



Integración de herramientas de IA generativas en la docencia
universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en
estudios de grado.

Guía de inicio

*¿Cómo usar una IA generativa para ayudarme en mi
asignatura?*

M. D. Ruiz Jiménez & F. Torralbo

10 de octubre de 2024

1. Introducción: ¿Qué es una IA generativa?

Una IA generativa es un tipo de inteligencia artificial diseñada para crear contenido nuevo, como imágenes, texto, música, vídeo, código y otros tipos de datos, en lugar de simplemente analizar o clasificar información existente.

Usar una IA Generativa para ayudarte a mejorar tu aprendizaje y productividad en el desarrollo de cualquier asignatura de grado o en tu vida diaria.

Ejemplos de IA generativas son: ChatGPT, Gemini de Google, y Microsoft Copilot. Están diseñadas para ofrecer soporte en diversas actividades académicas. Estas herramientas pueden, entre otras cosas,

- obtener explicaciones detalladas sobre conceptos de una asignatura,
- asistirte con la resolución de problemas de prácticas,
- ayudarte con prácticas de programación: resolver errores de código, pedir ayuda con algoritmos específicos, optimizar tu código,...
- realizar diversos cálculos matemáticos,

- autoevaluación: generar preguntas/tests para repasar conceptos sobre una asignatura, proponer nuevos problemas similares a los de clase,...

Todo ello de manera conversacional. Estas herramientas actúan como asistentes inteligentes, complementando tu proceso de aprendizaje y ayudando a reducir las barreras a la hora de estudiar.

2. Crear una cuenta de acceso

Existen diferentes servicios que proporcionan hoy día acceso (gratuito o bien de pago) a distintas IA. Para obtener una cuenta basta con registrar un correo electrónico. En algunos casos, es necesario que el correo electrónico pertenezca a la compañía que desarrolla la IA (p.e. para usar Copilot es necesario un correo de Microsoft mientras que para usar Gemini, de Google). La UGR proporciona a los alumnos a través del acceso identificado una cuenta institucional de Google¹ y de Microsoft².

Destacamos los siguientes:

- ChatGPT³: usar vuestro correo electrónico (personal o institucional).
- Google Gemini⁴: usar la cuenta institucional de Google⁵ (@go.ugr.es) para activar la cuenta.
- Microsoft Copilot⁶: Consultar la guía proporcionada por los servicios informáticos de la UGR⁷ y activar la cuenta (@ms.ugr.es).

Algunas herramientas ya integran alguna IA generativa que ayuda a su uso. Ejemplos son Google Colaboratory⁸ (que incluye asistencia en la programación usando Gemini), el editor VS Code⁹ (que integra Copilot).

¹<https://csirc.ugr.es/informacion/servicios/google-apps#title1>

²<https://csirc.ugr.es/informacion/servicios/office365#contenido1>

³<https://chatgpt.com/>

⁴<https://gemini.google.com/app>

⁵<https://csirc.ugr.es/informacion/servicios/google-apps#title1>

⁶<https://copilot.microsoft.com>

⁷<https://csirc.ugr.es/informacion/servicios/office365/copilot>

⁸<https://colab.research.google.com/>

⁹<https://code.visualstudio.com>

3. ¿Cómo hacer una pregunta? Generación de *prompts*

Un *prompt* es una instrucción o entrada que se da a una IA generativa para que produzca una respuesta o contenido, como texto, imágenes, música, etc. Actúa como la guía o contexto que la IA usa para generar el resultado solicitado.

Aquí tienes una lista de pasos para hacer una consulta efectiva a una IA generativa:

1. Define claramente lo que necesitas

Antes de hacer la consulta, ten en mente qué tipo de información o contenido deseas obtener. Ejemplos: ¿Quieres generar un texto creativo, informativo o una respuesta técnica? o ¿Buscas detalles sobre un tema específico o general?

2. Sé específico

Cuanto más específica sea tu pregunta, más precisa será la respuesta. Por ejemplo:

- **General:** "Háblame sobre inteligencia artificial."
- **Específico:** "¿Cómo funcionan los modelos generativos en IA?"

3. Proporciona contexto (si es necesario) Si tu pregunta tiene relación con algo mencionado antes, proporciona un poco de contexto para evitar ambigüedades. Por ejemplo: "Dado lo que dijiste sobre IA generativa, ¿puedes profundizar en las redes generativas adversarias?"

4. Haz preguntas abiertas o cerradas según lo que busques

- **Preguntas abiertas** si deseas una explicación más detallada o creativa: "Explícame cómo podría cambiar el futuro del arte digital con IA generativa."
- **Preguntas cerradas** si buscas una respuesta rápida o concreta: "¿Cuándo fue creada la primera IA generativa?"

5. Usa ejemplos o descripciones adicionales si tienes algo específico



en mente - Si estás pidiendo una imagen, texto creativo, o una idea, los detalles ayudan: - “Genera una imagen de un paisaje futurista con montañas y rascacielos transparentes.” - “Escribe un poema sobre el otoño usando metáforas sobre el tiempo.”

6. **Solicita aclaraciones si es necesario** - Si la respuesta no es exactamente lo que esperabas o necesitas más detalles, puedes pedir aclaraciones: - “¿Podrías explicar esa parte de nuevo, pero con más ejemplos?” - “¿Puedes elaborar más en la parte técnica de tu explicación?”
7. **Usa comandos o acciones directas si es aplicable** - Si estás buscando generar contenido directamente, estructura tu consulta de manera clara: - “Escribe un cuento corto de ciencia ficción ambientado en Marte.” - “Genera una imagen de un dragón en un castillo medieval.”
8. **Pide sugerencias o alternativas** - Si no estás seguro sobre lo que necesitas exactamente, puedes pedir recomendaciones: - “Sugiere algunos temas para un artículo sobre IA.” - “¿Qué tipo de imágenes podría generar sobre ciudades futuristas?”
9. **Itera si es necesario** - No dudes en refinar tu consulta si la primera respuesta no cumple con tus expectativas: - “Me gustó la idea del cuento, pero ¿puedes hacerlo más detallado?”
10. **Especifica si deseas un formato particular** - Si necesitas el resultado en un formato o estilo particular, acláralo: - “Escribe una explicación técnica breve sobre IA generativa para un público experto.” - “Genera una descripción de producto para una tienda en línea.”

3.1. Ejemplo de consulta

A continuación se muestra un ejemplo de cómo usar algunos de los pasos mencionados para hacer una consulta efectiva a una IA generativa:

Consulta:

- **Define claramente lo que necesitas:** Quiero generar una historia de fantasía.
- **Sé específico:** Quiero que sea sobre un héroe en un mundo medieval



que descubre un secreto sobre su pasado.

- **Proporciona contexto:** El héroe es un joven guerrero que vive en un pequeño pueblo.
- **Usa ejemplos o descripciones adicionales:** Me gustaría que incluyas un dragón y un mago antiguo que lo guía.
- **Especifica formato:** Escribe un cuento corto de unas 100 palabras.

Resultado: Una IA generativa respondería con una historia siguiendo esos parámetros, ajustando detalles según las indicaciones claras y específicas dadas.

Siguiendo estos pasos, podrás formular consultas más efectivas para obtener las respuestas o contenidos que buscas de una IA generativa.

Nota: Usaremos los símbolos ,  y  para para visualizar las respuestas de Chatgpt, Gemini y Copilot respectivamente tanto al principio como al final del texto y así distinguirlas del texto de la guía. Además observar que la salida puede ser diferente para cada usuario aunque se utilice el mismo prompt para la consulta.

Ejemplos reales

Quiero generar una historia de fantasía, que sea sobre un héroe en un mundo medieval que descubre un secreto sobre su pasado. El héroe es un joven guerrero que vive en un pequeño pueblo. Me gustaría que incluyas un dragón y un mago antiguo que lo guía. Escribe un cuento corto de unas 100 palabras.



Respuesta Chatgpt.

En el pequeño pueblo de Eldrin, vivía Kael, un joven guerrero cuyo pasado era un misterio. Una noche, un antiguo mago llamado Ardan llegó al pueblo, revelándole que su linaje estaba ligado a un dragón legendario, dormido en las montañas cercanas. Con su espada en mano y guiado por Ardan, Kael emprendió su viaje.

Al llegar a la cueva del dragón, descubrió un secreto asombroso: su sangre era la clave para despertar al dragón, no para destruirlo, sino para forjar una alianza. Con su nueva verdad, Kael aceptó su destino, sellando un vínculo entre hombre y bestia.





Respuesta Google Gemini.

¡Absolutamente! Aquí tienes un cuento corto para inspirar tu historia:

El Guerrero y el Dragón

Aiden, un joven guerrero de un pequeño pueblo, siempre había anhelado aventuras más allá de sus fronteras. Un día, mientras exploraba las ruinas de un antiguo castillo, tropezó con un viejo pergamino. Las palabras, escritas en una lengua desconocida, resonaron en su mente, revelando un secreto impactante: era descendiente de una antigua línea de reyes y portaba una marca ancestral, un dragón tatuado en su hombro.

Intrigado, Aiden se adentró en un bosque prohibido, donde lo esperaba un mago anciano. El mago, con ojos que habían visto siglos, confirmó la verdad. Le explicó que el dragón era un símbolo de poder y que Aiden estaba destinado a cumplir una profecía. Juntos, emprendieron un viaje épico para enfrentar a un mal ancestral que amenazaba su mundo. Aiden, el joven guerrero, se convertiría en el héroe que su pueblo necesitaba, guiado por el mago y el poder del dragón que llevaba en su sangre.

Elementos que puedes desarrollar:

- **El dragón:** ¿Es un espíritu, un animal real o una representación simbólica? ¿Cómo se conecta con Aiden?
- **El mago:** ¿Qué secretos guarda el mago? ¿Cuál es su verdadero objetivo?
- **El mal ancestral:** ¿Qué amenaza representa? ¿Quién o qué lo controla?
- **La profecía:** ¿Qué dice exactamente? ¿Cómo se cumple?
- **El pueblo:** ¿Cómo reacciona el pueblo ante el descubrimiento de Aiden? ¿Lo apoyan o lo rechazan?

Ideas adicionales:

- **Un objeto mágico:** Aiden podría encontrar una espada o un amuleto que aumente sus poderes.
- **Un rival:** Un antiguo enemigo de la familia de Aiden podría buscar vengarse.
- **Un sacrificio:** Aiden podría tener que tomar una decisión difícil para salvar a su pueblo.



Espero que este cuento te sirva como punto de partida para crear tu propia historia. ¡No dudes en preguntar si necesitas más ideas o detalles!

¿Te gustaría desarrollar alguna de estas ideas en particular?



Respuesta Microsoft Copilot.

En un pequeño pueblo medieval, vivía un joven guerrero llamado Einar. Un día, un antiguo mago llamado Alden llegó al pueblo y reveló a Einar un secreto sobre su pasado: era el último descendiente de una antigua línea de dragones. Para descubrir su verdadero poder, Einar debía encontrar y despertar al dragón dormido en las montañas.

Guiado por Alden, Einar emprendió un viaje lleno de peligros. Al llegar a la cueva del dragón, Einar recitó las palabras mágicas enseñadas por Alden. El dragón despertó, y con un rugido ensordecedor, reconoció a Einar como su legítimo heredero. Juntos, se prepararon para enfrentar los desafíos que les aguardaban.





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia
universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en
estudios de grado.

Ejemplos de uso I

*¿Cómo usar una IA generativa para ayudarme en las
prácticas de programación en Python?*

M. D. Ruiz Jiménez

10 de octubre de 2024

1. Introducción

Usar una IA Generativa para ayudarte en las prácticas de programación en Python es una excelente manera de mejorar tu aprendizaje y productividad. Herramientas como Chatgpt, Gemini, y Copilot están diseñadas para ofrecer soporte en la escritura de código y resolver dudas conceptuales. Con estas herramientas puedes:

- obtener explicaciones detalladas sobre conceptos de programación,
- resolver errores de código,
- pedir ayuda con algoritmos específicos,
- optimización de un código,
- generación de preguntas/tests para repasar conceptos de programación,
- etc.



Todo ello de manera conversacional. Estas herramientas actúan como asistentes inteligentes, complementando tu proceso de aprendizaje y ayudando a reducir las barreras a la hora de programar.

Esta guía y las siguientes pretenden cubrir las distintas opciones en las que una IA generativa podría ser de utilidad en una asignatura de programación.

Recordemos una pequeña guía de uso antes de ver los ejemplos:

1. **Define claramente lo que necesitas.** Antes de hacer la consulta, ten en mente qué tipo de información o contenido deseas obtener.
2. **Sé específico.** Cuanto más específica sea tu pregunta, más precisa será la respuesta.
3. **Proporciona contexto (si es necesario)**
4. **Haz preguntas abiertas o cerradas según lo que busques.**
 - **Preguntas abiertas:** si deseas una explicación más detallada o creativa.
 - **Preguntas cerradas:** si buscas una respuesta rápida o concreta.
5. **Usa ejemplos o descripciones adicionales si tienes algo específico en mente.**
6. **Solicita aclaraciones si es necesario.**
7. **Usa comandos o acciones directas si es aplicable.**
8. **Pide sugerencias o alternativas.**
9. **Itera si es necesario.**
10. **Especifica si deseas un formato particular.**

1.1. Otras consideraciones

Hay que tener siempre en cuenta que la IA puede equivocarse o no dar la respuesta correcta, por lo que deberemos comprobar los códigos proporcionados con suficientes ejemplos para ver que realmente soluciona nuestro problema. Además hay que consultar las fuentes para ver si éstas son fiables y no confiar ciegamente en la respuesta proporcionada, aunque puede ser una ayuda en nuestro aprendizaje en la asignatura y en particular, en las tareas de programación.

Además, remarcar que para aprender a programar es necesario que individualmente intentemos resolver nuestro problema y que, si queremos, después podemos apoyarnos en la IA para solucionar errores y dudas que tengamos.

Os animo a probar con otras consultas, distintas de las que veremos en la siguiente sección, en el programa de IA generativa que más os guste.

2. Práctica 1: Introducción a Python

Imaginemos que queremos ayuda en la resolución de problemas de mis prácticas de python. Veremos algunos ejemplos, resultados y cómo mejorar y guiar a la IA para que nos dé lo que realmente necesitamos.

2.1. Ejemplo de consultas con Chatgpt

Veamos un ejemplo de consulta y la respuesta dada por Chatgpt:

Estoy estudiando Fundamentos de Informática con python y quiero que me ayudes a resolver problemas de programación de python. La media geométrica de N números positivos es la n -ésima raíz del producto de los números. Calcular la media geométrica de tres valores positivos leídos desde teclado.



Descripción del Problema:

La **media geométrica** de tres números positivos a , b y c se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Se debe calcular la media geométrica de tres valores positivos que se leen desde el teclado.

Código en Python

A continuación se presenta el código en Python que resuelve el problema:

```
import math

# Leer tres valores positivos desde el teclado
a = float(input("Introduce el primer número positivo: "))
b = float(input("Introduce el segundo número positivo: "))
c = float(input("Introduce el tercer número positivo: "))

# Calcular el producto de los tres valores
producto = a * b * c

# Calcular la media geométrica
media_geometrica = math.pow(producto, 1/3)

# Mostrar el resultado
print(f"La media geométrica de los números {a}, {b} y {c} es  
: {media_geometrica:.4f}")
```

Explicación

- Usamos `float()` para convertir los valores leídos desde el teclado a números decimales, permitiendo tanto números enteros como decimales.
- Se calcula el producto de los tres números: $a \times b \times c$.
- Luego, la función `math.pow(producto, 1/3)` se utiliza para calcular la raíz cúbica del producto.
- Finalmente, el resultado se muestra en pantalla con 4 decimales usando el formato `:.4f`.

Prueba este código en tu entorno y verifica que te permita calcular la media geométrica de tres valores positivos.

Podríamos afinar más la consulta si lo necesitásemos como por ejemplo:

Aún no he dado la librería math en clase, ¿podrías resolverlo sin utilizarla?



¡Claro! Si aún no has visto la librería math, podemos resolver el problema sin utilizarla, usando una aproximación básica para calcular la raíz cúbica a partir de las propiedades de los exponentes en Python. Python permite elevar un número a cualquier potencia usando el operador `**`.

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Para evitar el uso de bibliotecas externas como math, podemos calcular la raíz cúbica elevando el producto de los tres números a la potencia $\frac{1}{3}$.

Código en Python

A continuación se presenta el código en Python que resuelve el problema sin usar la librería math:

```
# Leer tres valores positivos desde el teclado
a = float(input("Introduce el primer número positivo: "))
b = float(input("Introduce el segundo número positivo: "))
c = float(input("Introduce el tercer número positivo: "))

# Calcular el producto de los tres valores
producto = a * b * c

# Calcular la media geométrica (raíz cúbica del producto)
media_geometrica = producto ** (1/3)

# Mostrar el resultado
print(f"La media geométrica de los números {a}, {b} y {c} es
      : {media_geometrica:.4f}")
```

Explicación

- Los tres números se leen desde el teclado usando `input()` y se convierten a flotantes con `float()`.
- Se calcula el producto de los tres números: $a \times b \times c$.
- Para obtener la raíz cúbica del producto, se usa la operación `producto ** (1/3)`, que eleva el producto a la potencia $\frac{1}{3}$.

- El resultado se imprime con 4 decimales utilizando el formato :.4f.



Si hay alguna parte del código que queremos que rehaga, se lo podemos decir, o bien si queremos preguntarle algo de lo que ha utilizado que no entendamos bien. Por ejemplo:

No entiendo la última línea de código que usa f" ¿podrías explicarme brevemente qué es y cómo funciona?



¡Claro! La última línea del código Python que usa f" es un f-string, una forma de formatear cadenas de texto en Python. Las f-strings se introdujeron en Python 3.6 y son una manera fácil y legible de incluir variables dentro de cadenas.

Aquí está la línea en cuestión:

```
print(f"La media geométrica de los números {a}, {b} y {c} es  
      : {media_geometrica:.4f}")
```

¿Qué es un f-string?

Un f-string es una forma de formatear cadenas de texto en Python, introducida en la versión 3.6. Permite incluir variables o expresiones dentro de una cadena, facilitando su lectura y escritura. La estructura básica es la siguiente:

```
f"texto con {variable}"
```

Cuando se ejecuta, Python reemplaza las llaves {} con el valor de las variables.

Ejemplo básico

Considera el siguiente código:

```
nombre = "Ana"  
edad = 25  
print(f"Hola, {nombre}. Tienes {edad} años.")
```

El resultado de este código sería:

Hola, Ana. Tienes 25 años.

Explicación de la línea

La línea del código que estás preguntando es:

```
print(f"La media geométrica de los números {a}, {b} y {c} es  
      : {media_geometrica:.4f}")
```

- `f"..."`. El prefijo `f` antes de las comillas indica que estamos utilizando una f-string.
- `{a}`, `{b}`, `{c}`. Dentro de las llaves, se colocan las variables `a`, `b`, y `c`. Python las reemplaza por sus valores cuando se ejecuta.
- `{media_geometrica:.4f}`. Aquí estamos formateando el valor de `media_geometrica` para mostrarlo con 4 decimales. El formato `:.4f` se descompone de la siguiente manera:
 - `.` : Indica que vamos a especificar la cantidad de decimales.
 - `4` : El número de decimales que queremos mostrar.
 - `f` : Se refiere a un número de coma flotante (decimal).

Ejemplo

Supongamos que los valores de `a`, `b`, `c` y `media_geometrica` son los siguientes:

```
a = 2.0  
b = 8.0  
c = 4.0  
media_geometrica = 4.0
```

Cuando se ejecuta el código:

```
print(f"La media geométrica de los números {a}, {b} y {c} es  
      : {media_geometrica:.4f}")
```

El resultado sería:

La media geométrica de los números 2.0, 8.0 y 4.0 es: 4.0000

Como se puede ver, las variables `a`, `b` y `c` se reemplazan por sus respectivos valores, y `media_geometrica` se muestra con 4 decimales.

Conclusión

Las **f-strings** son una manera eficiente y clara de formatear cadenas en Python. En comparación con otros métodos como la concatenación de cadenas o el uso de `.format()`, las f-strings son más legibles y fáciles de usar. 

Si además queremos que nos diga las fuentes de las que ha extraído la información, podemos pedirselas:

¿Podrías decirme las fuentes de las que has tomado la información?



La información proporcionada sobre las **f-strings** en Python se basa en el conocimiento general sobre el lenguaje de programación y sus características. A continuación, se presentan algunas fuentes confiables donde puedes leer más sobre el tema:

Fuentes

1. Documentación oficial de Python:

- Formatted string literals (f-strings)¹: - Esta es la sección de la documentación oficial de Python donde se explica en detalle cómo funcionan las f-strings.

