Preprint del artículo: García, A., Ramírez, R. y Rodríguez, M. (2025). Reposando el concepto de triángulo mediante la métrica del taxista. SUMA, 108, 79-88

Reposando el concepto de triángulo mediante la métrica del taxista

Alejandro García López 1
agl505@correo.ugr.es

Rafael Ramírez Uclés
Dep. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, *rramirez@ugr.es*

Miguel L. Rodríguez
Dep. Matemática Aplicada, Universidad de Granada, *miguelrg@ugr.es*

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del proceso de aprendizaje matemático, al estudiantado se le presentan conceptos y propiedades matemáticas con diferentes niveles de formalización. En geometría, en ocasiones, es habitual partir de definiciones acompañadas de representaciones visuales, sin profundizar en las múltiples propiedades que las relacionan. En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo fomentar la comprensión del concepto de triángulo a través de una comparación entre la métrica usual (euclídea) y la métrica del taxista.

Una de las teorías más influyentes en la enseñanza de la geometría es la teoría de los niveles de Van Hiele (Gutiérrez, 2006), que identifica un nivel superior (nivel 5) donde el alumnado es trabaja con diferentes sistemas axiomáticos, como la geometría usual y la no euclídea. Sin embargo, debido a la complejidad inherente a este nivel, a menudo se omite en la enseñanza, especialmente en la no universitaria. No obstante, la métrica del taxista, incluso en los niveles de secundaria y bachillerato, ofrece una oportunidad valiosa para introducir y explorar distintos sistemas axiomáticos en el aula.

Este artículo se centrará principalmente en el estudio de uno de los conceptos geométricos más sencillos: el triángulo, y, como veremos a lo largo del trabajo, se tratarán de establecer propiedades análogas en la métrica del taxista y en la euclídea, que no son triviales. Este proceso reflexivo permite "reposar curricularmente" aspectos relativos a la comprensión conceptual de los contenidos geométricos básicos, como en este caso el concepto de polígono de tres lados (Ramírez y Flores, 2016)

Para ello, deberemos hacer una cuidadosa aproximación a este concepto, estableciendo una base formal de la geometría en otra métrica. Creemos que al alumnado le resultará enriquecedor a la par que complejo, puesto que buscamos romper algunas de las ideas de la geometría euclídea. En este sentido, expondremos motivaciones para el diseño de distintas tareas que puedan formar parte tanto de una sesión en el proyecto ESTALMAT, una sesión de enriquecimiento o una tarea rica con distintos niveles de dificultad para el aula ordinaria.

Previamente al trabajo con la métrica del taxista, retamos al estudiantado (y al lector) a responder a estas preguntas: Dados tres puntos no alineados en el plano, ¿determinan un único triángulo? ¿Por qué hablamos de triángulos (3 lados) y no de triláteros (tres lados)? Dados tres puntos equidistantes en el plano, ¿determinan un único triángulo equilátero (lados iguales) o "equiángulo" (ángulos iguales)? Quizás estas preguntas puedan resultarnos triviales en la métrica euclídea, pero veremos la riqueza que aporta al significado el hecho de trasladar esta reflexión a otras métricas.

2. TRAMA CUADRADA Y MÉTRICA DEL TAXISTA

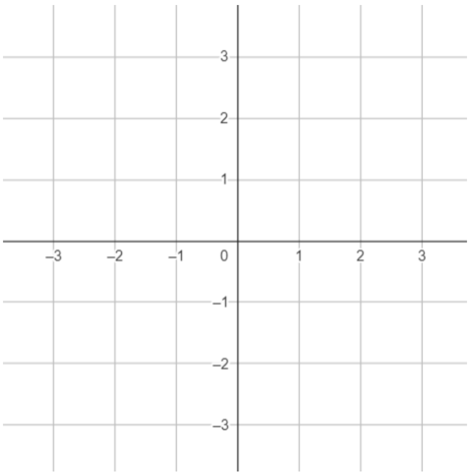
Con el fin de captar el interés inicial, así como de desarrollar su capacidad de entendimiento de las distintas definiciones de conceptos geométricos, trabajaremos en el espacio de la trama cuadrada, debido a sus similitudes con la forma de una ciudad.

