida directa	e10 e7
E82	4,1 m. Error al considerar la medida de los catetos, los considera iguales, miden 1,5. Forma el triángulo por debajo del mostrador.	Medida directa	e7
E84	Toma como unidad de medida la baldosa y traslada la medida en el segmento oblicuo del mostrador y entra 5 veces exactas. Por tanto, llega al resultado, a 4,5 m.	Medida directa o lo tomamos como bueno	
E86	s/h		
E87	le de 4,5m. Mide en centímetros y lo transforma a metros.	Medida directa o lo tomamos como bueno	
E91	s/h		
E92	s/h		
E94	Ubica un nuevo mostrador , más grande y cubre los costados del mostrador. Hace $1,5 + 1,5 + 2,8$.	Enunciado	e5 - e8
E95	No adjudica bien la medida de los catetos. Toma que dos baldosas son 0,5.	Medida directa - Conversión	e10
E99	9m. Considera parte externa del mostrador todo el perímetro . Cuenta las baldosas, en la parte oblicua cuenta de a una, cuando hay segmentos que son oblicuos y diferentes. Suma 8 partes.	Unidad, Longitud y Enunciado o Sentido espacial ¿parte externa del mostrador?	e10 e9 e5
E100	6,5m. Error en el segmento vertical y horizontal, le adjudica 2m.	Medida directa - Conversión	e10
E101	Tiene error, no registré cuál		
E102	le de 4,5m. Mide en centímetros y lo transforma a metros.	Medida directa o lo tomamos como bueno	
E103	Ubica un nuevo mostrador , más grande. Cuenta 8 baldosas $0,5 = 4m$	Enunciado	e5 - e8
E105	$5 m = 2 + 3$. Identifica triángulos rectángulos, pero no hace Pitágoras, es un poco a ojo.	Medida directa a ojo	e10
E106	Llega a 4,5m, pero según sus cálculos debiera ser 5,5m. Se construye otro mostrador	Enunciado	e5 - e8
E107	Ubica un nuevo mostrador , más grande. Cuenta 6 baldosas $0,5 + 0,7 = 3,7m$. Cuenta diagonales de baldosa como 0,5 baldosa.	Enunciado	e5 - e8
E108	Ubica un nuevo mostrador muy a mano alzada, más grande. Cuenta 10 baldosas $0,5 = 5 m$.	Enunciado	e5 - e8
E110	s/h		
E112	4m. Es un poco a ojo la medida del segmento oblicuo.	Medida directa a ojo	e10

E113	Hace bien Pitágoras. Luego plantea $2,5+1 \times 2=6,5$ esa es su respuesta. Hace todo bien, menos la suma final.	Error operatorio	e3
E114	cuenta 10 cuadrados, pero no los pasa a metros.	Unidad y medida directa	e10 e7
E115	No se entiende qué piensa. No responde a la consigna.	Consigna	e5
E116	2,5 solo el segmento oblicuo	Longitud	e9
E117	No atiende la consigna. Responde que necesita un borde de $2 \text{m} \times 1,5 \text{m}$	Consigna	e5
E118	$4 \text{m} = 8 \times 0,5$. Adjudica 8 baldosas.	Unidad y medida directa	e10 e7
E121	6,25 m. Error de cálculo, plantea bien Pitágoras, pero le da 4,25? Y le suma 2.	Error operatorio	e3
E122	s/h		
E123	s/h		
E124	$4 \text{m} = 0,5 + 0,5 + 0,5 + \dots$. Adjudica 8 baldosas.	Unidad y medida directa	e10 e7
E125	s/h		
E126	No responde, pero hay registro.	No responde	e4
E130	s/h		
E132	$4 \text{m} = 0,5 + 0,5 + 0,5 \times 4$ (aprox) $+ 0,5 + 0,5$ Adjudica 8 baldosas.	Unidad y medida directa	e10 e7
E134	$4 \text{m} = 8 \times 0,5$. Adjudica 8 baldosas.	Unidad y medida directa	e10 e7
E138	s/h		
E139	s/h		
E141	s/h		

1.3. Heladería 2

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	s/h		
E3	35 m. Hay un inicio de registro de conteo de cuadrados en el área de la entrada. Pero no hay un conteo total, tampoco cálculo del área de mesas. Sólo aparece ese número 35 metros.	Medida directa y unidad de medida.	e10
E4	s/h		
E5	considera el área de servicio y mostrador como un único trapecio rectángulo, y no como la suma de un trapecio y un rectángulo)	Visualización - Discriminación visual.	e9
E10	125,25 metros. Confunde cuadrados con metros.	Conversión	e10

E11	lo deja sin suma, le daría 30 m	Relaciones geométricas	e9
E12	error de cálculo	Cálculo	e3
E13	error al comprender la consigna, calcula el área de toda la heladería , no de la zona que se quiere poner revestimiento.	Interpretación de la consigna	e5
E15	error al comprender la consigna, calcula el área de toda la heladería , no de la zona que se quiere poner revestimiento.	Interpretación de la consigna	e5
E16	s/h		
E17	error por usar el largo del mostrador como área del triángulo rectángulo.	Área vs Perímetro	e7
E18	19,5 m, suma el perímetro de la heladería sin contar la zona de servicio y mostrador.	Perímetro	e7
E19	137,5 m	Sin registro	
E20			
E21	s/h		
E23	64,5 m. Error en el conteo de baldosas alrededor del mostrador. Error cuando pasa de baldosas a metros cuadrados, solo multiplica por 0,5 en vez de multiplicar 0,25.	Unidad, Medida directa y unidad de medida y conversión	e10
E24	65 m. Error en el conteo de baldosas alrededor del mostrador. Error cuando pasa de baldosas a metros cuadrados, solo multiplica por 0,5 en vez de multiplicar 0,25.	Unidad, Medida directa y unidad de medida y conversión	e10
E25	42 m cuadrados, 20 del área de mesas +22 de la zona de entrada que no se sabe cómo calcula. Hay cálculos del rectángulo de la zona de la entrada $2,5 \times 3,5 = 8,75$, pero no lo usa.	Medida directa vs medida indirecta	e10
E27	No logra calcular el área de la zona de entrada que está entre el área de servicio y mostrador y el área de mesas.	Descomposición total	e9
E28	34,5 m cuadrados (pareciera que calcula el área de todo el suelo de la heladería, eso sería 37,5 m)	Interpretación de la consigna	e5
E29	cuenta 115 cuadrados y los numera, saca los que están cerca del mostrador y los que contienen la palabra mostrador.	Medida directa	e10
E31	adjudica 2 metros a cada baldosa que está entre el mostrador y la pared, son $9 \times 2 = 18$ m.	Medida indirecta y unidad de medida	e2
E32	30,25 m cuadrados. Tiene error de medidas, en la entrada adjudica a 6 cuadrados, 2,5 m. Forma un rectángulo de 6×5 cuadrados que le da 6,25 m. Extiende el rectángulo del área de mesas hasta el mostrador, reduce el área de la entrada a un rectángulo y un triángulo	Unidad de medida	e10

E33	37,5 m calcula el área de toda la heladería	Interpretación de la consigna	e5
E38	s/h		
E40	126 m cuadrados. Error en usar baldosas como metros. $126 \times 0,25 = 31,5$ m cuadrados que es lo que corresponde.	Unidad de medida	e10
E43	33. Error en el área del triángulo no la divide entre 2.	Área de triángulo	e2
E44	32,75 m cuadrados. Error cuando calcula el área del rectángulo finito entre el mostrador y el área de mesas, lo tomo como 2,5 que debiera ser $2,5 \times 0,5 = 1,25$ m	Unidad de medida	e10
E45	s/h		
E46	s/h		
E47	8,75 m. Errores en contar baldosas, adjudica a toda la heladería 10×14 y mide 10×15 . Cada medida la multiplica por 0,25 en vez de por 0,5, sería al área que debiera multiplicar por 0,25 y no a las longitudes. Calcula el área de toda la heladería sin excluir mostrador y servicios.	Interpretación de la consigna. Unidad de medida	e5 e10
E48	31 m cuadrados. Separa en dos rectángulos y considera los cuatro cuadrados completos que forman parte del triángulo, pero no considera el triángulo ni el área que no se representa por una baldosa completa.	Descomposición total	e9
E49	33,25 m. Hace el área total menos el área del mostrador. Tiene error en el cálculo del área del mostrador. No aparecen los polígonos en los que descompone, por el cálculo de área descompone en un trapecio y en un triángulo, cosa que no es posible. Podría ser un trapecio y un rectángulo.	Unidad de medida. Descomposición del área de servicio y mostrador	e10 e9
E50	30 m. Error no cuenta la superficie del triángulo. Calcula dos rectángulos y nada más. Otro error es la medida, metros cuadrados.	Unidad de medida y descomposición	e10 e9
E52	31,44. Error en el cálculo del área del triángulo, toma como base la hipotenusa y aproxima la altura, según lo que mide. No reconoce el triángulo como rectángulo.	Área de triángulo. No triángulo rectángulo.	e2 e1
E53	s/h		
E56	s/h		
E57	27 m. Tiene error al calcular el área del mostrador, lo toma como un rectángulo y además determina mal una de las dimensiones, $3,5 \times 3$, debiera de ser $2,5 \times 3$.	Área de mostrador	e2
E58	s/h		
E59	s/h		
E60	llega a 126 cuadrados. El error es que no multiplica por 0,25, sólo divide entre dos. Para llegar a los 126 hace $15 \times 5 = 75$ y cuenta a mano 51 cuadrados	Unidad de medida	e10
E62	31,09 m. Error en el cálculo del área del triángulo rectángulo, en la medida de los catetos, le adjudica 3,5 (el horizontal) y 2,5 al vertical. Parece que suma los respectivos trozos del mostrador.	Área del triángulo	e2
E64	Aclaración: divide en 10 rectángulos, por renglón y el triángulo	No responde	e4

E65	32m cuadrados. Error surge al calcular el área del triángulo, toma como base la hipotenusa y calcula con error la altura. Para calcular la altura forma otro triángulo con varios supuestos equívocos.	Área de triángulo. No triángulo rectángulo.	e2 e1
E66	63 es el área.	Sin registro	
E67	s/h		
E68	No suma el total. Tiene error porque saca el nuevo mostrador que forma.	Descomposición total	e9
E69	No concluye. Le falta calcular el área del triángulo.	Descomposición total	e9
E70	s/h		
E71	s/h		
E72	Hace $139-22=117$. Luego $117 \times 0,5$ al cuadrado = $27,25$. Error en el conteo de las baldosas, tanto para el total como para las correspondientes al área de servicio y mostrador.	Medida directa	e10
E73	s/h		
E74	s/h		
E76	$35m=70 \times 0,5$ Error considera el rectángulo de la entrada con el mostrador y área de servicio.	Unidad de medida. Descomposición total	e10 e9
E77	No logra calcular el área de servicio y mostrador. Por tanto, no llega a una respuesta en concreto, pero lo que piensa es el área total menos el área de servicio y mostrador.	Área de mostrador y servicio	e2
E78	$26,25=37,5-11,25$. Error al calcular el área del mostrador y servicio, hace el largo del mostrador por el ancho, considera el ancho la dimensión vertical y el largo del mostrador hallado antes, es decir $4,5 \times 2,5=11,25m$.	Área de mostrador y servicio	e2
E81	No concluye. Determina los polígonos que constituyen el suelo de la heladería, dos rectángulos, un triángulo y le falta determinar el rectángulo finito entre el mostrador y el área de mesas, ahí queda confundido, porque arriba mide 4,0 y abajo 4,5 y no sigue. Calcula el área de mesas, 20 m cuadrados.	Descomposición total	e9
E82	Construye un rectángulo en la zona de la entrada, calcula su área y no continúa.	Descomposición parcial	e9
E83	Calcula áreas, pero no termina. Mezcla unidades, usa metros y baldosas en el área de mesas, obtiene 40. En el área de la entrada, calcula el área de un rectángulo 35 baldosas, construye el triángulo, le da las dimensiones y deja todo ahí.	Descomposición total, unidad de medida	e9 e10
E84	s/h		
E85	33 m cuadrados. Error al calcular el área alrededor del mostrador.	Descomposición área cerca del mostrador	e9
E86	17,5. Calcula el área de la zona de entrada y mostrador. El rectángulo total.	No excluye el área de servicio y mostrador	e5
E87	Comienzo de conteo de baldosas para determinar el área.	Medida directa	e10

E88	s/h		
E89	63 es el área. Le faltó multiplicar nuevamente por 0,5 dado que es área. Calcula todo correctamente con las baldosas. El error está al pasar a los metros, multiplica por 0,5	Unidad de medida	e10
E91	s/h		
E92	s/h		
E94	Tiene varios errores. Trabaja áreas con baldosas y cuando pasa a metros, solo multiplica por 0,5 en vez de 0,25. Toma un rectángulo $5 \times 15 = 90$. $90 \times 0,5 = 45$. Toma otro rectángulo como la mitad de este, asume 45 baldosas y no se da cuenta que no puede la mitad de 15 baldosas. Otro rectángulo $6 \times 0,5$, no es correcto, sería $5 \times 0,5$. Le falta el triángulo rectángulo.	Unidad de medida. Descomposición total	e10 e9
E95	Tiene muchos errores. Entre ellos no calcula el área del triángulo y del rectángulo finito. Toma 5 baldosas como 2,25 m eso lo lleva a error de otra área.	Descomposición área cerca del mostrador	e9
E97	error de cálculo en el área de servicio y mostrador, le da 5 m en vez de 6	Error de cálculo	e3
E98	126 cm cuadrados. No trabaja con cm sino con las baldosas y no pasa a los metros cuadrados. Faltó multiplicar $126 \times 0,25 = 31,5$	Unidad de medida	e10
E99	Divide el suelo de la heladería en franjas horizontales, en rectángulos horizontales, que dejan de ser rectángulos en la zona del mostrador	Descomposición total	e9
E101	s/h		
E102	30 m. Error no cuenta la superficie del triángulo. Calcula dos rectángulos y nada más. Otro error es la medida, metros cuadrados.	Unidad de medida y descomposición total	e10 e9
E103	28,875 m. Error cuenta la superficie de un triángulo rectángulo más pequeño por el nuevo mostrador que hace. Las superficies las calcula en baldosas y multiplica por 0,25 al final y aclara por qué	Área de servicio y mostrador y nuevo mostrador	e2 e5
E104	Solo calcula el área de servicio y mostrador. Lee por la mitad la consigna.	Solo área de servicio y mostrador	e5
E105	Divide el suelo de la heladería en cuadrados de 5×5 baldosas, le halla el área 6,25 m cuadrados, pero no le resulta en los cuadrados donde queda el mostrador y el área de servicio.	Descomposición total	e9
E106	33,75 m. Error en calcular el área del mostrador. Lo calcula como un triángulo $(2,5 \times 3) / 2$.	Área de servicio y mostrador	e2
E107	29,5 m. Error en calcular el área del suelo de la heladería sin el área del nuevo mostrador, el antiguo y el área de servicio.	Área de servicio y mostrador y nuevo mostrador	e2 e5
E108	$150 - 24 = 126 // 126 \times 0,5 = 63$, debía de hacer $126 \times 0,25 = 31,5$.	Unidad de medida	e10
E109	37,5 m calcula el área de toda la heladería	Interpretación consigna	e5

E110	s/h		
E112	s/h		
E113	61,5 m cuadrados. Hace bien el área del triángulo, trabaja con las medidas en metros. El área de los dos rectángulos las calcula con baldosas, cuando pasa a metros, divide entre 2, debía dividir entre 4.	Unidad de medida	e10
E114	Hace $10 \times 10 - 5 \times 5 = 75$.	Unidad de medida y Descomposición total	e10 e9
E115	Hace el área total utilizando baldosas, pero multiplica por dos $10 \times 15 \times 2$	Unidad de medida. Interpretación de consigna	e10 e5
E116	Llega a contar 30 metros cuadrados. No logra contar el resto que le queda, es decir 1,5 m cuadrados. Identifica que 4 baldosas son 1 m cuadrado. Divide todo el suelo de la heladería en cuadrados o rectángulos de 4 baldosas.	Descomposición total, falta triángulo.	e9 e1
E117	30 m. Error no cuenta la superficie del triángulo. Calcula dos rectángulos y nada más.	Descomposición total, falta triángulo.	e9 e1
E120	12,75 m cuadrados. Solo considera la zona de la entrada. No considera el área de mesas.	Descomposición total (solo entrada)	e9
E122	calcula el área de mesas con baldosas $10 \times 8 = 80$	Descomposición total (solo área de mesas)	e9
E123	s/h		
E125	s/h		
E126	39m cuadrados. Calcula el área total y le suma el área del triángulo rectángulo. Pareciera no comprender lo que hace.	Descomposición total con poco sentido	e9
E129	33 m cuadrados. Error al calcular el área del triángulo, no lo divide entre 2.	Área de triángulo	e2
E130	s/h		
E136	78,45 m. Error porque el área de la entrada la deja en baldosas, 70 baldosas a eso le resta el área del mostrador y servicio que calcula con error, 11,05 m (2,55, estimo área del triángulo + 8,5 área de los dos rectángulos) y le suma el área de mesas que la hace bien (20 m)	Unidad de medida. Área de servicio y mostrador	e10 e2
E138	s/h		
E139	s/h		
E141	Cancela lo que hace, pero piensa bien. Supongo que no se acuerda del área del triángulo. Calcula el área del rectángulo de la entrada y del finito.	Descomposición total. Área de triángulo.	e9 e2

