UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Trabajo de Fin de Master

ANÁLISIS DE EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE 5º CURSO PRIMARIA

Presentado por
Dña. Karla Bastías Sepúlveda

Dirigido por el Doctor
D. Antonio Moreno Verdejo

Granada, 2016

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE 5º CURSO PRIMARIA.

Trabajo fin de master presentado por
Karla Natalia Bastías Sepúlveda
para la obtención del título de Máster en Didáctica de la Matemática

Dña. Karla Natalia Bastías Sepúlveda

Tutor
Doctor D. Antonio Moreno Verdejo

Granada, 2016

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

This study was developed within the Spanish project of Research and Development with reference code EDU2013-41632-P, financed by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness.

A mi Dios que me da todo y más…

y me ha enseñado que sus tiempos son perfectos.

A mis padres Manuel y Jacqueline, y mi hermano Matías

porque aún a la distancia me hacen sentir su Amor incondicional.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer al tutor de este trabajo, el Doctor Antonio Moreno Verdejo quien me ha guiado en este proceso con paciencia y entusiasmo.

Agradezco a los integrantes del proyecto de investigación en el cual se enmarca este estudio (EDU2013-41632-P). Específicamente, Antonio Moreno, María Cañadas, Marta Molina y Aurora del Río por liderar el diseño y recogida de información.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que han contribuido a mi formación profesional.

Gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), que mediante su Programa de Capital Humano Avanzado me ha otorgado la Beca de Magister en el extranjero para profesionales de la educación.

A Mery Salinas, porque durante este año lejos de nuestro país, ha sido mi principal apoyo en todo momento, como compañera y amiga.

A mis compañeros de doctorado por su disposición, en especial a Juan Luis Piñeiro, Eder Pinto y Rodolfo Morales.

A mi familia y amigos por apoyarme en la decisión de estudiar en este hermoso y lejano país, por su preocupación y apoyo constante.

INDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ANEXOS

PRESENTACIÓN

La presente investigación es un trabajo fin de máster elaborado dentro del programa de Máster de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, realizado en el curso académico 2015-2016 por la estudiante Karla Natalia Bastías Sepúlveda, bajo la tutoría del Doctor D. Antonio Moreno Verdejo.

El trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación “Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria como aproximación al pensamiento algebraico”.

Nuestro objetivo general es identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria.

Nuestra investigación forma parte de un experimento de enseñanza en *early algebra*. El *early algebra* es una línea actual de investigación en el campo de educación matemática, que respalda la introducción temprana del algebra en el currículo de educación infantil y primaria. Busca potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en forma progresiva, a través de la adaptación de las tareas propuestas a estudiantes. Nuestro estudio se sitúa en el pensamiento funcional, el cual trabaja la relación entre variables que establecen los estudiantes en funciones lineales.

Para finalizar, vamos a describir someramente la estructura de la memoria del estudio realizado, la cual se organiza en cinco capítulos que presentamos a continuación.

Dedicamos el primer capítulo al planteamiento del problema de estudio, la justificación profesional, curricular y de pertinencia de la investigación. Definimos los objetivos, principalmente el general, que se desglosa en tres objetivos específicos.

El segundo capítulo expone los antecedentes previos relacionados con el problema de investigación planteado y describe el análisis teórico realizado a través del marco teórico, donde definimos cada uno de los términos claves.

El marco metodológico se describe en el tercer capítulo, dando a conocer el tipo de investigación realizada, los sujetos, los instrumentos empleados y el proceso de recogida de datos.

En el cuarto capítulo presentamos el análisis y los resultados, información que se da a conocer a través del análisis cualitativo de los datos obtenidos a través de la aplicación del instrumento de recogida de información.

Finalizamos con el quinto capítulo dando a conocer las conclusiones finales de nuestra investigación, discutiendo el logro de los objetivos propuestos, confrontado con nuestro análisis teórico previo. En este apartado incluimos las aportaciones, limitaciones y líneas abiertas de la investigación.

CAPÍTULO I. El PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación que presentamos forma parte de un estudio de diseño realizado con estudiantes de quinto curso de educación primaria obligatoria, a través del análisis de una de cuatro sesiones en la cual se presentó una tarea de respuesta abierta que resuelven los alumnos en pequeños grupos. A través de esta tarea pretendemos que los estudiantes de 5º de primaria investigado, tengan un primer acercamiento a las nociones de funciones lineales y el uso de diferentes sistemas de representación (Moreno, del Río, Molina y Cañadas, 2015). Por lo tanto, el problema de investigación, se encuadra dentro de la propuesta de *early algebra*, específicamente, nuestro interés está centrado en el pensamiento funcional que manifiestan los estudiantes de dicho curso investigado.

1.1. Justificación del problema de investigación

A continuación expongo la justificación profesional, curricular y de la investigación, que me han llevado al planteamiento de este estudio como trabajo fin de máster.

1.1.1. Justificación profesional

Uno de los motivos es el interés como docente por las dificultades que presentan los estudiantes de primaria en matemáticas. Como profesora de esta asignatura en educación básica (Chile), he percibido que los estudiantes obtienen bajos resultados en las pruebas estandarizadas dirigidas a evaluar contenidos y habilidades del currículo vigente. A partir de estos resultados y siete años de experiencia en aula, ejecutando clases y observando el trabajo de los estudiantes, me he preguntado por qué el alumnado no logra mejoras permanentes y considerables en la asignatura, pese a las renovaciones curriculares y las políticas educativas que se han establecido en busca de la mejora de resultados.

Considero que como profesores de matemática una de las tareas que ha resultado compleja es el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático. El currículo chileno propone cuatro habilidades en educación básica: resolver problemas, modelar, representar, argumentar y comunicar (Mineduc, 2013).

Me interesa específicamente la habilidad de resolución de problemas. Creo que resulta complejo para los estudiantes relacionar números y operaciones con el contexto, hace que ellos deban aplicar formas de pensamiento que relacionen diversos elementos matemáticos. Por lo tanto, he considerado en los inicios de este máster abordar una temática relacionada con la resolución de problemas.

Durante la búsqueda de una temática que tuviera relación con mi área de interés, he conocido el proyecto de investigación de pensamiento funcional en primaria, propuesta que me ha parecido muy interesante y que cumple con mis requerimientos enfocados a las formas de pensamiento matemático de los estudiantes. Más tarde mi profesor tutor D. Antonio Moreno Verdejo me guío al estudio de las formas de pensamiento que tienen los estudiantes de primaria en situaciones funcionales, lo cual se encuentra relacionado con el primer tema de interés, la resolución de problemas.

1.1.2. Justificación curricular

Nuestro estudio se enmarca dentro de la propuesta curricular *early algebra,* enfoque que analiza como la aritmética se relaciona con el álgebra y se contrasta con el pre *algebra*, propuesta que ha prevalecido en el currículo, que trata la aritmética y el álgebra como disciplinas totalmente distintas y posicionadas en un orden particular (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011). Como diferencia, el *early algebra* se fundamenta en la búsqueda de una enseñanza profunda de la aritmética y de otros temas de la matemática en educación primaria.

En Estados Unidos el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) ha mostrado su apoyo a la propuesta de *early algebra* a través los Principios y Estándares para la Educación Matemática, en donde en uno de sus cinco bloques de contenidos incluye el álgebra, recomendando que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde la enseñanza preescolar en adelante, para ayudar a los alumnos a "construir una sólida base de compresión y experiencia, como preparación para un trabajo más complejo en álgebra en los niveles medios y en la escuela secundaria" (p. 39).

Este documento argumenta que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- *comprender patrones, relaciones y funciones;*
- *representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos;*
- *usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas;*
- *analizar el cambio en contextos diversos* (NCTM, 2000, p. 39).

Los resultados de investigaciones en álgebra temprana han preparado el camino para que los contenidos y las prácticas algebraicas sean introducidos en el currículo, durante las últimas décadas países como EE.UU, Australia, Canadá, Japón y Portugal, han hecho sugerencias en cambios curriculares que apoyen e incorporen el pensamiento algebraico en los primeros grados (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

En España, el documento curricular vigente para la educación primaria, aprobado por el R.D. 126/2014 de 28 de febrero a raíz de la entrada en vigor de la nueva ley de Educación L.O.M.C.E. ha organizado los contenidos en cinco bloques: procesos, métodos y actitudes en matemáticas, números, medida, geometría, estadística y probabilidad.

El primer bloque ha sido propuesto con la intención de que sea la columna vertebral y forme parte del quehacer diario para trabajar los demás bloques de contenidos, de esta forma se busca lograr que todo el alumnado, al acabar la educación primaria, sea capaz de “describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014, p. 19386-19387).

Los estándares de aprendizaje evaluables que se definen con respecto al criterio anterior son: (a) identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales y (b) realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014, p. 19388).

En este apartado queda explicito que el currículo hace énfasis en la importancia del primer bloque (procesos, métodos y actitudes en matemáticas), que manifiestan el interés de desarrollar la capacidad del alumnado de primaria en tareas que promuevan el pensamiento algebraico, aunque no incluye el álgebra como un bloque de contenido. Además, lo denomina como “columna vertebral” de todos los demás bloques de contenidos. Esta idea demuestra avances en el currículo con respecto a la importancia del álgebra desde los primeros cursos.

1.1.3. Justificación de la investigación

Fundamentamos esta investigación en la importancia e implicancia que tiene el *early algebra* para la educación matemática actual. Recientemente es tema de interés para diversos investigadores que han considerado esta propuesta en estudios realizados con alumnos de etapa preescolar y primaria, obteniendo diversos resultados con los cuales buscan contribuir a la educación, a través de la introducción del álgebra en los primeros grados. Con respecto a esta área de estudio Schliemann et al. (2011), plantean que "(…) busca fortalecer y profundizar el currículo a través de brindar ayuda a maestros y alumnos para que puedan representar y reflexionar sobre relaciones entre conjuntos de números, en lugar de enfocarse meramente al cálculo" (p. 16).

Este trabajo fin de máster pretende contribuir al pensamiento algebraico, específicamente al enfoque pensamiento funcional. Buscamos aportar nuevas evidencias de la capacidad de los niños de primaria para movilizar este tipo de pensamiento, mediante el desarrollo de una tarea "problema de las camisetas" que involucra una función lineal, que puede ser representada como $y = 3x$.

Describiremos el pensamiento funcional de los alumnos de 5º curso de primaria investigado, enfocando nuestro análisis al uso de relaciones funcionales en un contexto determinado, las formas en que expresan estas relaciones, específicamente sistemas de representación y, el significado que atribuyen los estudiantes a la noción de variable en este enfoque.

En el análisis bibliográfico, los autores dan a conocer diversas ideas que enfatizan la importancia del pensamiento funcional dentro del álgebra temprana. Como indica los principios y estándares (NCTM 2000) el estudio de las funciones debe ser tratado en sentido longitudinal y en toda su riqueza a partir de la escuela primaria temprana.

En el grupo de investigación "Didáctica de la matemática. Pensamiento numérico", se han realizado estudios en el campo del álgebra. A continuación damos a conocer algunos ejemplos de investigaciones que se relacionan con el pensamiento funcional:

Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. Trabajo Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Jaldo, P. (2015) Caracterización de la toma de decisiones de estudiantes de 5º de educación primaria en situaciones en las que interviene el pensamiento funcional.

Trabajo Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización. Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013a). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación Primaria. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Yañez, C. (2015). Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria. Trabajo Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Pinto, E. (2016). Relaciones Funcionales, Sistemas de Representación y generalización en el Estudiantes de tercero de primaria. Trabajo Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

1.2. Objetivos de la investigación

A partir del planteamiento y la justificación del estudio en cuestión se han planteado los siguientes objetivos.

Objetivo General

El objetivo general de esta investigación es identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria.

Objetivos Específicos

Del objetivo general enunciado anteriormente se desprenden tres objetivos específicos:

1. Analizar el uso de las representaciones en el desarrollo de una tarea sobre pensamiento funcional.
2. Identificar las principales relaciones entre variable establecida por los estudiantes de 5º de primaria investigado.
3. Estudiar el papel atribuido a la variable por los estudiantes de 5º de primaria investigado.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Comenzamos dando a conocer el marco teórico que sustenta nuestro estudio, el cual ha sido definido a través del análisis de nociones claves para el desarrollo de este trabajo. Posteriormente se darán a conocer los antecedentes, a través de la descripción de algunas investigaciones previas, nacionales e internacionales relacionadas con nuestro tema de investigación, las cuales han sido referencia para nuestro trabajo.

2.1. Definición de pensamiento funcional

A partir del pensamiento algebraico surge la propuesta *early algebra* que busca implicar la enseñanza del álgebra en los primeros niveles educativos, es decir, promueve la integración del álgebra en el currículo de educación primaria. La propuesta *early algebra* parte de la evidencia en diversos estudios que han demostrado que los niños de educación primaria tienen capacidades innatas para realizar pensamiento algebraico, así como la consideración de una amplia concepción del álgebra y del pensamiento algebraico, no restringida al uso de simbolismos (Molina, 2009 citado en Cañadas et al., 2016, p. 210).

El álgebra temprana implica el conocimiento y el pensamiento algebraico, las representaciones y las técnicas de los jóvenes estudiantes, las cuales pueden ser vistas como poco comunes en sus inicios en la resolución de problemas, si son comparadas con el uso de notaciones algebraicas de estudiantes más avanzados. El *early algebra* no pretende estudiar el álgebra después de la aritmética, como es el caso de foco pre algebra, ni la aritmética antes que el álgebra. Debido a que este principio puede avanzar y ser nutrido siempre que exista aritmética, ya que, la aritmética es inherente al álgebra. Este enfoque identifica el inicio del pensamiento algebraico a través de la formulación de operaciones y relaciones, específicamente relaciones funcionales (Carraher y Schliemann, en prensa).

Molina (2009) sostiene que esta propuesta se presenta como una investigación de gran riqueza por la variedad de cuestiones a explorar, en relación con la integración del álgebra en el currículo de los primeros cursos, por la influencia que tendría este cambio curricular en la educación secundaria, además de su potencial al ser considerada en los planes de formación de maestros de educación secundaria. La propuesta de la algebrización del currículo matemático escolar permite organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra formal y de esta forma enriquecer la enseñanza de las matemáticas, ayudando al logro del aprendizaje con comprensión.

Con respecto a la inclusión del álgebra en el currículo de educación primaria, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, (2014) han definido dos niveles primarios de algebrización de la práctica matemática, los cuales han llamado niveles de razonamiento proto-algebraico, niveles que partes desde un nivel 0, en el cual el razonamiento algebraico es ausente, y llegan a un nivel 3, en que la actividad matemática se considera propiamente algebraica. Los autores proponen como parte esencial la actividad que se hace con los instrumentos (variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones) de modelización matemática de problemas derivados de la propia matemática o de toda índole.

En la preparación para el álgebra, el proceso de construir, expresar y justificar generalizaciones no debería tener interrupciones. Este proceso debiera comenzar al inicio de la educación formal, y no posponerlo para cursos más avanzados para los que los niños de primaria se "prepararon" a través de un enfoque singular y miope en la aritmética (Blanton y Kaput, 2011).

La generalización matemática es comprendida como un enunciado, si una propiedad o técnica es efectiva para un amplio conjunto de objetos o situaciones matemáticas, la que se considera como verdadera si está apoyada por una prueba válida.

Para comprender una afirmación sobre “x”, se deben considerar los motivos por los cuales se realiza la generalización, los que difieren considerablemente, en las matemáticas avanzadas y las matemáticas en la educación tempranas. En esta última, no se puede ignorar aspectos psicológico del alumno, no sólo se debe considerar cómo los estudiantes hacen uso de una presentación, la notación convencional y técnicas, sino también la forma en que representan y razonan sobre las matemáticas (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008).

Los autores antes mencionado, proponen que los estudiantes adquieran un aprendizaje con comprensión, como justificación principal de la promoción del álgebra en los primeros cursos de primaria. El *early algebra* ofrece las herramientas que pueden llevar a enriquecer la enseñanza de las matemáticas, tanto en los grados primarios como en los grados posteriores.

Existen diversos modos de pensamiento propios del algebra, cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional *early algebra*.

El pensamiento funcional ha sido definido por diversos autores, quienes han demostrado interés en esta temática. Smith (2008) sostiene que el pensamiento funcional es el pensamiento representacional que estudia la relación entre dos o más cantidades variables, particularmente los tipos de pensamiento que van de relaciones específicas a generalizaciones. Además plantea que, el pensamiento algebraico del pensamiento funcional se produce cuando los niños idean un sistema de representación apropiado para representar una generalización de una relación entre cantidades variables. Por lo tanto, el pensamiento funcional tiene como interés principal las actividades mentales, que son los procesos por los cuales el registro de los valores de correspondencia de las cantidades, regularmente de tabla, gráfica o icónica, se transforma en una representación generalizada de la relación funcional y la forma en que el sujeto crea una certeza matemática de esta relación generalizada.

El pensamiento funcional es un proceso cognitivo comprendido como “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). El trabajo con el pensamiento funcional permite que los estudiantes sean capaces de detectar “similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa” (Fuentes, 2014, p. 9).

Rico (2006), ha descrito que las relaciones matemáticas tienen usualmente la forma de ecuaciones o de desigualdades, pero también se presentan relaciones de naturaleza más general, entre las que se encuentran el pensamiento funcional, el cual define como: pensar de y acerca de relaciones. Dichas relaciones pueden representarse mediante diversos sistemas, que incluyen símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos.