La trama cuadrada es el conjunto formado por todas las rectas verticales y horizontales que poseen una coordenada entera, es decir:

$$TC = (R \times Z) \cup (Z \times R)$$

Si representamos este conjunto en el plano, nos quedaría la siguiente figura:

Figura 1
Trama cuadrada



Este espacio nos resulta muy útil, puesto que se relacionará con un conjunto de calles horizontales y verticales de una ciudad, donde cada intersección entre rectas representa un cruce en dicha ciudad. Esta disposición es la que intuitivamente le dará la configuración de ciudad, y de ahí que utilicemos un nombre más intuitivo como métrica del taxista o de Manhattan, por el entramado cuadriculado de este barrio de Nueva York (Krause, 1975; Malkevitch, 2017). En esta trama cuadrada, la "distancia real" entre todos puntos vendría determinada por la longitud del camino más corto que los une pudiéndonos desplazar únicamente por las calles horizontales y verticales. Por ejemplo, en la Figura 1 para desplazarnos desde el punto (0,0) hasta el punto (2,2) podemos utilizar varios caminos mínimos que todos tienen longitud 4, correspondientes a dos desplazamientos horizontales hacia la derecha de longitud 1 cada uno y dos desplazamientos verticales de longitud 1 cada uno de ellos. Es interesante ver que se pueden determinar todos los caminos mínimos posibles utilizando codificaciones para los movimientos permitidos (D: desplazamiento horizontal Derecha; I: desplazamiento horizontal Izquierda; A: Desplazamiento vertical hacia arriba y B: Desplazamiento vertical hacia abajo) y analizar las permutaciones posibles. Así, por ejemplo, uno de los caminos mínimos que une el punto (0,0) con el punto (2,2) sería DDAA, que tendría longitud 4.

3. FORMALIZACIÓN

En esta sección estableceremos la secuenciación didáctica propuesta para que, tanto alumnado como profesorado investiguen y desarrollen conceptos e ideas sobre la métrica del taxista, buscando siempre establecer similitudes y diferencias con la métrica usual en las matemáticas escolares, la euclídea.

3.1. Tarea I: Introduciendo la métrica del taxista

Una de las características principales de la métrica euclídea es su facilidad para calcular distancias dados dos puntos. La métrica del taxista "formal" en el espacio n-dimensional, se define de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

donde x = $(x_1, \dots, x_n)$ e y = $(y_1, \dots, y_n)$

Particularmente, en el caso del plano, quedaría

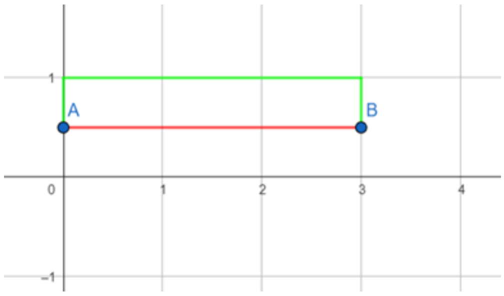
$$f(x,y) = \|x-y\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

donde x = (x_1, x_2) e y = (y_1, y_2).

Resulta interesante estudiar si esta definición nos sirve en la trama cuadrada definida, o si, por el contrario, debemos introducir alguna variación. Estudiar la distancia entre dos puntos, a priori, puede resultar sencillo: únicamente debemos encontrar el camino más corto entre dichos puntos y medirlo.

Se invita aquí al alumnado a que tomen distintos puntos dentro de nuestro espacio, encuentren dicho camino y calculen cuánto mide. ¿Coincide siempre dicha medida con el valor de la función métrica entre esos dos puntos? En la siguiente figura, observamos cómo claramente esto no se cumple:

Figura 2: *Distancia en la métrica del taxista en el plano (rojo) y distancia real en la trama cuadrada (verde) entre A y B.*



Por lo tanto, la definición de función “formal” métrica del taxista puede resultarnos poco útil en este espacio. Se invita a los estudiantes a, con el mayor rigor matemático posible, establecer una definición de distancia en este espacio métrico.

