

Tema 2.- Introducción a la teoría de decisión estadística

Asignatura: ANÁLISIS DE RIESGOS

Grado en Estadística

(4º Curso - 2º semestre 2024-2025)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

(Este material está protegido por la Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND que permite "descargar las obras y compartirlas con otras personas, siempre que se reconozca su autoría, pero no se pueden cambiar de ninguna manera ni se pueden utilizar comercialmente").



Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 17/02/2025 a 27/05/2025

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Teoría de decisión estadística

La **teoría de decisión estadística** es una rama de la estadística que se centra en la **toma de decisiones** en situaciones de **incertidumbre**, utilizando métodos estadísticos y probabilísticos.

Observaciones

- Proporciona un **marco formal** para evaluar la información disponible y tomar decisiones óptimas en contextos donde los resultados futuros son inciertos.
- La teoría de decisión estadística **es aplicada en una variedad de campos**, como la investigación operativa, la economía, la ingeniería y la medicina, donde la toma de decisiones bajo incertidumbre es común.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Elementos de un problema de decisión

En un problema de decisión estadística, se suelen considerar los siguientes **elementos para la toma de decisiones**:

- **Decisor**.
- **Estados de la naturaleza**.
- Posibles **acciones o alternativas**.
- **Utilidad** o resultados que se obtienen al considerar las diferentes alternativas.
- **Regla de decisión** o criterio.

Decisor

En un problema de decisión estadística, **el decisor** es la persona o entidad **responsable de tomar decisiones** basadas en la información derivada del análisis estadístico.

- El decisor **juega un papel clave** en el puente entre el análisis estadístico y las acciones concretas que se deben tomar.
- **Su habilidad** para comprender, interpretar y aplicar los resultados estadísticos contribuye significativamente a la **efectividad y validez de las decisiones tomadas** en el marco de la teoría de la decisión estadística.

Decisor: puntos clave

A continuación, se explican algunos **puntos clave** sobre el **decisor** en el contexto de un problema de decisión estadística:

- **Definición de objetivos:** el decisor debe tener claros los objetivos del problema antes de iniciar el análisis estadístico. Estos objetivos pueden incluir la minimización de costes, la maximización de beneficios, la mejora de la eficiencia, entre otros.
- **Formulación de hipótesis y diseño del estudio:** esto implica definir las afirmaciones sobre la población que se van a probar y establecer la metodología para recopilar datos.
- **Interpretación de resultados:** después del análisis estadístico, el decisor interpreta los resultados.
- **Toma de decisiones informada:** basándose en la interpretación de los resultados, el decisor toma decisiones informadas. Estas decisiones pueden incluir la aceptación o el rechazo de una hipótesis, la elección de una estrategia específica o la implementación de cambios en un proceso.

Decisor: puntos clave

- **Evaluación de riesgos y beneficios:** el decisor evalúa los riesgos y beneficios asociados con cada opción de decisión.
- **Selección de estrategias óptimas:** el decisor selecciona estrategias que sean óptimas en función de los objetivos y la información estadística disponible. Esto implica equilibrar los beneficios de una estrategia con los riesgos asociados.
- **Comunicación con analistas:** es crucial que haya una comunicación efectiva entre los analistas estadísticos y el decisor. Los analistas deben ser capaces de explicar los métodos utilizados y las implicaciones de los resultados de manera comprensible para el decisor.
- **Responsabilidad por decisiones:** el decisor asume la responsabilidad de las decisiones tomadas y sus consecuencias. Esto incluye reconocer y gestionar la incertidumbre asociada con las decisiones basadas en la estadística.

Estados de la naturaleza

En un problema de decisión estadística, los **estados de la naturaleza** representan las **diferentes situaciones o condiciones posibles que podrían existir** en relación con la variable o fenómeno de interés.

- Cada estado de la naturaleza refleja una **posible configuración o escenario de la población** que está siendo estudiada.
- La idea detrás de los estados de la naturaleza es reconocer que, en muchos casos, la información disponible o **las condiciones de la población pueden variar**.
- Los estados de la naturaleza **ayudan a modelar la incertidumbre asociada con el problema** y **permiten considerar distintas posibilidades** al tomar decisiones.

Estados de la naturaleza: puntos clave

A continuación, se explican algunos **puntos clave** sobre los **estados de la naturaleza** en el contexto de un problema de decisión estadística:

- **Enumeración de escenarios posibles:** identificar y enumerar los diferentes escenarios o condiciones que podrían ocurrir en relación con la variable de interés.
- **Incertidumbre y variabilidad:** ayudan a reconocer la incertidumbre y la variabilidad asociadas con la población.
- **Tomadores de decisiones y estrategias:** se deben seleccionar estrategias que sean apropiadas para cada estado de la naturaleza. Esto implica anticipar y prepararse para distintos escenarios posibles.
- **Probabilidades asociadas:** se suelen asignar probabilidades a cada estado de la naturaleza para reflejar la probabilidad de que ese escenario específico ocurra.
- **Impacto en la toma de decisiones:** se debe evaluar cómo cada posible estado afecta las consecuencias y los resultados asociados con diferentes decisiones.

Estados de la naturaleza: algunos ejemplos

- En el **contexto de pruebas de hipótesis**, los **estados de la naturaleza** podrían representar **diferentes valores del parámetro de interés**.
- En un **problema de control de calidad**, podrían representar **diferentes condiciones de producción** que podrían afectar la calidad del producto.

Posibles acciones o alternativas

En un problema de decisión, las **posibles acciones o alternativas** se refieren a **los diferentes cursos de acción que el decisor puede elegir** en respuesta a la situación o problema en consideración.

Observación

Estas acciones representan las **opciones disponibles para el decisor**, y la **elección** entre ellas **dependerá de los objetivos del problema y de los resultados** de cualquier análisis estadístico o evaluación realizada.

Posibles acciones o alternativas: puntos clave

A continuación, se explican algunos **puntos clave** sobre las **posibles acciones o alternativas** en el contexto de un problema de decisión estadística:

- **Definición de estrategias:** las posibles acciones se traducen comúnmente en estrategias que el decisor puede implementar.
- **Diversidad de opciones:** las alternativas pueden variar en complejidad y naturaleza. Pueden ir desde decisiones simples, como aceptar o rechazar una hipótesis, hasta estrategias más complejas que implican cambios significativos en un proceso o política.
- **Identificación de decisiones clave:** estas decisiones pueden estar relacionadas con la implementación de cambios, la asignación de recursos, la selección de proveedores, entre otros.
- **Relevancia para los objetivos:** cada alternativa debe evaluarse en función de cómo contribuye a alcanzar los objetivos del problema. Las acciones deben ser coherentes con los resultados deseados y alinearse con la misión y visión del tomador de decisiones.

Posibles acciones o alternativas: puntos clave

- **Evaluación de riesgos y beneficios:** cada posible acción lleva asociados riesgos y beneficios. La evaluación de estas consideraciones es esencial para tomar decisiones informadas y equilibradas.
- **Información estadística y contexto:** la información estadística obtenida a través del análisis juega un papel importante en la evaluación de las alternativas.
- **Flexibilidad y adaptabilidad:** las posibles acciones deben ser lo suficientemente flexibles para adaptarse a cambios en el entorno o nuevas circunstancias. **La toma de decisiones a menudo implica considerar la incertidumbre y la variabilidad.**

Utilidad

En un problema de decisión, la **utilidad** se refiere a la **medida cuantitativa de la satisfacción o beneficio derivado de la toma de una decisión** particular en función de sus consecuencias.

En esencia, la **utilidad** ayuda a cuantificar los resultados de las decisiones y **permite a los decisores evaluar el valor asociado con diferentes opciones**.

Utilidad: puntos clave

A continuación, se explican algunos **puntos clave** sobre la **utilidad** en el contexto de un problema de decisión estadística:

- **Evaluación de consecuencias:** puede medir la efectividad de una decisión en relación con la maximización de beneficios o la minimización de costes.
- **Asignación de valores numéricos:** para aplicar la teoría de decisión estadística de manera cuantitativa, es necesario asignar valores numéricos a las diferentes consecuencias posibles de cada decisión. Estos valores representan la utilidad asociada con cada resultado.
- **Función de utilidad:** la función de utilidad es una representación matemática que asigna valores numéricos a los diferentes resultados posibles. Ayuda a modelar y cuantificar la preferencia del decisor por ciertos resultados sobre otros.
- **Decisión óptima:** en la teoría de decisión estadística, se busca la decisión óptima que maximice la utilidad esperada.

Utilidad: puntos clave

- **Riesgo y preferencias del decisor:** la utilidad refleja las preferencias del decisor en términos de su actitud hacia el riesgo y cómo valora las ganancias y pérdidas potenciales.
- **Análisis coste-beneficio:** la utilidad se utiliza en el análisis coste-beneficio para comparar los beneficios esperados con los costes asociados con diferentes decisiones. Este enfoque ayuda a tomar decisiones que optimicen el balance entre beneficios y costes.
- **Decisiones bajo incertidumbre:** permite tomar decisiones informadas considerando la probabilidad de diferentes escenarios.

Regla de decisión o criterio

En un problema de decisión, la **regla de decisión o criterio** es la especificación de un procedimiento para identificar la mejor alternativa en un problema de decisión.

Observación:

En las siguientes secciones de esta unidad se introducirán **diferentes enfoques que proporcionan reglas de decisión válidas** en distintas condiciones (certeza, incertidumbre y riesgo).

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Clasificación de los procesos de decisión

Los **procesos de decisión** se clasifican de acuerdo al **grado de conocimiento** que se tenga sobre el ambiente o contexto, es decir sobre el conjunto de factores o variables no controladas por el decisor y que pueden tener influencia sobre el resultado final.

En este sentido se **distiguen los siguientes criterios de decisión**:

- Decisión bajo condición de **certidumbre** o certeza.
- Decisión bajo condición de **incertidumbre**.
- Decisión bajo condición de **riesgo**.

A continuación se describen brevemente cada uno de estos procesos de decisión.

Decisión bajo condición de certidumbre

La toma de **decisión bajo condición de certidumbre** ocurre cuando el **decisor conoce el estado de la naturaleza con absoluta certeza**.

Observaciones

- En este **escenario de certidumbre total**, la toma de decisiones es directa y basada en **la información completa y precisa**.
- Sin embargo, es esencial tener en cuenta que **la certidumbre total rara vez ocurre en situaciones del mundo real**, donde la incertidumbre y la falta de información completa son comunes.

Decisión bajo condición de certidumbre: ejemplo

Supongamos que se está planeando un viaje en automóvil desde una ciudad A hasta la ciudad B. Se tiene información completa sobre todas las rutas posibles y el tiempo estimado de viaje para cada una de ellas. Además, se conocen las condiciones del tráfico, el clima y otros factores que puedan afectar el viaje. En este caso, se están tomando decisiones bajo condiciones de certidumbre.