Blanton et al. (2011) exponen dos formas principales acerca de cómo el pensamiento funcional desde cursos de primaria puede potenciar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento matemático en grados posteriores:

- el desarrollo herramientas de representación y lingüísticas críticos para analizar, describir y simbolizar patrones y relaciones.
- un continuo de desarrollo matemático mediante el cual los símbolos y herramientas opacos pueden ser transformados en objetos transparentes de pensamiento funcional.

Con relación a la capacidad que poseen los niños para el pensamiento funcional, los autores antes mencionados, plantean que logran identificar y expresar las relaciones funcionales en formas simbólicas progresivamente y que uno de los principales recursos para este logro son las instrucciones que entregan los profesores. La creación de un problema es un proceso individual que se desarrolla en un contexto social, esta actividad se transforma en un problema cuando involucra una situación de función. Por tanto, es una actividad de construcción individual, que debe contar con la participación del profesor, quien a través de la creación de actividades, la descripción de cantidades variables, planteamiento de preguntas apropiadas y promoviendo la participar en el aula, proporciona la oportunidad a los estudiantes de participar en instancias de desarrollo del pensamiento funcional (Smith, 2008).

Además, puede servir de andamiaje en la instrucción comenzando con los muy primeros grados, las diversas representaciones utilizadas por los estudiantes, el avance del lenguaje matemático a su descripción en las relaciones funcionales, las formas de controlar y organizar datos, las operaciones matemáticas empleadas para interpretar las relaciones funcionales y cómo se expresan covariación y la correspondencia entre las cantidades (Blanton y Kaput, 2004, 2011). A partir del pensamiento funcional se aprovecha el potencial que proporciona este contenido tanto en los primeros niveles educativos como en los niveles sucesivos, potenciando las capacidades de los estudiantes y que les sean útiles para razonamiento en general y el matemático en particular (Cañadas y Molina, 2016).

2.2. Noción de función

Como se planteó anteriormente, la función entendida como una relación de dependencia entre cantidades variables, es el concepto matemático que emplea el pensamiento funcional. A continuación se realizará un análisis del concepto de función, exponiendo las siguientes ideas:

- Función como un concepto histórico.
- Función como concepto matemático.

2.2.1. Análisis de la función como un concepto histórico

Alexándrova (2015), define el concepto de función desde una perspectiva histórica en donde relaciona la concepción de función de diversos autores. Descartes y Fermat (1937), a partir de la geometría analítica, se forman la idea de una ecuación que relaciona x e y. Como término matemático, la palabra función aparece en los manuscritos de Leibniz a partir de 1673, en donde una función no era tratada como una variable independiente de otra. En 1718 J. Bernoulli definió una función como una variable precisada por una expresión analítica formada por la variable x y cantidades constantes. De este modo, el concepto se relaciona con una formula y no con una línea. En 1676, Newton llamaba a las funciones ordenadas y también se refería a ellas como expresiones literales. En 1748, Euler definió una función como una dependencia arbitraria de una cantidad respecto a otra, y generalizó su definición a cantidades dependientes de varias variables. Finalmente, la definición de función fue introducida por Dedekind-Peano como aplicación de un conjunto sobre otro. Las notaciones de función f () se comenzó a emplear por Euler en 1734 (p.132).

Una de las definiciones moderna es propuesta por Dirichlet-Bourbaki, quien plantea la siguiente notación:

> *Una función es una relación que asocia de forma única los miembros de un grupo con miembros de otro grupo. Más formalmente, una función de A a B es un objeto f tal que cada una en A está asociado únicamente a un objeto (a) f en B. Una función es, por tanto, un muchos-a-uno (o, a veces uno-a-uno) relación. El conjunto A de los valores en los que se define una función se llama su dominio, mientras que el conjunto f (A) subgrupo B de los valores que la función puede producir se llama su gama. En este caso, el conjunto B se llama el codominio de f.* (Weisstein de 1999, viz., Function)

2.2.2. Función como concepto matemático

La función como objeto estudio es definida como la relación matemática entre dos o más variables, existen funciones definidas en forma experimental, que relacionan una variable independiente (x) con una variable dependiente (y), representada por la simbología $y=f(x)$. Este tipo de función propone, que por cada valor que reciba x se obtendrá un nuevo valor para la función y (Martínez, 2015). El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x recibe el nombre de dominio de una función y los valores que obtiene la función y se denomina recorrido, imagen o rango de una función.

Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed (2012), definen una función como un objeto matemático, que puede representarse de diversas formas, que entregan una visión distinta de este objeto (cadenas de flechas, tablas, gráficos, fórmulas y frases). Existen tareas que promueven un punto de vista más estructural de una función, como lo son las familias de funciones, comparación de funciones y la función de integración. Los autores también plantean una noción operativa del concepto; la función es una asignación de entrada y salida, que ayuda a organizar y llevar a cabo un proceso de cálculo. El concepto de función ha obtenido un tiempo establecido en la historia, y puede facilitar la tarea de generalización matemática, aún más, de lo que puede resultar con el trabajo con patrones. También se pueden involucrar en tareas en donde se proponga a los estudiantes realizar conjeturas (Carraher et al., 2008).

Una visión importante es la comprensión del pensamiento funcional con respecto al concepto de función. Carraher, Schliemann y Brizuela (2000, 2001) sostienen que las operaciones aritméticas deben ser tratadas como funciones en los primeros cursos de primaria, en el sentido que la aritmética procede en gran parte del álgebra. Por ejemplo, la expresión "+ 3" puede representar una operación para proceder sobre un número particular y una relación entre un conjunto de valores de entrada y un conjunto de valores de salida, debido a que la notación funcional *"$n \rightarrow n +3$"* puede ser utilizada para relacionar dos variables interdependientes *n* y *n* más tres. Los autores afirman su idea planteando que "la aritmética no involucra solo hechos numéricos, sino también los patrones generales que subyacen a los hechos" (p. 131). Por lo tanto, las relaciones y funciones tienen el potencial para la integración de los temas a través del currículo, debido a que las operaciones de la aritmética son el primer ejemplo de funciones (Carraher et al., en prensa).

2.3. Caracterización del pensamiento funcional

A continuación describiremos nociones claves en nuestro análisis teórico, los cuales nos llevan a visualizar con mayor profundidad y claridad el enfoque pensamiento funcional.

- Noción de variable
- Perspectiva cognitiva del pensamiento funcional
- Representación de una relación funcional
- Sistemas de representación

2.3.1. Noción de variable

Un elemento central en el aprendizaje del álgebra es la noción de variable, y por lo tanto es fundamental en la comprensión de relaciones funcional. "Variable se refiere a la notación simbólica como una herramienta lingüística para representar ideas matemáticas en forma sucinta e incluye los diferentes roles que juega la variable en diferentes contextos matemáticos" (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011, citado en Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler y Kim, 2015, p. 43).

Al respecto Carraher et al. (2008) afirman que:

> *La perspectiva funcional amplía el significado de las expresiones algebraicas mediante el tratamiento "x" como una variable, es decir, como un objeto que puede variar en su valor. Se anima a los estudiantes a pasar de pensar acerca de las operaciones con números específicos a las relaciones entre las variables* (p. 7).

La noción de variable se puede visualizar como algo estático o dinámico, "la interpretación estática hace hincapié en una variable como una herramienta simbólica para la generalización o para la descripción de los patrones; la dinámica se centra en cómo las variaciones en una cantidad se refieren a variaciones en otras" (Janvier, 1981, citado en Ayalon, Watson, y Lerman, 2015, p. 5)

Con respecto a la interpretación de una variable como una herramienta simbólica, Blanton et al. (2011) plantean la relevancia que tiene la transición del lenguaje natural a los sistemas de notación simbólicos en el álgebra temprana. Sugieren que el aprendizaje del uso de símbolos como variables, promueve el desarrollo e implica una etapa pseudo-conceptual de la formación de conceptos en el desarrollo del sentido de los símbolos.

La visualización dinámica de una variable, expresa esta noción como una cantidad que puede tomar diversos valores dentro de un conjunto determinado, al referirse a una función, se reconoce como una cantidad desconocida, una función puede tener dos o más variables, en una función con dos variables, los valores de la variable dependiente penden de los valores de la variable independiente (Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

Investigaciones en educación matemática que estudian el pensamiento funcional de los estudiantes, han arrojado nuevas evidencias de que la notación de variable debería estar al alcance de alumnos de grados inferiores de educación primaria, debido que la integración del álgebra en el currículo de matemáticas a partir de los primeros grados, manifestaría un impacto positivo en la comprensión de los estudiantes en cursos superiores (e. g. Blanton et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Murphy Gardiner, 2015; Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey, 2015; Carraher et al., en prensa).

Blanton, et al. (2015), proponen que un enfoque integral daría realce a las funciones añadidas de las variables, incluyendo la variable como cantidad, como el número generalizado y además como parámetro.

Carraher et al. (en prensa), plantean la importancia de la distinción entre dos interpretaciones que los estudiantes hacen de una variable. La primera es considerar la variable como un número secreto o misterioso, es decir, un número desconocido. Una interpretación distinta y la que se espera de los estudiantes, es considerar la variable como un marcador de posición para cada conjunto numérico (par ordenado). Los autores además exponen que estas relaciones funcionales deben ser abordadas antes de trabajar la resolución de ecuaciones lineales, debido a que son el fundamento principal de álgebra temprana. Las relaciones están más de acuerdo con el desarrollo temprano de la noción de una variable como un marcador de posición para cada elemento de un conjunto de números.

Brizuela, Blanton, Gardiner, et al. (2015), a través de su investigación en donde utilizaron la idea de espacio semántico de Sfard (2000), noción que “reconoce que las relaciones entre símbolos y significados no son fijas ni unitarias, sino que se desarrollan y cambian con el paso del tiempo y según los contextos” (p. 152), han demostrado que una estudiante, en una primera fase, ha utilizado letras para representar incógnitas fijas, cantidades con valores elegidos arbitrariamente y cantidades con un variación finita.

Luego de recibir intervención de la entrevistadora en las etapas media y final del estudio, la estudiante puso en evidencia su capacidad para comprender que las letras representaban cantidades variables, lo que muestra que las comprensiones de la notación de variables no son fijas sino que varían en intervalos de tiempo, cortos como largos. A través de esta investigación, los autores han supuesto que el estudio tardío del álgebra y de las variables, centrado en algoritmos, podría ser una contribución a las dificultades con las que los estudiantes se enfrentan a cursos mayores, en la comprensión de las variables y su notación. En base a esta conjetura proponen la presentación más temprana de representaciones y conceptos algebraicos por medio de enfoques basados en la búsqueda del sentido de las ideas y representaciones.

Brizuela, Blanton, Sawrey, et al. (2015) en su estudio, han identificado que los niños de primer grado pueden desarrollar una variedad de entendimientos sobre la notación variable. Los acuerdos que observaron en estos niños incluyen que la notación de variable puede: (a) significar una etiqueta u objeto, (b) puede representar una cantidad indeterminada, (c) las relaciones cuantitativas pueden expresarse a través de las relaciones ordinales entre las letras en el alfabeto; y (d) que la inclusión de letras y números en una sola ecuación debe ser evitado. Además, los niños fueron capaces de actuar en una expresión matemática que incluye la notación variable como un objeto matemático.

Según antecedentes el conocimiento de la noción de variable es trascendente, es el principal elemento de una función y por lo tanto, se requiere que los estudiantes hagan uso de esta notación en los cursos elementales para lograr establecer una relación funcional. Además, la necesidad de reconocer múltiples nociones con respecto a la comprensión de la variable, en la educación temprana. En consecuencia "(…) la notación de variables tiene que ser parte integral de las experiencias tempranas del álgebra como una herramienta mediante la cual los niños aprenden a expresar y reflexionar sobre los significados" (Brizuela, Blanton, Sawrey, et al., 2015, p. 37).

2.3.2. Perspectiva cognitiva del pensamiento funcional

El pensamiento funcional implica actividades mentales como procesos, a través de las cuales el sujeto convierte el registro de una relación entre cantidades variables en una representación generalizada y crea una certeza matemática de la misma relación (Smith, 2008). A partir de la interpretación y construcción de relaciones funcionales, Confrey y Smith (1994), distinguen dos enfoques, la covariación y la correspondencia, que surgen a partir de la observación de los métodos que son utilizados por los estudiantes para la construcción de una relación entre variables. Smith (2008) incorpora a esta dualidad otra forma de describir el pensamiento funcional de los estudiantes, el análisis de patrón recursivo.

El enfoque de correspondencia contribuyendo a la comprensión de una relación entre dos conjuntos numéricos, donde se construye inicialmente una regla que permite determinar un valor de y único de cualquier valor de x dado. De esta manera se crea una correspondencia entre x e y. Este tipo de relación entre variables propone la notación algebraica: $y = f(x)$. El registro de los valores de correspondencia se hace usualmente en tablas, gráficos o de forma icónica (Confrey et al., 1994).

"En el enfoque covariacional, la atención se centra en los cambios en las variables individuales" (Smith, 2008, p. 147), por lo tanto, una relación de covariación implica la comprensión de cómo varían los valores de la variable dependiente en función de cómo varían, los valores de la variable independiente. Este es un proceso dinámico, que en un principio puede ser observado como fenomenológico, mientras se establece el conjunto de dominio de la variable independiente, se produce el conjunto de rango de la variable dependiente. Además se destacan como representaciones útiles para el estudio de la covariación el uso de tablas y gráficos (Doorman, et al., 2012).

Los estudiantes hallan un enfoque de covarianza más fácil e intuitiva, mientras más aplicaciones realicen, y del mismo modo, a través de la experiencia pueden lograr una codificación algebraica de la regla para una función. "Ha sido nuestra experiencia que el enfoque de covariación es elegido con mayor frecuencia por los estudiantes, en particular cuando se crea la primera variable como una variable de indexación" (Smith, 2008, p. 147).

El desafío que implica el paso de covariación al enfoque de correspondencia es el carácter distintivo de una covariación versus una correspondencia (Confrey et al., 1994, p.138).

Smith (2008, p. 147) propone la siguiente tabla para la distinción de estos enfoques:

Tabla 1. *Variación entre dos cantidades.*

X	Y
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

En esta tabla, la relación entre *x* e *y* se puede representar como, dos veces *x* más uno o algebraicamente como: $y = 2x + 1$. Por lo tanto, se corresponden los pares correspondientes de las variables. En el caso de la covariación, la descripción del ejemplo de la tabla puede ser "*cuando x aumenta en 1, y aumenta en 2"*, es decir la atención está dirigida a los cambios en las variables individuales.

El enfoque covariación difiere del enfoque de la correspondencia, principalmente en su definición abstracta que enfatiza la regla que indica de manera explícita (notación algebraica) y en una direccionalidad de *x* a *f (x).* La covariación ofrece una idea en donde la construcción del dominio se establece como una estructura matemática ordenada, el carácter operativo del dominio y del recorrido (ambos valores que ven en escala) se vuelven esenciales, su vínculo se torna relacional y espacial, pues la regla se vuelve una característica provenida de las acciones reiteradas que crea la base para las operaciones (Confrey y Smith, 1995). La diferencia radica, en que la relación de correspondencia enfatiza que el alumno logre identificar la notación algebraica convencional, mientras que el enfoque de la covariación sitúa su atención en los cambios correspondientes en las variables individuales (Smith, 2008).

El patrón recursivo se obtiene a medida en que los valores descienden en una tabla, y el patrón observado por los estudiantes se presentara en forma reiterada. Es decir, a medida que se genera una secuencia de valores, los estudiantes podrán obtener el patrón recurrente. "Tenga en cuenta que este tipo de razonamiento depende de la forma de la inscripción y, con inscripciones gráficas, el razonamiento puede adoptar formas muy diversas" (Smith, 2008, p.147). Carraher et al. (2008) hacen referencia a esta forma de describir el pensamiento funcional y se basan en lo dicho por Cuoco (1990), quien plantea esta forma, como expresiones recursivas o iterativas de una función, que consiste en dos expresiones, una para una condición inicial y otra para los demás casos. La fórmula que representa esta expresión es: $f(0)=7$ y $f(n)=f(n-1)+3$ donde $x \in \mathbb{N}_0$.

Por tanto, esta variante comienza en $f(0)$ y termina cuando llega a la expresión deseada $f(n)$, es decir, se logra obtener la expresión o patrón recursivo. Los autores exponen que esta forma es menos común en las matemáticas y que este proceso puede resultar tedioso para los estudiantes cuando el valor de n es un número muy grande.

El trabajo con el álgebra temprana tiene como interés que los estudiantes puedan, con el tiempo, expresar una relación de correspondencia a través de una ecuación, pero el interés principal está en cómo utilizan uno de los enfoques presentados para la construcción de una relación entre variables. Para una relación de correspondencia la creación de un registro en una tabla en donde se coloquen dos valores en una misma fila, indica que esas dos cantidades son los correspondientes miembros de dos conjuntos, esto sería suficiente para construir una función, pero el pensamiento funcional da énfasis a la construcción de una relación entre variables. Parte importante de este proceso es que se establecer la construcción de una certeza en esa relación, más allá de una simple designación de correspondencia (Smith, 2008).

A través, de la conceptualización realizada anteriormente, es importante distinguir las diferencias y/o posibilidades que se aprecian entre las relaciones funcionales.

La expresión recursiva puede resultar facilitadora para los estudiantes, debido a que encuentran el patrón de la variable dependiente, a medida que los números descienden en la tabla. Pero en la correspondencia y covariación, los estudiantes estarían impulsados a construir una certeza matemática entre los valores de la variable dependiente con la independiente, debido a que establecen una relación inicial.