Esta tarea tiene dos propósitos: El primero es que el alumnado sea capaz de establecer por su cuenta una definición, pues así se logrará una mayor profundización en los aspectos formales. Una vez realizada, se “reposará” el concepto de distancia asociado a la longitud del camino mínimo. A lo largo de su vida, el alumnado escuchará la frase "el camino más corto es siempre la línea recta". Esta primera tarea muestra al estudiante que esto no siempre es así; en una ciudad, no siempre es posible ir en línea recta, por lo que la distancia entre dos puntos no tiene por qué ser la misma.

El segundo propósito es introducir una nueva tarea. Probablemente, mientras realizaban la Tarea 1, habrán observado una propiedad muy interesante: el que pueden existir varios caminos de distancia mínima entre dos puntos.

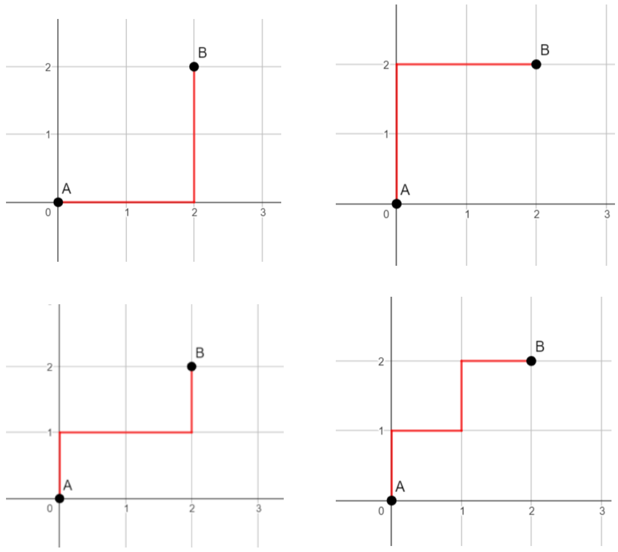
3.2. Tarea II: El concepto de segmento

Una vez que se ha trabajado el concepto de distancia, podemos empezar a trabajar con los objetos geométricos básicos**.** En el espacio euclídeo es habitual introducir el concepto de triángulo (3 ángulos) a partir del concepto de polígono de tres lados. El concepto de lado, va asociado a segmento, que en la métrica euclídea se define fácilmente a partir de la línea recta o el camino más corto entre los dos extremos.

Como comentábamos anteriormente, el propio alumnado, al realizar la tarea anterior, se habrá dado cuenta de que, en ocasiones, dados dos puntos se pueden establecer varios caminos de distancia mínima (segmentos) entre ellos. Por ejemplo, la siguiente figura muestra posibles segmentos entre los puntos A= (0,0) y B= (2,2).

Figura 3

Posibles caminos entre dos puntos



Claramente, todos estos caminos recorren la misma distancia, cuatro unidades; es decir, existen cuatro segmentos distintos que unen los puntos A y B.

El alumnado puede comenzar a reflexionar sobre propiedades que son válidas en la métrica euclídea, pero que no se cumplen en este espacio métrico. Por ejemplo, en la métrica del taxista, el segmento que une dos puntos dados no tiene por qué ser único, a diferencia de lo que ocurre en la métrica usual.

Esta tarea resulta de vital importancia en nuestra secuenciación didáctica; es desarrollar el significado de segmento, siendo el mismo quien realice el trabajo principal para llegar a su definición. Notemos cómo el concepto de segmento siempre va asociado a su unicidad, y, en nuestro caso, esto no siempre es así.

Además, esta propiedad resulta muy útil, puesto que permite realizar varias tareas de ampliación, las cuales contestarán preguntas como: ¿cuándo el segmento que une dos puntos es único?, ¿existe un número máximo de segmentos entre dos puntos?, ¿existe alguna forma de calcular el número de segmentos entre dos puntos?, etc.

Dada la complejidad de estas preguntas y de otras similares, puede que no se lleguen a respuestas de una manera sencilla. Aun así, el mero hecho de trabajarlas hace que profundicen realmente en el significado de segmento.

Una vez establecido el concepto de segmento en la trama cuadrada, resulta más sencillo abordar nociones geométricas más complejas. El objetivo de este artículo es llegar a establecer la idea de triángulo en nuestra métrica; sin embargo, necesitamos un concepto previo fundamental, un concepto que además permitirá proponer varias tareas de ampliación por su riqueza: el concepto de puntos alineados o colinealidad de puntos.