2. Tutoriales y recursos de aprendizaje:

- Real Python: Formatted String Literals²: - Un artículo que ofrece una explicación clara y ejemplos sobre cómo usar las f-strings en Python.
- W3Schools: Python Strings³: - Una guía sobre el formateo de cadenas en Python, que incluye ejemplos de f-strings.

3. Libros de Python:

- *Python Crash Course* por Eric Matthes - Este libro es excelente para principiantes y cubre f-strings en su sección sobre formateo de cadenas.
- *Automate the Boring Stuff with Python* por Al Sweigart - Este libro también toca el tema del formateo de cadenas de manera accesible para nuevos programadores.

4. Foros y comunidades:

¹https://docs.python.org/3/reference/lexical_analysis.html#f-strings

²<https://realpython.com/python-f-strings/>

³https://www.w3schools.com/python/python_strings_formatting.asp



- Stack Overflow:⁴ - Una gran fuente de preguntas y respuestas sobre programación, donde puedes encontrar ejemplos y discusiones sobre f-strings y otras características de Python.

Si tienes más preguntas o necesitas información adicional sobre Python o cualquier otro tema, ¡no dudes en preguntar!



2.2. Ejemplo de consultas con Google Gemini

Probamos con la misma consulta que en el ejemplo anterior:

Estoy estudiando Fundamentos de Informática con python y quiero que me ayudes a resolver problemas de programación de python. La media geométrica de N números positivos es la n-ésima raíz del producto de los números. Calcular la media geométrica de tres valores positivos leídos desde teclado.



¡Claro que sí! Con gusto te ayudaré a resolver este problema de Python.

Entendiendo el Problema:

- **Media Geométrica:** Es una medida estadística que se calcula multiplicando todos los números y luego sacando la raíz n-ésima del resultado.
- **N números:** En nuestro caso, N es 3, ya que queremos calcular la media geométrica de tres números.
- **Números positivos:** Es importante recordar que la media geométrica solo se define para números positivos.

Solución en Python:

```
import math

# Pedimos al usuario que ingrese los tres números
num1 = float(input("Ingrese el primer número positivo: "))
num2 = float(input("Ingrese el segundo número positivo: "))
num3 = float(input("Ingrese el tercer número positivo: "))

# Calculamos la media geométrica
```

⁴<https://stackoverflow.com/>





```
media_geometrica = math.pow(num1 * num2 * num3, (1/3))

# Imprimimos el resultado
print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Explicación del Código:

1. **Importar la biblioteca math:** La biblioteca math de Python nos proporciona funciones matemáticas como pow para calcular potencias.
2. **Pedir los números:** Usamos la función input para pedir al usuario que ingrese los tres números. Los convertimos a tipo float para permitir números decimales.
3. **Calcular la media geométrica:**
 - **Multiplicamos los números:** Multiplicamos los tres números ingresados.
 - **Calculamos la raíz cúbica:** Usamos math.pow para elevar el resultado de la multiplicación a la potencia 1/3, lo que equivale a calcular la raíz cúbica.
4. **Imprimir el resultado:** Mostramos el valor de la media geométrica en pantalla.

Ejemplo:

Si ingresas los números 2, 4 y 8, el resultado será:

La media geométrica es: 4.0

Generalizando el Código:

Si quisieras calcular la media geométrica de cualquier cantidad de números, podrías utilizar una lista y un ciclo for:

```
import math

numeros = []
n = int(input("Ingrese la cantidad de números: "))

for i in range(n):
    numero = float(input("Ingrese el número {}: ".format(i+1)))
    numeros.append(numero)
```

```
producto = 1
for numero in numeros:
    producto *= numero

media_geometrica = math.pow(producto, (1/n))

print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Este código te permite ingresar cualquier cantidad de números y calculará su media geométrica.

¿Tienes alguna otra pregunta o necesitas ayuda con otro problema?

Fuentes y contenido relacionado: github.com



Si la respuesta nos parece muy extensa, podemos especificarle el formato que preferimos para la respuesta. Por ejemplo:

A partir de ahora solo quiero que me pongas el código solución al problema y una breve explicación de lo que hace.



¡Claro! Aquí tienes el código en Python para calcular la media geométrica de tres números positivos, junto con una explicación concisa:

```
import math

# Pedimos al usuario los números
num1 = float(input("Ingrese el primer número: "))
num2 = float(input("Ingrese el segundo número: "))
num3 = float(input("Ingrese el tercer número: "))

# Calculamos la media geométrica
media_geometrica = math.pow(num1 * num2 * num3, 1/3)

# Imprimimos el resultado
print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Explicación:

1. **Importar math:** Importamos la biblioteca math para utilizar la función pow que nos permite calcular potencias.



2. **Pedir números:** Solicitamos al usuario que ingrese tres números y los almacenamos en las variables `num1`, `num2` y `num3`.
3. **Calcular la media geométrica:**
 - **Multiplicar:** Multiplicamos los tres números.
 - **Raíz cúbica:** Elevamos el resultado de la multiplicación a la potencia $1/3$, lo que equivale a calcular la raíz cúbica.
4. **Imprimir resultado:** Mostramos el valor calculado de la media geométrica.

En resumen: Este código toma tres números positivos ingresados por el usuario, los multiplica y luego calcula la raíz cúbica del resultado, obteniendo así la media geométrica. ♦

Igual que antes, podemos especificarle si no queremos utilizar por ejemplo la función `pow`:

Resuelve el problema sin usar la función `pow`

♦ ¡Claro! Podemos calcular la media geométrica sin usar la función `pow` de la biblioteca `math`. Una alternativa es utilizar el módulo `math` para calcular la raíz cúbica directamente con la función `math.cbrt`.

```
import math

# Pedimos al usuario los números
num1 = float(input("Ingrese el primer número: "))
num2 = float(input("Ingrese el segundo número: "))
num3 = float(input("Ingrese el tercer número: "))

# Calculamos la media geométrica
producto = num1 * num2 * num3
media_geometrica = math.cbrt(producto)

# Imprimimos el resultado
print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Explicación:

1. **Importar `math`:** Importamos la biblioteca `math` para utilizar la función `cbrt` que calcula la raíz cúbica de un número.



2. **Pedir números:** Solicitamos al usuario que ingrese los tres números.
3. **Calcular el producto:** Multiplicamos los tres números y almacenamos el resultado en la variable producto.
4. **Calcular la raíz cúbica:** Utilizamos la función `math.cbrt` para calcular la raíz cúbica del producto y obtener la media geométrica.
5. **Imprimir resultado:** Mostramos el valor calculado de la media geométrica.

¿Por qué usar `math.cbrt` en lugar de `pow(x, 1/3)`?

- **Claridad:** La función `cbrt` es más explícita y fácil de entender cuando se trata de calcular la raíz cúbica.
- **Eficiencia:** En algunos casos, `cbrt` puede ser ligeramente más eficiente que `pow(x, 1/3)`, especialmente para números muy grandes.

Otra alternativa (sin usar la biblioteca `math`):

Si no deseas utilizar ninguna función de la biblioteca `math`, puedes implementar tu propia función para calcular la raíz cúbica utilizando el método de Newton-Raphson. Sin embargo, este método es más complejo y generalmente no es necesario para un cálculo tan simple.

¿Te gustaría ver una implementación utilizando el método de Newton-Raphson? ♦

Si no nos gusta la solución podemos especificarle exactamente cómo la queremos. Por ejemplo:

Soluciona el problema usando `**` en lugar de una función de la biblioteca `math`

♦ ¡Absolutamente! Vamos a calcular la media geométrica sin usar ninguna función de la biblioteca `math`. Una forma de hacerlo es utilizando un bucle y una aproximación sucesiva. Sin embargo, para este caso sencillo, podemos aprovechar la operación de exponenciación en Python.

```
# Pedimos al usuario los números
num1 = float(input("Ingresa el primer número: "))
num2 = float(input("Ingresa el segundo número: "))
num3 = float(input("Ingresa el tercer número: "))

# Calculamos la media geométrica
```



```
producto = num1 * num2 * num3
media_geometrica = producto ** (1/3)

# Imprimimos el resultado
print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Explicación:

1. **Pedir números:** Igual que en los ejemplos anteriores, solicitamos al usuario que ingrese los tres números.
2. **Calcular el producto:** Multiplicamos los tres números y almacenamos el resultado en la variable producto.
3. **Calcular la raíz cúbica:**
 - **Exponenciación:** Elevamos el producto a la potencia $1/3$. En Python, la operación `**` se utiliza para calcular potencias. Esto es equivalente a calcular la raíz cúbica.
4. **Imprimir resultado:** Mostramos el valor calculado de la media geométrica.

¿Por qué funciona esto?

- **Propiedades de los exponentes:** Elevar un número a la potencia $1/3$ es lo mismo que calcular la raíz cúbica de ese número. Es una propiedad fundamental de los exponentes.

Ventajas de este método:

- **Simple:** Es una solución directa y fácil de entender.
- **Flexible:** Se puede adaptar fácilmente para calcular raíces de otros índices.
- **No depende de bibliotecas externas:** No requiere importar ninguna biblioteca adicional.

Consideraciones:

- **Números negativos:** Este método no es adecuado para calcular la media geométrica de números negativos, ya que la raíz cúbica de un número negativo no es un número real.



- **Eficiencia:** Para cálculos más complejos o grandes cantidades de datos, podría ser más eficiente utilizar funciones especializadas de bibliotecas como `math`.

En resumen:

Este código proporciona una solución sencilla y eficaz para calcular la media geométrica de tres números positivos, sin utilizar ninguna función de la biblioteca `math`. Aprovecha la operación de exponenciación de Python para calcular la raíz cúbica de forma directa. ✨

Gemini de forma general suele incluir al final de la respuesta un apartado de “*Fuentes y contenido relacionado*” en el que se pueden encontrar las fuentes utilizadas para su respuesta. No obstante, se le puede preguntar también:

¿Podrías decirme las fuentes de las que has tomado la información?

✨ ¡Claro! Como modelo de lenguaje, no tengo acceso a fuentes externas en el sentido tradicional. No puedo proporcionarte enlaces a páginas web o libros específicos como lo haría una persona.

Sin embargo, puedo decirte que la información que te he proporcionado se basa en mi entrenamiento en una vasta cantidad de datos textuales. Estos datos incluyen:

- **Código fuente de Python:** He sido entrenado en una gran cantidad de código Python, lo que me permite generar código y explicar su funcionamiento de manera precisa.
- **Textos explicativos sobre Python:** He procesado una gran cantidad de tutoriales, manuales y documentación sobre Python, lo que me permite comprender y explicar conceptos de programación en Python, como la biblioteca `math`, las operaciones aritméticas y la entrada/salida de datos.
- **Definiciones matemáticas:** He sido expuesto a muchas definiciones y explicaciones de conceptos matemáticos, como la media geométrica, las potencias y las raíces.

En resumen: La información que te proporciono es una síntesis de la información que he aprendido a partir de una gran cantidad de datos. No se basa en una única fuente, sino en una combinación de muchas fuentes diferentes.

Si deseas profundizar en algún tema específico, te recomiendo:

- **Buscar en internet:** Existen numerosos tutoriales, cursos y documentación en línea

<https://sites.google.com/go.ugr.es/mdoloresruiz/teaching>



sobre Python y matemáticas.

- **Consultar libros de texto:** Libros de texto sobre programación en Python y matemáticas pueden proporcionarte una explicación más detallada y formal de los conceptos.
- **Hacer preguntas en foros especializados:** Comunidades en línea como Stack Overflow pueden ser un excelente lugar para hacer preguntas y obtener respuestas de otros programadores.

¿Hay algún tema en particular sobre el que te gustaría obtener más información?



2.3. Ejemplo de consultas con Microsoft Copilot

Además del tipo de consultas anteriores, también podemos usar la IA generativa para solucionar errores en nuestro código. Veamos algunos ejemplos:

Estoy estudiando Fundamentos de Informática con python y quiero que me ayudes a resolver problemas de programación de python. Voy a darte un trozo de código y querría que me dijese cómo solucionarlo.



¡Claro! Estaré encantado de ayudarte con tus problemas de programación en Python. Por favor, comparte el trozo de código con el que necesitas ayuda y dime qué problema estás encontrando. Así podré darte una solución más precisa.



```
a = input("Introduce el primer número positivo: ")
b = input("Introduce el segundo número positivo: ")
c = input("Introduce el tercer número positivo: ")

media_geometrica = a * b * c ** (1/3)

print("La media geométrica es:" media_geometrica)
```



Vamos a analizar tu código y corregirlo. Primero, `input()` devuelve cadenas de texto, por lo que necesitamos convertirlas a números (en este caso, flotantes) antes de realizar cualquier operación matemática. También hay un error en cómo calculas la media geométrica y cómo la imprimes. Aquí tienes una versión corregida:

```
a = float(input("Introduce el primer número positivo: "))
b = float(input("Introduce el segundo número positivo: "))
c = float(input("Introduce el tercer número positivo: "))
```



```
media_geometrica = (a * b * c) ** (1/3)

print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

¡Dale una oportunidad y dime si hay algo más en lo que pueda ayudarte!



Enumérame todos los errores que tenía el código



Claro, aquí tienes la lista de errores del código original:

1. **Input no convertido a número:** Los valores recibidos con input() eran cadenas de texto, pero debían ser convertidos a números (flotantes) para realizar operaciones matemáticas.

```
a = float(input("Introduce el primer número positivo:"))
b = float(input("Introduce el segundo número positivo:"))
c = float(input("Introduce el tercer número positivo:"))
```

2. **Cálculo incorrecto de la media geométrica:** Estabas multiplicando $a*b*c$ y después tratando de elevar el resultado a $1/3$, lo cual es incorrecto porque se aplica sólo a c . Debía ser:

```
media_geometrica = (a * b * c) ** (1/3)
```

3. **Error de sintaxis en print:** En la instrucción print, faltaba una coma antes de media_geometrica:

```
print("La media geométrica es:", media_geometrica)
```

Asegúrate de tener en cuenta estas correcciones la próxima vez que trabajes con código similar. ¿Algún otro reto de programación que quieras resolver?



Aquí hemos visto, que Copilot ha tenido en cuenta no sólo errores de sintaxis que pueden producir errores en nuestro código, si no también errores de resolución del problema como el no haber convertido los valores a real o no haber calculado bien la media geométrica.

También podremos usarlo para que nos dé una batería de ejemplo con los que probar si es válido nuestro código:

Dame diez ejemplos para el problema de calcular la media geométrica de 3 números con los que probar si mi código es correcto y los resultados esperados.





¡Vamos a ello! Aquí tienes diez conjuntos de números junto con sus medias geométricas esperadas:

1. Números: 1, 1, 1 Media geométrica: 1.0
2. Números: 2, 4, 8 Media geométrica: 3.634241185664279
3. Números: 3, 9, 27 Media geométrica: 8.147721357120076
4. Números: 4, 16, 64 Media geométrica: 15.999999999999998
5. Números: 1, 10, 100 Media geométrica: 10.0
6. Números: 7, 14, 21 Media geométrica: 12.724822996418593
7. Números: 5, 25, 125 Media geométrica: 25.0
8. Números: 6, 12, 18 Media geométrica: 11.999999999999998
9. Números: 9, 81, 729 Media geométrica: 81.0
10. Números: 2.5, 5.0, 10.0 Media geométrica: 5.0

Estos valores te servirán para comprobar si tu código está calculando correctamente la media geométrica. ¡Buena suerte y a programar!





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria:
Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso II

¿Cómo usar una IA generativa para ayudarme en las prácticas de programación en Python?

M. D. Ruiz Jiménez

28 de octubre de 2024

1. Consideraciones previas

Hay que tener siempre en cuenta que la IA puede equivocarse o no dar la respuesta correcta, por lo que deberemos comprobar los códigos proporcionados con suficientes ejemplos para ver que realmente soluciona nuestro problema. Además hay que consultar las fuentes para ver si éstas son fiables y no confiar ciegamente en la respuesta proporcionada, aunque puede ser una ayuda en nuestro aprendizaje en la asignatura y en particular, en las tareas de programación.

Además, remarcar que para aprender a programar es necesario que individualmente intentemos resolver nuestro problema y que, si queremos, después podemos apoyarnos en la IA para solucionar errores y dudas que tengamos.

Os animo a probar con otras consultas, distintas de las que veremos en la siguiente sección, en el programa de IA generativa que más os guste.

1.1. Anteriormente

En la guía anterior se vieron ejemplos para las siguientes tareas:

<https://sites.google.com/go.ugr.es/mdoloresruiz/teaching>



- Resolución de problemas sencillos de programación
- Modificación del prompt para afinar más la consulta, indicando por ejemplo que no se utilice alguna función o librería, o bien indicando que se utilice alguna función u operador concreto.
- Explicación de una parte del código.
- Enumeración de errores que tiene un trozo de código.
- Pedir las fuentes consultadas para la respuesta dada.
- Pedir ejemplos para probar la correcta resolución de un problema de programación.

Todo ello utilizando ChatGPT, Gemini y Copilot.

2. Práctica 2: Uso de condicionales en Python

En esta práctica veremos más ejemplos de problemas sencillos de programación usando alguna de las IA Generativas mencionadas y algún uso más, como por ejemplo la creación de problemas similares a uno dado que puedan ayudar en el estudio de las prácticas de python.

2.1. Ejemplos de consultas

>_ 2.1

Estoy estudiando Fundamentos de Informática con python y quiero que me soluciones el siguiente problema en python: Escribir un programa que pida un número al usuario y determine si es divisible por 3, por 5 o por ambos.



A continuación se presenta el código en Python que resuelve el problema planteado:

```
# Pedimos al usuario que introduzca un número
numero = int(input("Introduce un número: "))

# Verificamos las condiciones de divisibilidad
if numero % 3 == 0 and numero % 5 == 0:
    print("El número es divisible por 3 y por 5.")
```

```
elif numero % 3 == 0:
    print("El número es divisible por 3.")
elif numero % 5 == 0:
    print("El número es divisible por 5.")
else:
    print("El número no es divisible ni por 3 ni por 5.")
```

Explicación del Programa

Este programa realiza los siguientes pasos:

- Lee un número introducido por el usuario.
- Utiliza operadores de módulo (%) para verificar la divisibilidad por 3 y 5.
- Imprime un mensaje dependiendo de si cumple alguna de las condiciones de divisibilidad.



Si nos fijamos, aunque el enunciado no dice nada de que el número pedido debe ser entero, ChatGPT ha usado la conversión a `int`. Vamos a preguntarle por qué lo ha hecho así:

>_ 2.1 ¿Por qué has usado `int` en lugar de `float` en la primera línea de código?



He usado `int` en la primera línea de código porque, generalmente, cuando hablamos de divisibilidad en un contexto matemático, estamos trabajando con números enteros. Si el número que introduce el usuario fuese un número decimal (`float`), el concepto de divisibilidad (por 3 o por 5) no se aplicaría directamente, ya que los números decimales no cumplen las mismas reglas de divisibilidad que los enteros.

Dicho esto, si quieres permitir números decimales y verificar si su parte entera es divisible por 3 o 5, podríamos modificar el código para usar `float` en la entrada y luego convertir el número a entero antes de comprobar su divisibilidad.

```
numero = float(input("Introduce un número: "))

# Convertimos a entero para verificar la divisibilidad en la
# parte entera
numero_entero = int(numero)
```

```

if numero_entero % 3 == 0 and numero_entero % 5 == 0:
    print("La parte entera del número es divisible por 3 y por 5.")
elif numero_entero % 3 == 0:
    print("La parte entera del número es divisible por 3.")
elif numero_entero % 5 == 0:
    print("La parte entera del número es divisible por 5.")
else:
    print("La parte entera del número no es divisible ni por 3 ni por 5.")

```

Así, si el usuario ingresa, por ejemplo, 15.7, el programa considerará solo la parte entera (15) para evaluar su divisibilidad. 

Igual que en la guía anterior, podemos pedir que nos dé ejemplo para comprobar si el código es correcto.

>_ 2.2 ¿Podrías proporcionarme ejemplos para ver si mi código es correcto?



Claro, aquí tienes algunos ejemplos para probar el funcionamiento de tu código y verificar que detecta correctamente los casos de divisibilidad.

Entrada	Salida esperada
3	"El número es divisible por 3"
5	"El número es divisible por 5"
15	"El número es divisible por 3 y divisible por 5"
7	"El número no es divisible ni por 3 ni por 5."
30	"El número es divisible por 3 y divisible por 5"

Explicación de los ejemplos

- 3: Divisible solo por 3, así que debe mostrar "divisible por 3".
- 5: Divisible solo por 5, por lo tanto muestra "divisible por 5".
- 15: Divisible tanto por 3 como por 5, y debe mostrar "divisible por 3 y divisible por 5".
- 7: No es divisible por 3 ni por 5, por lo que el resultado esperado es "no es divisible ni por 3 ni por 5".
- 30: Divisible por ambos, similar al caso de 15.

