Explorando competencias de modelación matemática y errores en la formación docente

Maitere Aguerrea, Francisco Rodríguez-Alveal y Jaime Huincahue

El estudio analiza las competencias de profesores en formación en la resolución de problemas de modelación matemática, caracterizando niveles de logro, interrelaciones y su influencia en el éxito, usando GeoGebra y colaboración entre pares. Examina errores y dificultades en cada competencia. Los resultados muestran un menor desarrollo en codificación, validación e interpretación de resultados, y una correlación significativa entre representación, visualización y construcción de modelos reales. Aunque no se midió el impacto de GeoGebra y la colaboración, se observó que estos elementos son prometedores para la indagación, visualización y validación en la modelación matemática.

Términos clave: Errores; Formación inicial docente; Modelación matemática; Software GeoGebra

Exploring Mathematical Modelling Competencies and Errors in Teacher Education

The study analyses the competencies of trainee teachers in solving mathematical modelling problems, characterising levels of achievement, interrelationships and their influence on success, using GeoGebra and peer collaboration. It examines errors and difficulties in each competency. The results show lower development in coding, validation and interpretation of results, and a significant correlation between representation, visualisation and construction of real models. Although the impact of GeoGebra and collaboration was not measured, these elements were observed to be promising for inquiry, visualisation and validation in mathematical modelling.

Keywords: Errors; GeoGebra software; Initial teacher education; Mathematical modeling

Aguerrea, M., Rodríguez-Alveal, F. y Huincahue, J. (2025). Explorando competencias de modelación matemática y errores en la formación docente. *PNA, 19*(2), 187-221. https://doi.org/10.30827/pna.v19i2.30336

Explorando Competências de Modelagem Matemática e Erros na Formação de Professores

O estudo analisa as competências de professores em formação na resolução de problemas de modelação matemática, caracterizando níveis de realização, inter-relações e a sua influência no sucesso, usando GeoGebra e colaboração entre pares. Examina erros e dificuldades em cada competência. Os resultados mostram um menor desenvolvimento em codificação, validação e interpretação de resultados, e uma correlação significativa entre representação, visualização e construção de modelos reais. Embora o impacto do GeoGebra e da colaboração não tenha sido medido, observou-se que estes elementos são promissores para a investigação, visualização e validação na modelação matemática.

Palavras-chave: Erros; Formação inicial de professores; Modelação matemática; Software GeoGebra

En la actualidad resulta crucial poseer habilidades como resolver problemas, razonar, pensar críticamente, colaborar y comunicar (OECD, 2021), cuya integración con la matemática en diversos contextos es percibido como esencial para la ciudadanía (OECD, 2018). Niss (2012) sugiere centrarse en competencias de modelación, abordando problemas reales y configurando modelos matemáticos (Kaiser, 2005; Blum, 2015). Estas competencias demandan conocimientos matemáticos, comprensión de la realidad y experiencia en modelación (Almeida et al., 2021), donde la formulación de supuestos y conjeturas son fundamentales (Pollak, 2015).

El profesorado de matemática en Chile requiere competencias para resolver problemas de manera creativa y colaborativa, modelando fenómenos naturales y sociales (CPEIP, 2021). Sin embargo, estudios indican que la resolución de problemas en el sistema escolar chileno suele ofrecer situaciones poco desafiantes para el estudiantado, caracterizándose por una resolución mecánica por parte del cuerpo docente (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016). Otros estudios revelan que el profesorado en formación muestra dificultades en la resolución de problemas abiertos, no rutinarios y en contextos reales, prefiriendo situaciones puramente matemáticas (Díaz y Aravena, 2021). También se observa que su formación carece de familiaridad con las complejidades didácticas de la modelación matemática, evidenciando errores en la comprensión de problemas reales, simplificación al modelo matemático y validación de soluciones (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022; Huincahue et al., 2018).

Blum (2015) identifica poca disponibilidad de modelos dirigidos al profesorado, restringiendo su capacidad para aplicar estrategias en contextos más allá de los problemas ficticios y cerrados. Este hallazgo pone de manifiesto la ausencia de conocimiento adecuado en la creación de tareas exploratorias. Al respecto, Pollak (2011) y Anhalt et al. (2018) señalan que la modelación matemática requiere habilidades matemáticas y no matemáticas, siendo una actividad desafiante desde las etapas iniciales de la formación docente, con dificultades durante todo el proceso de modelación (Niss y Blum, 2020), incluso identificando diferencias culturales en el proceso (Yang et al., 2022). Por ello, es relevante fortalecer las competencias de modelación y diseñar cursos que aborden conocimiento matemático y pedagógico relacionado con ésta.

Asimismo, las competencias para resolver problemas y modelar, al plantearlas con tecnologías, estimulan la motivación y exploración, facilitando conexiones e interpretaciones beneficiosas para entender tareas científicas (Álvarez et al., 2021). La integración de herramientas tecnológicas en los procesos de exploración, visualización y generalización matemática es común en la modelación. Diseñar entornos de aprendizaje que fomenten estas experiencias tecnológicas constituye una orientación pedagógica favorable (Villa-Ochoa et al., 2018). Un ejemplo es el uso del software GeoGebra, que facilita la visualización y comprensión de objetos matemáticos complejos, además de identificar con claridad las rutas de desarrollo del estudiantado, lo que permite un análisis de sus procesos de aprendizaje y los errores cometidos (Aguerrea et al., 2022). Investigaciones recientes destacan su potencial en aulas escolares y de educación superior para enseñar, aprender, estudiar y simular contenido y propiedades matemáticas formales, así como para aplicaciones matemáticas a la realidad, involucrando activamente a profesores y estudiantes en situaciones de aprendizaje (Álvarez-Melgarejo et al., 2019; Granados-Ortiz y Padilla-Escorcia, 2021; López et al., 2022).

Además, las tecnologías educativas promueven el trabajo colaborativo y el desarrollo de habilidades para resolver problemas (Saadati y Felmer, 2021). El enfoque colaborativo, como estrategia didáctica para construir conocimiento, cuenta con respaldo creciente (Revelo-Sánchez et al., 2018).

En coherencia con la problemática planteada, esta investigación abordó las siguientes preguntas: ¿cuál es el nivel de logro en las competencias desarrolladas durante la resolución de problemas de modelación?, ¿qué relaciones existen entre los niveles de logro de las competencias en el proceso de modelación?, ¿qué dificultades y errores están asociados a estas competencias? y ¿cómo se utilizan GeoGebra y la interacción grupal en foros virtuales durante el proceso?

Para dar respuesta a dichas preguntas, se formularon los siguientes objetivos:

- caracterizar el nivel de logro de las competencias de modelación en profesores de matemática en formación;
- identificar relaciones entre los niveles de logro de las competencias para determinar cuáles influyen más en el éxito al resolver problemas de modelación;
- analizar los errores y dificultades asociados a cada competencia; y

- describir el uso de GeoGebra, el papel de las indicaciones en los problemas de modelización y las interacciones grupales en foros virtuales.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se describe en qué consiste el proceso de modelización matemática, su relación con la resolución de problemas y las investigaciones sobre errores y dificultades en el proceso de modelación que han servido de inspiración para este trabajo.

Proceso de modelación matemática

El estudio de la modelación matemática aborda diferentes enfoques, objetivos y etapas para comprender el proceso. En un enfoque pedagógico, destaca la transición de una situación real a un problema matemático como núcleo del proceso. Busca desarrollar competencias que permitan al estudiantado comprender su entorno con herramientas matemáticas, generando una actitud positiva hacia la matemática (Kaiser y Sriraman, 2006). El proceso comienza con un problema real simplificado para crear un modelo aproximado a la situación real (Werle et al., 2021). El modelo matemático se obtiene aplicando conocimientos a la interpretación matemática del modelo real, resolviendo y validando las soluciones en el contexto real (Maaß, 2006). Este proceso actúa como puente de aprendizaje entre la realidad y el conocimiento matemático (Huincahue et al., 2018). La competencia modelar se define como la habilidad de construir y utilizar modelos matemáticos, siguiendo las fases del proceso de modelación, para comprender situaciones del mundo real o interpretar resultados matemáticos relacionados (Blum, 2015). Para facilitar la identificación de dificultades y errores en las diversas etapas, Blum y Kaiser (citado en Maaß, 2006) detallan competencias vinculadas al proceso de modelado.

Asimismo, se reconocen la capacidad metacognitiva, la organización de hechos, la argumentación matemática y la actitud hacia la resolución de problemas como factores beneficiosos para el proceso de modelación; sugiriendo la integración constante de estas competencias en diversas clases y tipos de problemas (Anhalt et al., 2018).

Resolución de problemas y modelación matemática

La resolución de problemas se estudia desde diversos enfoques, centrados en fases específicas de resolución, identificación y corrección de errores, o en una estructura más amplia que integra aspectos metacognitivos, creencias y estrategias del alumnado (Baumanns y Rott, 2022). Estos enfoques pueden complementarse en educación matemática para ofrecer una enseñanza más integral y adaptada a las necesidades y contextos del alumnado (p.e., Newman, 1983; Polya, 1957; Schoenfeld, 1985).

Asimismo, conocer modelos y la capacidad de modelar facilita identificar relaciones existentes en los problemas y su resolución. No obstante, en la resolución de problemas, una dificultad común es imaginar cómo modelarlos, es decir, establecer relaciones entre la teoría, los objetos matemáticos y la situación real (García-García y Rentería-Rodríguez, 2013). Al respecto, Saadati y Felmer (2021) sugieren enfocarse en la representación del problema para comprender cómo el estudiantado aborda la resolución, basándose en su perspectiva y en el proceso de búsqueda de soluciones.

Es este camino, Pollak (2015) invita a involucrar a estudiantes y docentes en actividades de resolución de problemas que gradualmente incorporen la habilidad de modelar, desarrollando cuatro etapas (Tabla 1). Además, Blum (2015) identifica un paso previo inicial, la construcción del modelo real de la situación (CME0), señalando que los esquemas de modelación dependen del propósito de ésta.

Tabla 1
Etapas para el aprendizaje de modelación de Pollak considerando la etapa previa CME0 reportada en Blum (2015)

Código	Descripción de las etapas
CME0	Construcción del modelo real de la situación, los esquemas de modelación dependen del propósito de ésta.
CME1	Integración, simplificación, idealización, recolección de datos y formulación de un problema.
CME2	Matematización, transición del lenguaje natural al lenguaje matemático, formulación de hipótesis y definición de variables.
CME3	Resolución, obtención de un modelo matemático, uso de conceptos, teoremas, procedimientos y técnicas matemáticas.
CME4	Interpretación de resultados y su validación, análisis y confrontación de resultados con la situación real.