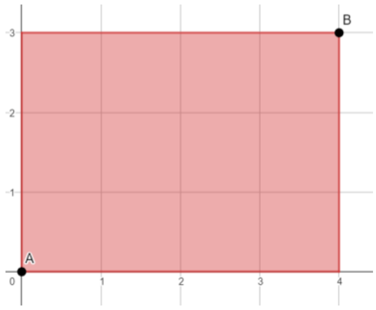
3.3. Tarea III: Puntos alineados

En la métrica usual, una posible forma de detectar si tres puntos están alineados es comprobar si uno de ellos pertenece a la recta que determinan los otros dos. Pero sin haber trabajado aún el concepto de recta, podemos utilizar esta propiedad: Tres puntos A, B, C están alineados si d(A,C)=d(A,B)+d(B,C).

Esta definición alternativa nos resulta bastante útil, aunque hay que matizarla. Recordemos que, en nuestro caso, no tiene por qué existir la unicidad del segmento entre dos puntos; por lo tanto, diremos que tres puntos están alineados si alguno de los segmentos que une a los dos más alejados pasa por el otro punto. Se invita a los alumnos a que, dados dos puntos, establezcan qué puntos están alineados con ellos. La siguiente figura muestra los puntos alineados que existen entre A=(0,0) y B=(4,3).

Figura 4

Recinto de puntos alineados entre A y B en Z × Z.



Es decir, si escogemos cualquier punto C de ese rectángulo (y que pertenezca a nuestro espacio, es decir la trama cuadrada), tendremos que A, B y C están alineados.

La figura representa el conjunto de puntos que están alineados con A y B siendo estos los puntos más alejados de la terna de puntos. Aquí se puede ver que, pese a que la definición es equivalente, no es la más práctica, puesto que para ver si tres puntos están alineados, primero deberíamos establecer cuáles son los dos puntos más alejados. Es por ello por lo que la definición equivalente más formal posible es que tres puntos están alineados si pertenecen a la misma recta.

Sin embargo, esta definición no nos sirve (o al menos de momento) puesto que el concepto de recta no se ha presentado; además, el hecho de que dados dos puntos el segmento que los une no sea único, nos hace pensar si, dados dos puntos, la recta que forman dichos puntos es única o no. Como tarea de ampliación se pide al estudiante que investigue el concepto de recta, tratando de identificar cuándo una figura no es una recta y cuándo sí lo es (García, 2024).

Por tanto, para determinar si tres puntos están alineados en la trama cuadrada podemos escoger los dos puntos cuya distancia entre ellos sea mayor, y comprobar si el punto restante está en el rectángulo limitado por estos dos.

Una vez dada esta definición, podemos profundizar en otro concepto. ¿Qué ocurre si los puntos no están en las esquinas (intersecciones de calles)? ¿Qué ocurre si dos puntos están en la misma vertical u horizontal? ¿Y si están en diagonales?

Solo cuando el concepto de colinealidad sea asimilado por parte del alumnado, podremos dar un salto al objeto geométrico objetivo de nuestra secuenciación didáctica: el triángulo. Y, como veremos a continuación, este concepto único en la métrica usual se divide en dos una vez lo introducimos en nuestro espacio métrico.

3.4. Tarea IV: Definición de triángulo

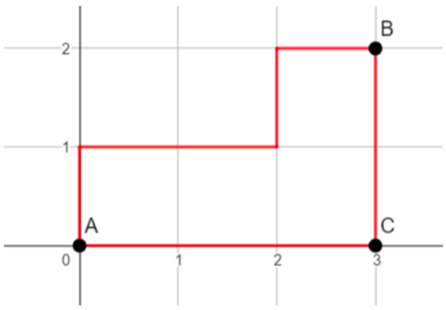
Estamos en disposición de hablar del concepto de triángulo. En primera instancia, se invita al estudiante a dar diferentes definiciones de triángulo. Y es aquí desde donde parte la idea principal de este trabajo: ¿qué es un triángulo, tres ángulos, tres puntos no alineados, tres segmentos…?
Si empezamos por la propia palabra, para definir triángulo, necesitamos la definición de ángulo. De un modo formal, el concepto de ángulo es complejo en la propia métrica euclídea, aunque de

manera intuitiva un ángulo es la "apertura" que forman dos segmentos donde se unen. En el caso de la trama cuadrada, estas "aperturas" vendrían limitadas a los ángulos que en la métrica euclídea corresponden a múltiplos de 90º.