Estos ejemplos te ayudarán a comprobar que las salidas del programa se alinean con las expectativas de cada caso.



Además, si queremos practicar con más ejercicios de este tipo, podemos indicárselo también:

>_ 2.3

Dame 3 ejemplos de enunciados sin solución parecidos a este que se resuelvan usando condicionales



Aquí tienes tres enunciados similares que puedes resolver usando condicionales en Python:

1. Número Par o Impar con Condiciones Adicionales

- Escribe un programa que solicite un número al usuario y determine si es par o impar.
- Si el número es par y mayor que 10, muestra el mensaje “El número es par y mayor que 10”.
- Si es impar y menor que 10, muestra “El número es impar y menor que 10”.
- En cualquier otro caso, indica solo si el número es par o impar.

2. Clasificación de la Edad

- Escribe un programa que solicite al usuario su edad y determine en qué grupo se encuentra:
 - Si tiene menos de 18 años, muestra “Eres menor de edad”.
 - Si tiene entre 18 y 65 años, muestra “Eres adulto”.
 - Si tiene más de 65 años, muestra “Eres mayor”.
 - Si la edad ingresada no es válida (por ejemplo, un número negativo), muestra “Edad no válida”.

3. Calificación Escolar

- Escribe un programa que solicite al usuario una calificación numérica entre 0 y 100. El programa debe mostrar la clasificación correspondiente:

- Si la calificación es menor a 50, muestra “Insuficiente”.
- Si está entre 50 y 59, muestra “Suficiente”.
- Si está entre 60 y 79, muestra “Bien”.
- Si está entre 80 y 89, muestra “Notable”.
- Si es 90 o superior, muestra “Sobresaliente”.
- Si el valor está fuera del rango de 0 a 100, muestra “Calificación inválida”.

¿Te gustaría intentar resolver alguno de estos problemas?



Si queremos podemos especificar más aún el prompt.

>_ 2.4

Dame otros 3 problemas pero que utilicen los conceptos de divisor, múltiplo, par o impar.



Aquí tienes tres problemas que aplican los conceptos de divisor, múltiplo, par e impar:

1. “Escribe un programa que reciba un número entero positivo e indique si es un múltiplo de 4 y, además, si es par o impar.”
2. “Desarrolla un programa que solicite dos números enteros positivos y determine si el segundo número es un divisor exacto del primero.”
3. “Haz un programa que pida un número entero y determine si es impar y múltiplo de 7 al mismo tiempo.”

Espero que estos problemas sean útiles para tu práctica con condicionales y operaciones de divisibilidad.





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria:
Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso III

¿Cómo usar una IA generativa para ayudarme en las prácticas de programación en Python?

M. D. Ruiz Jiménez

30 de octubre de 2024

1. Consideraciones previas

Hay que tener siempre en cuenta que la IA puede equivocarse o no dar la respuesta correcta, por lo que deberemos comprobar los códigos proporcionados con suficientes ejemplos para ver que realmente soluciona nuestro problema. Además hay que consultar las fuentes para ver si éstas son fiables y no confiar ciegamente en la respuesta proporcionada, aunque puede ser una ayuda en nuestro aprendizaje en la asignatura y en particular, en las tareas de programación.

Además, remarcar que para aprender a programar es necesario que individualmente intentemos resolver nuestro problema y que, si queremos, después podemos apoyarnos en la IA para solucionar errores y dudas que tengamos.

Os animo a probar con otras consultas, distintas de las que veremos en la siguiente sección, en el programa de IA generativa que más os guste.

1.1. Anteriormente

En las guías anteriores se vieron ejemplos para las siguientes tareas:

<https://sites.google.com/go.ugr.es/mdoloresruiz/teaching>



- Resolución de problemas sencillos de programación
- Modificación del prompt para afinar más la consulta, indicando por ejemplo que no se utilice alguna función o librería, o bien indicando que se utilice alguna función u operador concreto.
- Explicación de una parte del código o utilización de algunas funciones específicas.
- Enumeración de errores que tiene un trozo de código.
- Pedir las fuentes consultadas para la respuesta dada.
- Pedir ejemplos para probar la correcta resolución de un problema de programación.
- Propuesta de problemas de prácticas sobre un tema predeterminado o sobre algunos conceptos.

Todo ello utilizando ChatGPT, Gemini y Copilot.

2. Práctica 3: Uso de bucles y gestión de errores en Python

Usos generales para ayudar en mi aprendizaje

En general, la IA generativa puede sernos útil durante nuestro estudio y aprendizaje de una asignatura, en particular en:

- Recomendación de recursos y bibliografía sobre un tema.
- Propuesta y resolución de problemas (de esto ya se han visto ejemplos en las guías anteriores y se proporcionarán más ejemplos sobre el uso de bucles en python en esta guía).
- Identificación de errores (ya visto en la guía I).
- Explicación de conceptos.
- Mejora de código

- Autoevaluación.
- Ayuda para resolver problemas.

Veamos algunos ejemplos de estos puntos.

2.1. Recomendación de recursos y bibliografía

Las IAs generativas también pueden ofrecernos ayuda sobre recursos bibliográficos para reforzar nuestro aprendizaje:

>_ 2.1 ¿Me podrías recomendar algún libro o tutorial para reforzar mis conocimientos en programación básica en python?



Claro, aquí tienes algunas recomendaciones para reforzar tus conocimientos en Python:

1. **Python Crash Course** de Eric Matthes: Este libro está diseñado para principiantes y combina explicaciones teóricas con ejercicios prácticos. Cubre conceptos básicos como variables, listas, funciones y, además, incluye proyectos más avanzados.
2. **Automate the Boring Stuff with Python** de Al Sweigart: Este libro es muy accesible y orientado a la práctica. Te enseña cómo usar Python para automatizar tareas comunes, lo que lo hace ideal para aprender aplicando.
3. **Real Python**: El sitio web Real Python ofrece numerosos tutoriales paso a paso sobre temas básicos y avanzados. Sus explicaciones claras y ejemplos prácticos lo convierten en un excelente recurso en línea.
4. **Python for Everybody** de Charles Severance: Enfocado en quienes inician en la programación, este libro explica Python de una manera muy accesible y proporciona varios ejercicios prácticos para reforzar los conceptos básicos.

Cualquiera de estos recursos puede ser muy útil para progresar en Python desde una base sólida hasta una comprensión más amplia y aplicable del lenguaje.



>_ 2.2 ¿Y bibliografía en español?



Aquí tienes algunos libros en español que pueden ayudarte a reforzar tus conocimientos en Python:

1. **Python para todos** de Charles Severance: Este libro está enfocado en principiantes



y cubre desde los fundamentos de Python hasta estructuras de datos y la manipulación de archivos. Es ideal para aquellos que están dando sus primeros pasos en la programación.

2. **Python: Aprenda a pensar como un programador** de Allen B. Downey: Este libro es conocido por su enfoque en el pensamiento computacional. Los ejercicios y ejemplos ayudan a consolidar conceptos básicos y a desarrollar habilidades para resolver problemas.
3. **Introducción a la Programación en Python** de John V. Guttag: Aunque originalmente es para estudiantes de MIT, su traducción al español ofrece una introducción a la programación y resolución de problemas con Python. Es ideal para quienes buscan una base sólida en el pensamiento computacional.
4. **Aprenda Python en un fin de semana** de Carlos Delgado: Una guía rápida para quienes desean iniciarse en Python en un tiempo corto, con una serie de ejemplos prácticos.
5. **Python para principiantes** de Raúl González Duque: Con un enfoque progresivo, este libro introduce desde lo más básico hasta aspectos más avanzados.



2.2. Explicación de conceptos

>_ 2.3 Podrías explicarme qué nomenclatura se usa en python, como por ejemplo funciones, nombres, métodos, etc.



En Python, la nomenclatura y las convenciones de nombres siguen la **PEP 8**, que es la guía de estilo recomendada. Aquí tienes un resumen de las convenciones más importantes:

1. Nombres de variables y funciones:

- Usan `snake_case`, es decir, todas las letras en minúscula y separadas por guiones bajos (`_`).
- Ejemplos: `mi_variable`, `calcular_suma`.

2. Nombres de clases:

- Usan CamelCase, donde cada palabra comienza con mayúscula y no se usan guiones bajos.
- Ejemplo: MiClase, NodoArbol.

3. Constantes:

- Se escriben en mayúsculas con guiones bajos entre palabras.
- Ejemplo: PI, VELOCIDAD_LUZ, NUMERO_MAXIMO.

4. Métodos privados y variables internas:

- Los nombres privados, no accesibles desde fuera de la clase, empiezan con un guion bajo (_).
- Ejemplo: _variable_privada, _metodo_privado.

5. Métodos y variables "fuertemente privados":

- Para hacer que un nombre de método o variable sea casi inaccesible, se utilizan dos guiones bajos (__) al inicio.
- Ejemplo: __variable_interna, __metodo_interno.
- Esto activa una característica llamada *name mangling*, que cambia internamente el nombre para evitar su acceso desde fuera de la clase.

6. Funciones integradas o métodos de Python (uso especial):

- En Python, los nombres que empiezan y terminan con dos guiones bajos (__) suelen ser métodos o funciones especiales (también llamados *métodos mágicos*).
- Ejemplo: __init__ (constructor de clases), __str__ (representación en cadena).

7. Módulos y paquetes:

- Los nombres de módulos (archivos .py) y paquetes (carpetas de módulos) usan snake_case y minúsculas.
- Ejemplo: mi_modulo.py, paquete_datos.

Estas convenciones ayudan a que el código sea más legible y mantenible, y hacen que los programadores reconozcan rápidamente el tipo de elemento que están usando. ❌

En esta ocasión, no era lo que yo buscaba, por lo que le cambio la consulta para que me entienda mejor.

>_ 2.4 Me refiero a qué se entiende como nombre, como función y método y pon algunos ejemplos



En Python, los conceptos de *nombre*, *función*, y *método* son fundamentales para entender cómo organizar el código y estructurar programas. Aquí tienes una explicación de cada uno y ejemplos para ilustrarlos.

1. Nombre:

- Un *nombre* en Python puede referirse a cualquier identificador que uses para almacenar y hacer referencia a valores, funciones, clases, etc.
- Ejemplos de nombres:

```
# Nombre de una variable
edad = 25

# Nombre de una función
def calcular_area(radio):
    return 3.1416 * radio ** 2

# Nombre de una clase
class Persona:
    pass
```

2. Función:

- Una *función* es un bloque de código reutilizable que realiza una tarea específica. En Python, se define usando la palabra clave `def` y puede aceptar parámetros y devolver un valor.
- Ejemplo de función:

```
def sumar(a, b):
    return a + b

resultado = sumar(5, 3) # Llama a la función y
                        # almacena el resultado en 'resultado'
print(resultado) # Imprime 8
```

- En este caso, sumar es una función que toma dos parámetros a y b, y devuelve su suma.

3. Método:

- Un **método** es una función que está definida dentro de una clase y actúa sobre instancias de esa clase. Los métodos suelen acceder a los datos de la instancia (con `self`) y pueden modificar el estado de esta o interactuar con ella.

- Ejemplo de método dentro de una clase:

```
class Circulo:
    def __init__(self, radio):
        self.radio = radio # Almacena el radio en
                           la instancia

    def calcular_area(self):
        return 3.1416 * self.radio ** 2

# Crear una instancia de Circulo y usar el método
mi_circulo = Circulo(5)
area = mi_circulo.calcular_area() # Llama al método
                                   calcular_area en el objeto 'mi_circulo'
print(area) # Imprime el área del círculo
```

- En este ejemplo, `calcular_area` es un método de la clase `Circulo` y puede acceder al valor de `radio` a través de `self`.

Aquí vemos como ya entiende mejor los conceptos que yo quería que me explicara. Además puedo preguntar sobre ejemplos concretos:

>_ 2.5 ¿ Podrías decirme `max()`, `int()` y `math.sqrt` qué son?



En Python, `max()`, `int()`, y `math.sqrt()` son funciones incorporadas y de bibliotecas que realizan tareas específicas. A continuación, se describen cada una de ellas:

1. `max()`:

- La función `max()` devuelve el valor máximo de los argumentos dados. Puede aceptar múltiples argumentos o un iterable.

- Ejemplo:

```
max_valor = max(3, 7, 2) % max_valor será 7
lista = [1, 5, 3, 9]
max_lista = max(lista) % max_lista será 9
```

2. int():

- La función `int()` convierte un número o una cadena a un entero. Si se le proporciona una cadena que representa un número entero, devolverá su representación como un número entero.

- Ejemplo:

```
numero = int("10") % numero será 10
numero_decimal = int(3.14) % numero_decimal será 3
```

3. math.sqrt():

- La función `math.sqrt()` se encuentra en el módulo `math` y se utiliza para calcular la raíz cuadrada de un número. Para usar esta función, primero es necesario importar el módulo `math`.

- Ejemplo:

```
import math
raiz_cuadrada = math.sqrt(16) % raiz_cuadrada será
4.0
```

Estas funciones son herramientas útiles en Python que permiten realizar operaciones comunes de manera sencilla y eficiente.



>_ 2.6 ¿sqrt() es un método o una función?



En Python, `math.sqrt()` se considera una **función** y no un método. La diferencia clave entre una función y un método es la siguiente:

- **Función:** Una función es un bloque de código que se puede llamar de manera independiente y que realiza una tarea específica. Se define con la palabra clave `def` o es parte de una biblioteca (como `math.sqrt()`).
- **Método:** Un método es una función que está asociada a un objeto o a una clase. Se invoca sobre un objeto utilizando la notación de punto. Por ejemplo, `lista.append(5)` es un método de la lista que agrega un elemento.

En el caso de `math.sqrt()`, es parte del módulo `math`, y se debe importar antes de utilizarla, lo que la clasifica como una función. En contraste, si se estuviera utilizando un método de un objeto, como `cadena.upper()` para convertir una cadena a mayúsculas, sería considerado un método. 

>_ 2.7 ¿y en un string `s.find()` ?

 En Python, el método `s.find()` es un **método** de los objetos de tipo `str` (cadena de texto). A continuación se explica su funcionamiento y características:

- **Método:** Un método es una función que está asociada a un objeto. En este caso, `s` es una instancia de una cadena de texto, y `s.find()` se utiliza para buscar una subcadena dentro de esa cadena.
- **Uso:** El método `s.find(subcadena)` devuelve el índice de la primera aparición de subcadena en `s`. Si la subcadena no se encuentra, devuelve `-1`.

Ejemplo:

```
s = "Hola, mundo"
indice = s.find("mundo") % Esto devolverá 6, que es el índice de la primera letra de "mundo".
no_encontrado = s.find("Python") % Esto devolverá -1, ya que "Python" no está en la cadena.
```

Aquí vemos cómo la IA generativa puede ser de ayuda para repasar algunos conceptos vistos en teoría, así como para resolver dudas sobre dichos conceptos. 

2.3. Mejora de código

También podemos intentar mejorar código, pero hay que tener cuidado porque a veces puede plantear soluciones más complejas que no nos interesen. Veamos el siguiente ejemplo:

>_ 2.8 Tengo el siguiente código: y quiero que lo mejores:

```
n = int(input('Dame un número entero positivo par: '))
if n%2==0 and n>0:
    print("Sus divisores son:")
    for div in range(1,n+1):
        if n%div==0:
            print(div)
else:
    print("Error el número no es correcto")
```

- ✖ Para mejorar este código, podríamos optimizar la búsqueda de divisores y hacer que el mensaje de error sea más claro. Además, incluimos un bucle para permitir que el usuario vuelva a ingresar un número si la condición de par y positivo no se cumple.

Aquí tienes una versión mejorada:

Uso de un bucle para la entrada: El programa pide el número hasta que el usuario ingrese un entero positivo y par. Optimización en la búsqueda de divisores: En lugar de recorrer todos los números hasta n, podemos reducir el rango de búsqueda a 1 hasta la raíz cuadrada de n. Esto mejora la eficiencia en números grandes.

```
import math

while True:
    n = int(input("Dame un número entero positivo par: "))
    if n % 2 == 0 and n > 0:
        print("Sus divisores son:")

        for div in range(1, int(math.sqrt(n)) + 1):
            if n % div == 0:
                print(div)
                if div != n // div: # Para evitar duplicar
                    el divisor si es raíz exacta
                    print(n // div)
            break
    else:
        print("Error: el número no es positivo y par. Inténtalo de nuevo.")
```

Explicación de las mejoras

1. **Bucle while para validar la entrada:** Permite que el usuario reingrese el número si no es un valor positivo par, mejorando la usabilidad.

2. **Optimización de divisores:** Recorre hasta la raíz cuadrada de n , lo que reduce las operaciones y mejora la eficiencia del código.
3. **Evita duplicados:** La condición `if div != n // div` asegura que solo se imprime cada divisor una vez.



Aunque el código es correcto, puede que algunas mejoras no las entendamos bien, y al empezar a aprender haga que el código sea más complejo de entender. Es cierto que hay menos repeticiones en el bucle, pero hay que comprender bien qué hace la condición `if div != n // div`, que en este caso, cuando encuentra un divisor coge el otro divisor mayor que $\sqrt{n} + 1$ que sería `n//div`, ya que estos posibles divisores no los recorre en el bucle.

Además el uso de `break` no está recomendado en los bucles y es mejor no utilizarlo. Por ello vamos a afinar la consulta:

>_ 2.9 ¿Podrías darme una alternativa sin utilizar `break`?



Claro, aquí tienes una versión que evita el uso de `break` al utilizar una variable booleana llamada `entrada_valida` que controla el bucle `while`. De este modo, el bucle continúa hasta que se ingresa un número par y positivo:

```
import math

# Inicializamos la variable de control
entrada_valida = False

# Iniciamos el bucle
while not entrada_valida:
    n = int(input("Dame un número entero positivo par: "))

    # Verificamos si el número es par y positivo
    if n % 2 == 0 and n > 0:
        entrada_valida = True # Cambiamos la variable de control a True
        print("Sus divisores son:")

    # Calculamos e imprimimos los divisores
    for div in range(1, int(math.sqrt(n)) + 1):
        if n % div == 0:
            print(div)
            if div != n // div: # Evitamos duplicar si
```

```

        el divisor es raíz exacta
        print(n // div)
    else:
        print("Error: el número no es positivo y par. Inténtalo de nuevo.")

```

Explicación de la solución

1. **Variable entrada_valida:** Comienza en False y solo se cambia a True cuando el número ingresado cumple con los requisitos de ser par y positivo.
2. **Bucle while not entrada_valida:** Repite el bucle hasta que el usuario ingresa un número válido.
3. **Impresión de divisores:** Al igual que antes, el código optimiza la búsqueda recorriendo hasta la raíz cuadrada de n, y evita duplicados cuando el divisor es la raíz cuadrada exacta de n.

Esta estructura es clara y permite la validación continua de la entrada sin recurrir a break.



>_ 2.10 No entiendo por qué pones la parte para evitar duplicados, si realmente eso no puede pasar con el bucle propuesto al inicio



Tienes razón, en este caso el bucle for recorre todos los posibles divisores desde 1 hasta n, por lo que no es necesario implementar la condición para evitar duplicados al imprimir los divisores. La solución anterior complica el código sin necesidad. Aquí tienes la versión simplificada y correcta:

```

# Inicializamos la variable de control
entrada_valida = False

# Iniciamos el bucle
while not entrada_valida:
    n = int(input("Dame un número entero positivo par: "))

    # Verificamos si el número es par y positivo
    if n % 2 == 0 and n > 0:
        entrada_valida = True # Cambiamos la variable de control a True
        print("Sus divisores son:")

        # Calculamos e imprimimos los divisores

```

```

for div in range(1, n + 1):
    if n % div == 0:
        print(div)
else:
    print("Error: el número no es positivo y par. Inténtalo de nuevo.")

```

Explicación de la versión corregida

- En esta versión, el bucle `for` va desde 1 hasta $n + 1$, imprimiendo todos los divisores de n sin ninguna verificación adicional.
- **Condición de entrada válida:** Como antes, el bucle `while` se repite hasta que se ingresa un número positivo y par, evitando el uso de `break`.

Gracias por señalarlo; esta simplificación hace que el código sea más directo y fácil de leer. 

Además podemos preguntarle por qué no se recomienda usar `break`:

>_ 2.11 ¿Por qué no se recomienda usar `break` en los bucles?