En el tránsito entre la resolución de problemas y la modelación, la visualización desempeña un papel crucial. Las diversas formas de representación y razonamiento durante este proceso contribuyen a definir características y relaciones (Duval, 2006). En la búsqueda y formulación de conjeturas, las formas argumentativas juegan un papel fundamental. Tanto las formas argumentativas empírica-inductivas (inductiva, analógica, perceptual) derivadas de las fases de creación y/o descubrimiento de la resolución del problema como la argumentación lógico-deductiva (analítica, axiomática) son igualmente válidas, y están presentes en los procesos de matematización (Álvarez et al., 2013; Godino y Recio, 2001).

Dificultades y errores en el proceso de modelación

La modelación implica construcción y ajuste, enfrentando dificultades si los conceptos matemáticos no se dominan (Huincahue et al., 2018). Moreno et al. (2021) categorizan errores en cuatro tipos: simplificación, matematización, resolución e interpretación. Según Moreno et al. (2021), éstos ocurren principalmente en las fases donde interviene la situación real: simplificación y validación.

Estudios sobre las estrategias del profesorado en formación en tareas de modelación, usando problemas de Fermi, observan que la mayoría no construyen modelos ni escogen estrategias óptimas sistemáticamente, aprovechando poco el potencial matemático y mostrando dificultades para cambiar de criterio según el contexto del problema. Los planes de resolución mejoran en las resoluciones grupales (Segura y Ferrando 2023).

Segura y Ferrando (2021) analizaron errores en la estimación de grandes cantidades en superficies delimitadas, usando el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo Ferri, 2006) y una clasificación específica de errores en la estimación y medición de longitudes y áreas, basada en Moreno et al. (2021). Identificaron una alta frecuencia de errores conceptuales vinculados a la simplificación y matematización de la situación real. También encontraron una relación significativa entre el contexto del problema y las categorías de errores, destacando la influencia del contexto en la naturaleza de los errores cometidos. La tabla 2 detalla el sistema de categorías de errores definido.

Tabla 2
Sistema de categoría de errores en el proceso de modelación

Categoría	Categoría Moreno et al. (2021)	Categoría Segura y Ferrando (2021)
Error de simplificación	Modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad	Modelo inicial incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la situación real.
	Modelo real incompleto por incoherencias en las relaciones entre los elementos de la realidad considerados	Modelo inicial incorrecto por error de percepción de la magnitud.
	No se elabora una función objetivo para el modelo real	Modelo inicial incorrecto por inadecuada internalización de referentes de la magnitud a estimar.
	No construye un modelo real	No construye un modelo inicial.

Tabla 2
Sistema de categoría de errores en el proceso de modelación

Categoría	Categoría Moreno et al. (2021)	Categoría Segura y Ferrando (2021)
Error de matematización	Modelo matemático incoherente con el real	Modelo matemático incoherente con el modelo inicial debido a un error en el significado de los términos de la magnitud.
		Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por inadecuada internalización de las unidades de medida del SI de la magnitud a estimar.
		Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por el uso de unidades de medida inadecuadas.
	Modelo matemático incompleto	El modelo matemático no se construye o está incompleto porque los elementos del modelo inicial no están cuantificados.
	No se construye un modelo matemático	
Error de resolución	Errores conceptuales	Uso de procedimientos de cálculo incorrectos o errores de cálculo.
	Errores procedimentales	Error en la conversión de unidades de medida.
	Resolución incompleta	Resolución incompleta
Error de interpretación	No se interpretan los resultados	Ausencia de unidades de medida en los resultados.
	No identificar o plantear posibles limitaciones del modelo	La estimación es claramente incompatible con la situación real.

METODOLOGÍA

Es este apartado se describe el diseño metodológico de este trabajo, detallando la muestra, la tarea utilizada, el sistema de categorías empleado para el análisis de las respuestas, el proceso de recogida de información y de análisis.

Diseño del estudio y participantes

Se adoptó un enfoque mixto secuencial, combinando métodos cuantitativos y cualitativos (Creswell y Creswell, 2018). En la fase cuantitativa, se utilizó un diseño descriptivo y analítico para explorar el comportamiento y detectar diferencias significativas en las categorías de análisis. En la fase cualitativa, se realizó un análisis de contenido de las justificaciones proporcionadas por el grupo de estudio, donde los fragmentos de texto respaldan y articulan las experiencias formativas de los participantes (Blanco y Barrantes, 2003). La selección de la muestra se realizó mediante un muestreo no probabilístico intencionado (McMillan y Schumacher, 2011). La muestra está compuesta por 42 estudiantes de segundo año de pedagogía en matemática, que se encontraban en modalidad remota y cursando cálculo diferencial e integral en varias variables, además, estaban familiarizados con el uso del software GeoGebra. Se organizaron en 10 grupos codificados como G1-G10 (ocho de cuatro y dos de cinco participantes), participando de forma voluntaria y proporcionando su consentimiento informado.

Para el estudio, se adaptó un problema de Purcell et al. (2017, p. 114), eliminando datos iniciales y añadiendo un contexto más realista para el estudiantado. Esto resultó en una tarea abierta y no rutinaria, que fomentó la reflexión sobre la enseñanza de la modelación matemática (Figura 1). Además, se incluyeron preguntas para guiar la resolución y asegurar respuestas explícitas a las competencias del proceso de modelación descritas en la tabla 1 (Figura 2).

Las Arañas y el Control Natural de las Moscas en el Planeta

Por cada persona que habita en este planeta hay 17 millones de moscas. Estos insectos cumplen un rol en el equilibrio del planeta realizando funciones como polinizar plantas y devorar cadáveres en descomposición, además de nutrirse de los residuos y aguas servidas presentes en los drenajes de las ciudades. Sin embargo, también dañan los cultivos, propagan enfermedades, matan arañas y cazan libélulas. Asimismo, poseen la habilidad de escapar debido a que cuentan con un sofisticado sistema sensorial que les permite anticiparse a los movimientos de su atacante y responder con movimientos muy rápidos.

Por otro lado, las moscas también forman parte de la cadena alimenticia de otras especies, en particular las arañas de la familia *Saltícidae* más conocidas como arañas saltarinas o caza moscas. Quienes tienen la característica de estar constantemente al acecho de sus víctimas, aproximándose con una corta carrera y deteniéndose para dar un gran salto final, en cualquier dirección, el cual puede ser muy largo y muy preciso de acuerdo a la ubicación de su presa.

Además de los controles biológicos para controlar o eliminar algunas especies como las moscas existen los llamados controles naturales que no usan sustancias químicas, en este sentido las arañas saltarinas cumplen este rol en la naturaleza.

En este contexto, suponga que una mosca se mueve sigilosamente, de derecha a izquierda, a lo largo de la parte superior de la superficie de un montículo de basura. Al mismo tiempo, una araña saltarina situada a la izquierda, en la horizontal de la base del montículo, la observa esperando el momento exacto para capturarla y obtener su cena. ¿Cómo determinar el momento óptimo en que la araña debería saltar para capturar a la mosca? (**A**) y ¿cómo tendría que ser este salto para tener éxito en el primer intento? (**B**).

Figura 1. Contexto de la tarea

Preguntas de la parte I de la tarea

1. ¿Qué información relevante entrega la situación planteada para responder las preguntas **A** y **B**?
2. Representa gráficamente la problemática **A** y **B**, luego explica por qué elegiste tal representación.
3. ¿Qué conceptos matemáticos y/o habilidades, adquiridas en tu formación podrían ayudar a responder **A** y **B**? Explica en cada uno de los casos.
4. Considerando tu respuesta en 3, ¿qué información adicional es necesaria tener para contestar la pregunta **A**? ¿Es ésta suficiente para contestar también **B**?
5. Propone un método matemático para responder las preguntas **A** y **B**. Explica tu razonamiento.

Indicaciones para la parte II de la tarea

1. Plantea condiciones necesarias y suficientes para dar respuesta al problema planteado en las preguntas **A** y **B**.
2. En base a las condiciones dadas, simula en GeoGebra la situación. Luego, comenta sobre la pertinencia de tus hipótesis.
3. Teniendo en cuenta lo anterior, define formalmente un modelo matemático que permita responder las preguntas **A** y **B**. Identifica los datos, parámetros y/o variables que participan en tu modelo. Resuelve formalmente y responde las preguntas.
4. Compara tu respuesta formal con la simulación en GeoGebra. Comenta lo que observas.
5. Valida la respuesta obtenida del modelo en el contexto real.

Figura 2. Preguntas e indicaciones de la tarea

Para el diseño y análisis de esta tarea, se creó un sistema de categorías con cinco dimensiones competenciales, considerando investigaciones previas y las etapas para el aprendizaje de la modelación matemática (Tabla1), y el uso del software GeoGebra. Para describir los errores del proceso, se usaron las categorías de análisis de Moreno et al. (2021) y Segura y Ferrando (2021). La tabla 3 muestra el sistema de categorías con sus respectivas componentes y los descriptores asociados para identificar el desarrollo de competencia.

Tabla 3
Sistema de categorías de análisis

Dimensión Competencial	Componentes	Descriptores
DC1: Lectura y construcción	DC11: Lectura e identificación de información. DC12: Representación, visualización y construcción de un modelo real.	Identifican información disponible y distinguen entre lo relevante e irrelevante. Representan la situación en forma gráfica, visualizando una situación ideal y construyendo un modelo real de la problemática.
DC2: Comprensión completa e integración	DC21: Recolección de datos e información complementaria. DC22: Idealización y simplificación. DC23: Formulación de un problema.	Recurren a datos e información necesaria, realizan suposiciones, simplifican el problema, establecen relaciones entre variables y formulan el problema matemático.
DC3: Transformación y matematización	DC31: Realización de un plan. DC32: Transición del lenguaje natural al lenguaje matemático. DC33: Formulación de hipótesis y definición de variables.	Elaboran un plan para resolver el problema matemático formulado, seleccionan notaciones apropiadas, matematizan cantidades y relaciones relevantes, y representan la situación gráficamente. Además, simplifican estas cantidades y relaciones mediante formulación de hipótesis, variables y relaciones.
DC4: Proceso y resolución	DC41: Obtención de un modelo matemático. DC42: Uso de conceptos, teoremas, procedimientos y técnicas matemáticas.	Aplican estrategias heurísticas respaldadas por GeoGebra, emplean conocimientos matemáticos de manera adecuada y aplican estos conocimientos para resolver el problema.
DC5: Codificación, interpretación y validación.	DC51: Análisis y validación matemática de resultados. DC52: Interpretación y confrontación de resultados con la situación real. DC53: Revisión del modelo.	Verifican críticamente y reflexionan sobre las soluciones utilizando GeoGebra. Interpretan los resultados matemáticos en contextos externos a las matemáticas y revisan partes del modelo o repiten el proceso si las soluciones no se ajustan a la situación.

Nota. Descriptores adaptados de subcompetencias de Blum y Kaiser (Maaß, 2006, p. 116-117)

La correspondencia entre las preguntas de la tarea y los componentes de la dimensión competencial se dan en la tabla 4.