Para evitar la definición de ángulo, ¿podríamos hablar de triángulo como polígono de tres lados? Según lo que hemos comentado anteriormente, podemos hablar de un triángulo como una poligonal cerrada formada por tres segmentos. Pero ¿qué condiciones tienen que tener los segmentos AB, BC y CA?

En la métrica euclídea, cualquier polígono de tres ángulos tiene claramente tres lados y determina tres vértices que son tres puntos no alineados. Sin embargo, esto no ocurre en la métrica del taxista. Observemos la siguiente figura:

Figura 5
¿Triángulo? en la trama cuadrada con la métrica del taxista.



¿Corresponde la Figura 5 a un triángulo? ¿Posee tres ángulos?, ¿Tiene tres lados? He aquí la pregunta de mayor reflexión de esta secuenciación didáctica. Según lo expuesto anteriormente, los puntos A, B y C están alineados, puesto que C pertenece a uno de los segmentos que unen A y B, pero ¿forman AC y CB un mismo "lado"? Así, se deberá realizar una profunda reflexión sobre este aspecto, puesto que hemos alcanzado un resultado muy interesante. No solo hemos encontrado un problema en la definición de triángulo, sino que podríamos formar un "polígono de 2 lados", lo cual es imposible en la métrica usual. Siguiendo lo intuitivo del caso euclídeo, dos segmentos no formaban lados distintos de un polígono si estaban en la misma recta, por lo que nos planteamos qué debería ocurrir para que el polígono tenga tres lados. Es aquí donde para introducir el concepto de trilátero (tres lados) recurrimos a la propiedad de alineación de sus vértices.

Consideramos que la propiedad esencial de un trilátero podría deberse a que sus tres vértices no estén alineados. Esta propiedad no era necesaria en la métrica usual, pues tres puntos estaban alineados si y solo si estaban en la misma recta. Debido al cambio de esta definición, el significado de los conceptos varía.

Planteamos los siguientes convenios:

- Dados tres puntos en la trama cuadrada con la métrica del taxista, diremos que están no alineados si ninguno de ellos pertenece al segmento que une los otros dos. Es decir, ninguno de ellos está en un camino mínimo que une a los otros dos.

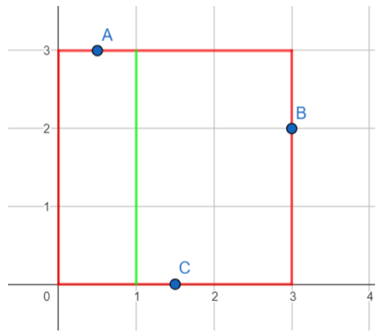
Como hemos mostrado anteriormente, para que el concepto de trilátero y de tres puntos no alineados se corresponda y no dependa de definiciones que involucren a ángulos ni a rectas, podemos plantear la siguiente definición:

- En la trama cuadrada con la métrica del taxista, se define un trilátero como un polígono de tres lados. Es decir, tres segmentos AB, BC y CA que forman una poligonal cerrada, esto es, sin autointersecciones y con A, B y C no alineados.

En este caso, si denotamos los vértices del trilátero por A, B y C, podemos asociarlos a los "ángulos" del trilátero. Si es así, utilizaremos la palabra triángulo (3 ángulos) pudiendo ser a priori en la trama cuadrada 0, 90, 180 y 270º. Es interesante reflexionar si es posible el ángulo 360º y las sumas posibles de los tres ángulos. Tambiém podemos preguntarnos si se cumple aquí que la suma de los ángulos de un triángulo es 180?