El uso de `break` en bucles puede ser problemático por varias razones, sobre todo en código más complejo o en el contexto de buenas prácticas de programación. Algunas de las principales razones son:

1. **Reduce la legibilidad:** `break` permite que el bucle termine en un punto inesperado. Esto puede dificultar la comprensión del flujo del programa, especialmente para otros programadores que lean el código, pues necesitan localizar todas las posibles salidas del bucle.
2. **Dificulta el mantenimiento:** Al depender de `break` para salir de un bucle, pueden surgir problemas si el código se modifica en el futuro. Por ejemplo, si las condiciones de salida del bucle cambian, hay que ajustar el `break` o incluso duplicarlo en varios lugares, lo que dificulta su mantenimiento.
3. **Alternativas más claras:** En muchos casos, el mismo resultado se puede lograr utilizando una condición en el bucle `while` o en el `for`, o mediante el uso de una variable de control. Estas opciones tienden a hacer el código más claro y legible, ya que todas las salidas del bucle se gestionan de manera explícita desde una sola condición, sin puntos de ruptura inesperados.
4. **Errores lógicos:** El uso de `break` puede causar errores lógicos difíciles de detectar



si hay múltiples salidas posibles en el mismo bucle, especialmente en bucles anidados. Por ejemplo, un `break` dentro de un `for` dentro de un `while` solo interrumpirá el `for`, no el `while`, lo que puede causar confusión.

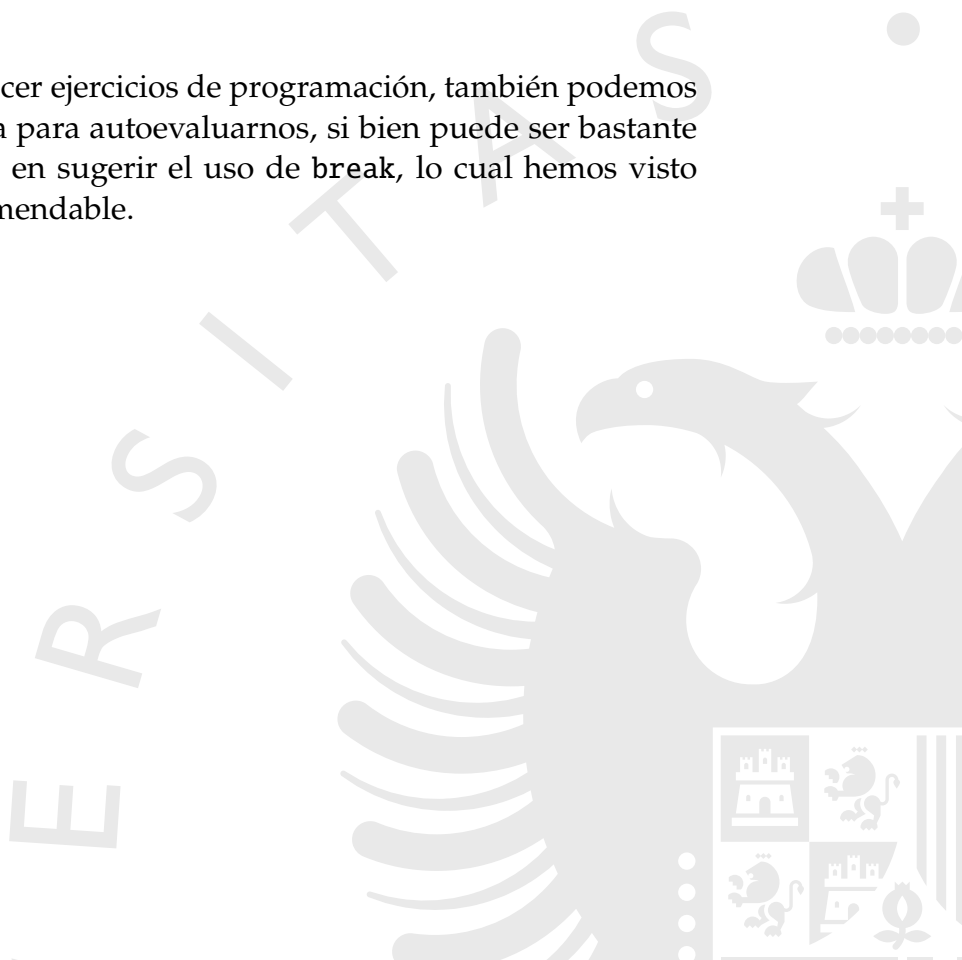
Ejemplo sin break En lugar de usar `break`, el mismo efecto se puede conseguir a menudo mediante condiciones. En el caso del código anterior, la condición `entrada_valida` elimina la necesidad de `break` y hace más claro el momento en que el bucle debe terminar:

```
entrada_valida = False
while not entrada_valida:
    n = int(input("Dame un número entero positivo par: "))
    if n % 2 == 0 and n > 0:
        entrada_valida = True
        # código para los divisores
    else:
        print("Error: el número no es positivo y par. Intentalo de nuevo.")
```

De esta forma, se establece un punto único de control en el bucle, evitando que termine de forma inesperada y mejorando la claridad del código. 

2.4. Autoevaluación

A la hora de estudiar y hacer ejercicios de programación, también podemos utilizar una IA generativa para autoevaluarnos, si bien puede ser bastante exigente y caer de nuevo en sugerir el uso de `break`, lo cual hemos visto anteriormente no es recomendable.



>_ 2.12 Cómo evaluarías de 0 a 10 el siguiente código que pretende dar solución al siguiente problema: Imprimir por pantalla los divisores de un entero positivo pedido al usuario. El programa debe asegurarse de que el número introducido es un entero positivo":

```
seguir = True
while seguir:
    try:
        n = int(input('Dame un número entero positivo: '))
    except:
        print("Error el número debe ser positivo.")
    if n > 0:
        seguir = False
        print("Sus divisores son:")
        for div in range(1, n+1):
            if n % div == 0:
                print(div)
    else:
        print("Error el número debe ser positivo.")
except ValueError:
    print('El número no es correcto.')
```



Para evaluar el código, se analizará en varias categorías clave que determinan su eficacia, claridad y adherencia a buenas prácticas de programación.

1. Funcionalidad: 10/10

- El código cumple correctamente el objetivo de solicitar un número entero positivo al usuario, asegurarse de que sea positivo y, posteriormente, imprimir sus divisores.

2. Control de Errores: 9/10

- La instrucción try-except es adecuada para capturar errores de tipo ValueError, los cuales se generan cuando el usuario introduce un valor no convertible a entero.
- Se realiza una verificación de positividad ($n > 0$), que es esencial y está bien implementada.
- El único detalle mejorable sería usar un mensaje de error más explícito para ayudar al usuario en caso de que el número no sea positivo.

3. Legibilidad y Claridad: 8/10

- El código es claro y bien estructurado, pero se podrían añadir comentarios explicativos en ciertas partes para mejorar su comprensión, especialmente en código usado por estudiantes o principiantes.
- La variable `seguir` funciona correctamente para controlar el flujo, aunque podría simplificarse eliminando la necesidad de esta variable (ver sugerencia al final).

4. Eficiencia y Estructura: 8/10

- El bucle `for div in range(1, n+1)` garantiza que se analicen todos los divisores posibles, pero puede no ser la opción más eficiente para números grandes. En estos casos, una optimización sería iterar hasta $\text{int}(n^{0.5}) + 1$ para reducir el número de divisiones.

5. Simplicidad del Control del Bucle: 7/10

- La variable `seguir` es funcional pero innecesaria. Podría reemplazarse usando un `while True` y `break` al recibir una entrada válida, lo que simplificaría la estructura y legibilidad.

Sugerencias para Mejorarlo:

- **Eliminación de seguir:** Reemplazar el uso de `seguir` por un `while True` con `break` cuando el número sea positivo, simplificando el control del flujo.
- **Comentarios Explicativos:** Agregar comentarios para que sea más comprensible para principiantes.
- **Optimización de los Divisores:** Para números grandes, iterar hasta $\text{int}(n^{0.5}) + 1$ y agregar el divisor y su cociente cuando ambos existan.

Evaluación Final: 8.5/10

El código es efectivo y bien estructurado, con ligeras mejoras sugeridas en eficiencia y simplificación de flujo.



2.5. Ayuda para resolver problemas

Además de resolver directamente en código un problema, podemos pedir que nos ayude a resolver dicho problema mediante una explicación sin usar código para así guiarnos en la resolución sin especificar el código.

>_ 2.13 Estoy intentando hacer el siguiente ejercicio y quiero que me ayudes a hacerlo pero sin utilizar código, solo explicaciones:
Realizar un programa para que muestre en pantalla la siguiente salida:

```
0
01
012
0123
...
012345678
```

Generalizar el programa para que el usuario proporcione el valor que determina el número de líneas a mostrar (en el ejemplo, 8, que supondrá mostrar 9 líneas).



Para resolver este ejercicio, puedes seguir estos pasos:

1. **Comprensión de la salida esperada:** Observa que cada línea muestra una secuencia de números empezando en 0 y que se va extendiendo en cada línea sucesiva. La primera línea contiene solo el número "0", la segunda línea "01", la tercera "012", y así sucesivamente, hasta llegar a "012345678" en la última línea del ejemplo.
2. **Relación entre línea y cantidad de números:** Nota que el número de cada línea coincide con la cantidad de dígitos a imprimir menos uno. Por ejemplo, en la línea 0 imprimimos un número (0), en la línea 1, dos números (0 y 1), y así sucesivamente. Esto implica que el índice de cada línea determina el rango de números que se deben imprimir.
3. **Entrada del usuario para generalizar:** El usuario debe poder indicar el valor máximo que determina la cantidad de líneas a mostrar. Si el usuario introduce, por ejemplo, el número 8, el programa deberá mostrar 9 líneas (de 0 hasta 8).
4. **Proceso de construcción de cada línea:** Para cada línea, deberás imprimir una secuencia de números que empieza desde 0 hasta el número correspondiente a esa línea. Así, en la primera línea imprimirás hasta 0, en la segunda hasta 1, y en la última hasta el número introducido por el usuario.

5. **Repetición de pasos:** Implementar un bucle que se repita desde 0 hasta el número que el usuario haya introducido, y en cada repetición construir e imprimir la secuencia de esa línea.

Siguiendo estos pasos, tendrás una solución que permitirá generar el patrón de números en pantalla y, además, permitirá que el usuario decida el tamaño de la secuencia.



Y también podemos pedir un pseudo código que nos pueda ayudar a hacer el problema:

>_ 2.14 Escribe un pseudocódigo de cómo sería la resolución del problema



Aquí tienes un pseudocódigo que describe la resolución del problema:

```
INICIO
    // Solicitar al usuario el número máximo
    LEER numeroMaximo

    // Inicializar un bucle que va desde 0 hasta
    numeroMaximo
    PARA i DESDE 0 HASTA numeroMaximo HACER
        // Inicializar una cadena vacía para almacenar la lí
        nea actual
        cadena = ""

        // Crear una segunda bucle que va desde 0 hasta i
        PARA j DESDE 0 HASTA i HACER
            // Concatenar el número j a la cadena
            cadena = cadena + j

        // Imprimir la cadena formada
        IMPRIMIR cadena
    FIN PARA
FIN
```

Este pseudocódigo ilustra los pasos necesarios para leer un número del usuario, generar y mostrar las líneas según el patrón deseado.



>_ 2.15 ¿Habría alguna forma usando print en cada paso en lugar de cadenas?



Sí, se puede lograr la misma salida utilizando la función print() en cada paso, sin



necesidad de almacenar los números en una cadena. A continuación se presenta el pseudocódigo modificado para reflejar esto:

```
INICIO
    // Solicitar al usuario el número máximo
    LEER numeroMaximo

    // Inicializar un bucle que va desde 0 hasta
    numeroMaximo
    PARA i DESDE 0 HASTA numeroMaximo HACER
        // Inicializar un bucle que va desde 0 hasta i
        PARA j DESDE 0 HASTA i HACER
            // Imprimir el número j sin saltar de línea
            IMPRIMIR j SIN SALTO_DE_LINEA
        FIN PARA

        // Imprimir un salto de línea después de imprimir
        todos los números hasta i
        IMPRIMIR SALTO_DE_LINEA
    FIN PARA
FIN
```

Explicación del pseudocódigo:

1. **Entrada del Usuario:** Se solicita al usuario que introduzca el número máximo, que determina cuántas líneas se imprimirán.
2. **Bucle Externo:** Se utiliza un bucle para iterar desde 0 hasta el número máximo proporcionado por el usuario. Cada iteración del bucle externo representa una línea que se imprimirá.
3. **Bucle Interno:** Dentro del bucle externo, hay otro bucle que va desde 0 hasta el índice actual del bucle externo (i). Este bucle interno se encarga de imprimir cada número en la línea correspondiente.
4. **Impresión de Números:** En lugar de concatenar los números en una cadena, cada número se imprime directamente en la misma línea utilizando `print()` con la opción adecuada para evitar un salto de línea.
5. **Salto de Línea:** Después de imprimir todos los números de una línea, se utiliza un `print()` separado para crear un salto de línea y así pasar a la siguiente línea de salida.

>_ 2.16 ¿Cómo se usaría print para que no imprima un salto de línea?



En Python, se puede evitar que la función `print()` inserte un salto de línea al final de su salida usando el parámetro `end`. Por defecto, el valor de `end` es `'\n'`, lo que significa que después de imprimir, se agrega un salto de línea. Para cambiar este comportamiento y evitar el salto de línea, se puede establecer `end` a una cadena vacía o a cualquier otra cadena que desees.

Aquí tienes cómo se usa:

```
print("Texto a imprimir", end="")
```

Esto imprimirá `Texto a imprimir` y luego continuará en la misma línea, sin saltar a la siguiente. Puedes especificar cualquier otro carácter como `end` para que actúe como un separador, por ejemplo:

```
print("Texto a imprimir", end=" ") # Imprime un espacio en  
    lugar de un salto de línea
```

Ejemplo en contexto

Si quieres imprimir números en la misma línea, puedes hacer lo siguiente:

```
for i in range(5):  
    print(i, end=" ") # Esto imprimirá 0 1 2 3 4 en la  
    misma línea
```

Finalmente, puedes usar un `print()` vacío después del bucle para saltar a la siguiente línea:

```
print() # Salto de línea
```

Esto te permitirá tener un control total sobre el formato de la salida.



Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria:
Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso IV

¿Cómo usar una IA generativa para ayudarme en las prácticas de programación en Python?

M. D. Ruiz Jiménez

11 de diciembre de 2024

1. Consideraciones previas

Hay que tener siempre en cuenta que la IA puede equivocarse o no dar la respuesta correcta, por lo que deberemos comprobar los códigos proporcionados con suficientes ejemplos para ver que realmente soluciona nuestro problema. Además hay que consultar las fuentes para ver si éstas son fiables y no confiar ciegamente en la respuesta proporcionada, aunque puede ser una ayuda en nuestro aprendizaje en la asignatura y en particular, en las tareas de programación.

Además, remarcar que para aprender a programar es necesario que individualmente intentemos resolver nuestro problema y que, si queremos, después podemos apoyarnos en la IA para solucionar errores y dudas que tengamos.

Os animo a probar con otras consultas, distintas de las que veremos en la siguiente sección, en el programa de IA generativa que más os guste.

1.1. Anteriormente

En las guías anteriores se vieron ejemplos para las siguientes tareas:

<https://sites.google.com/go.ugr.es/mdoloresruiz/teaching>



- Resolución de problemas sencillos de programación
- Modificación del prompt para afinar más la consulta, indicando por ejemplo que no se utilice alguna función o librería, o bien indicando que se utilice alguna función u operador concreto.
- Explicación de una parte del código o utilización de algunas funciones específicas.
- Enumeración de errores que tiene un trozo de código.
- Pedir las fuentes consultadas para la respuesta dada.
- Pedir ejemplos para probar la correcta resolución de un problema de programación.
- Propuesta de problemas de prácticas sobre un tema predeterminado o sobre algunos conceptos.
- Recomendación de recursos y bibliografía sobre un tema.
- Explicación de conceptos.
- Mejora de código
- Autoevaluación.
- Ayuda para resolver problemas.

Todo ello utilizando ChatGPT, Gemini y Copilot.

2. Práctica 4: Uso de archivos en IAs Generativas

Las versiones más recientes de las herramientas de IA Generativa como ChatGPT incorporan la funcionalidad de **adjuntar archivos**. Esto permite integrar documentos, presentaciones, códigos y datos directamente en la conversación con la IA. Veamos cómo podremos utilizarlo para mejorar el aprendizaje de una asignatura.

Usos generales para ayudar en mi aprendizaje

■ Generación de preguntas tipo test:

- **Ejemplo:** Adjuntar un archivo PDF con contenido teórico para que se generen preguntas de evaluación. Estas preguntas pueden ser de opción múltiple, verdadero/falso o completar espacios en blanco.

■ Creación de resúmenes o esquemas:

- **Ejemplo:** Subir apuntes o un capítulo de un libro para que se genere un resumen, un esquema o un mapa conceptual que facilite el repaso de los contenidos.

■ Identificación de conceptos clave:

- **Ejemplo:** Adjuntar un archivo con material teórico y solicitar una lista de los conceptos más importantes con sus definiciones.

■ Análisis de trabajos:

- **Ejemplo:** Adjuntar un archivo con un ensayo, reporte o código para identificar errores, proporcionar retroalimentación o realizar mejoras sugeridas.

■ Resolución de ejercicios o problemas prácticos:

- **Ejemplo:** Subir un archivo con enunciados de problemas matemáticos o de programación, y solicitar la resolución paso a paso o la generación de pistas para resolverlos.

■ Validación de ejercicios resueltos:

- **Ejemplo:** Subir un archivo con problemas resueltos y pedir que se verifique la corrección de las respuestas, proporcionando explicaciones si son incorrectas.

■ Traducción y adaptación de contenido:

- **Ejemplo:** Adjuntar un archivo en inglés con material educativo y solicitar su traducción al español o a un nivel de lenguaje más accesible para estudiantes.

■ Elaboración de actividades basadas en el contenido:

- **Ejemplo:** Subir un documento y pedir que se generen actividades prácticas o teóricas relacionadas, como ejercicios de programación, preguntas de razonamiento o estudios de casos.

Veamos algunos ejemplos que ilustren algunos de los casos anteriores.

2.1. Generación de preguntas tipo test:

Para reproducir lo siguiente, se ha adjuntado el archivo `tema7FI-IC.pdf` de la asignatura Fundamentos de Informática del Grado en Ingeniería Civil de la UGR correspondiente al tema 7 sobre el uso de ficheros en python, pero podría hacerse lo mismo con otros apuntes de otra asignatura.

>_ 2.1

Quiero que prepares 10 preguntas tipo test con 3 posibles respuestas sobre el contenido de este tema para alumnos de primero de fundamentos de informática.



Aquí tienes 10 preguntas tipo test basadas en el contenido del tema 7 sobre “Aspectos básicos del uso de ficheros” en Fundamentos de Informática. Todas las preguntas tienen tres opciones de respuesta y una respuesta correcta indicada.

Preguntas tipo test

1. ¿Qué devuelve la función `input()` en Python al leer un dato del usuario?

- a) Siempre un número entero.
- b) Siempre un string.
- c) Depende del dato ingresado por el usuario.

Respuesta correcta: b) Siempre un string.

2. ¿Qué hace el argumento `sep` en la función `print()`?

- a) Define el carácter que separa las expresiones impresas.
- b) Define el carácter que finaliza la impresión.

c) No tiene ningún efecto en la salida.

Respuesta correcta: a) Define el carácter que separa las expresiones impresas.

3. ¿Qué sucede si intentas abrir un archivo inexistente con el modo 'r'?

a) Se crea un archivo vacío.

b) Se lanza una excepción.

c) No ocurre nada y el programa sigue ejecutándose.

Respuesta correcta: b) Se lanza una excepción.

4. ¿Cuál de los siguientes modos abre un archivo para añadir contenido al final?

a) 'w'

b) 'r'

c) 'a'

Respuesta correcta: c) 'a'.

5. ¿Qué hace la cláusula with al trabajar con ficheros en Python?

a) Cierra automáticamente el fichero al finalizar su bloque.

b) Evita que se pueda modificar el fichero.

c) Convierte el fichero en un archivo temporal.

Respuesta correcta: a) Cierra automáticamente el fichero al finalizar su bloque.

6. ¿Qué método se usa para leer una única línea de un fichero en Python?

a) readline()

b) read()

c) readlines()

Respuesta correcta: a) readline().

7. ¿Cuál es la diferencia principal entre ficheros de texto y ficheros binarios?

- a) Los ficheros de texto contienen caracteres legibles, mientras que los binarios contienen bytes.
- b) Los ficheros binarios son siempre más pequeños que los de texto.
- c) No hay diferencias entre ambos.

Respuesta correcta: a) Los ficheros de texto contienen caracteres legibles, mientras que los binarios contienen bytes.

8. ¿Qué método permite escribir múltiples líneas en un fichero a partir de una lista?

- a) `write()`
- b) `writelines()`
- c) `appendlines()`

Respuesta correcta: b) `writelines()`.