- **Alternativas:**
 - **Ruta A:** tiempo estimado de viaje 4 horas.
 - **Ruta B:** tiempo estimado de viaje 4.5 horas.
 - **Ruta C:** tiempo estimado de viaje 5 horas.
- **Criterio de decisión:** minimizar el tiempo de viaje.
- **Toma de decisión:** dado que se tiene información completa sobre las rutas y sus tiempos de viaje, se puede tomar la decisión de seleccionar la ruta que minimice el tiempo de viaje.
- **Resultado esperado:** viajar por la Ruta A, con un tiempo estimado de 4 horas.

Decisión bajo condición de incertidumbre

La toma de **decisión en condición de incertidumbre** se utiliza cuando, **la probabilidad de que ocurra un estado de la naturaleza es absolutamente desconocida**.

Observaciones

- El **carácter de incertidumbre** esta asociado con el hecho que nos damos cuenta de que **somos incapaces de estimar o calcular las probabilidades** asociadas a cada uno de los estados naturales.
- Existen algunas **reglas o criterios de decisión en ambiente de incertidumbre**, que conducen a escoger el mejor curso de acción de acuerdo al criterio elegido.
 - Criterio **Maximin** o de **Wald**.
 - Criterio **Maximax**.
 - Criterio de **Hurwicz**.
 - Criterio de **Savage**.
 - Criterio de **Laplace**.
 - Etc.

Decisión bajo condición de incertidumbre: ejemplo

Se está considerando invertir en acciones de una nueva empresa tecnológica. La empresa está en una etapa temprana, y no hay garantía de cómo se desempeñará en el mercado.

- Hay tres posibles escenarios o alternativas para el rendimiento de las acciones en el próximo año:
 - Escenario optimista (30% de probabilidad): la empresa lanza un producto exitoso, y las acciones se duplican en valor.
 - Escenario moderado (50% de probabilidad): La empresa tiene un crecimiento estable, y las acciones aumentan en un 20%.
 - Escenario pesimista (20% de probabilidad): La empresa enfrenta desafíos, y las acciones disminuyen en un 10%.
- Criterio de decisión: el criterio principal es maximizar el rendimiento esperado, considerando la probabilidad de cada escenario.
- Toma de decisión: debido a la incertidumbre, se deben tomar decisiones basadas en el análisis de riesgos y el rendimiento esperado. Se calcula el rendimiento esperado para cada alternativa multiplicando el rendimiento en cada escenario por la probabilidad de ese escenario y sumando los resultados.

Opción A: no invertir en acciones con un rendimiento esperado del 0%.

Opción B: invertir en la empresa con el rendimiento esperado siguiente.

- Rendimiento optimista (30% de probabilidad): $0.3 \times 1 = 30\%$.
- Rendimiento moderado (50% de probabilidad): $0.5 \times 0.2 = 10\%$.
- Rendimiento pesimista (20% de probabilidad): $-(0.2 \times 0.1) = -2\%$.
- Resultado esperado: en este caso, dado que el rendimiento es positivo, se podría decidir invertir en acciones (alternativa B), con un rendimiento esperado del 38% ($30\% + 10\% - 2\%$).

Decisión bajo condición de riesgo

La toma de **decisión bajo condición de riesgo** se da cuando **existe conocimiento de la probabilidad que un estado de la naturaleza ocurra**; es decir el decisor debe prever la probabilidad de ocurrencia de cada uno de estos estados.

Observación

- Normalmente, las **probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza** se conoce mediante la **determinación de la frecuencia con que dichos estados ocurrieron en el pasado**; o mediante **criterios personales o subjetivos**.
- Existen algunas **reglas o criterios de decisión en ambiente de riesgo**, que conducen a escoger el mejor curso de acción de acuerdo al criterio elegido.
 - Criterio del **valor esperado**.
 - Criterio **mínima varianza** con media acotada.
 - Criterio de **media** con varianza acotada.
 - Criterio de **dispersión**.
 - Criterio de **verosimilitud**.
 - **Curvas de utilidad**.
 - Etc.

Decisión bajo condición de riesgo: ejemplo

Se está considerando la compra de un seguro de automóvil para un vehículo. Se tienen dos opciones de póliza de seguro ofrecidas por diferentes compañías (A y B), y se debe tomar una decisión basada en la probabilidad de tener un accidente en el próximo año y los costes asociados.

- Hay dos posibles escenarios o alternativas de póliza con precios, riesgo y coste adicionales asociados:
 - Póliza de seguro A: precio anual de 500€; probabilidad de tener un accidente del 10% y un coste adicional caso de accidente de 5.000€.
 - Póliza de seguro B: precio anual de 700€; probabilidad de tener un accidente del 5% y un coste adicional caso de accidente de 3.000€.
- Criterio de decisión: el criterio principal es minimizar el coste esperado total, considerando la probabilidad de tener o no un accidente.
- Toma de decisión: se calcula el coste esperado total para cada opción multiplicando el coste anual por la probabilidad de no tener un accidente y sumando el producto del coste adicional por la probabilidad de tener un accidente.
 - Póliza de seguro A: $500 * (1 - 0.10) + (5.000 * 0.10) = 500 * 0.90 + 500 = 950 \text{ €}.$
 - Póliza de seguro B: $700 * (1 - 0.05) + (3.000 * 0.05) = 700 * 0.95 + 150 = 795 \text{ €}.$
- Resultado esperado: en este caso, dado que el coste esperado de la póliza B es inferior al de la póliza A, se podría decidir contratar la póliza de seguro B.

Este ejemplo ilustra cómo la toma de decisiones bajo riesgo implica evaluar diferentes escenarios y calcular los costes esperados totales asociados con cada alternativa. La disponibilidad de información sobre las probabilidades permite una toma de decisiones más informada y cuantitativa.

Resumen

La siguiente tabla muestra una **clasificación** de los distintos **ambientes de decisión** según la **información disponible** y el **riesgo que se asume** en la decisión.

Ambiente de decisión	Información disponible	Riesgo asumido
Certidumbre	Clara, exacta y completa	Bajo
Riesgo	Con probabilidades de ocurrencia	Medio
Incertidumbre	Muy escasa o nula	Alto

Ejercicio 1.1

Se está planteando construir una nueva sección en un negocio de comida rápida, si bien no se sabe si hacer la nueva **sección grande** o **pequeña**. Al mismo tiempo se plantea si **se reúne información sobre las ventas previstas** o si por el contrario **no se hace nada**. La información sobre las ventas previstas puede aconsejar un **mercado creciente** o un **mercado decreciente**, siendo de 500 euros el coste de dicha información, y la probabilidad de que la información sea favorable del 60%. Si el mercado es creciente las ganancias previstas son de 9.000 euros si la sección es grande y 3.000 si es pequeña. Si el mercado es decreciente puede perder 10.000 euros si la sección es grande y 5.000 si es pequeña. Si no se reúne información adicional, la estimación de probabilidades de que el mercado sea creciente es del 60%, contrariamente un informe favorable incrementaría la probabilidad de un mercado creciente al 80% y un informe desfavorable disminuiría la probabilidad de un mercado creciente al 40%.

Indique la decisión que debe tomar.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- **Tablas y árboles de decisión**
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Introducción

La **forma más habitual de presentar** todos los elementos que participan en un problema de decisión (descritos en la sección 1 de este tema) suele ser la construcción de **tablas o árboles de decisión**.

Estas presentaciones **incluyen** el conjunto de **estados de la naturaleza**, las **distintas alternativas de decisión** así como las **utilidades, consecuencias o pagos** asociadas a cada una de estas alternativas.

Observación

- A continuación se ilustran ambas representaciones. Por simplicidad, **se suponen** la existencia de un **número finito de estados de la naturaleza y alternativas**.
- Además se consideran procesos de decisión de **una sola etapa**, es decir, hay **una única decisión que tomar en un momento dado**.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- **Tablas y árboles de decisión**
 - **Tablas**
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Tabla de decisión

Es una **matriz** que representa **condiciones y acciones**, es decir, **estados y alternativas**.

Observaciones

- Para la **elección de la alternativa** más conveniente se utilizarán **reglas de decisión** que asocian a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.
- Estos criterios se describirán en las siguientes secciones atendiendo a si se trabajan con **tablas de decisión en ambientes de certidumbre, de incertidumbre o de riesgo**.

Representación

Denotando los elementos que intervienen en un proceso de decisión como sigue,

- $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ es el conjunto de **estados de la naturaleza**.
- $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ es el conjunto de posibles **alternativas o decisiones**.
- $x_{ij}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ es la **utilidad, consecuencia o pago** de tomar la decisión D_i dado el estado E_j .

se puede representar la **tabla de decisión** asociada de la siguiente forma:

Estados	E_1	E_2	...	E_m
Alternativas	p_1	p_2	...	p_m
D_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
D_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

En condiciones de riesgo, los estados tienen asignadas **probabilidades** $p_i; i = 1, \dots, m$.

Ejemplo 1.1

Una empresa necesita **contratar un ingeniero informático**. En un proceso preliminar optan **cuatro candidatos**, que difieren en conocimientos y formación, algunos tienen una orientación técnica y otros una orientación directiva. Como los sistemas informáticos de apoyo para la gestión del conocimiento son nuevos, la empresa desconoce si sus clientes demandarán servicios de **orientación técnica**, de **orientación directiva** u **orientación equilibrada** entre ambas orientaciones.

El departamento de recursos humanos ha elaborado una tabla para determinar el rendimiento en unidades monetarias de cada candidato en función del conocimiento y formación, así como del tipo de clientes. Por su parte, el departamento de marketing ha determinado la probabilidad de que la demanda sea técnica, directiva o equilibrada.

Estados	E_1 (Orientación técnica)	E_2 (Orientación directiva)	E_3 (Orientación equilibrada)
Alternativas	$p_1 = 0.25$	$p_2 = 0.4$	$p_3 = 0.35$
Candidato 1	10	3	5
Candidato 2	5	8	2
Candidato 3	1	9	15
Candidato 4	2	16	3

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- **Tablas y árboles de decisión**
 - Tablas
 - **Árboles**

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Árbol de decisión

Representa un **modelo en forma de estructura de árbol** que **ayuda a tomar decisiones** basadas en múltiples condiciones y criterios.

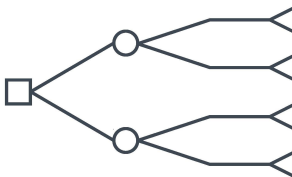
Observaciones

- Los árboles de decisión **son populares** debido a su **simplicidad interpretativa** y su capacidad para manejar conjuntos de datos complejos.
- **Ayudan a tomar la decisión** 'más acertada' desde un **punto de vista probabilístico**, ante un abanico de posibles decisiones.
- Permiten **desplegar visualmente un problema** y organizar el trabajo para los cálculos que deben realizarse.
- Pueden ser **utilizados en una gran variedad de aplicaciones**, como diagnóstico médico, clasificación de spam, predicción financiera y muchas otras áreas donde se requiere la toma de decisiones basada en datos.