Proponemos ahora al alumnado que estudie las distintas propiedades de triángulos y triláteros. Por ejemplo, resulta muy interesante estudiar qué ocurre cuando las dos coordenadas de los vértices no son enteras. Si observamos la Figura 6 nos preguntamos si la poligonal formada cuando unimos los tres vértices mediante segmentos es un trilátero. El camino rojo que une A y C no es un segmento, pues la distancia entre A y C es 4 (se accede por caminos más cortos siguiendo la línea verde). Si los segmentos AB y AC se intersecan, parece que no podamos formar un trilátero entre dichos puntos. Luego no es equivalente el hecho de tres puntos no estar alineados con formar un trilátero.

Figura 6
Trilátero con alguna coordenada no entera.



Aquí invitamos a que establezcan las condiciones para que tres puntos no alineados formen un trilátero.

3.5. Tarea V: Propiedades de triláteros y triángulos

El concepto de triángulo y trilátero en la métrica del taxista es realmente amplio, y podemos tratar de dar una extensa lista de resultados y propiedades que poseen. A continuación, se proponen varias preguntas o resultados interesantes para los que el alumnado (con ayuda siempre del docente) puede reflexionar e incluso, en algunas ocasiones, dar una idea de demostración:

1. ¿Es equivalente ser triángulo y ser trilátero?

2. Tres puntos no alineados con coordenadas enteras forman un trilátero
3. No existe ningún trilátero equilátero de lado impar.
4. ¿Tiene sentido hablar del área de un trilátero?
5. ¿Es equivalente tener tres lados iguales a tener tres ángulos iguales?

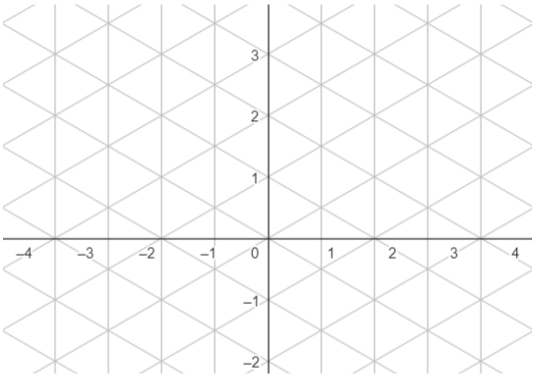
Aunque no se consiga resolver todas ellas, el objetivo principal es reflexionar sobre las preguntas. Que el alumno cuestione propiedades que son triviales en la métrica euclídea puede ser enriquecedor para comprender mejor su significado.

4. Más ampliación ¿Qué ocurre cuando la trama es isométrica?

En el apartado anterior, hemos construido una definición formal de triángulo en la trama cuadrada a través de un recorrido progresivo, introduciendo conceptos clave como segmento y puntos alineados. Este enfoque permite clarificar las propiedades fundamentales de estas figuras y fomentar un razonamiento más riguroso por parte de los alumnos. Ahora, proponemos trasladar esta metodología a la trama isométrica. ¿Cómo se redefinen estos conceptos en un entorno donde las relaciones geométricas cambian? Este ejercicio invita a los estudiantes a explorar, comparar y construir definiciones formales en una nueva estructura, abriendo un espacio para descubrir patrones y propiedades únicas de esta trama.

Definimos la trama isométrica como aquella formada por infinitos triángulos equiláteros de lado 1, es decir:

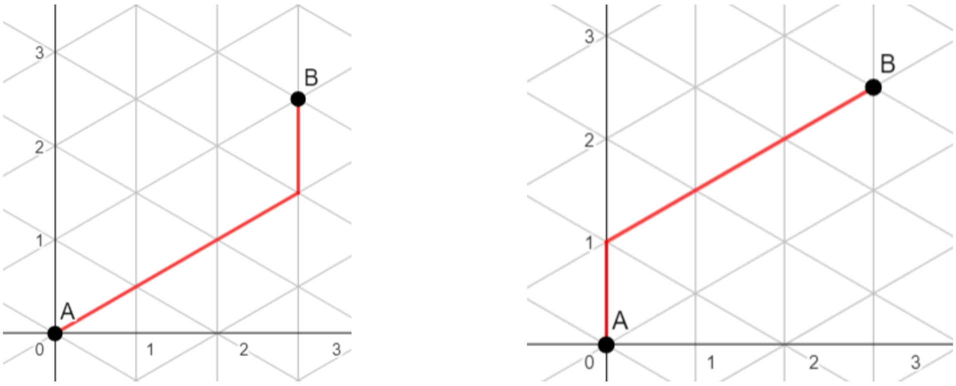
Figura 7
Trama isométrica



Notemos que el eje de abscisas no pertenece al espacio, sin embargo, conviene representarlo con el fin de hacer más sencillo la localización de puntos en esta trama.