2.3.3. Representación de una relación funcional

El pensamiento funcional debe implicar un sistema de representación apropiado para representar la generalización de una relación entre cantidades variables. Para determinar qué entenderemos por representación en nuestro trabajo, presentaremos los múltiples significados de este concepto aportados por diversos autores.

Rico (2009) en un análisis exhaustivo de la noción de representación, sostiene que:

> *Representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia. La representación supone en este caso una dualidad representante-representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente, a lo cual la representación sustituye. En la noción de representación subyace el supuesto de un algo objetual que se representa* (p. 6).

Castro, Rico y Romero (1997) afirman que el concepto de representación considera la relación de dos entidades relacionadas, pero que funcionalmente se encuentran separadas, "uno de estos entes se denomina el objeto representante (o representación), el otro es el objeto representado. También hay implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados" (p. 362).

Los mismos autores enfatizan en que la noción de representación debería describir cinco entidades:

> *1) los objetos representados;*
> *2) 1os objetos representantes;*
> *3) qué aspectos del mundo representado se representan;*
> *4) qué aspectos del mundo representante realizan la representación;*
> *5) la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos* (p. 362).

Castro y Castro (1997) definen representaciones como "las nociones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediantes las que se expresan los procesos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96). Según los autores la definición antes descrita, corresponde a una representación de tipo externa, pues tendría un diseño físico tangible, aunque pueda adquirir un nivel de abstracción superior, a través de este tipo de representaciones y las operaciones adecuadas damos a conocer nuestros conocimientos matemáticos.

Las representaciones internas se producen cuando requerimos pensar sobre "tales objetos", caso en el cual construimos imágenes mentales. "El término también describe la relación semiótica entre producciones externas y las ideas matemáticas internas que se dice que representan" (Goldin, 2008, p. 409).

Estudios realizados dan a conocer el interés de los investigadores de comprender el uso de las representaciones del alumnado. Castro y Castro (1997) afirman, que los estudiantes deben recibir ayuda en el enriquecimiento de sus expresiones internas, para que consigan relacionar de forma eficiente los significados oportunos de los objetos mentales que realizan y construyen, logrando controlar el uso de las representaciones externas.

No existe una representación que logre vaciar totalmente la complejidad de relaciones de cada concepto matemático interno, cada formas de representar una misma noción matemática entrega una caracterización distinta de aquella noción, por lo tanto esta idea nos dirige a una noción más amplia, es decir un sistema de representación, debido a que el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que admiten representar una estructura matemática, han de cumplir con un carácter sistémico (Castro y Castro, 1997).

Además, desde una perspectiva cognitiva para que se logre la total comprensión de un concepto o estructura matemática, se requiere del uso y juego combinado de distintos sistemas de representación, donde cada uno de estos modos, en conjuntos con sus reglas presentan una interpretación distinta de cada concepto (Rico, 2009).

Estos sistemas de representación progresan, a partir de los sistemas que previamente han sido desarrollados, los cuales actúan como andamios o modelos para el progreso de nuevos sistemas, haciendo mención a la relación que representa entre las configuraciones en el nuevo sistema y sus significados en el sistema anterior (Goldin, 2008).

Con respecto a el pensamiento funcional Cañadas, Brizuela, et al. (2016), afirman que los estudiantes deben tener acceso a todas las formas de representación de una relación funcional (incluyendo la notación de variable); representación a través de fórmulas como variables, como la noción $y=2x$, uso de lenguaje natural, por ejemplo "doblando *x*" o "añadir el mismo número así mismo" expresión verbal que representaría la notación anterior y las representaciones pictóricas que pueden ser usadas en algunos contextos, para lograr el desarrollo de una comprensión significativa de las relaciones funcionales. Es una parte trascendental en el *early algebra* la transición del lenguaje natural a los sistemas de notación simbólica, el uso de símbolos como variables promueve el desarrollo que se antepone al aprendizaje y que involucra una etapa pseudo-conceptual de la creación de conceptos en el desarrollo del sentido de los símbolos por parte de los estudiantes (Blanton et al., 2011). "(…) alentar a los estudiantes para crear diversas formas de sus registros puede facilitar su participación en el pensamiento funcional, donde se produce la diversidad tanto dentro como entre los estudiantes" (Smith, 2008, p. 146).

Los resultados de estudios, dan cuenta que en el inicio de la educación formal en los primeros grados, el uso de las diversas representaciones de funciones puede servir de andamiaje, el avance del lenguaje matemático en la descripción de relaciones funcionales, desarrollo de formas de controlar y organizar datos, interpretación de relaciones funcionales a través del uso de operaciones matemáticas, formulación de relaciones de covariación y correspondencia entre cantidades, lo que describe que el pensamiento funcional de los estudiantes podría progresar (Blanton, et al., 2004).

Smith (2008), indica que luego de identificar en una situación funcional como dos o más cantidades varían, se debe crear un registro de la relación entre las variables en un sistemas de representación (tabla, gráfica o icónica), lo cual permitiría reconocer el patrón y certeza de dicha relación.

2.3.4. Sistemas de representación

En nuestro estudio, para el análisis de datos en el capítulo IV utilizaremos la clasificación de los tipos de representación para el pensamiento funcional propuesta por Merino (2012), la cual, es según antecedentes, la primera investigación en esta temática realizada en España. El autor partió de la clasificación establecida por Kolloffel, Eysink, De Jong y Wilhelm (2009) para otros contenidos matemáticos, la cual más tarde fue restructurada por Cañadas y Figueiras (2011).

A continuación se presentan y describen los sistemas de representación expuestos por Merino (2012):

> *Verbal: Se sirven del lenguaje natural para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2007).*
> *Tabular: La RAE (2001), define tabla como un "cuadro o catálogo de números de especie determinada, dispuestos en forma adecuada para facilitar los cálculos". Las tablas toman parte en el campo de las representaciones en el contexto del pensamiento funcional. Brizuela y Roth (2001) lo ponen de manifiesto y estudian*

los distintos modos en que los estudiantes representan información de problemas en forma de tablas de producción propia.
Nos referimos aquí a la representación tabular como aquella en la que los alumnos se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.
Pictórica: Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Caña23qdas y Figueras, 2007).
Simbólica: Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8).
Distinguimos dentro de las representaciones simbólicas dos subtipos: numéricas y algebraicas.
***Numérica:** Se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cómputo.*
***Algebraica:** Se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Son las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción en los estudiantes.*
Múltiples: Van Somersen (1998), citado por (Cañadas, Castro y Castro, 2011) consideran las representaciones múltiples como aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación de los definidos en este trabajo (p. 21-22).

2.4. Antecedentes

En este apartado describimos antecedentes de trabajos relacionados con el pensamiento funcional y los elementos principales que se relacionan con nuestro tema de interés: variables, relaciones entre variables, patrón recursivo, covariación, correspondencia y representación. Partimos de investigaciones que describen el pensamiento funcional como un elemento fundamental dentro del pensamiento algebraico, para luego centrarnos en estudios que han obtenido resultados interesantes acerca de los elementos principales mencionados anteriormente. Además, describimos un estudio relacionado con la formación de profesores, del cual destacamos la importancia del rol que cumplen los educadores en el trabajo escolar de este tema (pensamiento funcional).

Durante las últimas décadas el pensamiento algebraico se ha convertido en parte importante de las ideas sobre el pensamiento matemático en los primeros grados. Kaput (2008), nos presenta el pensamiento funcional, como una hebra clave del pensamiento algebraico. Warren, Cooper y Cordero, (2006), en sus estudios sobre este tipo de pensamiento representacional, han indagado en las construcción de representaciones mentales con el fin de explorar el uso de tablas de funciones, centrándose en la relación entre los números de entrada y salida con el fin de extraer la naturaleza algebraica de la aritmética en cuestión. Sus resultados indican que los estudiantes de primaria utilizan el pensamiento funcional en el desarrollo de generalizaciones algebraicas. Además, pueden comunicar su pensamiento de forma verbal y simbólica, lo que sugiere que el desarrollo del pensamiento funcional junto con la aritmética podría servir de base para el álgebra, por tanto, esta forma de pensar será la base de la facilidad de desarrollo del razonamiento más complejo que está vinculado al pensamiento algebraico más sofisticado.

Warren et al. (2006) y Blanton et al. (2011) coinciden en que los alumnos de primaria pueden manifestar pensamiento funcional y que su estudio en los primeros grados pueden afectar a su éxito en matemáticas en los niveles posteriores.

Smith (2008) identifica tres tipos de relaciones entre cantidades variables; correspondencia, covariación y patrón recursivo. Confrey et al. (1994), describen una distinción entre covariación y correspondencia, aunque este último se dirige principalmente a los grados medios y secundarios, muchas de sus características son relevantes para una discusión de los estudiantes de primaria que construyen ideas de función.

Blantón et al. (2011) se refieren a la capacidad que tienen los niños de primeros cursos para el pensamiento funcional, desde la edad preescolar pueden pensar acerca de cómo las cantidades covarían y, luego en el primer grado, pueden describir cómo se corresponden las cantidades. Además, exponen que la idea de patrón recursivo, no ha tenido igual trascendencia que las relaciones de covariación o correspondencia. Justifican su planteamiento, haciendo alusión a los principios y estándares del NCTM (2000) los que sugieren que, tan tarde como el cuarto grado los estudiantes pueden encontrar un patrón recurrente y hasta quinto grado tendrían que desarrollar una relación de correspondencia.

Blanton et al. (2011), en base a una investigación de cinco años, señala que a los estudiantes de primer grado de educación primaria se debe dar la oportunidad de trabajar con el uso de representaciones simbólicas, lo que les permitiría un mayor margen cognitivo para explorar ideas más complejas en cursos superiores. Para ello, debe haber cambios conceptuales acerca de cómo los profesores y estudiantes ven las relaciones entre variables. Además, plantean que debería haber una transformación y ampliación de los recursos para que el contenido, en su mayoría aritmética, se pueda extender a la creación de patrones, conjeturas, generalización, y justificación de relaciones matemáticas. Añade, "el plan de estudios y la instrucción deberían basarse en estas habilidades naturales para proporcionar una experiencia matemática más profunda, más convincente para los niños pequeños" (p.21).

Un elemento clave en el estudio del pensamiento funcional es la noción de variable. Estudios como los de Brizuela, Blanton, Gardiner, et al., (2015) y Brizuela, Blanton, Sawrey, et al., (2015) han sido realizados para proporcionar evidencia de que la notación de variables está al alcance de los alumnos de grados inferiores en educación primaria y que existen una variedad de interpretaciones sobre sobre esta notación, efectuada por los mismos estudiantes. El estudio de Brizuela, Blanton, Sawrey, et al., (2015), demuestra que niños de seis años pueden usar la notación variable en formas significativas para expresar relaciones entre las cantidades covariables "La introducción de la notación de variables temprana (…) puede dar a los niños la oportunidad de explorar plenamente su comprensión, además de permitir a los alumnos una interacción sostenida con un símbolo, que ocasiona dificultad en ellos" (p.12). Sobre el mismo tema, Brizuela, Blanton, Gardiner, et al., (2015) utilizaron la idea de espacio semántico de Sfard (2000), para explorar las variables y su notación, en donde el sujeto fue una alumna de primer grado. Su objetivo fue ilustrar los cambios las comprensiones de la estudiante en relación con las variables y su notación durante el transcurso de cada una de las tres entrevistas y entre cada una de ellas. A partir de los resultados, lo investigadores abogan por una presentación más temprana de representaciones y conceptos algebraicos a través de enfoques basados en la exploración del sentido de las ideas y representaciones.

En cuanto a la representación de las relaciones entre variables, Blanton et al. (2004) detallan su investigación con estudiantes de los primeros grados de educación primaria, donde a través de la ayuda de los maestros, los estudiantes dieron sentido a los datos e interpretaron relaciones funcionales, a través del uso de tablas, gráficos, imágenes, palabras y símbolos. Los estudiantes lograron desarrollar el enfoque de correspondencia entre números y objetos, además de utilizar tablas de funciones como medio para organizar cantidades covariantes.

En la investigación de Blanton et al. (2015) los estudiantes que experimentaron la intervención del álgebra temprana demostraron una mejoría significativamente mayor en su rendimiento en comparación con estudiantes que no recibieron la intervención algebraicas. Las mejoras se visualizaron en su capacidad para representar cantidades desconocidas de manera significativa con la notación de variables además de generalizar y representan simbólicamente las relaciones funcionales entre cantidades covariantes.

Cañadas, Brizuela et al., (2016), han encontrado que los niños de primaria pueden desarrollar y utilizar una variedad de herramientas de representación para razonar acerca de funciones, pueden describir con palabras y símbolos, patrones recurrentes, covariación, y las relaciones de correspondencia en los datos. Además, pueden utilizar un lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas.

El profesor de asignatura cumple un rol importante en el trabajo con el pensamiento funcional, así lo demuestra el estudio de formación de profesores de Carraher et al. (en prensa), en el cual se integró la idea de funciones y principios del lenguaje algebraico. Los profesores implementaron actividades basadas en el uso de funciones por parte de estudiantes de cursos de primaria. En forma progresiva los maestros fueron capaces de animar a sus estudiantes a la utilización de múltiples representaciones, entre las cuales se encuentran líneas de números, tablas, gráficos y la notación algebraica. La idea antes descrita, en conjunto con el estudio del razonamiento matemático de los estudiantes, y el análisis de problemas matemáticos, fue aplicada en estudiantes con bajo rendimientos, teniendo un efecto positivo, ya que después de un tiempo desde su aplicación, los estudiantes tuvieron mejoras significativas en su aprendizaje.

Las referencias antes descritas enfatizan el rol de los maestros en la estimulación del uso de sistemas de representación por parte de los estudiantes en los primeros cursos. Su actuar como guía de actividades que involucren variados sistemas de representación favorecería la comprensión de los estudiantes.

CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

El siguiente capítulo describe el marco metodológico de nuestra investigación. Comenzamos caracterizando el tipo de estudio, luego describimos los sujetos participantes, se expone el proceso de elaboración del instrumento y, finalmente la descripción del proceso de recogida de datos, que serán objeto de análisis y discusión posteriores en los siguientes capítulos.

3.1. Tipo de investigación

La presente investigación es cualitativa, según Sampieri, Collado y Baptista (2015) este tipo de estudio "se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural en relación con su contexto" (p.358). Además, el análisis de los datos será de carácter cualitativo (Hernández, et al., 2003) de acuerdo con los objetivos planteados para la misma y con los datos recogidos. Estos datos cualitativos contribuyen a describir el pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º curso de educación primaria al resolver un problema contextualizado que se les plantea, por lo tanto la investigación tiene una finalidad descriptiva.

Es estudio transversal, ya que se realiza en un momento determinado en el que se recoge información de un grupo de sujetos (Sampieri, et al. 2015). En nuestro caso la información se ha recogido de un grupo de estudiantes de primaria elegido intencionalmente a los que se les proponen tareas para que sean realizadas en grupos de trabajo, elaboradas por los investigadores.

Con respecto a la recogida de información, es importante mencionar que nuestro trabajo forma parte de un experimento de enseñanza.

El experimento de enseñanza es un tipo de estudio en el cual se espera la construcción de conocimiento tanto de los alumnos, como del profesor-investigador, y de los demás investigadores, de forma secuencial. El profesor-investigador construye su conocimiento a partir, de la construcción de los estudiantes, y los demás investigadores construirán su conocimiento sobre ambos y sobre sus interacciones. Además, se caracteriza por ser realizado para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Un experimento de enseñanza, es un tipo de investigación de diseño; un paradigma metodológico potente en la investigación del aprendizaje y la enseñanza cuyo objetivo es "analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p.76).

El experimento de enseñanza en el cual nos basamos, es la investigación del pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de 5º año de primaria, realizado en cuatro sesiones, que implicaban el desarrollo de distintos problemas contextualizados. En este trabajo, nos centramos en la primera sesión del experimento. En esta primera sesión, se desarrolló "el problema de las camisetas", que involucraba una función lineal, relación funcional que involucra una función multiplicativa.

3.2. Sujetos

A continuación describiremos toda la información relevante de los sujetos que han sido tomados como muestra para llevar a cabo nuestro estudio y que es susceptible de tener en cuenta a la hora de realizar el análisis de datos posterior y de establecer las consideraciones oportunas sobre las conclusiones del mismo. Dicha información incluye desde la procedencia de los sujetos y sus características generales, hasta otras más específicas que tienen que ver con el tema de nuestra investigación.

3.2.1. Características generales de los sujetos y procedencia

La muestra de referencia ha sido seleccionada de forma intencional, se compone por un grupo de 24 estudiantes de quinto de educación primaria con edades comprendidas entre los 10 y 11 años en el momento de recogida de información, que cursan la materia de matemáticas en el colegio privado Alquería, ubicado en las afueras de Granada, durante el curso académico 2014/2015.

El centro educativo comprende las etapas de educación infantil y primaria, es de línea 1, y la mayoría de sus estudiantes viven en pueblos cercanos. Su propuesta educativa es un proyecto que garantiza la formación de personas con capacidades organizativas, habilidades sociales por lo que enseñan a los alumnos a trabajar en equipo.

Es importante mencionar que entre los 24 estudiantes, se encuentran 5 alumnos que se han considerados como superdotados.

3.2.2. Desarrollo cognoscitivo de los sujetos

De las etapas de desarrollo cognoscitivo de Piaget, estos niños se encuentran casi al final de las operaciones concretas, término que acuño Piaget para describir la etapa de pensamiento ―práctico, que se comprende entre las edades de 7 a 11 años. Esta etapa se caracteriza porque el niño es capaz de resolver problemas concretos (prácticos) de forma lógica.