9. ¿Cuál es el resultado de ejecutar `open('archivo.txt', 'x')` si el archivo ya existe?

- a) El archivo se sobrescribe.
- b) Se lanza una excepción.
- c) El archivo se abre en modo lectura.

Respuesta correcta: b) Se lanza una excepción.

10. ¿Qué ventaja tiene usar f-strings en la función `print()`?

- a) Permiten insertar variables y expresiones directamente dentro de las cadenas.
- b) Mejoran la velocidad de ejecución del programa.
- c) Evitan que se muestren caracteres especiales en la salida.

Respuesta correcta: a) Permiten insertar variables y expresiones directamente dentro de las cadenas.

¿Te gustaría ajustar algo en estas preguntas o necesitas más ejemplos?



Aquí vemos cómo puede ayudarnos a repasar contenidos a través de unas preguntas tipo test.

Veamos otro ejemplo pero especificando un poco más el tipo de preguntas que queremos.

>_ 2.2

Propón otras preguntas, en las que haya trozos de código con errores o sin ellos para ayudarme a estudiar.



Aquí tienes un conjunto de preguntas tipo test con fragmentos de código, donde se analizan posibles errores o comportamientos específicos. Cada pregunta incluye tres opciones de respuesta y la correcta está indicada al final.

Nuevas preguntas tipo test con código

1. ¿Qué sucede al ejecutar el siguiente código?

```
with open("archivo.txt", "w") as f:  
    f.write("Hola mundo")  
print(f.read())
```

- a) Se imprime "Hola mundo".
- b) Genera un error porque no se puede leer un archivo abierto en modo escritura.
- c) No imprime nada, pero no genera errores.

Respuesta correcta: b.

2. ¿Cuál es el resultado de este código?

```
with open("archivo.txt", "r") as f:  
    contenido = f.read(5)  
print(contenido)
```

Suponiendo que el archivo contiene "Python es divertido."

- a) Python

- b) Pytho
- c) Genera un error porque falta el archivo.

Respuesta correcta: b.

3. ¿Qué hace el siguiente código?

```
f = open("archivo.txt", "w")
f.write("Hola")
f.close()
print(f.closed)
```

- a) Imprime True.
- b) Imprime False.
- c) Genera un error porque f ya no es accesible.

Respuesta correcta: a.

4. ¿Cuál es el error en este código?

```
with open("archivo.txt", "x") as f:
    f.write("Texto")
with open("archivo.txt", "x") as f:
    f.write("Más texto")
```

- a) No hay error, se escribe "Más texto" en el archivo.
- b) El segundo bloque genera un error porque el archivo ya existe.
- c) No se escribe nada en el archivo.

Respuesta correcta: b.

5. ¿Qué sucede al ejecutar este código?

```
with open("archivo.txt", "w") as f:
    f.writelines(["Línea 1", "Línea 2"])
```

- a) Se escribe el contenido en líneas separadas.
- b) Se escribe todo el contenido en una única línea sin separadores.

- c) Genera un error porque writelines no agrega saltos de línea automáticamente.

Respuesta correcta: c.

6. ¿Qué se imprime al ejecutar este código?

```
with open("archivo.txt", "w") as f:  
    f.write("Python")  
with open("archivo.txt", "a") as f:  
    f.write(" es divertido")  
with open("archivo.txt", "r") as f:  
    print(f.read())
```

- a) Python
- b) Python es divertido
- c) Genera un error porque no se puede alternar entre modos de escritura y lectura.

Respuesta correcta: b.

7. ¿Qué línea contiene un error en este fragmento?

```
f = open("archivo.txt", "w")  
f.write("Texto")  
f.read()  
f.close()
```

- a) La línea `f.write("Texto")` contiene el error.
- b) La línea `f.read()` contiene el error.
- c) No hay errores en este código.

Respuesta correcta: b.

8. ¿Qué sucede al ejecutar este código?

```
with open("archivo.txt", "r") as f:  
    print(f.readline())  
    print(f.readline())
```

Suponiendo que el archivo contiene:

Línea 1
Línea 2
Línea 3

- a) Imprime Línea 1 y luego Línea 2.
- b) Imprime Línea 1 y luego Línea 1 nuevamente.
- c) Genera un error porque falta un separador explícito entre las líneas.

Respuesta correcta: a.



Además podremos preguntarle por las respuestas de las preguntas que no entendamos:

>_ 2.3 Explica por qué es correcta la opción b en la pregunta 7.



La pregunta 7 tiene el siguiente código:

```
f = open("archivo.txt", "w")  
f.write("Texto")  
f.read()  
f.close()
```

La opción **b)** La línea `f.read()` contiene el error es correcta porque **un archivo abierto en modo escritura ("w") no permite operaciones de lectura**, como `f.read()`. Veamos esto con más detalle:

Razones por las que `f.read()` produce un error:

1. Modo "w" (escritura):

- Al abrir un archivo en modo "w", se permite escribir en el archivo, pero no se permite leerlo.
- Además, el archivo se **sobrescribe** si ya existe (se vacía su contenido antes de escribir).
- Si intentas leer con `f.read()` en este modo, Python genera un error porque el archivo no está abierto para lectura.



2. Solución correcta:

- Si deseas tanto escribir como leer, necesitas usar el modo "w+" (escritura y lectura):

```
f = open("archivo.txt", "w+")
f.write("Texto")
f.seek(0) # Mover el cursor al inicio del
          archivo para leerlo
print(f.read())
f.close()
```

- Aquí, el modo "w+" permite escribir y luego leer el contenido del archivo, pero debes usar `f.seek(0)` antes de leer, ya que después de escribir, el puntero queda al final del archivo.

3. Error esperado:

- Si ejecutas el código tal como está:

```
f = open("archivo.txt", "w")
f.write("Texto")
f.read()
f.close()
```

Obtendrás una excepción similar a:

```
io.UnsupportedOperation: not readable
```

- Esto confirma que la operación de lectura no está permitida en el modo "w".

Resumen: La opción **b) La línea `f.read()` contiene el error** es correcta porque el modo "w" no permite leer el archivo. Para resolverlo, deberías usar un modo que combine escritura y lectura ("w+"), asegurándote de manejar correctamente el cursor del archivo con `f.seek()` si deseas leer lo escrito.

Aunque la respuesta es correcta, hay que tener cuidado porque puede que nos introduzca nuevos conceptos que no hemos visto en la asignatura, como en este caso el uso de "w+" o el método `f.seek()` del objeto archivo `f` en python.

2.2. Creación de resúmenes o esquemas e identificación de conceptos clave

Mediante prompts parecidos a este podremos crear resúmenes, esquemas o listas de conceptos clave de un tema que queramos estudiar. De nuevo se ha utilizado el archivo `tema7FI-IC.pdf`.

>_ 2.4 Haz un resumen del tema sobre ficheros subido anteriormente.



A continuación, se presenta un resumen del tema sobre Aspectos Básicos del Uso de Ficheros en Python, basado en el material proporcionado: **Aspectos Básicos del Uso de Ficheros en Python**

1. Conceptos Generales sobre Ficheros

Un **fichero** es un conjunto de datos almacenados en un dispositivo de almacenamiento permanente. Python permite trabajar con ficheros de forma sencilla para realizar operaciones de lectura, escritura y manipulación.

2. Tipos de Ficheros

■ Ficheros de texto:

- Contienen caracteres legibles por humanos (por ejemplo, `.txt`).
- Cada línea se separa por un salto de línea (`\n`).

■ Ficheros binarios:

- Contienen datos codificados en formato binario (no legibles directamente).
- Utilizados para imágenes, audio, o datos serializados.

3. Modos de Apertura de Ficheros

Para abrir un fichero en Python se utiliza la función `open(nombre, modo)`, donde el **modo** puede ser:

- `'r'`: Lectura. El archivo debe existir.
- `'w'`: Escritura. Sobrescribe el archivo si existe o lo crea si no.
- `'x'`: Escritura. Crea un archivo nuevo. Si ya existe, lanza un error.

- 'a': Añadir. Escribe al final del archivo sin sobrescribir el contenido.
- 'b': Binario. Añadido al modo anterior para trabajar con ficheros binarios ('rb', 'wb', etc.).
- '+': Lectura y escritura. Combinado con otros modos ('r+', 'w+', etc.).

4. Operaciones Básicas con Ficheros

- read(): Lee todo el contenido del fichero como una cadena.
- readline(): Lee una línea del fichero.
- readlines(): Devuelve una lista donde cada elemento es una línea del fichero.
- write(cadena): Escribe la cadena en el fichero.
- writelines(lista): Escribe una lista de cadenas en el fichero.
- close(): Cierra el fichero, liberando los recursos.

5. Uso de la Cláusula with

La cláusula with permite manejar automáticamente la apertura y cierre de un fichero, asegurándose de que los recursos se liberen correctamente:

```
with open("archivo.txt", "r") as f:  
    contenido = f.read()
```

6. Ficheros Binarios

Para trabajar con ficheros binarios se usan los modos 'rb', 'wb', etc. Las operaciones son similares, pero los datos se manejan como objetos binarios (bytes).

7. Posición del Puntero del Archivo

El método seek() permite mover el puntero a una posición específica en el fichero. Se puede usar en combinación con tell() para obtener la posición actual del puntero:

```
f.seek(0) # Mover al principio del archivo  
posicion = f.tell() # Obtener la posición actual
```

8. Errores Comunes

- Intentar leer un archivo inexistente en modo 'r' genera un error.
- Intentar escribir en un archivo abierto en modo 'r' no está permitido.
- El uso incorrecto de `writelines()` no agrega saltos de línea automáticamente.



De nuevo hay que tener cuidado porque chatGPT añade algunos conceptos que no estaban en el pdf debido a que se han mencionado en conversaciones anteriores.

>_ 2.5

Haz un esquema de los conceptos más importantes en el archivo tema7FI-IC.pdf adjuntado anteriormente. Utiliza solo conceptos vistos ahí.



Aquí tienes un esquema de los conceptos más importantes del archivo proporcionado, basado exclusivamente en el contenido del tema adjunto:

Esquema: Aspectos Básicos del Uso de Ficheros

Esquema General

- **Concepto de Fichero**
 - Conjunto de datos almacenados en memoria secundaria.
 - Acceso secuencial o aleatorio.
- **Modos de Apertura de Ficheros**
 - 'r': Lectura, archivo existente.
 - 'w': Escritura, sobrescribe o crea archivo.
 - 'x': Escritura, crea archivo. Error si ya existe.
 - 'a': Añadir, escribe al final sin sobrescribir.
 - 'b': Binario, combinado con otros modos.
 - '+': Lectura y escritura.
- **Operaciones Básicas con Ficheros**

- `read()`: Lee todo el contenido.
- `readline()`: Lee una línea.
- `readlines()`: Devuelve una lista de líneas.
- `write(cadena)`: Escribe una cadena.
- `writelines(lista)`: Escribe una lista de cadenas.
- `close()`: Cierra el archivo.

■ Cláusula **with**

- Manejo automático de apertura y cierre.
- Previene errores al liberar recursos.
- Ejemplo:

```
with open("archivo.txt", "r") as f:  
    contenido = f.read()
```

■ Manejo del Puntero

- `seek(offset, whence)`:
 - `offset`: Desplazamiento en bytes.
 - `whence`: Punto de referencia (inicio, actual, final).
- `tell()`: Devuelve la posición actual.

■ Ficheros Binarios

- Modos: `'rb'`, `'wb'`, `'ab'`.
- Datos tratados como bytes.

■ Errores Comunes

- Leer archivo inexistente en modo `'r'`.
- Escribir en archivo abierto en modo `'r'`.

- Usar `writelines()` sin incluir saltos de línea.





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso para resolución de ejercicios sobre funciones de una variable

¿Cómo una IA generativa puede ayudarme a resolver problemas de matemáticas?

F. Torralbo

1. Introducción

Usar una IA generativa como ayuda para la resolución de ejercicios de matemáticas es una excelente manera de mejorar tu aprendizaje y productividad. Herramientas como Chatgpt, Gemini, y Copilot están diseñadas para realizar diversos cálculos matemáticos y resolver dudas conceptuales. Con estas herramientas puedes, entre otras cosas,

- obtener explicaciones detalladas sobre conceptos de matemáticas,
- realizar diversos cálculos,
- generación de preguntas/tests para repasar conceptos,

Todo ello de manera conversacional. Estas herramientas actúan como asistentes inteligentes, complementando tu proceso de aprendizaje y ayudando a reducir las barreras a la hora de programar.

Esta guía y las siguientes pretenden cubrir las distintas opciones en las que una IA generativa podría ser de utilidad en una asignatura de matemáticas. En concreto para problemas relacionados con funciones reales de una variable real.

Recordemos una pequeña guía de uso antes de ver los ejemplos:

1. **Define claramente lo que necesitas.** Antes de hacer la consulta, ten en mente qué tipo de información o contenido deseas obtener.
2. **Sé específico.** Cuanto más específica sea tu pregunta, más precisa será la respuesta.
3. **Proporciona contexto (si es necesario)**
4. **Haz preguntas abiertas o cerradas según lo que busques.**
 - **Preguntas abiertas:** si deseas una explicación más detallada o creativa.
 - **Preguntas cerradas:** si buscas una respuesta rápida o concreta.

5. Usa ejemplos o descripciones adicionales si tienes algo específico en mente.
6. Solicita aclaraciones si es necesario.
7. Usa comandos o acciones directas si es aplicable.
8. Pide sugerencias o alternativas.
9. Itera si es necesario.
10. Especifica si deseas un formato particular.

1.1. Otras consideraciones

Hay que tener siempre en cuenta que la IA puede equivocarse o no dar la respuesta correcta, por lo que deberemos comprobar las respuestas proporcionadas y contrastarlas con nuestras notas y lo aprendido en clase. Además hay que consultar las fuentes para ver si éstas son fiables y no confiar ciegamente en la respuesta proporcionada, aunque puede ser una ayuda en nuestro aprendizaje en la asignatura.

Además, conviene siempre tener presente que para aprender matemáticas es necesario que individualmente intentemos resolver nuestro problema o realizar los cálculos y que, si queremos, después podemos apoyarnos en la IA para solucionar errores y dudas que tengamos.

Os animo a probar con otras consultas, distintas de las que veremos en la siguiente sección, en el programa de IA generativa que más os guste.

1.2. Escribir matemáticas

En ocasiones será necesario incluir una fórmula matemática, como la expresión analítica de una función, en nuestras preguntas. Generalmente la IA comprenderá nuestras expresiones (p.e. $x + \log(x) = e$) sin necesidad de usar ningún carácter especial. En los casos que necesitemos escribir potencias, productos, cocientes,... podemos hacerlo usando la siguiente notación:

- Producto: *. Ejemplo: $2 * x = 2x = 2x$.
- Cociente /. Ejemplo: $2 + 5/x = 2 + \frac{5}{x}$. ¡Es importante el uso adecuado de los paréntesis!
- Potencia: ^. Ejemplo $e^{(3x+2)} = e^{3x+2}$.

Si la ecuación es más compleja, puedes escribirla usando la sintaxis de **LaTeX**¹, que es el estándar para escribir fórmulas matemáticas. A continuación, algunos ejemplos de cómo escribir fórmulas en LaTeX:

- Fracciones: $\frac{a}{b}$

¹<https://es.wikipedia.org/wiki/LaTeX>

- Raíces: $\sqrt{x}$
- Sumas: $\sum_{i=1}^n i$

ChatGPT puede interpretar y mostrar las fórmulas en este formato. Si tienes una fórmula en mente, simplemente escríbela y pide ayudar para entenderla o mejorarla.

2. Funciones reales de una variable real.

2.1. Dominios

>_1 ¿Podrías indicarme cuál es el dominio natural de la función $\arcsin((1-x^2)^{1/2})$?

Claro, vamos a analizar el dominio natural de la función $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

1. Dominio de la función $\arcsin(y)$ Sabemos que para que $\arcsin(y)$ esté definida, el argumento y debe estar en el intervalo $[-1, 1]$, es decir:

$$-1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

Sin embargo, como $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ (porque es una raíz cuadrada), esta condición se simplifica a:

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

2. Condiciones para $\sqrt{1-x^2}$ Ahora, trabajamos con $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$.

- Para que $\sqrt{1-x^2}$ sea un número real, debemos tener $1-x^2 \geq 0$, lo que implica:

$$x^2 \leq 1$$

Esto significa que $-1 \leq x \leq 1$.

3. Condiciones adicionales El argumento de la función raíz cuadrada debe ser mayor o igual a 0, lo cual ya se ha verificado con la condición anterior $-1 \leq x \leq 1$.

Resultado El dominio natural de la función $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ es el intervalo:

$$x \in [-1, 1]$$

En este intervalo, la función está definida y es real.

2.2. El teorema de Bolzano

Comenzaremos poniendo ejemplos sobre resolución de dudas teóricas. En este caso, los ejemplos serán sobre el teorema de Bolzano. En primer lugar, veamos cuál es su enunciado:

>_ 2 ¿Podrías enunciar el teorema de Bolzano?



El Teorema de Bolzano, también conocido como el Teorema del Valor Intermedio, es un resultado fundamental en análisis matemático. Afirma lo siguiente:

Teorema de Bolzano: Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

En términos formales:

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Interpretación:

Este teorema garantiza la existencia de una raíz de la función f dentro del intervalo (a, b) siempre que la función sea continua y cambie de signo en los extremos del intervalo.

Por ejemplo, si en un intervalo $[a, b]$ una función continua toma un valor negativo en a y un valor positivo en b , necesariamente cruzará el eje x en algún punto c , lo que significa que $f(c) = 0$.



>_ 3 ¿Por qué el teorema no es cierto si la función no es continua?



El Teorema de Bolzano no se cumple si la función no es continua porque la discontinuidad puede “romper” el comportamiento esperado de la función, impidiendo que pase necesariamente por un valor intermedio (en este caso, $f(c) = 0$) entre $f(a)$ y $f(b)$.

Razón clave:

El teorema depende crucialmente de la continuidad para garantizar que la función pase suavemente por todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Si la función no es continua, podría “saltar” de un valor a otro sin tomar todos los valores intermedios, lo que hace posible que haya un cambio de signo entre $f(a)$ y $f(b)$ sin que exista un punto donde la función sea igual a cero.

Ejemplo de función discontinua:

Considera la función $f(x)$ definida en $[0, 2]$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

En este caso:

- $f(0) = -1$
- $f(2) = 1$

Aunque $f(0)$ y $f(2)$ tienen signos opuestos, la función no es continua en $x = 1$. La función “salta” de -1 a 1 sin tomar ningún valor intermedio, por lo tanto, no hay ningún $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Este ejemplo ilustra que cuando una función no es continua, puede cambiar de signo sin pasar por cero, lo que rompe las condiciones necesarias del teorema de Bolzano.





Puedes usar el Teorema de Bolzano para justificar que una ecuación tiene solución cuando puedes reformular el problema en términos de una función continua que cambia de signo en un intervalo cerrado. Aquí están los pasos generales que seguirías:

1. Reformula la ecuación como una función continua

Dada una ecuación $g(x) = 0$, puedes definir una función continua $f(x) = g(x)$. El objetivo es demostrar que $f(x)$ toma valores con signos opuestos en los extremos de un intervalo cerrado.

2. Encuentra un intervalo $[a, b]$

Identifica un intervalo $[a, b]$ en el cual puedas evaluar la función en los puntos a y b , y donde la función sea continua. Lo importante es que los valores $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, es decir:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Esto significa que la función toma un valor positivo en uno de los extremos y un valor negativo en el otro.

3. Aplica el Teorema de Bolzano

Una vez que tengas la función continua $f(x)$ y hayas comprobado que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, el Teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, existe un punto c en el intervalo (a, b) que es una solución de la ecuación.

Ejemplo:

Supongamos que queremos demostrar que la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$.

1. Define la función:

$$f(x) = x^3 - 4x + 1$$

2. Evalúa la función en los extremos del intervalo:

$$f(1) = 1^3 - 4(1) + 1 = -2, \quad f(2) = 2^3 - 4(2) + 1 = 1$$

3. Verifica el cambio de signo:

Como $f(1) = -2$ y $f(2) = 1$, los valores tienen signos opuestos ($f(1) \cdot f(2) < 0$).

4. Aplica el Teorema de Bolzano:

Debido a que $f(x)$ es continua (es un polinomio) en el intervalo $[1, 2]$ y cambia de signo entre $f(1)$ y $f(2)$, el Teorema de Bolzano garantiza que existe un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Por lo tanto, la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(1, 2)$.

Resumen del proceso:

1. Reescribe la ecuación como una función continua.

2. Evalúa la función en los extremos de un intervalo $[a, b]$.
3. Verifica que la función toma valores con signos opuestos.
4. Aplica el Teorema de Bolzano para concluir que existe una solución en ese intervalo.