Tabla 4
Correspondencia preguntas de la tarea con dimensiones competenciales

Parte de la Tarea	Pregunta	Dimensión competencial	Componentes
Parte I	1	DC1	DC11
	2	DC1	DC12
	3	DC2	DC21
	4	DC2	DC22, DC23
	5	DC3	DC31
Parte II	1	DC3	DC32, DC33
	2	DC4	DC41
	3	DC4	DC41, DC42
	4	DC5	DC51
	5	DC5	DC52, DC53

La tarea demandó la comprensión contextual, formulación de conjeturas, y conocimientos de cálculo diferencial e integral, geometría analítica y trigonometría (Moreno et al., 2021; Pollak, 2015), así como también, aplicar habilidades de estimación y medición (Segura y Ferrando, 2021). Resolverla implicó imaginar montículos en tres dimensiones, simplificar al plano, reconocer información relevante sobre posiciones, restricciones de movimiento y habilidades de los insectos, idealizar utilizando curvas suaves, como por ejemplo, parábolas, elipse, etc., para aplicar conocimientos del cálculo diferencial; esto porque en el texto se indica que la mosca se mueve sigilosamente, de derecha a izquierda, a lo largo de la parte superior de la superficie del montículo, lo que lleva a inferir que la superficie puede ser modelada y/o medible por una curva suave. En tal caso, la posición óptima de la mosca para ser atrapada, se determina en la línea visual tangente a la curva (idealización del montículo), y el salto de la araña se puede modelar con las ecuaciones de lanzamiento de proyectil.

Para comprender e integrar completamente, se necesitó información adicional al contexto, como por ejemplo la capacidad visual de las arañas saltarinas y su capacidad de salto, que en general pueden saltar hasta seis veces la longitud de su cuerpo, permitiendo formular un problema matemático simplificado al plano, suponiendo la forma y tamaño del montículo en relación con la capacidad de salto de la araña y su posición (uso de unidades de medida, percepción de magnitud, etc.), además, de explicar la posición de la mosca en el instante que debe saltar la araña para que la mosca no alcance a escapar (momento óptimo), el ángulo de salto y la velocidad inicial necesaria para determinar la trayectoria del salto.

En la transformación y matematización, se elaboró un plan para describir un método matemático, identificando variables, funciones objetivo, rectas tangentes, derivadas, trayectoria parabólica, ángulo de salto mínimo, etc., utilizando GeoGebra para visualizar y conjeturar.

Para el proceso de resolución hipotético de la tarea, fue posible formular un modelo matemático validado con GeoGebra, resolviendo y argumentando en términos matemáticos, pudiendo aplicar conocimientos del cálculo diferencial, como es la derivación de la función objetivo, puntos críticos, recta tangente, ángulo mínimo para el salto con planteamientos de ecuación de movimiento, y empleando ecuaciones de lanzamiento de proyectil.

En la codificación, interpretación y validación, se comparó las soluciones formales con simulaciones, asegurando coherencia con las dimensiones del modelo y las capacidades de los insectos.

En cuanto a la validación de la tarea, ésta fue evaluada por jueces expertos dedicados a la formación del profesorado, perteneciente a dos instituciones de educación superior. Los evaluadores asignaron puntuaciones que fluctuaron entre 3 y 4 puntos en una escala de 1 a 4, validando la claridad, coherencia, relevancia y suficiencia los ítems de la tarea en relación con las dimensiones a evaluar. Por ello, los ajustes aplicados estuvieron centrados en la adecuación de la sintaxis y redacción, para lograr una mejor comprensión del contexto. Posteriormente, se aplicó la versión mejorada a un grupo piloto de estudiantes, con el objetivo de comprobar la claridad y comprensión de los ítems; obteniendo una retroalimentación valiosa que confirmó la efectividad de las modificaciones realizadas. Sin embargo, se decidió dividir la tarea en dos partes, con el fin de incorporar espacios de reflexión y colaboración entre los grupos, como foros virtuales.

Recogida y análisis de datos

La tarea fue presentada en formato PDF y trabajada durante dos semanas, abarcando cuatro sesiones sincrónicas y asincrónicas en Teams® y Moodle. El equipo de investigación supervisó el trabajo, llevando a cabo la experimentación en agosto de 2021 mediante canales específicos asignados a cada grupo. Los datos recopilados incluyen respuestas grupales y observaciones de campo, los cuales se recolectaron en dos etapas. En la primera etapa, correspondiente a las dos primeras sesiones, se abordaron las dimensiones DC1, DC2 y parte de DC3. Las respuestas fueron compartidas en foros virtuales para comentarios y revisiones del estudiantado. La segunda etapa se centró en DC3, DC4 y DC5, con respuestas elaboradas sin socializar en los foros.

Para el análisis de datos, se organizó la información de acuerdo con las dimensiones competenciales y sus componentes. Se utilizó un análisis descriptivo con estadísticos y la prueba de Kruskal-Wallis. En la fase cualitativa, se realizó un análisis de contenido inductivo. Los datos se analizaron entre los investigadores paralelamente, identificando similitudes y disparidades, principalmente en las dificultades y errores de las respuestas, alcanzando un porcentaje de similitud del 95% y resolviendo las disparidades. La cuantificación del desempeño se basó en una plantilla de concreción de cuatro niveles, similar a la utilizada por Saadati y Felmer (2021) (Tabla 5).

Tabla 5
Esquema de puntuación para el desempeño

Puntos	Código	Descripción
0	En blanco/no formula respuesta.	No se formula respuesta o se está lejos de comprender lo esperado.
1	Formular sin éxito.	Se formula respuesta insuficiente y con errores.
2	Formular con error menor.	Se formula respuesta incompleta o con errores menores durante la ejecución.
3	Formular correctamente.	Se formula respuesta completa, pero posiblemente se cometió un error menor.

La tabla 6 muestra un ejemplo una especificación del puntaje asignado al analizar el logro de las respuestas relacionadas con la componente DC1.2.

Tabla 6
Asignación de puntaje según nivel de logro

Componente	Puntos	Concreción
DC1.2	0	No hace representación gráfica del problema.
	1	Se representa la situación sin conectar con la información relevante ni el problema planteado.
	2	Representa en el plano la forma del montículo, posiciones de la araña y la mosca, visual en el instante óptimo en que la araña y la mosca se ven, pero no representa el salto de la araña en el mismo instante. No explica.
	3	Representa la situación en tres dimensiones, luego la simplifica en dos dimensiones, justificando. Explicita: forma del montículo, posición de la araña, y de la mosca en la parte superior de un montículo suave; gráfica de la visual en el instante óptimo en que la araña y la mosca se ven y la gráfica del salto parabólico de la araña en ese instante.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se entregan las estadísticas descriptivas (media aritmética, desviación típica y moda) de los resultados por dimensión competencial y componentes de los diez grupos (Tabla 7).

Tabla 7
Distribución de puntajes modales, media y desviación típica

Categorías	Componentes	Moda(s)	Media	Desviación típica (DT)
DC1	DC11	2; 3	2,5	0,50
	DC12	1	1,5	0,67
DC2	DC21	1	1,9	0,83
	DC22	2	2,0	0,63
	DC23	2	2,0	0,77
DC3	DC31	1; 2	1,5	0,50
	DC32	1; 2	1,5	0,81
	DC33	2	2,0	0,77
DC4	DC41	2	1,8	0,75
	DC42	1	1,4	0,80
DC5	DC51	1	1,2	0,87
	DC52	0	1,0	1,18
	DC53	0	0,6	0,80

Se observan puntajes más altos en DC11 (Modas = 2 y 3), señalando dos tendencias que evidencian la capacidad de leer el problema e identificar información relevante. Una explicación plausible de este logro podría ser resultado de la discusión grupal, convirtiendo el trabajo en un entorno cognitivo colaborativo (Blum, 2015). Aunque todos los grupos representan el problema, la mayoría enfrenta dificultades al construir un modelo real satisfactorio (DC12, Moda=1), revelando desafíos para simplificar y estructurar, posiblemente debido a limitaciones en el conocimiento extramatemático y su relación con el contexto del problema (Borromeo Ferri, 2019).

Se destaca que las componentes con puntajes más altos, donde los grupos tienen un comportamiento promedio similar, son: DC22, DC23, DC33 y DC41. Esto evidencia avances en la formulación de un problema matemático, realizando suposiciones y simplificando la situación, a pesar de las dificultades encontradas en la construcción de un modelo real (DC12). También se observa progreso en la matematización del problema, formulando variables e hipótesis y relacionándolas para obtener un modelo matemático, pese a las dificultades en las componentes anteriores, donde varios grupos no logran realizar una transición completa del lenguaje natural al lenguaje matemático (DC32, Moda=1 y 2), al no relacionar adecuadamente las variables definidas con el contexto.

Lo anterior, entrega evidencias de que es posible avanzar en el proceso, incluso sin completar satisfactoriamente las etapas anteriores; es decir, el proceso de resolución no es lineal, en concordancia con Borromeo Ferri (2006). Además, los foros virtuales facilitaron la reflexión y la comparación de respuestas, contribuyendo al entendimiento del problema.

La mayoría de los grupos propusieron un modelo matemático de manera incompleta (DC41, Moda=2), evidenciando dificultades en el empleo de conceptos, teoremas, procedimientos y técnicas matemáticas en su resolución (DC42, Moda=1). En su mayoría, no llevan a cabo la interpretación ni la confrontación de resultados con la situación real (DC52, Moda=0), una observación también encontrada por Blum (2015), donde el alumnado percibe la confrontación y validación como una tarea más propia del docente que de su propio proceso de resolución.

Se obtienen niveles de logro mayoritariamente heterogéneos, con desviaciones típicas fluctuando entre 0,50 y 1,18. El indicador con mayor variabilidad (DT=1,18) se presenta en la interpretación y confrontación de resultados frente a la situación real, mientras que hay mayor homogeneidad en la lectura e identificación de información y en la elaboración de un plan (DT=0,5). Esto evidencia dificultades para articular la teoría con los objetos matemáticos y la situación real que se analiza, en consonancia con los hallazgos de García-García y Rentería-Rodríguez (2013).

Respecto al logro promedio en cada componente (Figura 3), se observa un avance en la tarea, logrando formular hipótesis y definir variables (DC33, Media=2,0) y obtener un modelo matemático de manera incompleta (DC41, Media=1,8), a pesar de las dificultades enfrentadas en las componentes DC12, DC31 y DC32. Se muestra un mayor logro promedio en la lectura e identificación de información (DC11, Media=2,5). Esto refleja que el alumnado extrae de la lectura información relevante de la situación, pero evidencian dificultades para utilizar esta información en la construcción de un modelo real, la elaboración de un plan y la transición entre el lenguaje natural y el matemático, en coherencia con Segura et al. (2021).