3.2.3. Conocimientos previos de los sujetos

Los estudiantes del curso investigado no habían abordado con anterioridad los tópicos relacionados con el pensamiento funcional (análisis de variables, representaciones, relaciones y generalización), debido a que es un contenido que no se imparte en cursos de primaria.

3.3. Instrumentos de recogida de información

Se indaga en la sesión 1 que los estudiantes resuelvan un problema a través del trabajo colaborativo, cuyo contexto resultará familiar para ellos. Se les propone una situación de venta de camisetas para un viaje de estudios, cuya modelización es la función $y=3x$, en donde los estudiantes deberían reconocer dichas relaciones funcionales.

La recogida de información fue realizada a través de un protocolo escrito (Anexo A) con la realización grupal del "problema de las camisetas" registrado a través de medios audiovisuales, grabación de la sesión con una cámara fija y una cámara móvil. El curso fue organizado en grupos de 4 a 5 alumnos, para analizar y debatir la tarea expuesta por los investigadores. Es importante mencionar que los grupos fueron formados por el profesor del curso, quien procuró que los cinco estudiantes considerados como superdotados, fueran ubicados uno a uno en grupos distintos, con el fin de lograr grupos heterogéneos.

El enunciado del problema es el siguiente:

Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Por cada camiseta ganaría 3 €.

¿Cuánto dinero podría conseguir Carlos?

En el problema se plantean ocho cuestiones mediante las que se pretende que los estudiantes utilicen el pensamiento funcional en forma gradual a través de la relación que establezcan, la interpretación de la situación y representaciones que utilicen.

A partir del enunciado antes descrito se introduce la actividad. Las preguntas 1 y 2, persiguen que el estudiante explore la relación funcional considerando casos particulares, en donde se da un número exacto de camisetas. Además, se pide a los estudiantes que elijan el número de camisetas para que no sean consecutivos.

Las preguntas 3 y 4 buscaban dirigir la atención del estudiante hacia el patrón que subyace a la relación funcional, es decir, se guía a los estudiantes a focalizar su atención más allá de casos particulares, hacia la relación que vincula las dos variables que se mencionan en el texto: el número de camisetas vendidas y la cantidad de euros ganados. Así, la pregunta 3 es sobre un caso particular lejano que busca favorecer la generalización, y la cuarta pregunta es de carácter general y pretende favorecer la verbalización de la generalización, en esta pregunta se requiere que los estudiantes recuerden la variable, valor de una camiseta.

Las preguntas 4 están dirigidas al uso de diversas representaciones: las tablas para organizar los datos y el lenguaje verbal y/o letras para expresar la relación funcional de forma general. La pregunta 5 implica la construcción de tabla sin indicaciones y en la pregunta 6 se solicita el uso de letras sin indicaciones, esta pregunta persigue que los estudiantes den a conocer sus ideas acerca de la variable que representa la letra que han elegido.

A continuación se propone completar una tabla con indicaciones para explorar el uso de este tipo de representación, se propone en la primera fila el número de camisetas (1) junto a su precio en Euros (3 x 1 = 3 €). Los estudiantes deben completar esta tabla con los valores que ellos estimen. La última fila es de color gris, y se espera que sea completada al finalizar la actividad, con la regla general.

La pregunta 7 busca explorar la relación de covariación en los estudiantes. Finalmente, la pregunta 8 es de carácter general, y pretende favorecer la verbalización de la generalización de la función.

Tabla 2. *Preguntas del instrumento y su descripción.*

	Cuestión	**Descripción**
1	¿Cuánto obtendría Carlos por vender 3 camisetas?	Pregunta sobre caso particular. Se les pide que elijan los números para que no sean consecutivos
2	¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? ¿Cuánto ganaría con ellas?	
3	Si vende 23 camisetas, ¿cuánto habrá ganado?	Pregunta sobre un caso particular lejano para favorecer la generalización.
4	Carlos no recuerda cuánto ganó ayer vendiendo camisetas. Si supiera cuántas camisetas vendió, ¿cómo puede saber el dinero ganado ayer?	Pregunta general para favorecer la verbalización de la generalización.
5	Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.	Construcción de tabla sin indicaciones para explorar su uso de este tipo de representación.
6	Escribe una letra para referirte a ese número camisetas vendidas que no conoces: ¿Por qué elegiste esa letra?	Solicitud de uso de letras sin indicaciones para explorar su uso de este tipo de representación.
	¿Qué valores puede tomar?	
	Rellena la tabla con cantidades que podrían ser ciertas. Recuerda que Carlos obtiene por cada camiseta 3 euros.	Construcción de tabla con indicaciones para explorar su uso de este tipo de representación.
7	Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana? Si vende 1 camisetas más, ¿cuánto gana?	Pregunta sobre covariación
8	Carlos ha vendido todas sus camisetas. Como no tiene suficiente dinero ha realizado un pedido extra de camisetas. ¿Cuánto podrá ganar con ese pedido extra?	Pregunta general para favorecer la verbalización de la generalización de la función.

3.4. Recogida de datos

La sesión en la que se aplicó “el problema de las camisetas” se realizó el día 13 de febrero de 2015, por miembros del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, de la Universidad de Granada. La clase fue llevada a cabo por los investigadores, momento en el cual el profesor de los alumnos permaneció en el aula como observador.

La sesión tuvo un tiempo de 1 hora y 30 minutos y fue desarrollada en cuatro partes. En la primera parte el profesor-investigador explicó la tarea y pregunto a los estudiantes si tenían dudas acerca de la actividad, y se entregó a cada alumno la primera ficha de trabajo de la actividad para ser realizada en forma colaborativa. Es importante destacar que en el momento de la introducción se informó a los estudiantes que los investigadores no pretendían juzgar sus respuestas a las cuestiones planteadas, más bien buscaban a través de esa tarea saber cómo "piensan ellos" en la actividad. Además, se les informa que los investigadores atenderán las dudas que surjan sobre la situación descrita, no sobre cómo se resuelve, o si está bien, o mal lo que han pensado. Esta primera parte tuvo un tiempo de 15 minutos.

En la segunda parte se hizo entrega de la segunda ficha de trabajo de la actividad, el profesor-investigador dio a conocer únicamente las indicaciones que los estudiantes necesitan para entender la actividad. Esta parte tuvo una duración de 20 minutos.

En la tercera parte se desarrollaron las preguntas de la tercera ficha de trabajo, actividad que tuvo una duración de 30 minutos.

En la última parte de la sesión, con una duración de 25 minutos, se hizo entrega de la última ficha de trabajo, en este tiempo los estudiantes debieron desarrollar las últimas tres cuestiones.

Durante los cuatro momentos de la clase el trabajo de los estudiantes fue monitoreado por el profesor-investigador y los otros investigadores, luego de la ejecución de cada actividad se realizó una puesta en común en donde uno de los profesores-investigadores relataba las preguntas planteadas en cada hoja de tareas y los estudiantes compartían sus respuestas ante toda la clase, actividad que se realizó en forma ordenada, debido a que en cada grupo hubo uno o dos estudiantes que hicieron de portavoz, explicando al resto de sus compañeros las respuestas obtenidas a través del trabajo colaborativo. Es importante aclarar que en este proceso el profesor-investigador incentivó la partición de la mayor cantidad de estudiantes y no realizó la corrección de las respuestas que ellos emitían.

La sesión fue grabada con cámara fija y cámara móvil; la primera cámara grabó la interacción que se desarrolló entre los integrantes de los grupos de toda la sala de clases, en conjunto con los cuatro momentos en los que se ejecutó la actividad. La cámara móvil grabó los comentarios realizados por los estudiantes de los distintos grupos de trabajo en el desarrollo de las cuestiones planteadas, en conjunto con el monitoreo de los investigadores.

El material proporcionado por la grabación del trabajo en grupo pequeños y los momentos donde se realizó la puesta en común del grupo grande, fue posteriormente transcrito, de este modo, se construyó un relato narrativo de toda la lección con las grabaciones de las dos cámaras. Estas transcripciones se encuentran en el anexo B (Transcripción cámara Fija y Trascripción cámara móvil)

Este instrumento de recolección de datos ha permitido detectar el trabajo realizado en grupos; las estrategias que emplean en la resolución de la tarea planteada, en conjunto con sus expresiones e interacciones verbales. Además, de permitir acceder a la puesta en común de sus resultados.

3.5. Categorías para el análisis de datos

A continuación se realizará una descripción ordenada y detallada de las respuestas de los estudiantes a través del trabajo colaborativo realizado en la sesión antes descrita, las cuales serán nuestras unidades de análisis.

Se han determinado categorías de análisis para los datos proporcionados por las grabaciones en donde se visualiza el trabajo colaborativo de los estudiantes, en conjunto con la puesta en común de sus resultados. Como instrumento de análisis complementario, se utilizarán las fichas de trabajo (Anexo C), en donde los estudiantes, han expresado de forma escrita sus ideas.

Las categorías han sido definidas en base al marco teórico propuesto en el capítulo II, y para su conceptualización se han tomado como referencia las categorías expuestas por Yañez (2015), investigación relacionada con el pensamiento funcional y enmarcado dentro de la propuesta *early algebra.* Se han realizado las modificaciones necesarias a las categorías para su adaptación al tipo de tarea de nuestro estudio ("tarea de las camisetas"). Adecuamos estas categorías para que aporten al desarrollo del objetivo de esta investigación con base en la información recogida y según la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), teoría que se caracteriza por la fundamentación de los conceptos en los datos recopilados de forma sistemática, y analizados en el proceso de investigación.

Finalmente, utilizamos las siguientes categorías:

- Evidencia pensamiento funcional,
- No evidencia pensamiento funcional,
- Interpretación de variable
- Representaciones.

Esta categoría en conjunto con sus subcategorías, ha sido definida en base al estudio de otras investigaciones y el marco teórico establecido.

A continuación se puede visualizar en la tabla 3, las categorías de análisis consideradas en nuestro estudio.

Tabla 3. *Categorías de análisis.*

Categorías	**Subcategorías**
Evidencia pensamiento funcional	Relación de covariación Relación de correspondencia Patrón recursivo
No evidencia pensamiento funcional	Patrón inapropiado Estrategia aritmética No sabe/No contesta Otros
Interpretación de variable	Cantidad desconocida Cantidad variable Cantidad numérica Etiqueta u objeto Número generalizado
Representaciones	Verbal Tabular Pictórica Simbólica -Numéricas Simbólica -Algebraicas Múltiples

3.5.1. Categoría evidencia pensamiento funcional

La primera categoría definida valora si los estudiantes evidencian pensamiento funcional. Tal y como nos indican Blanton et al., (2011), el pensamiento funcional incorpora la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y representacionales. Por tanto, se considera que forman parte de esta categoría todas las respuestas o estrategias en las que se aprecia que el alumno identifica una relación entre dos cantidades variables y describen el patrón funcional apropiado que exprese dicha relación. Por ejemplo, A19 ha respondido a la pregunta Nº 2, de la siguiente forma (video cámara fija):

> A19: *yo he puesto dos camisetas, como las camisetas valen tres euros, 3 por 2, seis, me da seis euros.*

Dentro de ésta categoría se considera las respuestas en donde los estudiantes describen una de las formas de pensamiento funcional, que hemos fundamentado en el marco teórico, relación de covariación, relación de correspondencia y patrón recursivo, Confrey y Smith (1994) y Smith (2008).

Relación de covariación: el alumno reconoce que el valor de una cantidad varía en función del valor de otra cantidad. Un ejemplo para esta categoría es la respuesta de A9, en la figura 1**.**

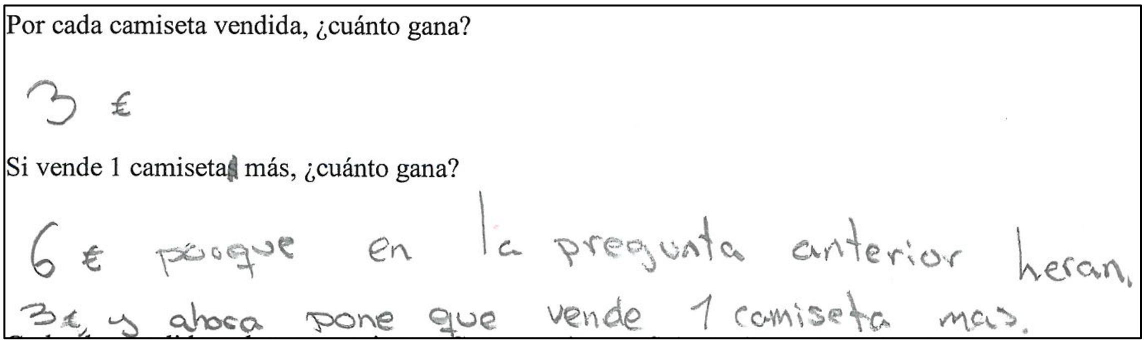


Figura 1. Respuesta A19

Relación de correspondencia: el alumno reconoce la relación entre dos cantidades variables. Un ejemplo para esta categoría es la respuesta de A1 a la pregunta Nº 2, forma (cámara fija):

> A1: *¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? (lee en su ficha)...a lo mejor seis de su colegio quieren una camiseta y uno de otro, por ejemplo, y eso por tres, 21 euros, (indica en su ficha la tercera pregunta) y 23 por 3, sesenta y nueve.*

Patrón recursivo: el alumno reconoce el patrón que se presenta en forma reiterada en la tabla de datos.

3.5.2. Categoría No evidencia pensamiento funcional

En esta categoría incluimos las respuestas de los estudiantes que no están basadas en un patrón funcional adecuado, no identifica la relación entre variables y que siguen estrategias y no logran la respuesta correcta. Se comprende que como estrategia en la "tarea de las camisetas" sin buscar ningún tipo de relación o patrón entre las variables, no están manifestando el pensamiento funcional.

Así A19, ha respondido a la pregunta Nº 4 de la siguiente forma (video cámara fija):

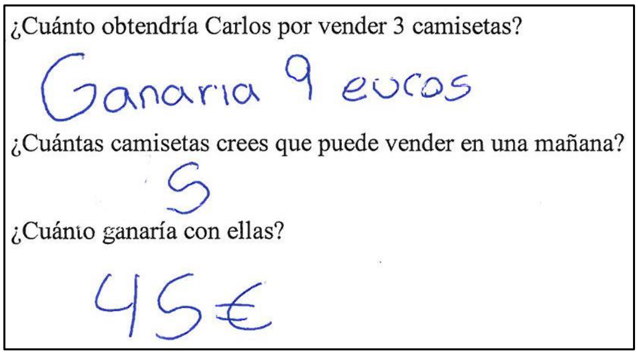
> A19: *sumando nueve más seis y después ponderar 15 más 69.*

Las repuestas incluidas en esta categoría según el siguiente criterio: patrón inapropiado, estrategia aritmética, no sabe/ no contesta y otros.

Patrones inapropiados: el alumno describe algún patrón inadecuado para alcanzar la solución correcta de la cuestión planteada.
Así A3, ha respondido a la pregunta Nº 4 de la siguiente forma (video cámara fija):

A3: *contar el dinero que tiene y dividiéndolo por tres.*

Estrategia aritmética: el alumno utiliza una estrategia con base en la operatoria, empleando cálculo mental o escrito. En su respuesta no establece una relación entre dos cantidades variables. La figura 2, muestra la respuesta de A11, a la pregunta Nº2 en su ficha de trabajo.


¿Cuánto obtendría Carlos por vender 3 camisetas?

Ganaria 9 euros

¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana?

5

¿Cuánto ganaría con ellas?

45€

Figura 2. Respuesta A11.

No sabe/no contesta: Dentro de esta categoría incluimos las cuestiones sin contestar.
Otros: Incluimos en esta categoría las respuestas de los alumnos que consideramos que no cumplen ninguno de los criterios de clasificación anteriores.

3.5.4. Categoría Interpretación de variable

Para categorizar la interpretación de la noción de variable que realizan los estudiantes, hemos extraídos los fundamentos que se exponen en el marco teórico destacando la importancia de este elemento como noción fundamental en una relación funcional. Janvier (1981), en conjunto con los planteamientos de otros autores, establecen las siguientes interpretaciones de la variable: cantidad desconocida, cantidad variable, cantidad numérica, etiqueta u objeto y número generalizado

Cantidad desconocida: el alumno reconoce e interpreta la variable como una cantidad desconocida que puede tomar diversos valores. De esta forma A10 y A11, han mantenido el siguiente diálogo en la introducción de la tarea.

A11: *Pero cuánto vale el viaje de estudio de su colegio también sería una respuesta, porque o si no.*

A10: *Eso entiendo yo, vamos a empezar, no te dice las camisetas que quiere vender (anota en su ficha de trabajo)*

Al11: *Porque si te dice el número que quiere conseguir, te puede decir cuántas quiere vender*

Cantidades variables: el alumno reconoce que las variaciones en una cantidad dependen de las variaciones de otra cantidad. El producto de esta variación proporciona un marcador de posición o parámetro, para cada conjunto numérico.

De esta forma, A10, a la pregunta Nº 8, ha respondido (cámara fija):

Al.10: *El segundo pedido depende de cuantas camisetas pide, si solamente vende una camiseta va a ganar 3 euros, pero si pide 100 va a ganar 300.*

Cantidad numérica: el alumno usa la variable como una cantidad numérica en la descripción de la relación funcional.

Así, A14 ha respondido de la siguiente forma cuando el profesor-investigador le indica la figura 3.