Terminología básica

La terminología básica a tener en cuenta para la construcción de un árbol de decisión informativa incluye:

- **Nodos de decisión**: indican que **una decisión necesita tomarse en este punto del proceso**. El **primer nodo de decisión** de un árbol se llama **nodo raíz**, mientras que el resto son **nodos internos**. Suelen representarse por **cuadrados**.
- **Nodos de probabilidad**: indican que **en este punto del proceso ocurre un evento aleatorio**. Se suelen representar por **círculos**.
- **Ramas**: indican los **distintos caminos que se pueden tomar** cuando se elige una decisión o cuando ocurre algún evento aleatorio. Se suelen representar con flechas.



Estructura básica de un árbol de decisión.

Ejercicio 1.2

Una pizzería está planificando su actividad para el próximo domingo. En función de los datos que se reflejan en la siguiente tabla (beneficios obtenidos), realizar el árbol de decisión correspondiente y en función de este justificar que **la decisión más adecuada podría ser hornear 170 pizzas**.

Estados	E_1 (Demanda 150)	E_2 (Demanda 160)	E_3 (Demanda 170)	E_4 (Demanda 180)
Alternativas	$p_1 = 0.2$	$p_2 = 0.4$	$p_3 = 0.25$	$p_4 = 0.15$
Hornear 150	300	300	300	300
Hornear 160	290	320	320	320
Hornear 170	280	310	340	340
Hornear 180	270	300	330	360

Ejercicio 1.3

Una fábrica está evaluada en 150 millones de euros. La fábrica desea **incorporar un nuevo producto al mercado**. Existen tres estrategias para incorporar el nuevo producto:

1. Hacer un **estudio de mercado** del producto para determinar si se introduce o no.
2. **Introducir inmediatamente** el producto al mercado (sin estudio).
3. **No lanzar de forma inmediata** el producto al mercado (sin estudio).

En ausencia de estudio de mercado, la fábrica estima que el producto tiene un 55% de posibilidades de **ser exitoso** y de 45% de **ser un fracaso**. Si el producto es exitoso, la fábrica **aumentaría** en 300 millones su valor, si el producto fracasa se **devaluaría** en 100 millones. El estudio de mercado vale 30 millones. El estudio predice que existe un 60% de probabilidad de que el producto sea exitoso. Si el estudio de mercado determina que el producto sería exitoso, existe un 85% de posibilidades de que efectivamente lo sea. Si el estudio de mercado determina que el producto sería un fracaso, existe sólo un 10% de posibilidades de que el producto sea exitoso. Si la empresa no desea correr riesgos (desea **maximizar el valor esperado de la empresa**), **¿qué estrategia debería seguir?**

Solución

No hacer el estudio de mercado y lanzar el producto inmediatamente.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- **Funciones de utilidad**
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Función de utilidad

En teoría de la decisión, las **funciones de utilidad** se usan para **cuantificar la satisfacción o preferencia** de un individuo en relación con los resultados posibles de sus decisiones.

Observaciones

- Estas funciones **asignan un valor numérico a cada posible resultado**, reflejando la preferencia y actitud subjetiva del individuo hacia el riesgo.
- La **elección** de una función de utilidad específica depende de la **naturaleza del problema** y de las **preferencias individuales** del tomador de decisiones (decisor).

Algunos ejemplos

La **teoría de la utilidad** es fundamental en la toma de decisiones bajo incertidumbre y **riesgo**. A continuación se presentan algunas funciones de utilidad comunes junto con ejemplos:

- **Utilidad Lineal:** $U(x) = ax + b$.

La utilidad lineal es una función simple y lineal que asigna un valor a un resultado x . Los parámetros a y b se refieren a la pendiente y la intersección en el eje y , respectivamente. Esta función de utilidad es **fácil de entender y utilizar**, pero **puede no capturar de manera adecuada las preferencias no lineales**.

- **Utilidad Logarítmica:** $U(x) = \log(x)$.

La utilidad logarítmica refleja la idea de que la utilidad marginal de un recurso disminuye a medida que se acumula más de ese recurso. Es **común en problemas de toma de decisiones financiera**, donde la escala logarítmica se utiliza para **modelar aversiones al riesgo**.

- **Utilidad Exponencial:** $U(x) = -e^{-ax}$.

La utilidad exponencial **modela aversiones al riesgo**, donde las pérdidas tienen un impacto más significativo que las ganancias. El parámetro a controla la aversión al riesgo: **a mayor a , mayor aversión al riesgo**.

Algunos ejemplos

- **Utilidad Cuadrática:** $U(x) = ax^2 + bx + c$.

La utilidad cuadrática es comúnmente **utilizada** en problemas de **toma de decisiones bajo incertidumbre**. A menudo, se busca maximizar esta función para encontrar la acción óptima. La forma cuadrática puede **modelar mejor las preferencias no lineales**.

- **Utilidad o función de pérdida monetaria:** $U(x) = -x$.

En algunos contextos, como la **gestión financiera**, los individuos pueden considerar la pérdida de dinero más significativa que la ganancia equivalente. En este caso, la función de utilidad asigna un **valor negativo al dinero perdido**.

- **Utilidad de von Neumann-Morgenstern:** $U(x) = \sum_i p_i u(x_i)$.

Utilizada en la **teoría de la utilidad esperada**, la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern **representa la utilidad esperada de un resultado ponderado por su probabilidad**. Aquí, $u(x_i)$ es la utilidad de un resultado x_i y p_i es la probabilidad asociada.

Ejemplo 2.1

Se considera un escenario en el que se tiene que decidir qué automóvil comprar. Se consideran dos opciones: un automóvil deportivo o un automóvil híbrido. Para este estudio se han asignado ponderaciones a la **velocidad** del automóvil, su **eficiencia en el consumo de combustible** y el **coste financiero anual** de la operación. Para tomar esta decisión, se va a utilizar una función de utilidad que refleje las preferencias personales de un cliente concreto.

Función de utilidad: $U(x) = \text{Velocidad} + 0.8 \cdot \text{Eficiencia} - 0.5 \cdot \text{Coste}$.

La siguiente tabla incluye las ponderaciones que reflejan la importancia relativa de cada criterio en la decisión del cliente.

Automóvil Criterio	Deportivo	Híbrido
Velocidad	9/10	6/10
Eficiencia	4/10	8/10
Coste anual	3.000 €	1.500 €

Evaluación de la función de utilidad para cada opción.

- $U(\text{Deportivo}) = 9 + 0.8 \cdot 4 - 0.5 \cdot 3.000 = -1.489,8$
- $U(\text{Híbrido}) = 6 + 0.8 \cdot 8 - 0.5 \cdot 1.500 = -737,6$

Análisis:

- La opción del automóvil **híbrido** tiene una utilidad más alta $(-737,6)$ en comparación con la opción del automóvil deportivo $(-1.489,8)$.
- Según esta función de utilidad, se estaría **más satisfecho con el automóvil híbrido** debido a su mejor eficiencia de combustible y menor costo anual de operación, a pesar de tener una velocidad más baja que el automóvil deportivo.
- En este ejemplo, la función de utilidad ayuda a cuantificar y comparar las preferencias en términos de los criterios relevantes para la decisión.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- **Funciones de pérdida**
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Función de pérdida

En teoría de la decisión, las **funciones de pérdida** son herramientas fundamentales para formalizar la **evaluación del rendimiento** de un procedimiento de toma de decisiones **en un contexto probabilístico**.

Observaciones

- Estas funciones **asignan un coste o pérdida**, a cada posible decisión en función de la verdad desconocida sobre la cual se toma la decisión.
- El objetivo es **elegir** la decisión que **minimice la pérdida esperada**.
- La **elección** de una función de pérdida adecuada **depende de la naturaleza específica del problema** y de las consideraciones sobre **cómo se deben penalizar los errores** en el contexto particular.

Algunos ejemplos

A continuación, se presentan algunas funciones de pérdida comunes en teoría de la decisión estadística, junto con ejemplos de situaciones en las que se aplican:

- **Pérdida cuadrática:** $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.

Esta función penaliza cuadráticamente la diferencia entre la decisión tomada a y el valor verdadero θ . Es común en problemas **donde el error cuadrático es una medida adecuada de pérdida**, como en la **estimación de parámetros**.

- **Pérdida absoluta:** $L(\theta, a) = |\theta - a|$.

Asigna el valor absoluto de la diferencia entre la decisión tomada y el valor verdadero como pérdida. Es útil cuando **se desea penalizar de manera proporcional a la magnitud del error**, sin considerar la dirección.

- **Pérdida 0 – 1:** $L(\theta, a) = 0$ si $\theta = a$; $L(\theta, a) = 1$ si $\theta \neq a$.

Esta función asigna 0 de pérdida si la decisión coincide con el valor verdadero y 1 en caso contrario. Es **común en problemas de clasificación**, donde la predicción correcta o incorrecta se considera de igual importancia.

Algunos ejemplos

- **Pérdida exponencial:** $L(\theta, a) = e^{-c(\theta-a)}$, $c > 0$.

La pérdida exponencial asigna una penalización exponencial a la diferencia entre la decisión tomada y el valor verdadero. Es **común en problemas de clasificación** y puede ser útil cuando se desea dar más importancia a los errores más grandes.

- **Pérdida de entropía cruzada:** $L(\theta, a) = -\theta \log(a) - (1 - \theta) \log(1 - a)$.

Utilizada en problemas de **clasificación binaria**, la pérdida de entropía cruzada **mide la discrepancia entre la distribución de probabilidad predicha y la verdadera** distribución de clases. Es particularmente efectiva cuando se trabaja con modelos de clasificación basados en probabilidades.

Ejemplo 2.2

Escenario en el que el gerente de un proyecto de desarrollo de software debe decidir si implementar una nueva característica en una aplicación antes de la fecha límite. La decisión implica el riesgo de retrasar la entrega del proyecto, lo que podría tener consecuencias económicas para la empresa. Se utilizará una función de pérdida para evaluar las posibles decisiones.

Función de pérdida: aquí la función de pérdida mide el cuadrado de la diferencia entre la fecha de entrega real y la fecha de entrega esperada, y agrega un componente que representa el coste constante diario de retraso.

$$L(\text{Resultado real, Decisión}) = (\text{Fecha entrega real} - \text{Fecha de entrega esperada})^2 + 500 \cdot \text{Coste diario por retraso}.$$

La siguiente tabla incluye los datos de las dos opciones de elección.

Opción Datos	Implementar la nueva característica	No implementar la nueva característica
Fecha entrega esperada	1 de marzo	1 de marzo
Fecha entrega real	10 de marzo	1 de marzo
Coste diario por retraso	100 €	0 €

Evaluación de la función de pérdida para cada opción.