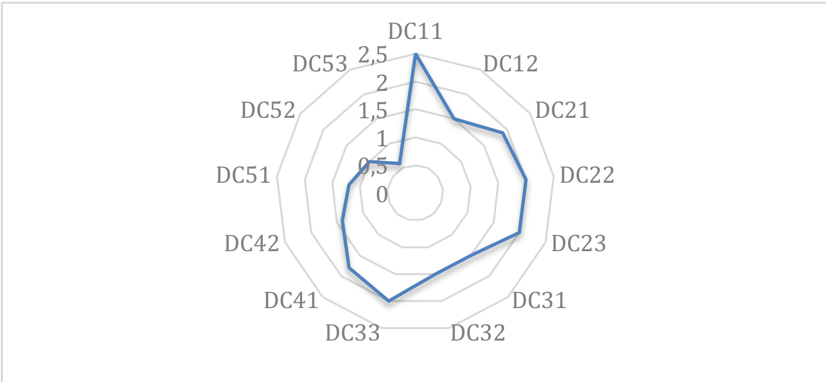


Figura 3. Diagrama radial distribución de puntajes promedios

Asimismo, se observa que los niveles de logro promedio disminuyen al emplear el conocimiento matemático y aplicarlo correctamente en la resolución del problema (DC42, Media=1,4); al analizar y validar los resultados matemáticos (DC51, Media=1,2); al interpretar y confrontar esos resultados en el contexto (DC52, Media=1,0); y al ajustar el modelo después de revisarlo (DC53, Media=0,6). Estos hallazgos podrían explicarse por las concepciones del estudiantado sobre lo que implica validar y ajustar un modelo, donde la mayoría realiza una validación interna basada en el procedimiento de resolución, sin conectar los resultados con la situación contextual (Borromeo Ferri, 2006).

Por otro lado, en la tabla 8 se muestra el coeficiente de correlación no paramétrico de Spearman (rS), teniendo en cuenta el número de observaciones, presentando correlaciones positivas, negativas y nulas, con distintos grados de intensidad.

Se observa una alta correlación significativa entre la componente DC12 con las componentes DC21, DC31 y DC42 ($rS \geq 0{,}80$), y con las componentes DC51-DC53 ($0{,}66 \leq rS \leq 0{,}76$), las cuales todas presentan un bajo nivel de desempeño (Media$\leq$1,9; DT$\geq$0,5). Indicando que la falta de representación, visualización y construcción adecuada de un modelo real impide lograr una comprensión completa e integración satisfactoria del problema con los objetos matemáticos necesarios para resolverlo e interpretar y validar resultados en contextos. Estos hallazgos son coherentes con los entregados por Anaya et al. (2006), quienes evidencian las mismas dificultades en estudiantes de ingeniería de primer año, sin experiencia en modelación.

Asimismo, se observan altas correlaciones significativas entre las componentes que involucran la recolección de datos e información complementaria (DC21) y el uso de conceptos, teoremas, procedimientos y técnicas matemáticas (DC42, rS=0,83), indicando que las dificultades manifestadas en la recolección de datos e información complementaria está fuertemente asociada con el bajo rendimiento en el uso de conceptos y técnicas matemáticas.

Además, las altas correlaciones entre la realización de un plan (DC31) con DC42 (rS=0,79), y con el análisis y la validación matemática de resultados (DC51, rS=0,71), las cuales muestran un bajo desempeño (Media ≤1,5; DT≥0,5), indican que las dificultades para realizar un plan están estrechamente ligadas al bajo desempeño en el uso de conceptos y técnicas matemáticas, así como también, al análisis y validación de resultados matemáticos. Lo que evidencia las dificultades existentes para establecer relaciones entre la situación problema y el conocimiento matemático necesario para resolverla. Este hallazgo concuerda con investigaciones previas, como las presentadas por Moreno et al. (2021).

Tabla 8

Matriz de correlación entre componentes presentes en cada categoría.

		DC1		DC2			DC3			DC4		DC5	
		DC 11	DC 12	DC 21	DC 22	DC 23	DC 31	DC 32	DC 33	DC 41	DC 42	DC 51	DC 52
DC1	DC11												
	DC12	0,08											
DC2	DC21	0,37	0,83*										
	DC22	-0,32	0,28	0,37									
	DC23	0,26	0,80*	0,93*	0,61								
DC3	DC31	-0,20	0,80*	0,60	0,63*	0,78*							
	DC32	0,33	-0,06	0,23	0,00	0,12	-0,15						
	DC33	0,17	0,18	0,48	0,31	0,47	0,17	0,76					
DC4	DC41	0,21	0,17	0,43	0,27	0,50	0,21	0,36	0,75*				
	DC42	0,04	0,89*	0,83*	0,36	0,83*	0,79*	0,25	0,51	0,49			
DC5	DC51	-0,19	0,76*	0,56	0,30	0,58	0,71*	0,14	0,29	0,42	0,86*		
	DC52	-0,19	0,66*	0,54	0,18	0,46	0,41	0,26	0,52	0,30	0,67*	0,67	
	DC53	-0,32	0,69*	0,38	0,00	0,31	0,47	0,00	0,14	0,03	0,63	0,77*	0,87*

Nota. *=Correlación significativa al 5%

También se presenta una alta correlación positiva entre la formulación de hipótesis y definición de variables (DC33) con la obtención de un modelo matemático (DC41, rS=0,75). Se observa que el desempeño en promedio está entre 1,8≤Media≤2), con desviación típica muy alta (DT≥ 0,75). Dado el desempeño promedio de los grupos con una variabilidad significativa en estas componentes, esta correlación implicaría que una mejora en la formulación de hipótesis y la definición de variables está fuertemente asociada con una mejora en la obtención de un modelo matemático. Al respecto, Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) identifican en su investigación una alta frecuencia de errores durante la fase de simplificación del modelo matemático y la matematización.

Ahora, la fuerte correlación positiva entre el uso de conceptos, teoremas, procedimientos y técnicas matemáticas (DC42) con las componentes donde intervienen el análisis y la validación matemática de resultados, así como también, la interpretación y confrontación (DC51, rS=0,86; DC52, rS=0,67), indica que el uso de conceptos y técnicas matemáticas está fuertemente asociado con el análisis y validación matemática de los resultados, así como también, con la capacidad de interpretar y confrontar resultados; las cuales tienen bajo desempeño (Media ≤1,4; DT≥0,87). Sugiriendo una tendencia hacia la resolución mecánica y una comprensión inadecuada de los conceptos y procedimientos matemáticos en términos aplicados. Resultado consistente con lo que sucede con profesores noveles en Chile (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016), mostrando en la formación inicial y en el proceso de inserción escolar del profesor dificultades similares.

Es importante señalar la alta correlación inversa entre las componentes DC11 con DC22 y DC53 (rS= -0,32). Una posible explicación podría ser la falta de una comprensión profunda de la situación dificulta la idealización, simplificación y ajuste del problema, a pesar de realizar una lectura adecuada. Esto podría deberse a la comprensión literal sin lograr articularla con el conocimiento matemático necesario.

Respecto al análisis por dimensión competencial, el análisis de varianza unidireccional no paramétrico de Kruskal-Wallis (Tabla 9), entrega diferencias estadísticamente significativas al 5% en la dimensión de Codificación, interpretación y validación (DC5) con respecto al resto de las dimensiones (p-valor<0,05). Evidenciando áreas donde el estudiantado enfrenta mayores dificultades. Sin embargo, no se encontraron diferencias significativas entre las primeras cuatro dimensiones, lo que indica un progreso, aunque de forma incompleta. Entre éstas, la dimensión competencial de Proceso y resolución (DC4) muestra el rendimiento más bajo, lo cual podría ser consecuencia de que el bajo nivel de logro en competencias de un proceso anterior del ciclo de modelación puede afectar a las siguientes fases del proceso.

Tabla 9
Resultados promedios de las categorías evaluadas y diferencias estadísticas.

	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	p-valor
Puntaje	$2{,}0\pm0{,}80_a$	$1{,}97\pm0{,}76_a$	$1{,}67\pm0{,}75_a$	$1{,}60\pm0{,}82_a$	$0{,}93\pm1{,}02_b$	0,00

Nota. Letras iguales indican que no existen diferencias al 5%

A continuación, se detallan las respuestas del estudiantado, centrándose en las dificultades y errores, así como en el uso de GeoGebra, con base en las componentes y descriptores de la tabla 3, el desempeño definido en la tabla 5, niveles de logro, como lo ejemplificado en la tabla 6, y el sistema de categorías de errores dados en la tabla 2.

Lectura y construcción

En esta dimensión, solo el grupo G2 formuló correctamente todas las componentes, identificó la información relevante y representó gráficamente de manera coherente con el problema. Cabe destacar que todos los grupos usan GeoGebra para visualizar la situación, pese a no ser una instrucción explícita. Esto implica una temprana matematización al usar el software, posiblemente debido a la seguridad que brinda (García-López et al., 2021) o la instrucción de representar gráficamente la situación problemática fomentando que el modelo real se registre gráficamente; dado que se trató de una actividad en una plataforma online, el uso de un software pudo ser lo más cómodo y natural.

En la construcción de modelos reales (Figuras 4-7), algunos grupos cometen errores de interpretación, mientras que otros no conectan con conceptos físicos y matemáticos, aun cuando el estudiantado había aprobado un curso de cálculo diferencial e integral, añadiendo interés al analizar las fuentes de estas dificultades.