1.4. Heladería 3

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	10 No hay registro	Sin registro	
E2	2 considera la separación del área de mesas con la entrada como una pared. Hace 10 cuadrados x 4 metros.	Interpretación de mapa	e8
E3	23 es la respuesta	sin registro	
E4	s/h		
E5	2 es su respuesta (corresponde a la resolución gráfica) y 6 fue una primera respuesta a partir de resolución algebraica)	Interpretación de mapa	e8
E8	Algo hace, no dejo registro del error	¿?	
E10	10 conjuntos. Hace un cálculo algebraico, considera el área del conjunto como 1,5 por 4 =6 m y le suma 0,5 x 4 = 2, se supone lo que se debe distanciar entre cada conjunto, eso le da 8 m y el área de mesas le había dado 80 m por eso le da 10 conjuntos	Área vs Perímetro	e7
E11	s/h		
E15	2 considera la separación del área de mesas con la entrada como una pared	Interpretación de mapa	e8
E16	s/h		
E17	12 es su respuesta	sin registro	
E18			
E19	45	sin registro	
E20	2 considera la separación del área de mesas con la entrada como una pared	Interpretación de mapa	e8
E21	s/h		
E23	3 adjudica 6 baldosas a cada conjunto. Deja 0,5 de la línea divisoria como si fuese pared.	Interpretación de mapa y del área conjunto	e8 e2
E24	35		
E25	12 le adjudica a un conjunto si sola baldosa. Considera la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa y del área conjunto	e8 e2
E27	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E29	30 pareciera que asigna un círculo a cuatro baldosas	Enunciado y área del conjunto	e5 e2
E31	distingue dos respuestas. 3 mesas si están en posición horizontal (4x3) en el área de mesas. 6 mesas si están en posición vertical 3x4.	Área del conjunto	e2

E32	1 error asume 1,5m como radio del espacio del conjunto de la mesa	Interpretar el conjunto y su área	e8 e2
E33	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E34	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E38	8 conjuntos que no son los dados ocupan 3 baldosas y tienen diferente forma. Además, considera la línea divisoria como pared.	Área del conjunto	e2
E45	s/h		
E46	responde 4 pero no hay registro, no se sabe qué pensó	sin registro	
E47	2 error supone la línea divisoria como pared. Usa 5 baldosas para cada conjunto, en forma de cruz cuadrada, pero considera el cuadrado al que pertenece.	Interpretación de mapa y del área conjunto	e8 e2
E48	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E51	5 es su respuesta algebraica, su error es considerar el radio de 1 cm, eso significa que está considerando 16 baldosas y no 20 como debería de ser para atender todas las distancias. Solo logra colocar 4 geoméricamente. Restringe el área total, considerando 0,5 de las paredes.	Cálculo algebraico	e3
E53	s/h		
E55	2 error deja un espacio de más en la línea divisoria.	Interpretación de mapa	e8
E56	s/h		
E57	8 conjuntos que no son los dados ocupan 3 baldosas horizontales.	Área del conjunto	e2
E58	72	sin registro	
E59	48	sin registro	
E61	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E64	s/h		
E65	2 error supone la línea divisoria como pared	Interpretación de mapa	e8
E66	s/h		
E67	9. Error de considerar el dato 1,5 metros como 1,5 cm eso equivale a una baldosa y media. Por tanto, entran 9 conjuntos, dejando 0,5 cm entre ellas.	Unidad de medida	e10
E68	2 error supone la línea divisoria como pared. Pero en el mapa dibuja 3 conjuntos pegados, tendría espacio para haber dibujado el cuarto, pero no lo hace. Se supone que se da cuenta que no estaba respetando la distancia entre ellos. Por eso se supone que concluye que solo entran 2.	Interpretación de mapa	e8
E69	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E70	5 error al considerar los conjuntos de 3 baldosas horizontales	Área del conjunto	e2
E71	s/h		

E72	16. Error en la dimensión del conjunto, 1 baldosa por conjunto.	Área del conjunto	e2
E73	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E74	s/h		
E75			
E76	1 Error asume la mesa central como 4 baldosas, cada conjunto le lleva 16 baldosas. Asume la línea divisoria como pared.	Área del conjunto	e2
E77	s/h		
E81	s/h		
E82	11 conjuntos que no son los dados ocupan 3 baldosas verticales y ubica también en la zona de la entrada. Comienza a ubicar separado de la pared de la entrada.	Enunciado y área del conjunto	e5 e2
E83	s/h		
E84	3 error supone la línea divisoria como pared. Usa 5 baldosas para cada conjunto, en forma de cruz cuadrada.	Interpretación de mapa y del área conjunto	e8 e2
E85	s/h		
E86	9	sin registro	
E87	s/h		
E88	Resuelve algebraicamente. Determina el área de mesas, 20 m cuadrados y determina el área de cada conjunto, 2,25. Plantea una división $2,25/20$, debiera ser al revés, además que no está considerando el retiro de las paredes y la separación entre los conjuntos. Abandona cuando los quiere considerar, tiene subrayado los datos.	Cálculo algebraico	e3
E91	s/h		
E92	1 error asume la mesa central como 4 baldosas, cada conjunto le lleva 16 baldosas. Asume la línea divisoria como pared. Quiere ubicar dos pero no respetaría la distancia de las paredes.	Área del conjunto	e2
E93	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E94	3 no se sabe por qué, ubica bien los conjuntos, no ve que puede poner 4.	No ve, figura-contexto	e1
E95	s/h		
E96	5 habilita la zona de la entrada, ubica una mesa más ahí.	Enunciado	e5
E97	5	sin registro	
E98	5 habilita la zona de la entrada, ubica una mesa más ahí.	Enunciado	e5
E99	s/h		
E100	6	sin registro	
E101	6. Habilita la zona de entrada para ubicar mesas. Comienza a ubicar desde la pared de la entrada y no termina de ubicarlas, pareciera que estima que entran 6, porque además ubica una línea horizontal de 3 baldosas de longitud.	Enunciado	e5
E102	5 habilita la zona de la entrada, ubica una mesa más ahí.	Enunciado	e5

E103	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E104	5 habilita la zona de la entrada, ubica una mesa más ahí.	Enunciado	e5
E105	13 habilita la zona de la entrada y no respeta la distancia de las paredes y entre los conjuntos. Hace marcas que respetan las 9 baldosas por conjunto, pero según las marcas no serían 13, serían 12 conjuntos.	Enunciado	e5
E106	Escribe 6. Pero dibuja 4.		
E108	8 error considera que los conjuntos ocupan 3 baldosas horizontales.	Área del conjunto	e2
E109	5 habilita la zona de la entrada, ubica una mesa más ahí.	Enunciado	e5
E110	s/h		
E111	9 no considera el límite del área de mesas, las lleva hasta el mostrador y no considera la distancia entre la pared y entre ellas.	Enunciado	e5
E114	16. Adjudica a cada conjunto una baldosa y habilita parte de la entrada.	Enunciado y área del conjunto	e5 e2
E116	s/h		
E117	16	sin registro	
E119	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E120	27	sin registro	
E121	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E122	s/h		
E123	6 adjudica 6 baldosas a cada conjunto.	Área del conjunto	e2
E124	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E125	s/h		
E128	2 pero no hay ningún registro de lo que piensa.	sin registro	
E130	s/h		
E132	2 error supone la línea divisoria como pared.	Interpretación de mapa	e8
E136	24 adjudica a cada conjunto una baldosa. Hace la separación de las paredes, de la línea divisoria y considera la separación entre todos los conjuntos.	Área del conjunto	e2
E138	s/h		
E139	6 mesas	sin registro	
E141	s/h		

1.5. Vertido de petróleo

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	s/h		
E2	3640 km cuadrados. Sólo construye un rectángulo exterior	Por Exceso	e9
E3	3780 km cuadrados	Por Exceso	e9

E4	s/h		
E5	2826 km cuadrados. Circunferencia de radio 30 km	√	
E8	s/h		
E10	3640	Por Exceso	e9
E11	s/h		
E12	s/h		
E13	3640	Por Exceso	e9
E15	19 km cuadrados. Circunferencia de radio 2,5 cm	Unidad de medida. Por defecto	e10 e9
E16	s/h		
E17	3780 km cuadrados	sin registro	
E18	s/h		
E19	420 km cuadrados. Error en escala multiplicó por 10, tenía que multiplicar por 100. Un rectángulo exterior de 7x6.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E20	3420 km cuadrados	sin registro	
E21	Marca largo y ancho de todo el vertido.	No continúa	e6
E23	s/h		
E24	110 km ² . Error al calcular área, hace suma de lados y multiplica por 10	Unidad de medida, área de rectángulo. Por exceso.	e10 e2 e9
E25	3640	Por Exceso	e9
E27	s/h		
E28	36,9. No pasa a km, lo deja en cm. Área de un rectángulo con todo el largo del vertido. El largo y el ancho no los traza perpendiculares.	Por Exceso. Unidad de medida. Área de rectángulo	e9 e10 e2
E29	s/h		
E30	s/h		
E31	s/h		
E32	55x63=3465 km cuadrados. Sólo construye un rectángulo exterior	Por exceso	e9
E33	380 km ² . Multiplica por 10 en vez de por 100. Arma un rectángulo y un cuadrado para la parte menor del vertido.	Unidad de medida. Por exceso.	e10 e9
E34	s/h		
E38	s/h		
E40	35=5x7. No pasa a km estas distancias, pero otras que no usa sí.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E41	2700 km cuadrados. Sólo construye un rectángulo exterior que abarca el vertido mayor.	Por exceso. Error de cálculo	e9 e3

E43	3400=55x63	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E44	s/h		
E45	s/h		
E46	283,5 km ²	sin registro	
E47	s/h		
E48	s/h		
E49	2500=25x100. Cuadrícula el vertido 6x5 y cuenta 25 cuadrados de la grilla y completa algunos a ojo, multiplica por 100	√	
E50	33=5,5x6	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E51	s/h		
E52	3575=65x55	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E53	s/h		
E54	32,5=6,5x5 usa como km.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E55	s/h		
E56	s/h		
E57	450,5=8,5x5,3x10. Error en escala multiplicó por 10, tenía que multiplicar por 100. Un rectángulo exterior de 8,5x5,3.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E58	solo construye el rectángulo que contiene al vertido completo.	No continúa	e6
E59	6,5	sin registro	
E60	solo construye el rectángulo que contiene el área mayor del vertido.	No continúa	e6
E61	120	sin registro	
E62	2600=65x40. Se construye un único rectángulo que busca compensar áreas negras y blancas. No es exterior, ni interior al vertido.	√	
E63	2874 construye un rectángulo exterior y le va restando triángulos rectángulos.	√	
E64	392	sin registro	
E65	36=6x6	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E66	1354,24. Hace el área de un rectángulo y eso lo eleva al cuadrado. El rectángulo 8x4,6=36,8	Área de rectángulo	e2
E67	s/h		
E68	Parte del rectángulo que contiene al vertido completo. Tiene error en los lados, 18cmx6,5cm, 180kmx60,5km	Por exceso. Unidad de medida	e9 e10
E69	s/h		
E70	80	sin registro	

E71	s/h		
E72	toma la distancia de tierra al vertido. No hace lo que se le solicita.	No entiende consigna	e5
E73	solo construye el rectángulo que contiene el área mayor del vertido.	No continúa	e6
E74	s/h		
E75	s/h		
E76	320. Con error al multiplicar 80×40 y quiere calcular el área menor del vertido, pero abandona la idea.	Error de cálculo. Por exceso	e3 e9
E77	$4400 = 55 \times 80$. Construye un rectángulo exterior al vertido completo.	Por exceso	e9
E78	solo construye el rectángulo que contiene el área mayor del vertido.	No continúa	e6
E81	40	sin registro	
E82	s/h		
E83	373,5. multiplica $8,3 \times 4,5 = 37,35$. Esto lo multiplica por 10, debía ser por 100. Sería el área del vertido completo.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E84	200	sin registro	
E85	s/h		
E86	s/h		
E87	s/h		
E88	s/h		
E89	$3055 = 65 \times 47$ Traza un paralelogramo, no traza un rectángulo. Ubica en la parte mayor del vertido, deja fuera el hilo menor.	Por exceso	e9
E90	s/h		
E91	s/h		
E92	s/h		
E93	$320 = 80 \times 40$ Con error al multiplicar	Error de cálculo. Por exceso	e3 e9
E94	solo construye el rectángulo que contiene el área mayor del vertido.	No continúa	e6
E95	s/h		
E96	$46,65 = 8,3 \times 5,5$ Construye un rectángulo que contiene todo el vertido.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E97	s/h		
E98	$45,1 = 8,2 \times 5,5$ Construye un rectángulo que contiene todo el vertido.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E99	$8900 = 89 \times 100$. Traza un cuadrilátero que contiene parte del vertido. Suma los anchos, suma los largos y multiplica los resultados de las sumas.	Por exceso	e9
E100	4510	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9

E101	4510	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E102	Señala un largo que abarca todo el vertido y un posible ancho que va hasta la orilla.	No continúa	e6
E103	4510=55x82. Construye un rectángulo exterior al vertido completo.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E104	Construye un rectángulo exterior y le va restando triángulos rectángulos y rectángulos. No llega a calcular.	No continúa	e6
E105	3300=53x63. Construye un rectángulo exterior al vertido mayor.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E106	26. Cuadricula el vertido 6x5 y cuenta 26 cuadrados de la grilla y completa algunos a ojo y no multiplica por 100, le deja así.	Unidad de medida	e10
E107	s/h		
E108	4675=55x85. Construye un rectángulo exterior al vertido completo.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E109	4400=55x80. Construye un rectángulo exterior al vertido completo.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E110	s/h		
E111	2914	sin registro	
E112	3000=50x60. Construye un rectángulo exterior al vertido mayor.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E113	3390=1290+1890+210. Se construye dos rectángulos y un triángulo rectángulo, exteriores al vertido.	Unidad de medida. Descomposición por exceso	e10 e9
E114	Divide el vertido en 6 rectángulos. Trabaja en cm y no termina.	No continúa	e6
E115	4510=55x82. Construye un rectángulo exterior al vertido completo.	Unidad de medida. Por exceso	e10 e9
E116	s/h		
E117	22	sin registro	
E118	s/h		
E119	s/h		
E120	s/h		
E121	s/h		
E122	s/h		
E123	s/h		
E124	s/h		
E125	s/h		
E126	s/h		

E128	65 km, largo del rectángulo que traza.	Área vs Longitud	e7
E129	s/h		
E130	s/h		
E132	s/h		
E134	s/h		
E136	s/h		
E138	s/h		
E139	s/h		
E141	No hay respuesta. Indica 65 km desde donde está el petrolero a tierra. Divide el vertido en óvalos que podrían representar circunferencias, 2 cfas grandes y 4 pequeñas.	No continúa	e6

1.6.Noria 1

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	Error 75m mitad de 150	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E3	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E15	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E17	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E24	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E25	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E27	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E28	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E29	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E31	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E32	No responde porque no asocia M como el centro de la noria.	Consigna	e5
E33	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E34	No responde porque no asocia M como el centro de la noria.	Consigna	e5
E40	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E45	160 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E47	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8

E52	82, 5 m. Error es que hace una escala, 6cm son 150 m, 3,3cm le corresponden 82,5 m.	Interpretación de consigna y mapa	e5 e8
E56	s/h		
E57	150 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E58	160m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E59	s/h		
E60	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E61	s/h		
E64	s/h		
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E71	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E72	s/h		
E76	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E77	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E84	140 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E86	85m. Se supone que es la mitad más 10...	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e8 e5
E87	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E88	85 m. $150:2=75$ // $75+10=85$	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e8 e5
E90	150 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E91	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E92	150 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E97	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E98	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E99	3,3m	No interpreta datos	e5
E101	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8

E102	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E103	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E109	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E110	s/h		
E112	35 m (creo que hace su escala, 1cm=10m)	No interpreta datos	e5
E115	85 m. $150:2=75// 75+10=85$	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e8 e5
E120	150 m	Centro de cfa Interpretación	e2 e8
E122	65 m. $150:2=75// 75-10=65$	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e5 e8
E123	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E125	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8
E126	85 m.	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e5 e8
E129	s/h		
E130	10m. Error responde a cuántos metros del río está la noria, no el centro M.	Consigna	e5
E134	70 m	Estar sobre e interpretación	e5 e8
E136	85 m. $150:2=75// 75+10=85$	Diámetro, estar sobre e Interpretación	e2 e5 e8
E138	75 m	Diámetro e Interpretación	e2 e8