- $L(\text{Implementar, 10 de marzo}) = (10 - 1)^2 + 500 \cdot 100 = 50.081$
- $L(\text{No implementar, 1 de marzo}) = (1 - 1)^2 + 0 \cdot 100 = 0$

Análisis:

- La opción de no implementar la nueva característica tiene una pérdida menor (0) € en comparación con la opción de implementar la característica (50.081 €).
- Según esta función de pérdida, la **decisión óptima sería no implementar la nueva característica**, ya que minimiza la pérdida asociada con el retraso en la entrega.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- **Funciones de riesgo**
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Función de riesgo

En teoría de la decisión, las **funciones de riesgo** son utilizadas para **cuantificar el coste asociado con la elección** de una acción específica **en función de la verdadera pero desconocida distribución de probabilidad** subyacente.

Observaciones

- Estas funciones **proporcionan un marco formal** para evaluar el rendimiento de los procedimientos de toma de **decisiones bajo incertidumbre**.
- Estas funciones de riesgo son **herramientas fundamentales** en la teoría de la decisión estadística para **evaluar y comparar procedimientos** de toma de decisiones.
- La **elección** de la función de riesgo adecuada **depende de la naturaleza específica del problema** y de las consideraciones sobre **cómo se deben penalizar los diferentes tipos de errores** en el contexto particular.

Algunos ejemplos

A continuación, se describen algunas funciones de riesgo comunes junto con ejemplos de aplicación:

- **Riesgo cuadrático medio (Mean Squared Error, MSE):** $R(\theta, a) = E[(\theta - a)^2]$.
Mide el **riesgo promedio cuadrático** asociado con la elección de la acción a cuando el verdadero valor es θ . Es ampliamente **utilizado en problemas de estimación de parámetros** y minimizar el riesgo cuadrático medio implica la **elección de la acción que minimiza el sesgo y la varianza**.
- **Riesgo absoluto medio (Mean Absolute Error, MAE):** $R(\theta, a) = E[|\theta - a|]$.
Cuantifica el **riesgo promedio absoluto** asociado con la elección de la acción a . Es útil en situaciones donde **se prefiere minimizar la discrepancia absoluta promedio entre la decisión y el valor verdadero**.
- **Riesgo de pérdida 0 – 1:** $R(\theta, a) = P[\theta \neq a]$.
Mide la probabilidad de error en la elección de la acción a . Esta función de riesgo es común en **problemas de clasificación** y se interpreta como la **probabilidad de tomar una decisión incorrecta**.

Algunos ejemplos

- **Riesgo logarítmico:** $R(\theta, a) = -\log(P[\theta = a])$.

Este riesgo **penaliza de manera logarítmica la probabilidad de elegir una acción incorrecta**. Es útil en situaciones donde se busca **penalizar fuertemente las decisiones erróneas con baja probabilidad**.

- **Riesgo de entropía cruzada (Cross-Entropy):** $R(\theta, a) = -\sum_i \theta_i \log(a_i)$.

Utilizado en **problemas de clasificación multiclase**, la entropía cruzada mide la discrepancia entre la distribución verdadera θ y la distribución predicha a . Minimizar este riesgo implica la elección de acciones que se acerquen a la verdadera distribución.

Ejemplo 2.3

Escenario en el que un inversionista está considerando dos portafolios de inversión diferentes. La decisión implica un equilibrio entre la **rentabilidad esperada** y la **volatilidad** de los rendimientos. Se utilizará una función de riesgo para evaluar las posibles decisiones.

Función de riesgo: en esta función de riesgo, un parámetro $\alpha \in [0, 1]$ refleja la aversión al riesgo del inversionista. Un valor más alto de α indica una mayor aversión al riesgo y, por lo tanto, una preferencia por carteras con menor volatilidad y rentabilidad más baja.

$$R(\text{Portafolio}, \text{Rentabilidad Esperada}, \text{Volatilidad}) = \alpha \cdot \text{Volatilidad} - (1 - \alpha) \cdot \text{Rentabilidad esperada}.$$

La siguiente tabla incluye los datos de las dos opciones de elección.

Portafolio Datos	A	B
Rentabilidad esperada	10%	15%
Volatilidad	15%	20%

Evaluación de la función de riesgo para cada opción.

- $R(A, 10\%, 15\%) = \alpha \cdot 15 - (1 - \alpha) \cdot 10$. Por ejemplo si $\alpha = 0.7$, $R(A) = 7.5$
- $R(B, 15\%, 20\%) = \alpha \cdot 20 - (1 - \alpha) \cdot 15$. Por ejemplo si $\alpha = 0.7$, $R(B) = 9.5$

Análisis:

- Si α es alto, el inversionista prefiere un riesgo menor a costa de una menor rentabilidad. Si α es bajo, el inversionista está dispuesto a asumir más riesgo en busca de una mayor rentabilidad.
- Este ejemplo ilustra cómo una función de riesgo puede ser utilizada para evaluar decisiones de inversión al considerar simultáneamente la rentabilidad y la volatilidad.
- La elección del valor de α refleja las preferencias individuales del inversionista en términos de aversión al riesgo.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

En teoría de la decisión, **las funciones de utilidad, de pérdida y de riesgo** están **estrechamente relacionadas** y desempeñan papeles fundamentales en la formulación y evaluación de las decisiones bajo incertidumbre.

A continuación se ilustran distintos ejemplos que ponen de manifiesto la relación implícita existente entre estos tres conceptos.

Relación entre Funciones de Utilidad y Pérdida

A continuación, se describen algunos **ejemplos que relacionan funciones de utilidad y de pérdida**:

1. Supongamos que se están tomando **decisiones sobre inversiones financieras**. La **función de utilidad podría asignar valores numéricos a diferentes rendimientos financieros**, donde valores más altos indican una mayor preferencia.

Relación: la **función de pérdida asociada podría ser el opuesto negativo de la función de utilidad**, ya que queremos minimizar las pérdidas y maximizar la utilidad.

2. Supongamos que se están tomando **decisiones financieras** y se tiene una **función de utilidad lineal** $U(x) = ax + b$ que modela tu preferencia por la riqueza, donde x es la riqueza. Una **función de pérdida asociada podría ser cuadrática** $L(x, a) = (x - a)^2$, que cuantifica la pérdida asociada con la diferencia entre la riqueza real x y la meta perseguida a .

Relación: en este caso, **minimizar la función de pérdida implica acercar tu riqueza real a tu meta deseada**, lo cual **está alineado con maximizar tu función de utilidad lineal**.

Relación entre Funciones de Pérdida y Riesgo

A continuación, se describen algunos **ejemplos que relacionan funciones de pérdida y de riesgo**:

1. Se considera un **problema de clasificación** en el que se está tratando de predecir si un correo electrónico es spam o no. La **función de pérdida** podría asignar un coste mayor a los falsos positivos (correo no deseado clasificado como legítimo) que a los falsos negativos (correo legítimo clasificado como spam).

Relación: la **función de riesgo** reflejaría la **probabilidad ponderada de incurrir en estos costes** bajo diferentes decisiones.

2. Se considera un problema de **clasificación binaria**, donde la **función de pérdida es la entropía cruzada** binaria $L(x, a) = -x \log(a) - (1 - x) \log(1 - a)$, donde x es la etiqueta verdadera y a es la predicción del modelo. El riesgo asociado es la esperanza de esta función de pérdida, $R(x, a) = E[L(x, a)]$.

Relación: **minimizar el riesgo** implica **minimizar la función de pérdida esperada**, lo que significa que el modelo está tomando decisiones que minimizan la discrepancia entre las predicciones y las etiquetas reales.

Relación entre Funciones de Riesgo y Utilidad Esperada

A continuación, se describen algunos **ejemplos que relacionan funciones de riesgo y de utilidad esperada**:

1. En el supuesto que se estén tomando decisiones sobre la gestión de proyectos. La **función de utilidad podría asignar valores a los niveles de éxito del proyecto**, mientras que la **función de riesgo evaluaría la probabilidad y magnitud de posibles desviaciones del proyecto**.

Relación: en este caso, se podría buscar **minimizar el riesgo asociado con el logro de objetivos específicos**.

2. Supongamos que se tiene una **función de utilidad logarítmica** $U(x) = \log(x)$ para medir la utilidad de la riqueza, y se están tomando decisiones financieras bajo incertidumbre. La utilidad esperada se define como $E[U(x)] = \sum_i p_i \log(x_i)$, donde p_i es la probabilidad asociada con el resultado x_i .

Relación: la **utilidad esperada busca maximizar la satisfacción promedio**, mientras que la **minimización del riesgo se centra en reducir la incertidumbre** asociada con las decisiones. Ambos conceptos están relacionados en la toma de decisiones óptima bajo incertidumbre.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Toma de decisiones en condiciones de certidumbre o certeza

En este escenario **el decisor está plenamente informado acerca de todas las características del problema** de decisión al que se enfrenta: sus alternativas y posibles resultados.

Observaciones

- El **decisor puede** al menos prever, si no que **controlar**, los hechos y sus resultados.
- Una vez que el decisor identifica soluciones alternativas y sus resultados esperados, la **toma de la decisión es relativamente fácil**, sencillamente **elige** la solución con el **mejor resultado** potencial.
- En la decisión bajo certidumbre, **se obtiene el resultado esperado** para **cada alternativa** y se selecciona aquel que **optimiza el objetivo** planteado.
- El **problema de decisión** en este contexto se reduce, por tanto, a un **problema de optimización**.

Planteamiento del problema

Un problema de decisión en este contexto puede plantearse como

$$\max\{f(x) : x \in S \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

donde:

- S es el conjunto de alternativas o **conjunto factible**.
- $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la **función objetivo**.
- x representa el vector n -dimensional que describe cada elemento del conjunto factible. Cada una de sus componentes recibe el nombre de **variable de decisión**.

Algunas de las **técnicas más usadas** para tomar decisiones en este ambiente de certeza son: programación lineal, análisis de puntos de equilibrio, etc.

A continuación se describe la técnica de **toma de decisiones basada en programación lineal**.

Toma de decisiones bajo certidumbre basadas en programación lineal

Todos los problemas de programación lineal (PL) tienen cuatro características en común:

- Buscan **maximizar o minimizar una función objetivo** que generalmente **representa beneficios o costes**.
- Presentan una serie de **restricciones** que limitan el grado en que se puede perseguir el objetivo.
- Existen distintas **alternativas** entre las que diversificar las restricciones para conseguir el objetivo.
- La función objetivo y las restricciones de un PL deben **estar expresadas en términos de ecuaciones lineales o inecuaciones**.

Ejemplo 3.1

Una empresa desea maximizar sus beneficios mediante la asignación óptima de sus recursos financieros en tres diferentes productos de inversión: acciones, bonos y fondos de inversión. La empresa dispone de un total de 200.000 € para invertir. La tabla siguiente muestra la rentabilidad esperada por cada producto de inversión y el límite mínimo y máximo de inversión permitido en cada uno:

Producto de inversión	Rentabilidad (%)	Inversión mínima (€)	Inversión máxima (€)
Acciones	10	30.000	80.000
Bonos	6	20.000	60.000
Fondos de inversión	8	50.000	100.000

Formular un modelo de programación lineal para maximizar la rentabilidad total de la inversión sujeta a las restricciones dadas y luego resolver el problema.