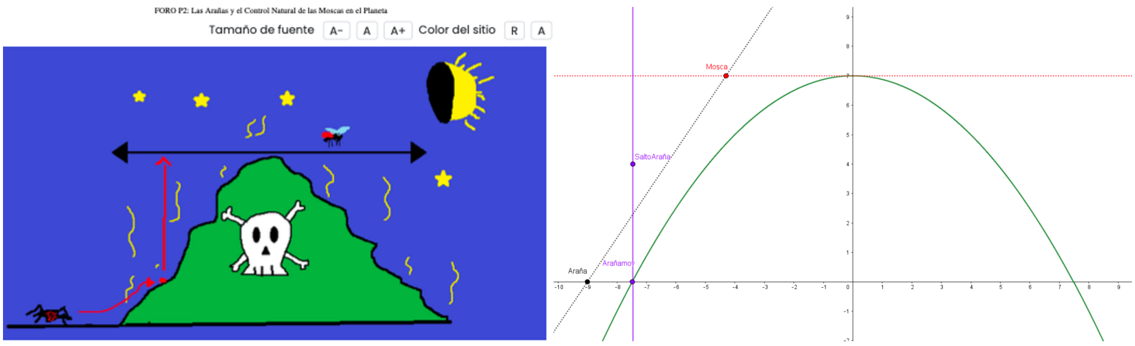


Figura 4. Construcción real del modelo de G8

Figura 5. Construcción real del modelo de G9

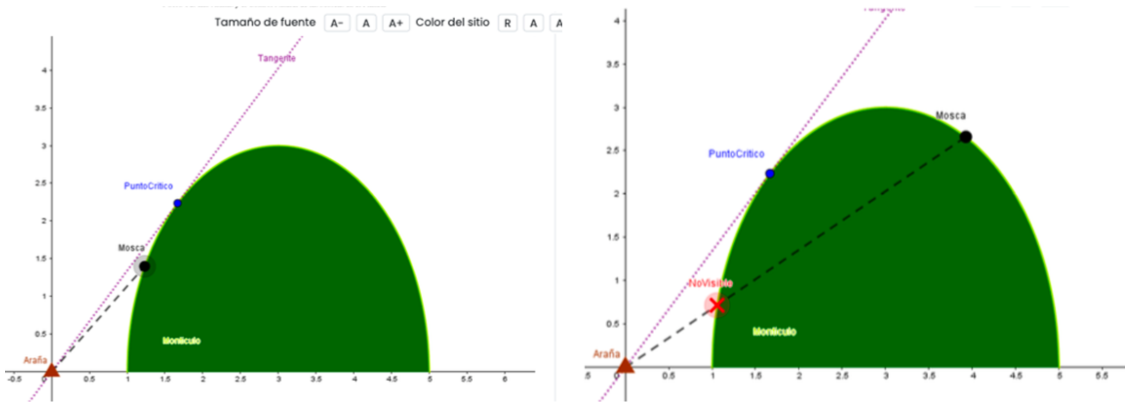


Figura 6. Construcción real del modelo de G10

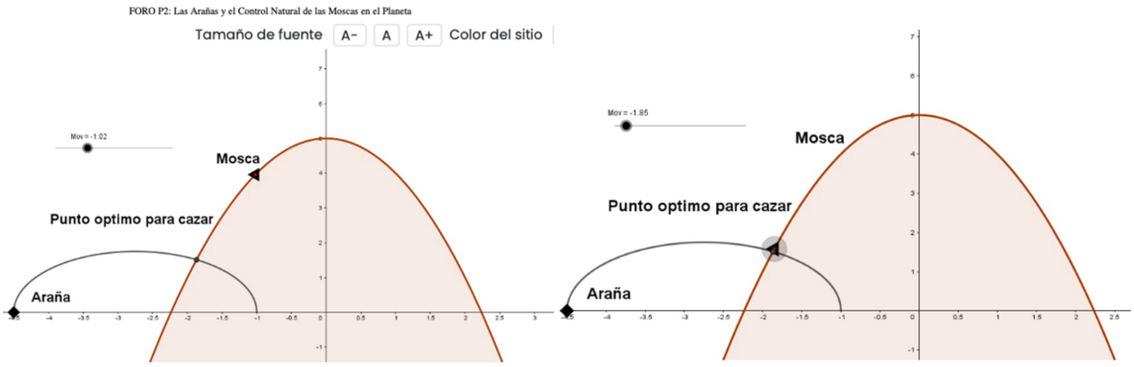


Figura 7. Construcción real del modelo de G4

Los diferentes supuestos utilizados por los grupos muestran distintas formas del modelo real, evidenciando distintos niveles de calidad en la resolución. Por ejemplo, el grupo G8 asume que la captura ocurre durante el vuelo de la mosca (Figura 4), mientras que G9 no construye un montículo suave para representar el movimiento de la mosca, haciendo una incorrecta interpretación de que la mosca se mueve de izquierda a derecha sigilosamente en la parte superior del montículo (Figura 5). Por su parte, G4 elige un punto de captura deficiente, evidenciando que no considera las habilidades de cada insecto frente a los ataques mencionados en el texto, dado que el ataque debería ocurrir cuando ambos se ven por primera vez, y como propone una representación suave del montículo, esto debería ocurrir cuando la visual es tangente al trayecto de la mosca sobre el montículo. Este aspecto es correctamente representado por el grupo G10 (Figura 6). Por otro lado, aunque G4 intenta representar el salto de la araña, comete el error de considerar una trayectoria elíptica (Figura 7).

Además, solo tres grupos entregan una representación tridimensional cercana a la realidad, de los cuales, dos simplifican su representación al plano. Sin embargo, solo el G2 justifica esta elección argumentando que:

> *En general, los montículos tienen forma de paraboloide y usaremos una parábola para su representación, porque la mosca tiene restringido su*

dominio a través del montículo, debido a que el enunciado señala que ella se mueve de derecha a izquierda y en la parte superior del montículo. También es necesario saber que los saltos son parabólicos.

Así, la mayoría de los grupos muestran dificultades en lectura, interpretación y construcción adecuada de la tarea contextualizada, evidenciando error de simplificación (Tabla 2). Este error se refleja al no considerar todos los elementos relevantes y en la transición de una representación tridimensional a una bidimensional. Además, hay una desconexión entre el contexto y los conocimientos físicos y matemáticos adquiridos. Tampoco se hace referencias a magnitudes involucradas en el contexto, en coherencia con los resultados de Segura y Ferrando (2021). A pesar de esta falta de comprensión, según Blum (2015), el estudiantado podría resolver con éxito el problema, ignorando el contexto y aplicando un esquema aprendido que prioriza la resolución matemática.

Comprensión completa e interpretación

En esta dimensión, solo los grupos G1, G2 y G10 formulan correctamente la información complementaria para resolver el problema, mientras que los demás lo hacen de manera incompleta o insuficiente. Un ejemplo de esto es la respuesta proporcionada por G10:

Se necesitaría datos relevantes de cada insecto, como que la araña alcanza un salto de hasta seis veces su longitud, también la forma y las medidas específicas del montículo, elegiremos una elipse, para poder calcular su fórmula de manera más acertada, y el punto donde se encuentra la araña.

Se observa un mayor dominio del conocimiento matemático y la comprensión de la realidad en la respuesta de G10, lo que permite una simplificación más efectiva, la relación de variables y la formulación de un problema matemático más completo, como señalan Almeida et al. (2021).

Aunque en general los grupos formulan supuestos para idealizar y simplificar el problema, no siempre son precisos, necesarios o suficientes para su resolución. Por ejemplo, G1 confunde sus supuestos con sus conjeturas, como se observa en el siguiente relato:

Para la primera pregunta asumimos que el movimiento de la mosca es constante; conocer cuánto tiempo tiene visión la araña sobre la mosca, aunque ya asumimos que el momento óptimo para atacar a la mosca es justo en el que se ven (recta tangente).

Donde el momento óptimo para atacar a la mosca se asume como un supuesto y no se considera como una conjetura, lo que fue validado mediante experimentación en GeoGebra. Según Maaß (2006) y Blum (2015), el estudiantado tiende a ser inseguro al hacer suposiciones por sí mismo pues les resulta más difícil hacer una suposición que resolver el problema. Por lo tanto, en esta etapa se observan dificultades en sus formas argumentativas, las cuales surgen del descubrimiento de la resolución al problema planteado (Godino y Recio, 2001).

A pesar de las dificultades de algunos grupos en la recolección de datos e información complementaria necesaria, avanzan en la resolución al idealizar y simplificar la situación, permitiendo relacionar variables y formular un problema matemático. Sin embargo, en la mayoría de los casos, no consideran adecuadamente las condiciones del contexto.

De igual manera, aunque G5 formula con errores la dimensión de lectura y construcción, al proponer una representación incorrecta de la situación planteada, logra idealizar y simplificar la situación (Figura 8), así como relacionar variables:

> *Necesitamos la posición de la araña, la función del montículo donde se mueve la mosca, el punto óptimo donde saltar, la velocidad de salto de la araña y el ángulo del salto.*

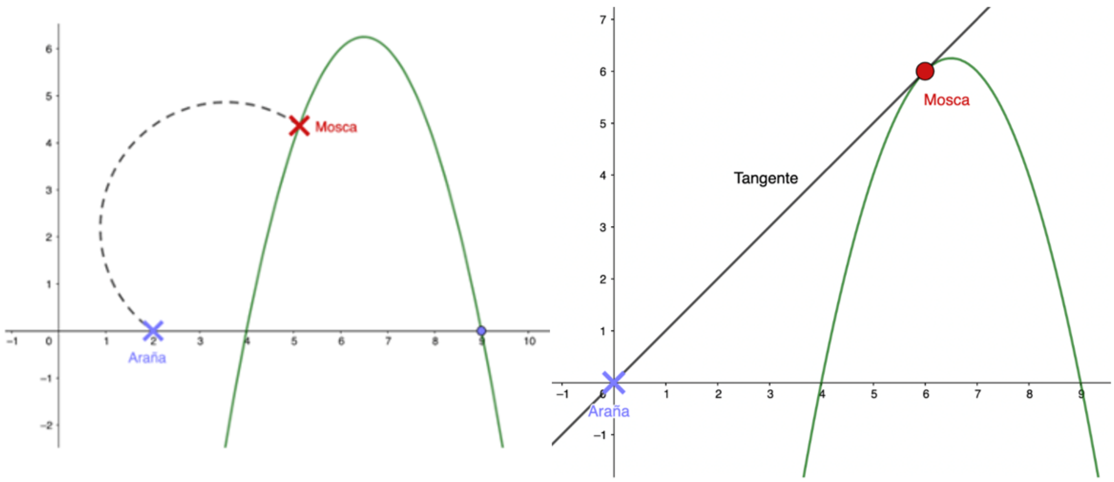


Figura 8. Representación inicial (izquierda) y modificada (derecha) de G5

Esta mejora en la comprensión e interpretación de la situación problema, podría deberse a la socialización en los foros, facilitando el intercambio de ideas y la colaboración entre el estudiantado. Una situación similar se observó en G6 y G9.

Por otro lado, solo los grupos G4, G7 y G8 formulan el problema matemático sin éxito, considerando como problema obtener la distancia lineal entre los insectos, sin tomar en cuenta otros antecedentes relevantes. Esto podría explicarse porque no logran una lectura y construcción adecuada, como se evidencia en la formulación sin éxito del modelo real para G4 y G8 (Figuras 4 y 7). Por ejemplo, G4 proporciona la siguiente respuesta:

> *El problema es calcular el punto óptimo sobre una parábola, para ello debemos calcular la distancia que puede saltar la araña cuando tiene*

contacto visual con la mosca (con una recta), luego aplicamos la fórmula de distancia.

Se observa una comprensión limitada del punto óptimo en el contexto del problema. Aunque la representación parabólica del montículo es correcta, el punto óptimo debe identificarse en la línea tangente a la curva, dado que la mosca se mueve sigilosamente de izquierda a derecha y podría escapar debido a su capacidad para detectar amenazas. Además, G4 menciona que se requiere la distancia lineal según la capacidad de salto de la araña, pero este dato no es suficiente para calcular el punto óptimo, omitiendo otras variables relevantes.

En síntesis, en esta etapa se cometen errores, principalmente debido a la formulación de un problema matemático incompleto, la falta de conexión con elementos de la realidad o la formulación de respuestas no coherentes o imprecisas, según la situación planteada. Estos errores se encuadran en el error de simplificación (Tabla 2). Además, en general, los grupos no incorporan en sus respuestas percepción de magnitudes asociadas al tamaño del montículo y la araña, ni las magnitudes de longitud involucradas (Segura y Ferrando, 2021).

