DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES DE CUARTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA (10 AÑOS) Y SÉPTIMO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA (13 AÑOS)

Estudiante: Ricardo Poveda Vásquez

2019

Agradecimientos

Al Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica del Ministerio de Educación Pública, por la oportunidad de participar en el mismo por tantos años y permitirme aprender cada día sobre la matemática y su enseñanza.

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

This work has been developed within the project with reference EDU2016-75771-P, financed by the State Research Agency (SRA) from Spain and European Regional Development Fund (ERDF).

A mis dos princesas preciosas Melany y Valeria, por que son el motivo de mi superación.
A mi madre, por que siempre me ha dado todo lo que tiene, sin pedir nada a cambio.
Las amo con todo mi corazón.

Índice de contenido

Presentación del TFM

En este Trabajo Final de Master se describirá el pensamiento funcional en niños de 10 años y adolescentes de 13 años, analizando el tipo de generalización y cuáles son las representaciones utilizan al resolver un problema que involucra la función $f(x) = 4x$. A través de esto, se desea determinar también las diferencias y similitudes entre cada uno de los niveles educativos contrastándolo con las habilidades que deberían tener los estudiantes según el currículo escolar de matemática en Costa Rica. Para lograr esto se investigarán 25 niños de cuarto nivel y 16 de séptimo nivel de una Institución privada de la provincia de Heredia, Costa Rica.

Esta memoria contiene seis capítulos. En el primer de ellos, se presenta el problema de investigación y la justificación del mismo desde el punto de vista personal, curricular e investigativo.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico en cuál se basa la investigación, así como algunos antecedentes de otras inverstigaciones que trabajan el pensamiento funcional en niños y jóvenes.

A la luz de la problemática presentada y los elementos teóricos que la sustentan, en el capítulo tres se describen los objetivos tanto generales como específicos que se desean lograr con la investigación.

En el cuarto capítulo se describen todos los elementos metodológicos considerados para la investigación: tipo de investigación, sujetos, diseño e instrumentos de la recogida de la información y las categorías para el análisis de la información.

Precisamente el quinto capítulo se refiere al análisis de la información y el último capítulo se dan las conclusiones del trabajo de investigación.

Capítulo 1. Presentación y justificación del problema

En este capítulo se presenta el problema y la justificación del mismo desde el ámbito personal, curricular e investigativo.

1.1. Presentación del problema de investigación

Se sabe que el aprendizaje del álgebra tradicionalmente se ha relegado a la educación secundaria (jóvenes de 13 años en adelante) y muchos estudios han demostrado las grandes dificultades que tienen los jóvenes en el área del álgebra. (Brizuela, B. y Martinez, M.; 2012; Carraher, D. y Schliemann A., 2007; Schliemann et al., 2011).

Por lo anterior, desde los años 90 se ha puesto en manifiesto la necesidad de incorporar el pensamiento algebraico desde la educación primaria (Kaput, 1989, 1995, 2000). Las ideas de este autor, posteriormente se materializa en lo que se conoce como *early algebra,* que busca la incorporación del pensamiento algebraico desde la educación primaria. Como parte de este tipo de pensamiento se encuentra el pensamiento funcional, que trabaja en la relación entre dos cantidades de números que varían y que se pueden representar de diferentes formas.

Por otro lado, en Costa Rica, en el año 2012 se aprueba un nuevo currículo de la educación primaria y secundaria que contiene elementos propuestos según el *early algebra.*

La investigación trata sobre la forma en que se manifiesta este tipo de pensamiento (funcional) en niños de 10 años y jóvenes de 13 años de una escuela privada de Costa Rica.

Particularmente el estudio se concentra en el tipo de generalización que realizan los estudiantes, así como las diferentes representaciones que utilizan para evidenciar ese pensamiento funcional. Posterior a esto se realiza una comparación entre ambos grupos de estudios.

1.2. Justificación del Problema

En Costa Rica la Educación General Básica y Diversificada se divide en cuatro ciclos, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

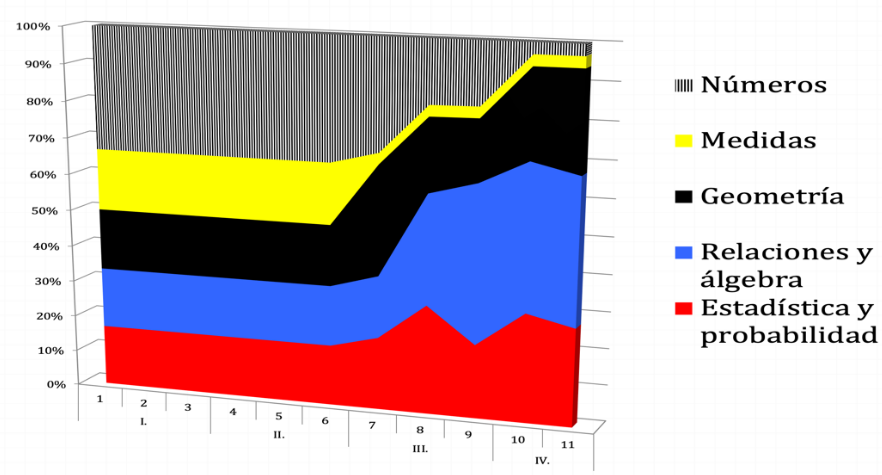
Tabla 1: Organización de la Educación General Básica en Costa Rica

	Primaria						Secundaria				
Ciclo	I			II			III			Diversificado	
Nivel lectivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Edad	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica

En el 2012 se aprobó un nuevo Programa de Estudios para Matemáticas cuyas áreas temáticas son las que lo organizan. Éstas son: Números, Estadística y Probabilidad, Relaciones y Álgebra, Medidas y Geometría.

Figura 1: Transversalidad de las áreas del currículo de Costa Rica



Como se observa en la Figura 1, todas las áreas matemáticas se trabajan de forma transversal en todo los años escolares de la primaria y secundaria.

Los conocimientos asociados a estas áreas se van desarrollando poco a poco en los diferentes niveles educativos (de primer a undécimo nivel) a través de habilidades específicas que son capacidades a corto plazo que buscan el aprender a aprender (MEP, 2012).

El conjunto de habilidades específicas generan una serie de habilidades generales para cada ciclo lectivo que son perfiles de salida para cada una de las áreas matemáticas.

Esta investigación se desarrollará en el área de Relaciones y Álgebra, particularmente lo asociado al pensamiento funcional. Las habilidades generales de I Ciclo, según MEP(2012) que se enmarcan dentro del pensamiento funcional son:

- Construir sucesiones con números y con figuras.
- Identificar patrones en una secuencia de figuras o de números.
- Ordenar números en forma ascendente o descendente.
- Escribir e interpretar expresiones matemáticas que representan cantidades dadas.
- Identificar y sustituir el número que falta en una tabla o en una expresión matemática.
- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Para el II Ciclo, son:

- Analizar patrones numéricos y no numéricos.
- Pasar de representaciones verbales a numéricas.
- Representar relaciones entre cantidades variables.
- Determinar el valor desconocido en una expresión numérica.
- Utilizar letras para representar cantidades variables.
- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Esta investigación se realizará en los niveles educativos de cuarto (niños de 10 años) y séptimo (adolecentes de 13 años) considerando que son los estudiantes que han culminado el primer y segundo ciclo de la Educación General Básica, por lo que se tiene el perfil de salida de estos estudiantes, particularmente en el área matemática de Relaciones y Álgebra.

A partir de lo anterior se presenta cual es interés por desarrollar esta investigación en tres ámbitos: personal, curricular e investigador.

1.2.1 Ámbito personal

El Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica[1] se ha encargado de redactar el currículo de Matemática del Ministerio de Educación Pública en el año 2012, así como de ofrecer capacitaciones a docentes en ejercicio por todo el país de forma presencial, semi presencial y totalmente virtual.

Como parte de este Proyecto, siempre me he interesado en desarrollar estrategias para que los docentes tengas las herramientas necesarias para poder dar los diferentes temas del área de Relaciones y Álgebra, ya que en la formación inicial de los docentes de primaria solo se consideran uno o dos cursos de matemática y en los mismos no se trabaja el pensamiento relacional o algebraico (de Faria, 2016).

Particularmente, en la Institución donde se desarrollará la investigación, he ofrecido algunas capacitaciones a los docentes de primaria y secundaria sobre pensamiento algebraico, sin embargo este esfuerzo no lo he podido visualizar en el trabajo que se realiza en el aula con los estudiantes.

[1] www.reformamatematica.net

Por lo anterior, deseo conocer el trabajo que realizan los estudiantes (como manifiestan el pensamiento funcional) a través de una tarea donde esta presente la función $f(x) = 4x$.

1.2.2. Ámbito curricular

Como se planteó anteriormente, en el currículo costarricense están establecidos los elementos básicos del pensamiento funcional (generalización, diferentes representaciones, concepto de la variable, entre otros) en la educación primaria.

Las sucesiones se trabajan en todo la educación primaria, con excepción del quinto grado. Más adelante se detalla las habilidades específicas que se trabajan en cada uno de los años.

Las funciones se trabajan desde el tercer grado, y su evolución en el currículo es a través de sus representaciones, agregando una representación cada nivel lectivo desde el tercer año.

La Institución donde se realiza la investigación es privada, sin embargo por políticas nacionales, todas las Instituciones educativas deben trabajar al menos lo planteado en el currículo, por lo que los estudiantes de los niveles de cuarto y séptimo deberían haber recibido los conocimientos y habilidades planteadas en el Programa de Estudios.

Por lo anterior, mi interés en el ámbito curricular es analizar si las habilidades planteadas en el currículo ayudan a desarrollar el pensamiento funcional en los estudiantes, esto considerando muchas posibles variables que pueden suceder (como por ejemplo que los docentes de los años anteriores no trabajarán a cabalidad las habilidades del área de Relaciones y Álgebra).

1.2.3 Ámbito investigativo

En Costa Rica no hay investigaciones sobre el pensamiento funcional en la educación primaria, por lo que esta investigación sería la primera vez que se investigue sobre cómo hacen los estudiantes de Costa Rica para generalizar y representar funciones.

Capítulo 2: Marco teórico y antecedentes

2.1 Introducción

Hace algunos años el área del álgebra se estudiaba solamente en la secundaria, sin embargo varias propuestas han buscado la introducción de diferentes conceptos de esta área desde la primaria. Una de ellas es el *early algebra* que busca desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la primaria. Varias investigaciones sobre este enfoque han concluido que los niños tienen capacidades para desarrollar este tipo de pensamiento (e.g., Blanton, 2008; Blanton y Kaput, 2005; 2011; Brizuela y Martínez, 2012; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Como parte del pensamiento algebraico se encuentra el pensamiento funcional, varios autores lo definen como una actividad cognitiva donde se establecen relaciones entre dos o más cantidades que varían (Blanton, 2008; Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011; Rico, 2006; Smith, 2008). Para Cañadas y Molina (2016) el pensamiento funcional es “un modo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen.” (p.3).

2.2 Estructuras y generalización

Para Pinto y Cañadas (2017), en el pensamiento funcional, la relación entre las variables (dependiente e independiente) se puede representar numérica y algebraicamente. Esta relación contiene una estructura interna (relación interna entre las cantidades y las operaciones) y externa (apariencia de la expresión). Las expresiones que tienen la misma estructura interna son equivalentes, como por ejemplo, para obtener el perímetro de un cuadrado, algunos estudiantes recurrirían a la utilizar $P = 4 \times l$ y otros $P = l + l + l + l$, ambas expresiones son equivalentes pues tienen la misma estructura interna.

El pensamiento funcional también abarca el proceso de la generalización, ya que es necesario identificar la relación entre las variables existentes (Torres, Cañadas y Moreno, 2018). Por ejemplo, Cañadas, Castro y Castro (2008) en un estudio con estudiantes de 14 a 16 años concluyen que si los estudiantes no son capaces de identificar el patrón presente en un problema no son capaces de expresar la generalización.

Existen diferentes autores que han establecido diferentes formas en que puede dar una generalización (eg. Ellis, 2007; Stacey, 1989; Radford, 2008, 2010).

Radford (2010) indica que se debe tener cuidado de no confundir la inducción con la generalización, la primera se da cuando el estudiante se basa en prueba y error para determinar casos generales, la segunda se basa en las características de la tarea y las relaciones que existen entre las variables. Además indica que no se debe confundir la generalización aritmética con la algebraica.

La generalización aritmética se da cuando se nota una regularidad local pero que esta información no es suficiente para conocer el término cualquiera de la función (Radford, 2010). En un trabajo previo, Radford(2003) había tipificado las generalizaciones algebraicas en

1. Genereralización factual: se utilizan gestos, movimientos y palabras para determinar casos muy particulares.
2. Generalización contextual: sin utilizar letras se logra determinar el patrón existente, a través de frases “clave”. (Vergel, 2015)
3. Generalización simbólica: se utilizan símbolos (números, letras, operaciones, entre otros).

Por otro lado, Stacey (1989) establece que las tareas del generalización se pueden categorizar como aquellas de generalización cercana donde se solicita un término siguiente o alguno que puede obtenerse por un conteo, mientras que las tareas de generalización lejana son aquellas donde es necesario conocer o identificar el patrón o la función.

Schifter et al (2008) establecen que los niños son capaces de percibir regularidades utilizando las “herramientas” que tienen. Aquí es donde surgen las diferentes formas de expresar una generalidad y pone en manifiesto, la necesidad de iniciar el pensamiento algebraico y particularmente, el pensamiento funcional desde la primaria. Esto es precisamente lo que plantea *early algebra* (Brizuela et al, 2015; Kaput, 2008; Molina, 2009).

2.3 Sistemas de Representación

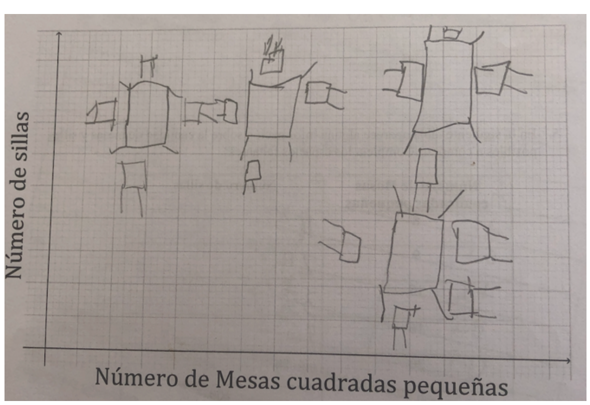
Desde que los estudiantes se encuentran en preescolar o los primeros años de la educación primaria, buscan representar los números, letras, palabras, figuras de acuerdo con un sistema de símbolos que en muchas ocasiones dista de la simbología usada convencionalmente. (Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey, 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015; Ferreiro y Teberosky, 1979; Küchemann, 1981). Por lo anterior, es natural que los estudiantes utilicen diferentes representaciones para un concepto nuevo de matemática, en nuestro caso, las funciones. El NCTM (1998), indica que los programas de instrucción matemática, deben enfatizar las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de estas, de manera que los estudiantes creen y usen estas representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas, desarrollen una colección de representaciones útiles, flexibles y convenientes y que se pueden utilizar para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Para desarrollar el pensamiento funcional es fundamental el conocimiento y análisis de los diferentes sistemas de representación de una función matemática. (NCTM, 2003). Algunos de estos sistemas de representación son:

2.3.1 Pictórico

Este tipo de representación utiliza algún tipo de dibujo o grafo para representar la relación entre los datos. Por ejemplo, un estudiante representa la relación entre mesas y sillas de una tarea propuesta a través de la siguiente representación pictórica:

Figura 2: Representación pictórica de una tarea sobre mesas y sillas



2.3.2 Tabular

Posee un formato rectangular compuesto de encabezados y cuerpo de datos, localizados en filas y columnas. Las tablas difieren en variedad, estructura, flexibilidad, notación, representación y uso (Estrella, 2014). Esta es la representación más natural, de fácil lectura y se visualiza fácilmente la relación entre las dos cantidades (dominio y codominio). Los niños desde sus primeros años escolares utilizan esta representación (Blanton y Kaput, 2004; Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A; Brizuela y Alvarado, 2010).

En la Figura 3 se muestra una tarea matemática y en la Figura 4 se encuentra una posible solución a la tarea utilizando tablas.

Figura 3: Tarea sobre mesas y sillas

Alquiler de mesas y sillas
El papá de Esteban desea comprar sillas y mesas para hacer un negocio de alquiler. Según los cálculos debe comprar 4 sillas por cada mesa cuadrada pequeña que compre. ¿Cuántas sillas necesataría para 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 mesas?

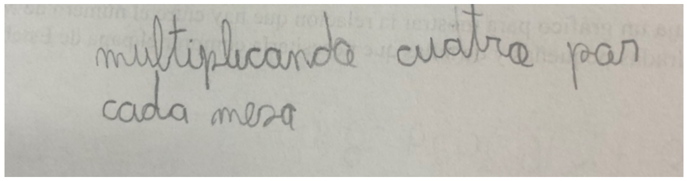
Figura 4: Número de mesas y sillas representada tabulamente

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	4 x 1 =	4
2	4 x 2 =	8
3	4 x 3 =	12
4	4 x 4 =	16
5	4 x 5 =	20
6	4 x 6 =	24
7	4 x 7 =	28
10	4 x 10 =	40

2.3.3 Natural (verbal o escrito)

Se utilizan palabras y frases de lenguaje cotidiano para expresar la relación, sin embargo no es fácil visualizar la relación entre dos cantidades con esta representación. Con el ejemplo propuesto en la Figura 3, la frase "debe comprar 4 sillas por cada mesa cuadrada pequeña" es un indicio de que existe una relación entre la cantidad de mesas y sillas que debe comprar. La respuestas del estudiante puede darse en lenguaje natural, como por ejemplo:

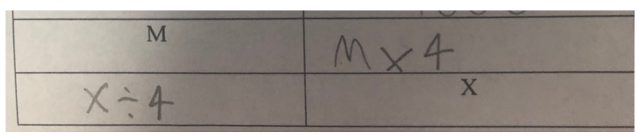
Figura 5: Relación entre mesas y sillas a través del lenguaje natural



2.3.4 Simbólica

Rico (2009), explica que una función puede representarse a través de números y letras que cumplen cierta sintáxis. Cuando se utilizan números (operaciones y resultados) se dice que es una representación simbólica numérica mientras que la simbólica algebraica es cuando se utilizan números, letras y operaciones para expresar la generalización. Para Merino, Cañadas y Molina (2013), el uso de simbolismo algebraico supone un mayor grado de abstracción. En el siguiente ejemplo se puede observar en las dos últimas filas, como el estudiante utiliza lenguaje simbólico algebraico para dar respusta a lo propuesto.