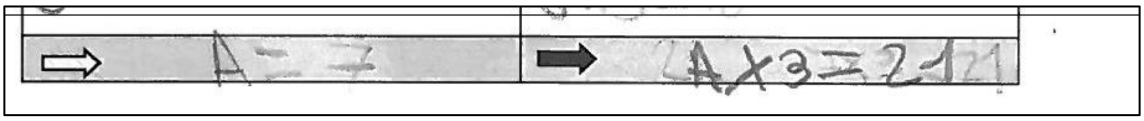


Figura 3. Respuesta A14.

Investigadora 3: Y esto ¿qué significa? Esto de aquí, eso ¿qué quiere decir?

A14: Pues, que el número que uno piensa por 3, que es lo que valen las camisetas, me da 21 euros

Profesor-Investigador: 21 euros, porque has pensado en ese momento que la “a” vale 7

Etiqueta u objeto: el alumno designa una letra que represente la cantidad variable. Así, A10 y A12, han respondido a la pregunta Nº 6.

Profesor-Investigador: *pero, ¿x es el número de qué?*

A12: *De todos los números, número de camisetas*

A10: *De camisetas vendidas*

A12: *Si es de perro, sería de perro*

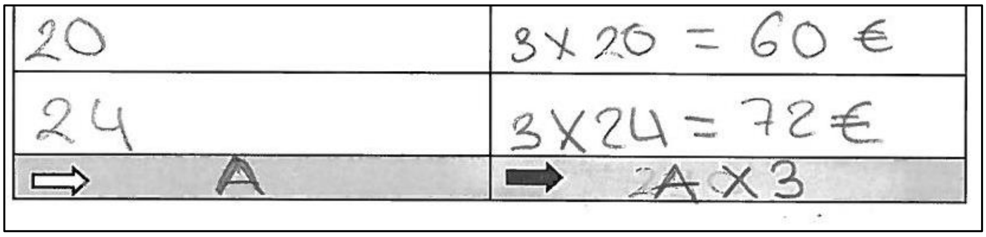
Profesor-Investigador: *Claro, si fuera de perros sería de perros, pero eso es importante para saber los valores que puede tomar.*

A10: *¿Qué valores puede tomar?*

A12: *Todos los números de camisetas vendidas*

Número generalizado: el alumno usa la variable como herramienta simbólica para la generalización o para describir un patrón, en la transición del lenguaje natural al sistema de notación simbólica.

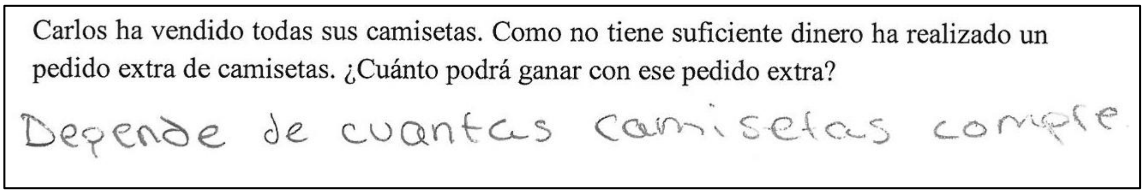
La figura 4. Muestra la respuesta de A10 en la columna gris de la tabla que deben rellenar con cantidades que son ciertas.



20	3x20 = 60 €
24	3X24 = 72 €
⇨ A	➡ 2A X 3

Figura 4. Respuesta A10.

La figura 5. Muestra la respuesta del A11, a la pregunta Nº 8 en su hoja de respuesta, donde interpreta la variable como cantidad variable.



Carlos ha vendido todas sus camisetas. Como no tiene suficiente dinero ha realizado un pedido extra de camisetas. ¿Cuánto podrá ganar con ese pedido extra?

Depende de cuantas camisetas compre

Figura 5. Respuesta A11.

3.5.5. Categoría Representaciones

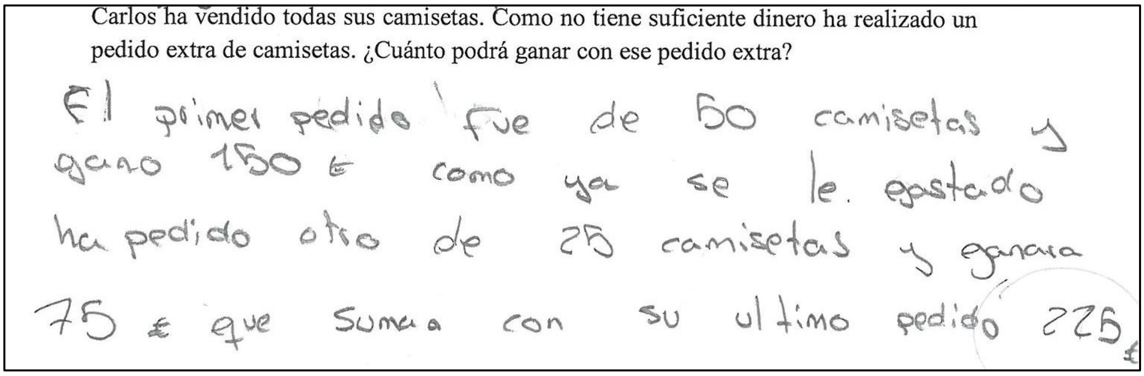
Cómo los estudiantes expresan una relación funcional es fundamental, tal como indican Blanton et al., (2015), el pensamiento funcional implica relaciones entre cantidades variables y la representación, y el razonamiento con esas relaciones a través del lenguaje natural, la notación algebraica, tablas y gráficos.

Por lo tanto, en el análisis hemos considerado la clasificación de los sistemas de representaciones de Merino (2012): verbal, tabular, pictórica, simbólica, que engloba dos subtipos: numéricas-algebraicas, y múltiples. A continuación, se dan a conocer algunos ejemplos:

Verbal: la respuesta de A9 muestra un ejemplo de este sistema de representación, en la pregunta Nº 8.

A9: *Y, como 50 por tres es 150 y 25 por 3 es 75 y sumamos los dos es 225*

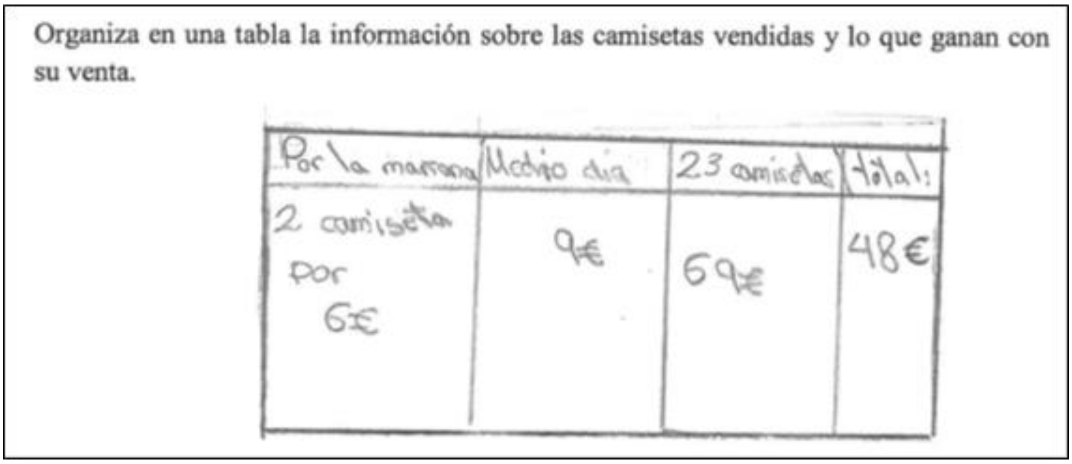
La figura 6 la misma respuesta en su ficha de trabajo, en donde expresa la respuesta en forma escrita.


Carlos ha vendido todas sus camisetas. Como no tiene suficiente dinero ha realizado un pedido extra de camisetas. ¿Cuánto podrá ganar con ese pedido extra?

El primer pedido fue de 50 camisetas y gano 150 € como ya se le. gastado ha pedido otro de 25 camisetas y ganara 75 € que suma con su ultimo pedido 225 €

Figura 6. Respuesta A9.

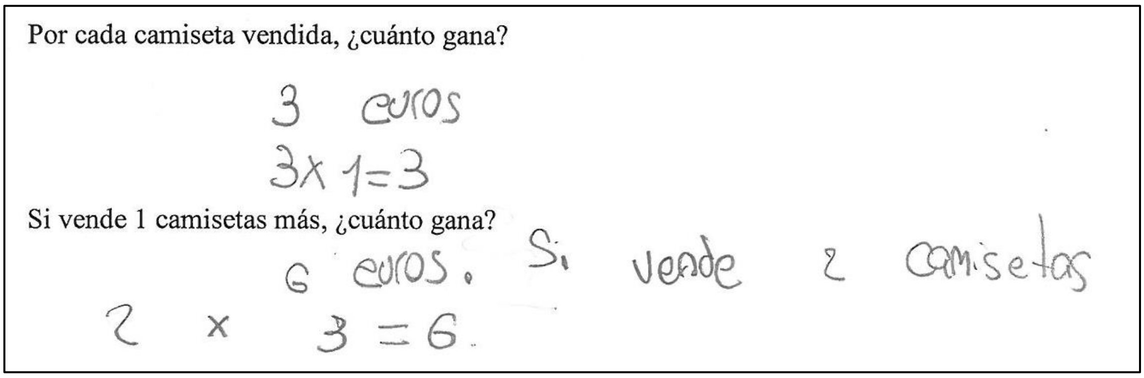
<u>Tabular:</u> la tabla de valores muestra un ejemplo de este sistema de representación en la figura 7, realizada por A22 en respuesta a la pregunta Nº5.


Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.

Por la mañana	Medio dia	23 camisetas	total:
2 camiseta por 6€	9€	69€	48€

Figura 7. Respuesta A22.

<u>Simbólica- Numérica:</u> La figura 8 muestra un ejemplo de este sistema de representación realizada por A14 en la pregunta 8.


Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana?

3 euros

$3x1=3$

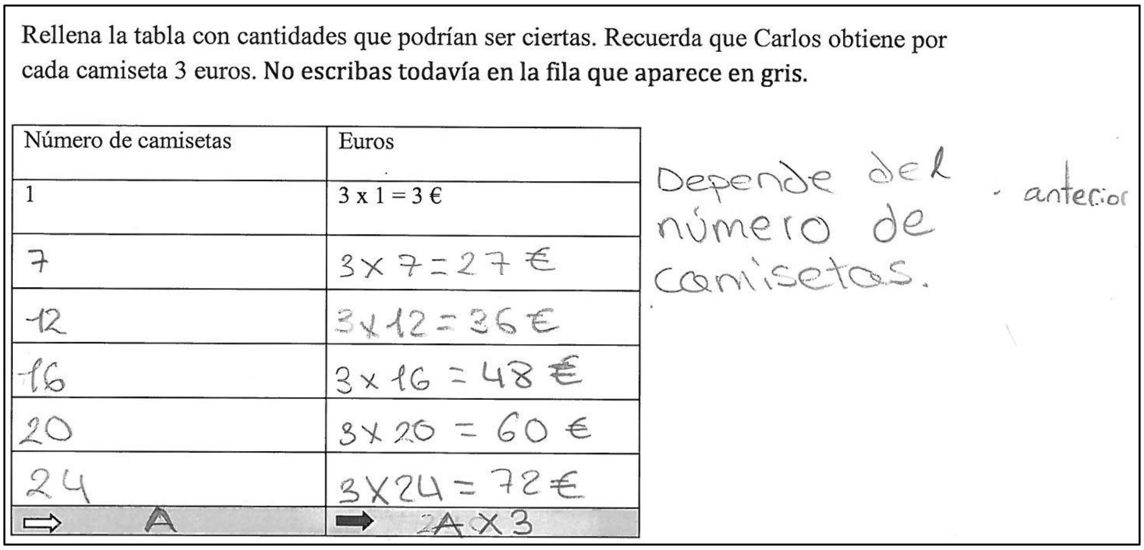
Si vende 1 camisetas más, ¿cuánto gana?

6 euros. Si vende 2 camisetas

$2 \times 3 = 6.$

Figura 8. Respuesta A14.

Simbólica- algebraica: En la figura 9, la tabla de información en la fila gris muestra un ejemplo de este sistema de representación, realizado por A12.


Rellena la tabla con cantidades que podrían ser ciertas. Recuerda que Carlos obtiene por cada camiseta 3 euros. **No escribas todavía en la fila que aparece en gris.**

Número de camisetas	Euros
1	3 x 1 = 3 €
7	3x 7 = 27 €
12	3x12 = 36 €
16	3 x 16 = 48 €
20	3x 20 = 60 €
24	3X24 = 72 €
⇨ A	➡ 2A x 3

Depende del número de camisetas. · anterior

Figura 9. Respuesta A12.

Múltiples: la figura 10 muestra el sistema de representación múltiple realizada por A14, quien construye una tabla de información y en la misma realiza una representación pictórica.

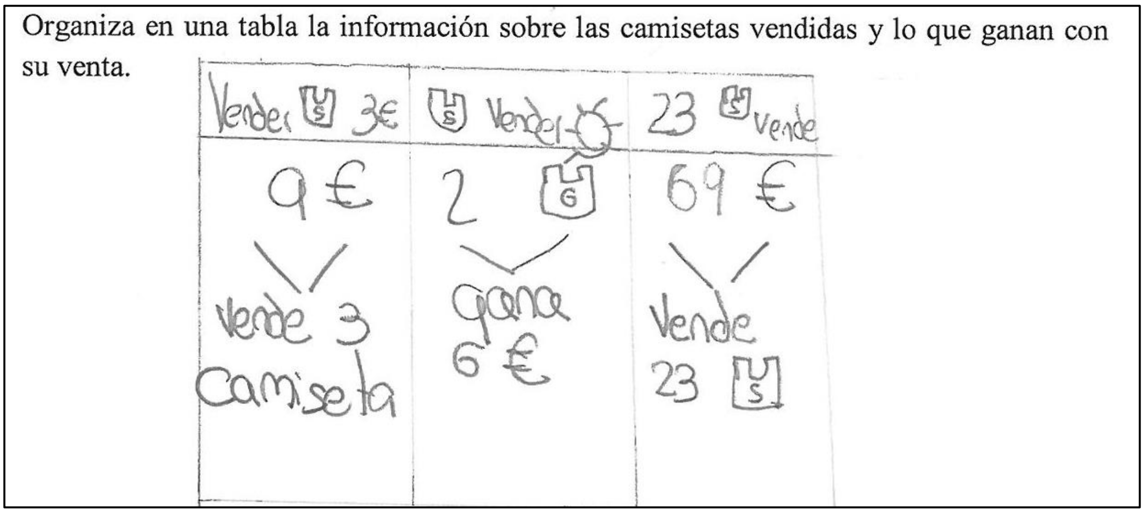


Figura 10. Respuesta A14.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

4.1. Presentación de los resultados

En el presente capítulo analizamos los datos obtenidos tras revisión de las grabaciones de la sesión, las cuales fueron transcritas y las fichas de trabajo de cada uno de los estudiantes. Nos centraremos en el análisis de cada una de las primeras 7 preguntas planteadas en el "problema de las camisetas".

La forma de analizar los datos de cada pregunta, nos permite extraer información específica de cómo actúan los estudiantes ante cada pregunta planteada, lo que permite estudiar la evolución de sus respuestas entre cada pregunta.

Para preservar la identidad de los alumnos que participaron en el experimento y establecer orden y claridad en el relato, se les asignamos un orden con un número del 1 al 24 y una codificación, comenzando por la letra A (alumno/a).

4.2. Análisis por pregunta

A continuación se presentará un breve análisis de la introducción de la actividad y posteriormente se realizará el análisis de las primeras 7 preguntas.

Problema: Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Por cada camiseta ganaría 3 €. ¿Cuánto dinero podría conseguir Carlos?

En la instrucción de la tarea, se observa la discusión del problema entre los estudiantes de los grupos. A11 y A12 analizan la situación haciendo referencia a la información explicita que involucra la situación, nombran datos numéricos que se dan a conocer en forma cuantitativa en el enunciado y los datos que no aparecen (número de camisetas que quiere vender, ganancia total, valor total del viaje de estudio), es decir cantidades desconocidas. En el diálogo, hemos inferido que han establecido una relación entre dos variables cuantitativas, "número que quiere conseguir" (valor del viaje de estudio) y "cuántas quiere vender" (camisetas).

Así, A10 y A11 ha respondido de la siguiente forma (video cámara fija):

> A11: *Pero cuánto vale el viaje de estudio de su colegio también sería una respuesta, porque o si no.*
>
> A10: *Eso entiendo yo, vamos a empezar, no te dice las camisetas que quiere vender* (anota en su ficha de trabajo).

A11: *Porque si te dice el número que quiere conseguir, te puede decir cuántas quiere vender*

A12: *Además, pues, he vendido tantas y necesito tanto, entonces sacas todo eso…*

Pregunta 1

Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Por cada camiseta ganaría 3 €. ¿Cuánto obtendría Carlos por vender 3 camisetas?

En esta pregunta se observa que la mayoría de los estudiantes utilizan la estrategia de multiplicación para calcular la cantidad total de euros. Relacionan la ganancia por cada camiseta vendida (3 euros) con la ganancia total.

Como se observa en la siguiente respuesta (video 3):

A1: *Si gana 3 euros, 3 por 3 son nueve.*

En el momento de la puesta en común de esta pregunta en el grupo grande, la mayoría de los estudiantes están de acuerdo con la respuesta de uno de sus compañeros (9 euros), cantidad que representa el dinero total que obtendría Carlos.

El siguiente fragmento muestra la conversación del profesor-investigador con los estudiantes (video cámara fija).