1.7. Noria 2

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	Considera mal la ubicación de P, no lo considera como el punto más cercano al río, lo el inmediato antihorario. Mientras que S sí lo considera bien, en el lugar que le corresponde. Por tanto después de 30 minutos Juan se encuentra entre S y P, sería en el punto que le sigue a S en sentido antihorario.	√	e8

E2	Error al considerar mal la ubicación de P, no lo considera como el punto más cercano al río, 10 el inmediato antihorario. Mientras que S sí lo considera bien, en el lugar que le corresponde. Por tanto después de 30 minutos Juan se encuentra entre S y P, sería en el punto que le sigue a S en sentido antihorario.	√	e8
E3	Erro al considerar la ubicación de P.	√	e8
E15	Ubica entre S y P, cuenta 25 puntos en la noria, son 24. Hace 25/40 lo que giraría en 1 minuto, le da 0,625, debería darle 0,6 y lo multiplica por 30, le dio 18,75 puntos, debería darle 18 puntos eso le hubiera coincidido con S, así le dio otro punto más.	Conteo puntos	e3
E17	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E18	Entre S y P	Sin registro	e6
E21	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E25	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E28	Entre S y P, no hay registro de donde ubica P y R.	Sin registro	e6
E32	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E34	Entre R y S (error porque coloca S, M y Q en una misma línea que no es la que pasa por el centro de la noria, a esos puntos no le asigna puntos de la noria.	Posición	e1
E38	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E40	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente)	√	e8
E45	Entre R y S	Sin registro	e6
E52	Entre R y S	Sin registro	e6
E54	Entre R y S. El error está en que cuenta a P para contar los 18 puntos en 30 min.	Incluye posición inicial	e3
E56	s/h		
E57	s/h		
E59	s/h		
E61	s/h		
E65	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E70	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E71	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E72	Entre R y S	Sin registro	e6
E75	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E76	Entre R y S. Cuenta 14 puntos, que no sé de dónde saca.	Rotación	e1
E78	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E81	Entre R y S	Sin registro	e6
E83	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E84	Entre S y P	Sin registro	e6
E85	Entre S y P	Sin registro	e6
E87	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E90	Entre R y S	Sin registro	e6

E91	Entre S y P	Sin registro	e6
E94	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E95	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E97	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E98	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E99	s/h		
E100	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E102	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E103	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E104	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E105	Entre R y S	Sin registro	e6
E107	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E108	Entre Ry S. Adjudica 4 o 5 puntos a 10 minutos. Por eso le queda entre R y S. pero no alcanza a dar la vuelta en 40.	Rotación	e1
E110	s/h		
E111	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E112	Entre R y S	Sin registro	e6
E114	Entre S y P	Sin registro	e6
E115	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E117	Entre R y S	Sin registro	e6
E119	Entre S y P	Sin registro	e6
E120	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E122	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E125	s/h		
E126	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8
E129	s/h		
E141	Entre S y P ubica mal P, en el punto siguiente.	√	e8

1.8.Una construcción con dados

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	s/h		
E10	s/h		
E13	s/h		
E17	s/h		
E29	16. Error la cara semi oculta, suma los puntos que se ven, sin darse cuenta de que corresponde a la cara del 4.	Cara oculta	e1
E31	52. Suma todo lo que se ve, la cara semi oculta la toma como 3 en vez de 4.	Cara oculta. Suma todo	e1 e8
E40	7	sin registro	
E54	No suma, pone 5,2,5,1,4	Consigna	e5
E65	53. Suma todas las caras visibles. No tiene error en la cara del 4 (suma 3)	Suma todo	e8
E69	s/h		
E71	s/h		
E75	s/h		
E78	s/h		

E85	s/h		
E88	s/h		
E118	22	sin registro	
E120	s/h		
E124	s/h		
E130	s/h		
E139	s/h		

1.9.Garaje 1

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E45	Selecciona D. No advierte que el pentágono de adelante está la puerta y en el que selecciona es solo pared. Ubica todo el garaje en la misma posición, no advierte la orientación.	Orientación o percepción figura contexto	e1 e8
E47	Selecciona D. No advierte que el pentágono de adelante está la puerta y en el que selecciona es solo pared. Ubica todo el garaje en la misma posición, no advierte la orientación.	Orientación o percepción figura contexto	e1 e8
E57	s/h		
E59	s/h		
E61	s/h		
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E88	s/h		
E91	Selecciona D. No advierte que el pentágono de adelante está la puerta y en el que selecciona es solo pared. Ubica todo el garaje en la misma posición, no advierte la orientación.	Orientación o percepción figura contexto	e1 e8
E99	s/h		
E119	s/h		

1.10.Garaje 2

Est	Errores	Síntesis	Categoría
E1	s/h		
E2	5,40 m	Sin registro	
E3	suma medidas, no da un resultado, deja cálculos planteados que no tienen que ver, que aparentan sumas de mediadas que se presentan en la vista frontal y en la vista lateral)	Estrategia inconducente	e6
E5	Error en el cálculo final le queda 12 por raíz de 29 y es 12 por raíz de 7,25	Cálculo	e3
E8	No dejo registro de su error	¿?	
E10	17 metros. $2,5 \times 2 = 5 + 6 \times 2 = 12$, suma medidas que multiplica por dos)	Área vs longitud	e7

E16	No concluye, tiene error en las medidas cuando aplica Pitágoras, plantea bien, luego copia mal medidas. No vincula con el largo del garaje, resuelve el ancho)	Medidas. Largo	e10
E17	Errores, mal Pitágoras, multiplica en vez de sumar. Se crea un triángulo rectángulo en la vista frontal en las dos aguas, el perímetro de ese triángulo lo multiplica por los 6 de largo)	Pitágoras. Área vs longitud	e2 e7
E18	No concluye.		e4
E19	30 m. Error de tomar el ancho del techo como 2,50m	Medidas. Ancho	e10 e1
E20	falta multiplicar por dos	Dos secciones	e8
E23	15 m. Error de tomar el ancho del techo como 2,50m. Otro error es que no multiplica por dos.	Medidas. Ancho y dos secciones	e10 e1 e8
E24	14 m. Dice el área es 6 x1 pero después los suma 6+1=7 y lo multiplica x2 =14.	Medidas. Área	e10 e2
E25	12 m. $6 \times (1+1) = 12$	Medidas. Área	e10 e2
E28	87 m cuadrados. El error surge de usar como hipotenusa 7,25 no le hace la raíz cuadrada.	Cálculo	e3
E29	6,25 m	Sin registro	
E31	$5 \text{ m} = 2,5 \times 2$	Área vs longitud	e7
E33	s/h		
E34	Inicia bien, calcula la hipotenusa correspondiente al ancho del tejado y cancela ese trabajo. Considera un triángulo en la vista frontal, hace el área de ese triángulo. Le da 2 m cuadrados.	Medidas. Todas	e10 e1
E38	30 m cuadrados. Hace largo, de la vista lateral, por ancho, de la vista frontal, $6 \times 5 = 30$.	Medidas. Ancho	e10 e1
E45	s/h		
E47	s/h		
E48	s/h		
E49	$5 \text{ m} = 5 \times 1$	Unidad. Medidas: ancho y largo	e10 e1
E50	Hace todo bien, plantea raíz cuadrada de $7,25 \times 6 \times 2$ y luego hace mal las cuentas.	Cálculo	e3
E51	s/h		
E52	s/h		
E53	s/h		
E55	30 metros cuadrados. Tiene error en Pitágoras, multiplica en vez de sumar.	Pitágoras.	e2
E56	$5 \text{ m} = 2,5 \times 2 \times 1$	Unidad. Medidas: ancho y largo	e10 e1
E57	s/h		
E58	$15 \text{ m} = ((1 \times 2,5) / 2) \times 6$	volumen	e7

E59	s/h		
E60	$30m=2,5 \times 6 \times 2$	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e1
E61	s/h		
E62	87 m cuadrados. El error surge de Pitágoras, no pone la hipotenusa al cuadrado, por tanto, usar como hipotenusa 7,25.	Pitágoras	e2
E64	s/h		
E65	5 m cuadrados. Error en no considerar el rectángulo. Considera el triángulo de las dos aguas de la vista frontal.	Unidad. Medidas: ancho y largo	e10 e1
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E69	12 metros. Error, toma el rectángulo de la vista lateral.	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e1
E71	s/h		
E72	44,25 m al cuadrado. Suma distancias al cuadrado: $2,50+1+1+6$. Considera todas las medidas que aparecen en la vista frontal y lateral. Eleva al cuadrado porque son dos...	Unidad. Medidas Todas. Doble	e10 e1 e8
E73	s/h		
E74	$15m = 2,5 \times 6 // ((1 \times 2,5) / 2) \times 2 = 2,5 // 1 \times 6 = 6$	Unidad. Medidas: ancho y largo	e10 e1
E76	$36m = 1 \times 5 \times 6$. Varios errores, suma $1+5$. Además de no interpretar los datos en forma correcta.	Unidad. Medida. Ancho	e10 e1
E77	Incompleto su razonamiento. Halla el ancho y lo multiplica por dos, no vincula con el largo.	Medida. Largo	e1
E81	$30m = 2,5 \times 2 \times 6$	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e1
E82	14,5 m. Incompleto su razonamiento. Halla el ancho con error y lo multiplica por dos, no vincula con el largo.	Largo y error cálculo	e1 e3
E83	$30m = 2,5 \times 6 \times 2$	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e1
E84	Halla solo el ancho.	Medida Largo. Área	e1 e2
E85	15m cuadrados $= 2,5 \times 6$	Volumen. Dos secciones	e7 e8
E86	s/h		

		Unidad. Nuevo rectángulo y dos secciones	
E87	2,5 m. Considera el triángulo de las dos aguas de la vista frontal.		e10 e8
E88	s/h		
E90	Halla el ancho, no vincula con el largo. Hace otros cálculos inconducentes.	Medida. Largo	e1
E91	Multiplica medidas sin mucho criterio. Lo único bien es que el largo es 6m.	Medidas ancho. Dos secciones	e1 e8
E92	s/h		
E93	30m=2,5x6x2	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e1
E95	s/h		
E97	s/h		
E98	2,5 m. Considera el triángulo de las dos aguas de la vista frontal.	Unidad. Nuevo rectángulo y dos secciones	e10 e8
E99	s/h		
E101	2,5m=1x2,5 todo mal.	Unidad. Nuevo rectángulo y dos secciones	e10 e8
E102	s/h		
E103	28,8=6x2,4x2 Asume que la parte inclinada mide 2,4 y se construye los dos rectángulos de 6x2,4 cada uno.	Unidad Medidas: ancho	e10 e1
E105	Halla bien el ancho, no lo vincula con el largo. Luego hace Pitágoras, pero con las dimensiones multiplicadas por 2, muy mal.	Medidas ancho.	e1
E106	27,5 m cuadrados. No logra armar el rectángulo vinculando las dos dimensiones que identifica y calcula. Las vincula por separado. Su error es considerar la base del techo como 6x5. Eso descoloca el resto.	única vista del techo	e8
E107	5 m. Considera el rectángulo de las dos aguas de la vista frontal.	Unidad. Medidas: ancho y largo	e10 e1
E108	s/h		
E110	s/h		
E111	15 m cúbicos. Muchos errores.	volumen	e7
E112	s/h		
E113	16,16. Le falta multiplicar por 2.	Dos secciones	e8
E115	2,5+2,5=500 m cuadrados. Mágicamente	Unidad Nuevo rectángulo	e10 e8

E116	s/h		
E117	20m cuadrados	Sin registro	
E118	17 m	Sin registro	
E119	s/h		
E120	12 m cuadrados	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e8
E121	s/h		
E122	12m=5+1+6	Área vs longitud	e7
E123	s/h		
E124	s/h		
E125	15m cuadrados=2,5x6. En realidad, es volumen, hace el área del triángulo por 6. El error surge de ver la inclinación, algo tienen que hacer con la inclinación.	volumen	e7
E126	15m cuadrados=2,5x6. En realidad, es volumen, hace el área del triángulo por 6. El error surge de ver la inclinación, algo tienen que hacer con la inclinación.	volumen	e7
E128	s/h		
E129	25 m cuadrados. 30m=5x6//2,5x1x2=5//30-5=25	Medida: ancho.	e8
E130	30m=5x6	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e8
E132	s/h		
E134	30m=2,5x6x2	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e8
E136	12m=6x1x2	Unidad. Medidas: ancho.	e10 e8
E138	s/h		
E139	120m=6x10x2 Además de todos los errores, asume el 1,0 como 10	Unidad. Medidas: ancho. Interpretación de cifras	e10 e8 e3
E141	s/h		

1.11. Puerta giratoria 1

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E10	responde 240	Unidad. Consigna.	e5
E17	122°	√	
E18	s/h		

E19	180°	sin registro	
E23	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E25	240°	Consigna	e5
E27	59° (lo mide mal con el semicírculo)	Medida directa	e10
E31	540°=90x6	Percepción y consigna	e2 - e5
E38	121° aprox.	√	
E40	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E45	57°	sin registro	
E47	s/h		
E50	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E51	s/h		
E52	s/h		
E53	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E55	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E56	s/h		
E57	s/h		
E58	s/h		
E59	s/h		
E60	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	consigna	e5
E61	s/h		
E64	s/h		
E65	s/h		
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E69	s/h		
E70	270°	sin registro	
E71	120 error porque el ángulo completo lo considera 180 y otro error es que considera dos sectores de la puerta, no dos puestas.	Ángulo completo y consigna	e2 - e5
E72	s/h		
E73	s/h		
E76	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E77	s/h		
E84	s/h		
E88	s/h		
E90	s/h		
E91	45°	sin registro	

E92	90°	sin registro	
E93	s/h		
E96	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E98	95° Se enreda en sus propios cálculos. Tiene claro el ángulo recto. Divide en 9 arcos más o menos iguales el ángulo de 90° y así contar cuántos entran en la abertura de dos puertas. Pero se confunde en su propio razonamiento.	No se entiende el razonamiento	
E99	s/h		
E100	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E104	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E116	s/h		
E118	s/h		
E119	s/h		
E120	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E121	s/h		
E124	s/h		
E125	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta. Además, entre cada para de hojas, en una de las representaciones pone 120, 120, 120.	Consigna	e5
E128	s/h		
E132	s/h		
E134	240° error al interpretar la consigna en vez de dos hojas de la puerta responde a dos sectores de la puerta.	Consigna	e5
E138	s/h		
E141	s/h		

1.12. Puerta giratoria 2

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E1	s/h		
E2	60 cm (estimo que dividió 120 entre 2, establece bien el vínculo entre la parte cerrada y abierta de la puerta, no vincula con la longitud de la circunferencia)	medida ángulo vs longitud de arco	e10
E3	s/h		
E4	s/h		
E8	s/h		
E10	33.3 cm (considera la longitud de la circunferencia como 200 cm, con la medida del diámetro, eso lo divide entre 3 =66,7 y eso lo divide entre 2 =33,3 sería lo correspondiente a la parte abierta)	longitud cfa y diámetro	e7
E11	s/h		
E12	s/h		

E13	60 cm	medida ángulo vs longitud de arco	e10
E16	100 cm (como si la amplitud del arco coincidiera con la medida del radio)	distancia vs longitud de arco	e7
E17	s/h		
E18	s/h		
E19	50 cm	Percepción de arcos iguales. Longitud de cfa y diámetro.	e8 e7
E20	s/h		
E21	133,3 cm (se supone que hace $200/3=66.6666 // 66.6 \times 2=133.3$)	longitud cfa y diámetro y consigna	e7 e4
E23	100 cm (como si la amplitud del arco coincidiera con la medida del radio)	distancia vs longitud de arco	e7
E24	100 cm (como si la amplitud del arco coincidiera con la medida del radio)	distancia vs longitud de arco	e7
E25	100 cm (divide el diámetro en cuatro y dos trozos se corresponden con la abertura de la puerta.	distancia vs longitud de arco	e7
E27	s/h		
E28	50 cm	Percepción de arcos iguales. Longitud de cfa y diámetro.	e8 e7
E29	s/h		
E30	s/h		
E31	180	sin registro	
E32	s/h		
E33	s/h		
E34	s/h		
E38	s/h		
E43	¿no dice un número. Dice circunferencia dividido 6.	√	
E44	s/h		
E45	3,1 cm	sin registro	
E47	s/h		
E48	s/h		
E49	s/h		
E50	s/h		