Figura 6: Relación entre mesas y sillas expresada a través del lenguaje simbólico algebraico

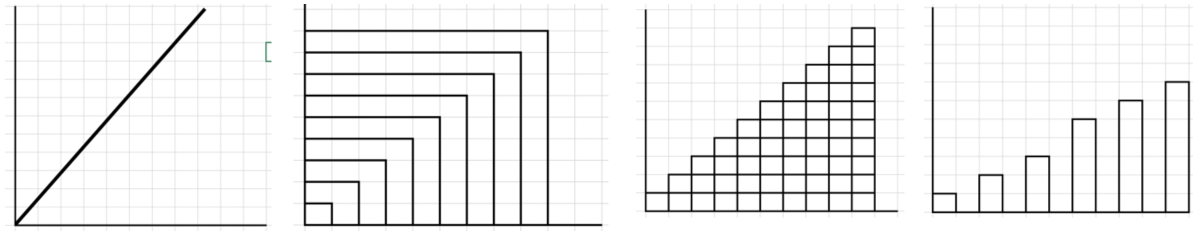


M	M x 4
X ÷ 4	X

2.3.5 Gráfica

Se utiliza algún sistema de coordenadas para representar la relación entre las variables a través de puntos, cuyas coordenadas son de la forma (x, y). Para Brenner et al (1997), al resolver un problema y utilizar una representación como la gráfica, no es necesario el cumplimiento estricto de las convenciones para realizar los gráficos. Para estos autores para que una gráfica pueda ser considerada como tal, es necesario que se representen los ejes con intervalos escalonados y que se visualice la representación lineal presente en el problema de alguna manera. Algunas gráficas que cumplen estas condiciones podrían ser como las presentes en la Figura 7.

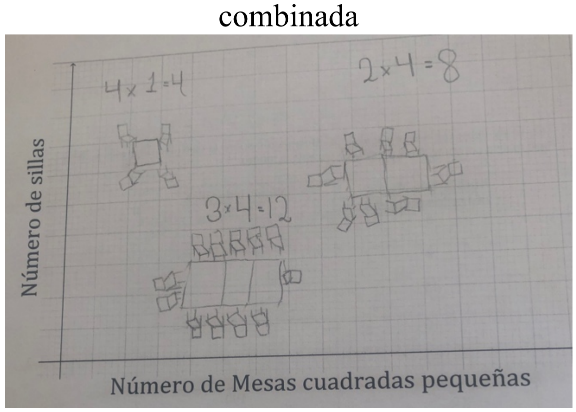
Figura 7: Algunas posibles representaciones gráficas



2.3.6 Múltiples

Para Van Somersen(1998) una representación múltiple es aquella donde se utilizan dos o más representaciones anteriores. Por otro lado Figueiras y Cañadas (2010) distinguen dos tipos de representación múltiple: (a) combinadas que son aquellas representaciones que resultan de una combinación de dos o más de los sistemas de representación citados anteriormente; y (b) sintéticas, cuando se utilizan dos o más representaciones pero que ninguna por sí misma da sentido a la resolución.

Figura 8: Relación entre mesas y sillas expresada a través de representación múltiple combinada



En este caso, el estudiante utiliza la representación pictórica y la simbólica numérica para expresar la relación entre las mesas y sillas.

2.4 Pensamiento funcional en la primaria

Los Principios y Estandares para la Educación Matemática del National Council of Teacher of Mathematics es uno de los primeros documentos que plantea la necesidad de incorporar el álgebra y particularmente las funciones desde la primaria a través de la noción de cambio: “Si las ideas relativas al cambio reciben un enfoque más explícito desde los primeros niveles, quizás los estudiantes lleguen, con el tiempo, a abordar el cálculo con una base más sólida para entenderlo." (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 42).

El uso de las diferentes representaciones juegan un papel fundamental para introducir el concepto de función desde la primaria, ya que en los primeros niveles se puede trabajar dicho concepto a través de tablas y pictogramas para posterior pasar a otras representaciones (Fuentes, 2014).

Heid (1996) plantea que el pensamiento funcional se debe introducir a través de tareas de contexto real, es decir, situaciones de la vida cotidiana, mientras que Blanton y Kaput(2011) explican que para introducir el pensamiento funcional en la educación primaria se puede realizar a través de modificaciones de tareas que se hacen en aritmética, medidas o geometría.

Por ejemplo, al preguntar cuál es el área de un cuadrado de lado 4 cm, esto es una tarea de medidas, mientras que al modificar la tarea y solicitar que se complete la siguiente tabla, calculando el área del cuadrado respectivo, se obtiene una tarea donde se inicia con el concepto de función.

Tabla 2: Área de un cuadrado en una tabla

Lado del cuadrado	Área del cuadrado
1	1
2	4
3	9
4	16
5	¿ ?

2.5 Pensamiento funcional en el currículo de Costa Rica

En el currículo de Costa Rica, el área de Relaciones y Álgebra se trabaja desde la primaria, a través de conceptos que tienen que ver con las sucesiones, relaciones, ecuaciones e inecuaciones y las diferentes representaciones de una relación. Lo anterior con el objetivo de desarrollar el pensamiento algebraico y particularmente el pensamiento relacional desde la primaria como lo establece MEP:

> *El concepto de cambio o variación, que también es común al análisis de datos, forma parte central de los temas de esta área. Se podría decir que los procesos de cambio pueden ser modelados por las relaciones y funciones matemáticas, y éstas pueden tener distintas representaciones: gráficas, tabulares, simbólicas. (MEP,*

2012, p.54)

Estas diferentes representaciones se trabajan de manera paulatina y acorde al nivel educativo.

Tabla 3: Representaciones de una relación funcional en el currículo de Costa Rica en la educación primaria

	Niveles educativos					
Representaciones	1	2	3	4	5	6
Natural				✓	✓	✓
Tabular			✓	✓	✓	✓
Simbólica-Algeb					✓	✓
Gráfica						✓

Fuente: MEP (2012)

El tema de relaciones se incorpora en los Programas oficiales de Matemática de Costa Rica desde el tercer año escolar (niños de 9 años), iniciando con la representación tabular que será utilizada en todos los niveles posteriores.

La representación natural se inicia en el cuarto año (niños de 10 años) con problemas del tipo: "La primera columna contiene los números impares menores que quince, ordenados en forma ascendente. Coloque en la segunda columna números que son cuatro veces los de la primera columna, menos diez." (MEP, 2012, p.233) Esta representación se trabajá en el resto del sistema educativo.

En el quinto año escolar se introduce el concepto de variable, por lo que es a partir de este año que se trabaja la reprentación algebraica. En el sexto año se introduce la representación gráfica debido a que es necesario estudiar con anterioridad el sistema de coordenadas del área de Geometría.

Por otro lado, en MEP(2012) la generalización se trabaja desde el primer grado de escuela a través del subtema de sucesiones. Todas las habilidades específicas de MEP(2012) relacionadas con el pensamiento funcional se encuentran en la Tabla 5 y Tabla 6.

Tabla 4: Habilidades específicas por año lectivo del I Ciclo de la educación primaria en MEP(2012)

	I CICLO Primer año	Segundo año	Tercer año
Sucesiones	• Identificar patrones o regularidades en sucesiones con números menores que 100, con figuras o con representaciones geométricas • Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores que 100 que obedecen a una ley dada de formación o patrón.	• Construir sucesiones con figuras o con números naturales menores a 1000 que obedecen un patrón dado de formación. • Identificar patrones o regularidades en sucesiones o en tablas de números naturales menores que 1000, con figuras o con representaciones geométricas. • Identificar y construir sucesiones ascendentes o descendentes	• Identificar y construir sucesiones con figuras, representaciones geométricas o con números naturales menores a 100 000 que obedecen a un patrón dado de formación. • Identificar y construir sucesiones ascendentes o descendentes. • Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
Funciones y sus representaciones			• Representar tabularmente relaciones entre números y operaciones. • Identificar el número que falta en una tabla. • Plantear y resolver problemas que involucran valores faltantes en una tabla o expresión matemática.

Fuente: MEP(2012)

Tabla 5: Habilidades específicas por año lectivo del I Ciclo de la educación primaria en MEP(2012)

	II CICLO Cuarto año	Quinto año	Sexto año
Sucesiones	• Analizar patrones en sucesiones con figuras, representaciones geométricas y en tablas de números naturales menores que 1000000. • Aplicar sucesiones y patrones para resolver problemas contextualizados.		• Analizar sucesiones y patrones con números, figuras y representaciones geométricas. • Plantear y resolver problemas aplicando sucesiones y patrones.
Funciones y sus representaciones	• Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y operaciones. • Construir tablas que cumplan las especificaciones dadas en forma verbal. • Plantear y resolver problemas formulados verbalmente. • Identificar el número que falta en una expresión matemática, una figura o en una tabla.	• Distinguir entre cantidades variables y constantes. • Identificar y aplicar relaciones entre dos cantidades variables en una expresión matemática. • Determinar relaciones de dependencia entre cantidades. • Representar mediante tablas relaciones entre dos cantidades que varían simultáneamente. • Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y letras.	• Representar algebraicamente una expresión matemática dada verbalmente. • Identificar y representar en un plano de coordenadas puntos que satisfacen una relación entre dos cantidades que varían simultáneamente.

Fuente: MEP(2012)

Se puede observar la gran cantidad de habilidades relacionadas con el pensamiento funcional en todos los niveles educativos de la primaria. Esto concuerda con los esfuerzos internacionales de incorporar el pensamiento algebraico previo a la secundaria. Algunos países que ya incluyen esto en sus lineamientos curriculares son Australia, Canadá, China, Corea, Japón y Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

2.6 Antecedentes

A pesar de que la idea de incorporar las funciones desde la educación primaria es relativamente nueva, ya hay investigaciones que han arrojado resultados importantes. Por ejemplo, Fuentes (2014) concluye que los alumnos utilizan diferentes sistemas de representación: pictórico, simbólico y verbal, con predominancia del pictórico, después de trabajar con estudiantes de siete años, con tareas que utilizan las funciones $f(x) = x$, $f(x) = 3x$, $f(x) = 5x$ y $f(x) = x + 1$.

Rodríguez (2016), realizó una investigación con estudiantes de ocho años, a través de un juego de tarjetas que usaban la función $f(x) = x + 1$ y su inversa, destaca que dentro de las estrategias de conteo, respuesta directa, recursiva y operatoria, los estudiantes utilizan la estrategia recursiva y emplean pensamiento funcional por correspondencia.

Merino, Cañadas y Molina (2013) en su estudio sobre la función $f(x) = 2x + 2$, analizada a través de un problema de personas que se pueden sentar en un conjunto de mesas colocadas de forma rectangular, llegan a la conclusión de que los estudiantes utilizan más la representación verbal, sin embargo en la resolución de los problemas se ve una diversidad de representaciones. Dentro de las estrategias utilizadas están el uso de patrones y el conteo.

Cañadas, Castro y Castro (2008) aplicaron el cuestionario de las baldosas a estudiantes de 14 y 15 años y que cuya función que se analiza es la $f(x) = 2x + 6$ y obtuvieron que en su mayoría los estudiantes utilizan un sistema de representación numérico para luego buscar una generalización. Este mismo problema fue utilizado por Pinto y otros (2016) pero aplicado a niños de tercero de primaria, cuyos resultados evidencian el uso de la correspondencia y covariación, con mayor énfasis en la primera y también se visualiza el uso de múltiples representaciones.

Torres, Cañadas y Moreno (2018) en un estudio sobre estructuras y generalización en niños de 7 y 8 años evidencian capacidades "para identificar estructuras en problemas que involucran relaciones funcionales y generalizarlas."(p.581).

Por otro lado, Pinto y Cañadas (2017) en un estudio comparativo entre estudiantes de tercer y quinto nivel de primaria sobre las estructuras que utilizan al resolver el problema de las baldosas, concluyen que hay mucha variedad de las estructuras usadas, sin embargo los estudiantes de tercero son los que más utilizan (pero pocas son correctas), mientras que los de quinto nivel utilizan menos estructuras. Otro hallazgo importante es que los estudiantes más jóvenes varian en el uso de las estructuras al resolver la misma tarea, mientras que los de quinto año son más consistentes.

En este sentido, Blanton y Brizuela (2014) destacan que en las dos décadas que han investigado sobre el pensamiento funcional en la educación primaria, sobresale los diferentes recursos que utilizan los niños para representar las funciones involucradas.

Sin embargo, si no existe un proceso constante donde se trabaje el pensamiento funcional en el aula, este se podría minorizar, por esta razón Blanton y Kaput (2011) plantean la necesidad de incorporar las funciones en el currículo pues permite que los niños desarrollen las habilidades necesarias para generalizar. Esto es fundamental, ya que estudios han demostrado que el desarrollo de estas habilidades en edades tempranas logran una comprensión y uso de la variable en comparación con estudiantes que no han trabajado el álgebra temprana. (Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008; Kaput, Carraher y Blanton, 2008).

En Costa Rica no existen investigaciones sobre el pensamiento funcional en la educación primaria, sin embargo, al incorporarse en el currículo de matemática en el año 2012, se espera que surjan investigaciones en esta área y otras.

Capítulo 3. Objetivos de investigación

3.1 Objetivos generales:

1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto niños de 10 años y adolecentes de 13 años en una escuela de primaria de Costa Rica.
2. Comparar las respuestas de los estudiantes de cada uno de los niveles y contrastarlo con las habilidades que el currículo de matemática de Costa Rica pretende desarrollar.

3.2 Objetivos específicos:

1.1. Describir las estrategias utilizadas por los estudiantes al generalizar en problemas que involucran pensamiento funcional.
1.2 Identificar los sistemas de representación utilizados por los estudiantes al resolver un problema de pensamiento funcional.
1.3 Describir las representaciones gráficas realizadas por los estudiantes al dibujar un gráfico que mostrará la relación funcional.
2.1 Comparar las respuestas de los estudiantes de cada uno de los niveles educativos para encontrar diferencias y similitudes.
2.2 Contrastar las respuestas de los estudiantes con los conocimientos previos que deben tener los estudiantes de cada nivel, según el programa oficial de matemáticas de primaria.

3.3 Preguntas de investigación:

1. ¿Cómo establecen las relaciones funcionales los niños de 10 años y adolecentes de 13 años?
2. ¿Cómo generalizan los niños de 10 años y adolecentes de 13 años?
3. ¿Cuántas y cuáles representaciones utilizan los estudiantes de ambos niveles educativos estudiados?
4. ¿Cómo utilizan la representación gráfica para representar una relación matemática?
5. ¿Generalizan y utilizan los mismos sistemas de representación los niños de 10 años y los adolescentes de 13 años?
6. ¿Utilizan los conocimientos previos de acuerdo al currículo de Costa Rica en cada uno de los niveles educativos?

Capítulo 4. Marco metodológico

En este capítulo se describen los elementos más importantes del marco metodológico.

4.1 Tipo de investigación

Esta investigación tiene un enfoque mixto, ya que en la misma es necesario la recolección datos cuantitativos y cualitativos e integrarlos para un análisis conjunto (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Por otro lado, la investigación es descriptiva y exploratoria. Es descriptiva, ya que el estudio busca describir como expresan el pensamiento funcional de niños y jóvenes de una escuela y colegio en Costa Rica. Esto coincide con Hernández, Fernández y Baptista, (2010) que establecen que este tipo de investigación pretende “medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a los que se refieren” (p.95). Concretamente la investigación podríamos denominarla descriptiva transversal dado que pretendemos realizar “una fotografía instantánea de una población en un momento determinado” Cohen y Manion (1990, pp. 103).

Para esta descripción, se realizará un primer análisis cuantitativo sobre las respuestas correctas e incorrectas entre los dos grupos de estudiantes (10 y 13 años). Posteriormente se hace un análisis cualitativo de las respuestas de las dos muestras para analizar el tipo de generalización y las representaciones que han utilizado. También se realizará un estudio comparativo entre estos grupos de estudiantes.

Las investigaciones sobre el pensamiento funcional en niños y jóvenes, han ido aumentando a nivel internacional, sin embargo en Costa Rica no existe ninguna investigación sobre este tema, por esta razón es que la investigación tiene un carácter exploratorio también, de acuerdo con lo que plantea Hernández, Fernández y Baptista, (2010): “Los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes.” (p.93)

4.2 Sujetos

La investigación se realizó con estudiantes de una escuela de enseñanza primaria y secundaria en la zona de Heredia, Costa Rica. La institución es privada y se encuentra en una zona urbana del país. Se escogieron 25 estudiantes de cuarto nivel y 16 de séptimo nivel como muestra tipo intencional, con el objetivo de tener acceso a información valiosa para realizar un estudio a profundidad (Quinn,1988).

Se escogieron estudiantes de estos años lectivos pues de acuerdo a la organización del Ministerio de Educación Pública en Costa Rica (ver Tabla 1), cuarto año es el primer nivel del II Ciclo y séptimo año es el primer nivel del III Ciclo y de acuerdo a MEP (2012) se tiene un perfil de salida para el I Ciclo y II Ciclo en el área de Relaciones y Álgebra, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 6: Perfil de salida de estudiantes de Costa Rica en el I y II Ciclo en el área de Relaciones y Álgebra

Perfil de salida de I Ciclo en Relaciones y Álgebra según MEP(2012).	**Perfil de salida de II Ciclo en Relaciones y Álgebra según MEP(2012)**
• Construir sucesiones con números y con figuras. • Identificar patrones en una secuencia de figuras o de números. • Ordenar números en forma ascendente o descendente. • Escribir e interpretar expresiones matemáticas que representan cantidades dadas. • Identificar y sustituir el número que falta en una tabla o en una expresión matemática. • Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.	• Analizar patrones numéricos y no numéricos. • Pasar de representaciones verbales a numéricas. • Representar relaciones entre cantidades variables. • Determinar el valor desconocido en una expresión numérica. • Utilizar letras para representar cantidades variables. • Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

Fuente: MEP (2012)

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes de cuarto nivel tendrían como perfil de salida lo descrito en la columna de la izquierda, mientras que los de séptimo nivel lo de la columna de la derecha.

4.3 Diseño de recogida de información

Para recoger toda la información, se aplicó el mismo cuestionario en los dos niveles educativos el mismo día. El cuestionario consta de 4 páginas y los estudiantes lo resolvían de manera individual. Se iba entregando hoja por hoja a los estudiantes, es decir, cuando un estudiante terminaba de contestar las preguntas de la primer hoja se le entregaba la segunda y así sucesivamente.

4.4 Instrumentos de recogida de información

El mismo consta de un problema que involucra la relación funcional $f(x) = 4x$ (ver Figura 9).