Para solucionar este problema se denotan por:

- x_1 a la cantidad de dinero invertido en acciones.
- x_2 a la cantidad de dinero invertido en bonos.
- x_3 a la cantidad de dinero invertido en fondos de inversión.

El objetivo es maximizar la rentabilidad total, que es la suma ponderada de la rentabilidad de cada producto de inversión, es decir:

$$\max\{f(x_1, x_2, x_3) = 0.10x_1 + 0.06x_2 + 0.08x_3\}$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 200.000; x_1 \in [30.000, 80.000]; x_2 \in [20.000, 60.000]; x_3 \in [50.000, 100.000]$$

Este problema de programación lineal puede resolverse por el método del simplex (no compete a los objetivos de este curso explicar este método) que proporcionaría como solución óptima, una cantidad de **80.000 € invertidos en acciones** (x_1), **20.000 € en bonos** (x_2) y **100.000 € en fondos de inversión** (x_3), con una rentabilidad máxima de 17.200 €.

Ejemplo 3.1: código fuente en lenguaje R

```
1 ## maximizar: 0.10 x_1 + 0.06 x_2 + 0.08 x_3
2 ## sujeto a: x_1 + x_2 + x_3 <= 200.000
3 ##           x_1 <= 80.000; x_2<=60.000; x_3 <= 100.000
4 ##           x_1 >= 30.000; x_2>=20.000; x_3 >= 50.000
5 ## Carga del paquete que incluye la funcion 'lp'
6 library(lpSolve)
7 # Se introducen los coeficientes de la funcion
8 f.obj<- c(0.1,0.06,0.08)
9 # Matriz con todas las restricciones (coeficientes de las columnas ordenadas)
10 # Esta matriz tiene 6 filas porque hay 6 restricciones
11 f.con<-matrix(c(1,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,1),
12             nrow = 7,byrow = FALSE)
13 # Se indica el caracter de las restricciones, si son de igualdad o desigualdad
14 f.dir<-c("<=", "<=", "<=", "<=", ">=", ">=", ">=")
15 # Se indican las limitaciones dadas por cada restriccion
16 f.rhs<- c(200,80,60,100,30,20,50)
17 # Se resuelve el problema de programacion lineal con la funcion lp indicando
18 # como primer parametro "min" para que resuelva un problema de minimizacion
19 solution<-lp("max",f.obj,f.con,f.dir,f.rhs)
20 # Solucion final del valor minimo de la funcion objetivo
21 solution
22 # Valores de cada una de las variables donde se alcanza este minimo
23 solution$solution
```

Observación

Para resolver el ejemplo anterior se ha utilizado la función `lp` del paquete `lpSolve` del lenguaje R.

Es conveniente tener en cuenta que esta función es **adecuada para problemas de programación lineal y entera**, pero tiene algunas **limitaciones** como: **no detecta** la existencia de extremos alternativos, **da error** si la solución es no acotada y **no contempla** el caso de variables negativas.

En cualquier caso, **estos inconvenientes no ocurren en los ejemplos planteados** en esta sección.

Ejercicio 3.1

Una empresa de gestión de residuos desea minimizar el riesgo ambiental asociado con el transporte de desechos químicos desde sus instalaciones hasta el centro de tratamiento. La empresa cuenta con varios camiones para transportar los desechos a través de diferentes rutas. Cada ruta tiene diferentes niveles de riesgo ambiental debido a factores como la proximidad a cuerpos de agua, áreas residenciales y sensibilidad ecológica.

La siguiente tabla muestra las diferentes rutas disponibles, el nivel de riesgo ambiental asociado con cada ruta (medido en una escala de 1 a 10, donde 1 representa el menor riesgo y 10 el mayor), la capacidad de carga de cada camión (en toneladas) y el coste de transporte por tonelada para cada ruta (en euros):

Ruta	Riesgo ambiental	Capacidad de carga (T)	Coste transporte por tonelada (€)
1	3	5	130
2	7	8	110
3	5	10	150
4	4	6	120
5	8	12	100

La empresa tiene que transportar un total de 40 toneladas de desechos químicos. Formular un modelo de programación lineal para minimizar el riesgo ambiental total asociado con el transporte de los desechos sujeto a las restricciones de capacidad, así como el problema para minimizar el coste de transporte y luego tomar alguna decisión en relación a la reducción del impacto ambiental y coste.

Ejercicio 3.1: código fuente en lenguaje R para minimizar el riesgo ambiental

```
1 ## minimizar: 3 x_1 + 7 x_2 + 5 x_3 + 4 x_4 + 8 x_5
2 ## sujeto a: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40
3 ## x_1 <= 5; x_2<=8; x_3 <= 10; x_4 <= 6; x_5 <=12
4 ## Carga del paquete que incluye la funcion 'lp'
5 library(lpSolve)
6 # Se introducen los coeficientes de la funcion
7 f.obj<- c(3,7,5,4,8)
8 # Matriz con todas las restricciones (coeficientes de las columnas ordenadas)
9 # Esta matriz tiene 6 filas porque hay 6 restricciones
10 f.con<-matrix(c(1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1),
11             nrow = 6,byrow = FALSE)
12 # Se indica el caracter de las restricciones, si son de igualdad o desigualdad
13 f.dir<-c("=", "<=", "<=", "<=", "<=", "<=")
14 # Se indican las limitaciones dadas por cada restriccion
15 f.rhs<- c(40,5,8,10,6,12)
16 # Se resuelve el problema de programacion lineal con la funcion lp indicando
17 # como primer parametro "min" para que resuelva un problema de minimizacion
18 solution<-lp("min",f.obj,f.con,f.dir,f.rhs)
19 # Solucion final del valor minimo de la funcion objetivo
20 solution
21 # Valores de cada una de las variables donde se alcanza este minimo
22 solution$solution
```

Ejercicio 3.1: código fuente en lenguaje R para minimizar el coste del transporte

```
1 ## minimizar: 130 x_1 + 110 x_2 + 150 x_3 + 120 x_4 + 100 x_5
2 ## sujeto a: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40
3 ## x_1 <= 5; x_2<=8; x_3 <= 10; x_4 <= 6; x_5 <=12
4 ## Carga del paquete que incluye la funcion 'lp'
5 library(lpSolve)
6 # Se introducen los coeficientes de la funcion
7 f.obj<- c(130,110,150,120,100)
8 # Matriz con todas las restricciones (coeficientes de las columnas ordenadas)
9 # Esta matriz tiene 6 filas porque hay 6 restricciones
10 f.con<-matrix(c(1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1),
11              nrow = 6,byrow = FALSE)
12 # Se indica el caracter de las restricciones, si son de igualdad o desigualdad
13 f.dir<-c("=", "<=", "<=", "<=", "<=", "<=")
14 # Se indican las limitaciones dadas por cada restriccion
15 f.rhs<- c(40,5,8,10,6,12)
16 # Se resuelve el problema de programacion lineal con la funcion lp indicando
17 # como primer parametro "min" para que resuelva un problema de minimizacion
18 solution<-lp("min",f.obj,f.con,f.dir,f.rhs)
19 # Solucion final del valor minimo de la funcion objetivo
20 solution
21 # Valores de cada una de las variables donde se alcanza este minimo
22 solution$solution
```

Soluciones

Solución para minimizar el riesgo ambiental. En esta situación se obtiene que $x_1 = 5$; $x_2 = 8$; $x_3 = 10$; $x_4 = 6$ y $x_5 = 11$ donde x_i representa la cantidad de toneladas de desechos transportados por la ruta i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Esto significa que **la empresa debe transportar las 40 toneladas de desechos químicos utilizando los límites máximos de las rutas 1 a 4 y algo menos de su límite en la ruta 5** para minimizar el riesgo ambiental total, con un **riesgo ambiental total de 233 puntos**.

Solución para minimizar el coste de transporte. En esta situación se obtiene que $x_1 = 5$; $x_2 = 8$; $x_3 = 9$; $x_4 = 6$ y $x_5 = 12$ donde x_i representa la cantidad de toneladas de desechos transportados por la ruta i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Esto significa que **la empresa debe transportar las 40 toneladas de desechos químicos utilizando los límites máximos de las rutas 1, 2, 4 y 5 y algo menos de su límite en la ruta 3** para minimizar el coste del transporte total, con un **coste total de 4.800 €**.

El papel del decisor en este ejercicio

El **coste del transporte minimizando el riesgo ambiental** sería de $5 \cdot 130 + 8 \cdot 110 + 10 \cdot 150 + 6 \cdot 120 + 11 \cdot 100 = 4850$ €.

El **coste del transporte minimizando este coste** era de 4.800 €.

¿Que decisión tomaría en este caso el decisor?

Parece claro que un contexto de protección del medio ambiente como el actual, estaría dispuesto a **asumir el sobre coste de 50 € y elegiría minimizar el riesgo ambiental** pero, ¿siempre optaría por esta opción sin un marco legal que obligue a hacerlo?

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- **En condiciones de incertidumbre**
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre

Un **ambiente para la toma de decisiones es de incertidumbre** cuando cada decisión puede dar lugar a una serie de consecuencias a las que **no puede asignarse una distribución de probabilidad**, bien porque no sea conocida o porque no tenga sentido hablar de ella.

Observaciones

- Existen **distintos criterios de decisión** en contextos de incertidumbre: maximin o pesimista de Wald, maximax u optimista, Hurwicz, Laplace, Savage, etc.
- En este texto se considera que **el decisor no tiene un oponente inteligente**. Es decir que **la 'naturaleza' es el oponente** de modo que no tiene sentido pensar que la naturaleza tenga como objetivo provocar pérdidas.
- Si existiera un **oponente inteligente**, se aplicarían otro tipo de criterios con base en la **Teoría de Juegos**, contenidos que salen fuera de los objetivos de este curso.

A continuación **se van a introducir algunos de los criterios de decisión en ambientes de incertidumbre** más comunes en este contexto.

Criterio pesimista maximin-minimax o de Wald

El **criterio de decisión maximin-minimax**, también conocido como el **método de Wald**, es una técnica utilizada en teoría de decisiones bajo incertidumbre para **tomar decisiones conservadoras**.

Observaciones

- Este criterio está diseñado para **minimizar el riesgo al enfrentarse a situaciones donde las consecuencias de las decisiones son inciertas** y el tomador de decisiones quiere protegerse contra el peor escenario posible.
- En ambientes de incertidumbre pesimista, el criterio de decisión de **Wald busca minimizar la pérdida máxima esperada**.
- Este **enfoque es bastante conservador** ya que asume que el tomador de decisiones optará por la **opción que minimice el peor escenario posible**.
- Es importante tener en cuenta que **es un enfoque extremadamente conservador y puede llevar a decisiones subóptimas** si no se consideran otras posibilidades de resultados o si se subestima la probabilidad de ocurrencia de eventos menos adversos.

Formulación del criterio de Wald

El **método de Wald**, se formula de la siguiente manera.