Al igual que hemos ido construyendo distintos conceptos geométricos en la trama cuadrada, pedimos a los alumnos que traten de hacer lo mismo en la trama isométrica. El haber trabajado previamente la trama cuadrada hará que este proceso resulte más sencillo, sin embargo, la trama isométrica resulta menos intuitiva, y requiere un mayor nivel geométrico. Análogamente al proceso realizado en la trama cuadrada, el concepto inicial que debemos trabajar es el de segmento y, en consecuencia, el de distancia. Es importante recalcar al alumnado que las definiciones no varían de un espacio a otro, es decir, definimos segmento como uno de los caminos más cortos entre dos puntos, pese a que sus propiedades, forma y características puedan ser distintas dependiendo del espacio y métrica en las que se trabajen, su definición ha de ser universal. Así, los segmentos en la trama isométrica poseen múltiples similitudes a los de la trama cuadrada. Algunos ejemplos de segmentos en esta trama son:

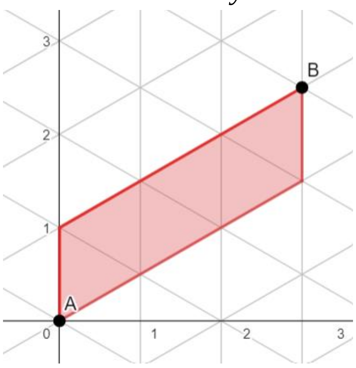
Figura 8
Algunos caminos mínimos entre A y B



Nuevamente, podemos realizar las mismas preguntas que hemos trabajado en la trama cuadrada: ¿existe una forma de calcular el numero de segmentos entre dos puntos?, ¿cuándo existe un único segmento entre dos puntos? El concepto clave que nos permite dar un salto a objetos geométricos más complejos es el de colinealidad. El proceso realizado por el alumno es muy similar al realizado en la trama cuadrada, sin embargo, en esta ocasión, el alumno debería ser capaz de hacerlo de una forma mucho más independiente, puesto que estos dos conceptos en ambas tramas resultan muy similares.

En la trama isométrica, los puntos alineados con A y B son los siguientes:

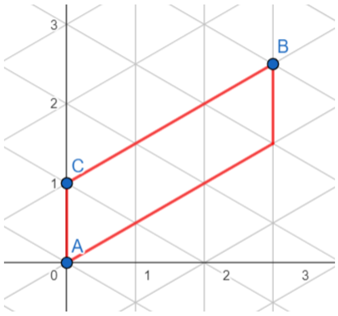
Figura 9
Región que comprende los puntos alineados entre A y B



Resulta interesante estudiar esta figura para el estudiantado, puesto que se trata de una figura muy similar a la obtenida en la trama cuadrada. ¿Tiene esto alguna razón? Además, podemos volver a hacernos algunas preguntas sobre el concepto estudiado: ¿qué ocurre si los puntos no están en vértices de la trama?, ¿son necesariamente paralelogramos?

Para las definiciones, nos enfrentamos a un desafío similar al que abordamos en la trama cuadrada. El concepto de ángulo vuelve a desempeñar un papel crucial en esta definición y, una vez más, presenta ciertas limitaciones, ya que los ángulos en esta trama son necesariamente múltiplos de 60º. Trasladamos a esta trama todo el trabajo realizado en la cuadrada. Así, se puede reflexionar sobre la propiedad de ser triángulo o trilátero en el siguiente caso:

Figura 10
¿Triángulo, trilátero o tres puntos alineados?



Este estudio sirve en gran medida para observar que muchas de las propiedades de los triángulos y triláteros en la trama cuadrada también se cumplen en la trama isométrica.