Figura 9: Problema del cuestionario aplicado

Alquiler de mesas y sillas

El papá de Esteban desea comprar sillas y mesas para hacer un negocio de alquiler. Según los cálculos debe comprar 4 sillas por cada mesa cuadrada pequeña que compre.

A partir del contexto se solicita al estudiante que complete algunas tablas con valores cercanos (1, 2 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 mesas) y lejanos (15, 16, 20 y 1000 mesas), tanto directamente como inversamente (se pregunta por 100, 160 y 400 sillas). También se pregunta sobre la relación en su representación natural, algebraica y gráfica de la relación. (Ver el cuestionario en el Anexo 1).

4.5 Recogida de información

El cuestionario fue aplicado por el investigador el día 28 de marzo de 2019 de 7:30 am a 8:50 am en el grupo de séptimo año; y de 12:20 pm a 13:40 pm al grupo de cuarto año (Ver Figura 10). Los docentes de cada grupo no participaron en la clase cuando se aplicó el mismo.

Figura 10: Aplicación del cuestionario

Se aclararon dudas puntuales a los estudiantes participantes sin orientar las respuestas. La aplicación de los cuestionarios duró alrededor de una hora y veinte minutos.

Se contó con el permiso de los padres de familia de cada estudiante para la grabación de video y toma de fotografías.

La aplicación del cuestionario se grabó con dos cámaras, sin embargo para los efectos del TFM no se utilizarán las grabaciones.

La sesión se organizó en dos partes. En la primer parte, el investigador leyó el contexto del problema y luego los estudiantes respondieron las preguntas de cada página entregada de forma individual. En la segunda parte se realizó un puesta en común con todo el grupo con la mediación del investigador. En esta parte los estudiantes explicaban la forma en que resolvieron cada pregunta. Debido al tiempo y de gestión de la cantidad de información, los datos de esta segunda parte tampoco se consideró para el análisis de la información.

Para que la presencia del investigador no creara un sesgo de la información que se iba a obtener de los estudiantes, el autor de este TFM aplicó otro cuestionario previamente con los mismos grupos. Esta sesión también se grabó con dos cámaras, con el objetivo de que la presencia de las cámaras afectará lo mínimo en el desarrollo normal de la clase.

Los datos analizados son las respuestas a cada una de las preguntas del cuestionario.

4.6 Categorías para el análisis de datos

Las categorías para el análisis de datos se establecieron a priori, con base a Brenner et al (1997); Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey (2015); Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, (2015); Küchemann (1981); Smith (2008), Stacey (1989), Radford (2003) y Vergel (2015).

Sin embargo como lo establece Martinez (2006), “al reflexionar y concentrarse en la información, en esa contemplación, irán apareciendo en nuestra mente las categorías o las expresiones que mejor las describen…”(p.140), por esta razón surgieron las categorías para analizar la representación gráfica y el currículo.

Por lo anterior, las categorías y los respectivos valores para el análisis de los datos son:

Tabla 7: Categorías para el análisis de los datos

Categorías	Valores de la categoría
Resultados	Correcta Incorrecta
Formas de Generalización	No generaliza Cercana Lejana
Tipo de Generalización	No generaliza Factual Contextual Simbólica-Algebraica
Sistemas de representación	Natural Simbólico numérico Simbólico algebraico Pictórico Múltiples
	Gráfico numérico Gráfico estadístico

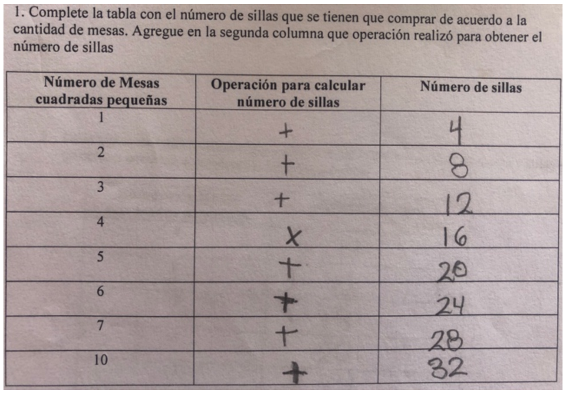
4.6.1 Resultados

Se analizan las respuestas de las preguntas numéricas, es decir, de aquellas donde se solicita una imagen o preimagen o ambas. Esto se hace en las preguntas 1, 2 y 5 del cuestionario. Se establece como correcta si el estudiante escribe el valor esperado e incorrecta en cualquier otro caso.

4.6.2 Categoría Formas de Generalización

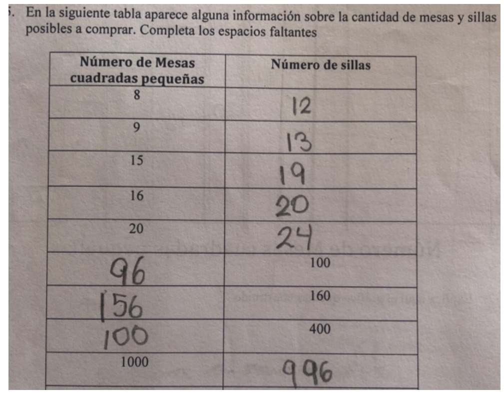
A partir de los elementos teóricos sobre la generalización, de acuerdo con Stacey (1989) se considera que existe generalización cercana al analizar las respuestas del estudiante en la pregunta 1 del cuestionario, donde la misma plantea completar una tabla si se tuvieran que comprar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 mesas. Por otro lado, se considera que el estudiante manifiesta generalización lejana, al analizar las respuestas de la pregunta 5 del cuestionario, que busca completar una tabla si se tuvieran que comprar 8, 9, 15, 20 y 1000 mesas; y si se tuvieran que comprar 100, 160 y 400 sillas. Un ejemplo de un estudiante que manifiesta generalización cercana más no la lejana es la que se muestra en la Figura 11.

Figura 11: Estudiante manifiesta generalización cercana pero no lejada



1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo a la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	+	4
2	+	8
3	+	12
4	x	16
5	+	20
6	+	24
7	+	28
10	+	32



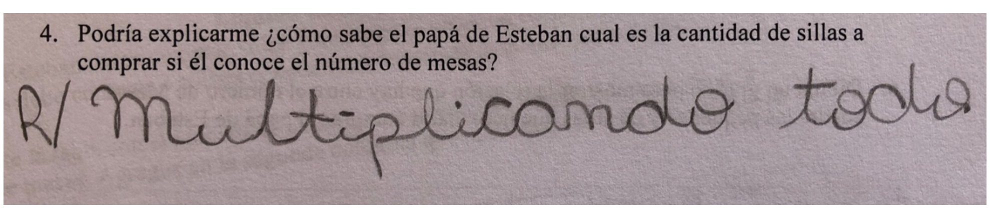
En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y sillas posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	12
9	13
15	19
16	20
20	24
96	100
156	160
100	400
1000	996

4.6.3 Categoría Tipo de Generalización

Para determinar si existe generalización factual y contextual se analizan los cuestionarios por completo, sin embargo las respuestas a la pregunta 4 del cuestionario da información para categorizar estos tipos de categorización. Por ejemplo, al dar como respuesta solo la palabra "multiplicando" se tomará como generalización factual (considerando las respuestas a las demás preguntas), ya que a pesar de que la relación funcional presente en el problema es una multiplicación, el estudiante no alcanza nivel de la enunciación (Vergel, 2015). Sin embargo, la respuesta "multiplicando por cuatro" o semejantes se tomará como generalización contextual, ya que dicha frase es clave y es una descripción del término general (Vergel, 2015). Algunos ejemplos se muestran en las Figura 12, Figura 13 y Figura 14.

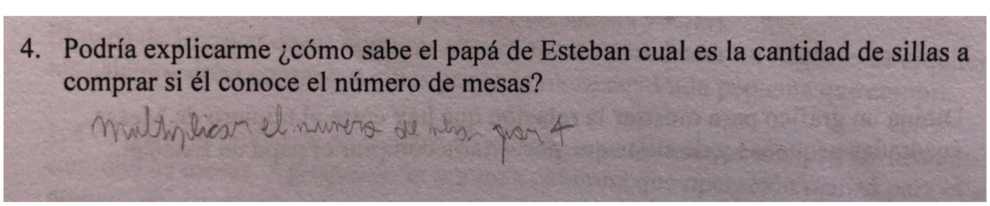
Figura 12: Estudiante que manifiesta generalización factual



4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

R/ Multiplicando todo

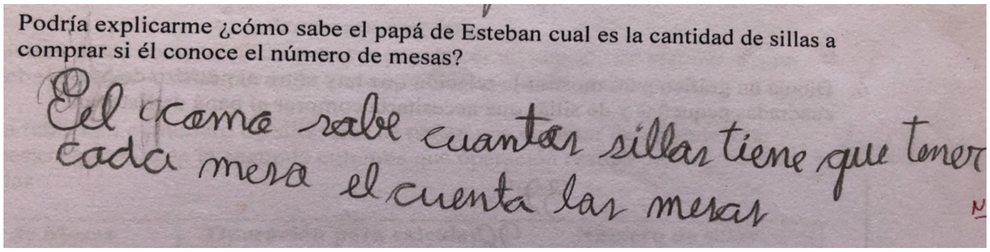
Figura 13: Estudiante que manifiesta generalización contextual



4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

multiplicar el numero de mesas por 4

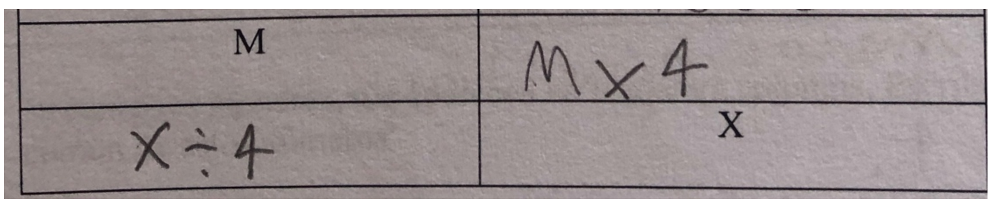
Figura 14: Estudiante que no manifiesta ni generalización factual ni contextual


Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

Pel ¿como sabe cuantas sillas tiene que tener cada mesa el cuenta las mesas

Por último, para conocer si un estudiante logra la generalización simbólica-algebraica se analiza las respuestas de todo el cuestionario, principalmente de los dos últimos ítems de la pregunta 5, donde se solicita la imagen de M y la preimagen de X. En la Figura 15 se muestra las respuestas de un estudiante que logra la generalización algebrico-simbólica.

Figura 15: Estudiante que manifiesta generalización algebraico-simbólica



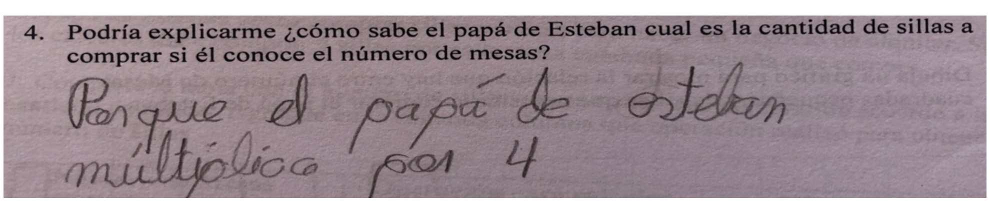
M	$M \times 4$
$X \div 4$	X

4.6.4 Categoría de Sistema de representación

Como se detalló en el marco teórico, una relación funcional se puede representar de diferentes maneras, a partir de esto se crean las categorías detalladas en la Tabla 8. Para el análisis de los datos se considerará el uso o no de las siguientes representaciones por parte de los estudiantes si cumplen las condiciones dadas.

4.6.4.1 Natural: Se considera que un estudiante representa la relación funcional de forma natural, principalmente al mostrar alguna evidencia de la relación en la pregunta 4 del cuestionario, que dice: ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?. Un ejemplo se puede ver en la Figura 16.

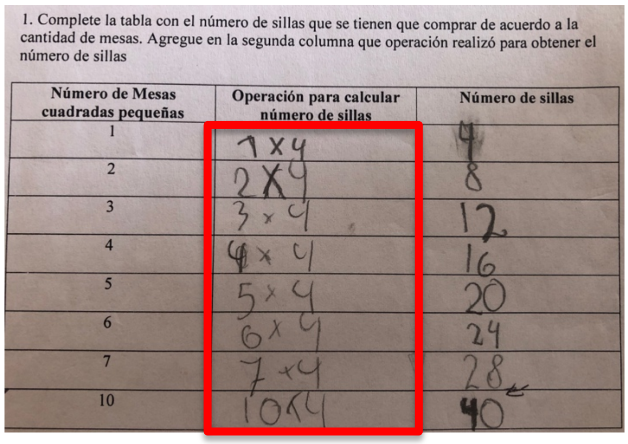
Figura 16: Representación natural de la relación dada por un estudiante


4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

Porque el papá de esteban múltiplica por 4

4.6.4.2 Simbólica-numérico: Se considera que un estudiante utiliza esta representación al utilizar números y operaciones para calcular el número de sillas o mesas solicitado en los diferentes ítems. Particularmente, en la pregunta 1 en la segunda columna se solicita que se complete con la operación para calcular el número de sillas, como se observa en la siguiente figura:

Figura 17: Representación simbólica-numérica para expresar la relación



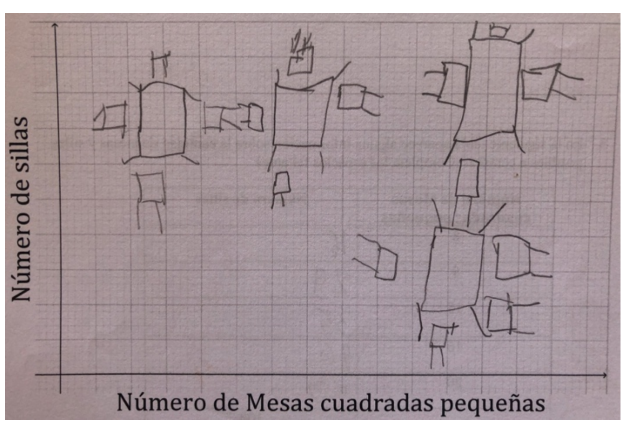
1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo a la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	1x4	4
2	2x4	8
3	3x4	12
4	4x4	16
5	5x4	20
6	6x4	24
7	7x4	28
10	10x4	40

4.6.4.3 Simbólica-algebraico: Se considerara el uso de esta representación al responder correctamente los dos últimos ítems de la pregunta 5 donde se cuestiona sobre la cantidad de sillas a comprar para una cantidad M de mesas y la cantidad de mesas a comprar para una cantidad X de sillas. También se considera otras preguntas del cuestionario.

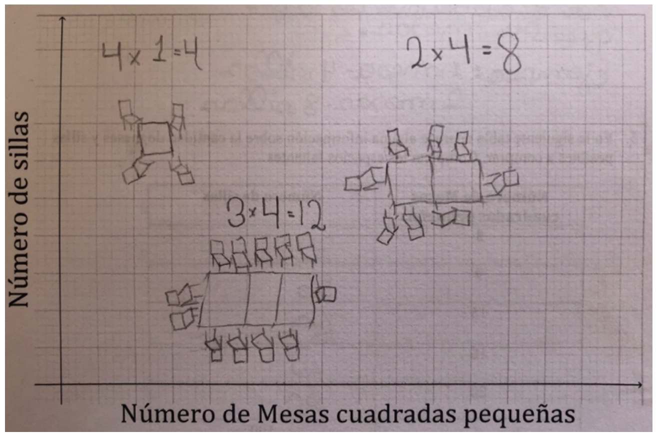
4.6.4.4 Pictórica: Se considera la utilización de este tipo de representación si en el cuestionario se encuentra algún dibujo como el que se muestra en la Figura 18.

Figura 18: Representación pictórica dada por un estudiante



4.6.4.5 Múltiples: Se considera la utilización de este tipo de representación si en una misma pregunta del cuestionario, el estudiante utiliza más de una representación descrita anteriormente. En la Figura 19 se muestra un ejemplo de uso de representaciones múltiples.

Figura 19: Uso de la representación múltiple dada por un estudiante

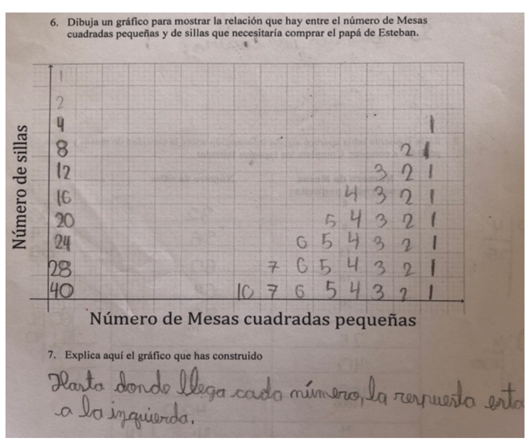


4.6.4.6 Gráfica

En el cuestionario se planteaba una pregunta sobre la representación gráfica de la relación funcional presente en el problema. Siguiendo con lo que plantea Brenner et al (1997) sobre las difententes formas de expresar una gráfica; y al obtener una diversidad de respuestas en ambos niveles educativos, para analizar esta representación se crearon dos valores:

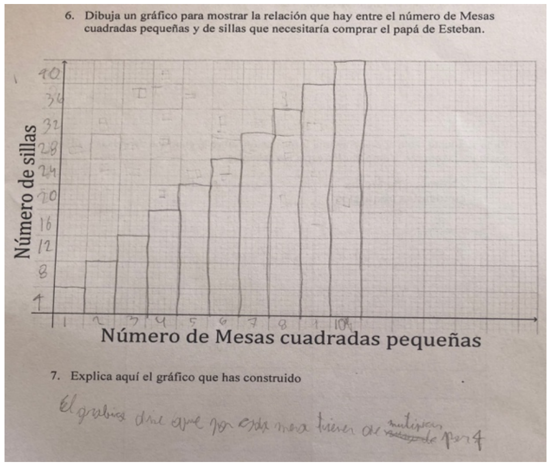
4.6.4.6.1 Gráfico numérico: Se considera que se utiliza este tipo de representación cuando utilizan los números como elemento gráfico, como se muestra en la Figura 20.

Figura 20: Representación gráfica utilizando números



4.6.4.6.2 Gráfico estadístico: Se considera que se utiliza este tipo de representación cuando utilizan algún elemento de la estadística (como gráficos de barras) como elemento gráfico. Un ejemplo se muestra en la Figura 21.