Transformación y matematización

En esta dimensión, aunque todos los grupos intentan describir elementos relacionados con algún plan de resolución al problema formulado, solo los grupos G1, G2, G3, G5 y G10 formulan con errores menores o de manera correcta. Estos grupos indican la necesidad de un modelo funcional (suave) para el montículo y la posición de la araña en el plano con el fin de encontrar la ubicación óptima de la mosca. Además, proponen utilizar la derivada, demostrando claridad al responder la primera pregunta de la situación problema (A). Un ejemplo de esto es la respuesta proporcionada por G2:

Derivada: para optimizar el momento en el cual la mosca y la araña se ven. Ecuación de la recta: para calcular la recta tangente que representa cuando la araña se ve con la mosca. Geometría analítica: para trabajar con la parábola que representará el montículo de basura y para modelar el salto óptimo de la araña.

No se relaciona con las propiedades del movimiento de proyectiles para calcular la trayectoria del salto de la araña, necesario para responder la segunda pregunta del problema (B). Esto puede deberse a una mayor familiaridad con problemas de optimización rutinarios en lugar de aplicaciones físicas, como indican Díaz y Aravena (2021). Sin embargo, solo G5 considera el ángulo mínimo y la velocidad inicial del salto, basándose en un análisis con GeoGebra para formular hipótesis; utilizando el software como herramienta de indagación para visualizar y conjeturar, sin que esto forme parte de las instrucciones en esta etapa.

Respecto a los cinco grupos que presentaron dificultades para seleccionar las estrategias adecuadas y elaborar un plan que les permitiera resolver su problema formulado (G4, G6-G9), se observa una falta de referencia a conocimientos físicos y matemáticos, como muestra el siguiente relato:

> *Nuestro método se basa en el uso de la distancia entre dos puntos, para esto es necesario la ubicación de la araña y la mosca, también saber la velocidad del salto de la araña y de la mosca, y conocer la posición de ambas a la hora del salto. Lo ideal es que la mosca esté al lado izquierdo del montículo para que la araña tenga visión de la mosca y pueda atraparla.*

Donde se formula un problema, pero no un plan para su resolución que identifique las estrategias y herramientas matemáticas adecuadas en el contexto planteado, como lo indicaba la pregunta 5 (parte I) de la tarea. En este caso, no haber considerado los supuestos adecuados implicó el fracaso del resto de la tarea.

Por otro lado, tres grupos que inicialmente realizaron un plan sin éxito (G6, G8 y G9) reformulan su problema y logran transitar del lenguaje natural al matemático. Eligen notaciones matemáticas y matematizan cantidades relevantes (Figura 9), respondiendo a la instrucción dada en la pregunta 3 (parte II).

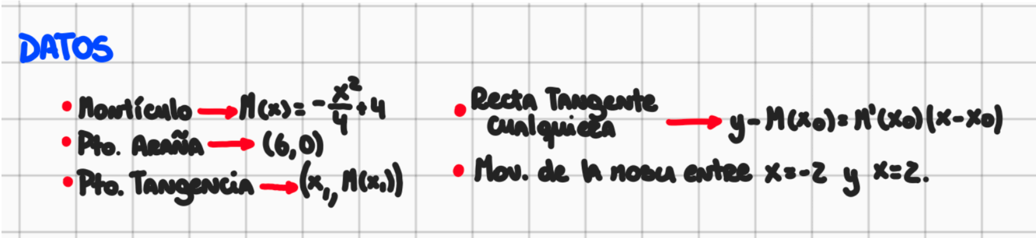


Figura 9. Transición del lenguaje natural al matemático de G8

El estudiantado formula hipótesis y define variables con notaciones matemáticas, evidenciando habilidad para matematizar a pesar de las inconvenientes anteriores. Sin embargo, se observan dificultades en la definición formal de variables, mostrando errores conceptuales y mal uso de éstas (error de matematización, Tabla 2), indicando una dificultad en el desarrollo del pensamiento algebraico. Las figuras 10 y 11 muestran ejemplos al respecto.

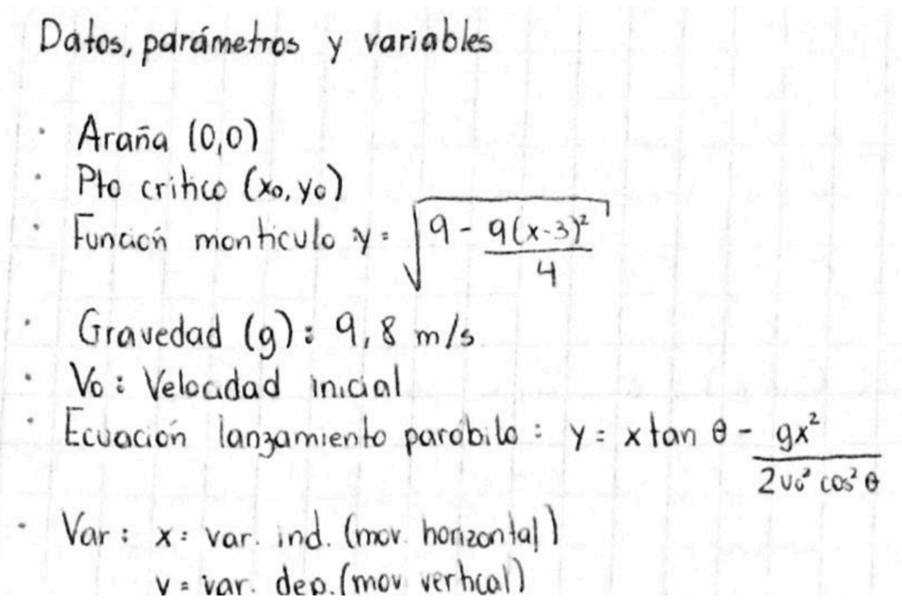
La representación muestra una relación funcional, pero no identifica correctamente el dominio ni los objetos matemáticos involucrados. Se evidencia además confusión entre ecuación y función, y dificultad en interpretar variables y usar lenguaje formal, consistentes con Ursini y Trigueros (2006).

Datos:
Función que determina la forma del montículo, y la posición de la mosca, en metros:
$f(x) =- \frac{1}{4}x^2 + 4$
Posición inicial de la araña: $(x, 0) \Rightarrow (0, 0)$, en centímetros.

Parámetro:
Posición óptima de la mosca, para que la araña la case.
a y c son parámetros.

Variables: x variable independiente.
f(x) y g(x) variables dependientes.
Posición de la mosca, dada por la función: $f(x) =- \frac{1}{4}x^2 + 4$
f(x) es altura, medida en centímetros
x es una distancia lineal en la base.

Figura 10. Uso de variables de G2


Datos, parámetros y variables

- Araña (0,0)
- Pto crítico (x_0, y_0)
- Función montículo $y = \sqrt{9 - \frac{9(x-3)^2}{4}}$
- Gravedad (g): 9,8 m/s
- Vo: Velocidad inicial
- Ecuación lanzamiento parábola: $y = x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$
- Var: x: var. ind. (mov horizontal)
  y = var. dep. (mov vertical)

Figura 11. Uso de variables de G10.

Proceso y resolución

En esta etapa, nueve grupos usan GeoGebra para respaldar los supuestos planteados y el modelo matemático propuesto, previa a la resolución formal, como fue indicado en la pregunta 2 (parte II) de la tarea, excepto G3 que valida después de la resolución. Mayormente, la simulación se enfoca en la primera pregunta. G8 y G10 descubren con GeoGebra que el ángulo de elevación de la araña debe ser mayor que el de la tangente (Figura 12), evidenciando cómo el estudiantado utiliza el *software* para reformular el problema, variando cantidades o datos sin dificultades.

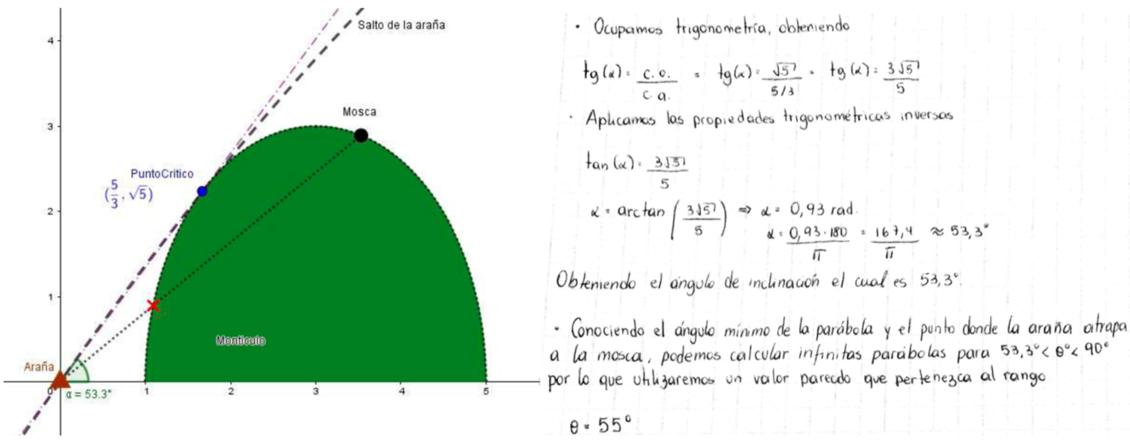


Figura 12. Validación de conjeturas con GeoGebra de G10

En cuanto al proceso de resolución, G8 y G10 resuelven correctamente el modelo, aunque G8 tiene un pequeño error de cálculo. G1, G2 y G3 lo resuelven de manera incompleta o con errores. G1 no responde la segunda pregunta y G2 determina incorrectamente una trayectoria parabólica sin considerar elementos físicos (Figura 13). G3 asume un salto lineal, mostrando errores de resolución y conceptuales (Figura 14).