E51	s/h		
E52	s/h		
E53	s/h		
E54	s/h		
E55	s/h		
E56	s/h		
E57	s/h		
E58	s/h		
E59	s/h		
E60	67=200:3. Error al considerar la amplitud de la circunferencia como 200. Otro error es considerar que la parte abierta es igual que la cerrada.	longitud cfa y diámetro. Percepción de arcos iguales	e7 e8
E61	s/h		
E62	s/h		
E63	200 cm (como si la amplitud del arco coincidiera con la medida del diámetro)	sin registro	
E64	s/h		
E65	s/h		
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E69	s/h		
E70	50 cm	Percepción de arcos iguales. Longitud de cfa y diámetro.	e8 e7
E71	133 cm	longitud cfa y diámetro y consigna	e7 e4
E72	s/h		
E73	s/h		
E74	s/h		
E75	s/h		
E76	100 cm (como si la amplitud del arco coincidiera con la medida del radio)	distancia vs longitud de arco	e7
E77	s/h		
E78	s/h		
E81	s/h		
E82	s/h		
E83	s/h		
E84	s/h		
E85	Raíz cuadrada de 20000=141, 42cm. Error, aplica Pitágoras, en un triángulo que tiene catetos de medida 100 cm, asumo que es el radio.	distancia vs longitud de arco	e7

E86	s/h		
E87	s/h		
E88	s/h		
E89	66. Podría haber pensado en 200:3. Error al considerar la amplitud de la circunferencia como 200. Otro error es considerar que la parte abierta es igual que la cerrada.	longitud cfa y diámetro. Percepción de arcos iguales	e7 e8
E90	s/h		
E91	s/h		
E92	s/h		
E93	s/h		
E94	75 cm	sin registro	
E95	s/h		
E97	s/h		
E98	s/h		
E99	s/h		
E100	100 cm =200-100	distancia vs longitud de arco	e7
E101	100 cm =200-100	distancia vs longitud de arco	e7
E102	100 cm =200-100	distancia vs longitud de arco	e7
E103	50 cm =200:4	Percepción de arcos iguales. Longitud de cfa y diámetro.	e8 e7
E104	s/h		
E105	s/h		
E106	s/h		
E107	s/h		
E108	s/h		
E109	s/h		
E110	s/h		
E111	s/h		
E112	66. Podría haber pensado en 200:3. Error al considerar la amplitud de la circunferencia como 200. Otro error es considerar que la parte abierta es igual que la cerrada.	longitud cfa y diámetro. Percepción de arcos iguales	e7 e8
E113	s/h		
E114	282cm. Aplica Pitágoras en un triángulo obtusángulo de 120° e isósceles de 100cm los lados iguales.	distancia vs longitud de arco. Consigna	e7 e4

E115	s/h		
E116	s/h		
E117	100=50x2	Percepción de arcos iguales. Longitud de cfa y diámetro.	e8 e7
E118	s/h		
E119	s/h		
E120	s/h		
E121	s/h		
E122	Hace 2m/3	longitud cfa y diámetro	e7
E123	s/h		
E124	s/h		
E125	s/h		
E126	s/h		
E128	s/h		
E129	s/h		
E130	s/h		
E132	s/h		
E134	67=200:3. Error al considerar la amplitud de la circunferencia como 200. Otro error es considerar que la parte abierta es igual que la cerrada.	longitud cfa y diámetro. Percepción de arcos iguales	e7 e8
E136	s/h		
E138	s/h		
E139	s/h		
E141	s/h		

1.13. Puerta giratoria 3

Est	Errores	Síntesis	Categorías
E10	180 es lo que marca	Condición	e8
E13	responde 60 y lo tacha	Condición	e8
E15	algebriza demasiado, queda enredado	Operatorio	e3
E18	s/h		
E20	s/h		
E28	240	Condición	e8
E33	60	Condición	e8
E34			
E38	180	Condición	e8
E47	s/h		
E50	240, considera 2 personas en cada vuelta, faltó multiplicar por los 3 sectores.	Condición	e8

E51	s/h		
E52	s/h		
E53	s/h		
E54	s/h		
E55	180 faltó multiplicar por 4 vueltas en un minuto.	Condición	e8
E56	s/h		
E57	s/h		
E59	s/h		
E61	s/h		
E62	240, considera 2 personas en cada vuelta, faltó multiplicar por los 3 sectores.	Condición	e8
E64	180, El error surge de considerar 1 minuto - 4 vueltas - 6 personas. Por tanto, en 4 vueltas considera 6 personas.	Condición	e8
E66	s/h		
E67	s/h		
E68	s/h		
E69	s/h		
E72	180, El error surge de considerar 1 minuto - 6 personas. Por tanto 0 considera las 4 vueltas por minuto.	Condición	e8
E73	s/h		
E75	s/h		
E77	s/h		
E82	s/h		
E84	s/h		
E88	s/h		
E89	240, considera 2 personas en cada vuelta, faltó multiplicar por los 3 sectores. Hace 4x30x2	Condición	e8
E90	s/h		
E91	180, El error surge de considerar 1 minuto - 6 personas. Por tanto no considera las 4 vueltas por minuto.	Condición	e8
E92	60	Condición	e8
E99	s/h		
E110	240, considera 2 personas en cada vuelta, faltó multiplicar por los 3 sectores. Hace 4x30x2	Condición	e8
E111	240, considera 8 personas por minuto, faltó multiplicar por los 3 sectores.	Condición	e8
E116	s/h		
E118	s/h		
E119	s/h		
E120	s/h		
E121	s/h		
E122	No concluye. Llega 4x30=120 vueltas. Logra ver que en cada vuelta van 6 personas.	No concluye	e4
E123	180	Operatorio	e3
E124	s/h		
E125	s/h		
E128	s/h		

E129	s/h		
E132	s/h		
E136	s/h		
E138	s/h		
E139	180. Hace 60x3, tiene error en su forma de pensar. Llega a 120 vueltas en 30 minutos, bien. Luego hace 1 vuelta- 2 personas, en 120 vueltas-60 personas. Esos 60 x3	Operatorio	e3
E141	s/h		

2. Agrupación y división de los errores en las tareas

Compra de apartamento

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
16	68	0	Dificultad de la suma de segmentos da otro segmento e9	No se entiende el razonamiento, marca una diagonal e6	e1	19
	13		Dificultad identificar dimensiones necesarias para el cálculo de área e1	Dificultad para atender a la consigna e5	e5	3
	81		Confusión entre área y perímetro e7		e6	2
					e7	1
					e9	7

Heladería 1

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
18	40	2	Confusión entre área y longitud e7	Comprensión e interpretación del enunciado del problema: agregar un nuevo borde (11) e5	e2	5
	6		Dificultades para establecer la propiedad y aplicar el teorema de Pitágoras e2	Error operatorio e3	e3	2
	46		Confusión en la unidad de medida: lado de baldosa, segmento oblicuo de una baldosa, metros, centímetros e10	Hace algo o no se entiende qué piensa, pero no responde e4	e4	1
			Dificultad en establecer la longitud, como suma de partes o como medida indirecta e9		e5	15
			Error en tomar la medida directa o en la conversión de la escala: del mostrador o de alguno de los segmentos que lo componen e10		e7	13

			Dificultad para interpretar la parte externa del mostrador: todo el mostrador como exterior al área de servicio o la parte interna del mostrador como el primer borde exterior al área de servicio e8		e8	12
					e9	10
					e10	26

Heladería 2

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
28	24	2	Dificultad con la unidad de medida de área (m ²) y/o con la conversión (cuadrados a m ²) (conceptos geométricos) e10	Error de cálculo e3	e1	4
			Dificultad con el uso de la medida directa (conceptos geométricos) e2	Interpretación de la consigna (toda la heladería) e5	e2	14
			Dificultad de visualizar (discriminación visual), identificar el área de servicio y mostrador como un trapecio e9	Deja registros inconclusos y no responde e4	e3	2
			Error en el concepto de área de triángulo e2		e4	1
			Dificultad para calcular el área total como suma de las partes (Relaciones geométricas) e9		e5	11
			Confusión entre área y perímetro o longitud e7		e7	2
			Confusión entre uso de medida directa e indirecta e10		e9	25
			Dificultad en descomponer en polígonos convenientes toda la superficie (triángulo y rectángulo finito) o el área de mostrador y servicio. (¿Discriminación visual?) e9		e10	26
			Dificultad para visualizar el triángulo rectángulo e1			

Heladería 3

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
-----------	-------------	--------------	--------------------------------	---------------	--------------------	--

26	28	14	Dificultad para interpretar el mapa (línea del área de mesas) (26) e8	Dificultades para comprender las condiciones que establece el enunciado e5	e1	1
			Dificultad para interpretar y establecer el área del conjunto (10) e2	Error de cálculo e3	e2	18
			Confusión entre área y perímetro del conjunto e7		e3	2
			Dificultad para el área del conjunto y los respectivos retiros para cálculo algebraico e8		e5	11
			Confusión en la unidad de medida e10		e7	1
			Dificultad para ver que en el espacio vacío cabe otro conjunto en las condiciones establecidas (figura-contexto) e1		e8	25
					e10	1

Vertido de petróleo

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
56	0	11	Dificultad para ver que la superficie de la composición o descomposición en polígonos o cfa, es mayor o menor a la ocupada por el vertido (conservación de la percepción) e9	Dificultad para dar continuidad a la estrategia de resolución e6	e2	3
	4		Confusión con la unidad de medida e10	Dificultades para comprender la consigna e5	e3	3
			Dificultad con medida indirecta del área de un rectángulo e2	Error de cálculo e3	e5	1
			Dificultad en determinar los polígonos o cfa en los que puede dividir el vertido (percepción figura-contexto) e9		e6	10
			Confusión entre área y longitud (1) e7		e7	1
					e9	37
					e10	26

Noria 1

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro /mal	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	

10	64	0	Confusión con el concepto de diámetro e2	Dificultad para leer o interpretar la consigna e5	e2	27
			Dificultad para interpretar el diagrama e8	Dificultad con ubicar "estar sobre" e5	e5	27
			Confusión con el concepto de centro y de cfa e2		e8	43

Noria 2

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro /mal	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de errores	
11	60	0	Dificultad para determinar el nombre "P" a qué punto de la noria corresponde (32) e8	Dificultad en el conteo de puntos de la noria e3	e1	3
		15	Dificultad para determinar el nombre "S, M, Q, R" a qué punto de la noria corresponde (percepción de la posición en el plano) e8	No se puede determinar la causa del error e6	e3	2
			Dificultad para establecer en ángulo de rotación (cantidad de puntos) en un período de tiempo e1		e6	15
			Dificultad en considerar la posición inicial y la final al cabo de 10 min e1		e8	31

Dados

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
14	102	2	Dificultad en identificar la totalidad de la cara oculta e1	Dificultad para comprender qué puntos en total significa sumar todos los puntos que se ven e5	e1	2
			Dificultad para asociar que en la vista desde arriba solo se ven las caras horizontales e8		e5	1
					e8	2

Garaje 1

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro/mal	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
9	110		Dificultad para el cambio de posición (¿orientación?) e1		e1	3
			Dificultad en la percepción de figura-contexto e8		e8	3

Garaje 2

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma de categorías	
36	26	3	Dificultad para identificar las medidas de los elementos que componen el tejado e1	Estrategia inconducente e6	e1	23
			Confusión entre área, perímetro y volumen e7	Error de cálculo e3	e2	6
			Dificultad para establecer la propiedad del teorema de Pitágoras e2	No concluye ¿? E4	e3	5
			Dificultad con la determinación del área de un rectángulo (l x a) e2	Interpretación de cifras (1,00 =10) e3	e4	1
			Dificultad para identificar el largo e1	Dificultad para identificar doble de cuadrado e3	e6	1
			Dificultad para identificar o calcular el ancho (29) (Relaciones espaciales) e1		e7	9
			Dificultad para considerar las dos secciones (orientación) e8		e8	17
			Unidad de medida de área (m ²) e10		e10	29
			Dificultad para reconocer el nuevo rectángulo (percepción de las relaciones espaciales) e8			
			Dificultad para armar una única vista del techo (frontal y en profundidad) (orientación) e8			

Puerta giratoria 1

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro de información	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Sumas de categorías	
32	64	5	Dificultad con la medida directa (medir ángulos) e10	Dificultad para comprender la consigna, interpretan dos hojas como dos sectores. e5	e2	2
	2		Dificultad para establecer que la mitad de ángulo obtuso no es un recto. e2		e5	17
	66		Confusión con la medida de un ángulo completo. e2		e10	1

Puerta giratoria 2

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Sumas categorías	
86	6	4	Confusión entre medida del ángulo y longitud del arco que contiene al ángulo. e10	Dificultad para dar una respuesta e4	e7	11
	1		Confusión entre la longitud del arco y la distancia entre dos puntos de una cfa. e7		e8	0
	7		Confusión entre la longitud de una circunferencia y el diámetro que se presenta. e7		e10	2
			Dificultad para percibir que el arco punteado es la mitad del arco que abarca un sector de la puerta. e8		e4	0

Puerta giratoria 3

Sin hacer	Bien hechos	Sin registro	Errores en el sentido espacial	Otros errores	Suma categorías	
36	67	0	Dificultad para considerar todas las condiciones a la vez. e8	Dificultad para dar una respuesta. e4	e8	15
				Dificultades operatorias. e3	e3	3
					e4	1

3. Generalización de los errores

Tarea y pregunta	Error sentido espacial	Otros errores
Compra de apartamento	Dificultad de la suma de segmentos da otro segmento e9	No se entiende el razonamiento, marca una diagonal. e6 Dificultad para atender a la consigna. e5
	Dificultad identificar dimensiones necesarias para el cálculo de área. e1	
	Confusión entre área y perímetro. e7	
Heladería 1	Confusión entre área y longitud. E7	Comprensión e interpretación del enunciado del problema: agregar un nuevo borde (11). e5

	<p>Dificultades para establecer la propiedad y aplicar el teorema de Pitágoras. e2</p> <p>Confusión en la unidad de medida: lado de baldosa, segmento oblicuo de una baldosa, metros, centímetros. e10</p> <p>Dificultad en establecer la longitud, como suma de partes o como medida indirecta. e9</p> <p>Error en tomar la medida directa o en la conversión de la escala: del mostrador o de alguno de los segmentos que lo componen. e10</p> <p>Dificultad para interpretar la parte externa del mostrador: todo el mostrador como exterior al área de servicio o la parte interna del mostrador como el primer borde exterior al área de servicio. e8</p>	<p>Error operatorio. e3</p> <p>Hace algo o no se entiende qué piensa, pero no responde. e4</p>
Heladería 2	<p>Dificultad con la unidad de medida de área (m²) y/o con la conversión (cuadrados a m²) (conceptos geométricos). e10</p> <p>Dificultad con el uso de la medida directa (conceptos geométricos). e2</p> <p>Dificultad de visualizar (discriminación visual), identificar el área de servicio y mostrador como un trapecio. e9</p> <p>Error en el concepto de área de triángulo. e2</p> <p>Dificultad para calcular el área total como suma de las partes (Relaciones geométricas) e9</p> <p>Confusión entre área y perímetro o longitud. e7</p> <p>Confusión entre uso de medida directa e indirecta. e10</p> <p>Dificultad en descomponer en polígonos convenientes toda la superficie (triángulo y rectángulo finito) o el área de mostrador y servicio. (¿Discriminación visual?) E9</p> <p>Dificultad para visualizar el triángulo rectángulo. e1</p>	<p>Error de cálculo. e3</p> <p>Interpretación de la consigna (toda la heladería). e5</p> <p>Deja registros inconclusos y no responde. e4</p>
Heladería 3	<p>Dificultad para interpretar el mapa (línea del área de mesas) (26). e8</p>	<p>Dificultades para comprender las condiciones que establece el enunciado. e5</p>

	Dificultad para interpretar y establecer el área del conjunto (10). e2	Error de cálculo. e3
	Confusión entre área y perímetro del conjunto. e7	
	Dificultad para el área del conjunto y los respectivos retiros para cálculo algebraico. e8	
	Confusión en la unidad de medida. e10	
	Dificultad para ver que en el espacio vacío cabe otro conjunto en las condiciones establecidas (figura-contexto). e1	
Vertido de Petróleo	Dificultad para ver que la superficie de la composición o descomposición en polígonos o cfa, es mayor o menor a la ocupada por el vertido (conservación de la percepción). e9	Dificultad para dar continuidad a la estrategia de resolución. e6
	Confusión con la unidad de medida. e10	Dificultades para comprender la consigna. e5
	Dificultad con medida indirecta del área de un rectángulo. e2	Error de cálculo. e3
	Dificultad en determinar los polígonos o cfa en los que puede dividir el vertido (percepción figura-contexto). e9	
	Confusión entre área y longitud (1). e7	
Noria 1	Confusión con el concepto de diámetro. e2	Dificultad para leer o interpretar la consigna. e5
	Dificultad para interpretar el diagrama. e8	Dificultad con ubicar "estar sobre". e5
	Confusión con el concepto de centro y de cfa e2	
Noria 2	Dificultad para determinar el nombre "P" a qué punto de la noria corresponde (32) e8	Dificultad en el conteo de puntos de la noria. e3
	Dificultad para determinar el nombre "S, M, Q, R" a qué punto de la noria corresponde (percepción de la posición en el plano) e8	No se puede determinar la causa del error. e6
	Dificultad para establecer en ángulo de rotación (cantidad de puntos) en un período de tiempo. e1	
	Dificultad en considerar la posición inicial y la final al cabo de 10 min. e1	
Dados	Dificultad en identificar (ver) la totalidad de la cara oculta. e1	Dificultad para comprender qué puntos en total significa sumar todos los puntos que se ven. e5
	Dificultad para asociar que en la vista desde arriba solo se ven las caras horizontales. e8	