Figura 21: Representación gráfica utilizando elementos de estadística



Capítulo 5. Análisis de datos y resultados

Una vez aplicado el instrumento de recogida de datos, se organizó la información. A cada cuestionario se le asignó un código según el nivel escolar en que se encuentre, es decir, a los de cuarto nivel se les asignó códigos: 4-1, 4-2, …, 4-24 y 4-25; mientras que los códigos de los alumnos de séptimo nivel son: 7-1, 7-2, …, 7-15, 7-16. El orden es de acuerdo a la primer letra del nombre de los estudiantes.

Las preguntas del cuestionario se codificaron de la siguiente manera:

Tabla 8: Explicación de cada pregunta del cuestionario y su código respectivo para el análisis

Pregunta	Objetivo de la pregunta	Código	Explicación del código
1	Se solicita completar una tabla si se tuvieran que comprar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 10 mesas.	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.10	El valor después del punto hace referencia a la cantidad de mesas que se dan.
2	Se solicita completar una tabla con dos valores inventados por los estudiantes.	2.a y 2.b.	
3	Pregunta abierta sobre características de los números de la tercer columna de la pregunta 1.	3	
4	Pregunta abierta sobre la generalización en palabras de la relación funcional.	4	
	Se solicita completar una tabla si se tuvieran que comprar 8, 9, 15, 20 y 1000 mesas.	5.8, 5.9, 5.15, 5.20, 5.1000	El valor después del punto hace referencia a la cantidad de mesas que se dan.
5	Se solicita completar una tabla si se tuvieran que comprar 100, 160 y 400 sillas.	5.100.inv, 5.160.inv, 5.400.inv	El valor después del punto hace referencia a la cantidad de sillas que se dan (Relación inversa)
	Se solicita completar una tabla si se tuvieran que comprar M mesas y X sillas.	5.M, 5.X.inv	
6	Pregunta sobre la representación gráfica de la relación funcional	6	
7	Pregunta abierta sobre la explicación de la construcción del gráfico.	7	

Fuente: propia de la investigación

5.1 Análisis de resultados por pregunta

Primero se hará un análisis cuantitativo comparando las respuestas correctas en los niños de cuarto nivel y en los jóvenes de séptimo nivel. Para esto se analizarán las preguntas 1, 2 y 5 que tratan de la búsqueda de imágenes y preimágenes de la relación funcional. Los resultados se resumen en la Tabla 10.

Tabla 9: Cantidad de estudiantes (y porcentaje) con respuestas correctas en las preguntas 1,2 y 5

Código de pregunta	Cuarto nivel	Séptimo nivel
1.1	24 (96%)	16 (100%)
1.2	24 (96%)	16 (100%)
1.3	24 (96%)	16 (100%)
1.4	24 (96%)	16 (100%)
1.5	24 (96%)	16 (100%)
1.6	24 (96%)	16 (100%)
1.7	23 (92%)	15 (93,7%)
1.10	20 (80%)	16 (100%)
2.a	22 (88%)	15 (93,7%)
2.b	22 (88%)	15 (93,7%)
5.8	17 (68%)	15 (93,7%)
5.9	17 (68%)	15 (93,7%)
5.15	16 (64%)	13 (81,3%)
5.16	18 (72%)	13 (81,3%)
5.20	18 (72%)	14 (87,5%)
5.100.inv	15 (60%)	12 (75%)
5.160.inv	11 (44%)	13 (81,3%)
5.400.inv	18 (72%)	13 (81,3%)
5.1000	16 (64%)	14 (87,5%)

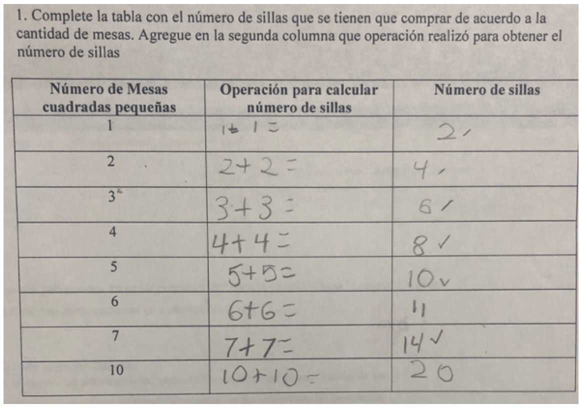
Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar, en todas las preguntas el grupo de mayor edad tuvo un porcentaje mayor de respuestas correctas. Donde se nota la mayor diferencia de respuestas correctas entre las dos poblaciones es en las preguntas de relación inversa. Llama la atención la gran cantidad de respuestas correctas en ambas muestras.

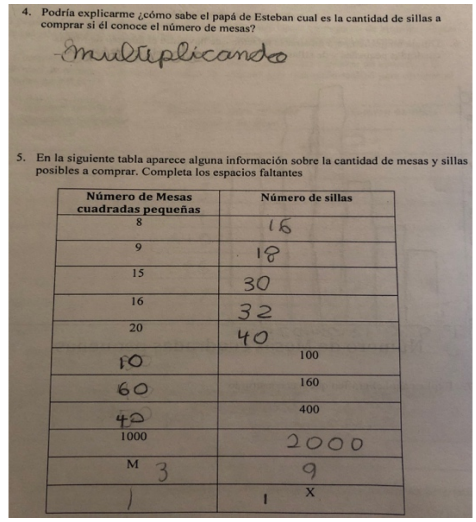
5.2 Análisis de la forma de generalización

Para analizar la categoría forma de generalización de los estudiantes en el problema planteado se establecieron los valores: no generaliza, generalización cercana y lejana. Solamente el estudiante 4-10 no logro generalizar por completo. Las respuestas a las preguntas 1, 4 y 5 de este estudiante se muestran en la Figura 22.

Figura 22: Respuestas de la estudiante 4-10 a las preguntas 1, 4 y 5.


1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo a la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	1+1=	2
2	2+2=	4
3	3+3=	6
4	4+4=	8
5	5+5=	10
6	6+6=	11
7	7+7=	14
10	10+10=	20


4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

Multiplicando

5. En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y sillas posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	16
9	18
15	30
16	32
20	40
10	100
60	160
40	400
1000	2000
M 3	9
1	1 X

Como se puede observar, este alumno supone que la cantidad de sillas necesarias es el doble de la cantidad de mesas. Sin embargo, ese mismo patrón no lo utiliza en las preguntas de relación inversa (5.100.inv, 5.160.inv, 5.400.inv), inclusive para estas respuestas no se logra entender cuál fue el patrón utilizado para colocar 10, 60 y 40 como respuesta.

Para realizar el conteo de la cantidad de estudiantes que lograron cada tipo de generalización, es importante recalcar que todos los estudiantes que lograron la generalización lejana, también lograron la cercana, por lo que en la Tabla 11 se muestra la cantidad de estudiantes que manifiesta cada una de las generalizaciones, según el nivel escolar.

Tabla 10: Cantidad de estudiantes (y porcentaje) que manifiestan alguna forma de generalización por nivel educativo

	Cuarto nivel	Séptimo nivel
No logro generalizar	1 (4%)	0 (0%)
Cercana	24 (96%)	16 (100%)
Lejana	17 (68%)	14 (87,5%)

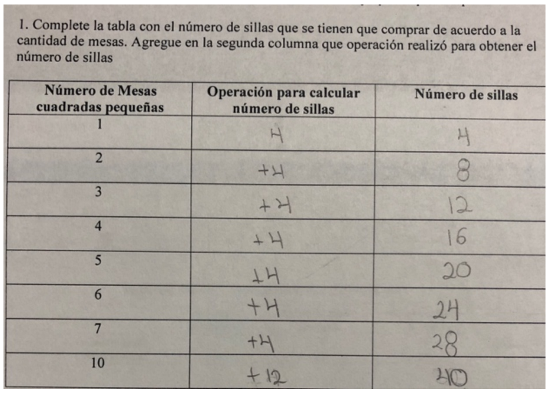
Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar el 96% de los estudiantes de cuarto nivel manifiestan generalización cercana, mientras que en el caso de los estudiantes de séptimo nivel es el 100%.

Al analizar la generalización lejana los porcentajes disminuyen, principalmente en cuarto nivel donde el 68% de los estudiantes lo manifiestan, mientras que en séptimo nivel

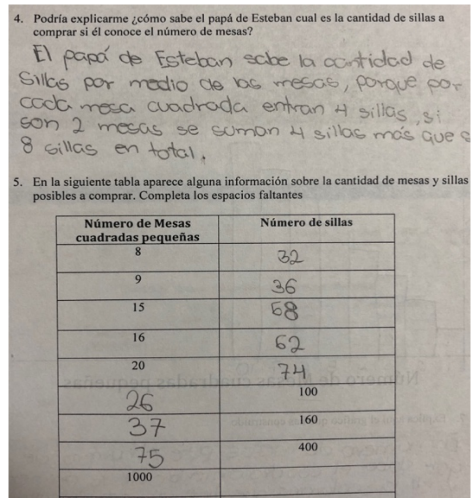
14 de los 16 estudiantes lo logran. Un ejemplo de un estudiante que logra la generalización cercana pero no lejana se puede ver en la Figura 23.

Figura 23: Respuesta del estudiante 7-4 a las preguntas 1, 4 y 5



1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo a la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	4	4
2	+4	8
3	+4	12
4	+4	16
5	+4	20
6	+4	24
7	+4	28
10	+12	40



4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

El papá de Esteban sabe la cantidad de Sillas por medio de las mesas, porque por cada mesa cuadrada entran 4 sillas, si son 2 mesas se suman 4 sillas más que s 8 sillas en total.

5. En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y sillas posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	32
9	36
15	68
16	62
20	74
26	100
37	160
75	400
1000	

En el caso del estudiante 7-4, se puede evidenciar claramente que manifiesta una generalización cercana, ya que puede lograr dar respuesta a la pregunta 1 del problema donde se plantean valores pequeños de la preimagen. Inclusive la respuesta de la pregunta 4, también la plantea para casos cercanos: "…porque por cada mesa cuadrada entran 4 sillas, si son 2 mesas se suman 4 sillas más que serían 8 en total". Posteriormente, al averiguar las imágenes de 8 y 9 si las tiene correctas, sin embargo, cuando la preimagen es un poco más grande, no lo logra. Inclusive dejo sin responder el caso de que la cantidad de mesas sea 1000.

En el caso del cuarto nivel hay siete estudiantes con esta misma condición (lograron la generalización cercana pero no la lejana) y en séptimo solo dos estudiantes están en esta condición.

5.2 Análisis de los tipos de generalización

Para analizar el tipo de generalización de los estudiantes en el problema planteado se establecieron las categorías: no generaliza, factual, contextual y simbólico-algebraico.

En la siguiente tabla se muestra con detalle el tipo de generalización que logro cada estudiante de cuarto nivel.

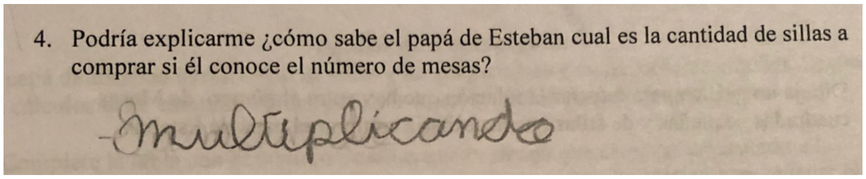
Tabla 11: Tipo de generalización lograda por los estudiantes de cuarto nivel

		Tipos de generalización		
Estudiante	No generaliza	Factual	Contextual	Simbólico algebraico
4-1		✓		
4-2	✓			
4-3			✓	
4-4	✓			
4-5	✓			
4-6			✓	
4-7	✓			
4-8		✓		
4-9			✓	
4-10	✓			
4-11			✓	
4-12			✓	
4-13			✓	
4-14	✓			
4-15		✓		
4-16			✓	
4-17	✓			
4-18	✓			
4-19	✓			
4-20	✓			
4-21			✓	
4-22	✓			
4-23	✓			
4-24			✓	
4-25			✓	

Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar en la Tabla 12, hay 12 estudiantes de este nivel que no logran ningún de los tipos de generalización de esta categoría de análisis, esto representa casi el 50% de la muestra. El segundo tipo más evidenciado por los estudiantes de este nivel esla generalización contextual con un 40% de los estudiantes y por último la factual con un 12%. Esto último hace indicar que los estudiantes que logran generalizar en este nivel, lo hacen a través de frases clave que describen la relación funcional (Vergel, 2015). En las Figuras 24, Figura 25 y Figura 26 se muestran evidencias de cada uno de los tres tipos de generalización para este nivel.

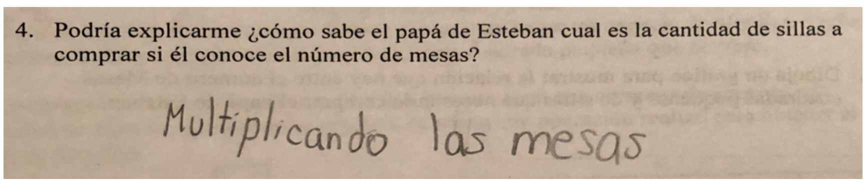
Figura 24: Evidencia de que el estudiante 4-10 no logra generalizar


4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

-multiplicando

El caso del estudiante 4-10 es interesante, pues al escribir “multiplicando” parece que podría evidenciar generalización factual, sin embargo, al revisar las otras preguntas del cuestionario (ver Figura 22), se puede deducir que este estudiante no logra generalizar. Caso contrario sucede con el estudiante 4-15 que al contestar la misma pregunta, respondió: “multiplicando las mesas” (Ver Figura 25). Esta frase junto con las respuestas de las demás preguntas permite deducir que este estudiante logra generalizar a través de esta frase clave.

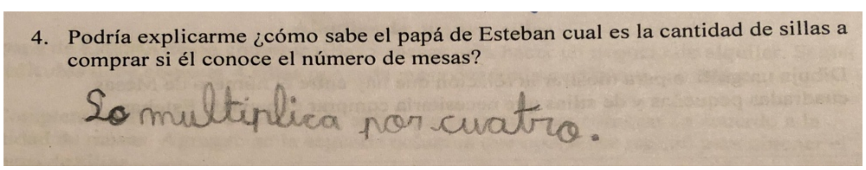
Figura 25: Evidencia de generalización factual del estudiante 4-15.


4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

Multiplicando las mesas

Al mismo tiempo, un ejemplo de los que evidencian generalización contextual es el estudiante 4-3, que en la Figura 26, se puede observar en su respuesta que tiene claro que para obtener el número de sillas total, es necesario multiplicar por cuatro el número de mesas.

Figura 26: Evidencia de generalización contextual del estudiante 4-3.


4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

Lo multiplica por cuatro.

Por otro lado, en la Tabla 13 se muestran el tipo de generalización de esta categoría pero ahora de los estudiantes de séptimo nivel.

Tabla 12: Tipo de generalización lograda por los estudiantes de séptimo nivel

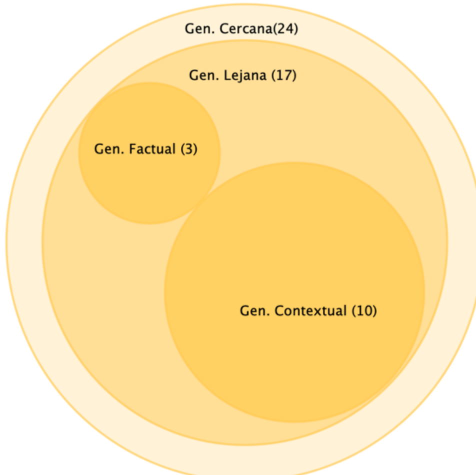
		Tipos de generalización		
Estudiante	No generaliza	Factual	Contextual	Simbólico algebraico
7-1	✓			
7-2	✓			
7-3			✓	✓
7-4	✓			
7-5			✓	
7-6			✓	
7-7			✓	
7-8			✓	
7-9	✓			
7-10			✓	✓
7-11	✓			
7-12		✓		
7-13			✓	
7-14			✓	
7-15			✓	
7-16			✓	

Fuente: propia de la investigación

En esta tabla se puede visualizar que sólo hay dos estudiantes que logran la generalización simbólico-algebraica y estos también logran la contextual. Luego, cinco estudiantes no lograron generalizar (equivalente a un 31,25%) y el doble de estos lograron la generalización contextual, es decir un 62,5%. Solamente un estudiante mostró una generalización factual.

A continuación se presenta una relación entre la forma de Generalización y el tipo de Generalización. Es interesante que todos los estudiantes de cuarto nivel que manifestaron la generalización factual o contextual, son parte del subcojunto de los que presentaron la combinación cercana-lejana. Es decir, los 3 estudiantes de cuarto nivel que lograron la generalización factual (Ver Tabla 12), son parte de los 17 que lograron la lejana y estos a la vez son parte de los 24 que lograron la cercana (Ver Tabla 11). Lo mismo sucede con la generalización contextual. En las Figura 27 se visualiza mejor esta relación.

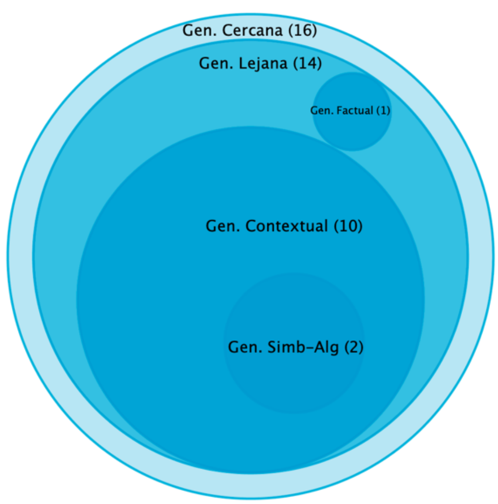
Figura 27: Relación entre la forma y los tipos de generalización utilizados por los estudiantes de cuarto nivel



El estudiante que no utilizó ninguna forma de generalización tampoco utilizó algún tipo de generalización.

En séptimo año también sucede algo parecido, es decir, los estudiantes que logran generalizar del tipo factual, contextual o simbólico-algebraico son parte de los que manifestaron la generalización cercana-lejana. En la Figura 28 se muestra mejor está relación.

Figura 28: Relación entre la forma y los tipos de generalización utilizados por los estudiantes de séptimo nivel



Lo anterior, muestra que los estudiantes que logran generalizar de forma factual, contextual o algebraica logran también la generalización lejana y cercana.

5.4 Análisis de sistemas de representación

Para analizar los sistemas de representación se tienen las siguientes categorías: natural, simbólico numérico, simbólico algebraico, pictórico, múltiple y gráfica. En las siguiente tabla se resumen los diferentes sistemas de representación utilizados por los estudiantes de cuarto nivel.