Dada una serie de decisiones o acciones $D_1, \dots, D_n$ y sus respectivas consecuencias o resultados $R_1, \dots, R_n$, donde cada resultado es asociado a una función de pérdida $L(R_i)$, el criterio de decisión de Wald (**minimax**) busca elegir la acción que minimiza la máxima pérdida esperada, es decir:

$$\min\{\max_{i=1,\dots,n}\{L(R_i)\}\}$$

Es decir, se selecciona la **acción que minimiza el peor resultado posible en términos de pérdida esperada**.

Si se expresa **en términos de ganancias** por medio de una función de utilidad U se formularía como:

$$\max\{\min_{i=1,\dots,n}\{U(R_i)\}\}$$

En este caso nos referiremos al método de Wald como **maximin**.

Ejemplo 3.2

Para ilustrar el criterio maximin-minimax con una función de pérdida, se considera un escenario donde un inversionista está evaluando tres opciones de inversión en el mercado de valores. Cada opción tiene un riesgo asociado, medido por la pérdida esperada en tres escenarios posibles: baja, normal y alta volatilidad del mercado. El objetivo del inversionista es minimizar la pérdida máxima posible.

Se supone que las opciones de inversión son las siguientes:

- Opción A: Acciones de una empresa de tecnología.
- Opción B: Bonos del gobierno.
- Opción C: Fondos indexados diversificados.

La tabla a continuación muestra las pérdidas esperadas (en miles de euros) para cada opción en los tres escenarios de volatilidad del mercado:

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	50	100	200
B	10	30	50
C	20	15	30

Para **aplicar el criterio minimax** y minimizar la pérdida máxima posible, se siguen estos pasos:

- Identificar la pérdida máxima esperada en cada escenario. En este caso 200, 50 y 30 respectivamente para las opciones A, B y C en un escenario de alta volatilidad.
- Seleccionar la opción con la menor de estas pérdidas. En este caso la opción C con una pérdida de 30.000 €.

Por lo tanto, **aplicando el criterio minimax**, la empresa **debería invertir** en fondos indexados diversificados.

Criterio optimista maximax-minimin de Plunger

El **criterio de decisión maximax-minimin**, también conocido como el **método de Plunger**, es una técnica utilizada en teoría de decisiones bajo incertidumbre para **seleccionar la mejor opción entre varias alternativas** considerando por lo general un enfoque optimista.

Observaciones

- Realiza aquella acción que en el mejor caso proporcione la satisfacción máxima (**se cree que siempre pasa lo mejor**).
- Se basa en la idea de **minimizar la pérdida potencial esperada** al considerar el peor resultado posible de cada opción, o de **maximizar la utilidad potencial esperada**.
- El criterio maximax busca **maximizar el mejor resultado esperado sin considerar la probabilidad asociada con cada resultado**. Por lo tanto, este enfoque es **adecuado** para tomadores de decisiones que tienen una **visión optimista** y desean maximizar el beneficio potencial **sin preocuparse por la incertidumbre o el riesgo asociado con los resultados**.

Formulación del criterio de Plunger

El **método de Plunger**, se formula de la siguiente manera.

Dada una serie de decisiones o acciones $D_1, \dots, D_n$ y sus respectivas consecuencias o resultados $R_1, \dots, R_n$, donde cada resultado es asociado a una función de pérdida $L(R_i)$, el criterio de decisión de Plunger (**minimin**) busca elegir la acción que minimiza la mínima pérdida esperada, es decir:

$$\min\{\min_{i=1,\dots,n}\{L(R_i)\}\}$$

Es decir, se selecciona la **acción que minimiza el mejor resultado posible en términos de pérdida esperada**.

Si se expresa **en términos de ganancias** por medio de una función de utilidad U se formularía como:

$$\max\{\max_{i=1,\dots,n}\{U(R_i)\}\}$$

En este caso nos referimos al criterio de Plunger como **maximax**.

Ejemplo 3.3

A continuación se aplica el criterio maximax-minimin con los datos del ejemplo 3.2.

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	50	100	200
B	10	30	50
C	20	15	30

En este contexto, **para aplicar el criterio minimin** y minimizar la pérdida mínima posible, se siguen estos pasos:

- Identificar la **pérdida mínima esperada** en cada escenario. En este caso 50, 10 y 20 respectivamente para las opciones A, B y C en un escenario de baja volatilidad.
- Seleccionar la **opción con la menor de estas pérdidas**. En este caso la opción B con una pérdida de 10.000 €.

Por lo tanto, **aplicando el criterio minimin**, la empresa **debería invertir** en bonos del gobierno.

Observación: se podría haber deducido también considerando el mejor de los mejores resultados trabajando con la ganancia en vez de con la pérdida.

Criterio optimista-pesimista de Hurwicz

El **método de Hurwitz** permite al tomador de decisiones **ajustar su nivel de aversión al riesgo** al ponderar tanto el mejor resultado posible como el peor resultado posible para cada opción.

Este criterio considera, por tanto, que el decisor es α optimista y $1 - \alpha$ pesimista.

Observaciones

- Este método **busca encontrar un equilibrio entre la toma de decisiones optimista y pesimista** ponderando por un coeficiente de aversión al riesgo.
- Es **útil** en situaciones donde **el tomador de decisiones desea considerar tanto el potencial de ganancia como el riesgo asociado** con cada opción.
- Un valor de $\alpha > 0.5$ **carga el peso más hacia la parte pesimista**, mientras que en caso contrario carga más hacia la parte optimista.
- Un valor de $\alpha = 0.5$ **es simplemente un promedio de ambos enfoques** pesimista-optimista.

Formulación del criterio de Hurwicz

El **método de Hurwitz**, se formula de la siguiente manera.

Dada una serie de decisiones o acciones $D_1, \dots, D_n$ y sus respectivas consecuencias o resultados $R_1, \dots, R_n$, donde cada resultado es asociado a una función de pérdida $L(R_i)$, el criterio de decisión de Hurwitz busca elegir la acción que minimiza la mínima-máxima pérdida ponderada por el coeficiente α esperada, es decir:

$$\min\{\alpha \cdot \min_{i=1, \dots, n}\{L(R_i)\} + (1 - \alpha) \cdot \max_{i=1, \dots, n}\{L(R_i)\}\}$$

Es decir, se selecciona la **acción que minimiza el peor resultado posible en términos de mínima-máxima pérdida ponderada esperada**.

Si se expresa en términos de ganancias por medio de una función de utilidad U se formularía como:

$$\max\{\alpha \cdot \max_{i=1, \dots, n}\{U(R_i)\} + (1 - \alpha) \cdot \min_{i=1, \dots, n}\{U(R_i)\}\}$$

Ejemplo 3.4

A continuación se aplica el criterio de Hurwicz con los datos del ejemplo 3.2. para un coeficiente de ponderación $\alpha = 0.5$.

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	50	100	200
B	10	30	50
C	20	15	30

En este contexto, **para aplicar el criterio de Hurwicz** y minimizar la pérdida ponderada, se siguen estos pasos:

- Identificar la pérdida mínima y máxima esperada en cada escenario. En este caso la mínima es de 50, 10 y 20, y la máxima de 200, 50 y 30 respectivamente para las opciones A, B y C en un escenario de baja volatilidad (mínimo) y alta volatilidad (máximo).
- Ponderar estas pérdidas de acuerdo al coeficiente de ponderación indicado.
 - Opción A: $0.5 \cdot 50 + 0.5 \cdot 200 = 125$.
 - Opción B: $0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 50 = 30$.
 - Opción C: $0.5 \cdot 20 + 0.5 \cdot 30 = 25$.
- Seleccionar la opción con la menor de estas pérdidas ponderadas. En este caso la opción C con una pérdida ponderada de 25.000 €.

Por lo tanto, **aplicando el criterio Hurwitz**, la empresa **debería invertir** en fondos indexados diversificados.

Criterio de Laplace

Este criterio se basa en **asignar probabilidades iguales a todos los resultados posibles** y luego calcular el **valor esperado** de cada opción. La **opción preferida** es aquella con el **mayor valor esperado** en el caso de trabajar con **funciones de utilidad** o el **menor valor esperado** si se utilizan **funciones de pérdida**.

Observaciones

- Este enfoque es **útil cuando no se dispone de información** adicional sobre la probabilidad de ocurrencia de los resultados y se **desea tomar decisiones de manera equitativa y neutral**.
- Debido a que el método de Laplace asigna probabilidades iguales a todos los resultados posibles, **puede sobrevalorar resultados poco probables o extremos**.
- El método de Laplace **no tiene en cuenta la magnitud de los resultados**, centrándose únicamente en la probabilidad de ocurrencia.
- El método de Laplace trata a cada resultado como independiente entre sí, **sin considerar la posible correlación o interdependencia** entre ellos

Formulación del criterio de Laplace

El **método de Laplace**, se formula de la siguiente manera.

Dada una serie de decisiones o acciones $D_1, \dots, D_n$ y sus respectivas consecuencias o resultados $R_1, \dots, R_n$, donde cada resultado es asociado a una función de pérdida $L(R_i)$, el criterio de decisión de Laplace busca elegir la acción que promedia estas pérdidas, teniendo en cuenta que a todas se les asigna la misma probabilidad de ocurrencia:

$$\min \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \{L(R_i)\}}{n} \right\}$$

Es decir, se selecciona la **acción que minimiza el promedio de pérdida esperada**.

Si se expresa en términos de ganancias por medio de una función de utilidad U se formularía como:

$$\max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \{U(R_i)\}}{n} \right\}$$

Ejemplo 3.5

A continuación se aplica el criterio de Laplace con los datos del ejemplo 3.2.

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	50	100	200
B	10	30	50
C	20	15	30

En este contexto, **para aplicar el criterio de Laplace** y minimizar la pérdida esperada, se siguen estos pasos:

- Se asigna la misma probabilidad a todos los posibles resultados de pérdida posibles. En este caso la probabilidad asignada es $\frac{1}{3}$.
- Se obtienen las pérdidas promedio, que en este caso son:
 - Opción A: $\frac{50 + 100 + 200}{3} = 116.67$.
 - Opción B: $\frac{10 + 30 + 50}{3} = 30$.
 - Opción C: $\frac{20 + 15 + 30}{3} = 21.67$.
- Seleccionar la opción con la menor de estas pérdidas esperadas. En este caso la opción C con una pérdida promedio de 21.670 €.

Por lo tanto, **aplicando el criterio de Laplace**, la empresa **debería invertir** en fondos indexados diversificados.

Criterio de Savage

El **método de Savage**, también conocido como *minimización del arrepentimiento*, es un enfoque basado en **minimizar el arrepentimiento**, que es la **diferencia entre el resultado obtenido y el mejor resultado posible** para cada opción, asumiendo que se conoce el resultado más probable después de haber tomado la decisión.