Garaje 1	Dificultad para el cambio de posición (ver) (¿orientación?). e1	
	Dificultad en la percepción de figura-contexto (ventana, puerta). e8	
Garaje 2	Dificultad para identificar las medidas de los elementos que componen el tejado. e1	Estrategia inconducente. e6
	Confusión entre área, perímetro y volumen. e7	Error de cálculo. e3
	Dificultad para establecer la propiedad del teorema de Pitágoras. e2	No concluye ¿?. e4
	Dificultad con la determinación del área de un rectángulo (1 x a). e2	Interpretación de cifras (1,00 =10) e3
	Dificultad para identificar el largo e1	Dificultad para identificar doble de cuadrado. e3
	Dificultad para identificar o calcular el ancho (29) (Relaciones espaciales). e1	
	Dificultad para considerar las dos secciones (orientación). e8	
	Unidad de medida de área (m ²). e10	
	Dificultad para reconocer el nuevo rectángulo (percepción de las relaciones espaciales). e8	
	Dificultad para armar una única vista del techo (frontal y en profundidad) (orientación). e8	
Puerta giratoria 1	Dificultad con la medida directa (medir ángulos). e10	Dificultad para comprender la consigna, interpretan dos hojas como dos sectores. e5
	Dificultad para establecer que la mitad de ángulo obtuso no es un recto. e2	
	Confusión con la medida de un ángulo completo. e2	
Puerta giratoria 2	Confusión entre medida del ángulo y longitud del arco que contiene al ángulo. e10	Dificultad para dar una respuesta. e4
	Confusión entre la longitud del arco y la distancia entre dos puntos de una cfa. e7	
	Confusión entre la longitud de una circunferencia y el diámetro que se presenta. e7	
	Dificultad para percibir que el arco punteado es la mitad del arco que abarca un sector de la puerta. e8	
Puerta giratoria 3	Dificultad para considerar todas las condiciones a la vez. e8	Dificultad para dar una respuesta. e4 Dificultades operatorias. e3

4. Frecuencia de los errores en cada tarea

Tareas	Sin hacer	Bien hechos	Sin registro/mal hechos	Con errores	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
Compra														
apartamento	16	81	0	25	x				x	x	x		x	
Heladería 1	18	46	2	56		x	x	x	x		x	x	x	x
Heladería 2	28	24	2	68	x	x	x	x	x		x		x	x
Heladería 3	26	28	14	54	x	x	x		x		x	x		x
Vertido														
Petróleo	56	4	11	51		x	x		x	x	x		x	x
Noria 1	10	64	0	48		x			x			x		
Noria 2	11	60	0	51	x		x			x		x		
Dados	14	102	2	4	x				x			x		
Garaje 1	9	110	0	3	x							x		
Garaje 2	36	26	3	57	x	x	x	x		x	x	x		x
Puerta														
giratoria 1	32	66	5	19		x			x					x
Puerta														
giratoria 2	86	7	4	25				x			x	x		x
Puerta														
giratoria 3	36	67	0	19			x	x				x		

ANEXO 10. ANÁLISIS CUANTITATIVO

CORRELATIONS

```

/VARIABLES=NOTA AP_C H1_C H2_C H3_C PE_C N1_C N2_C DA_C G1_C G2_C P1_C P2_C P3_C
/PRINT=TWOTAIL NOSIG FULL
/MISSING=PAIRWISE.
    
```

Correlaciones

		Correlaciones				
		NOTA	AP_C	H1_C	H2_C	H3_C
NOTA	Correlación de Pearson	1	,153	,311**	,271**	,339**
	Sig. (bilateral)		,093	,000	,002	,000
	N	122	122	122	122	122
AP_C	Correlación de Pearson	,153	1	,191*	,158	,244**
	Sig. (bilateral)	,093		,035	,082	,007
	N	122	122	122	122	122
H1_C	Correlación de Pearson	,311**	,191*	1	,462**	,287**
	Sig. (bilateral)	,000	,035		,000	,001
	N	122	122	122	122	122
H2_C	Correlación de Pearson	,271**	,158	,462**	1	,320**
	Sig. (bilateral)	,002	,082	,000		,000
	N	122	122	122	122	122
H3_C	Correlación de Pearson	,339**	,244**	,287**	,320**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,007	,001	,000	
	N	122	122	122	122	122
PE_C	Correlación de Pearson	,095	,279**	,043	,238**	,253**
	Sig. (bilateral)	,298	,002	,638	,008	,005
	N	122	122	122	122	122
N1_C	Correlación de Pearson	,380**	,302**	,428**	,387**	,275**
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,000	,000	,002
	N	122	122	122	122	122
N2_C	Correlación de Pearson	,307**	,187*	,224*	,106	,166
	Sig. (bilateral)	,001	,039	,013	,244	,068
	N	122	122	122	122	122
DA_C	Correlación de Pearson	-,160	-,029	-,043	,040	-,040
	Sig. (bilateral)	,079	,749	,636	,661	,659
	N	122	122	122	122	122
G1_C	Correlación de Pearson	,159	,037	,126	,077	,085
	Sig. (bilateral)	,079	,686	,166	,401	,351
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		PE_C	N1_C	N2_C	DA_C	G1_C
NOTA	Correlación de Pearson	,095	,380**	,307**	-,160	,159
	Sig. (bilateral)	,298	,000	,001	,079	,079
	N	122	122	122	122	122
AP_C	Correlación de Pearson	,279**	,302**	,187*	-,029	,037
	Sig. (bilateral)	,002	,001	,039	,749	,686
	N	122	122	122	122	122
H1_C	Correlación de Pearson	,043	,428**	,224*	-,043	,126
	Sig. (bilateral)	,638	,000	,013	,636	,166
	N	122	122	122	122	122
H2_C	Correlación de Pearson	,238**	,387**	,106	,040	,077
	Sig. (bilateral)	,008	,000	,244	,661	,401
	N	122	122	122	122	122
H3_C	Correlación de Pearson	,253**	,275**	,166	-,040	,085
	Sig. (bilateral)	,005	,002	,068	,659	,351
	N	122	122	122	122	122
PE_C	Correlación de Pearson	1	,173	-,002	,228*	,020
	Sig. (bilateral)		,057	,983	,012	,829
	N	122	122	122	122	122
N1_C	Correlación de Pearson	,173	1	,447**	-,047	,437**
	Sig. (bilateral)	,057		,000	,610	,000
	N	122	122	122	122	122
N2_C	Correlación de Pearson	-,002	,447**	1	-,145	,533**
	Sig. (bilateral)	,983	,000		,112	,000
	N	122	122	122	122	122
DA_C	Correlación de Pearson	,228*	-,047	-,145	1	-,039
	Sig. (bilateral)	,012	,610	,112		,669
	N	122	122	122	122	122
G1_C	Correlación de Pearson	,020	,437**	,533**	-,039	1
	Sig. (bilateral)	,829	,000	,000	,669	
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		G2_C	P1_C	P2_C	P3_C
NOTA	Correlación de Pearson	,246**	,077	-,104	-,080
	Sig. (bilateral)	,006	,400	,254	,379
	N	122	122	122	122
AP_C	Correlación de Pearson	,231*	,197*	,098	,152
	Sig. (bilateral)	,010	,029	,282	,095
	N	122	122	122	122
H1_C	Correlación de Pearson	,428**	,193*	,097	,137
	Sig. (bilateral)	,000	,033	,286	,132
	N	122	122	122	122
H2_C	Correlación de Pearson	,221*	,098	,100	,079
	Sig. (bilateral)	,014	,285	,273	,386
	N	122	122	122	122
H3_C	Correlación de Pearson	,335**	,092	,182*	-,048
	Sig. (bilateral)	,000	,312	,044	,596
	N	122	122	122	122
PE_C	Correlación de Pearson	,206*	,124	,196*	,156
	Sig. (bilateral)	,023	,172	,031	,087
	N	122	122	122	122
N1_C	Correlación de Pearson	,447**	,319**	,156	,159
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,086	,080
	N	122	122	122	122
N2_C	Correlación de Pearson	,263**	,298**	,109	,211*
	Sig. (bilateral)	,003	,001	,230	,019
	N	122	122	122	122
DA_C	Correlación de Pearson	-,007	-,020	-,054	,110
	Sig. (bilateral)	,936	,828	,551	,229
	N	122	122	122	122
G1_C	Correlación de Pearson	,369**	,477**	,165	,364**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,069	,000
	N	122	122	122	122

Correlaciones

		NOTA	AP_C	H1_C	H2_C	H3_C
G2_C	Correlación de Pearson	,246**	,231*	,428**	,221*	,335**
	Sig. (bilateral)	,006	,010	,000	,014	,000
	N	122	122	122	122	122
P1_C	Correlación de Pearson	,077	,197*	,193*	,098	,092
	Sig. (bilateral)	,400	,029	,033	,285	,312
	N	122	122	122	122	122
P2_C	Correlación de Pearson	-,104	,098	,097	,100	,182*
	Sig. (bilateral)	,254	,282	,286	,273	,044
	N	122	122	122	122	122
P3_C	Correlación de Pearson	-,080	,152	,137	,079	-,048
	Sig. (bilateral)	,379	,095	,132	,386	,596
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		PE_C	N1_C	N2_C	DA_C	G1_C
G2_C	Correlación de Pearson	,206*	,447**	,263**	-,007	,369**
	Sig. (bilateral)	,023	,000	,003	,936	,000
	N	122	122	122	122	122
P1_C	Correlación de Pearson	,124	,319**	,298**	-,020	,477**
	Sig. (bilateral)	,172	,000	,001	,828	,000
	N	122	122	122	122	122
P2_C	Correlación de Pearson	,196*	,156	,109	-,054	,165
	Sig. (bilateral)	,031	,086	,230	,551	,069
	N	122	122	122	122	122
P3_C	Correlación de Pearson	,156	,159	,211*	,110	,364**
	Sig. (bilateral)	,087	,080	,019	,229	,000
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		G2_C	P1_C	P2_C	P3_C
G2_C	Correlación de Pearson	1	,501**	,250**	,367**
	Sig. (bilateral)		,000	,006	,000
	N	122	122	122	122
P1_C	Correlación de Pearson	,501**	1	,319**	,574**
	Sig. (bilateral)	,000		,000	,000
	N	122	122	122	122
P2_C	Correlación de Pearson	,250**	,319**	1	,298**
	Sig. (bilateral)	,006	,000		,001
	N	122	122	122	122
P3_C	Correlación de Pearson	,367**	,574**	,298**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,001	
	N	122	122	122	122

** . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

CORRELATIONS

```

/VARIABLES=NOTA AP_H H1_H H2_H H3_H PE_H N1_H N2_H DA_H G1_H G2_H P1_H P2_H P3_H
/PRINT=TWOTAIL NOSIG FULL
/MISSING=PAIRWISE.

```

Correlaciones

Correlaciones

		NOTA	AP_H	H1_H	H2_H	H3_H
NOTA	Correlación de Pearson	1	,227*	,296**	,361**	,367**
	Sig. (bilateral)		,012	,001	,000	,000
	N	122	122	122	122	122
AP_H	Correlación de Pearson	,227*	1	,180*	,145	,216*
	Sig. (bilateral)	,012		,048	,110	,017
	N	122	122	122	122	122
H1_H	Correlación de Pearson	,296**	,180*	1	,529**	,254**
	Sig. (bilateral)	,001	,048		,000	,005
	N	122	122	122	122	122
H2_H	Correlación de Pearson	,361**	,145	,529**	1	,434**
	Sig. (bilateral)	,000	,110	,000		,000
	N	122	122	122	122	122
H3_H	Correlación de Pearson	,367**	,216*	,254**	,434**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,017	,005	,000	
	N	122	122	122	122	122
PE_H	Correlación de Pearson	,097	,276**	,016	,206*	,317**
	Sig. (bilateral)	,285	,002	,865	,023	,000
	N	122	122	122	122	122
N1_H	Correlación de Pearson	,390**	,308**	,404**	,384**	,309**
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,000	,000	,001
	N	122	122	122	122	122
N2_H	Correlación de Pearson	,293**	,054	,114	,051	,107
	Sig. (bilateral)	,001	,553	,212	,581	,239
	N	122	122	122	122	122
DA_H	Correlación de Pearson	-,141	,006	-,040	,020	,007
	Sig. (bilateral)	,120	,947	,665	,824	,939
	N	122	122	122	122	122
G1_H	Correlación de Pearson	,204*	,102	,103	,115	,180*
	Sig. (bilateral)	,024	,266	,257	,206	,047
	N	122	122	122	122	122
G2_H	Correlación de Pearson	,245**	,263**	,345**	,197*	,371**
	Sig. (bilateral)	,007	,003	,000	,029	,000
	N	122	122	122	122	122
P1_H	Correlación de Pearson	,075	,173	,099	,045	,143
	Sig. (bilateral)	,412	,057	,276	,623	,117
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		PE_H	N1_H	N2_H	DA_H	G1_H
NOTA	Correlación de Pearson	,097	,390**	,293**	-,141	,204*
	Sig. (bilateral)	,285	,000	,001	,120	,024
	N	122	122	122	122	122
AP_H	Correlación de Pearson	,276**	,308**	,054	,006	,102
	Sig. (bilateral)	,002	,001	,553	,947	,266
	N	122	122	122	122	122
H1_H	Correlación de Pearson	,016	,404**	,114	-,040	,103
	Sig. (bilateral)	,865	,000	,212	,665	,257
	N	122	122	122	122	122
H2_H	Correlación de Pearson	,206*	,384**	,051	,020	,115
	Sig. (bilateral)	,023	,000	,581	,824	,206
	N	122	122	122	122	122
H3_H	Correlación de Pearson	,317**	,309**	,107	,007	,180*
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,239	,939	,047
	N	122	122	122	122	122
PE_H	Correlación de Pearson	1	,192*	,049	,235**	,092
	Sig. (bilateral)		,034	,595	,009	,314
	N	122	122	122	122	122
N1_H	Correlación de Pearson	,192*	1	,308**	-,004	,445**
	Sig. (bilateral)	,034		,001	,963	,000
	N	122	122	122	122	122
N2_H	Correlación de Pearson	,049	,308**	1	-,058	,260**
	Sig. (bilateral)	,595	,001		,529	,004
	N	122	122	122	122	122
DA_H	Correlación de Pearson	,235**	-,004	-,058	1	-,057
	Sig. (bilateral)	,009	,963	,529		,535
	N	122	122	122	122	122
G1_H	Correlación de Pearson	,092	,445**	,260**	-,057	1
	Sig. (bilateral)	,314	,000	,004	,535	
	N	122	122	122	122	122
G2_H	Correlación de Pearson	,245**	,434**	,160	,005	,327**
	Sig. (bilateral)	,007	,000	,078	,953	,000
	N	122	122	122	122	122
P1_H	Correlación de Pearson	,156	,302**	,092	,004	,451**
	Sig. (bilateral)	,087	,001	,316	,965	,000
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		PE_H	N1_H	N2_H	DA_H	G1_H
NOTA	Correlación de Pearson	,097	,390**	,293**	-,141	,204*
	Sig. (bilateral)	,285	,000	,001	,120	,024
	N	122	122	122	122	122
AP_H	Correlación de Pearson	,276**	,308**	,054	,006	,102
	Sig. (bilateral)	,002	,001	,553	,947	,266
	N	122	122	122	122	122
H1_H	Correlación de Pearson	,016	,404**	,114	-,040	,103
	Sig. (bilateral)	,865	,000	,212	,665	,257
	N	122	122	122	122	122
H2_H	Correlación de Pearson	,206*	,384**	,051	,020	,115
	Sig. (bilateral)	,023	,000	,581	,824	,206
	N	122	122	122	122	122
H3_H	Correlación de Pearson	,317**	,309**	,107	,007	,180*
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,239	,939	,047
	N	122	122	122	122	122
PE_H	Correlación de Pearson	1	,192*	,049	,235**	,092
	Sig. (bilateral)		,034	,595	,009	,314
	N	122	122	122	122	122
N1_H	Correlación de Pearson	,192*	1	,308**	-,004	,445**
	Sig. (bilateral)	,034		,001	,963	,000
	N	122	122	122	122	122
N2_H	Correlación de Pearson	,049	,308**	1	-,058	,260**
	Sig. (bilateral)	,595	,001		,529	,004
	N	122	122	122	122	122
DA_H	Correlación de Pearson	,235**	-,004	-,058	1	-,057
	Sig. (bilateral)	,009	,963	,529		,535
	N	122	122	122	122	122
G1_H	Correlación de Pearson	,092	,445**	,260**	-,057	1
	Sig. (bilateral)	,314	,000	,004	,535	
	N	122	122	122	122	122
G2_H	Correlación de Pearson	,245**	,434**	,160	,005	,327**
	Sig. (bilateral)	,007	,000	,078	,953	,000
	N	122	122	122	122	122
P1_H	Correlación de Pearson	,156	,302**	,092	,004	,451**
	Sig. (bilateral)	,087	,001	,316	,965	,000
	N	122	122	122	122	122