Profesor-Investigador: *¿Cuánto podría obtener Carlos por vender tres camisetas?*

A19: *9 euros*

Profesor-Investigador: *9 euros, ¿estáis todos de acuerdo con A9?*

Alumnos: *Si*

Profesor-Investigador: *¿Alguien ha puesto otra cosa?*

Alumnos: *No*

Esta respuesta se corrobora con la revisión de producciones escritas (fichas de trabajo), casi el total de estudiantes responden correctamente a través de una respuesta directa, tal como se observa la figura 11 la respuesta de A11.

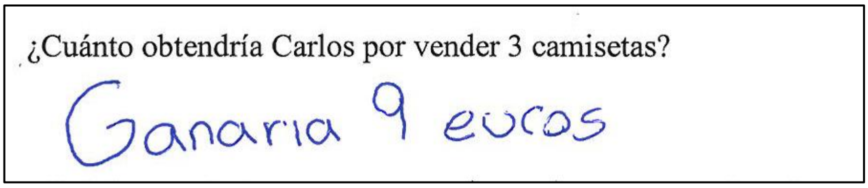

¿Cuánto obtendría Carlos por vender 3 camisetas?
Ganaria 9 euros

Figura 11. Respuesta A1.

Un solo estudiante escribió la operación de multiplicación en su ficha de trabajo, la figura 12 presenta la respuesta de A1.

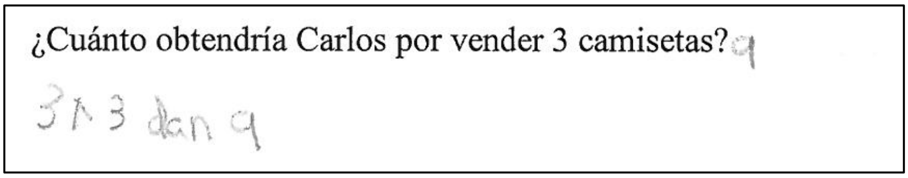

¿Cuánto obtendría Carlos por vender 3 camisetas? 9
3 x 3 dan 9

Figura 12. Respuesta A1.

A través del análisis de las respuestas hemos inferido que los estudiantes aún no evidencian manifestación de pensamiento funcional, aunque han relacionado las variables, número de camisetas y total a pagar, y han aplicado la estrategia de multiplicación, no se observa en sus respuestas que expresen el patrón adecuado.

Pregunta 2

¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? ¿Cuánto ganaría con ellas?

En las respuesta se observa que los estudiantes describen la relación entre las variables y reconocen el patrón adecuado (multiplicar el número de camisetas por 3 euros), por tanto, esta respuesta evidencia pensamiento funcional, estableciendo una relación de correspondencia entre las variables, número de camisetas y la ganancia total en euros. Un ejemplo es el siguiente fragmento.

> A1: *(lee en su ficha) ¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana?...a lo mejor seis de su colegio quieren una camiseta y uno de otro, por ejemplo, y eso por tres, 21 euros, y 23 por 3, sesenta y nueve (indicando en su ficha la cuarta pregunta.*

En la siguiente respuesta de A10, se destaca la verbalización de la relación funcional de correspondencia.

> A10: *Yo he dicho, que si supiéramos el dato de cuánto ganaría con ellas, sabríamos el dato de cuántas camisetas ha vendido, y si supiéramos cuántas camisetas ha vendido, supiéramos, cuánto ganaría con ellas, en este caso multiplicando.*

Durante la puesta en común en la finalización de esta parte de la sesión, se observa, que saber el total de camisetas que se pueden vender en una mañana anima la discusión entre los grupos de estudiantes, hacen suposiciones de diversos resultados, algunos relacionan el total de camisetas con las horas del día y/o las jornadas del día.

Por tanto, los diálogos demuestran que algunos estudiantes: ven variables como cantidades desconocidas, han establecido una relación entre variables y demuestran el patrón funcional correcto evidenciando pensamiento funcional, específicamente una relación de correspondencia. En el siguiente fragmento del video, se observan las respuestas de A8 y A19 (video cámara fija).

A8: *Doce, porque en cada hora venderá una camiseta*

Profesor-Investigador: *Vosotros doce, la cantidad doce, por qué creéis de media venderá una camiseta por cada hora*

A8: *Sí*

Profesor-Investigador: *Y has supuesto que va a estar doce horas vendiendo, vale. Entonces con ese número que vosotros habéis dicho, ¿cuánto ganaría con ella? ¿Cómo sabéis, cuánto gana con ella?*

Alumna**:** *Multiplicándolo por tres*

Profesor-Investigador: *Vosotros, ¿qué habéis multiplicado por tres?*

A8: *El número de camisetas*

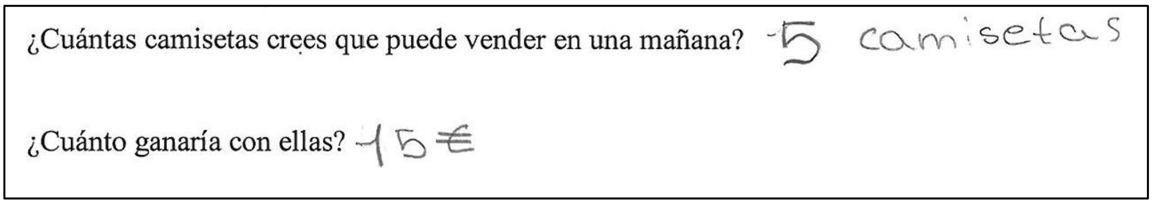
Profesor-Investigador: *¿Qué número habéis puesto?*

A8: *Doce*

Profesor-Investigador: *¿Todos habéis hecho lo mismo?*

A19: *Yo he puesto dos camisetas, como las camisetas valen tres euros, 3 por 2, seis, me da seis euros.*

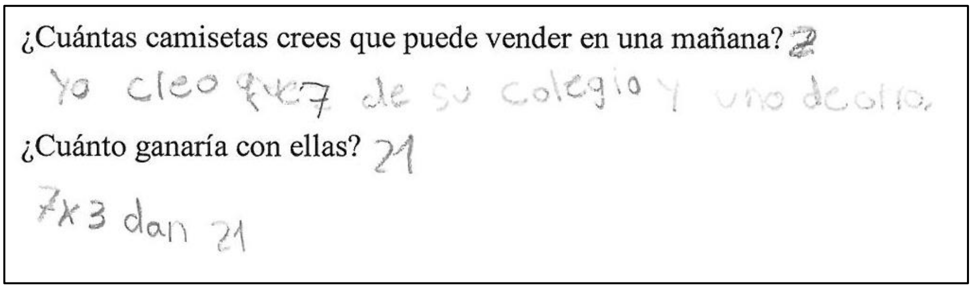
En las producciones escritas la mayoría de las respuestas son directas, debido a que los estudiantes utilizan una estrategia aritmética, empleando cálculo mental para obtener el resultado. La figura 13 muestra la respuesta directa de A12.


¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? 5 camisetas

¿Cuánto ganaría con ellas? 15 €

Figura 13. Respuesta A12.

Solo hubo un estudiante A1 que reconoce como estrategia de cálculo la operación de multiplicación, en su ficha de trabajo (figura 14).


¿Cuántas camisetas crees que puede vender en una mañana? 2

Yo cleo que 7 de su colegio y uno deotro.

¿Cuánto ganaría con ellas? 21

7x3 dan 21

Figura 14. Respuesta A1.

Otra idea relevante, es acerca de la elección del número de camisetas que se podría vender en una mañana, las respuestas de los estudiantes en sus fichas de trabajo muestran que en algunos grupos, todos los estudiantes usaron la misma cantidad, como es el caso de los grupos 2 y 3.

Pregunta 3

Si vende 23 camisetas, ¿cuánto habrá ganado?

En esta pregunta se aprecia que la mayoría de los estudiantes han aplicado la operación de multiplicación 23 x 3. Hemos inferido a través de las transcripciones, que esta estrategia surge de la comprensión del patrón funcional apropiado y el reconocimiento de relación de correspondencia entre las variables (número de camisetas y ganancia total). El siguiente dialogo realizado en el grupo grande (video cámara fija), demuestra que los estudiantes encuentran el patrón adecuado, a partir de los casos particulares.

Profesor-Investigador: *Vosotros ¿qué habéis multiplicado por tres?*

A8: *El número de camisetas*

Profesor-Investigador: *¿Qué número habéis puesto?*

A8: *Doce*

Profesor-Investigador: *¿Todos habéis hecho lo mismo?*

A19: *Yo he puesto dos camisetas, como las camisetas valen tres euros, 3 por 2, seis, me da seis euros.*

Profesor-Investigador: *Vale, A18 tu ¿qué piensas?*

A18: *Vendió seis camisetas y los multiplico*

Profesor-Investigador: *A12, ¿qué habéis pensado vosotros?*

A12: *Nosotros hemos pensado que vendería cinco camisetas, cinco camisetas por la mañana y al final del día tendría quince euros*

Profesor-Investigador: *Entonces, si vende 23 camisetas, ¿cuántos creéis que ha ganado?*

Alumnos del grupo 3: *Sesenta y nueve euros* (responden al mismo tiempo)

Profesor-Investigador: *¿Todos pensáis lo mismo?*

Alumnos: *Sí*

La información proporcionada por el relato escrito, se reafirma en las hojas de trabajo en donde se observan respuestas directas. La figura 15 muestra un ejemplo de respuesta de A7.

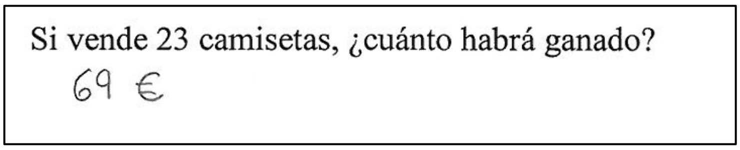

Si vende 23 camisetas, ¿cuánto habrá ganado?
69 €

Figura 15. Respuesta A7.

En el grupo tres se observa la siguiente situación, mientras algunos de los estudiantes piensan en el total de camisetas que se pueden vender en una mañana, uno de sus compañeros (A11) da a conocer una estrategia para responder, se entiende su planteamiento como una estrategia de operación inversa, donde se observa una estrategia de división.

A11: *Sesenta y nueve entre tres…puede que sean 23 camisetas.*

Pregunta 4

Carlos no recuerda cuánto ganó ayer vendiendo camisetas. Si supiera cuántas camisetas vendió, ¿cómo puede saber el dinero ganado ayer?

En la puesta en común de esta pregunta (grupo grande), se observan diversas respuestas, entre las que hemos considerado como correctas, las de A21 y A10, quienes proponen el patrón apropiado y establecen una relación de correspondencia entre las variables.

A continuación se presenta un fragmento del video (cámara fija).

A21: *Si sabe la cifra de cuántas tenía, las cuenta y después de contarlas, lo multiplica por tres y así sabe cuánto dinero gano… (Inaudible)*

A2: *Pero si te acuerda de las camisetas que tenía, cuántas ha vendido y cuántas le quedan, pues, no tiene sentido que luego no se acuerde de los que ha ganado,*

A7: *Pero si tú no sabías las camisetas, no tienes porqué saber el número exacto que ha ganado*

Profesor-Investigador: *¿A ver?…A7*

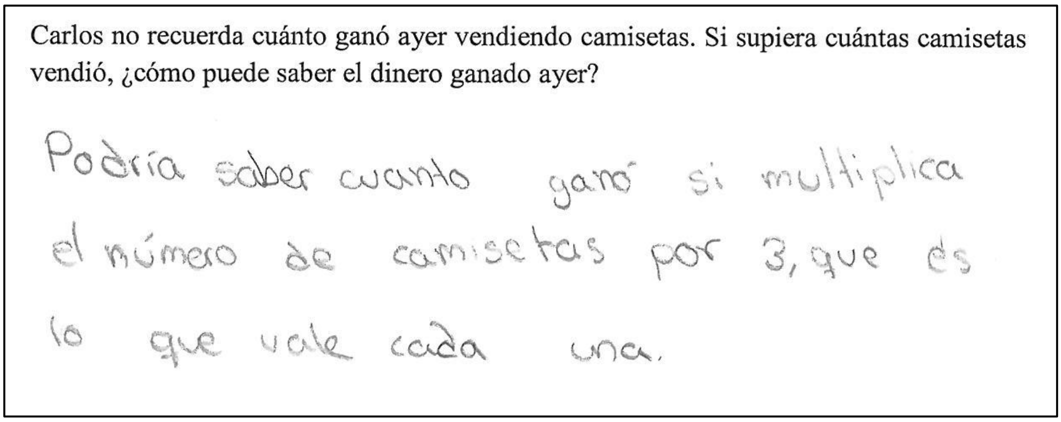
A7: *Pero si no se acuerda...*

Profesor-Investigador: *Él se acuerda de ¿cuántas camisetas ha vendido?*

A9: *Si se acuerda de las camisetas que vendió, así sabe...*

A10:*Mira, como ha dicho A21…se acuerda de cuantas camisetas tiene, cuantas camisetas ha vendido, lo tiene que multiplicar por el dinero que vale cada camiseta, tres en este caso.*

A continuación en la figura 16, queda demostrada la comprensión del patrón funcional apropiado por parte de algunos estudiantes, que respondieron de la siguiente manera.


Carlos no recuerda cuánto ganó ayer vendiendo camisetas. Si supiera cuántas camisetas vendió, ¿cómo puede saber el dinero ganado ayer?

Podría saber cuanto ganó si multiplica el número de camisetas por 3, que es lo que vale cada una.

Figura 16. Respuesta A18.

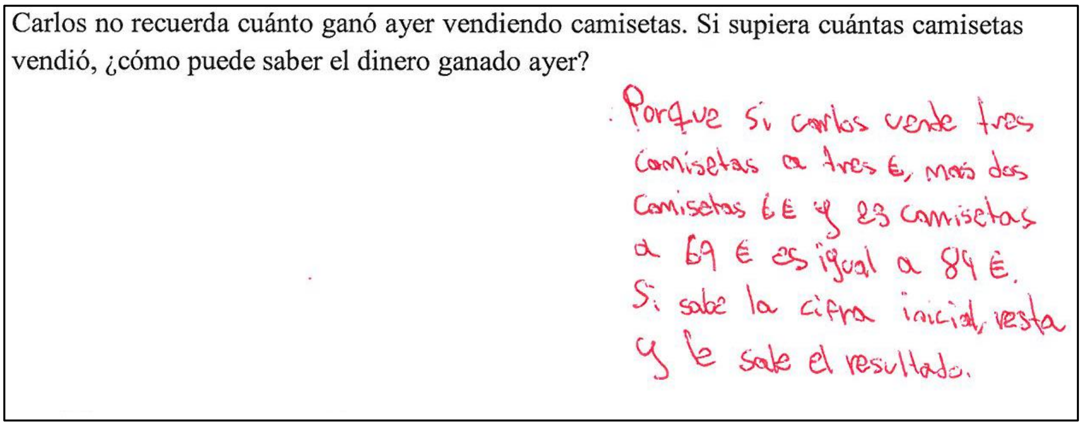
Existen casos en que los estudiantes de un mismo grupo de trabajo, plantean el patrón inapropiado. Los cuales hemos justificado por la falta de comprensión de la pregunta. Un ejemplo, es la respuesta de A3 quien plantea la operación inversa.

A3: *Contar el dinero que tiene y dividiéndolo por tres.*

Hemos encontrado otras respuestas en donde se deduce que los estudiantes se confundieron con las respuestas que preguntas anteriores, como A19 y A20 (compañeros del mismo grupo).

A19: *Sumando nueve más seis y después ponderar 15 más 69.*

La figura 17 muestra la respuesta de A20 en su ficha de trabajo donde relaciona las respuestas de las preguntas anteriores con la pregunta Nº4 (A20 es parte del grupo de A19)


Carlos no recuerda cuánto ganó ayer vendiendo camisetas. Si supiera cuántas camisetas vendió, ¿cómo puede saber el dinero ganado ayer?

Porque si carlos vende tres camisetas a tres €, mas dos camisetas 6 € y 23 camisetas a 69 € es igual a 84 €. Si sabe la cifra inicial, resta y le sale el resultado.

Figura 17. Respuesta A20.

Pregunta 5

Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.

La construcción de tablas de información por los estudiantes no fue totalmente conseguido, mostraron dificultades en la elección y organización de los datos (número de camisetas y ganancia total). Se aprecia que los estudiantes de la mayoría de los grupos contestaron de igual manera que sus compañeros. A continuación se dan a conocer ejemplos de respuestas observadas en las fichas de trabajo.

Algunos estudiantes completaron las tablas con los datos de las respuestas de las preguntas anteriores. Como es el caso de A14 (grupo 5) quien construyo la tabla (figura 18).