Observaciones

- **Determinar el arrepentimiento** asociado con cada opción de decisión **puede ser subjetivo y difícil** de cuantificar.
- Savage busca **minimizar el arrepentimiento esperado** asociado con cada opción de decisión, permitiendo al tomador de decisiones seleccionar la opción que **ofrezca el menor arrepentimiento máximo**.
- Proporciona un **enfoque robusto** para tomar decisiones bajo incertidumbre al considerar tanto el resultado obtenido como el mejor resultado posible para cada opción.
- Al minimizar el arrepentimiento, el criterio de Savage puede llevar a **decisiones conservadoras que priorizan la mitigación del riesgo** sobre la búsqueda de oportunidades de alto rendimiento.

Formulación del criterio de Savage

El **método de Savage**, se formula de la siguiente manera.

Dada una serie de decisiones o acciones $D_1, \dots, D_n$ de modo que para cada decisión D_i hay m resultados posibles $R_{i1}, \dots, R_{im}$, el arrepentimiento asociado con cada resultado es la diferencia entre el peor resultado posible y el resultado obtenido:

$$A_{ij} = W_{ij} - R_{ij}$$

donde W_{ij} es el peor resultado posible asociado con la decisión D_i y el resultado R_{ij} . El arrepentimiento máximo para cada decisión D_i se define como:

$$R_{i\max} = \max\{A_{i1}, \dots, A_{im}\}$$

luego, el arrepentimiento mínimo para todas las decisiones se define como:

$$R_{\min} = \min\{R_{1\max}, \dots, R_{n\max}\}$$

Ejemplo 3.6

A continuación se aplica el criterio de Savage con los datos del ejemplo 3.2.

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	50	100	200
B	10	30	50
C	20	15	30

En este contexto, **para aplicar el criterio de Savage** y minimizar el arrepentimiento esperado, se siguen estos pasos:

- Se identifica el máximo de pérdida para cada estado de la naturaleza (columna).
- Se construye la tabla de arrepentimientos restando a cada mayor pérdida el valor de la columna. En este caso los máximos son 50, 100 y 200 respectivamente. La tabla de arrepentimientos es la siguiente:

Opción	Pérdida (baja volatilidad)	Pérdida (normal volatilidad)	Pérdida (alta volatilidad)
A	0	0	0
B	40	70	150
C	30	85	170

- Se selecciona la **opción con menor arrepentimiento esperado**. Los arrepentimientos máximos para cada opción son, respectivamente, 0, 150 y 170. En este caso se seleccionaría la opción A porque el mínimo de arrepentimiento esperado es de 0€.

Por lo tanto, **aplicando el criterio de Savage**, la empresa **debería invertir** en acciones de una empresa de tecnología.

Ejercicio 3.2

Una empresa quiere hacer una inversión. Los distintos estados de la naturaleza son: crecimiento (C), leve crecimiento (LC), leve recesión (LR) y recesión (R). Las posibles acciones que se pueden tomar son: mantenerse (M), fuerte crecimiento (FC), leve crecimiento (LC) y diversificarse (D). La tabla siguiente muestra los pagos, en unidades monetarias, asignados a cada decisión según el estado.

	C	LC	LR	R
M	3	2	2	0
FC	4	2	0	0
LC	6	2	0	-2
D	1	1	2	2

Aplicar todos los métodos introducidos en esta sección y comparar resultados (para el criterio de Hurwitz usar $\alpha = 0.5$).

Solución: Plunger decide la acción LC, Wald la acción D, Hurwitz decide FC o LC, Laplace elige la acción M y Savage la opción FC.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- **En condiciones de riesgo**
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Toma de decisiones en condiciones de riesgo

Es conveniente recordar que los **procesos de decisión en ambiente de riesgo** envuelven situaciones en las que **se puede asociar la probabilidad de ocurrencia a cada estado de la naturaleza**.

Observaciones

- La **diferencia entre la toma de decisiones bajo incertidumbre y bajo riesgo**, es que en la primera, no se posee información suficiente como para asignarle una distribución de probabilidad a los posibles resultados futuros de una decisión tomada hoy.
- Las situaciones de **riesgo** son muy usuales y las más comunes están **relacionadas con situaciones de azar** (loterías, ruletas, rifas, etc.).
- Existen otros muchos **tipos de fenómenos que causan situaciones de riesgo**: catástrofes naturales o comportamiento del clima, cambios en la economía nacional o internacional, cambios en políticas de países que afecten de forma directa o indirecta a un país, obsolescencia, etc.

A continuación **se van a introducir algunos de los criterios de decisión en ambientes de riesgo** más comunes en este contexto.

Reglas de decisión

Los diferentes **criterios de decisión** en ambiente de riesgo se basan en estadísticos asociados a la **distribución de probabilidad** de los resultados.

Es conveniente recordar la forma tabular asociada a una toma de decisiones en ambiente de riesgo.

Estados	E_1	E_2	...	E_m
Alternativas	p_1	p_2	...	p_m
D_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
D_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

En este contexto de toma de decisiones en ambiente de riesgo **algunos de los criterios más usuales** son: criterio del **valor esperado**, de pérdida de oportunidad esperada, de mínima varianza con media acotada, de la **probabilidad máxima**, de máxima verosimilitud, **curvas de utilidad**, bayesiano, etc.

Criterio del valor esperado

El **criterio del valor esperado** consiste en determinar el valor esperado para cada alternativa en función de las probabilidades de los resultados posibles y **elegir aquella alternativa que proporciona el máximo valor esperado**.

Observaciones

- Este enfoque se basa en la idea de que **los tomadores de decisiones son neutrales al riesgo** y están únicamente interesados en maximizar el valor esperado de sus decisiones.
- El criterio del valor esperado **proporciona un enfoque claro y cuantitativo para la toma de decisiones en ambientes de riesgo** al permitir a los tomadores de decisiones comparar y evaluar las diferentes alternativas en función de sus valores esperados.
- Este enfoque **puede no ser apropiado en situaciones donde los tomadores de decisiones son aversos al riesgo** o cuando hay incertidumbre significativa sobre las probabilidades o los resultados posibles.

Formulación del criterio del valor esperado

La aplicación práctica del criterio del **valor esperado**, sigue los siguientes pasos:

- **Identificación de alternativas** de decisión.
- Identificación de **resultados posibles y sus probabilidades**.
- **Cálculo del valor esperado:**

$$VE = \sum_i^n p_i \cdot x_i,$$

donde p_i es la probabilidad del resultado x_i asociado a la alternativa de decisión.

- **Selección de la alternativa óptima.** Será aquella con **el mayor valor esperado**.

Criterio de la probabilidad máxima

El **criterio de la probabilidad máxima** a diferencia del criterio del valor esperado, que se enfoca en maximizar el valor promedio esperado, **prioriza la maximización de la probabilidad de alcanzar un objetivo específico.**

Observaciones

- Este enfoque es especialmente útil cuando el **tomador de decisiones está más preocupado por garantizar la consecución de un resultado específico** que por maximizar el valor esperado en general.
- Puede ser **apropiado en situaciones donde hay un objetivo claro y definido que se busca lograr**, y donde la maximización de la probabilidad de alcanzar ese objetivo es de suma importancia.
- Es importante tener en cuenta que este enfoque **puede no ser óptimo en todas las situaciones** y puede no tener en cuenta completamente otros factores importantes, como el valor esperado total de los resultados.

Formulación del criterio de la probabilidad máxima

La aplicación práctica del criterio del **valor esperado**, sigue los siguientes pasos:

- **Identificación del objetivo** o resultado deseado. Puede ser cualquier resultado que se considere favorable o satisfactorio en función de los intereses y objetivos del tomador de decisiones
- Identificación de las alternativas de decisión.
- **Evaluación de las probabilidades de éxito:** para cada alternativa de decisión, se evalúa la probabilidad de alcanzar el resultado deseado. Esto implica considerar las probabilidades asociadas con los diferentes resultados posibles y determinar cuál de las alternativas tiene la mayor probabilidad de llevar al resultado deseado.
- **Selección de la alternativa** con mayor probabilidad de éxito.

Ejemplo 3.7

Se considera una inversión cualquiera cuyos datos aparecen en la siguiente tabla. Decidir la mejor opción con los criterios del valor esperado y de la probabilidad máxima.

Estados	E_1	E_2	E_3	E_4
Alternativas	0.2	0.2	0.5	0.1
D_1	11	9	11	8
D_2	8	25	8	11
D_3	8	11	10	11

- **Criterio del valor esperado.**

Se calcula en primer lugar el valor esperado para cada opción.

- Opción D_1 : $0.2 \cdot 11 + 0.2 \cdot 9 + 0.5 \cdot 11 + 0.1 \cdot 8 = 11.07$
- Opción D_2 : $0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 25 + 0.5 \cdot 8 + 0.1 \cdot 11 = 11.7$
- Opción D_3 : $0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 11 + 0.5 \cdot 10 + 0.1 \cdot 11 = 9.9$

Se elige el máximo de los valores esperados, que en este caso corresponde a 11.7. Por tanto, de acuerdo a este criterio, se elige la opción D_2 .

- **Criterio de la probabilidad máxima.** Para aplicar este criterio se supone, para este ejemplo, que el decisor tiene por objetivo que la utilidad de cada estado de la naturaleza sea mayor o igual que 10, es decir que $P[E_i \geq 10]$.

Estados	E_1	E_2	E_3	E_4	
Alternativas	0.2	0.2	0.5	0.1	$P[E_i \geq 10]$
D_1	11	9	11	8	0.7
D_2	8	25	8	11	0.3
D_3	8	11	10	11	0.8

Se elige el máximo de las probabilidades obtenidas para el interés particular del decisor, que en este caso corresponde a 0.8. Por tanto, de acuerdo a este criterio, se elige la opción D_3 .

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

Existen **más criterios o reglas de decisión entre las que destacan** las siguientes:

- Criterio de pérdida de oportunidad esperada.
- Criterio de mínima varianza con media acotada.
- Criterio de media con varianza acotada.
- Criterio de dispersión.
- Criterio de máxima verosimilitud.
- **Curvas de utilidad.**
- **Enfoque bayesiano.**

Se deja su descripción, formalización e ilustración con algún ejemplo destacado como tarea para los distintos grupos de prácticas.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

Ejercicio 1

Un empresario adquiere pescado fresco en el mercado central para su posterior venta. Cada caja de pescado la identifica como excelente o no excelente en función del porcentaje de pescado que se considere de calidad excelente. Una caja de pescado excelente contiene un 90% de pescado de alta calidad, mientras que una caja de pescado no excelente contiene solo un 20% de pescado de alta calidad. Una caja de de pescado excelente genera un beneficio de 100 euros, mientras que una caja de pescado no excelente causa unas pérdidas de 100 euros por la mala imagen de la empresa que se llevan los clientes. Antes de comprar una caja el empresario puede comprobar la calidad de la misma extrayendo un ejemplar de pescado con el objetivo de verificar si se trata o no de pescado de alta calidad. Establezca la estrategia que debe seguir el empresario, así como el coste de la información.