Este enfoque te da una justificación matemática sólida para afirmar que la ecuación tiene una solución, aunque el teorema no te da directamente la solución, solo garantiza su existencia.

> 5

Aplica lo anterior para encontrar una solución de la ecuación $x + \log(x) = e$ sobre los números positivos.



Para aplicar el **Teorema de Bolzano** a la ecuación $x + \log(x) = e$ y encontrar una solución sobre los números positivos, seguimos estos pasos:

1. Reformular la ecuación Reescribimos la ecuación como una función continua:

$$f(x) = x + \log(x) - e$$

El objetivo es encontrar un intervalo $[a, b]$ donde $f(x)$ cambie de signo, lo cual garantizaría, por el Teorema de Bolzano, la existencia de una solución $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, una solución de la ecuación $x + \log(x) = e$.

2. Comprobar que la función es continua La función $f(x) = x + \log(x) - e$ es continua en el intervalo de los números positivos $(0, \infty)$, ya que tanto x como $\log(x)$ son funciones continuas para $x > 0$.
3. Evaluar la función en algunos puntos Para aplicar el Teorema de Bolzano, necesitamos encontrar dos valores a y b tales que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos.

Vamos a evaluar $f(x)$ en algunos puntos.

- Evaluemos $f(1)$:

$$f(1) = 1 + \log(1) - e = 1 + 0 - e = 1 - e \approx 1 - 2,718 \approx -1,718$$

Entonces, $f(1) < 0$.

- Evaluemos $f(3)$:

$$f(3) = 3 + \log(3) - e = 3 + \log(3) - e \approx 3 + 1,099 - 2,718 \approx 3,099 - 2,718 = 0,381$$

Entonces, $f(3) > 0$.

4. Verificar el cambio de signo Tenemos que: $-f(1) \approx -1,718$ (negativo) $-f(3) \approx 0,381$ (positivo)

Dado que $f(x)$ es continua en $(0, \infty)$ y cambia de signo entre 1 y 3, por el **Teorema de Bolzano** podemos concluir que existe un $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

5. Refinar la solución Sabemos que la solución está entre 1 y 3, pero podemos aplicar un método de bisección para aproximar la raíz con más precisión. Esto implica subdividir el intervalo iterativamente hasta acercarnos al valor exacto.

Por ahora, podemos afirmar que la ecuación $x + \log(x) = e$ tiene una solución en el intervalo $(1, 3)$ usando el **Teorema de Bolzano**. 

>_ 6

No tengo calculadora para poder evaluar la función logaritmo. ¿podrías darme un argumento alternativo?



¡Claro! Si no tienes calculadora para evaluar los logaritmos, aún podemos justificar la existencia de una solución para la ecuación $x + \log(x) = e$ sobre los números positivos utilizando un **razonamiento cualitativo** basado en el comportamiento de la función.

1. Definimos la función continua Reescribimos la ecuación como:

$$f(x) = x + \log(x) - e$$

Sabemos que la función $f(x) = x + \log(x) - e$ es continua para $x > 0$, ya que tanto x como $\log(x)$ son continuas en los números positivos.

2. Analizar el comportamiento de la función en los extremos Para encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo, haremos un análisis intuitivo de cómo se comporta la función $f(x)$ para diferentes valores de x .

- Para $x = 1$:

El logaritmo de 1 es fácil de evaluar sin calculadora: $\log(1) = 0$. Por lo tanto:

$$f(1) = 1 + \log(1) - e = 1 + 0 - e = 1 - e$$

Sabemos que $e \approx 2,718$, entonces $f(1) = 1 - 2,718 \approx -1,718$, que es negativo.

- Para $x \rightarrow \infty$:

Ahora analicemos el comportamiento de $f(x)$ cuando x crece mucho. A medida que $x \rightarrow \infty$, el término x domina la expresión, y el término $\log(x)$ crece mucho más lentamente que x . En consecuencia, para valores muy grandes de x , $f(x)$ se comporta como:

$$f(x) \approx x - e$$

Por lo tanto, cuando x es suficientemente grande, $f(x)$ será positivo, ya que x eventualmente superará a e .

3. Verificar el cambio de signo

Sabemos que:

- $f(1)$ es negativo.
- Para valores grandes de x , $f(x)$ se vuelve positivo.

Dado que $f(x)$ es continua y cambia de signo entre $x = 1$ y algún valor grande de x , por el **Teorema de Bolzano** podemos concluir que debe haber al menos un punto c en algún intervalo $(1, \infty)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $x + \log(x) = e$ tiene una solución en los números positivos.

4. Conclusión: Este argumento cualitativo, sin usar calculadora, justifica que existe una solución para $x + \log(x) = e$ en el intervalo $(1, \infty)$, basado en el cambio de signo de la función $f(x)$.

2.3. Asíntotas

Vamos a preguntarle a ChatGPT acerca del cálculo de asíntotas de la siguiente función. Observa que la IA ha procedido en primer lugar a simplificar la expresión de la función antes de abordar el estudio de las asíntotas. Esto le ha permitido detectar con facilidad que en $x = 1$ no hay ninguna asíntota vertical aunque en la expresión analítica original de la función es un valor para el que se anula el denominador (ChatGPT usa el término *discontinuidad removable* aunque la traducción más correcta sería *discontinuidad evitable*).

>_7 Determina las asíntotas de la función $f(x) = (x^4 - 1)/(x - 1)$



Para determinar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$, primero necesitamos analizar el comportamiento de la función, tanto en términos de posibles asíntotas verticales como horizontales/oblicuas.

Paso 1: Simplificación de la función

La expresión $x^4 - 1$ es una diferencia de cuadrados, que puede factorizarse como:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

y luego, $x^2 - 1$ también se puede factorizar como otra diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Sustituyendo en la función original:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1}$$

Si $x \neq 1$, podemos simplificar cancelando el término $x - 1$ en numerador y denominador:

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$$

Por lo tanto, la función simplificada es:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{para } x \neq 1$$

Paso 2 Análisis de las asíntotas

Asíntotas verticales Las asíntotas verticales ocurren donde el denominador de la función original se hace cero y el numerador no. En la función original $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$, el denominador es $x - 1$, que se anula en $x = 1$.

Sin embargo, debido a la simplificación previa, vemos que en $x = 1$ no hay una asíntota vertical, sino que hay una **discontinuidad removable**. La función se puede evaluar en $x = 1$ usando la forma simplificada:

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$$

Así que en $x = 1$, la función tiene un valor finito (4), lo que confirma que no hay una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales o oblicuas Para determinar si hay una asíntota horizontal u oblicua, evaluamos el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$.

La forma simplificada de la función es un polinomio cúbico:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

Cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, el término dominante es x^3 . Esto indica que **no hay una asíntota horizontal**.

Sin embargo, como la función se comporta como x^3 en el infinito, tampoco hay una asíntota oblicua, ya que las asíntotas oblicuas ocurren cuando la función tiende a una recta (una función lineal) y este no es el caso aquí.

Conclusión La función $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$ no tiene asíntotas verticales, ni horizontales, ni oblicuas. Hay una **discontinuidad removable** en $x = 1$. 

2.4. Cálculo de derivadas

>_ 8 **Calcula, paso a paso, la derivada de la función $\log(\sqrt{(2x-3)^2})$ simplificando la expresión final lo mejor posible. Indica dónde es derivable la función.**

 Vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = \log(\sqrt{(2x-3)^2})$, paso a paso, y simplificar la expresión.

Paso 1: Simplificación de la función

Primero simplifiquemos la expresión dentro del logaritmo. Observa que $\sqrt{(2x-3)^2}$ es igual al valor absoluto de $2x-3$, es decir:

$$\sqrt{(2x-3)^2} = |2x-3|$$

Por lo tanto, la función se puede reescribir como:

$$f(x) = \log(|2x-3|)$$

Paso 2: Derivada del logaritmo

Sabemos que la derivada de $\log(u)$ es $\frac{1}{u} \cdot u'$, por lo que necesitamos derivar el argumento $|2x-3|$. Ahora, tratemos la derivada de $|2x-3|$.

La función valor absoluto tiene diferentes derivadas dependiendo del signo de su argumento:

$$\frac{d}{dx}|2x-3| = \begin{cases} 2, & \text{si } 2x-3 > 0 \text{ (es decir, } x > \frac{3}{2}) \\ -2, & \text{si } 2x-3 < 0 \text{ (es decir, } x < \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Así que la derivada de la función dependerá del valor de x .

Paso 3: Derivada completa

Usamos la regla de la cadena para derivar $f(x) = \log(|2x-3|)$:

$$f'(x) = \frac{1}{|2x-3|} \cdot \frac{d}{dx}|2x-3|$$

Sabemos que la derivada de $|2x-3|$ es 2 si $x > \frac{3}{2}$ y -2 si $x < \frac{3}{2}$. Así que podemos escribir la derivada en términos de una función por tramos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{2x-3}, & \text{si } x > \frac{3}{2} \\ \frac{-2}{-(2x-3)} = \frac{2}{2x-3}, & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

En ambos casos, la derivada es la misma:

$$f'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

Paso 4: Simplificación

La derivada de la función es simplemente:

$$f'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

Paso 5: Dominio de derivabilidad

Para que la función sea derivable, el argumento del logaritmo $|2x-3|$ debe ser positivo, lo que implica que $2x-3 \neq 0$, o sea, $x \neq \frac{3}{2}$. En $x = \frac{3}{2}$, la función no está definida, ya que $\log(0)$ no existe.

Por lo tanto, la función es derivable en:

$$x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$$

Conclusión

La derivada de la función $f(x) = \log(\sqrt{(2x-3)^2})$ es:

$$f'(x) = \frac{2}{2x-3}$$

Y la función es derivable en $x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$.



2.5. Problemas donde se usa la interpretación geométrica de la derivada

> 9

Hallar los puntos en los que la tangente a la curva de ecuación $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$.



Para encontrar los puntos en los que la tangente a la curva $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$, seguimos estos pasos:

Paso 1: Pendiente de la recta

Primero, reescribamos la ecuación de la recta en su forma de pendiente-intersección ($y = mx + b$), donde m es la pendiente:

$$2x - y - 3 = 0 \implies y = 2x - 3$$

De aquí, vemos que la pendiente de la recta es $m = 2$.

Paso 2: Derivada de la curva

Ahora, para que la tangente a la curva sea paralela a la recta, la pendiente de la tangente en ese punto debe ser igual a 2. Para encontrar la pendiente de la tangente a la curva $y = x^4 - 2x + 1$, necesitamos derivar la función.



La derivada de $y = x^4 - 2x + 1$ es:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x + 1) = 4x^3 - 2$$

Paso 3: Igualar la pendiente de la tangente a la pendiente de la recta

Queremos encontrar los valores de x donde la pendiente de la tangente a la curva es igual a 2. Esto significa que la derivada debe ser igual a 2:

$$4x^3 - 2 = 2$$

Sumamos 2 a ambos lados:

$$4x^3 = 4$$

Dividimos entre 4:

$$x^3 = 1$$

Tomamos la raíz cúbica de ambos lados:

$$x = 1$$

Paso 4: Encontrar el valor de y correspondiente

Ahora que tenemos $x = 1$, sustituimos este valor en la ecuación de la curva para encontrar el valor de y en ese punto:

$$y = 1^4 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Paso 5: Resultado

El punto en el que la tangente a la curva $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$ es $(1, 0)$.

2.6. Estudio de extremos relativos y absolutos

>_ 10 Estudia los extremos relativos y absolutos de la función $f(x) = \log(x^2 - 9)$ en el intervalo abierto $(3, \infty)$



Para estudiar los extremos relativos y absolutos de la función $f(x) = \log(x^2 - 9)$ en el intervalo abierto $(3, \infty)$, vamos a seguir estos pasos:

Paso 1: Dominio de la función

La función $f(x) = \log(x^2 - 9)$ estará definida cuando el argumento del logaritmo sea positivo, es decir:

$$x^2 - 9 > 0$$

Esto implica:

$$x^2 > 9$$

Por lo tanto, $|x| > 3$, lo que nos da los intervalos $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Dado que estamos trabajando en el intervalo $(3, \infty)$, la función está definida en todo ese intervalo.

Paso 2: Derivada de la función

Para encontrar los extremos relativos, necesitamos calcular la derivada de $f(x)$:

$$f(x) = \log(x^2 - 9)$$

Usamos la regla de la cadena para derivar:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 9) = \frac{1}{x^2 - 9} \cdot 2x$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 9}$$

Paso 3: Encontrar los puntos críticos

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la derivada a cero:

$$\frac{2x}{x^2 - 9} = 0$$

La única forma de que esta fracción sea igual a cero es que el numerador sea cero. Esto ocurre cuando $2x = 0$, es decir:

$$x = 0$$

Sin embargo, $x = 0$ no pertenece al intervalo $(3, \infty)$, por lo que no hay puntos críticos en este intervalo.

Paso 4: Comportamiento de la función en el intervalo

Dado que no hay puntos críticos en el intervalo $(3, \infty)$, analizaremos el comportamiento de la derivada para ver si la función es creciente o decreciente en el intervalo.

La derivada es $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 9}$. Dado que $x > 3$ en el intervalo $(3, \infty)$, el numerador $2x$ es siempre positivo y el denominador $x^2 - 9$ también es positivo (porque $x^2 > 9$ para $x > 3$).

Esto significa que:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (3, \infty)$$

Por lo tanto, la función es **creciente** en todo el intervalo $(3, \infty)$.

Paso 5: Comportamiento en los límites del intervalo

- En el límite cuando $x \rightarrow 3^+$, el argumento del logaritmo $x^2 - 9 \rightarrow 0$, por lo que $f(x) \rightarrow \log(0) = -\infty$. Esto significa que la función tiende a menos infinito cuando $x \rightarrow 3^+$.

- Cuando $x \rightarrow \infty$, el argumento del logaritmo $x^2 - 9$ crece indefinidamente, y como $\log(x^2 - 9)$ también crece, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Paso 6: Conclusión

- No hay puntos críticos en el intervalo $(3, \infty)$, por lo que **no hay extremos relativos**.
- La función es **creciente** en todo el intervalo $(3, \infty)$.
- **No hay máximos ni mínimos absolutos** en el intervalo abierto $(3, \infty)$, porque en el límite inferior la función tiende a $-\infty$, y en el límite superior tiende a ∞ .

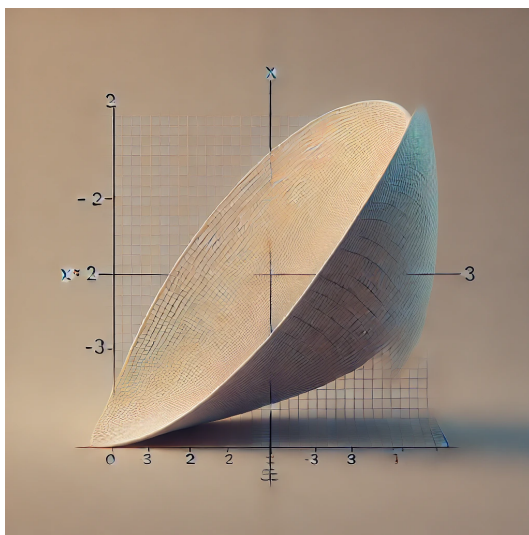
Observemos que ChatGPT extrae la consecuencia de que no hay extremos relativos a partir de que no existen puntos críticos. Esto se debe a que está realizando un estudio en un intervalo

abierto. Sin embargo, si el intervalo es cerrado la situación sería diferente. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ tiene un máximo relativo en $x = -1$ y $x = 2$ (este segundo es un máximo absoluto en dicho intervalo) y ambos no son puntos críticos.

Podemos pedirle a ChatGPT que represente gráficamente la función aunque no vamos a obtener una respuesta adecuada en este caso. Aunque la gráfica no tiene sentido, el texto que la acompaña con el análisis de las asíntotas verticales sí es correcto pero no el análisis del crecimiento (dicha función es decreciente en el intervalo $] -\infty, -3[$).

>_ 11 Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\log(x^2-9)$

🌀 Aquí tienes la gráfica de la función $f(x) = \log(x^2 - 9)$, que muestra el comportamiento en ambos lados del eje x . La función tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$, y crece lentamente cuando $x > 3$ o $x < -3$.



Vamos a pedirle que haga un estudio del crecimiento en $] -\infty, -3[$ para comprobar que antes se equivocaba. La respuesta dada es más larga que la mostrada aquí pero contiene un análisis muy parecido al ya hecho en el estudio de los extremos y se omite.

>_ 12 Estudia el crecimiento de la función $f(x)=\log(x^2-9)$ en el intervalo $(-\infty, -3)$

🌀 Conclusión

En el intervalo $(-\infty, -3)$ la función $f(x) = \log(x^2 - 9)$ es **decreciente**, ya que su derivada $f'(x) = \frac{2x}{x^2-9}$ es negativa.

3. Problemas de optimización

>_ 13 Resuelve el siguiente problema de optimización: Calcular el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado cortando cuadrados iguales de cada esquina.



Para resolver el problema de optimización, debemos determinar el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior a partir de una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado, cortando cuadrados iguales de cada esquina.

Paso 1: Definir las variables Llamemos:

- x : el lado del cuadrado que se corta en cada esquina (en cm).
- 2: el lado de la pieza cuadrada original de cartón (en cm).

Una vez cortados los cuadrados de las esquinas, la caja resultante tendrá una base rectangular con las siguientes dimensiones:

- Largo y ancho de la base: $2 - 2x$ (ya que se corta x en ambos lados).
- Altura de la caja: x , que es la altura formada al plegar los lados después de cortar los cuadrados.

Paso 2: Expresar el volumen en función de x El volumen V de la caja es el producto del área de la base y la altura:

$$V(x) = (2 - 2x)(2 - 2x)x$$

Simplificamos la expresión:

$$V(x) = (4 - 8x + 4x^2)x$$

$$V(x) = 4x - 8x^2 + 4x^3$$

Paso 3: Encontrar el máximo volumen Para maximizar el volumen, derivamos $V(x)$ con respecto a x y buscamos los puntos críticos.

$$V'(x) = \frac{d}{dx}(4x - 8x^2 + 4x^3)$$

$$V'(x) = 4 - 16x + 12x^2$$

Paso 4: Resolver la ecuación $V'(x) = 0$

$$4 - 16x + 12x^2 = 0$$

Dividimos entre 4:

$$1 - 4x + 3x^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática con la fórmula general:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Paso 5: Verificar cuál es el máximo Evaluamos el volumen en los extremos posibles y en los puntos críticos. El valor de x debe estar entre 0 y 1, ya que $x = 1$ haría que la base sea de área 0.



Evaluemos $V(x)$ en $x = 1$ y $x = \frac{1}{3}$:

Para $x = 1$:

$$V(1) = 4(1) - 8(1^2) + 4(1^3) = 4 - 8 + 4 = 0$$

Para $x = \frac{1}{3}$:

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{3}\right) - 8\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} - 8\left(\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{1}{27}\right)$$

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{4}{27}$$

Tomando un denominador común (27):

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{36}{27} - \frac{24}{27} + \frac{4}{27} = \frac{36 - 24 + 4}{27} = \frac{16}{27}$$

El volumen máximo es $\frac{16}{27} \text{ cm}^3$, y ocurre cuando $x = \frac{1}{3} \text{ cm}$.

Respuesta

El volumen máximo que se puede conseguir es de $\frac{16}{27} \text{ cm}^3$, y esto ocurre cuando se cortan cuadrados de lado $\frac{1}{3} \text{ cm}$ de cada esquina. 

Conviene observar que ChatGPT ha razonado que la variable $x \in [0, 1]$ con lo cual tiene garantizada la existencia de un máximo absoluto de la función volumen (que es continua) en dicho intervalo por el teorema de Weierstraß. Observar que los casos $x = 0$ y $x = 1$ no tienen sentido pues en el primero la caja no tendría altura mientras que en el segundo la base tendría área cero (en ambos casos el volumen $V(0) = V(1) = 0$). Así el máximo debe de estar en $x = \frac{1}{3}$ que es el único punto crítico en el interior del intervalo.





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso para resolución de ejercicios sobre funciones de varias variables

¿Cómo una IA generativa puede ayudarme a resolver problemas de matemáticas?

F. Torralbo

1. Consideraciones generales

El desempeño de la IA generativa, en concreto de ChatGPT, para la resolución de ejercicios que involucran a funciones de varias variables no ha sido tan bueno como para funciones de una única variable.

En este documento vamos a presentar tanto ejemplos correctos como aquellos donde la respuesta de la IA no ha sido adecuada, bien por ser incorrecta o bien por precisar información adicional o aclaraciones para llegar a la misma.