Correlaciones

		G2_H	P1_H	P2_H	P3_H
NOTA	Correlación de Pearson	,245**	,075	-,046	.°
	Sig. (bilateral)	,007	,412	,615	.
	N	122	122	122	0
AP_H	Correlación de Pearson	,263**	,173	,143	.°
	Sig. (bilateral)	,003	,057	,115	.
	N	122	122	122	0
H1_H	Correlación de Pearson	,345**	,099	,110	.°
	Sig. (bilateral)	,000	,276	,228	.
	N	122	122	122	0
H2_H	Correlación de Pearson	,197*	,045	,112	.°
	Sig. (bilateral)	,029	,623	,221	.
	N	122	122	122	0
H3_H	Correlación de Pearson	,371**	,143	,161	.°
	Sig. (bilateral)	,000	,117	,076	.
	N	122	122	122	0
PE_H	Correlación de Pearson	,245**	,156	,198*	.°
	Sig. (bilateral)	,007	,087	,029	.
	N	122	122	122	0
N1_H	Correlación de Pearson	,434**	,302**	,178*	.°
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,049	.
	N	122	122	122	0
N2_H	Correlación de Pearson	,160	,092	,151	.°
	Sig. (bilateral)	,078	,316	,096	.
	N	122	122	122	0
DA_H	Correlación de Pearson	,005	,004	-,082	.°
	Sig. (bilateral)	,953	,965	,371	.
	N	122	122	122	0
G1_H	Correlación de Pearson	,327**	,451**	,111	.°
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,222	.
	N	122	122	122	0
G2_H	Correlación de Pearson	1	,443**	,266**	.°
	Sig. (bilateral)		,000	,003	.
	N	122	122	122	0
P1_H	Correlación de Pearson	,443**	1	,181*	.°
	Sig. (bilateral)	,000		,046	.
	N	122	122	122	0

Correlaciones

		NOTA	AP_H	H1_H	H2_H	H3_H
P2_H	Correlación de Pearson	-,046	,143	,110	,112	,161
	Sig. (bilateral)	,615	,115	,228	,221	,076
	N	122	122	122	122	122
P3_H	Correlación de Pearson	. ^c	. ^c	. ^c	. ^c	. ^c
	Sig. (bilateral)
	N	0	0	0	0	0

Correlaciones

		PE_H	N1_H	N2_H	DA_H	G1_H
P2_H	Correlación de Pearson	,198*	,178*	,151	-,082	,111
	Sig. (bilateral)	,029	,049	,096	,371	,222
	N	122	122	122	122	122
P3_H	Correlación de Pearson	. ^c	. ^c	. ^c	. ^c	. ^c
	Sig. (bilateral)
	N	0	0	0	0	0

Correlaciones

		G2_H	P1_H	P2_H	P3_H
P2_H	Correlación de Pearson	,266**	,181*	1	. ^c
	Sig. (bilateral)	,003	,046		.
	N	122	122	122	0
P3_H	Correlación de Pearson	. ^c	. ^c	. ^c	. ^c
	Sig. (bilateral)
	N	0	0	0	0

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

**.. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

c. No se puede calcular porque, como mínimo, una de las variables es constante.

REGRESSION

```

/MISSING LISTWISE
/STATISTICS COEFF OUTS R ANOVA CHANGE
/CRITERIA=PIN(.05) POUT(.10)
/NOORIGIN
/DEPENDENT NOTA
/METHOD=ENTER H1_C H2_C N1_C N2_C G2_C
/RESIDUALS DURBIN.

```

Variables entradas/eliminadas^a

Modelo	Variables entradas	Variables eliminadas	Método
1	G2_C, H2_C, N2_C, H1_C, N1_C ^b	.	Introducir

a. Variable dependiente: NOTA

b. Todas las variables solicitadas introducidas.

Resumen del modelo^b

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación	Estadísticos de cambio	
					Cambio en R cuadrado	Cambio en F
1	,451 ^a	,203	,169	2,730	,203	5,921

Resumen del modelo^b

Modelo	Estadísticos de cambio			Durbin-Watson
	gl1	gl2	Sig. Cambio en F	
1	5	116	,000	1,293

a. Predictores: (Constante), G2_C, H2_C, N2_C, H1_C, N1_C

b. Variable dependiente: NOTA

ANOVA^a

Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	220,591	5	44,118	5,921	,000 ^b
	Residuo	864,335	116	7,451		
	Total	1084,926	121			

a. Variable dependiente: NOTA

b. Predictores: (Constante), G2_C, H2_C, N2_C, H1_C, N1_C

Coeficientes^a

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Dev. Error	Beta		
1	(Constante)	3,671	,679		5,404	,000
	H1_C	,059	,050	,121	1,177	,242
	H2_C	,090	,075	,115	1,190	,236
	N1_C	,167	,095	,189	1,759	,081
	N2_C	,101	,055	,173	1,848	,067
	G2_C	,022	,056	,039	,398	,691

a. Variable dependiente: NOTA

Estadísticas de residuos^a

	Mínimo	Máximo	Media	Dev. Desviación	N
Valor pronosticado	3,67	8,69	7,02	1,350	122
Residuo	-6,796	5,685	,000	2,673	122
Dev. Valor pronosticado	-2,484	1,237	,000	1,000	122
Dev. Residuo	-2,490	2,083	,000	,979	122

a. Variable dependiente: NOTA

REGRESSION

```

/MISSING LISTWISE
/STATISTICS COEFF OUTS R ANOVA CHANGE
/CRITERIA=PIN(.05) POUT(.10)
/NOORIGIN
/DEPENDENT NOTA
/METHOD=ENTER AP_H H1_H H2_H H3_H N1_H N2_H G1_H G2_H
/RESIDUALS DURBIN.
    
```

Regresión H

Variables entradas/eliminadas^a

Modelo	Variables entradas	Variables eliminadas	Método
1	G2_H, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_H, H1_H, N1_H ^b	.	Introducir

a. Variable dependiente: NOTA

b. Todas las variables solicitadas introducidas.

Resumen del modelo^b

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación	Estadísticos de cambio	
					Cambio en R cuadrado	Cambio en F
1	,536 ^a	,288	,237	2,615	,288	5,709

Resumen del modelo^b

Modelo	Estadísticos de cambio			Durbin-Watson
	gl1	gl2	Sig. Cambio en F	
1	8	113	,000	1,332

a. Predictores: (Constante), G2_H, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_H, H1_H, N1_H

b. Variable dependiente: NOTA

ANOVA^a

Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	312,272	8	39,034	5,709	,000 ^b
	Residuo	772,654	113	6,838		
	Total	1084,926	121			

a. Variable dependiente: NOTA

b. Predictores: (Constante), G2_H, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_H, H1_H, N1_H

Coefficientes^a

Modelo		Coefficients no estandarizados		Coefficients estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	3,193	,919		3,473	,001
	AP_H	,081	,073	,095	1,111	,269
	H1_H	,031	,049	,062	,624	,534
	H2_H	,155	,098	,164	1,585	,116
	H3_H	,128	,063	,192	2,039	,044
	N1_H	,504	,371	,145	1,358	,177
	N2_H	,229	,095	,203	2,399	,018
	G1_H	,027	,131	,019	,207	,836
	G2_H	-,005	,079	-,006	-,067	,947

a. Variable dependiente: NOTA

Estadísticas de residuos^a

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Desviación	N
Valor pronosticado	3,38	9,71	7,02	1,606	122
Residuo	-5,993	5,527	,000	2,527	122
Desv. Valor pronosticado	-2,267	1,670	,000	1,000	122
Desv. Residuo	-2,292	2,114	,000	,966	122

a. Variable dependiente: NOTA

REGRESSION

```

/MISSING LISTWISE
/STATISTICS COEFF OUTS R ANOVA CHANGE
/CRITERIA=PIN(.05) POUT(.10)
/NOORIGIN
/DEPENDENT NOTA
/METHOD=ENTER AP_H H1_H H2_H H3_H N1_H N2_H G1_H G2_H H1_C H2_C H3_C N1_C N2_C G2_C
/RESIDUALS DURBIN.

```

Regresión Total

Variables entradas/eliminadas^a

Modelo	Variables entradas	Variables eliminadas	Método
1	G2_C, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_C, H1_H, N1_H, N2_C, H2_C, H3_H, G2_H, N1_C, H1_C ^b	.	Introducir

a. Variable dependiente: NOTA

b. Todas las variables solicitadas introducidas.

Resumen del modelo^b

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado ajustado	Error estándar de la estimación	Estadísticos de cambio	
					Cambio en R cuadrado	Cambio en F
1	,563 ^a	,317	,228	2,631	,317	3,550

Resumen del modelo^b

Modelo	Estadísticos de cambio			Durbin-Watson
	gl1	gl2	Sig. Cambio en F	
1	14	107	,000	1,475

a. Predictores: (Constante), G2_C, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_C, H1_H, N1_H, N2_C, H2_C, H3_H, G2_H, N1_C, H1_C

b. Variable dependiente: NOTA

ANOVA^a

Modelo		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	344,105	14	24,579	3,550	,000 ^b
	Residuo	740,822	107	6,924		
	Total	1084,926	121			

a. Variable dependiente: NOTA

b. Predictores: (Constante), G2_C, N2_H, H2_H, AP_H, G1_H, H3_C, H1_H, N1_H, N2_C, H2_C, H3_H, G2_H, N1_C, H1_C

Coefficientes^a

Modelo		Coefficients no estandarizados		Coefficients estandarizados	t	Sig.
		B	Desv. Error	Beta		
1	(Constante)	3,316	1,067		3,109	,002
	AP_H	,091	,075	,106	1,216	,227
	H1_H	,116	,185	,237	,628	,531
	H2_H	,544	,213	,576	2,552	,012
	H3_H	,101	,153	,151	,660	,510
	N1_H	,941	1,150	,271	,818	,415
	N2_H	,196	,123	,174	1,586	,116
	G1_H	,036	,154	,025	,235	,814
	G2_H	,025	,226	,030	,110	,913
	H1_C	-,113	,193	-,233	-,586	,559
	H2_C	-,332	,161	-,427	-2,064	,041
	H3_C	,012	,114	,023	,107	,915
	N1_C	-,093	,296	-,106	-,315	,753
	N2_C	,018	,071	,032	,260	,795
	G2_C	,003	,162	,005	,019	,985

a. Variable dependiente: NOTA

Estadísticas de residuos^a

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Desviación	N
Valor pronosticado	3,57	10,43	7,02	1,686	122
Residuo	-5,546	5,968	,000	2,474	122
Desv. Valor pronosticado	-2,048	2,019	,000	1,000	122
Desv. Residuo	-2,108	2,268	,000	,940	122

a. Variable dependiente: NOTA

ANEXO 11. SÍNTESIS DE LAS COMPONENTES DEL SENTIDO ESPACIAL

Tabla 1. *Componentes del sentido espacial en tareas de PISA*

Componentes del sentido espacial	Tareas de PISA
Manejo de conceptos geométricos	<p>Conceptos</p> <p>Concepto de rectángulo, triángulo rectángulo, cuadrado, trapecio, paralelogramo y circunferencia. Ángulo. Distancia. Medida directa e indirecta de longitud (Teorema de Pitágoras). Medida directa o indirecta del área de polígonos.</p>
	<p>Propiedades de las formas</p> <p>Lados paralelos e iguales dos a dos. Longitud como suma o resta de longitudes. Conservación de la distancia en los movimientos o perspectivas. Aplicación del Teorema de Pitágoras y de áreas de polígonos. Composición y descomposición de áreas.</p>
	<p>Relaciones geométricas</p> <p>Paralelismo entre lados y caras. Perpendicularidad entre: segmentos, lados consecutivos y caras. La medida de un segmento como la suma de otros dos. Distancia entre dos puntos que forman un segmento horizontal, vertical u oblicuo y entre objetos. Área como composición y descomposición de polígonos conocidos. Medida de ángulos.</p>
	<p>Ubicación y movimientos</p> <p>La unión de tres segmentos consecutivos determina la longitud solicitada (heladería). Uso de coordenadas. Posición relativa entre objetos. Ubicar elementos en el mapa. Posicionar con condiciones, varios elementos de un conjunto en el mapa. El área se puede formar como la resta o suma de rectángulos, triángulos o trapecios, o como la suma de cada una de sus partes (apartamento o área de servicio y mostrador).</p>
<p>Orientación</p> <p>Comprensión y localización de elementos en el mapa. Localizar los objetos en las distintas perspectivas. Posición relativa de tres segmentos: horizontal, vertical y oblicuo. Disponer los conjuntos de acuerdo con los sistemas de referencia, en las condiciones establecidas.</p>	

	Coordinación ojo-motor	Determinar el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento oblicuo. Trazado de rectángulos y triángulo rectángulo. Determinar un nuevo rectángulo con los datos obtenidos de distintas vistas (techo del garaje).
Habilidades de visualización	Percepción figura-contexto	Identificar el rectángulo mayor y del rectángulo menor, de polígonos que forman el área de servicio y mostrador, el vertido de petróleo. Identificar la unidad de medida de la baldosa y las nueve baldosas que forman un conjunto. Identificar los tres segmentos que forman el mostrador. El segmento oblicuo determina un triángulo rectángulo. Identificar puntos en la noria o cara en los dados. Identificar la posición de una figura tridimensional.
	Conservación de la percepción	Identificar rectángulos, aunque incluso no estén sus lados. Identificar que se conserva la unidad de medida en cualquier posición y la medida de los segmentos cuando se cambian de posición. El área, el espacio que ocupa cada conjunto es invariante por giros o traslaciones. En la rotación se conserva invariante la medida de la circunferencia. Identificar las relaciones de lateralidad y cercanía entre ventana y cara de la puerta. Percibir la inclinación (el ancho y el largo en el techo), aunque no se vea en una de las vistas.
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar los dos segmentos menores que sumados forman el largo e identificar los dos anchos menores que sumados forman el ancho. Identificar que un segmento es vertical, otro es horizontal y el otro es oblicuo. Identificar la posición relativa entre los conjuntos, con relación a las paredes y dentro de la zona de mesas; o la posición relativa con los otros elementos (fondo, cara opuesta a ventana). Identificar elementos correspondientes en una rotación antihoraria de 90°, 270° y 360° (noria). Comprender las perspectivas desde arriba (dados y puerta giratoria) o la perspectiva desde otro punto de vista (garaje). Comprender los cambios de posición en cada representación (puertas giratorias). Comprender las medidas según la perspectiva.
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar que la longitud buscada (borde del mostrador) es la suma de medida de los segmentos que lo componen. Identificar hipotenusa y catetos. La relación entre las áreas de los rectángulos para obtener el área total (apartamento). Identificar que el área de la heladería es el área de un rectángulo menos el área del polígono que determina el área de servicio y el mostrador. Identificar que son cuatro los conjuntos (cuadrados) que caben en el área de mesas (rectángulo).