Ejercicio 2

Una empresa de aviación está investigando la posibilidad de fabricar y comercializar un nuevo microprocesador dotado de inteligencia casi natural para los aviones del futuro. El proyecto requiere la compra de un sofisticado centro de supercomputación, o bien la contratación de más ingenieros, obviamente la empresa se reserva la opción de no desarrollar el producto. El nuevo producto puede tener una acogida favorable o desfavorable en el mercado, con una acogida favorable en el mercado las ventas estimadas alcanzarían los 50.000 microprocesadores, por el contrario, si la acogida del mercado no fuese favorable las ventas estimadas serían de 20.000 microprocesadores. El precio de venta de los microprocesadores es de 200 euros cada unidad. El coste del centro de supercomputación es de 2.000.000 de euros, mientras que el de contratar y formar a los nuevos ingenieros asciende a 1.000.000 de euros. El coste de fabricación previsto es de 40 euros cada unidad si se fabrica sin la ayuda del centro de supercomputación, y de 10 euros si se fabrica con dicha ayuda. La probabilidad de que el nuevo microprocesador reciba una acogida favorable por parte del mercado es del 50%.

- Sugiera la decisión que debe tomar la dirección de la empresa en base a la aplicación del criterio del valor esperado.
- Determine para qué rango de probabilidades de mercado favorable debe comprar el centro de supercomputación.
- Se han definido las ventas favorables como las que alcancen las 50.000 unidades. Es probable que dicha cifra sea demasiado optimista, halle el valor por el que cambiaría su decisión y contrataría más ingenieros.

Ejercicio 3

La siguiente matriz muestra los beneficios para cada alternativa de decisión, así como las probabilidades a priori de cada estado de la naturaleza.

Estados	E_1	E_2	E_3	E_4
Alternativas	0.15	0.30	0.10	0.45
D_1	100	90	-20	-45
D_2	85	80	10	-20
D_3	0	70	90	60
D_4	-30	0	40	65
D_5	-35	-10	85	120

Determine la mejor decisión utilizando los siguientes criterios:

- Pesimista.
- Optimista.
- Laplace.
- Beneficio máximo esperado.

Ejercicio 4

Una empresa está considerando cambiar uno de sus equipos tecnológicamente avanzados, para ello dispone de dos opciones, la primera es comprar dos nuevos equipos idénticos al actual a 200.000 euros cada uno, y la segunda consiste en comprar un nuevo sistema integrado por 800.000 euros. Las ventas estimadas por la empresa a lo largo de la vida útil de cualquiera de sus equipos son de 5.000.000 de euros en el caso de que el mercado sea alcista, a lo que la empresa le asigna una probabilidad de que suceda del 30%, en caso contrario, si el mercado es bajista las ventas esperadas son de 3.500.000 euros. Indique al director de dicha empresa la opción que debe tomar.

Ejercicio 5

Una empresa está considerando la posibilidad de contratar un experto en ingeniería industrial para la planificación de su estrategia de operaciones. Una adecuada planificación supondría a la empresa unos beneficios de 1.000.000 de euros, mientras que si la planificación no fuera correctamente elaborada, la empresa estima unas pérdidas de 400.000 euros. El director industrial estima que la probabilidad de que el experto realice una adecuada planificación es del 75%. Antes de contratar al experto, la empresa tiene la opción de realizar unas pruebas para determinar la idoneidad del candidato, dichas pruebas tienen una fiabilidad del 80% a la hora de determinar el éxito potencial del candidato en la realización de la planificación de las operaciones de la empresa. Determine la decisión óptima para la empresa, así como el coste que puede asumir la empresa por realizar la prueba de idoneidad.

Ejercicio 6

El departamento de investigación y desarrollo de una empresa pretende diseñar un nuevo sistema de comunicación, para ello puede adoptar tres estrategias posibles de diseño. Cuanto mejor sea la estrategia de diseño menor será el coste variable, según el responsable del departamento de investigación y desarrollo, la estimación de costes para cada una de las estrategias es la siguiente:

- Estrategia basada en baja tecnología y costes reducidos, consistente en contratar a ingenieros becarios en prácticas. Esta opción tiene un coste fijo de 10.000 euros y unos costes variables unitarios de 1.7, 1.6 y 1.5 euros, con unas probabilidades del 40%, 35%, y 25%, respectivamente.
- Estrategia se fundamenta en la subcontratación, recurriendo a personal externo cualificado de alta calidad, lo que conduce a unos costes fijos de 100.000 euros y unos costes variables unitarios de 1.4, 1.3 y 1.2 euros, con unas probabilidades del 60%, 25%, y 15%, respectivamente.
- Estrategia se apoya en alta tecnología, para ello se utilizará el mejor personal de la empresa así como la última tecnología en diseño asistido por computador electrónico. Este enfoque tiene un coste fijo de 250.000 euros y unos costes variables unitarios de 1.1 y 1 euro, con unas probabilidades del 75% y 25%, respectivamente.

Conociendo que la demanda prevista es de 500.000 unidades, determine la decisión que deberá adoptar el responsable del departamento de investigación y desarrollo.

Ejercicio 7

Una empresa cuyo objeto es la venta de coches de segunda mano cobra un 10% de comisión sobre las ventas. Dicha empresa ha recibido el pedido de un cliente de vender tres automóviles de su propiedad, el primero de ellos un flamante utilitario valorado en 10.000 euros, el segundo un deportivo valorado en 60.000 euros y el tercero un vehículo todoterreno 4x4 Turbo casi nuevo cuya valoración asciende a 100.000 euros. Las cláusulas pactadas en el pedido entre el cliente y la empresa establecen que obligatoriamente el utilitario debe ser vendido primero en el plazo de un mes, en caso contrario queda anulado el pedido. Vendido el utilitario, la empresa puede optar por vender el deportivo, el todoterreno, o cancelar el pedido. Por último, una vez vendido el segundo vehículo, la empresa podrá cancelar el pedido o vender el tercer coche. Los gastos de publicidad que estima la empresa serán necesarios para vender dichos automóviles así como la probabilidad de vender cada uno de ellos, vienen dados en la tabla siguiente:

	Gastos publicidad (€)	Probabilidad
Utilitario	3.000	0.4
Deportivo	1.000	0.8
Todo terreno 4x4 Turbo	2.000	0.6

Determine si el gerente de la empresa debe o no aceptar el pedido que le formaliza el cliente.

Ejercicio 8

El gerente de la empresa dedicada a la venta de coches de segunda mano del ejercicio anterior, conoce a un importante piloto de carreras que puede proporcionarle información cien por cien fiable de los automóviles que conseguirá vender, así como el orden en que logrará dichas ventas. Calcule lo que el gerente estaría dispuesto a pagar al piloto por proporcionarle dicha información.

Ejercicio 9

El departamento de I + D de una pequeña empresa está desarrollando un nuevo producto. El gerente de la empresa puede: vender dicho producto a una gran compañía multinacional por 100 millones de euros, poner en marcha una prueba de mercado antes de tomar una decisión, o bien, adelantar la campaña de marketing del nuevo producto con la finalidad de adelantarse a la competencia, confiando en que el desarrollo del mismo culminará con éxito.

Las pruebas de mercado del producto ascienden a 8 millones de euros, existiendo un 60% de probabilidades de que los resultados de las mismas sean favorables, en cuyo caso se estima que valor del nuevo producto asciende a 40 millones de euros. En caso de un resultado desfavorable pueden encontrarse aplicaciones alternativas para el producto en uno de cada cinco casos, si bien el valor del mismo se reduce a 20 millones de euros.

En caso de que el resultado de las pruebas de mercado sea favorable, la probabilidad de que el producto tenga una buena acogida por parte de los clientes es tan solo del 60%. Si se opta por comercializar el producto, los gastos de comercialización ascienden a 5 millones de euros.

La posibilidad de que el gerente adopte la tercera alternativa, adelantar la campaña de marketing del nuevo producto, se estiman en una entre cuatro. Sin embargo, los resultados esperados si hiciera esto con éxito son de ciento sesenta millones de euros. En caso de resultado desfavorable de las pruebas de mercado como siempre, existe la posibilidad de encontrar aplicaciones alternativas para el producto en uno de cada cinco casos, en cuyo caso el valor del mismo es de 80 millones de euros.

Esta tercera alternativa requiere llevar a cabo las pruebas de mercado así como la comercialización del producto, tanto si el producto tiene éxito como sino. Indique la decisión que deberá tomar el gerente de la empresa.

1 Preliminares

- Elementos de un problema de decisión
- Tipos de procesos de decisión
- Tablas y árboles de decisión
 - Tablas
 - Árboles

2 Funciones de utilidad, pérdida y riesgo

- Funciones de utilidad
- Funciones de pérdida
- Funciones de riesgo
- Relaciones entre las funciones de utilidad, pérdida y riesgo

3 Métodos para la toma de decisiones

- En condiciones de certeza
- En condiciones de incertidumbre
- En condiciones de riesgo
- Otros criterios de decisión en ambientes de riesgo

4 Ejercicios

5 Bibliografía

- [1] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2008, 2ª ed.) Modern Actuarial Risk Theory, Using R. Springer.
- [2] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.
- [3] Y. Haimes (2009, 3ª ed.) Risk Modeling, Assessment, and Management. Wiley.
- [4] M. Kriele, J. Wolf (2014) Value-Oriented Risk Management of Insurance Companies. Springer.
- [5] H. Kumamoto, E.J. Henley (1996, 2ª ed.) Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists. IEEE Press.
- [6] Gan, G., Ma, C. y Xie, H. (2014). Measure, Probability, and Mathematical Finance. Wiley.
- [7] F. Liese, K.-J. Miescke (2009) Statistical Decision Theory: Estimation, Testing and Selection. Springer.
- [8] Y. Malevergne, D. Sornette (2006) Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management. Springer.
- [9] A.J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts (2005) Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.
- [10] S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kantz (eds.) (2006) Extreme Events in Nature and Society. Springer.
- [11] T. Aven (2003) Foundations of Risk Analysis. A Knowledge and Decision-Oriented Perspective.
- [12] T. Aven, R. Ortwin (2010) Risk Management and Governance: Concepts, Guidelines and Applications. Springer.
- [13] T. Bedford, R. Cooke (2001) Probabilistic Risk Analysis. Cambridge University Press.
- [14] P. Best (1998) Implementing Value at Risk. Wiley.
- [15] G. Casella, R.L. Berger (2002, 2ª ed.) Statistical Inference. Duxbury.

- [16] E. de Rocquigny (2012) *Modelling Under Risk and Uncertainty: An Introduction to Statistical, Phenomenological and Computational Methods*. Wiley.
- [17] T.L. Lai, H. Xing (2008) *Statistical Models and Methods for Financial Markets*. Springer.
- [18] R.-D. Reiss, M. Thomas (2007, 3^a ed.) *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser.
- [19] I. Rychlik, J. Rydén (2006) *Probability and Risk Analysis*. Springer.
- [20] F. García Garzón (2013) *Problemas resueltos de teoría de la decisión*. OmniaScience.