Así, volvemos a realizar las mismas preguntas que hemos realizado en la Tarea V de la trama cuadrada y podemos ampliarlas a ¿qué propiedades son diferentes entre ambas tramas? La resolución de estas propuestas es de una dificultad considerable. Aún así, el trabajo realizado en la trama cuadrada servirá para haber aportado un conocimiento geométrico suficiente para poder abordar algunas de ellas.

Tarea VI: seguimos ampliando: ¿y si trabajamos en otras tramas?, ¿y si ahora trabajamos otros conceptos como circunferencia, recta, Teorema de Pitágoras…?

Para finalizar, y una vez estudiadas ambas tramas, podemos proponer a los estudiantes que creen su propia trama. La trama rectangular, pentagonal no regular o la trama hexagonal pueden ser algunos ejemplos. Además, estas tramas no tienen por qué ser de una única figura, si no que podemos mezclar algunas de ellas, por ejemplo, podemos considerar la trama cuadrada junto a las rectas diagonales que unen los vértices contrarios de los cuadrados de esta. Así, cada una de las tramas que propongamos poseerá riqueza y complejidad en sí misma, siendo muy interesante su estudio por parte del alumnado.

Por otro lado, al igual que con el concepto de triángulo, se pueden reposar todos los conceptos geométricos que usualmente se introducen en las matemáticas escolares. Por ejemplo, es muy ilustrativo el concepto de circunferencia en la trama isométrica por la diversidad de formas según los centros y radios en vértices o puntos medios. También se pueden cuestionar teoremas conocidos como el de Pitágoras o la existencia de puntos notables en los triángulos/triláteros.

5. CONCLUSIONES

Trabajar con una métrica diferente constituye un desafío complejo para los estudiantes, ya que implica enfrentar dificultades intrínsecas relacionadas con la necesidad de diferenciar el significado de diversos conceptos y características asociadas. Un ejemplo de ello es el proceso de distinguir entre un triángulo, trilátero y tres puntos no alineados, lo que lleva a cuestionarse profundamente qué es un triángulo y a reconsiderar definiciones que podrían haberse dado por sentadas sin ir más allá de la representación visual del concepto. Este proceso de cuestionamiento y análisis fomenta una comprensión más profunda y detallada del contenido matemático. Del mismo modo que se fomenta el sentido numérico trabajando en bases distintas a las 10 para comprender sus propiedades, se puede utilizar la métrica del taxista para desarrollar el sentido espacial y asentar las propiedades de la métrica euclídea.

A pesar de las dificultades que pueden surgir, este tipo de trabajo ofrece una experiencia enormemente enriquecedora para el alumnado. Al explorar y trabajar con significados, propiedades, y al establecer comparaciones entre distintas métricas, los estudiantes no solo desarrollan una visión más amplia y flexible de las matemáticas, sino que también fortalecen su comprensión de la métrica usual al reflexionar sobre sus fundamentos y aplicaciones. Esta actividad fomenta el pensamiento crítico y la habilidad de razonar de manera abstracta, además de promover el aprendizaje significativo, al conectar conceptos que, de otro modo, podrían parecer aislados.

El proceso de analizar y distinguir entre distintas métricas no solo amplía el conocimiento conceptual, sino que también promueve una actitud de indagación y reflexión en los estudiantes, habilidades esenciales tanto para el aprendizaje de la matemática como para el pensamiento científico en general. Por tanto, enfrentarse a estos retos permite que el alumnado profundice su entendimiento, consolidando y expandiendo su perspectiva matemática de una manera que trasciende el aprendizaje memorístico.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto Aulas abiertas al enriquecimiento científico. FCT-22-18347 Financiado por FECYT (Fundación Española para la Ciencia y Tecnología) en su convocatoria de ayudas para el fomento de la cultura científica, tecnológica y de la innovación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GARCIA, A. (2024). Métrica del taxista. Trabajo fin de master. Máster Universitario en Matemáticas de la Universidad de Granada.

GUTIÉRREZ, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (eds.), Geometría para el siglo XXI (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

KRAUSE, E. (1975). Taxicab Geometry: An Adventure in Non-euclidean Geometry. *Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California*.

MALKEVITCH, J. (2017) Taxi! *American Mathematical Society, York College, New York*.

RAMIREZ, R. y FLORES, P. (2016) Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular Revista SUMA, 83, 33-41