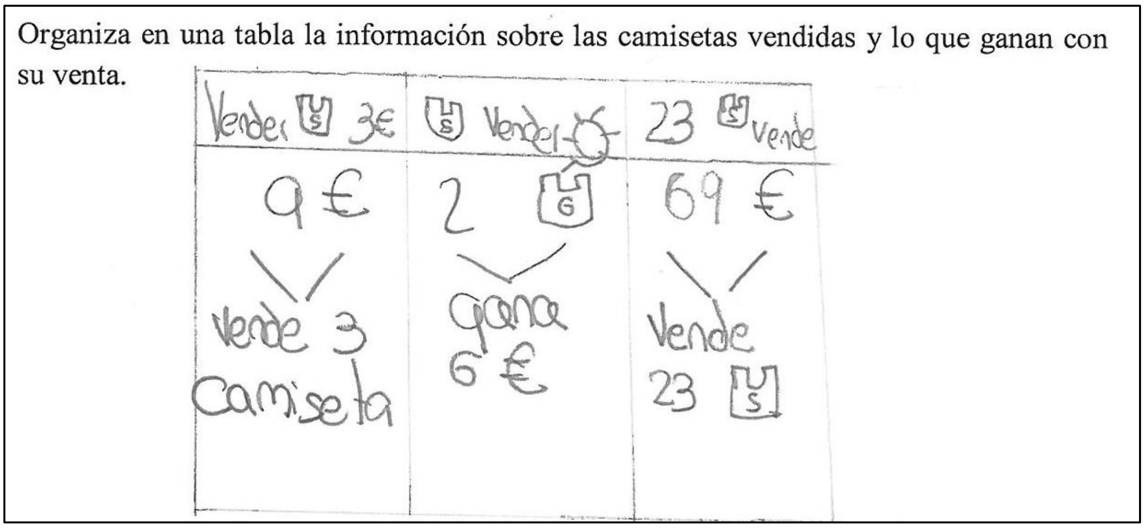


Figura 18. Respuesta A2.

A continuación se da a conocer el fragmento del dialogo entre A14 y el profesor-investigador acerca de la tabla de información (video 6). En el cual se reconoce la relación de correspondencia que expresa el estudiante y el patrón funcional apropiado que establece.

Profesor-Investigador: *Y que has puesto aquí en la primera columna ¿qué has puesto?*

A14: *Que al vender 3 camisetas en 3 euros, gana 9 euros*

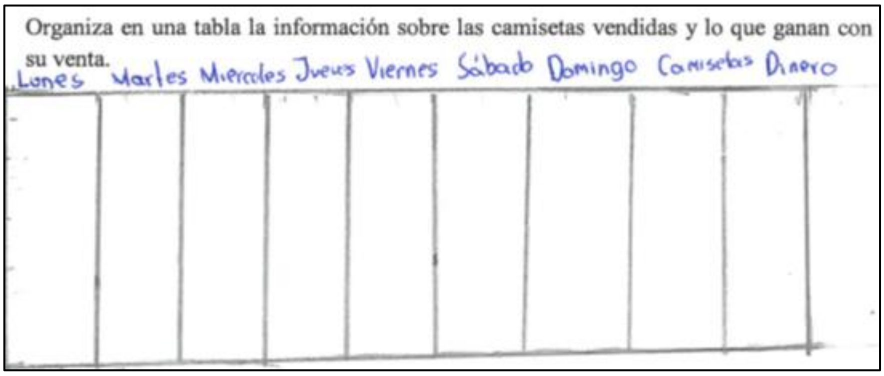
Profesor-Investigador: *En la segunda ¿qué has puesto?*

A14: *Al vender dos camisetas gana 6 euros*

Profesor-Investigador: (indica la última columna)

A14: *Ahora he puesto que al vender 23 camisetas gana 69 euros.*

Una de las dificultades fue adaptar la tabla a los días, horas y/o semanas, debido a que los estudiantes utilizaron la información de la pregunta anterior (pregunta 4). Por lo que hubo muchos estudiantes, compañeros del mismo grupo, que no lograron organizar tablas, como es el caso de A6 (grupo 2), en la figura 19.

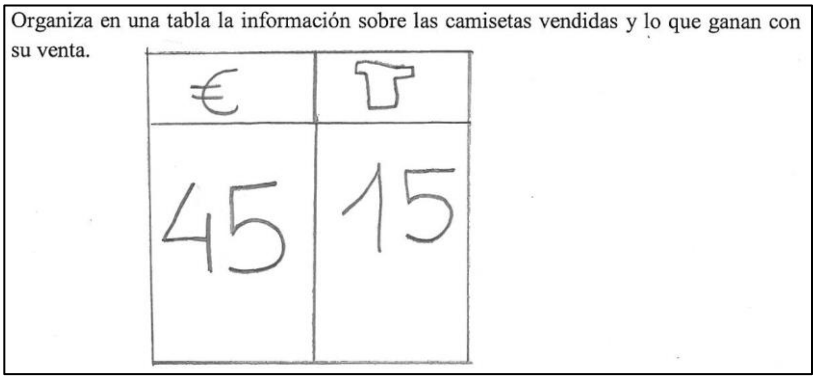


Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.

Lunes	Martes	Miercoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Camisetas	Dinero

Figura 19. Respuesta A6.

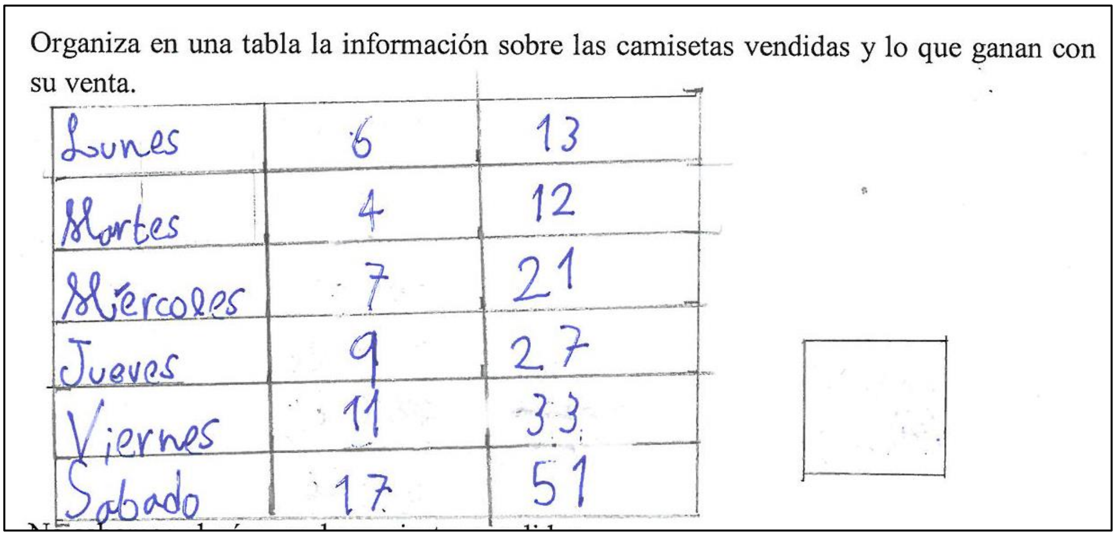
Hubo otras tablas, como la figura 20 en donde los estudiantes no logran organizar datos, solo relacionan una cantidad de camisetas específica con la ganancia total, como es el caso de la respuesta de A11 (grupo 3).


Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.

€	
45	15

Figura 20. Respuesta A11.

Otro ejemplo que muestra un mayor logro comparado con el caso anterior, es tablas construidas por A2, (grupo 1), quien muestra una relación entre las cantidades, interpretando la variable, como "cantidad variable" dando a conocer números de entrada y salida (dominio y recorrido), aunque no escribe el nombre de las variables (camisetas-ganancia) como se observa en la figura 21.


Organiza en una tabla la información sobre las camisetas vendidas y lo que ganan con su venta.

Lunes	6	13
Martes	4	12
Miércoles	7	21
Jueves	9	27
Viernes	11	33
Sabado	17	51

Figura 21. Respuesta A2.

Pregunta 6

No sabemos el número de camisetas vendidas. Escribe una letra para referirte a ese número camisetas vendidas que no conoces: ¿Por qué elegiste esa letra? ¿Qué valores puede tomar?

Los estudiantes proponen diversas formas para seleccionar una letra para referirse al número de camisetas: eligen letras según el orden de letras del abecedario, las relacionan con números romanos, letra inicial de su nombre, letra como etiqueta u objeto, letra como cantidad desconocida, relacionan las letras con números decimales y letras de una ecuación. A continuación se dan a conocer los datos que hacen alusión a cada uno de estos tipos de respuesta.

Letra en el alfabeto

Algunos estudiantes relacionan la letra con el orden de las letras del abecedario, un ejemplo, es la respuesta de A20 quien ha seguido un patrón para encontrar una letra específica, como se aprecia en el siguiente fragmento:

> A20: L*a "c" porque, el abecedario tiene 25 letras y si volvemos a contar hasta la letra "c", son 28".*
>
> Profesor-Investigador: *A20, es porque habéis estimado que vende 28 camisetas, has dicho.*
>
> A20: *Sí.*
>
> Profesor-Investigador: *Y habéis contado, dando vuelta al alfabeto.*

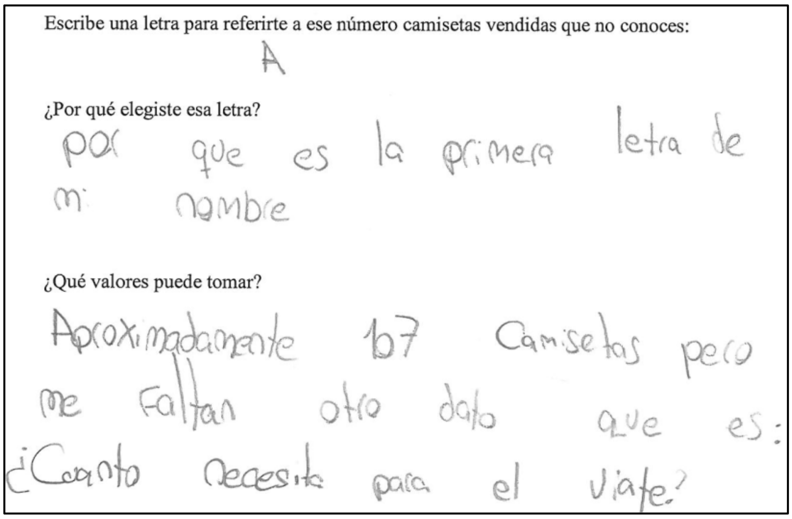
Números romanos

Algunos estudiantes relacionan la letra con números romanos, ya que buscan un número cercano al número de camisetas elegido. Por ejemplo, A7 afirma:

> A7: *Que nosotros hemos puesto la "x" porque si, nuestro número era el 12, el número 10 el que más se acerca al 12, mientras que no sea de (inaudible) letra, entonces hemos puesto la "x".*

Letra inicial de un nombre

En algunos casos los estudiantes eligen la letra inicial de su nombre, pero no logran identifican qué representa la letra. Como es el caso de A14 en la figura 22.


Escribe una letra para referirte a ese número camisetas vendidas que no conoces:

A

¿Por qué elegiste esa letra?

por que es la primera letra de mi nombre

¿Qué valores puede tomar?

Aproximadamante 67 Camisetas pero me Faltan otro dato que es: ¿Cuanto necesita para el viaje?

Figura 22. Respuesta A14.

Etiqueta u objeto

En algunas respuestas se aprecia la dificultad para definir los valores que puede tomar la variable, como es el caso de los alumnos del grupo 3, en donde luego de la intervención del profesor-investigador a través de preguntas, los estudiantes modifican su comprensión dando una respuesta que apunta a la interpretación de esa letra como una etiqueta u objeto.

Profesor-Investigador: *Pero, aquí dice, escribe una letra referente a ese número, has hecho la "x" para representar los números ¿de qué?*

A10: *De lo que sea.*

A11: *El número sería el 3, podría ser "6"*

Profesor-Investigador 3: *Dice, indica una letra para referirte a ese número de camisetas que no conoces.*

A12: *La "x"*

A13: *Pero no es lo mismo.*

Profesor-Investigador: *Habéis dichos que la "x"*

A12: *Representa todos los números*.

Profesor-Investigador: *Y ¿que habrá después?*

A12: *Todos los números menos los decimales* (Inaudible)

A10: *Si puede.*

A12: *Si puede, si puede, pero normal sería que no.*

A10: *(inaudible)*

Profesor-Investigador: *Pero "x" es el número de qué.*

A12: *De todos los números, número de camisetas.*

A10: *De camisetas vendidas.*

A12: *Si es de perro, sería de perro.*

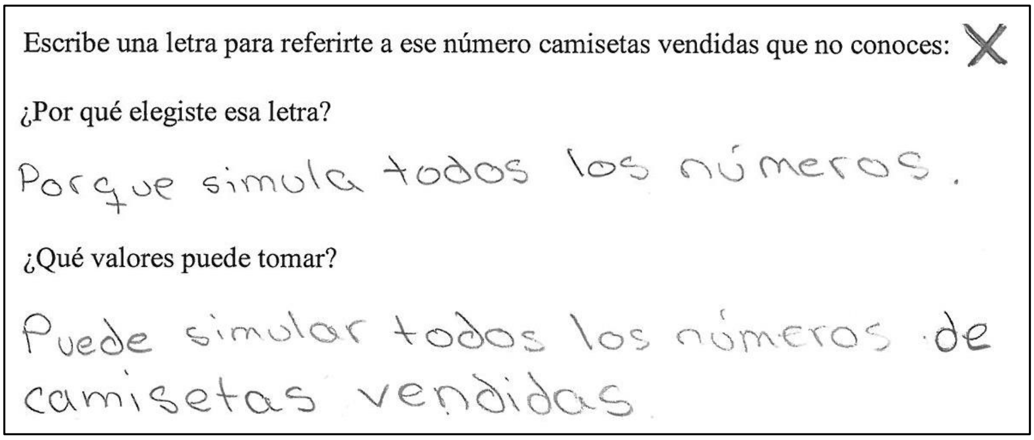
Profesor-Investigador: *Claro, si fuera de perros sería de perros, pero eso es importante para saber los valores que puede tomar.*

A10: *¿Qué valores puede tomar?*

A12: *Todos los números de camisetas vendidas.*

Cantidad desconocida

Algunos estudiantes interpretaron la letra como una cantidad desconocida, como se ejemplifica en la respuesta A19 en su hoja de respuesta en la figura 23.


Escribe una letra para referirte a ese número camisetas vendidas que no conoces: X

¿Por qué elegiste esa letra?

Porque simula todos los números.

¿Qué valores puede tomar?

Puede simular todos los números de camisetas vendidas

Figura 23. Respuesta A12.

Letra que representa un número decimal

Un caso que ha llamado nuestra atención es la respuesta de A10, quien propone la "*x*" para representar el número decimal de camisetas, justifica su respuesta de la siguiente manera:

> A10: *Creíamos que la x no podía tomar los valores de casi todos los números, porque no podía utilizar el número decimal, pero al final nos dimos cuenta de que sí, que sí podía, porque "tres coma cinco" mas x es igual "seis" y el resultados es "dos coma cinco", entonces puedes utilizar también decimales".*

Letra de una ecuación

Otro estudiante profundiza la situación de designar una letra que represente el número de camisetas, y lo relaciona con una ecuación lineal, haciendo una diferencia entre una *x* de una ecuación y una *x* de número Romano, el estudiante ejemplifica una ecuación, asignando valores numéricos.

> Profesor-Investigador: *¿Quién ha dicho? no es lo mismo una ecuación, A13 haber ¿por qué?*
>
> A13: *Porque una ecuación quiere decir, no es lo mismo una "x" de una ecuación que una "x" de números romanos, la "x" de la ecuación es, puede ser cualquier número igual que la y (griega), pues eso significa por ejemplo, yo qué se, cinco más x es diez, pues la "x" es igual a cinco.*
>
> Alumna 12: *La "x" la puedo utilizar (...) por cualquier número.*

Algunos compañeros dicen que los que se está planteando no es lo mismo que una ecuación, pero en este caso concluyen que la *x* puede tomar cualquier valor numérico del cual se tiene desconocimiento.

Profesor-Investigador: *Sí A13 ha dicho (...) que es una "x" pero podría haber sido cualquier otra letra, ¿eso dice? y tu A10 ¿estás de acuerdo con eso? o tiene que ser "x"*

A10: *Yo, nosotros habíamos llegado al acuerdo, creo que la idea no sé si fue de A11 o de alguien, de que era "x" porque representaba todos los números, pero...*

A13: *No, pero si hablamos de ecuaciones la "y", la "w" la "a" cualquiera*

A10: *Tú mismo has dicho, no es lo mismo una ecuación que esto*

A13: *Ya está, aquí la "x" representa al diez y cualquier número*

Profesor-Investigador: *Pero, podría haber puesto "y"*

A10: *Sí*

A13: *Sí, si se tratara de ecuaciones*

Profesor-Investigador: *En este caso concreto podría haber utilizado cualquier otra letra?*

A13: *Yo creo que sí*

Profesor-Investigador: *Tú crees que sí*

A13: *Cualquier otra letra representaría cualquier número*

A10: *Yo diría que también, pero prefiero "x"*

Profesor-Investigador: *Tú prefieres "x" no?*

A10: *Prefiero "x" pero si fuera "y" o si fuera el que sea, tampoco diría que estaría mal totalmente.*

Pregunta 7

Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana? Si vende 1 camisetas más, ¿cuánto gana?

Ante esta pregunta la mayoría de los estudiantes expresan una relación entre el número de camisetas vendidas y la ganancia. El siguiente fragmento describe el momento de la puesta en común ante el grupo grande (video cámara fija).

Profesor-Investigador: *Bien, atentos, que ya nos queda muy poquito. Habéis hecho una tabla y ahora nos pregunta ¿cuánto paga por cada camiseta?*

Alumnos: *3 euros*.

Profesor-Investigador: *Y la siguiente pregunta era si vende una camiseta más ¿cuánto gana?*

Alumnos: *6 euros*.