	<p>Identificar los lados paralelos y los perpendiculares. Perpendicularidad si utiliza rectángulos o triángulos rectángulos.</p> <p>Identificar medida de los lados. medidas en segmentos paralelos, el radio a partir de la altura señalada.</p> <p>Identificar que los puntos P, Q, R y S se corresponden en una Rotación de 90° antihorario. Identificar que el punto P se corresponde con S en la rotación de 270° antihoraria.</p> <p>Si un dado esta debajo de otro de la misma medida, las caras horizontales quedan ocultas y las verticales no cuentan en la perspectiva superior.</p> <p>Cercanía de la ventana con la puerta y lejanía de la ventana con la pared del fondo.</p> <p>Identificar el largo del techo con el largo de la vista lateral y el ancho del techo como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.</p> <p>Determinar la relación entre los sectores y las partes cerradas y abiertas.</p>
Discriminación visual	<p>Diferenciar figuras por los elementos que suministra, rectángulo mayor y menor (apartamento); posición entre puerta y ventana (garaje); los posibles polígonos en los que se puede dividir el suelo de la heladería.</p> <p>División del mapa en rectángulos y división del vertido en polígonos.</p> <p>Diferenciar los segmentos que constituyen el borde (mostrador) y la altura del ancho techo (garaje).</p> <p>Formar el triángulo rectángulo.</p> <p>Todas las unidades de medida son la misma en las baldosas.</p> <p>Reconocer elementos comunes en las dos perspectivas (garaje) y lo común entre las tres representaciones (puerta giratoria).</p>
Memoria visual	<p>La forma del rectángulo, triángulo rectángulo en cualquier posición.</p> <p>La forma del cuadrado circunscripto al círculo que contiene a la mesa con las sillas.</p>

Tabla 2. Componentes del sentido espacial en tareas de Aula

Componentes del sentido espacial	Tareas de aula
Conceptos	Concepto de circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugar geométrico; de distancia y medida; de semiplano y ángulo.
Propiedades de las formas	<p>Los puntos de la circunferencia distan una distancia fija del centro.</p> <p>Los puntos exteriores a la circunferencia están a una distancia del centro mayor que el radio.</p> <p>Los puntos interiores a la circunferencia están a una distancia del centro menor que el radio.</p> <p>Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.</p>

Manejo de
conceptos
geométricos

Relaciones
geométricas

Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.
Los puntos de la unión de paralelas distan una distancia fija de una recta dada.
La distancia entre A y el segmento de bisectriz interior a la circunferencia es menor a 3 cm (radio).
Los puntos de la circunferencia están a 3 cm de A por tanto no van a formar parte de la solución.
La intersección de la bisectriz con los puntos exteriores a la circunferencia cumple las condiciones solicitadas.
La distancia entre un punto interior a una circunferencia y el centro es menor que el radio.
La distancia entre un punto exterior a una circunferencia y el centro es mayor que el radio.
La distancia del centro a un punto interior es menor que a un punto exterior.
La intersección de una recta (la mediatriz) y una circunferencia son dos puntos.
Puntos que pertenecen a cada lado de un ángulo, y un punto es vértice del ángulo.
Distancias diferentes entre vértice y puntos perteneciente a lados de un ángulo.
La distancia entre puntos que pertenecen a un mismo semiplano de borde la bisectriz que es menor que la distancia entre puntos de diferentes semiplanos.
Los puntos buscados pertenecen a la bisectriz y a uno de los semiplanos determinado por ella.
Los puntos que cumplen con equidistar de dos puntos fijos.
Los puntos que cumplen con equidistar de dos semirrectas.
El punto que cumple con dos condiciones: equidistar de dos puntos fijos, y de dos semirrectas.
Los puntos que cumplen con distar el radio de un punto fijo.
Los puntos que cumplen con estar una distancia constante de una recta fija.
Los puntos que cumplen con pertenecer a la intersección de las dos condiciones: estar una distancia constante de un punto fijo y de una recta.
Posición relativa de los segmentos y semirrectas de la bisectriz con relación a la circunferencia.
Posición relativa de puntos en relación con una circunferencia: interiores y exteriores.
Un punto perteneciente a un semiplano de borde la mediatriz de un segmento, que contiene a uno de los extremos.
Tres puntos no alineados determinan un ángulo.
La posición de un punto como intersección de dos lugares geométricos: mediatriz y bisectriz; y de dos puntos como intersección de la circunferencia y la mediatriz.
Puntos pertenecientes a una mediatriz.

Ubicación y
movimientos

		Asociar la distancia entre dos puntos como el radio de una circunferencia. Asociar la distancia entre un punto y una recta a los puntos que se encuentran en una recta paralela. Los puntos se encuentran en dos rectas paralelas.
Habilidades de visualización	Orientación	
	Coordinación ojo-motor	Determinar todos los puntos que cumplen con estar a más de 3cm de un punto fijo. Determinar los puntos que equidistan de los lados de un ángulo. Determinar los puntos que están a más de 3cm de un punto fijo y equidistantes de los lados de un ángulo. Determinar los lados del ángulo y la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con estar a igual distancia de los lados de un ángulo o más cerca de uno que del otro. Determinar los puntos que están a una distancia constante de un punto fijo. Determinar los puntos que están a una distancia constante de una recta. Determinar todos los puntos que cumplen con estar a 3cm de un punto fijo y a 2cm de una recta fija.
	Percepción figura-contexto	Considerar la semirrecta incluida en la bisectriz y exterior a la circunferencia. Determinar los puntos de la mediatriz, de la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con estar en la mediatriz y en la bisectriz.
	Conservación de la percepción	--
	Percepción de la posición en el espacio	Identificar los puntos interiores y exteriores a una circunferencia. Identificar puntos alineados en la mediatriz de un segmento.
	Percepción de las relaciones espaciales	Percibir la igualdad de distancias. Un punto interior a un semiplano de borde la mediatriz de un segmento. Los puntos cumplen con estar a menor distancia de la semirrectas lados de un ángulo. Existen dos puntos que cumplen con equidistar con los extremos de un segmento y pertenecer a la circunferencia. Los tres puntos que cumplen con estar 3cm de un punto fijo y 2cm de una recta.
	Discriminación visual	Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.
	Memoria visual	--

Tabla síntesis de las componentes del sentido espacial agrupadas

Tabla 3. Componentes del sentido espacial en tareas de PISA y de aula

Componentes del sentido espacial	Tareas de PISA	Tareas de aula
Manejo de conceptos geométricos	<p>Conceptos</p> <p>Concepto de rectángulo, triángulo rectángulo, cuadrado, trapecio, paralelogramo y circunferencia. Ángulo. Distancia. Medida directa e indirecta de longitud (Teorema de Pitágoras). Medida directa o indirecta del área de polígonos.</p>	<p>Concepto de circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugar geométrico; de distancia y medida; de semiplano y ángulo.</p>
	<p>Propiedades de las formas</p> <p>Lados paralelos e iguales dos a dos. Longitud como suma o resta de longitudes. Conservación de la distancia en los movimientos o perspectivas. Aplicación del Teorema de Pitágoras y de áreas de polígonos. Composición y descomposición de áreas.</p>	<p>Los puntos de la circunferencia distan una distancia fija del centro.</p> <p>Los puntos exteriores a la circunferencia están a una distancia del centro mayor que el radio.</p> <p>Los puntos interiores a la circunferencia están a una distancia del centro menor que el radio.</p> <p>Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.</p> <p>Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.</p> <p>Los puntos de la unión de paralelas distan una distancia fija de una recta dada.</p>
Relaciones geométricas	<p>Paralelismo entre lados y caras.</p> <p>Perpendicularidad entre: segmentos, lados consecutivos y caras. La medida de un segmento como la suma de otros dos. Distancia entre dos puntos que forman un segmento horizontal, vertical u oblicuo y entre objetos. Área como composición y descomposición de polígonos conocidos. Medida de ángulos.</p>	<p>La distancia entre A y el segmento de bisectriz interior a la circunferencia es menor a 3 cm (radio).</p> <p>Los puntos de la circunferencia están a 3 cm de A por tanto no van a formar parte de la solución.</p> <p>La intersección de la bisectriz con los puntos exteriores a la circunferencia cumple las condiciones solicitadas.</p> <p>La distancia del centro a un punto interior es menor que a un punto exterior.</p> <p>La intersección de una recta, mediatriz de un segmento, y una circunferencia pueden ser dos puntos.</p>

Ubicación y movimientos

La unión de tres segmentos consecutivos determina la longitud solicitada (heladería). Uso de coordenadas.
Posición relativa entre objetos.
Ubicar elementos en el mapa.
Posicionar con condiciones, varios elementos de un conjunto en el mapa.
El área se puede formar como la resta o suma de rectángulos, triángulos o trapecios, o como la suma de cada una de sus partes (apartamento o área de servicio y mostrador).

Puntos que pertenecen a cada lado de un ángulo, y un punto es vértice del ángulo.
Distancias diferentes entre vértice y puntos perteneciente a lados de un ángulo.
La distancia entre un punto y otro perteneciente a un mismo semiplano es menor que la distancia entre el punto y otro perteneciente a diferente semiplano.
Los puntos que cumplen con pertenecer a una bisectriz y a uno de los semiplanos determinado por ella.
Los puntos que cumplen con equidistar de dos puntos fijos.
Los puntos que cumplen con equidistar de dos semirrectas.
El punto que cumple con dos condiciones: equidistar de dos puntos fijos, y de dos semirrectas.
Los puntos que cumplen con distar el radio de un punto fijo.
Los puntos que cumplen con estar una distancia constante de una recta fija.
Los puntos que cumplen con pertenecer a la intersección de las dos condiciones: estar una distancia constante de un punto fijo y de una recta.
Posición relativa de los segmentos y semirrectas de la bisectriz con relación a la circunferencia.
Posición relativa de puntos en relación con una circunferencia: interiores y exteriores.
Un punto perteneciente a un semiplano de borde la mediatriz de un segmento, que contiene a uno de los extremos.
Tres puntos no alineados determinan un ángulo.
La posición de un punto como intersección de dos lugares geométricos: mediatriz y bisectriz; y de dos puntos como intersección de la circunferencia y la mediatriz.

	Orientación	<p>Comprensión y localización de elementos en el mapa. Localizar los objetos en las distintas perspectivas. Posición relativa de tres segmentos: horizontal, vertical y oblicuo. Disponer los conjuntos de acuerdo con los sistemas de referencia, en las condiciones establecidas.</p>	<p>Puntos pertenecientes a una mediatriz. Asociar la distancia entre dos puntos como el radio de una circunferencia. Asociar la distancia entre un punto y una recta a los puntos que se encuentran en una recta paralela.</p>
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	<p>Determinar el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un segmento oblicuo. Trazado de rectángulos y triángulo rectángulo. Determinar un nuevo rectángulo con los datos obtenidos de distintas vistas (techo del garaje).</p>	<p>Determinar todos los puntos que cumplen con estar a más de 3cm de un punto fijo. Determinar los puntos que equidistan de los lados de un ángulo. Determinar los puntos que están a más de 3cm de un punto fijo y equidistantes de los lados de un ángulo. Determinar los lados del ángulo y la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con estar a igual distancia de los lados de un ángulo o más cerca de uno que del otro. Determinar los puntos que están a una distancia constante de un punto fijo. Determinar los puntos que están a una distancia constante de una recta. Determinar todos los puntos que cumplen con estar a 3cm de un punto fijo y a 2cm de una recta fija. Considerar la semirrecta incluida en la bisectriz y exterior a la circunferencia. Determinar los puntos de la mediatriz, de la bisectriz. Determinar todos los puntos que cumplen con estar en la mediatriz y en la bisectriz.</p>
	Percepción figura-contexto	<p>Identificar el rectángulo mayor y menor, los polígonos que forman el área de servicio y mostrador, el vertido de petróleo. Identificar la unidad de medida de la baldosa y las nueve baldosas que forman un conjunto. Identificar los tres segmentos</p>	

Conservación de la percepción	<p>que forman el mostrador. El segmento oblicuo determina un triángulo rectángulo.</p> <p>Identificar puntos en la noria o cara en los dados.</p> <p>Identificar la posición de una figura tridimensional.</p> <p>Identificar rectángulos, aunque incluso no estén sus lados.</p> <p>Identificar que se conserva la unidad de medida en cualquier posición y la medida de los segmentos cuando se cambian de posición.</p> <p>El área, el espacio que ocupa cada conjunto es invariante por giros o traslaciones.</p> <p>En la rotación se conserva invariante la medida de la circunferencia.</p> <p>Identificar las relaciones de lateralidad y cercanía entre ventana y cara de la puerta.</p> <p>Percibir la inclinación (el ancho y el largo en el techo), aunque no se vea en una de las vistas.</p>	---
Percepción de la posición en el espacio	<p>Identificar los dos segmentos menores que sumados forman el largo e identificar los dos anchos menores que sumados forman el ancho.</p> <p>Identificar que un segmento es vertical, otro es horizontal y el otro es oblicuo.</p> <p>Identificar la posición relativa entre los conjuntos, con relación a las paredes y dentro de la zona de mesas; o la posición relativa con los otros elementos (fondo, cara opuesta a ventana).</p> <p>Identificar elementos correspondientes en una rotación antihoraria de 90°, 270° y 360° (noria).</p> <p>Comprender las perspectivas desde arriba (dados y puerta giratoria) o la perspectiva desde otro punto de vista (garaje).</p> <p>Comprender los cambios de posición en cada representación (puertas giratorias).</p> <p>Comprender las medidas según la perspectiva.</p>	<p>Identificar los puntos interiores y exteriores a una circunferencia.</p> <p>Identificar puntos alineados que determinan la mediatriz de un segmento.</p>

Percepción de las relaciones espaciales	<p>Identificar que la longitud buscada (borde del mostrador) es la suma de medida de los segmentos que lo componen. Identificar hipotenusa y catetos.</p> <p>La relación entre las áreas de los rectángulos para obtener el área total (apartamento). Identificar que el área de la heladería es el área de un rectángulo menos el área del polígono que determina el área de servicio y el mostrador. Identificar que son cuatro los conjuntos (cuadrados) que caben en el área de mesas (rectángulo).</p> <p>Identificar los lados paralelos y los perpendiculares.</p> <p>Perpendicularidad si utiliza rectángulos o triángulos rectángulos.</p> <p>Identificar medida de los lados. medidas en segmentos paralelos, el radio a partir de la altura señalada.</p> <p>Identificar que los puntos P, Q, R y S se corresponden en una Rotación de 90° antihorario. Identificar que el punto P se corresponde con S en la rotación de 270° antihoraria.</p> <p>Si un dado esta debajo de otro de la misma medida, las caras horizontales quedan ocultas y las verticales no cuentan en la perspectiva superior.</p> <p>Cercanía de la ventana con la puerta y lejanía de la ventana con la pared del fondo.</p> <p>Identificar el largo del techo con el largo de la vista lateral y el ancho del techo como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.</p> <p>Determinar la relación entre los sectores y las partes cerradas y abiertas.</p>	<p>Percibir la igualdad de distancias.</p> <p>Un punto interior a un semiplano de borde la mediatriz de un segmento.</p> <p>Los puntos cumplen con estar a menor distancia de la semirrectas lados de un ángulo.</p> <p>Existen dos puntos que cumplen con equidistar con los extremos de un segmento y pertenecer a la circunferencia.</p> <p>Los tres puntos que cumplen con estar 3cm de un punto fijo y 2cm de una recta.</p>
Discriminación visual	<p>Diferenciar figuras por los elementos que suministra, rectángulo mayor y menor (apartamento); posición entre puerta y ventana (garaje); los posibles polígonos en los que se puede dividir el suelo de la heladería.</p> <p>División del mapa en rectángulos y división del vertido en polígonos.</p> <p>Diferenciar los segmentos que constituyen el borde (mostrador) y la altura del ancho techo (garaje).</p>	<p>Reconocer los puntos a igual, menor o mayor distancia.</p>

Formar el triángulo rectángulo.

Todas las unidades de medida son la misma en las baldosas.

Reconocer elementos comunes en las dos perspectivas (garaje) y lo común entre las tres representaciones (puerta giratoria).

Memoria visual La forma del rectángulo, triángulo rectángulo en cualquier posición. ---
La forma del cuadrado circunscrito al círculo que contiene a la mesa con las sillas.

Tabla de las sumas de las componentes del sentido espacial para análisis SPSS

Tabla 2. Sumas de las componentes del sentido espacial en las tareas de PISA para SPSS

Est	AP _C	AP _H	H1 _C	H1 _H	H2 _C	H2 _H	H3 _C	H3 _H	PE _C	PE _H	N1 _C	N1 _H	N2 _C	N2 _H	DA _C	DA _H	G1 _C	G1 _H	G2 _C	G2 _H	P1 _C	P1 _H	P2 _C	P2 _H	P3 _C	P3 _H	NOTA
E1	14	8	5	5	0	0	0	0	0	0	2	0	13	2	0	0	16	7	0	0	10	5	0	0	4		6
E2	12	9	15	17	9	10	12	6	5	6	9	2	13	2	10	6	16	7	0	0	10	5	9	3	4		4
E3	14	9	16	17	0	0	0	0	0	0	2	0	13	2	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	4		5
E4	0	0	16	16	0	0	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4		5
E5	14	10	16	16	7	5	11	8	5	3	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	11	3	4		7
E8	11	9	16	16	9	7	1	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	8	6	10	5	0	0	4		4
E10	14	10	4	7	10	4	8	3	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	1	4	8	2	8	3	0		4
E11	12	9	19	16	9	7	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4		6
E12	14	9	16	16	9	7	14	12	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4		6
E13	6	3	16	16	3	3	14	11	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	13	9	10	5	5	0	0		7
E15	12	9	16	16	3	3	11	7	4	2	7	2	9	1	10	6	16	7	13	9	10	5	4	0	2		7
E16	13	8	15	15	0	0	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	6	4	10	5	4	0	4		5
E17	13	8	16	16	9	6	8	2	0	0	7	2	13	2	0	0	16	7	12	5	9	5	0	0	4		5
E18	13	8	9	10	2	1	14	11	0	0	9	2	13	2	10	6	16	7	8	2	0	0	0	0	0		4
E19	8	4	9	10	7	4	0	0	5	6	9	2	13	6	10	6	16	7	7	4	7	5	0	0	4		1
E20	10	5	5	6	10	5	11	6	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	0		7
E21	12	9	0	0	0	0	0	0	4	1	9	2	13	2	10	6	16	7	13	9	10	5	3	1	4		3
E23	12	9	9	10	10	5	8	3	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	6	4	10	5	5	0	4		4
E24	8	4	9	10	10	5	0	0	3	5	2	0	13	6	10	6	16	7	5	2	10	5	5	0	4		3
E25	10	5	9	10	9	5	11	5	0	0	2	0	13	2	10	6	16	7	5	3	0	0	5	0	4		3
E27	11	9	9	10	9	5	11	7	0	0	7	2	13	6	10	6	16	7	13	9	6	5	0	0	4		9
E28	11	9	14	16	3	0	14	10	4	1	7	2	13	2	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	0		6
E29	0	0	9	10	3	2	6	2	0	0	7	2	13	6	10	4	16	7	5	0	10	5	0	0	4		5