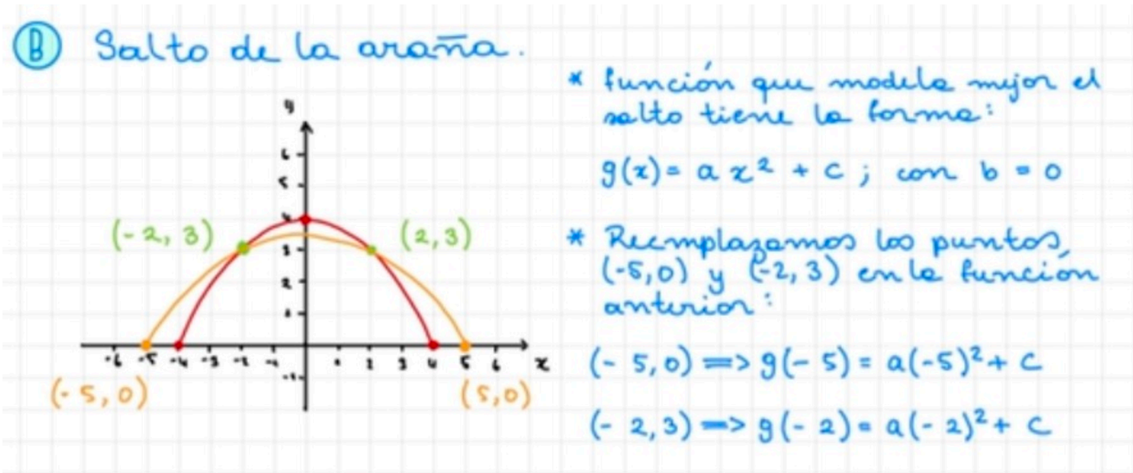


Figura 13. Resolución de G2

Centrándose en la pregunta B, el salto tendrá que ser de trayectoria parabólica que tienda a una línea recta, para que sea la menor distancia posible entre la mosca y la araña. De esta forma, la mosca tendrá menos tiempo de reacción, dejando todo a favor de la araña. Dicha línea recta tendrá como magnitud la distancia euclidiana entre la araña y la mosca.

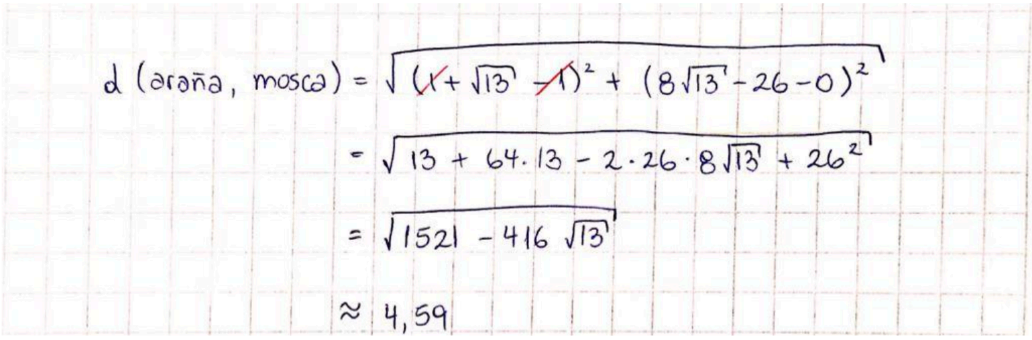


Figura 14. Resolución de G3

Además, los grupos G4-G6 y G9 dan respuestas formales, pero con errores procedimentales y conceptuales en la resolución. Por ejemplo, el punto de tangencia no se determina formalmente, prefieren usar el punto obtenido en la simulación con GeoGebra. Como se observa en la figura 15, G9 y G4 calculan la pendiente de la recta tangente utilizando los puntos $(1.58{,}2.2)$ y $(-1{,}4\sqrt{2})$ (respectivamente, obtenidos de GeoGebra, evidenciando una resolución mecánica sin conexión con los requisitos del problema, posiblemente porque se encontraron con un paso que fue difícil de resolver.

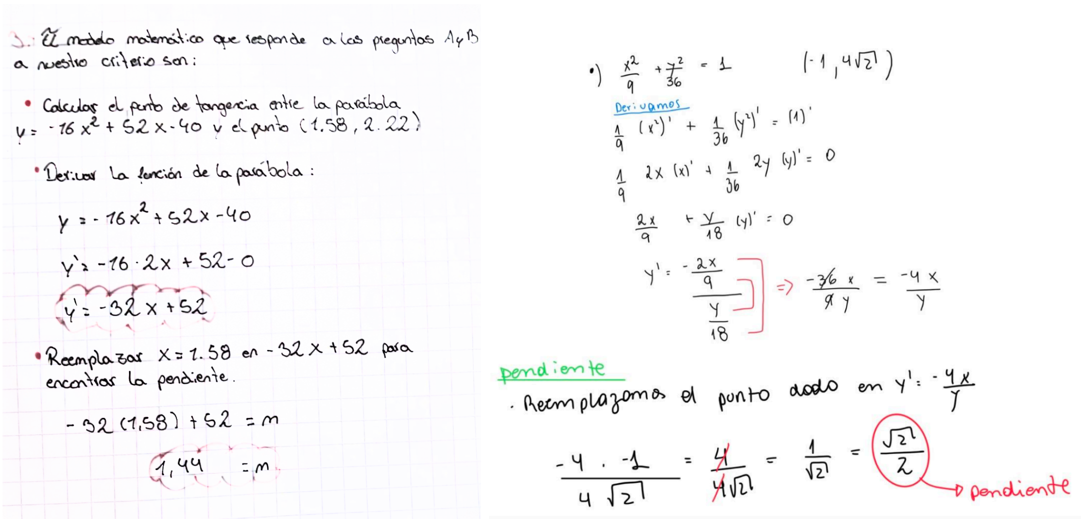


Figura 15. Resolución de G9 y G4

Las dificultades en el uso de objetos y procedimientos matemáticos, así como una alta confianza en las respuestas proporcionadas por el software, podrían explicarse por las posibilidades de explorar que da GeoGebra, junto con la indicación explícita de simular y probar hipótesis en la pregunta correspondiente de la actividad, lo que podría haber impactado en el desarrollo de la argumentación lógico-deductiva del estudiantado (Ruiz et al., 2021).

En resumen, se evidencian dificultades y errores conceptuales relacionados con la matemática y las propiedades físicas asociadas al problema, así como errores en los procedimientos de cálculo y una resolución incompleta del modelo matemático propuesto (error de resolución, Tabla 2).

Codificación, interpretación y validación

En esta dimensión, la mayoría de los grupos comparan sus soluciones formales con las obtenidas en la simulación y validan sus resultados en el contexto matemático. Solo G2, G3 y G10 reflexionan sobre la interpretación y la pertinencia de sus resultados, determinando que no se ajustan al tamaño y la capacidad de salto de una araña. Pese a su reflexión, solo algunos revisan algunas partes del modelo, proponen cambios y ajustan el modelo con GeoGebra, al reubicar la posición de la araña para facilitar la modelación del salto (Figura 16).

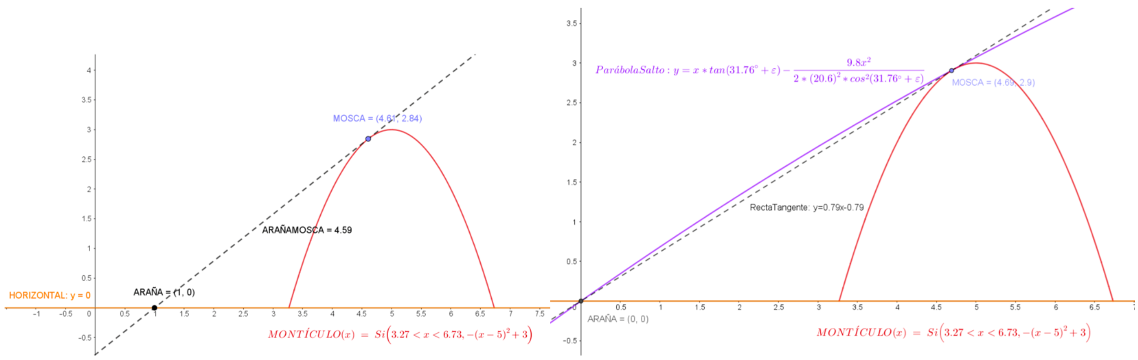


Figura 16. Ajustes al modelo matemático con GeoGebra de G3

Además, sólo G3 y G10 incorporan medidas de longitud y reflexionan sobre la pertinencia y coherencia del modelo respecto a éstas.

Dos grupos, al validar con GeoGebra, detectaron errores de proceso, pero no los corrigieron, en línea con hallazgos de Maaß (2006), Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) y Yang et al. (2022). Esto sugiere que los profesores en formación no suelen reflexionar sobre sus errores, aunque den resultados inverosímiles, ni corrige a partir de ellos el modelo (Segura y Ferrando, 2021); evidenciando la necesidad de fortalecer el pensamiento crítico, la metacognición y la motivación para modelar (Blum, 2015).

En resumen, hay dificultades para reflexionar sobre el modelo una vez resuelto, interpretar los resultados en el contexto del problema y abordar las limitaciones de la solución propuesta (error de interpretación, Tabla 2). Asimismo, prevalecen la ausencia de unidades de medida respecto al contexto del problema y estimaciones incompatibles con la situación real (Segura y Ferrando, 2021).

CONCLUSIONES

Los hallazgos indican que los futuros profesores de matemáticas presentan carencias en el desarrollo de competencias para abordar la resolución de problemas con enfoque en la modelación, mostrando mayores dificultades en la dimensión de Codificación, interpretación y validación. Esta conclusión concuerda con las investigaciones de Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) y Yang et al. (2022). Además, no se observan diferencias estadísticamente significativas al 5% en las otras dimensiones, mostrando menor dificultad en hacer suposiciones, simplificar la situación, construir relaciones entre variables y formular un problema matemático.

La elevada correlación observada entre componentes de las dimensiones competenciales, en especial entre la componente de Representación, Visualización y Construcción de un modelo real y las restantes componentes, señala la imperante necesidad de abordar el proceso de modelización con atención en aspectos relativos a la representación, visualización y construcción de un modelo real.

En lo referente a las dificultades y errores identificados, se destaca la dificultad inherente en la construcción de un modelo real integral, la explicitación precisa de las variables involucradas, así como su vinculación con los conceptos físicos y matemáticos pertinentes. Asimismo, se evidencian fallos conceptuales y una utilización incorrecta de las variables definidas, denotando una insuficiencia en el desarrollo del pensamiento algebraico. En el transcurso del proceso de resolución, se constatan errores y una notoria dificultad para llevar a cabo un análisis crítico y validar de manera apropiada los resultados obtenidos.

Además, se pone de manifiesto una dificultad para reflexionar sobre la interpretación y pertinencia de los resultados. Así, se observan errores y dificultades específicas en las cuatro categorías identificadas por Moreno et al. (2021): simplificar, matematizar, resolver e interpretar los resultados del modelo.

El software GeoGebra fue utilizado por el estudiantado para simulación, visualización, indagación y validación de resultados, lo que probablemente mejoró sus resoluciones y niveles de competencia. Los foros virtuales facilitaron la retroalimentación y la reformulación de respuestas en las fases iniciales, aunque no se evaluó su impacto. Sin embargo, la interacción grupal emergió como un factor clave en el desarrollo de competencias. Así, GeoGebra y los foros virtuales se presentan como herramientas prometedoras para potenciar habilidades de modelación. Este enfoque coincide con la sugerencia de Blum (2015) de incorporar la componente tecnológica al ciclo de modelado.