En concreto, hemos detectado los siguientes problemas, principalmente relacionados con el cálculo y la clasificación de puntos críticos:

- En el cálculo de derivadas parciales comete algunos errores (ver >_ 1.6), subsanables si se le indica que revise los cálculos (ver >_ 1.5). En algunos casos, cuando la derivada requiere muchos pasos se ha detenido indicando unos puntos suspensivos (ver >_ 1.4). Normalmente, simplifica correctamente y de forma automática (ver, por ejemplo, >_ 1.2) pero hemos detectado casos donde no lo ha hecho adecuadamente (ver >_ 1.3).
- Extremos relativos: Es capaz de plantear el sistema para el gradiente pero en algunos casos no analiza las soluciones adecuadamente (dando *falsos* puntos críticos, ver >_ 1.3). Si se le indica lo corrige (ver >_ 1.5 y >_ 1.6).
- Extremos condicionados: No sabe aplicar el criterio basado en la matriz hessiana de la función de Lagrange. Basa normalmente su clasificación en que la restricción suele ser un compacto aunque sin explicarlo (ver >_ 1.1). Si se le pregunta da una respuesta adecuada (ver >_ 1.2).

Para que el documento no sea excesivamente largo, se han seleccionado mayoritariamente preguntas/respuestas donde se han detectado problemas. En dicho caso, hemos marcado las respuestas con el símbolo ✖. Además, en algunos casos no se muestra la respuesta completa. Cuando esto ocurre indicamos el símbolo

..... ✖

2. Cálculo de derivadas parciales

>_ 2.1

Haz la composición $f(x,y)=e^{u(x,y)+v(x,y)}$ siendo $u(x,y)=\log(x+y)$ y $v(x,y)=\arctg(x/y)$ y calcula el gradiente de la función resultante



La función $f(x, y) = e^{u(x,y)+v(x,y)}$, donde $u(x, y) = \log(x + y)$ y $v(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, se puede expresar como:

$$f(x, y) = e^{\log(x+y)+\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Simplificamos esto:

$$f(x, y) = (x + y)e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Ahora, vamos a calcular el **gradiente** de $f(x, y)$. El gradiente es el vector de derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Primero calculamos la derivada parcial de f respecto de x :

Derivada parcial respecto de x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x + y)e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \right)$$

Usamos la regla del producto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x + y) \cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} + (x + y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \right)$$

1. Derivada de $(x + y)$ respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} (x + y) = 1$$

2. Derivada de $e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$ respecto a x :

Usamos la regla de la cadena. La derivada de e^u es $e^u \cdot \frac{d}{dx}(u)$, con $u = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \right) = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

La derivada de $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ respecto de x es:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \right) = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Juntamos todo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} + (x + y) \cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Derivada parcial respecto de y :

..... ☞

Juntamos todo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} + (x + y) \cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Gradiente completo:

$$\nabla f(x, y) = \left(e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} + (x + y) \cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}, e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} + (x + y) \cdot e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right)$$

>_ 2.2 ¿Puedes simplificar el gradiente anterior o darme una expresión alternativa?

☞ Sí, vamos a intentar simplificar el gradiente de la función $f(x, y)$ y obtener una expresión más compacta.

Recordemos que el gradiente encontrado es:

$$\nabla f(x, y) = \left(e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \left(1 + \frac{(x + y)y}{x^2 + y^2} \right), e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \left(1 - \frac{(x + y)x}{x^2 + y^2} \right) \right)$$

Paso 1: Factor común En ambas componentes del gradiente, tenemos un factor común de $e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$. Podemos extraerlo para que la expresión sea más clara:

$$\nabla f(x, y) = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(\left(1 + \frac{(x + y)y}{x^2 + y^2} \right), \left(1 - \frac{(x + y)x}{x^2 + y^2} \right) \right)$$

Paso 2: Simplificación de las componentes

Componente en x :

$$1 + \frac{(x + y)y}{x^2 + y^2}$$

Desarrollamos esta expresión:

$$1 + \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

Como tenemos un denominador común $x^2 + y^2$, podemos combinar los términos:

$$\frac{x^2 + y^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 2y^2 + xy}{x^2 + y^2}$$

Componente en y :

$$1 - \frac{(x + y)x}{x^2 + y^2}$$

Desarrollamos esta expresión:

$$1 - \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}$$

Nuevamente, combinamos en un solo denominador:

$$\frac{x^2 + y^2 - x^2 - xy}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - xy}{x^2 + y^2}$$

Paso 3: Gradiente simplificado

Ahora, sustituimos las expresiones simplificadas de las dos componentes en el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = e^{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \left(\frac{x^2 + 2y^2 + xy}{x^2 + y^2}, \frac{y^2 - xy}{x^2 + y^2} \right)$$

Esta es una forma más simplificada del gradiente de $f(x, y)$.



3. Interpretación geométrica del gradiente

>_ 3.1 Sea $h(x,y)=2e^{-(x^2)} + e^{-(3y^2)}$ la altura de una montaña en la posición (x,y) . ¿En qué dirección desde el punto $(1,0)$ se debería comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?



La dirección en la que se debería comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible corresponde a la dirección del gradiente de la función $h(x, y)$ en el punto $(1, 0)$. El gradiente indica la dirección de máxima pendiente o ascenso más rápido.

Dado que $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$, el gradiente de h , $\nabla h(x, y)$, está dado por:

$$\nabla h(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

Paso 1: Derivadas parciales de $h(x, y)$

1. Derivada parcial con respecto a x :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(2e^{-x^2} + e^{-3y^2} \right) = 2 \cdot (-2x)e^{-x^2} + 0 = -4xe^{-x^2}$$



2. Derivada parcial con respecto a y :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{d}{dy} (2e^{-x^2} + e^{-3y^2}) = 0 + (-6y)e^{-3y^2} = -6ye^{-3y^2}$$

Paso 2: Evaluar el gradiente en $(1, 0)$

Ahora evaluamos el gradiente en el punto $(1, 0)$:

1. Para $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $(1, 0)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1, 0) = -4(1)e^{-1^2} = -4e^{-1}$$

2. Para $\frac{\partial h}{\partial y}$ en $(1, 0)$:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0) = -6(0)e^{-3(0)^2} = 0$$

Paso 3: Dirección del gradiente en $(1, 0)$

El gradiente en el punto $(1, 0)$ es:

$$\nabla h(1, 0) = (-4e^{-1}, 0)$$

Esto indica que la dirección de máxima pendiente es en la dirección negativa del eje x , es decir, hacia la izquierda, ya que $\nabla h(1, 0)$ apunta en la dirección $(-1, 0)$.

Conclusión:

Para escalar lo más rápido posible desde el punto $(1, 0)$, deberías comenzar a caminar en la dirección $(-1, 0)$, que es hacia la izquierda sobre el eje x . 

Observemos que como respuesta final, chatGPT nos indica que la dirección es $(-1, 0)$ (hacia la izquierda). Esto se debe a que los vectores $\nabla h(1, 0) = (-4e^{-1}, 0)$ y $(-1, 0)$ apuntan ambos en la misma *dirección*: hacia la parte negativa del eje x .

4. Clasificación de extremos relativos

>_ 4.1 **Calcula y clasifica los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x-y)/(1+x^2+y^2)$.**

 Vamos a encontrar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

Paso 1: Calcular las derivadas parciales

Para encontrar los puntos críticos, necesitamos calcular las derivadas parciales de $f(x, y)$ con respecto a x e y , y luego igualarlas a cero.

Derivada parcial con respecto a x

..... 



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - x^2 + y^2 + 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Derivada parcial con respecto a y

..... $\otimes$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Paso 2: Igualar las derivadas parciales a cero

Para encontrar los puntos críticos, igualamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ a cero.

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$:

$$1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0$$

2. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$-1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones es:

1. $1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0$

2. $-1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0$

Sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1 - x^2 + y^2 + 2xy) + (-1 - x^2 + y^2 - 2xy) &= 0 \\ -2x^2 + 2y^2 &= 0 \\ x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Esto nos da $x = y$ o $x = -y$.

Paso 4: Sustituir en las ecuaciones

Caso 1: $x = y$

Sustituyendo $x = y$ en la primera ecuación $1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0$, obtenemos:

$$1 - x^2 + x^2 + 2x^2 = 0 \Rightarrow 1 + 2x^2 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución real. Por lo tanto, no hay puntos críticos cuando $x = y$.

Caso 2: $x = -y$

Sustituyendo $x = -y$ en la primera ecuación:

$$1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow 1 - x^2 + x^2 + 2(-x)(x) = 0$$

$$1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Paso 5: Clasificación de los puntos críticos

Los puntos críticos son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para clasificarlos, calculamos la matriz Hessiana de $f(x, y)$, que consiste en las segundas derivadas parciales.

Paso 5.1: Cálculo de la matriz Hessiana

La matriz Hessiana es:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Para clasificar los puntos críticos, debemos evaluar el **determinante de la matriz Hessiana** y el signo de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en los puntos críticos $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1. Si el determinante de $H(f)$ es positivo y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, el punto crítico es un **mínimo local**.
2. Si el determinante de $H(f)$ es positivo y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, el punto crítico es un **máximo local**.
3. Si el determinante de $H(f)$ es negativo, el punto crítico es un **punto de silla**.

El cálculo de la Hessiana en estos puntos es algebraicamente complicado, por lo que generalmente se puede hacer con herramientas computacionales para mayor precisión.

Conclusión

Los puntos críticos son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, y su clasificación se realiza mediante el análisis del determinante de la matriz Hessiana, que determina si son puntos de máximo, mínimo o de silla. 

Observemos que ChatGPT no ha aplicado el criterio de clasificación, aunque nos ha indicado correctamente cómo aplicarlo. En este caso vamos a pedirle explícitamente que calculemos las derivadas parciales segundas de la función, lo cual realiza correctamente. Nótese que usa la notación f_{xx} , f_{xy} y f_{yy} para las derivadas parciales segundas de la función.

>_ 4.2 Por favor, calcula las derivadas parciales segundas de la función f dada anteriormente.



Vamos a calcular las derivadas parciales segundas de la función dada:

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

Derivadas parciales de primer orden

Primero, recordemos las derivadas parciales de primer orden que ya calculamos anteriormente.



..... ∞

Derivadas parciales segundas

Ahora vamos a calcular las derivadas parciales segundas de la función.

1. Derivada parcial segunda con respecto a x (f_{xx})

Partimos de la derivada parcial de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - x^2 + y^2 + 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Usamos la regla del cociente para derivar esta expresión con respecto a x :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - x^2 + y^2 + 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right)$$

Aplicando la regla del cociente:

$$f_{xx} = \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 + y^2 + 2xy) - (1 - x^2 + y^2 + 2xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2 + y^2)^2}{(1 + x^2 + y^2)^4}$$

Primero derivamos el numerador:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2 + y^2 + 2xy) = -2x + 2y$$

Y derivamos el denominador:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2 + y^2)^2 = 2(1 + x^2 + y^2) \cdot 2x = 4x(1 + x^2 + y^2)$$

Sustituyendo:

$$f_{xx} = \frac{(1 + x^2 + y^2)^2(-2x + 2y) - (1 - x^2 + y^2 + 2xy) \cdot 4x(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^4}$$

Simplificando:

$$f_{xx} = \frac{(-2x + 2y)(1 + x^2 + y^2) - 4x(1 - x^2 + y^2 + 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

2. Derivada parcial segunda con respecto a y (f_{yy})

..... ∞

Simplificando:

$$f_{yy} = \frac{(2y - 2x)(1 + x^2 + y^2) - 4y(-1 - x^2 + y^2 - 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

3. Derivada parcial mixta f_{xy}

..... $\otimes$

Simplificando:

$$f_{xy} = \frac{(2y + 2x)(1 + x^2 + y^2) - 4y(1 - x^2 + y^2 + 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

Conclusión

Las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ son:

$$1. f_{xx} = \frac{(-2x+2y)(1+x^2+y^2)-4x(1-x^2+y^2+2xy)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$2. f_{yy} = \frac{(2y-2x)(1+x^2+y^2)-4y(-1-x^2+y^2-2xy)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$3. f_{xy} = \frac{(2y+2x)(1+x^2+y^2)-4y(1-x^2+y^2+2xy)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Estas derivadas se utilizan para construir la matriz Hessiana y clasificar los puntos críticos. 

Aunque ha calculado correctamente las derivadas parciales segundas, nos las ha simplificado correctamente. Vamos a pedirle que lo haga y que calcule la matriz Hessiana sobre los puntos críticos. Como vemos al final de la respuesta dada, no realiza ninguna de dichas peticiones de forma correcta. En el caso de la simplificación, no agrupa adecuadamente los términos del numerador y en el caso de la evaluación indica unos puntos suspensivos sin terminar el cálculo. Veremos en la siguiente pregunta como solventar este último problema.

>_ 4.3 **Simplifica las expresiones anteriores para las derivadas parciales segundas y evalúa la matriz hessiana en los puntos críticos calculados anteriormente.**



Vamos a simplificar las expresiones de las derivadas parciales segundas y evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos que encontramos previamente: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Derivadas parciales segundas simplificadas

Empezaremos por simplificar las expresiones para f_{xx} , f_{yy} y f_{xy} .

1. Derivada parcial segunda con respecto a x (f_{xx})

Recordemos la expresión para f_{xx} :

$$f_{xx} = \frac{(-2x + 2y)(1 + x^2 + y^2) - 4x(1 - x^2 + y^2 + 2xy)}{(1 + x^2 + y^2)^3}$$

Simplificamos el numerador:

- El primer término es $(-2x + 2y)(1 + x^2 + y^2) = -2x(1 + x^2 + y^2) + 2y(1 + x^2 + y^2)$.
- El segundo término es $-4x(1 - x^2 + y^2 + 2xy) = -4x + 4x^3 - 4xy^2 - 8x^2y$.

Por lo tanto, la expresión para f_{xx} simplificada es:

$$f_{xx} = \frac{-2x(1+x^2+y^2) + 2y(1+x^2+y^2) - 4x + 4x^3 - 4xy^2 - 8x^2y}{(1+x^2+y^2)^3}$$

2. Derivada parcial segunda con respecto a y (f_{yy})

La expresión para f_{yy} es:

$$f_{yy} = \frac{(2y-2x)(1+x^2+y^2) - 4y(-1-x^2+y^2-2xy)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Simplificamos el numerador:

- El primer término es $(2y-2x)(1+x^2+y^2) = 2y(1+x^2+y^2) - 2x(1+x^2+y^2)$.
- El segundo término es $-4y(-1-x^2+y^2-2xy) = 4y + 4yx^2 - 4yy^2 + 8xy^2$.

Por lo tanto, la expresión para f_{yy} simplificada es:

$$f_{yy} = \frac{2y(1+x^2+y^2) - 2x(1+x^2+y^2) + 4y + 4yx^2 - 4yy^2 + 8xy^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

3. Derivada parcial mixta f_{xy}

La expresión para f_{xy} es:

$$f_{xy} = \frac{(2y+2x)(1+x^2+y^2) - 4y(1-x^2+y^2+2xy)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Simplificamos el numerador:

- El primer término es $(2y+2x)(1+x^2+y^2) = 2y(1+x^2+y^2) + 2x(1+x^2+y^2)$.
- El segundo término es $-4y(1-x^2+y^2+2xy) = -4y + 4yx^2 - 4yy^2 - 8xy^2$.

Por lo tanto, la expresión para f_{xy} simplificada es:

$$f_{xy} = \frac{2y(1+x^2+y^2) + 2x(1+x^2+y^2) - 4y + 4yx^2 - 4yy^2 - 8xy^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Paso 2: Evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos

La matriz Hessiana está formada por las derivadas parciales segundas:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Vamos a evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Evaluación en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sustituimos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ en las expresiones de las derivadas parciales segundas y simplificamos cada componente de la matriz Hessiana.

1. Para f_{xx} :

$$f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \dots}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3}$$

2. Para f_{yy} , se sigue el mismo proceso sustituyendo los valores.

3. Para f_{xy} , también se sustituyen los valores, y se hace lo mismo para el segundo punto crítico.

Conclusión

Las derivadas parciales segundas y la matriz Hessiana nos permitirán clasificar los puntos críticos.

>_ 4.4 Evalúa de forma numérica aproximada la matriz hessiana en el punto crítico $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

La matriz Hessiana evaluada en el punto crítico $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es:

$$H(f) = \begin{pmatrix} -0,7071 & 0 \\ 0 & -0,7071 \end{pmatrix}$$

Ambos valores propios son negativos, lo que indica que el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un **máximo local**.

Vamos a ver ahora otro ejemplo donde ChatGPT comete un error al calcular una derivada parcial ($\partial^2 f / \partial x \partial y$). Tras detectarlo y pedirle que lo arregle, nos proporciona una respuesta correcta al problema

>_ 4.5 Clasifica los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{x-3}(xy^2 - 4x)$

Para clasificar los puntos críticos de la función $f(x, y) = e^{x-3}(xy^2 - 4x)$, seguiremos los siguientes pasos:

1. **Calcular las derivadas parciales de $f(x, y)$.**
2. **Encontrar los puntos críticos** resolviendo el sistema de ecuaciones donde ambas derivadas parciales son iguales a cero.
3. **Calcular la matriz Hessiana para clasificar los puntos críticos.**

Paso 1: Derivadas parciales de $f(x, y)$

Dada la función:

$$f(x, y) = e^{x-3}(xy^2 - 4x)$$

Para simplificar, descompongamos la función:

$$f(x, y) = e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x)$$

Derivada parcial con respecto a x :

Usamos la regla del producto para derivar:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{x-3}) \cdot (xy^2 - 4x) + e^{x-3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (xy^2 - 4x)$$

Derivemos cada parte:

1. La derivada de e^{x-3} con respecto a x es e^{x-3} .
2. La derivada de $xy^2 - 4x$ con respecto a x es:

$$\frac{\partial}{\partial x} (xy^2 - 4x) = y^2 - 4$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x) + e^{x-3} \cdot (y^2 - 4)$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x-3} \cdot [(xy^2 - 4x) + (y^2 - 4)] \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4)\end{aligned}$$

Derivada parcial con respecto a y :

..... $\otimes$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-3} \cdot 2xy$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Los puntos críticos se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Resolviendo $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$e^{x-3} \cdot 2xy = 0$$

Dado que $e^{x-3} \neq 0$, tenemos:

$$2xy = 0$$

Esto implica que:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0$$

Resolviendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$:

$$e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4) = 0$$

Como $e^{x-3} \neq 0$, tenemos:

$$xy^2 - 4x + y^2 - 4 = 0$$

Ahora analizamos ambos casos:

1. **Caso 1:** $x = 0$

Si $x = 0$, la ecuación se reduce a:

$$y^2 - 4 = 0$$

Lo que implica:

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \text{ o } y = -2$$

Entonces, tenemos dos puntos críticos: $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

2. **Caso 2:** $y = 0$

Si $y = 0$, la ecuación se reduce a:

$$-4x - 4 = 0$$

$$-4(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Entonces, tenemos otro punto crítico: $(-1, 0)$.

Paso 3: Clasificar los puntos críticos usando la matriz Hessiana

La matriz Hessiana es la matriz de segundas derivadas parciales:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Necesitamos calcular estas derivadas parciales y luego evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos $(0, 2)$, $(0, -2)$ y $(-1, 0)$ para clasificar estos puntos como mínimos, máximos o puntos de silla.

Antes de continuar con el cálculo detallado de la Hessiana, ¿quieres que haga todos los cálculos numéricos paso a paso para clasificar estos puntos críticos?

>_ 4.6 Sí.



¡Perfecto! Vamos a proceder paso a paso para calcular la matriz Hessiana de la función $f(x, y) = e^{x-3}(xy^2 - 4x)$ y luego clasificar los puntos críticos.

Paso 1: Derivadas segundas parciales

Primero calculamos las derivadas segundas parciales necesarias para formar la matriz Hessiana.