E30	9	4	16	16	9	7	14	11	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	10
E31	7	3	7	10	1	0	3	0	0	0	2	0	13	6	8	1	16	7	1	0	5	3	0	0	4	5
E32	14	9	16	16	9	7	12	6	5	6	8	2	13	2	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	10
E33	7	4	4	4	3	2	11	7	8	6	7	2	13	6	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	0	6
E34	9	4	16	16	9	7	11	7	0	0	8	2	13	2	10	7	16	7	8	2	10	5	0	0	4	8
E38	7	3	0	0	0	0	5	3	0	0	9	2	13	1	10	6	16	7	6	4	0	0	0	0	0	4
E40	11	9	16	16	8	7	15	12	4	1	7	2	13	1	0	0	16	7	13	9	10	5	11	3	4	7
E41	13	8	16	16	9	7	13	8	5	5	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	11	3	4	7
E43	14	9	16	16	9	7	13	10	5	6	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	11	3	4	9
E44	12	9	16	16	9	7	14	13	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	10
E45	2	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	6	7	1	0	0	0	0	0	0	4	5
E46	12	9	10	10	0	0	13	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	11	3	4	7
E47	12	9	6	9	3	3	10	5	0	0	2	0	13	6	10	6	7	1	0	0	0	0	0	0	0	5
E48	13	9	8	10	10	5	11	6	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	4	11
E49	14	9	16	16	9	8	14	11	7	6	9	2	13	6	10	6	16	7	3	2	10	5	0	0	4	12
E50	12	9	0	0	9	5	14	11	4	6	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	12
E51	13	9	16	16	8	8	15	10	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	12
E52	13	9	8	10	9	6	14	11	5	6	8	2	6	1	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	11
E53	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	0	7
E54	13	9	16	16	9	7	15	12	4	2	9	2	13	2	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	0	11
E55	10	5	15	16	9	7	11	7	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	9
E56	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	6	16	7	3	0	0	0	0	0	0	3
E57	7	5	5	10	8	5	7	4	5	4	5	1	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
E58	11	7	12	17	0	0	1	2	3	5	1	0	13	6	10	6	16	7	9	4	0	0	0	0	4	6
E59	8	6	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E60	7	4	0	0	10	5	13	11	3	5	7	2	13	6	10	6	16	7	8	4	10	5	6	1	4	9
E61	12	9	16	16	9	7	11	7	0	0	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5
E62	12	9	9	10	9	7	14	11	5	6	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	11
E63	12	9	16	16	9	8	14	12	8	6	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	4	0	4	12

E64	0	0	15	16	9	7	0	0	0	0	0	0	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	4	4
E65	11	9	16	16	9	7	11	7	4	1	9	2	13	1	8	1	16	7	8	4	0	0	0	0	4	9
E66	13	9	5	10	9	6	0	0	4	1	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
E67	6	3	6	9	0	0	11	3	0	0	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
E68	0	0	7	10	9	7	11	8	5	4	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
E69	11	9	16	16	9	7	11	7	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	5	2	0	0	0	0	0	12
E70	7	4	15	16	0	0	7	1	0	0	9	2	13	1	10	6	16	7	13	9	7	1	0	0	4	7
E71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	13	1	0	0	16	7	0	0	7	5	3	1	4	6
E72	8	3	0	0	6	3	12	7	2	0	0	0	0	0	10	6	16	7	0	2	0	0	0	0	4	5
E73	11	9	6	9	0	0	10	5	3	5	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	7
E74	11	9	13	17	0	0	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	8	3	10	5	0	0	4	10
E75	12	9	16	16	9	7	14	11	0	0	9	2	13	1	0	0	16	7	13	9	10	5	0	0	0	10
E76	11	9	0	0	3	3	8	4	8	3	2	0	7	1	10	6	16	7	4	2	10	5	5	0	4	1
E77	11	10	7	10	8	8	0	0	5	6	7	2	13	6	10	6	16	7	7	4	0	0	0	0	0	7
E78	11	9	16	16	7	7	14	11	3	5	9	2	13	1	0	0	16	7	13	9	10	5	0	0	4	12
E81	12	9	16	16	9	7	0	0	0	0	9	2	0	0	10	6	16	7	8	4	10	5	0	0	4	5
E82	0	0	15	17	7	4	8	3	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	7	4	10	5	0	0	0	12
E83	8	4	16	17	9	7	0	0	5	2	9	2	13	1	10	6	16	7	8	4	10	5	0	0	4	10
E84	0	0	9	10	0	0	10	3	0	0	0	0	0	0	10	6	16	7	7	4	0	0	0	0	0	5
E85	0	0	16	16	9	7	0	0	0	0	9	2	0	0	0	0	16	7	9	5	10	5	5	0	4	9
E86	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	13	6	10	6	16	0	0	0	10	5	0	0	4	3
E87	11	9	9	10	7	2	0	0	0	0	7	2	13	1	10	6	16	7	7	2	10	5	0	0	4	11
E88	7	4	16	16	0	0	11	2	0	0	3	1	13	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
E89	11	10	16	16	9	7	14	11	5	5	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	6	1	4	8
E90	7	3	16	16	9	7	14	11	0	0	5	1	0	0	10	6	16	7	8	4	0	0	0	0	0	4
E91	14	10	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	10	6	7	1	4	3	0	0	0	0	4	3
E92	7	4	0	0	0	0	8	4	0	0	5	1	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	1
E93	11	10	16	16	9	8	11	7	4	1	9	2	13	6	10	6	16	7	8	4	0	0	0	0	4	12
E94	12	10	12	8	9	6	12	8	3	5	9	2	13	1	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	5

E95	7	4	12	14	9	5	0	0	0	0	9	2	13	1	10	7	16	7	0	0	10	5	0	0	4	6
E96	7	4	16	17	8	9	13	12	4	6	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	11	3	4	9
E97	12	10	16	16	8	6	0	0	0	0	7	2	13	1	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	4	5
E98	12	10	16	16	9	8	13	11	4	2	7	2	13	1	10	6	16	7	5	2	8	5	0	0	4	8
E99	11	5	4	9	8	4	0	0	5	4	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E100	11	9	15	16	9	8	0	0	0	0	9	2	13	1	10	6	16	7	13	9	10	5	5	0	4	11
E101	11	9	8	10	0	0	10	2	0	0	7	2	13	6	10	6	16	7	2	0	10	5	5	0	4	7
E102	6	4	9	10	8	6	12	10	2	0	2	0	13	1	10	6	16	7	0	0	10	5	5	0	4	3
E103	8	4	5	4	9	7	11	7	5	6	2	0	13	1	10	6	16	7	11	7	10	5	5	0	4	5
E104	11	10	16	17	7	7	12	10	8	5	9	2	13	1	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	9
E105	7	4	12	12	9	4	9	4	5	6	9	2	0	0	10	7	16	7	7	4	10	5	0	0	4	4
E106	11	10	6	5	7	4	13	11	7	6	9	2	13	6	10	6	16	7	11	5	10	5	0	0	4	8
E107	13	9	6	5	9	8	14	11	0	0	9	2	13	1	10	6	16	7	6	0	10	5	0	0	4	4
E108	12	9	4	4	7	3	7	5	5	6	9	2	6	1	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	4	4
E109	11	10	16	16	3	2	13	11	4	2	7	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	8
E110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	4	3
E111	8	4	16	17	9	8	8	5	0	0	9	2	13	1	10	6	16	7	5	1	10	5	0	0	4	4
E112	12	9	7	10	0	0	14	11	5	3	6	1	0	0	10	7	16	7	0	0	10	5	6	1	4	5
E113	12	10	16	17	9	8	14	11	8	7	9	2	13	6	10	6	16	7	13	9	10	5	0	0	4	10
E114	13	10	7	7	6	1	7	3	7	7	9	2	0	0	10	7	16	7	13	9	10	5	3	0	4	6
E115	13	9	0	0	3	0	14	11	4	6	3	1	13	1	10	6	16	7	6	0	10	5	0	0	4	5
E116	0	0	10	11	8	6	0	0	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	4
E117	6	3	7	11	9	7	0	0	0	0	9	2	0	0	10	6	16	7	5	0	10	5	5	0	4	5
E118	0	0	7	10	9	8	14	11	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	6	2	0	0	0	0	0	9
E119	13	10	16	16	9	8	11	7	0	0	9	2	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
E120	13	10	16	17	8	6	5	2	0	0	5	1	13	1	0	0	16	7	5	2	10	5	0	0	0	4
E121	7	3	15	16	9	8	11	7	0	0	9	2	13	6	10	7	16	7	0	0	0	0	0	0	0	12
E122	0	0	0	0	3	3	0	0	0	0	5	1	13	1	10	6	16	7	5	2	10	5	5	0	4	8
E123	13	10	0	0	0	0	9	5	0	0	2	0	13	6	10	6	16	7	0	0	10	5	0	0	0	11

E124	13	10	7	10	8	9	11	7	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
E125	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	10	6	16	7	9	5	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
E126	7	3	7	10	6	5	14	11	0	0	3	1	13	1	10	6	16	7	9	5	10	5	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
E128	10	10	16	16	9	8	0	0	4	4	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
E129	0	0	16	16	8	9	14	11	0	0	0	0	0	0	10	6	16	7	9	4	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
E130	14	9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	13	6	0	0	16	7	6	2	10	5	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
E132	0	0	8	10	8	8	11	7	0	0	9	2	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
E134	5	4	7	10	9	7	14	11	0	0	7	2	13	6	10	6	16	7	8	4	10	5	6	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
E136	10	10	16	17	9	8	8	5	0	0	3	1	13	6	10	6	16	7	5	2	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
E138	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	13	6	10	6	16	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
E139	13	7	0	0	0	0	10	5	0	0	9	2	13	6	0	0	16	7	5	2	10	5	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
E141	10	10	0	0	9	8	0	0	7	3	9	2	13	1	10	7	16	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12

Tablas de correlaciones

Tabla X. *Correlación del manejo de conceptos geométricos con la nota*

	Nota	AP_C	H1_C	H2_C	H3_C	PE_C	N1_C	N2_C	DA_C	G1_C	G2_C	P1_C	P2_C	P3_C
Nota			0,311**; 0,000	0,271**; 0,002	0,339**; 0,000		0,380**; 0,000	0,307**; 0,001			0,246**; 0,006			
AP_C			0,191*; 0,035		0,244**; 0,007	0,279**; 0,002	0,302**; 0,001	0,187*; 0,039			0,231*; 0,010	0,197*; 0,029		
H1_C	0,311**; 0,000	0,191*; 0,035		0,462**; 0,000	0,287**; 0,001		0,428**; 0,000	0,224*; 0,013			0,428**; 0,000	0,193*; 0,033		

H2_C	0,271**; 0,002		0,462**; 0,000			0,320**; 0,000	0,238**; 0,008	0,387**; 0,000			0,221*; 0,014				
H3_C	0,339**; 0,000	0,244**; 0,007	0,287**; 0,001	0,320**; 0,000			0,253**; 0,005	0,275**; 0,002			0,335**; 0,000	0,182*; 0,044			
PE_C		0,279**; 0,002		0,238**; 0,008	0,253**; 0,005				0,228*; 0,012		0,206*; 0,023	0,196*; 0,031			
N1_C	0,380**; 0,000	0,302**; 0,001	0,428**; 0,000	0,387**; 0,000	0,275**; 0,002			0,447**; 0,000		0,437**; 0,000	0,447**; 0,000	0,319**; 0,000			
N2_C	0,307**; 0,001	0,187*; 0,039	0,224*; 0,013					0,447**; 0,000		0,533**; 0,000	0,263**; 0,003	0,298**; 0,001	0,211*; 0,019		
DA_C								0,228*; 0,012							
G1_C							0,437**; 0,000	0,533**; 0,000			0,369**; 0,000	0,477**; 0,000	0,364**; 0,000		
G2_C	0,246**; 0,006	0,231*; 0,010	0,428**; 0,000	0,221*; 0,014	0,335**; 0,000	0,206*; 0,023	0,447**; 0,000	0,263**; 0,003		0,369**; 0,000		0,501**; 0,000	0,250**; 0,006	0,367**; 0,000	
P1_C		0,197*; 0,029	0,193*; 0,033					0,319**; 0,000	0,298**; 0,001		0,477**; 0,000	0,501**; 0,000		0,319**; 0,000	0,574**; 0,000
P2_C					0,182*; 0,044	0,196*; 0,031						0,250**; 0,006	0,319**; 0,000		0,298**; 0,001
P3_C								0,211*; 0,019		0,364**; 0,000	0,367**; 0,000	0,574**; 0,000	0,298**; 0,001		

** . La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

Tabla X. *Correlación de habilidades de visualización con la nota*

	Nota	AP_H	H1_H	H2_H	H3_H	PE_H	N1_H	N2_H	DA_H	G1_H	G2_H	P1_H	P2_H	P3_H
Nota		0,227*; 0,012	0,296**; 0,001	0,361**; 0,000	0,367**; 0,000		0,390**; 0,000	0,293**; 0,001		0,204*; 0,024	0,245**; 0,007			
AP_H	0,227*; 0,012		0,180*; 0,048		0,216*; 0,017	0,276**; 0,002	0,308**; 0,001				0,263**; 0,003			
H1_H	0,296**; 0,001	0,180*; 0,048		0,529**; 0,000	0,254**; 0,005		0,404**; 0,000				0,345**; 0,000			
H2_H	0,361**; 0,000		0,529**; 0,000		0,434**; 0,000	0,206*; 0,023	0,384**; 0,000				0,197*; 0,029			
H3_H	0,367**; 0,000	0,216*; 0,017	0,254**; 0,005	0,434**; 0,000		0,317**; 0,000	0,309**; 0,001			0,180*; 0,047	0,371**; 0,000			
PE_H		0,276**; 0,002		0,206*; 0,023	0,317**; 0,000		0,192*; 0,034		0,235**; 0,009		0,245**; 0,007		0,198*; 0,029	
N1_H	0,390**; 0,000	0,308**; 0,001	0,404**; 0,000	0,384**; 0,000	0,309**; 0,001	0,192*; 0,034		0,308**; 0,001		0,445**; 0,000	0,434**; 0,000	0,302**; 0,001	0,178*; 0,049	
N2_H	0,293**; 0,001						0,308**; 0,001			0,260**; 0,004				
DA_H						0,235**; 0,009								
G1_H	0,204*; 0,024				0,180*; 0,047		0,445**; 0,000	0,260**; 0,004			0,327**; 0,000	0,451**; 0,000		
G2_H	0,245**; 0,007	0,263**; 0,003	0,345**; 0,000	0,197*; 0,029	0,371**; 0,000	0,245**; 0,007	0,434**; 0,000			0,327**; 0,000		0,443**; 0,000	0,266**; 0,003	
P1_H							0,302**; 0,001			0,451**; 0,000	0,443**; 0,000		0,181*; 0,046	
P2_H						0,198*; 0,029	0,178*; 0,049				0,266**; 0,003	0,181*; 0,046		
P3_H														

*. La correlación es significativa en el nivel 0,05 (bilateral).

**.. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

	Correlación Nota Conceptos	Regresión Total
Nota		
AP_C		
H1_C	0,311**; 0,000	0,559
H2_C	0,271**; 0,002	0,041
H3_C	0,339**; 0,000	0,915
PE_C		
N1_C	0,380**; 0,000	0,753
N2_C	0,307**; 0,001	0,795
DA_C		
G1_C		
G2_C	0,246**; 0,006	0,985
P1_C		
P2_C		
P3_C		

	Correlación Nota Habilidades	Regresión Total
Nota		
AP_H	0,227*; 0,012	0,227
H1_H	0,296**; 0,001	0,531
H2_H	0,361**; 0,000	0,012
H3_H	0,367**; 0,000	0,51
PE_H		
N1_H	0,390**; 0,000	0,415
N2_H	0,293**; 0,001	0,116
DA_H		
G1_H	0,204*; 0,024	0,814
G2_H	0,245**; 0,007	0,913
P1_H		
P2_H		
P3_H		

	Correlación débil o negativa Nota Conceptos
Nota	
AP_C	r=0,153; p=0,093
H1_C	
H2_C	
H3_C	
PE_C	r=0,095; p=0,298
N1_C	
N2_C	
DA_C	r=-0,16; p=0,079
G1_C	r=0,159; p=0,079
G2_C	
P1_C	r=0,077; p= 0,400
P2_C	r=-0,104; p= 0,254
P3_C	r=-0,08; p=0,379

	Correlación débil o negativa Nota Habilidades
Nota	
AP_H	
H1_H	
H2_H	
H3_H	
PE_H	r=0,097; p= 0,285
N1_H	
N2_H	
DA_H	r=-0,141; p= 0,120
G1_H	
G2_H	
P1_H	r=0,075; p= 0,412
P2_H	r=-0,046; p=0,615
P3_H	