En resumen, se subraya la necesidad de robustecer los procesos de modelación en la formación inicial docente, de forma anticipada y progresiva. Esto posibilitaría que los futuros educadores adquieran las competencias esenciales para llevar a cabo actividades pedagógicas centradas en la resolución de problemas y la modelación matemática, teniendo en cuenta la relevancia de estas en el currículo escolar chileno y en los estándares para la formación inicial de profesores de matemáticas. Asimismo, se enfatiza la importancia de reforzar los conocimientos matemáticos en aquellos aspirantes a docentes que han cursado una parte significativa de su formación de manera remota debido a la pandemia.

Una limitación del estudio es la autenticidad de la tarea de modelación matemática desde la perspectiva del estudiantado. Este aspecto merece atención en futuros estudios que comparen dimensiones competenciales en tareas con diferentes niveles de aproximación a la realidad. La estructura de la tarea utilizada demostró ser eficaz para identificar dificultades y errores en el proceso. Esta estrategia puede ser útil para abordar tareas similares, permitiendo una progresión gradual hacia modelaciones más complejas, en línea con Blum (2015), Anhalt et al. (2018) y Moreno et al. (2021). Además, el pequeño tamaño de la muestra resta fiabilidad a los resultados cuantitativos, por lo que se debería replicar el estudio con una muestra más grande. Una limitación final del estudio es la falta de comparación entre el uso de GeoGebra y el desempeño al realizar trabajo presencial sin software, lo que impidió evaluar su impacto en el logro de las competencias.

Agradecimientos

Agradecemos a los/las revisores anónimos por sus valiosos aportes y recomendaciones, que han contribuido significativamente a la mejora de este artículo. La investigación fue respaldada por la Universidad Católica del Maule (Proyecto Interno N°23213), y recibió financiamiento parcial de Universidad del Bío-Bío (Proyecto PIDA/R 2250205) y de Fondecyt en Iniciación 2020/11201103.

Referencias

Aguerrea, M., Solís, M. y Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad. *Uniciencia, 36*(1), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.4

Almeida, R., Santos, N., Ribeiro, V., Silva, V., Muniz, C., Silva, R., Eduardo, R., Santiago, Á., Galdino, P. y Mota, M. (2021). Mathematical Modeling Applied to the Drying Kinetics of Black Bean Starch Paste. *Research, Society and Development, 10*(1), e37710111921. https://doi.org/10.33448/rsd-v10i1.11921

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler-Álvarez, M. (2013). Actividades matemáticas: Conjeturar y argumentar. *Números. Revista didáctica de la matemática, 85*, 75-90.

Álvarez, R., Cabrera, S., Gonnet, G., Sosa, A. y Vázquez, C. (2021). The Integration of Digital Technologies in the Teaching Practices of Pre-service Teacher Training. *Revista Locus Digital, 2*(1), 2697-3138. http://doi.org/10.54312/2.1.4

Álvarez-Melgarejo, Ch., Cordero-Torres, J., Bareño, J. y Sepúlveda-Delgado, O. (2019). Software GeoGebra como herramienta en enseñanza y aprendizaje de la Geometría. *Educación y Ciencia, 22*, 387-402. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7982109

Anaya, M., Cavallero, M. I. y Domínguez, C. (2006). Elaboración de estrategias para la modelización. Un estudio sobre los procesos involucrados. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 180-186). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. http://funes.uniandes.edu.co/5342/1/AnayaElaboracionAlme2006.pdf

Anhalt, C. O., Cortez, R. y Bennett, A. B. (2018). The Emergence of Mathematical Modeling Competencies: An Investigation of Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 202-221. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474532

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The Process of Problem Posing: Development of a Descriptive Phase Model of Problem Posing. *Educational Studies in Mathematics, 110*(2), 251-269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Blanco, L. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza y aprendizaje. *RELIME, 6*(2), 107-132.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What do we know, what can we do? En Cho S. (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process. *ZDM. Mathematics Education*, *38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo Ferri, R. (2019). Educación matemática interdisciplinaria en la escuela: ejemplos y experiencias. *UCMaule, 57*, 25-37. http://doi.org/10.29035/ucmaule.57.25

CPEIP. (2021). *Estándares pedagógicos y disciplinarios para carreras de pedagogía en matemática*. Ministerio de Educación.

Creswell, J. y Creswell, J. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* SAGE.

Díaz, V. y Aravena, M. (2021). Solving Problem Type and Levels of Proportional Reasoning in Initial Training of Mathematics Teachers. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education, 10*(3), 296-317. https://doi.org/10.17583/redimat.7125

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean Secondary Mathematics Teachers as Problem Solvers. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Research in mathematics education series* (pp. 287-308). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_17

García-López, M., Romero-Albaladejo, I. M. y Gil, F. (2021). Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(3), 177-198. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3299

García-García, J. y Rentería-Rodríguez, E. (2013). Resolver problemas y modelizar: un modelo de interacción. *Revista internacional de investigación en educación, 5*(11), 297-333. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=281028437003

Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3991

Granados-Ortiz, C.A. y Padilla-Escorcia, I.A. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. *Revista Científica, 40*(1), 118-132. https://doi.org/10.14483/23448350.16137

Guerrero-Ortiz, C. y Borromeo Ferri, R. (2022). Pre-service Teachers' Challenges in Implementing Mathematical Modelling: Insights into Reality. *PNA, 16*(4), 309-341. https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329

Huincahue, J., Borromeo Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 99-115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277

Kaiser, G. (2005). Mathematical Modelling in School-Examples and Experiences. En G. Kaiser y H. W. Henn (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evaluation und Evolution* (pp. 99-108). Franzbecker.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *ZDM. Mathematics Education, 38*, 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

López, M., Medina, R. y Ortiz, G. (2022). Evaluación del software GeoGebra como recurso de enseñanza en sistemas de ecuaciones. *Ciencia Latina. Revista Multidisciplinar, 6*(4), 3406-3419. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i4.2843

Maaß, K. (2006). What are Modelling Competencies? *ZDM. Mathematics Education, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

McMillan, J. y Schumacher, S. (2011). *Investigación educativa.* Pearson-Addison Wesley.

Moreno, A., Marín. M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). *Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. PNA, 15*(2), 109-136. https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746

Newman, M. A. (1983). *Strategies for Diagnosis and Remediation.* Brace Jovanovich.

Niss, M. (2012). Models and Modelling in Mathematics Education. *European Mathematical Society Newsletter, 86*, 49-52.

Niss, M. y Blum, W. (2020). The Learning and Teaching of Mathematical Modelling. Routledge.

OECD. (2021). *Education at a Glance 2021: OECD Indicators*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b35a14e5-en

OECD. (2018). *PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science.* OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264305274-en

Pollak, H. (2011). What is Mathematical Modelling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 2*(1), 64. https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.694

Pollak, H. (2015). The place of mathematical modelling in the system of Mathematics Education: Perspective and Prospect. En G.A. Stillman, W. Blum y M. Salett. (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 265-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_21

Polya, G. (1957). *How to Solve it: a New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Purcell, E. J., Carberg, D. y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación.

Revelo-Sánchez, O., Collazos-Ordoñez, C. y Jiménez-Toledo, J. (2018). El trabajo colaborativo como estrategia didáctica para la enseñanza/aprendizaje de la programación: una revisión sistemática de literatura. *TecnoLógicas, 21*(41), 115-134.

Ruiz, J., Padilla, J. y Panduro-Ramírez, J. (2021). Una revisión sistemática sobre el aprendizaje remoto de la matemática. *Espirales. Revista multidisciplinaria de investigación científica,* *5*(37), 63-83. https://doi.org/10.31876/er.v5i37.793

Saadati, F. y Felmer, P. (2021). Assessing the Impact of a Teacher Professional Development Program on Student Problem-Solving Performance. *ZDM. Mathematics Education, 53,* 799-816. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Segura, C. y Ferrando, I. (2021). Classification and Analysis of Pre-service Teachers' Errors in Solving Fermi Problems. *Education Sciences, 11*(8), 451. https://doi.org/10.3390/educsci11080451

Segura, C. y Ferrando, I. (2023). ¿Qué estrategia es mejor para un problema de Fermi? Adaptabilidad de futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(3), 133-151. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5978

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18*(3), 5-38. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302

Villa-Ochoa, J., González, D. y Carmona, J. (2018). Modelación y tecnología en el estudio de la tasa de variación instantánea en matemáticas. *Formación universitaria, 11*(2), 25-34. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Werle, L., Palharini, B. y Tortola, E. (2021). The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. *Acta Scientiae, 23*(5), 66-93. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6492

Yang, X., Schwarz, B. y Leung, I. (2022). Pre-service Mathematics Teachers' Professional Modeling Competencies: a Comparative Study between Germany, Mainland China, and Hong Kong. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 409-429. https://doi.org/10.1007/s10649-021-ursini10064-x

Maitere Aguerrea
Universidad Católica del Maule, Chile
maguerrea@ucm.cl

Francisco Rodríguez Alveal
Universidad del Bío-Bío, Chile
frodriguez@ubiobio.cl

Jaime Huincahue
Universidad Católica del Maule, Chile
jhuincahue@ucm.cl

Recibido: marzo de 2024. Aceptado: septiembre de 2024
doi: 10.30827/pna.v19i2.30336

ISSN: 1887-3987

EXPLORING MATHEMATICAL MODELLING COMPETENCIES AND ERRORS IN TEACHER EDUCATION

Maitere Aguerrea, Francisco Rodríguez-Alveal and Jaime Huincahue

The study examines the competencies of pre-service teachers in problem-solving with mathematical modelling, assessing achievement levels and their interrelations, and the impact of using GeoGebra software and peer collaboration. It also explores errors and difficulties related to each competency. The analysis reveals lower development in coding, validation, and interpretation of results, with a strong correlation between representation, visualisation, and real model construction and other components of the process. Although the impact of GeoGebra and peer collaboration was not the focus, they emerged as promising tools to enhance inquiry, visualisation, and validation in modelling.

A sequential mixed-methods approach was used, combining quantitative and qualitative methods. The quantitative phase employed a descriptive and analytical design, while the qualitative phase involved content analysis of justifications from the study group. The sample was selected through intentional non-probabilistic sampling.

Findings show pre-service teachers struggle with coding, interpretation, and validation, consistent with previous research. No significant differences were observed in other dimensions. There is a high correlation between competence dimensions, emphasizing the need to focus on representation, visualisation, and real model construction.

Difficulties include constructing an integral real model, specifying variables, connecting with physical and mathematical concepts, algebraic thinking deficiencies, critical analysis, and result validation. Errors and difficulties align with four categories: simplifying, mathematizing, solving, and interpreting model results.

GeoGebra was used for simulation, visualisation, conjecture inquiry, and result validation, improving resolutions and competency levels. Virtual forums facilitated feedback and response reformulation. Group interaction emerged as crucial for competence development. Educational technologies like GeoGebra and virtual forums show promise in enhancing modelling skills, supporting the incorporation of technology in the modelling cycle as suggested by Blum (2015).