Tabla 13: Sistemas de representación utilizados por los estudiantes de cuarto nivel

	Sistema de representación					
Estudiante	Natural	Simbólico numérico	Simbólico algebraico	Pictórico	Múltiple	Gráfica
4-1	✓	✓		✓		
4-2						✓
4-3	✓	✓				✓
4-4	✓			✓		✓
4-5						
4-6	✓	✓		✓		
4-7	✓					✓
4-8	✓	✓				✓
4-9	✓	✓				✓
4-10	✓	✓		✓		
4-11	✓	✓				✓
4-12	✓	✓				
4-13	✓	✓		✓	✓	
4-14				✓		
4-15	✓	✓				✓
4-16	✓	✓				✓
4-17						
4-18						
4-19		✓		✓		
4-20		✓				✓
4-21	✓	✓		✓		
4-22				✓		
4-23		✓				✓
4-24	✓			✓		
4-25	✓	✓		✓		

Fuente: propia de la investigación

Los datos de la tabla anterior se resumen a continuación.

Tabla 14: Cantidad de estudiantes (y porcentaje) de cuarto nivel que utilizaron los tipos de representaciones.

Sistema de representación					
Natural	Simbólico numérico	Simbólico algebraico	Pictórico	Múltiple	Gráfica
16 (64%)	16 (64%)	0 (0%)	11 (44%)	1 (4%)	11 (44%)

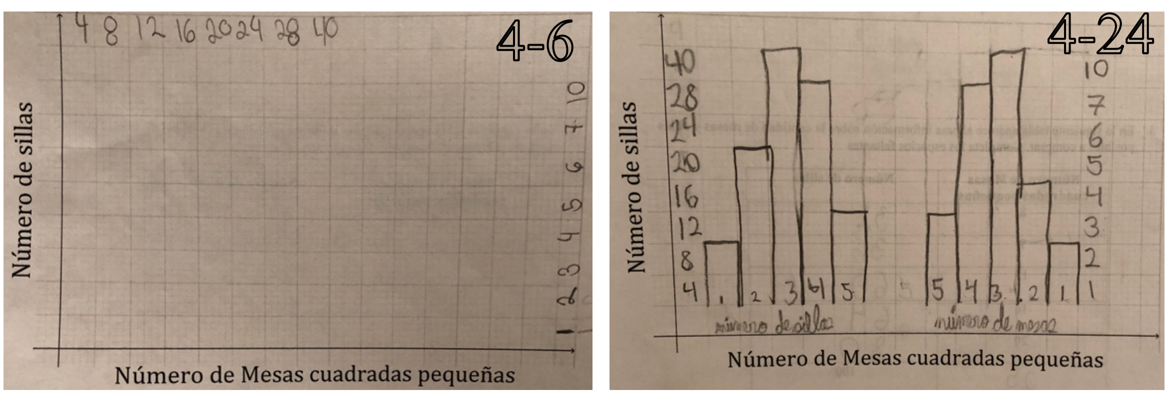
Fuente: propia de la investigación

De acuerdo con la información anterior, es evidente que las representaciones natural y simbólico numérico son las más utilizadas por parte de los estudiantes de cuarto nivel. Esto coincide con Pinto (2015) que establece que la mayoría de los estudiantes de tercer grado investigados en su trabajo, utilizan estas dos representaciones también.

En esta misma tabla, se puede observar que hay once estudiantes que utilizan las representaciones pictóricas y gráficas. Luego, le sigue la múltiple y por último, ningún estudiante de este nivel utiliza la representación simbólico algebraica.

Algunas representaciones pictóricas realizadas por los estudiantes de este nivel son muy interesantes, ya que presentan la relación funcional de formas muy creativas, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 29: Representaciones pictóricas de los estudiantes 4-6 y 4-24



Como se puede observar, el estudiante 4-6 colocó los valores de las preimagénes en el eje Y y las imágenes en el eje X, pero no hizo ningúna relación con ellas.

La representación del estudiante 4-24 es sumamente elaborada. Él hace una relación entre preimagen-imagen a través de un "intermediario" que son las casillas 1, 2 3, 4 y 5 que coloca tanto en el número de sillas como en el número de mesas, es decir, en el caso de las mesas el 4 va con 7, entonces en el caso de las sillas, el 2 va con la imagen del 7 que es 28. Como se puede ver, esta representación es bastante elaborada y creativa.

Hay tres estudiantes (4-5, 4-17 y 4-18) que no utilizan ningún tipo de representación para expresar la relación funcional presente en el problema. Sin embargo, al analizar el tipo de generalización que presentan estos estudiantes, se observa que dos evidencian una generalización cercana (4-5 y 4-18) y el otro (4-17) presenta una generalización lejana. Esto significa que estos estudiantes pudieron lograr un grado de generalización pero no tienen las herramientas suficientes para poder representar la relación que existe en esa generalización.

En la Figura 30 y Figura 31 se muestra las respuestas del estudiante 4-17 al solicitar que represente la relación en su forma natural y gráfica.

Figura 30: Respuesta de estudiante 4-17 sobre la representación natural

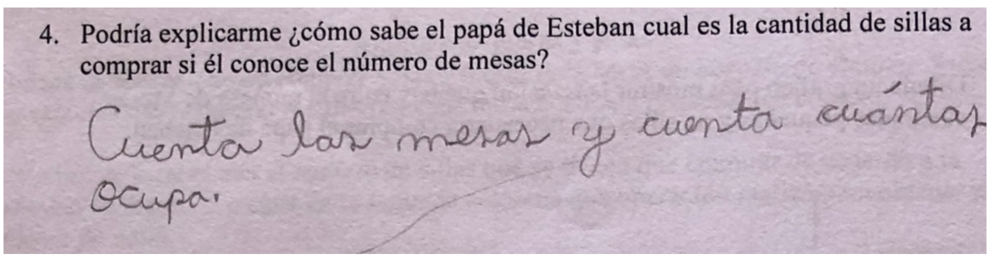
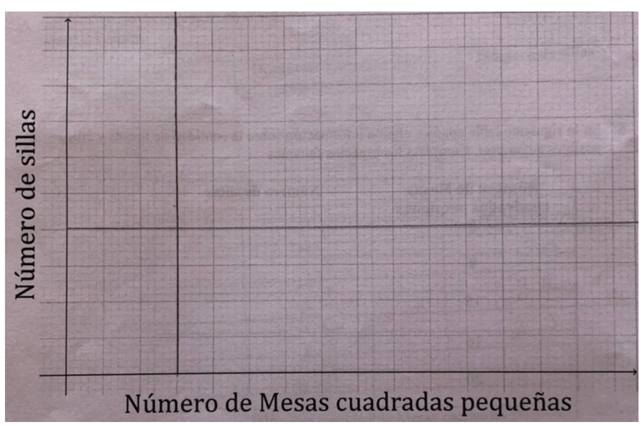
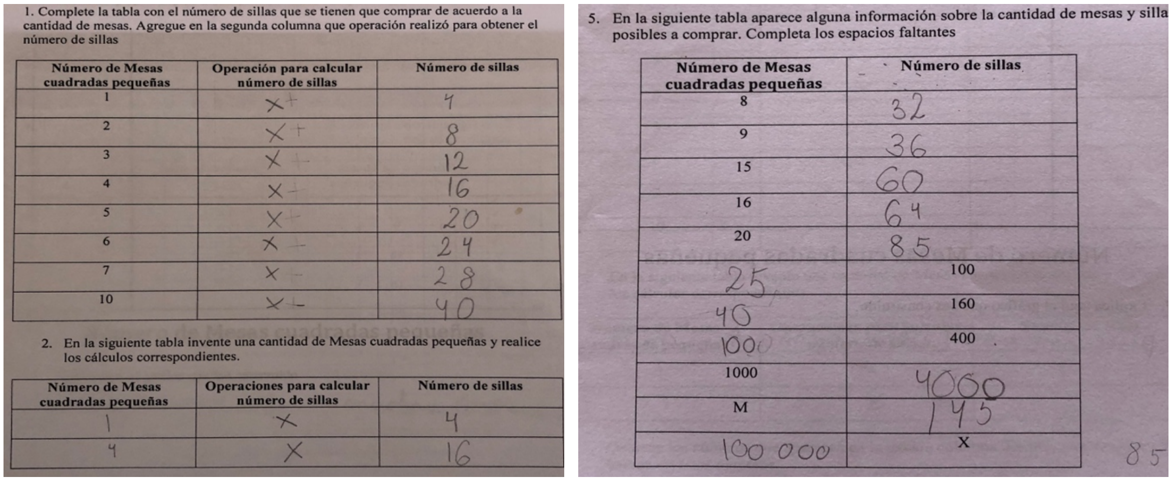


Figura 31: Respuesta de estudiante 4-17 sobre la representación gráfica



Como se puede observar dicho estudiante no logra representar la relación gráficamente y naturalmente, sin embargo en la Figura 32 se puede ver como este estudiante si logra calcular las preimágenes e imágenes de la relación funcional.

Figura 32: Respuesta de estudiante 4-17 a las Preguntas 1 y 5 del cuestionario



1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo a la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operación para calcular número de sillas	Número de sillas
1	x+	4
2	x+	8
3	x+	12
4	x+	16
5	x+	20
6	x+	24
7	x+	28
10	x+	40

2. En la siguiente tabla invente una cantidad de Mesas cuadradas pequeñas y realice los cálculos correspondientes.

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Operaciones para calcular número de sillas	Número de sillas
1	x	4
4	x	16

5. En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y silla posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	32
9	36
15	60
16	64
20	85
25	100
40	160
100	400
1000	4000
M	145
100 000	X

85

Al mismo tiempo, en la Tabla 14 también se puede observar que un poco menos de la mitad de los estudiantes utilizan tres representaciones para expresar la relación funcional y sólo un alumno utiliza cuatro representaciones.

Así mismo, los estudiantes de séptimo nivel utilizan las diferentes representaciones como se muestra en la Tabla 16.

Tabla 15: Sistemas de representación utilizados por los estudiantes de séptimo nivel

	Sistema de representación					
Estudiante	Natural	Simbólico numérico	Simbólico algebraico	Pictórico	Múltiple	Gráfica
7-1		✓		✓		
7-2		✓		✓		✓
7-3	✓	✓	✓			✓
7-4	✓			✓		✓
7-5	✓	✓				✓
7-6	✓	✓				✓
7-7	✓	✓				✓
7-8	✓	✓				✓
7-9		✓		✓		
7-10	✓	✓	✓			✓
7-11	✓	✓				✓
7-12	✓	✓				✓
7-13	✓	✓				✓
7-14	✓	✓		✓	✓	✓
7-15	✓	✓				✓
7-16	✓	✓				✓

Fuente: propia de la investigación

Tabla 16: Cantidad de estudiantes (y porcentaje) de séptimo nivel que utilizaron los tipos de representaciones.

Sistema de representación					
Natural	Simbólico numérico	Simbólico algebraico	Pictórico	Múltiple	Gráfica
13 (81,25%)	15 (93,75%)	2 (12,5%)	5 (31,25%)	1 (6,25%)	14 (87,5%)

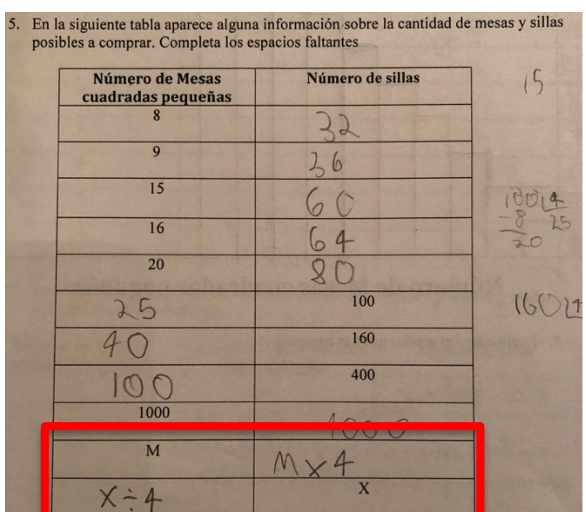
Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar, las representaciones más utilizadas por los estudiantes de este nivel son la natural, simbólica numérica y gráfica. Luego, con una marcada diferencia, la representación pictórica es utilizada solo por cinco personas, la representación simbólica algebraica por dos y por último solo un estudiante utiliza la representación múltiple.

Con base a la Tabla 16 se puede ver que en este nivel todos los estudiantes utilizaron al menos dos representaciones, la mayoría utilizó tres representaciones y la tripleta más utilizada es Natural-Simbólico Numérico-Gráfica. Estas tres representaciones son las más utilizadas por esta población.

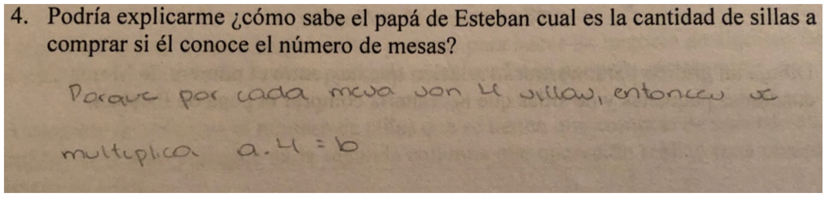
En particular, los estudiantes 7-3 y 7-10 son los que utilizan la representación algebraica, que para Merino, Cañadas y Molina (2013), es la de mayor grado de abstracción. En la Figura 33 y Figura 34 se encuentran las respuestas donde se evidencia la utilización de este tipo de representación en distintas preguntas del cuestionario.

Figura 33: Evidencia de la representación algebraica del estudiante 7-3


5. En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y sillas posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

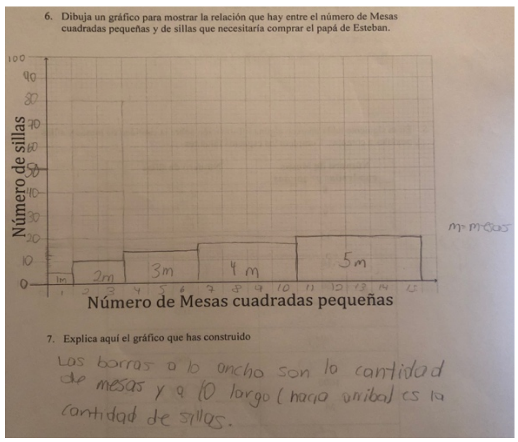
Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	32
9	36
15	60
16	64
20	80
25	100
40	160
100	400
1000	[illegible]
M	Mx4
X÷4	X

Figura 34: Evidencia de la representación algebraica del estudiante 7-10



Conviene subrayar las cinco representaciones utilizadas por el estudiante 7-14. La única representación que no utilizó fue la simbólico algebraica. Este alumno al graficar la relación funcional, utilizó también un elemento pictórico (el ancho de las barras las considera como la cantidad de mesas) como se muestra en la Figura 35.

Figura 35: Representación gráfica, pictórica y múltiple del estudiante 7-14



La diversidad de respuestas obtenidas al consultar sobre la representación gráfica de la relación funcional, como la mostrada en la figura anterior, fue lo que originó la creación de una categoría de análisis dedicada sólo a las respuestas dadas por los estudiantes al indicarles que dibujaran la relación funcional.

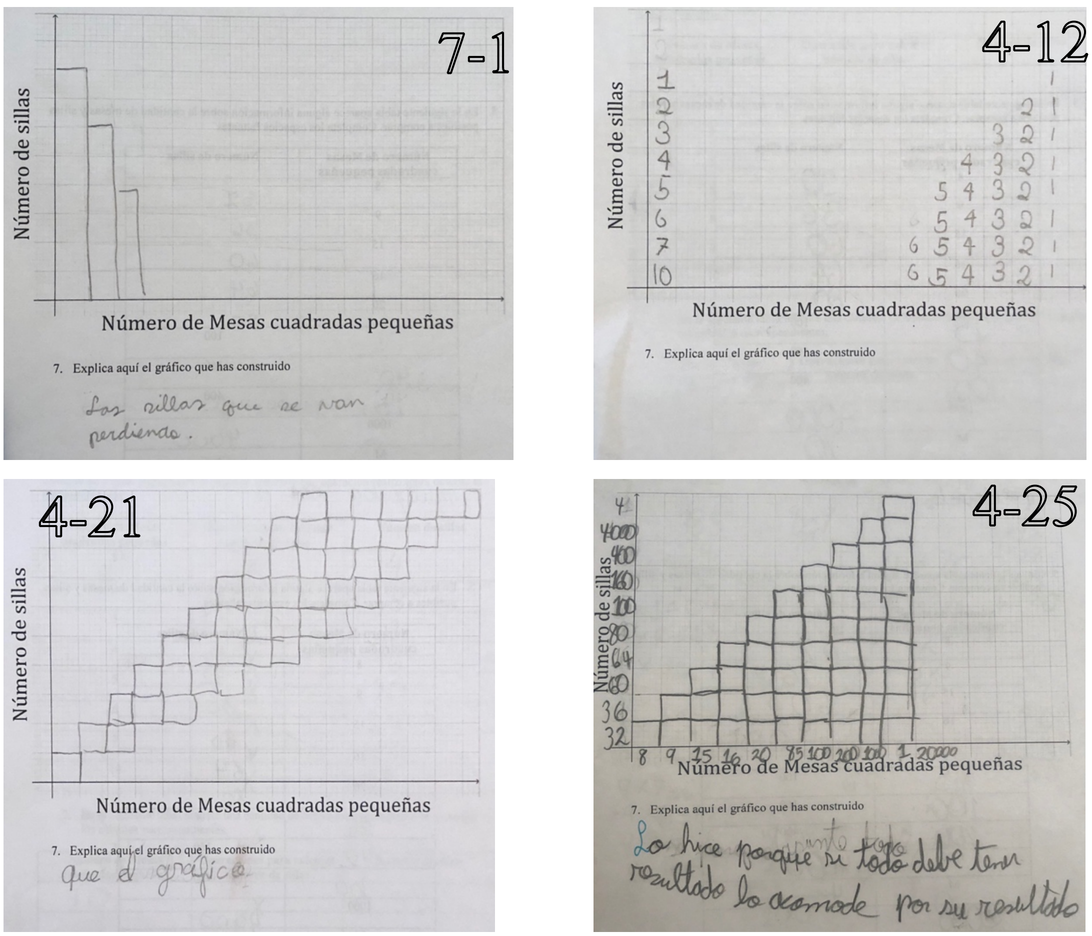
5.5 Análisis de la representación gráfica

Como ya se indicó en la Tabla 15, en cuarto nivel 11 estudiantes utilizaron la representación gráfica y en la Tabla 17 se muestra que 14 estudiantes de séptimo nivel utilizaron este tipo de representación. En ambos niveles educativos esta fue una de las representaciones más utilizadas por los estudiantes y debido a la variedad y riqueza de las respuestas fue necesario la creación de esta variable de análisis.