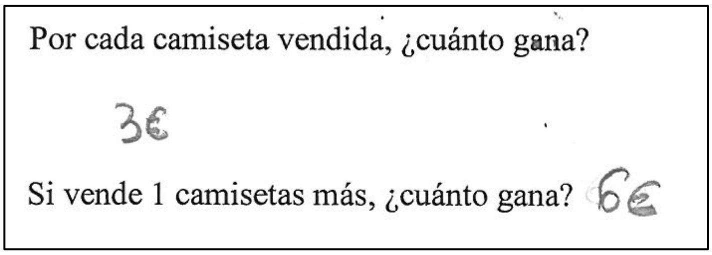
Profesor-Investigador: *A ver qué has dicho...Carmen dice que 3 euros más*

A2: *6 euros*.

Profesor-Investigador: *¿Qué os parece eso? ¿Estáis de acuerdo?*

Alumnos: *Sí*.

Las fichas de trabajo entregan mayor información para nuestro análisis, por las diversas respuestas arrojadas. Algunos estudiantes dan a conocer respuestas directas como se aprecia en la figura 24.



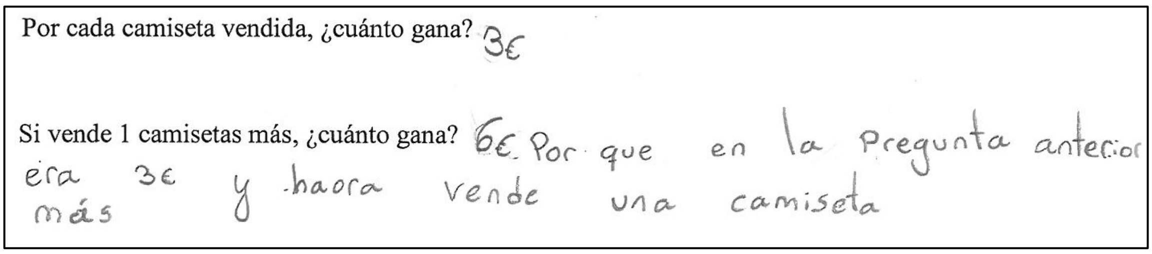
Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana?

3€

Si vende 1 camisetas más, ¿cuánto gana? 6€

Figura 24. Respuesta A15.

Otros estudiantes dan a conocer respuestas fundamentadas, de las cuales se infiere que reconocen una relación entre cantidades, específicamente una relación de covariación. Como es el caso de la A5 en la figura 25. Aunque la respuesta presenta el patrón funcional en forma implícita, podemos inferir que existe evidencia de pensamiento funcional en el estudiante.



Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana? 3€

Si vende 1 camisetas más, ¿cuánto gana? 6€. Por que en la Pregunta anterior era 3€ y haora vende una camiseta más

Figura 25. Respuesta A15.

Para finalizar la actividad se realiza una puesta en común en donde los alumnos en conjunto con el profesor-investigador eligen letra que represente el número de camisetas, luego de diversas propuestas, optan por “a” de Almería. Luego, el profesor-investigador les da la instrucción para que con esta letra completen la fila gris de la tabla, en donde se espera que los estudiantes escriban la relación funcional.

En esta etapa hubo alumnos que tuvieron dificultad para poder comprender qué representaba la letra, surgen preguntas como ¿Cuál es el número *a*? Otros estudiantes expresaron que “*a”* representa el número de camisetas. El siguiente fragmento ejemplifica esta situación (video 16).

> Investigadora 3: *y esto ¿qué significa? esto de aquí, eso ¿qué quiere decir?*
>
> A14: *pues, que el número que uno piensa por 3, que es lo que valen las camisetas, me da 21 euros*
>
> Profesor-Investigador: *21 euros, porque has pensado en ese momento que la “a” vale 7*

La figura 24 ejemplifica una de las respuestas dadas por los estudiantes, En este caso A12 escribe la notación algebraica que representaría la relación funcional.

Número de camisetas	Euros
1	3 x 1 = 3 €
7	3x 7 = 27 €
12	3x12 = 36 €
16	3x 16 = 48 €
20	3x 20 = 60 €
24	3X24 = 72 €
⇨ A	➡ A x 3

Figura 26. Respuesta A12.

Comparación de preguntas

Observados los datos que arrojan las transcripciones de los diálogos referentes a las ocho preguntas en conjunto con las fichas de trabajo desarrolladas, se identificaron avances durante el desarrollo de las preguntas. Las primeras tres peguntas dirigidas a casos particulares facilitaron la comprensión de los estudiantes en forma secuencial, inicialmente empleando como estrategia aritmética la operación de multiplicación, reconociendo la relación entre las variables (ganancia por cada camiseta y ganancia total), identificando el patrón funcional adecuando (número de camisetas vendidas por el valor de cada camiseta) y reconociendo la relación de correspondencia.

Se observó que las respuestas de las preguntas, P.1, P.2, y P3, en las fichas de trabajo eran en su mayoría de tipo directas. Un dato que nos han parecido relevantes, por la relación que realiza entre las preguntas, es la respuesta de A11 en la ficha de trabajo, donde en la pregunta 1 da a conocer la respuesta correcta (9 euros), y en la pregunta 2, responde que se pueden vender 5 camisetas por la mañana y ganaría 45 euros con ellas. De esta respuesta hemos inferido que A11 aún no relaciona las variables (número de camisetas con el valor de cada una), ya que confunde los datos y utiliza como estrategia aritmética la multiplicación entre 5 y los 9 euros de la respuesta 1.

En la pregunta 4, hubo estudiantes que lograron verbalizar el patrón funcional implicado en la tarea, pero en algunas situaciones se observó confusión, como es el caso de A19, quien en las primeras preguntas (P1, P2 y P3) demostró la comprensión del patrón funcional de la relación entre las variables, pero en la actual pregunta, no reconoció el patrón adecuado. De este caso hemos inferido que la respuesta errada se debe a la dificultad en la comprensión de la pregunta de A19.

En la pregunta 5 con respecto al sistemas de representación (tablas de información), se observa que los estudiantes no lograron construir tablas que representaran las camisetas y la ganancia, solo hubieron tablas incompletas que tenían valores de entrada y valores de salida, pero no especifican que corresponden a camisetas y ganancia. Además, en algunas tablas los estudiantes relacionaron los datos de las preguntas anteriores, en donde se presentaban casos particulares (grupo 4 y 5).

El la pregunta 6, hemos observado que los estudiante han relacionan esta pregunta con la información de la pregunta 2. Además, ha sido una pregunta que ha proporcionado bastante información, debido a que los estudiantes propusieron diversas formas de elección de una letra que represente la variable.

Finalmente, la preguntas 7 propició evidencia de que los estudiantes utilizaron otra forma de relacionar las variables, la relación de covariación.

Con respecto a las dificultades que se observaron en los estudiantes en el desarrollo de la tarea, podemos decir, que hubo ciertos momentos en que el alumnado tuvo mayores dificultades en la resolución de las preguntas, específicamente en las relacionadas con representaciones de las relaciones entre variables en las tablas y en la elección de una letra que representara la cantidad de camisetas.

Destacamos finalmente, que todas las dificultades y aciertos nos han proporcionado oportunidades para un análisis de datos más profundo.

CAPITULO V. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las principales conclusiones a las que hemos llegado tras el análisis de los datos recogidos en este estudio. Propiciando una descripción clara y detallada, estructuramos este capítulo en tres partes: logro de los objetivos y principales aportes de la investigación; limitaciones; y principales líneas abiertas que deja el estudio.

5.1 Logro de los objetivos

Los datos de la sesión de trabajo en la cual hemos basado nuestro estudio, nos han permitido abordar los objetivos de investigación planteados, a través del análisis de las transcripciones, complementadas con las producciones escritas, que corresponden a las respuestas de los estudiantes en las fichas de trabajo. Ello nos ha facilitado identificar evidencia de pensamiento funcional en los estudiantes de quinto de educación primaria a partir de un problema contextualizado (problema de las camisetas).

El objetivo general de nuestro estudio fue identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria. Mediante el análisis cualitativo de las respuestas del alumnado (unidades de análisis), hemos observado que a través de un trabajo sistemático, hubo comprensión de la relación entre la cantidades variables, y que los estudiantes reconocen un patrón funcional, que utilizaron para obtener la ganancia total. A través de esta información podemos constatar que, en su mayoría, los estudiantes evidencian pensamiento funcional, por lo cual consideramos el objetivo general como logrado.

Del objetivo general se proponen tres objetivos específicos, los que detallamos a continuación:

El primer objetivo específico fue analizar el uso de representaciones en el desarrollo de una tarea sobre pensamiento funcional. Entre las respuestas de las preguntas dirigidas a explorar el uso de representaciones, observamos que los estudiantes no fueron capaces de construir y completar tablas de información, sin embargo establecieron una relación entre los valores de entrada y los valores de salidas, mediante de la aplicación del patrón funcional apropiado.

El uso de letras como herramienta simbólica de representación, guío a los estudiantes a representar el patrón funcional de la función afín. Entre las simbolizaciones que hemos identificado como logradas, proponemos la siguiente respuesta como ejemplo: A x 3; en ella se aprecia que el estudiante escribe la relación funcional representada en forma algebraica.

Además, se utilizaron otros sistemas de representación en el desarrollo de las distintas preguntas. La mayoría de los estudiantes expresaron el patrón funcional de la relación entre variables a través de la representación verbal, sin necesidad de utilizar ejemplos. Se observó el uso de representaciones múltiples en la actividad en construyeron tablas de información, por ejemplo, hubo estudiantes que en las mismas tablas expresaban el patrón funcional de forma verbal. En las fichas de trabajo se observó que solo un alumno (A1) utilizo la representación simbólica-numérica para resolver la operación de multiplicación entre el número de camisetas y la ganancia, por lo que se infiere hubo estudiantes que solo utilizaron cálculo mental. Finalmente, el sistema de representación pictórica fue el menos frecuente, solo observo en tablas donde algunos estudiantes dibujaron camisetas que representaban esta palabra.

Por tanto, el análisis de los datos obtenidos nos permite constatar, en relación al primer objetivo específico relacionado con el uso de representaciones en el desarrollo del pensamiento funcional, que el uso de tablas no es una representación que utilicen de manera natural. Desconocen cómo construirlas. Sin embargo, cuando se les facilita dicho modelo de representación les sirve de ayuda para expresar algebraicamente la relación funcional.

El segundo objetivo específico es identificar las principales relaciones entre variable establecida por los estudiantes de 5º de primaria investigado. En este sentido, se observó que en el desarrollo de las preguntas, en forma secuencial, los estudiantes fueron manifestando el uso de los distintos tipos de relaciones funcionales.

Consideramos que la relación de correspondencia es el primer tipo de relación funcional que explicitan en las respuestas, y el que se manifiesta claramente en el desarrollo de la actividad.

La relación de covariación fue expresada por los estudiantes en preguntas que propiciaban el uso de este tipo de relación funcional, como se explicitó en las respuestas de la pregunta 6 y en las tablas de información, ya que algunos alumnos comprendieron que, con la venta de una cantidad de camisetas, se obtendría una ganancia mayor, o en forma viceversa.

En cuanto patrón recursivo, es un tipo de relación funcional que no ha sido manifestado por los estudiantes.

Finalmente, el tercer objetivo específico fue estudiar el papel atribuido a la variable por los estudiantes de 5º de primaria investigado. El análisis de los datos ha demostrado que los estudiantes interpretan de diversas formas la variable, lo que se vio explicitado durante el desarrollo de toda la actividad. En un primer momento hubo estudiantes que reconocieron que se buscaba una cantidad desconocida (número de camisetas que se venderían). En la pregunta donde debía buscar una letra para referirse al número de camisetas vendidas, algunos pensaron en la letra como una etiqueta que representara todos los números posibles de camisetas vendidas. Otros estudiantes nombraron una letra del abecedario, otros la relacionaron con un número romano (x), también propusieron la primera letra de su nombre.

Entre las respuestas que nos han parecido destacables, son las de un grupo de estudiantes que relaciono la letra con un número decimal, lo cual propicio una discusión valiosa, debido al análisis que hizo el alumnado de dicha situación. Además, reconocemos el aporte de un estudiante que relaciono la letra "x", con la letra de una ecuación, dando a conocer un ejemplo de una situación particular.

Finalmente, hemos podidos observar que algunos estudiantes utilizaron la letra como un número generalizado (A x 3) en la finalización de la actividad.

5.2 Aportaciones del estudio

Nuestro estudio nos ha proporcionado información que nos ha parecido importante destacar.

Los resultados obtenidos sobre las diversas interpretaciones de la variable, nos dan cuenta de nuevos hallazgos, relacionado con la interpretación de la variable como un número decimal y como la relación que hace un estudiante con la letra de una ecuación.

Otro resultados que consideramos de interés es que los estudiantes de 5º de primaria estudiados, no sabían elaborar tablas que recogiera la información de la relación entre las variables. Esto pudo suponer que no apareciera el uso de la recursividad.

Por otra parte, cuando a los estudiantes se les ha mostrado el uso de las tablas, éstas han facilitado el reconocimiento y expresión de la relación funcional.

5.3 Limitaciones de la investigación

Al ser este un estudio de tipo exploratorio, no pretendemos generalizar los resultados obtenidos, sino más bien, describir detalladamente las evidencias de pensamiento funcional que se manifiestan en los estudiantes que han participado de nuestro estudio.

Consideramos como una limitación el tiempo disponible para su realización y la extensión limitada de la memoria, lo que no permite dar mayor profundidad a algunos aspectos relacionados con el análisis de los datos.

5.4 Líneas abiertas

Como se describió en un principio, el pensamiento funcional es una línea actual de investigación, por lo que falta mucho por investigar en este campo.

A través de nuestro estudio, hemos indagado en las principales características del pensamiento funcional, como son las formas en que se relacionan las variables, la noción de variables y los distintos sistemas de representación.

Las temáticas de líneas de continuación en esta investigación son:

- Profundizar en la interpretación de la noción variables y las relaciones que se establecen entre variables en el pensamiento funcional.
- Estudiar las estrategias que evidencian en la obtención de la relación inversa
- Estudiar de qué manera influye la construcción de tablas de información, como sistema de representación que ayudan a la identificación de una relación funcional.
- Realizar estudios que involucren tareas donde se aprecien otros conjuntos numérico, como los números racionales.
- Realizar estudios con otro modelo funcional y no solo lineales.
- Realizar estudios comparativos entre distintos grupos de estudiantes, que nos permitan contrastar información.

REFERENCIAS

Alexándrova, N. V. (Ed.). (2015). *Diccionario histórico de notaciones, términos y conceptos de las matemáticas* (Navarro, C. D., Palomino, J. E. y Abanto, Y., Trad.). Moscú, Rusia: URSS.

Ayalon, M., Watson, A. y Lerman, S. (2015). Progression Towards Functions: Students' Performance on Three Tasks About Variables from Grades 7 to 12. *International Journal of Science and Mathematics Education.*

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Berlin, Alemania: Springer.

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I. y Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation / Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología, 36*(1), 138-165.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Murphy, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34–63.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69-81.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (en prensa). Functional relations in early algebraic thinking. En *Proceedings of 13th Internacional Congress on Mathematical Education*. Hamburgo, Alemania.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3–22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Institute.

Carraher, D., Schliemann, A.D., y Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address. XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Tucson, AZ, October, 2000. Available in CD.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*,*26*(1), 66-86.

Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). A tierra la teoría de la investigación: procedimiento, canónes y criterios de evaluación. *Sociología Cualitativa*, *13*(1), 3-21.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. y Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria.* Un estudio exploratorio (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(1), 199-219.

Goldin, G. A. (2014). Mathematical Representations. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.409-413). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Hernández-Sampieri R., Fernández, C. y Baptista, L. P. (2003), *Metodología de la Investigación* (3a ed.). México, DF: Mc Graw-Hill.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Martínez, V. (2015). *Funciones: teoría y práctica con más de 800 cuestiones y ejercicios totalmente resueltos paso a paso*. Madrid, España: EZA.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización* (Trabajo fin de máster). España. Universidad de Granada.

Mineduc. (2013). *Matemática. Programa de estudio quinto año básico*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88

Moreno, A., del Río, A, Molina y M., Cañadas, M. C. (2015). *Tareas para promover el pensamiento funcional. Una propuesta para tercer ciclo de educación primaria.* Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133

Real Academia Española. (2014). Diccionario de la lengua española (23º ed.). Madrid, España: Autor.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37–98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133-160) New York, NY: LEA [u.a.].

Strauss, A. L., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Warren, E. , Cooper, T. y Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.

Weisstein, E. W. (1999). Arithmetic progression; closed-form solution; function; geometric sequence; generalized hypergeometric function; sequence [Entrada electrónica]. MathWorld—A Wolfram Web Recuperado de http://mathworld.wolfram.com.

Yáñez, J. (2015). *Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria* (Trabajo Fin de Máster no publicado). Universidad de Granada, España.

ANEXO A. PROTOCOLO ESCRITO

El siguiente enlace dirige al protocolo escrito, instrumento elaborado para la recogida de información.

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUOGFMVkJMajBWb3c

ANEXO B. TRANSCRIPCIÓN DE CÁMARA FIJA

El siguiente enlace dirige a la transcripción de los vídeos proveniente de la cámara fija y cámara móvil.

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUbU80V001Z0xrLUU

ANEXO C. FICHAS DE TRABAJO

El siguiente enlace dirige a las fichas de trabajo desarrolladas por los estudiantes.

Fichas de trabajo (1)

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUb1hEMG85dzZPbGc

Fichas de trabajo (2)

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUc3RFWVR5MGJDcDA

Fichas de trabajo (3):

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUSUlDR3BGeU1DQms

Fichas de trabajo (4):

https://drive.google.com/open?id=0Bzk_rjRnGWOUb3FSblhZd3htalE