Para valorar que un estudiante realizó una representación gráfica se considera lo que plantea Brenner et al (1997), con respecto a los elementos mínimos que debe contener una representación para considerarla como gráfica: que se representen los ejes con intervalos escalonados y que se visualice de alguna manera la relación lineal presente en el problema.

En la Figura 36 se muestran algunos ejemplos de estudiantes cuyo dibujo no se puede considerar como una representación gráfica.

Figura 36: Respuestas de los estudiantes 7-1, 4-12, 4-21 y 4-25 a la pregunta sobre la representación gráfica de la relación



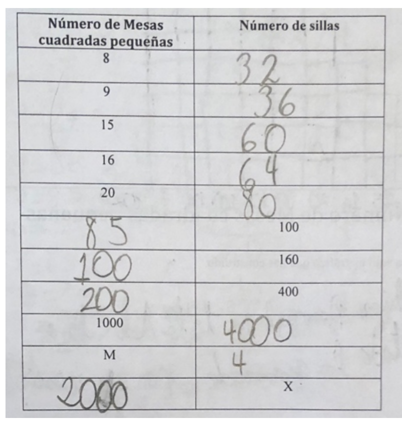
Como se observa en los diferentes dibujos, el estudiante 7-1 solo realizó tres barras verticales una más pequeña que la otra, indicando según sus propias palabras “las sillas que se van perdiendo”, aspecto que no tiene sentido en la representación gráfica de la relación funcional.

El estudiante 4-12 coloca el 1 en una fila, luego el 1 y 2 en una fila de abajo y así sucesivamente hasta enumerar los números del 1 al 6. Los números de la izquierda hace referencia a las preimágenes de la Pregunta 1 del cuestionario. Incluso el estudiante no explica el gráfico que realizó. Lo anterior no guarda relación con la función $f(x) = 4x$.

El estudiante 4-21 dibujo un cuadrado en la primer fila, en la segunda traslada ese cuadrado una unidad a la derecha y dibuja otro a la par y así sucesivamente hasta dibujar siete cuadrados en una fila en la parte superior. Este dibujo no se puede tomar como una representación gráfica ya que no relaciona preimágenes con imágenes. El estudiante no logra describir el dibujo que realizó.

El dibujo realizado por el estudiante 4-25 a pesar de que parece a una de las gráficas descritas en la Figura 8, que se pueden considerar como una representación gráfica de la función, sin embargo al analizar lo que dibujó el estudiante y comparándolo con las respuestas del estudiante a la pregunta 5 (ver Figura 37), se observa que lo que hizo el alumno fue colocar las preimágenes en el eje X y las imágenes en el eje Y y hacer cuadrados relacionando una con una pero sin considerar ni escalas ni orden de preimágenes e imágenes.

Figura 37: Respuestas del estudiante 4-25 a la pregunta 5 del cuestionario



Número de Mesas cuadradas pequeñas	Número de sillas
8	32
9	36
15	60
16	64
20	80
85	100
100	160
200	400
1000	4000
M	4
2000	X

El mismo estudiante al describir lo que realizó indica "…lo acomodé por su resultado". Se puede visualizar en la Figura 36 donde el estudiante coloca la preimagen 1. Por lo anterior, el estudiante no grafica la relación funcional. Por esta razón no se puede considerar como una representación gráfica.

Al analizar las respuestas de los estudiantes que si se consideran como una gráfica, se observó que los mismos hace uso de diferentes conocimientos previos. Por esta razón, el sistema de representación gráfico se dividió en gráfico numérica y gráfico estadística. En la Tabla 18 se muestran los estudiantes cada una de estas categorías.

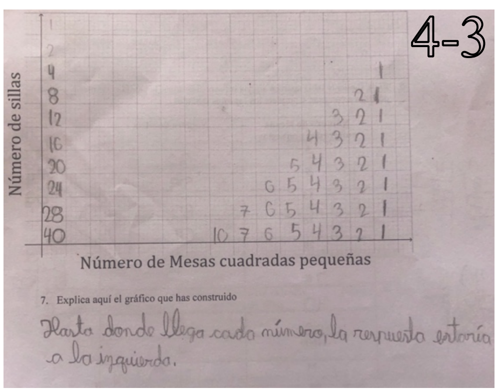
Tabla 17: Estudiantes por nivel que utilizaron la representación gráfico numérica y gráfico estadística.

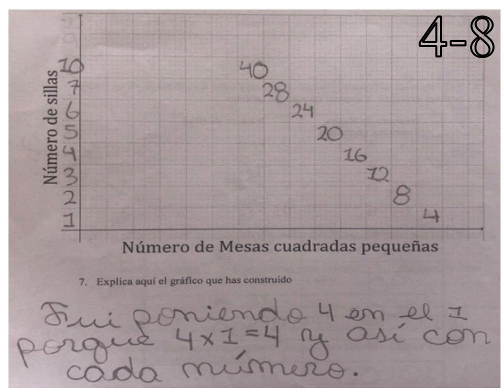
	Cuarto nivel	Séptimo nivel
Gráfico numérica	4-3, 4-8, 4-9	
Gráfico estadística	4-2, 4-4, 4-7, 4-11, 4-15, 4-16, 4-20, 4-23	7-2, 7-3, 7-4, 7-5, 7-6, 7-7, 7-8, 7-10, 7-11, 7-12, 7-13, 7-14, 7-15, 7-16

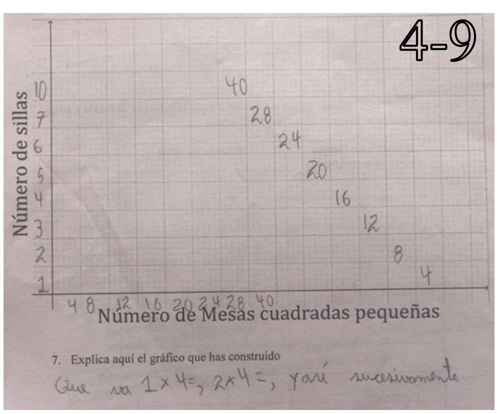
Fuente: propia de la investigación

De las representaciones gráficas, sólo tres estudiantes utilizaron la representación desde lo numérico, todos estos de cuarto nivel. El resto de estudiantes (ocho de cuarto y catorce de séptimo nivel) utilizaron como herramienta algunos conocimientos previos de la construcción de gráficos estadísticos. Además se puede observar que la única categoría utilizada por los estudiantes de séptimo nivel fue desde lo estadístico. En la siguiente figura se muestran las representaciones gráficas desde lo numérico.

Figura 38: Representación gráfico numérico de los estudiantes 4-3, 4-8 y 4-9



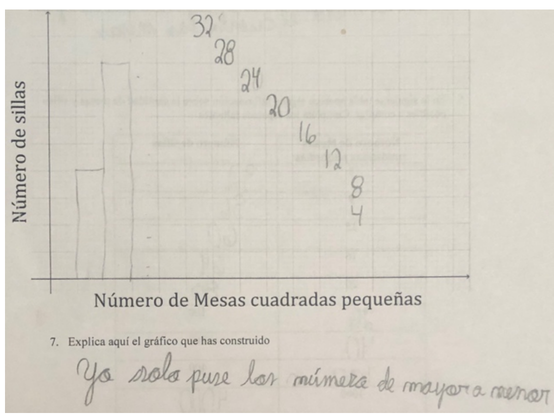




La gráfica del estudiante 4-3 relaciona el 4 con el 1, el 8 con el 2 y así sucesivamente, colocando los números de los ejes de forma descendente. Lo mismo realizan los estudiantes 4-8 y 4-9, solamente que estos colocan los números del eje X descendentemente y los del eje Y de forma ascendente, por lo que se visualiza una relación decreciente en lugar de creciente. La colocación y uso de los números de ambos ejes es fundamental para considerarlo como representación gráfica, por esta razón los dibujos realizados se consideran como gráficas.

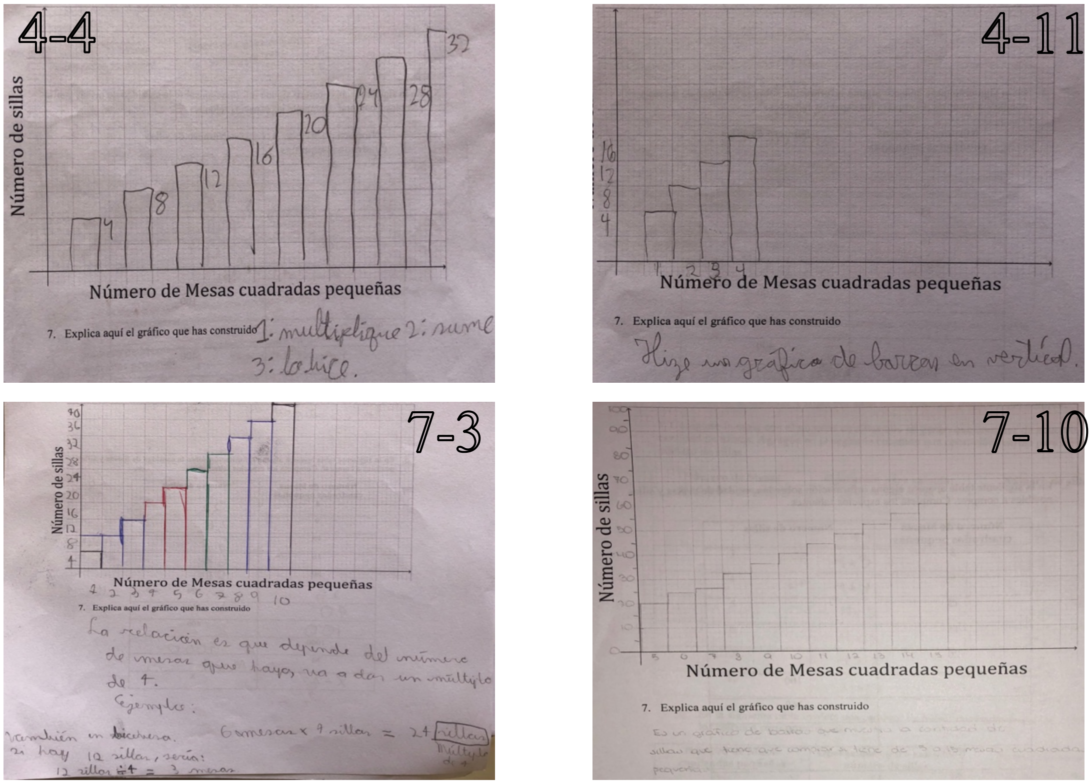
Un contraejemplo de lo anterior, es la respuesta del estudiante 4-14 (Ver Figura 39), donde el dibujo es muy parecido al de los estudiantes 4-8 y 4-9, sin embargo, este estudiante colocó los números de forma descendente, así como lo indica en su respuesta “”yo solo puse los números de mayor a menor”, es decir que este estudiante no esta relacionando el 1 con el 4, el 2 con el 8 y así sucesivamente, sino simplemente ordenando un conjunto de números (imágenes) y que al tener un sistema de coordenadas los ordena tanto de izquierda a derecha como de arriba para abajo. Por lo anterior, el dibujo del estudiante 4-14 se considera como una representación pictórica, pero no gráfica.

Figura 39: Respuesta del estudiante 4-14 a las preguntas 6 y 7 del cuestionario



Veamos ahora algunas representaciones gráficas desde lo estadístico. En la Figura 40 se muestran algunos ejemplos representativos, sin embargo en el Anexo 2 y Anexo se puede visualizar todas las respuestas de los estudiantes a la pregunta 6 del cuestionario.

Figura 40: Representación gráfica desde lo estadístico de los estudiantes 4-4, 4-11, 7-3 y 7-10



Los estudiantes 4-11 y 7-10 al describir como realizaron el gráfico construido, agregan en sus respuestas que el dibujo corresponde a un gráfico de barras, esto indica claramente el uso de lenguaje estadístico en sus respuestas. Es destacable el uso de la escala del eje Y en el estudiante 7-10.

Por otro lado, el estudiante 4-4 dibuja barras verticales de tamaño diferente, dependiendo del resultado de la multiplicación y no coloca los valores de la preimagen. Sin embargo, es muy claro el uso de gráficos estadísticos para realizar dicha representación.

Por último, el estudiante 7-3 hace unas barras a escala y con todo el detalle, colocando las preimágenes e imágenes, así como toda una explicación sobre la relación entre el número de mesas y sillas con un ejemplo directo ("6 mesas × 4 sillas =24 sillas") e inclusive hace un ejemplo inverso ("12 sillas ÷ 4=3 mesas"). Toda esto demuestra una clara idea de la relación funcional presente en la tarea.

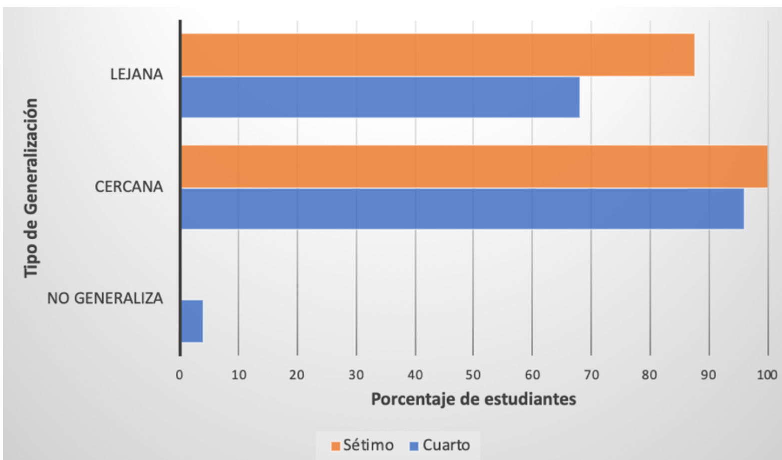
5.6 Comparación de ambas muestras

Los estudiantes de los niveles de cuarto y séptimo presentan ciertas coincidencias y diferencias, que se mostrarán en este apartado. Se dividirá en 4 partes: desde la generalización, desde las representaciones, desde la representación gráfica y desde lo que plantea el currículo de Costa Rica

5.6.1. Desde la generalización

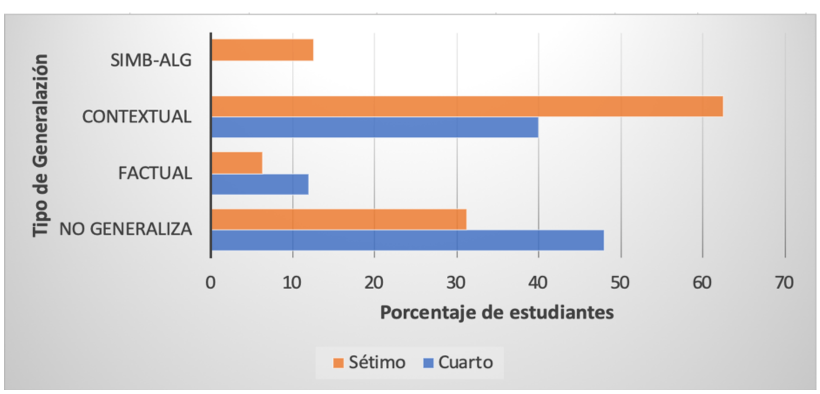
En la Tabla 11 se muestran los valores absolutos de la cantidad de estudiantes que utilizan las diferentes tipos de generalización. Estos valores dan una idea de las diferencias de como generalizan los estudiantes de cuarto y séptimo nivel, sin embargo en el Gráfico 1 se pueden visualizar las diferencias con valores relativos.

Gráfico 1: Porcentaje de estudiantes que utilizan alguna forma de generalización de cuarto y séptimo nivel



Fuente: propia de la investigación

Gráfico 2: Porcentaje de estudiantes que utilizan algún tipo de generalización de cuarto y séptimo nivel



Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar en el Gráfico 1 y Gráfico 2, en casi todos los tipos de generalización el porcentaje de estudiantes de séptimo año es mayor a los de cuarto nivel.. El único porcentaje que los niños superan a los jóvenes es la generalización factual, sin embargo, este tipo de generalización es cuando no se alcanza un nivel de enunciación.

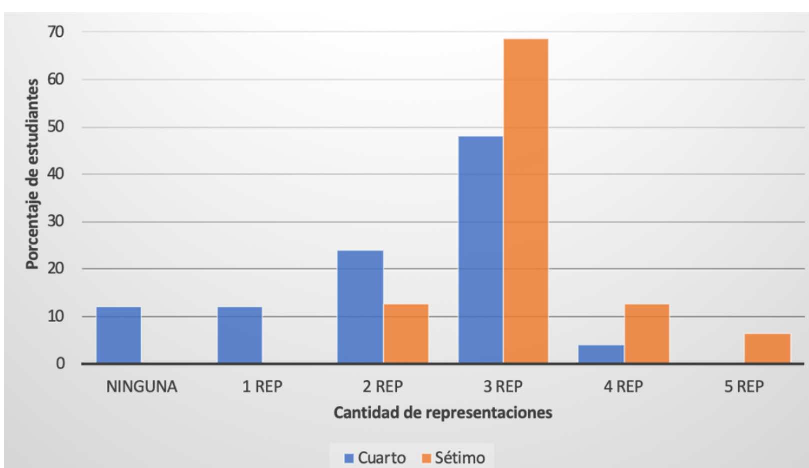
La diferencia entre la cantidad de estudiantes que lograron la generalización lejana con respecto a los que lograron la cercana, es muy pequeña en séptimo año (solo un 12,5%), sin embargo en cuarto nivel, esa diferencia es mayor, un 28%.

Por otro lado, la generalización simbólica algebraica ningún estudiante del nivel menor la logró realizar, mientras que el 12,5% de los estudiante del otro nivel si la realizaron, siendo este tipo de generalización la que requiere mayor grado de abstracción, según Merino, Cañadas y Molina (2013).

5.6.2. Desde la representaciones

En las Tabla 14 y Tabla 16 se muestran las representaciones utilizadas por cada uno de los estudiantes de cuarto y séptimo nivel. En el Gráfico 2 se muestran los datos resumidos de estas tablas, de acuerdo a la cantidad de representaciones utilizadas por los estudiantes de ambos niveles educativos.

Gráfico 3: Porcentaje de estudiantes que utilizan diferente cantidad de representaciones



Fuente: propia de la investigación

Aquí se puede notar que la cantidad de representaciones más utilizada por ambos grupos de estudiantes es tres, el 48% de los niños utilizan estas tres representaciones en comparación con un 68,7% de los adolescentes. Además, se puede observar los estudiantes de cuarto nivel tienen un mayor porcentaje cuando utilizan ninguna, una o dos representaciones, mientras que cuando se utilizan tres, cuatro o cinco representaciones, la cantidad de estudiantes de sétimo nivel están por encima que los niños.

La tripletas de representaciones más utilizadas por los alumnos de cuarto año fue Natural-Simbólico numérico-Gráfica y Natural-Simbólico numérico-Pictórico donde cinco estudiantes utilizaron cada una de estas tripletas, mientras que en séptimo año fue la Natural-Simbólico numérico-Gráfica. En las Figura 41, Figura 42 y Figura 43 se muestran tres ejemplos de estudiantes utilizando estos tríos de representaciones.

Figura 41: Estudiante 4-6 utilizando las representaciones: Simbólico numérico, Natural y Pictórico

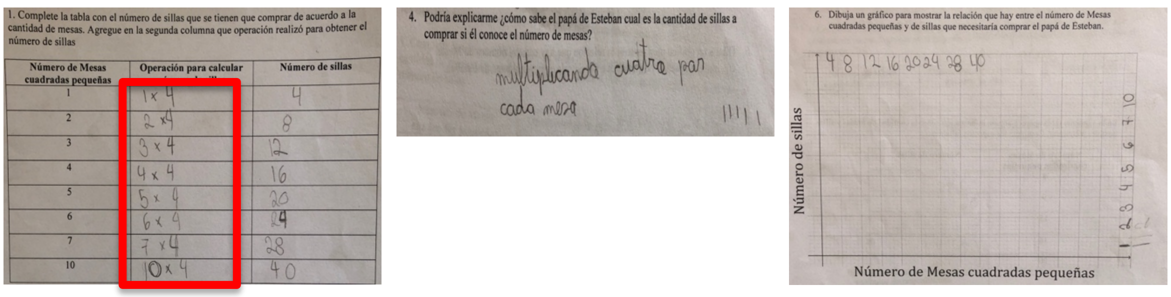


Figura 42: Estudiante 4-15 utilizando las representaciones: Simbólico numérico, Natural y Gráfica

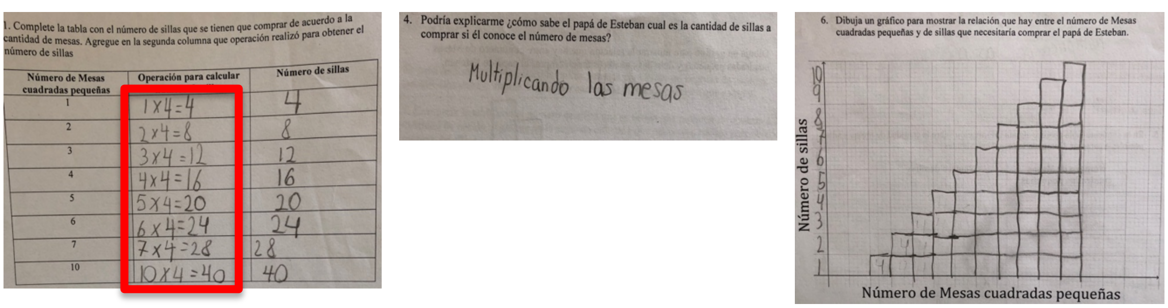
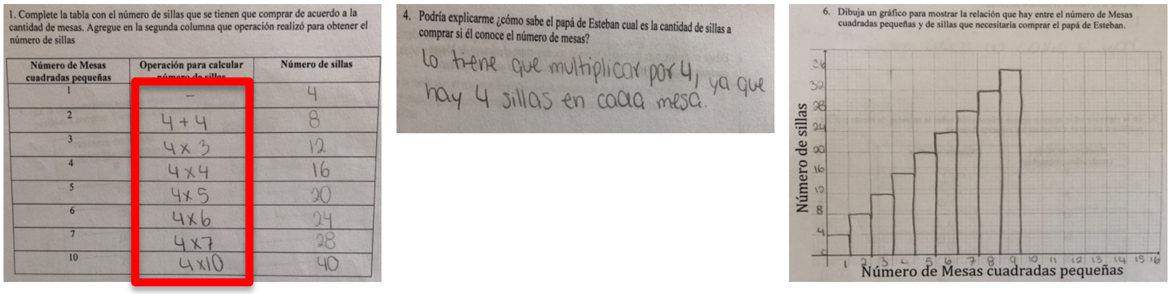
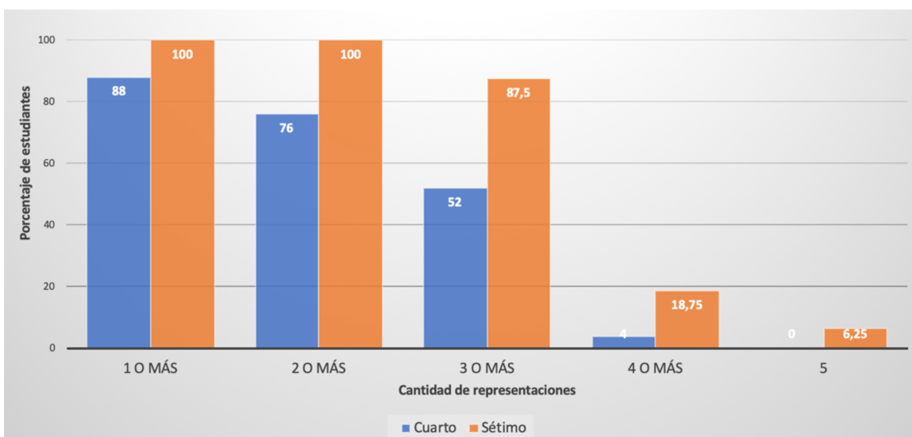


Figura 43: Estudiante 7-8 utilizando las representaciones: Simbólico numérico, Natural y Gráfica



Prosiguiendo con este análisis, al mostrar los datos del Gráfico 3 pero de forma acumulada, es decir, los porcentajes de estudiantes de cuarto y séptimo nivel que utilizan una o más, dos o más, tres o más, cuatro o más o cinco representaciones para evidenciar la relación funcional, se obtiene el siguiente gráfico:

Gráfico 4: Porcentaje de estudiantes de cuarto y séptimo nivel que usan una o más, dos o más, tres o más, cuatro o más o cinco diferentes representaciones



Fuente: propia de la investigación

Como se puede observar, los estudiantes de séptimo superan en todas las categorías a los cuarto nivel, esto supone que los estudiantes más avanzados tienen mayor diversidad de herramientas para poder representar una relación funcional.

También se observa que el 12% de los estudiantes de cuarto nivel no lograron utilizar ni una sola representación y que en el caso de séptimo nivel la menor cantidad de representaciones que utilizan es dos.

Todo lo anterior muestra que los estudiantes de mayor edad tienen más herramientas en comparación con los más jóvenes.

5.6.3. Desde las gráficas

En este apartado es donde se visualiza mayor diferencia entre las dos poblaciones estudiadas, ya que en las Tabla 15 y Tabla 17 se observa que el 44% de los alumnos de cuarto nivel realizaron una representación gráfica de la relación funcional, mientras que los de séptimo fue casi el doble de ese porcentaje, un 87,5%.

Así mismo, en la Tabla 18 se puede observar que todos los estudiantes de séptimo realizaron la gráfica a través de conocimientos previos de la estadística, mientras que los de cuarto nivel solo el 32% lo realizó de esta manera. Esto es muy interesante, ya que se puede intuir que la preparación previa en el área de estadística de los jóvenes, les ha condicionado para graficar una relación funcional.

En vista de lo anterior, finalizó este análisis con una comparación desde el currículo de primaria de matemáticas de Costa Rica, comparando los conocimientos previos de los estudiantes con lo desarrollado en el cuestionario y lo evidenciado con respecto a la generalización y las representaciones utilizadas.

A modo de resumen, en la siguienta figura se muestra el porcentaje de los estudiantes de cada uno de los niveles educativos que utilizan un tipo de generalización y cada representación.

Figura 44: Porcentaje de estudiante de cuarto y séptimo nivel que utilizan un tipo de generalización y una representación

Cuarto nivel						
	Natural	Simb-num	Simb-Alg	Pictórica	Múltiple	Gráfica
Cercana	56%	60%	0%	40%	4%	40%
Lejana	52%	56%	0%	28%	4%	28%
Factual	12%	12%	0%	4%	0%	8%
Contextual	36%	36%	0%	16%	4%	16%
Simbólica-Algebraica	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Sétimo nivel						
	Natural	Simb-num	Simb-Alg	Pictórica	Múltiple	Gráfica
Cercana	62,50%	93,70%	12,50%	31,25%	6,25%	87,50%
Lejana	62,50%	87,50%	12,50%	18,75%	6,25%	81,25%
Factual	6,25%	6,25%	0%	0%	0%	6,25%
Contextual	56,50%	56,50%	6,25%	6,25%	6,25%	56,50%
Simbólica-Algebraica	6,25%	12,50%	12,50%	0%	0%	12,50%

Escala	
Color	% de estudiantes
	100%-90%
	90%-80%
	80%-70%
	70%-60%
	60%-50%
	50%-40%
	40%-30%
	30%-20%
	20%-10%
	10%-0%

En esta figura se puede ver como los mayores porcentajes son de los estudiantes de séptimo nivel, incluso llama la atención que de los estudiantes que lograron realizar la representación gráfica, el 87,5% evidenciaron una generalización cercana, el 81,25% lejana y el 56,5% contextual, que son porcentajes bastante altos en comparación con las mismas categorías de los estudiantes de cuarto nivel.

Además se puede ver que con respecto a la representación pictórica, en todos los casos es mayor el porcentaje de estudiantes de cuarto año.

5.6.4. Desde lo curricular

De acuerdo con el Programa de Estudios del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, el área de Estadística y Probabilidad se trabaja desde el primer nivel educativo (Ver Figura 1). Estas son algunas habilidades específicas que se deben trabajar en el I y II Ciclos que consideran el concepto de gráficos:

Tabla 18: Habilidades específicas de MEP (2012) de I y II Ciclo donde se trabajan los gráficos estadísticos

I Ciclo	II Ciclo
Interpretar información que ha sido resumida en dibujos, diagramas, cuadros y gráficos. (2)	Interpretar información que ha sido resumida en dibujos, diagramas, cuadros y gráficos en diferentes contextos (4)

Interpretar información que ha sido resumida en textos, dibujos, diagramas, cuadros y gráficos (3) Resumir los datos por medio de cuadros que incluyan frecuencias absolutas o gráficos de barras. (3)	Analizar la información recolectada por medio de un cuestionario mediante la elaboración de cuadros, gráficos con frecuencias absolutas y el cálculo de medidas de posición y de variabilidad. (5) Utilizar diagramas lineales para representar tendencias en series de tiempo. (6)

Fuente: MEP(2012)

Nota: Los números entre paréntesis indican el nivel escolar donde se trabaja la habilidad

Como se puede observar, desde el segundo nivel se estan desarrollando habilidades referentes a los gráficos estadísticos, incluso desde el tercer año educativo se trabaja la construcción de gráfico de barras.

Lo anterior, podría ser una de las razones por las cuales, tanto estudiantes de cuarto como de séptimo (principalmente estos últimos) utilicen herramientas de la estadística para intentar graficar una relación funcional, pues como se mostrará a continuación, en el área de Relaciones y Álgebra solamente hay una habilidad específica que promueve la construcción de gráficos de relaciones lineales. Esto se puede ver en la Tabla 20.

Tabla 19: Habilidades específicas de MEP (2012) de I y II Ciclo donde se trabajan las diferentes representaciones de una relación funcional

I Ciclo	**II Ciclo**
Representar tabularmente relaciones entre números y operaciones. (3) Identificar el número que falta en una tabla. (3) Plantear y resolver problemas que involucran valores faltantes en una tabla o expresión matemática. (3)	Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y operaciones. (4) Construir tablas que cumplan las especificaciones dadas en forma verbal. (4) Plantear y resolver problemas formulados verbalmente. (4) Representar mediante tablas relaciones entre dos cantidades que varían simultáneamente.(5) Representar una expresión matemática dada en forma verbal utilizando números y letras. (5) Representar algebraicamente una expresión matemática dada verbalmente. (6) Identificar y representar en un plano de coordenadas puntos que satisfacen una relación entre dos cantidades que varían simultáneamente. (6)

Fuente: MEP(2012)

Nota: Los números entre paréntesis indican el nivel escolar donde se trabaja la habilidad

Como se observa en esta tabla, solo hay una habilidad referente a los inicios de la construcción de una gráfica de una relación funcional, puede ser que por esta razón los estudiantes buscan otras herramientas para graficar, inclusive utilizan representaciones pictóricas bastante elaboradas pero que no se pueden considerar como gráficas.

Capítulo 6. Conclusiones

Este capítulo sobre las conclusiones más importantes de la investigación, se estructura en tres partes: (a) logro de objetivos y principales aportes de la investigación, (b) limitaciones, y (c) principales líneas abiertas que deja la investigación

6.1 Logro de objetivos y principales aportes

La información proveniente de las respuestas de los estudiantes de cuarto y séptimo nivel ha permitido abordar los objetivos propuestos de la investigación. Se ha identificado claramente aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, a través del análisis de la generalización y de las representaciones utilizadas por ellos, así como también se ha evidenciado las diferencias de ambas poblaciones al trabajar precisamente la generalización y las representaciones.

El primer objetivo general planteado es "Describir el pensamiento funcional que ponen en manifiesto niños de 10 años y adolecentes de 13 años en una escuela de primaria de Costa Rica." A través del análisis que se realizó sobre el tipo de generalización que evidenciaban los estudiantes en sus respuestas, así como las diferentes representaciones utilizadas se ha dejado en evidencia el logro de este objetivo.

Los objetivos específicos asociados al anterior objetivo general eran: "1.1. Describir las estrategias utilizadas por los estudiantes al generalizar en problemas que involucran pensamiento funcional" e "1.2. Identificar los sistemas de representación utilizados por los estudiantes al resolver un problema de pensamiento funcional" y "1.3. Describir las representaciones gráficas realizadas por los estudiantes al dibujar un gráfico que mostrará la relación funcional."

El 1.1 se cumplió al realizar el análisis del nivel de generalización de los estudiantes en el problema planteado. Para este análisis se crearon las categorías formas de Generalización y tipos de Generalización. La Figura 27 y Figura 28 muestran claramente el comportamiento de ambos grupos de estudiantes con respecto a estas categorías. En ellas se muestra que si los estudiantes (de ambos grupos) logran generalizar de forma factual, contextual o algebraica entonces logran también la generalización lejana y cercana.

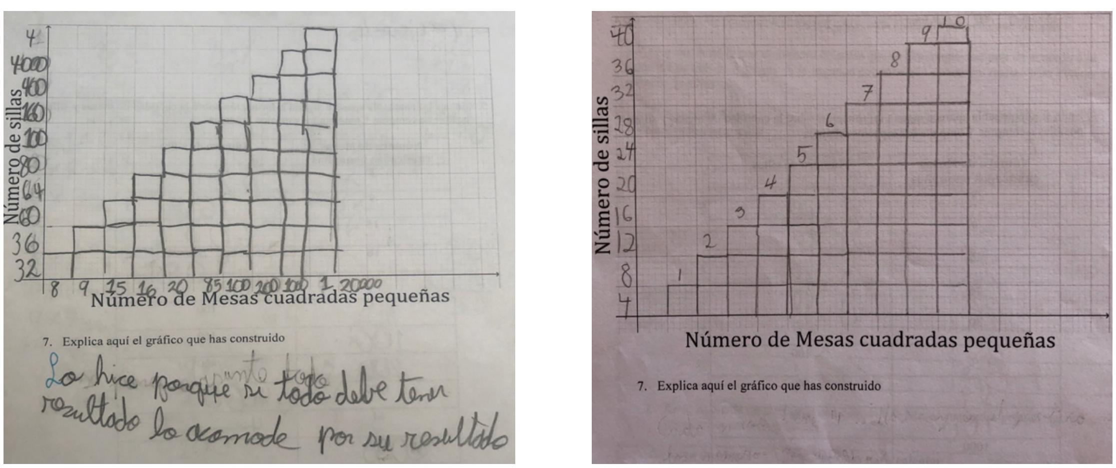
El objetivo 1.2 se cumplió al describir con detalle las diferentes representaciones utilizadas por los estudiantes de ambos niveles educativos. Se evidencia que las representaciones natural y simbólico numérico son las más utilizadas por parte de los estudiantes de cuarto nivel. Este resultado coincide con Pinto (2015) quien investigó un grupo de niños de 9 años y estos también utilizan estos tipos de representación.

También se describieron las representaciones utilizadas por el grupo de séptimo año. En este nivel se observa que la mayoría de estudiantes utilizó tres representaciones y la tripleta más utilizada es Natural-Simbólico Numérico-Gráfica.

Las representaciones utilizadas por ambos grupos coinciden parcialmente con lo que Merino, Cañadas y Molina (2013), ya que estos autores destacan en su investigación la presencia de combinación de representaciones: natural-simbólico-numérico, natural-simbólico-algebriaco y natural-pictórico.

Además, debido a la diversidad de respuestas obtenidas al solicitar la gráfica de la relación funcional presente en la tarea matemática, se realizó otra categoría de análisis, para analizar la representación gráfica de los estudiantes. Este análisis es uno de los aportes de esta investigación pues fue necesario, a través de este análisis, diferenciar entre una representación pictórica y una gráfica, a pesar de que ambos dibujos son muy parecidos, tal y como se muestra en la Figura 45.

Figura 45: Diferencia entre una representación Pictórica y Gráfica



Como se puede observar, ambos dibujos son muy parecidos, sin embargo el de la izquierda se considera como una representación pictórica, ya que el estudiante no tiene consciencia de la escala tanto para el eje X como para el eje Y, solo coloca los números de acuerdo a una tabla previa que completó. Por otro lado, el dibujo de la derecha si es considerada una representación gráfica, ya que el estudiante si considera la relación 1 con

4, 2 con 8 y así sucesivamente, además del uso correcto de las escalas en ambos ejes. Estas dos son condiciones fundamentales para considerar un dibujo como una gráfica según Brenner et al (1997).

Otro aspecto interesante con respecto a las representaciones gráficas es el uso de la estadística para representar una relación funcional, principalmente por los estudiantes de séptimo nivel. Una posible causa de esto es la preparación previa que tienen los estudiantes de primaria en el área de Estadística, de acuerdo al currículo oficial de matemáticas de Costa Rica, tal y como se muestra en la Tabla 19, donde se describen las habilidades matemáticas relacionadas con la construcción de gráficos estadísticos, que se trabajan en la educación primaria en el país, según MEP(2012). Precisamente MEP(2012) propone que los temas que se trabajan en el área de la Estadística y Probabilidad "*son cada día un requisito para poder comprender lo que pasa en el mundo y poder actuar."(p.55).*

Precisamente Blanton y Brizuela (2014) después de veinte años de investigar el pensamiento funcional, destacan que los niños disponen de una diversidad para representar funciones.

Lo descrito anteriormente es parte de la evidencia de que el objetivo 1.3 también se ha cumplido.

El segundo objetivo general que se planteó fue "Comparar las respuestas de los estudiantes de cada uno de los niveles y contrastarlo con las habilidades que el currículo de matemática de Costa Rica pretende desarrollar". A través de lo descrito en el último apartado del capítulo de análisis de datos y resultados se evidencia el logro de este segundo objetivo general.

Los objetivos específicos asociados a este segundo objetivo general son: "2.1 Comparar las respuestas de los estudiantes de cada uno de los niveles educativos para encontrar diferencias y similitudes" y "2.2 Contrastar las respuestas de los estudiantes con los conocimientos previos que deben tener los estudiantes de cada nivel, según el programa oficial de matemáticas de primaria".

Para lograr el objetivo 2.1 se ha destacado la generalización los estudiantes de cuarto nivel con respecto a los séptimo, principalmente a través de la Figura 27 y Figura 28, donde se muestra la relación que existe entre la categoría de formas de Generalización y tipos de Generalización en cada uno de estos niveles educativos. En dichas figuras se muestra que en cuarto nivel de los estudiantes que lograron generalización cercana, el 70,8% también lograron la lejana y de estos 17,6% evidencian generalización factual y 58,8% contextual. Mientras que en sétimo nivel, todos los estudiantes evidenciaron la generalización cercana, el 87,5% la lejana y de estos solo 1 estudiante evidenció generalización factual y el 71,4% contextual Además 2 estudiantes lograron la generalización simbólica -algebraica. De lo anterior se deduce que los estudiantes de séptimo nivel logran expresar la generalización con mayor facilidad que los de cuarto nivel.

La relación entre las forma de generalizar (cercana y lejana) y los tipos de generalización (factual, contextual y simbólica-algebraica) es otro aporte de la investigación.

Por otro lado, también se muestra qué representaciones utilizan cada grupo de estudiantes. En este punto se ve claramente que los estudiantes de séptimo utilizan más representaciones que los de cuarto nivel (ver Gráfico 2 y Gráfico 3), por lo que se puede inducir que los estudiantes mayores tienen más herramientas para representar una relación funcional. Lo anterior se visualiza más en la representación gráfica donde sólo el 44% de los alumnos de cuarto nivel realizaron una representación gráfica de la relación funcional, mientras que los de séptimo fue el 87,5%. Este porcentaje de estudiantes realizaron la gráfica a través de conocimientos previos de la estadística. Esto conlleva a una línea abierta para investigar que surge de esta investigación, que se detallará más adelante.

El logro del objetivo 2.2 se evidencia al realizar un análisis de las habilidades específicas que contiene el currículo costarricense en primaria que tengan que ver con las representaciones gráficas en estadística y con las representaciones de una función. Además se muestra cómo estas habilidades trabajadas en los años anteriores a cuarto y séptimo nivel, son base para que los estudiantes utilicen diferentes representaciones evidenciadas en sus respuestas, como por ejemplo el uso de herramientas estadísticas para representar gráficamente una relación funcional.

En síntesis, se considera que se han logrado todos los objetivos (generales y específicos) planteados y se destaca que este estudio viene a dar una primer idea como manifiestan el pensamiento funcional los niños y jóvenes en Costa Rica, ya que no existe ninguna investigación en este campo en el país. Sin embargo, el estudio viene a complementar una serie de investigaciones sobre el pensamiento funcional en el contexto internacional (Blanton, M. y Brizuela, B., 2014; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015; Cañadas, M. y Molina, M., 2016; Kaput, 2008; Molina, 2009).

6.2 Limitaciones

Debido a la estructura y los tiempos en que está establecido el Trabajo Final de Master, no permite profundizar en algunos aspectos que van surgiendo en el desarrollo de la investigación. Por ejemplo, podría ser interesante después de tener ciertos resultados, realizar otra intervención en los grupos investigados para indagar sobre algún aspecto más puntual.

Tal y como se detalló en el marco metodológico, previo al cuestionario analizado se aplicó otro cuestionario (problema de las baldosas) a los mismos estudiantes, sin embargo por las razones antes mencionadas, fue imposible aprovechar la información de ese cuestionario para cruzar o detallar más información.

Por otro lado, las investigaciones que se realizan en el contexto costarricense están muy localizadas en la educación secundaria. Al no existir ninguna investigación sobre pensamiento algebraico en la educación primaria y ni mucho menos en pensamiento funcional, ha limitado el estudio, por ejemplo para establecer comparaciones de los resultados de esta investigación.

6.3 Líneas abiertas

Se destaca como una primer línea abierta de investigación a raíz de los resultados de este estudio, el analizar profundamente el porqué la mayoría de estudiantes utilizaron elementos de la estadística para graficar la relación funcional presente en el problema. Esto se considera importante, ya que si se confirmará la hipótesis de que una buena educación estadística le da herramientas a los niños y jóvenes para representar funciones e inclusive para establecer las relaciones algebraicas mismas, permitiría crear una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004) diferente a como se trabaja normalmente las relaciones funcionales y sus gráficas.

Como una segunda línea a investigar es realizar un estudio comparativo entre las respuestas ante una tarea donde se desarrolle el pensamiento funcional, entre estudiantes de España (o cualquier otro país) y de Costa Rica de edad similar.

Otra línea abierta de investigación, es conocer más sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática, particularmente sobre algunos elementos del pensamiento funcional. Esta línea surge a raíz de que el cuestionario que se le aplicó a los estudiantes en el presente estudio, también se le aplicó a la maestra de primaria del grupo de cuarto nivel y al profesor de secundaria del grupo de séptimo nivel, y en las respuestas surgen algunos elementos interesantes para profundizar.

Por último, un elemento interesante a investigar en una tesis doctoral sería un estudio longitudinal con estos estudiantes de cuarto nivel, realizar estudios en el quinto, sexto e inicios de séptimo nivel que permitían analizar el avance de estos año con año e incluso comparar los resultados de éstos con lo que se evidencia en esta investigación con los estudiantes de séptimo nivel.

Referencias bibliográficas

Alvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y Metodología.* México: Paidós.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*

(5a ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. y Brizuela, B. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP), Nº 14*, p. 37-57. Disponible en: http://revistas.unlp.edu.ar/RPSEUNLP.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 36*, No. 5, 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brenner et al (1997). Learning by understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal. Vol 34*, No 4, 663-689.

Brizuela, B. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The elementary school journal. Vol. 117*. Number 1. USA.

Brizuela, B. y Alvarado, M. (2010). El trabajo de alumnos de primer grado en problemas aditivos con el uso de diferentes herramientas notacionales [First graders' work on additive problems with the use of different notational tools]. *Revista IRICE, 21*, 37–43.

Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation. *Estudios de Psicología, 36*, 138–165.

Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. M. y Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30.

Brizuela, B. M., & Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En: M. Carretero, J. A. Castorina, & A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo Cognitivo y Educación: Procesos de Conocimiento y Contenidos Específicos, 2*, 263-286. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M.; Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En Castro, Encarnación; Castro, Enrique; Lupiáñez, José Luis; Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco; Torralbo, Manuel (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth: Heinemann

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 669-705). Greenwich, United Kingdom: Information Age Publishing.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla

De Faria, E. (2016). La preparación de docentes de enseñanza de las Matemáticas: el caso de Costa Rica. En A. Ruiz (Ed) *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (pp. 419-430). Costa Rica: UCR

Ellis, A. (2007). A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(2).

Ferreiro, E., & Teberosky, A. (1979). Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño [Literacy before schooling]. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Freilich, M. (1970). Marginal natives: Anthropologist at work. Nueva Cork, Harper & Row.

Fuentes, S.(2014). *Pensamiento funcional en alumnos de primero de educación primaria. Un estudio exploratorio.* (Trabajo de Fin de Master). Universidad de Granada. España.

Heid, M.K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En N. Bednarz, C. Kieran y Lee (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Dordrecht, Países Bajos: Kluver Academic Publishers.

Kaput, J. (1989) Linking representations in the systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1995) Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. En C. B. Lacampagne, W. Blair y J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 33-49). Washington, DC: US Department of Education.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K12 curriculum*. Darmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievenment in Mathematics and Sciencie.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, Blanton y Kaput (2004) NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 102–119). London: Murray.

Martinez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de investigación en psicología 9*(1),123-146.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ:

Lawrence Erl- baum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemática*. MEP. Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiañez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Granada, España: Atrio.

NCTM (1998). *Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft. Reston* (Virginia): NCTM

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática [Traducción de Manuel Fernández Reyes]*. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM.

Quinn M. (1988). *Qualitative Evaluation Methods*, Beverly Hills, CA: Sage Publications,. Inc.,

Radford, L.(2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, Mathematical Thinking and Learning, 5:1, 37-70, DOI: 10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM-Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rodríguez, M. (2016). *Manifestaciones de pensamiento funcional de alumnos de segundo de primaria en un juego de tarjetas*. (Trabajo de Fin de Grado). Universidad de Granada. España

Ruiz, J. (2012). *Metodología de la Investigación cualitativa. 5ta edición*. Universidad de Deusto, Bilbao. España.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. J., & Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades. *Algebra in the early grades*, 413-447.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Schliemann, A. Carraher, D. Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. Enseignement de l'algébre élémentaire, volume especial, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 107-122.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y *significado* de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2o de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergnaud, G. (1989). *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction á l'algébre. Construction des savoirs*. Colloque International Obstacle Epistémologique et conflict Socio–cognitif, CIRADE, Montreal.

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Índice de gráficos

Anexo 1: Cuestionario aplicado en la investigación

Alquiler de mesas y sillas
El papá de Esteban desea comprar sillas y mesas para hacer un negocio de alquiler. Según los cálculos debe comprar 4 sillas por cada mesa cuadrada pequeña que compre.

1. Complete la tabla con el número de sillas que se tienen que comprar de acuerdo con la cantidad de mesas. Agregue en la segunda columna que operación realizó para obtener el número de sillas

Número de Mesas cuadradas pequeñas	**Operación para calcular número de sillas**	**Número de sillas**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
10		

2. En la siguiente tabla invente una cantidad de Mesas cuadradas pequeñas y realice los cálculos correspondientes.

Número de Mesas cuadradas pequeñas	**Operaciones para calcular número de sillas**	**Número de sillas**

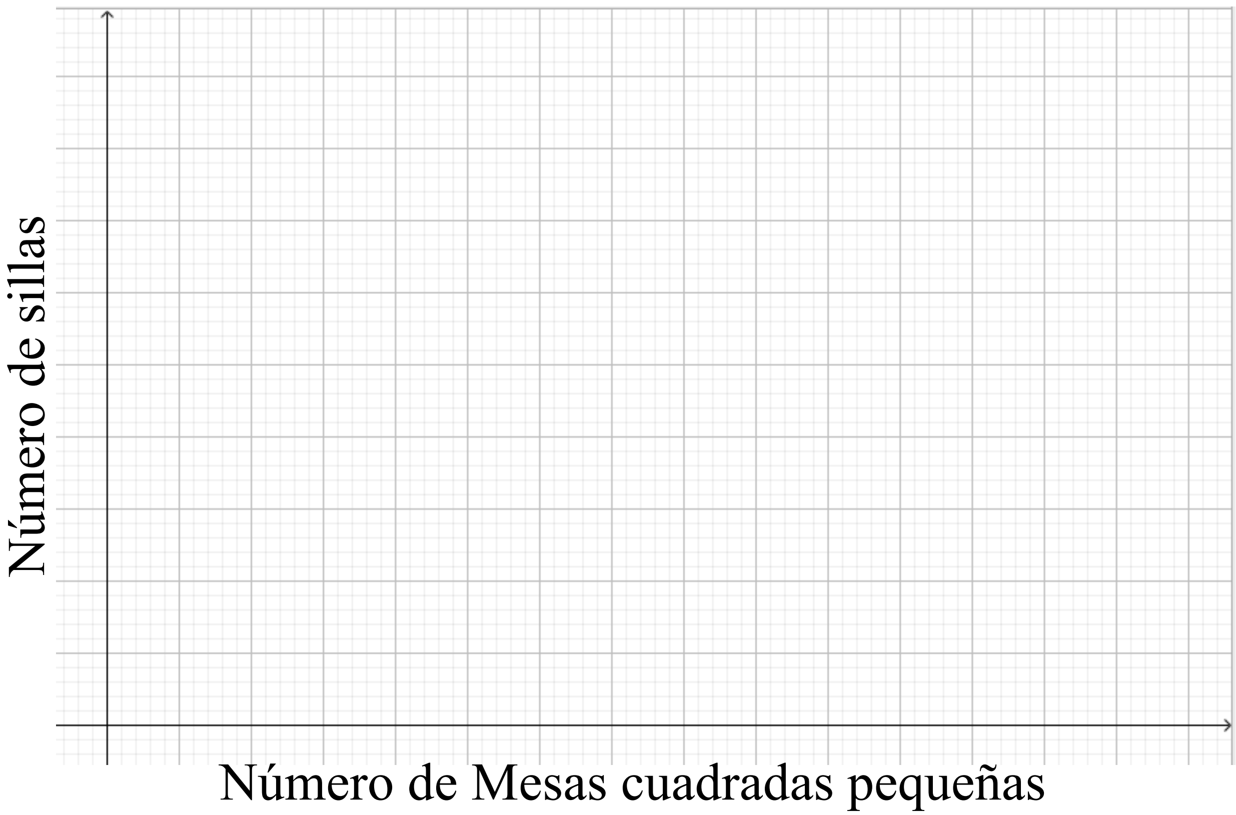
3. Observe los números que aparecen en la tercera columna. Escriba una característica común de estos números.

4. Podría explicarme ¿cómo sabe el papá de Esteban cual es la cantidad de sillas a comprar si él conoce el número de mesas?

5. En la siguiente tabla aparece alguna información sobre la cantidad de mesas y sillas posibles a comprar. Completa los espacios faltantes

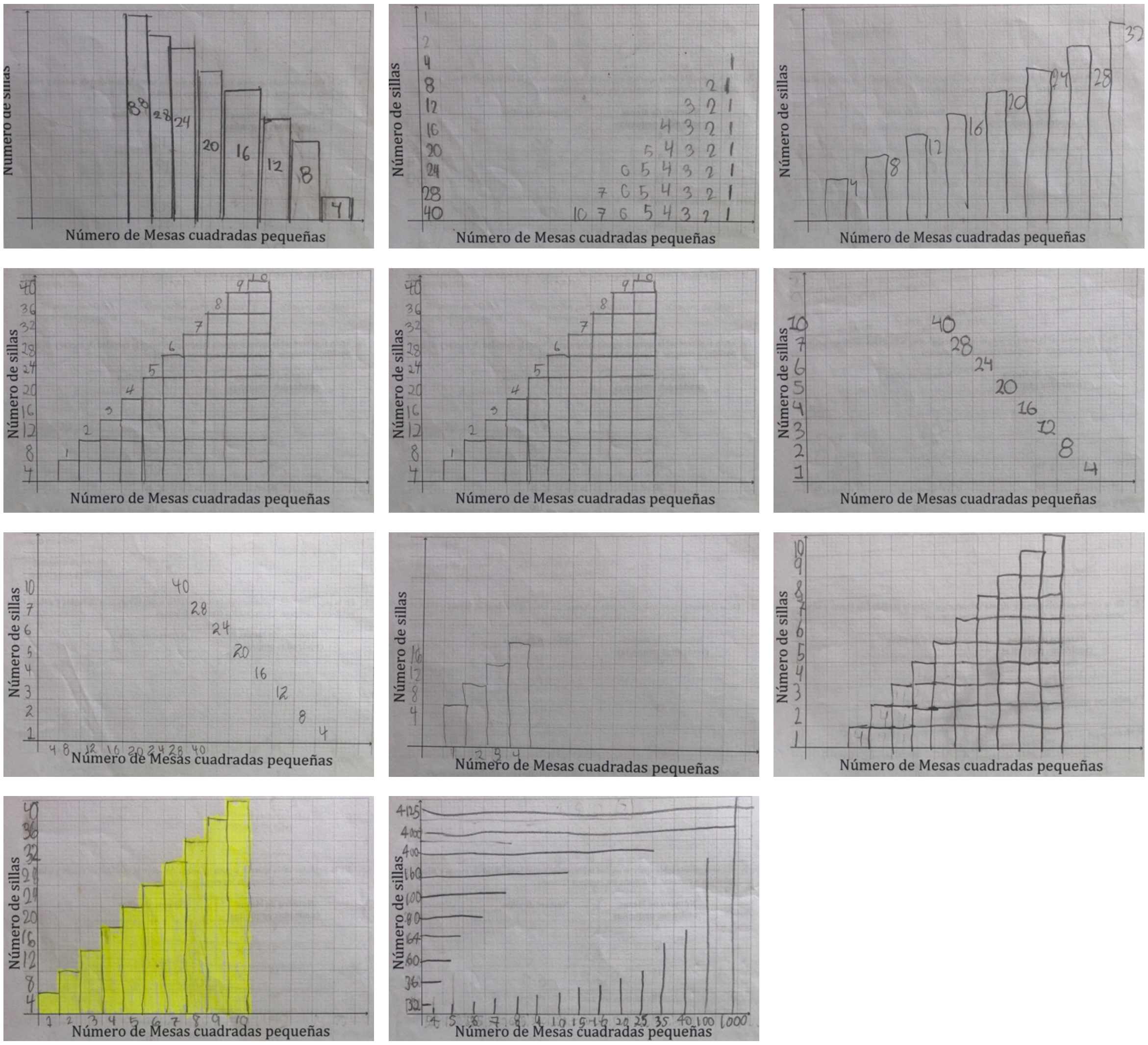
Número de Mesas cuadradas pequeñas	**Número de sillas**
8	
9	
15	
16	
20	
	100
	160
	400
1000	
M	
	X

6. Dibuja un gráfico para mostrar la relación que hay entre el número de Mesas cuadradas pequeñas y de sillas que necesitaría comprar el papá de Esteban.



7. Explica aquí el gráfico que has construido

Anexo 2: Gráficas realizadas por los estudiantes de cuarto nivel



Anexo 3: Gráficas realizadas por los estudiantes de séptimo nivel