1.1. Segunda derivada parcial con respecto a x ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$)

Ya tenemos la primera derivada parcial de f con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-3}(xy^2 - 4x + y^2 - 4)$$

Ahora, derivamos esto con respecto a x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{x-3}(xy^2 - 4x + y^2 - 4))$$

Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x-3}) \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4) + e^{x-3} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 - 4x + y^2 - 4)$$

Sabemos que $\frac{\partial}{\partial x}(e^{x-3}) = e^{x-3}$, y ya calculamos que $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2 - 4x + y^2 - 4) = y^2 - 4$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-3}(xy^2 - 4x + y^2 - 4) + e^{x-3}(y^2 - 4)$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x-3} \left((xy^2 - 4x + y^2 - 4) + (y^2 - 4) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x-3} (xy^2 - 4x + 2y^2 - 8)\end{aligned}$$

1.2. Segunda derivada parcial con respecto a y ($\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$)

La primera derivada parcial con respecto a y era:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-3} \cdot 2xy$$

Ahora derivamos esto con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x-3} \cdot 2xy)$$

Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x-3}) \cdot 2xy + e^{x-3} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2xy)$$

Dado que e^{x-3} no depende de y , tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-3} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = e^{x-3} \cdot 2x$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xe^{x-3}$$

1.3. Derivada mixta ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$)

Ya tenemos la primera derivada parcial de f con respecto a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-3}(xy^2 - 4x + y^2 - 4)$$

Derivamos esta expresión con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x-3}(xy^2 - 4x + y^2 - 4))$$

Solo necesitamos derivar el término xy^2 con respecto a y , ya que el resto de los términos no dependen de y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x-3} \cdot 2xy$$

Paso 2: Matriz Hessiana

La matriz Hessiana está dada por:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo las derivadas segundas parciales que hemos encontrado:

$$H(f) = \begin{pmatrix} e^{x-3}(xy^2 - 4x + 2y^2 - 8) & e^{x-3} \cdot 2xy \\ e^{x-3} \cdot 2xy & 2xe^{x-3} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos

Ahora evaluamos la matriz Hessiana en los puntos críticos $(0, 2)$, $(0, -2)$ y $(-1, 0)$.

3.1. En el punto $(0, 2)$:

Sustituyendo $x = 0$ y $y = 2$ en la matriz Hessiana:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{0-3}(0 \cdot 2^2 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2^2 - 8) = e^{-3} \cdot (8 - 8) = 0 \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot 0 \cdot e^{0-3} = 0 \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{0-3} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Entonces, la matriz Hessiana en $(0, 2)$ es:

$$H(f)(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este es un **punto degenerado**, lo que significa que no podemos clasificarlo directamente como un mínimo, máximo o punto de silla.

3.2. En el punto $(0, -2)$:

El cálculo es el mismo que en $(0, 2)$, ya que solo cambia el signo de y , y obtenemos la misma matriz Hessiana:

$$H(f)(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este también es un **punto degenerado**.

3.3. En el punto $(-1, 0)$:

Sustituyendo $x = -1$ y $y = 0$:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-1-3} \cdot (-1 \cdot 0^2 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0^2 - 8) = e^{-4} \cdot (4 - 8) = -4e^{-4} \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-1-3} = -2e^{-4} \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-1-3} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$$

La matriz Hessiana en $(-1, 0)$ es:

$$H(f)(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-4} & 0 \\ 0 & -2e^{-4} \end{pmatrix}$$



>_ 4.7 Has calculado de forma errónea la derivada parcial cruzada de f , por favor, corrige el error y vuelve a clasificar los puntos críticos.



¡Tienes razón! Cometí un error al calcular la derivada parcial cruzada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Vamos a corregir el cálculo y luego proceder nuevamente a clasificar los puntos críticos.

Paso 1: Recalcular la derivada parcial cruzada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Recordemos que la primera derivada parcial con respecto a x es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4)$$

Ahora derivamos esta expresión con respecto a y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4) \right)$$

Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{x-3} \right) \cdot (xy^2 - 4x + y^2 - 4) + e^{x-3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (xy^2 - 4x + y^2 - 4)$$

Dado que e^{x-3} no depende de y , la derivada de e^{x-3} con respecto a y es cero. Por lo tanto, solo queda derivar $xy^2 - 4x + y^2 - 4$ con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y} (xy^2 - 4x + y^2 - 4) = 2xy + 2y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x-3} \cdot (2xy + 2y)$$

Simplificamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x-3} \cdot 2y(x + 1)$$

Paso 2: Matriz Hessiana

Ahora que hemos corregido la derivada parcial cruzada, la matriz Hessiana es:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-3} \cdot (xy^2 - 4x + 2y^2 - 8) & e^{x-3} \cdot 2y(x + 1) \\ e^{x-3} \cdot 2y(x + 1) & 2xe^{x-3} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Evaluar la matriz Hessiana en los puntos críticos

Los puntos críticos que habíamos encontrado son $(0, 2)$, $(0, -2)$ y $(-1, 0)$. Vamos a evaluar la matriz Hessiana en cada uno de estos puntos.

3.1. En el punto $(0, 2)$:

Sustituyendo $x = 0$ y $y = 2$ en la matriz Hessiana:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{0-3} \cdot (0 \cdot 2^2 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2^2 - 8) = e^{-3} \cdot (8 - 8) = 0 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot 0 \cdot e^{0-3} = 0 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{0-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot (0 + 1) = e^{-3} \cdot 4 = 4e^{-3}$$

La matriz Hessiana en $(0, 2)$ es:

$$H(f)(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{-3} \\ 4e^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz Hessiana es:

$$\text{Determinante} = (0)(0) - (4e^{-3})(4e^{-3}) = -16e^{-6}$$

Dado que el determinante es negativo, el punto $(0, 2)$ es un **punto de silla**.

3.2. En el punto $(0, -2)$:

Sustituyendo $x = 0$ y $y = -2$:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \text{ (igual que en el caso anterior)} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{0-3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (0 + 1) = e^{-3} \cdot (-4) = -4e^{-3}$$

La matriz Hessiana en $(0, -2)$ es:

$$H(f)(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -4e^{-3} \\ -4e^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz Hessiana es:

$$\text{Determinante} = (0)(0) - (-4e^{-3})(-4e^{-3}) = -16e^{-6}$$

Dado que el determinante también es negativo, el punto $(0, -2)$ es un **punto de silla**.

3.3. En el punto $(-1, 0)$:

Sustituyendo $x = -1$ y $y = 0$:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-1-3} \cdot (-1 \cdot 0^2 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0^2 - 8) = e^{-4} \cdot (4 - 8) = -4e^{-4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-1-3} = -2e^{-4} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-1-3} \cdot 2 \cdot 0 \cdot (-1 + 1) = 0$$

La matriz Hessiana en $(-1, 0)$ es:

$$H(f)(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-4} & 0 \\ 0 & -2e^{-4} \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz Hessiana es:

$$\text{Determinante} = (-4e^{-4})(-2e^{-4}) - (0)(0) = 8e^{-8}$$

Dado que el determinante es positivo y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4e^{-4}$ (negativo), el punto $(-1, 0)$ es un **máximo local**.

Conclusión:

- El punto $(0, 2)$ es un **punto de silla**.
- El punto $(0, -2)$ es un **punto de silla**.
- El punto $(-1, 0)$ es un **máximo local**.

5. Problema de extremos condicionados

En la siguiente pregunta, se solita a ChatGPT que resuelva un problema de extremos condicionados. Correctamente comienza definiendo la función de Lagrange y calculando sus puntos críticos. Observemos que el signo de λ es el contrario del elegido en clase. Esto no afecta a los cálculos pues es equivalente a cambiar de signo la restricción escribiendo $4 - x^2 - 4y^2 = 0$ en lugar de $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Sin embargo, proporciona una respuesta (correcta) para la clasificación de los extremos condicionados sin calcular la matriz hessiana de $\mathcal{L}$ ni dar ninguna explicación al respecto (únicamente evalúa la función en dichos puntos). En la siguiente pregunta veremos por qué.

>_ 5.1 Clasifica los extremos condicionados de la función $f(x,y)=xy$ sujetos a la restricción $x^2+4y^2=4$.



Para resolver el problema de encontrar y clasificar los extremos condicionados de la función $f(x, y) = xy$, sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, podemos usar el método de **Lagrange**. Este método busca los puntos en los que el gradiente de la función objetivo es paralelo al gradiente de la función de restricción.

Paso 1: Definir la función de Lagrange

La función de Lagrange está dada por:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

donde:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

Paso 2: Calcular las derivadas parciales

Ahora calculamos las derivadas parciales de $\mathcal{L}$ con respecto a x , y , y λ , e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos.

1. Derivada con respecto a x :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow y = 2\lambda x$$

2. Derivada con respecto a y :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda \cdot 8y = 0 \Rightarrow x = 8\lambda y$$

3. Derivada con respecto a λ (la restricción):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2 + 4y^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$$

Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

Ahora tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1. y = 2\lambda x$$

$$2. x = 8\lambda y$$

$$3. x^2 + 4y^2 = 4$$

Substituir las ecuaciones

De la segunda ecuación, despejamos λ :

$$\lambda = \frac{x}{8y}$$

Sustituimos esto en la primera ecuación:

$$y = 2 \cdot \frac{x}{8y} \cdot x = \frac{x^2}{4y}$$

Multiplicamos ambos lados por y :

$$y^2 = \frac{x^2}{4}$$

Por lo tanto:

$$x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = \pm 2y$$

Substituir en la restricción

Sustituimos $x = \pm 2y$ en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$(2y)^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 4y^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow 8y^2 = 4$$

$$y^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = \pm 2y = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{2}$.

Paso 4: Puntos críticos

Los puntos críticos que hemos encontrado son:

$$1. (x, y) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$2. (x, y) = (-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$3. (x, y) = (\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$4. (x, y) = (-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Paso 5: Clasificación de los puntos críticos

Evaluamos la función $f(x, y) = xy$ en estos puntos:

$$1. f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$2. f(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\sqrt{2}) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$$

$$3. f(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

$$4. f(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$$

Paso 6: Conclusión

- Los puntos $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ son **máximos locales** con valor $f(x, y) = 1$.
- Los puntos $(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ son **mínimos locales** con valor $f(x, y) = -1$.



>_ 5.2 ¿Por qué tienes garantizada la existencia de extremos relativos en el anterior problema?



La existencia de **extremos relativos** en el problema anterior está garantizada por el **Teorema de los extremos relativos condicionados**, también conocido como el **Teorema de Weierstrass**, que establece que si una función continua está restringida a un conjunto compacto, entonces alcanza su valor máximo y mínimo en ese conjunto.

Justificación paso a paso:

1. **Función continua:** La función objetivo $f(x, y) = xy$ es una función polinómica, y por lo tanto es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
2. **Conjunto compacto:** La restricción impuesta es $g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$, que describe una **elipse** en el plano xy . Este conjunto es compacto porque:
 - **Es cerrado:** la elipse incluye todos los puntos que satisfacen la ecuación, y no hay puntos exteriores que pertenezcan al conjunto.
 - **Es acotado:** la elipse está contenida en un espacio limitado del plano, ya que $x^2 + 4y^2 = 4$ implica que tanto x como y están limitados a ciertos valores finitos (el valor máximo de x es ± 2 , y de y es ± 1).
3. **Aplicación del Teorema de Weierstrass:** Dado que la función $f(x, y) = xy$ es continua y está evaluada en un conjunto compacto (la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$), el Teorema de Weierstrass garantiza que $f(x, y)$ alcanza tanto un valor máximo como un valor mínimo en dicho conjunto.

Conclusión:

La continuidad de la función $f(x, y)$ y el hecho de que la restricción defina un conjunto compacto garantizan la **existencia de extremos relativos** (máximos y mínimos) de la función sobre la elipse, conforme al Teorema de Weierstrass. Esto es por lo que los máximos y mínimos encontrados usando el método de Lagrange están garantizados.



Finalmente, al intentar que ChatGPT clasifique los puntos críticos usando la matriz hessiana de la función de Lagrange $\mathcal{L}$ nos da una respuesta **incorrecta**: la matriz H proporcionada no es la matriz hessiana de $\mathcal{L}$.

>_ 5.3 ¿Podrías clasificar los puntos críticos anteriores usando algún criterio para la matriz hessiana de la función de Lagrange?





Sí, podemos clasificar los puntos críticos encontrados utilizando el **criterio de la matriz Hessiana de la función de Lagrange**, también llamado el **criterio de segunda derivada para extremos condicionados**. En este caso, calcularemos la **matriz Hessiana** de la función de Lagrange en cada uno de los puntos críticos y evaluaremos su definitud para clasificar los extremos.

Recordatorio del problema

..... $\gg$

Paso 1: Función de Lagrange y sus derivadas parciales

Recordemos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + 4y^2 - 4).$$

Derivadas de segundo orden de $\mathcal{L}$

Calculamos las segundas derivadas parciales necesarias para formar la matriz Hessiana de la función de Lagrange $\mathcal{L}$:

1. Segundas derivadas con respecto a x y y :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = -2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = -8\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = 1$$

2. Derivadas cruzadas con respecto a x y y :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial \lambda} = -2x, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \lambda} = -8y$$

La **matriz Hessiana de la función de Lagrange** en las variables (x, y) , sin incluir las derivadas de λ , es:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -8\lambda \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Valores de λ en los puntos críticos

Usamos los valores encontrados anteriormente en el sistema de ecuaciones para los puntos críticos. Observamos que:

$$\lambda = \pm \frac{1}{4}.$$

Calculamos el determinante y el trazo de la matriz Hessiana en los puntos críticos usando estos valores de λ .

Caso 1: $\lambda = \frac{1}{4}$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinante:

$$\det(H) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) - (1)(1) = 1 - 1 = 0.$$

Como el determinante es cero, el criterio de definitud no es concluyente. Esto nos indica que la matriz Hessiana es **semidefinida**, lo cual es común en problemas de optimización con restricciones.

Conclusión

Al aplicar el método de Lagrange y verificar la definitud de la matriz Hessiana en los puntos críticos, observamos que el determinante en ambos casos es cero, lo cual nos confirma la naturaleza de los puntos como extremos condicionados, sin definitud estricta. En este problema, el método de Lagrange y el análisis inicial de los valores de $f(x, y)$ en los puntos críticos nos permitió clasificar los extremos como máximos y mínimos condicionados, pese a la semidefinitud del Hessiano. ✖

En este último ejemplo, ChatGPT no calcula correctamente los puntos críticos de la función de Lagrange, dando puntos (el $(0, 1)$ y el $(0, -1)$) que no verifican $\nabla \mathcal{L} = (0, 0, 0)$. Además, cuando estudia el caso $\lambda = -\frac{1}{4}$ realiza un argumento erróneo por *simetría* no obteniendo los puntos críticos $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

En cuanto a la clasificación, vuelve a hacer uso de que la restricción indicada es un conjunto compacto y, al tener garantizada la existencia de extremos absolutos (condicionados al problema) le basta con evaluar la función para clasificarlos aunque no lo explica.

>_ 5.4 Calcular los extremos de la función $f(x, y) = xy$ sujetos a la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$.

✖  Vamos a resolver el problema de maximización/minimización de la función $f(x, y) = xy$, sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$. Para esto, utilizaremos el método de **Lagrange**.

Paso 1: Plantear la función de Lagrange

La función de Lagrange es:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda (4 - (x^2 + 4y^2))$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange y la restricción es $x^2 + 4y^2 = 4$.

Paso 2: Derivar con respecto a x , y , y λ

Para encontrar los puntos críticos, derivamos la función de Lagrange con respecto a x , y y λ , y los igualamos a cero.

1. Derivada de $\mathcal{L}$ con respecto a x :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0$$

2. Derivada de $\mathcal{L}$ con respecto a y :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 8\lambda y = 0$$

3. Derivada de $\mathcal{L}$ con respecto a λ (la restricción):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4 - (x^2 + 4y^2) = 0$$

Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $y - 2\lambda x = 0$

2. $x - 8\lambda y = 0$

3. $x^2 + 4y^2 = 4$

De la ecuación $y - 2\lambda x = 0$, despejamos y :

$$y = 2\lambda x$$

Sustituimos esto en la segunda ecuación $x - 8\lambda y = 0$:

$$x - 8\lambda(2\lambda x) = 0$$

Simplificando:

$$x - 16\lambda^2 x = 0$$

Factorizamos x :

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Esto nos da dos posibles soluciones:

1. $x = 0$

2. $1 - 16\lambda^2 = 0 \implies \lambda^2 = \frac{1}{16} \implies \lambda = \pm \frac{1}{4}$

Caso 1: $x = 0$

Si $x = 0$, sustituimos en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$0^2 + 4y^2 = 4 \implies 4y^2 = 4 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1$$

Entonces, tenemos dos puntos posibles: $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Para estos puntos:

■ $f(0, 1) = 0 \cdot 1 = 0$

■ $f(0, -1) = 0 \cdot (-1) = 0$

Caso 2: $\lambda = \pm \frac{1}{4}$

Para $\lambda = \frac{1}{4}$, sustituimos en $y = 2\lambda x$:

$$y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{x}{2}$$

Sustituimos $y = \frac{x}{2}$ en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 \implies x^2 + x^2 = 4 \implies 2x^2 = 4 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Si $x = \sqrt{2}$, entonces $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x = -\sqrt{2}$, entonces $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los puntos son $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Para estos puntos:

- $f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $f\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Para $\lambda = -\frac{1}{4}$, obtenemos los mismos puntos críticos debido a la simetría del problema, y el valor de f es el mismo.

Paso 4: Conclusión

Los puntos críticos y los valores de la función son:

- En $(0, 1)$ y $(0, -1)$, el valor de $f(x, y) = 0$.
- En $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, el valor de $f(x, y) = 1$.

El **máximo** de $f(x, y)$ es **1** y ocurre en los puntos $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

El **mínimo** de $f(x, y)$ es **0** y ocurre en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

>_ 5.5 ¿Estás seguro que los puntos $(0, -1)$ y $(0, 1)$ son puntos críticos de la función de Lagrange?



¡Buena observación! Tienes razón en señalar que los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ no son puntos críticos correctos de la función de Lagrange. Cometí un error en mi cálculo anterior al incluirlos como puntos críticos. Vamos a corregir esto y verificar los puntos críticos de manera más cuidadosa.

Paso 1: Recapitulación del planteamiento de Lagrange

Estamos maximizando/minimizando la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$. Para aplicar el método de Lagrange, planteamos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda (4 - (x^2 + 4y^2))$$

Paso 2: Derivar la función de Lagrange

Derivamos con respecto a x , y y λ :

1. Derivada con respecto a x :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \quad (\text{Ecuación 1})$$

2. Derivada con respecto a y :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 8\lambda y = 0 \quad (\text{Ecuación 2})$$

3. Derivada con respecto a λ (la restricción):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4 - (x^2 + 4y^2) = 0 \quad (\text{Ecuación 3})$$

Paso 3: Resolver el sistema de ecuaciones

Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido.

3.1. A partir de la Ecuación 1: $y = 2\lambda x$

Sustituimos esto en la Ecuación 2:

$$x - 8\lambda(2\lambda x) = 0$$

Simplificamos:

$$x - 16\lambda^2 x = 0$$

Factorizamos x :

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

De aquí, tenemos dos posibles soluciones:

1. $x = 0$

2. $1 - 16\lambda^2 = 0 \implies \lambda^2 = \frac{1}{16} \implies \lambda = \pm \frac{1}{4}$

Caso 1: $x = 0$

Si $x = 0$, sustituimos en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$0^2 + 4y^2 = 4 \implies 4y^2 = 4 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1$$

En este caso, obtenemos los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Sin embargo, **no son puntos críticos válidos** porque, cuando los sustituimos en la Ecuación 1 $y - 2\lambda x = 0$, no se cumple ya que $x = 0$ y $y \neq 0$, lo que no es coherente.

Por lo tanto, **descartamos los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ como puntos críticos.**

Caso 2: $\lambda = \pm \frac{1}{4}$

Si $\lambda = \frac{1}{4}$, entonces de la Ecuación 1 tenemos:

$$y = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{x}{2}$$

Sustituimos $y = \frac{x}{2}$ en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 \implies x^2 + x^2 = 4 \implies 2x^2 = 4 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Si $x = \sqrt{2}$, entonces $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x = -\sqrt{2}$, entonces $y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Los puntos críticos son $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, obtenemos los mismos puntos críticos debido a la simetría del problema.

Paso 4: Conclusión corregida

- Los **puntos críticos válidos** son $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ **no son puntos críticos válidos** de la función de Lagrange, ya que no satisfacen las ecuaciones obtenidas.

De esta forma, los únicos puntos en los que se pueden encontrar los extremos de la función son $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como se ha indicado al principio del ejemplo, faltan puntos críticos que aparecen al analizar con más detalle el caso $\lambda = -\frac{1}{4}$:

>_ 5.6 ¿Estás seguro que en el caso $\lambda = -1/4$ no se obtienen nuevos puntos críticos?

Tienes razón en cuestionarlo; es posible que el caso $\lambda = -\frac{1}{4}$ produzca nuevos puntos críticos. Vamos a analizar este caso en detalle para asegurarnos de no omitir ninguna solución.

Recapitulación de los casos y el sistema de ecuaciones

Nuestro sistema de ecuaciones, derivado de la función de Lagrange $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4 - (x^2 + 4y^2))$, es:

1. $y - 2\lambda x = 0$
2. $x - 8\lambda y = 0$
3. $x^2 + 4y^2 = 4$

De la primera ecuación, obtenemos que:

$$y = 2\lambda x$$

Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación, tenemos:

$$x - 8\lambda(2\lambda x) = 0 \implies x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Esto da lugar a dos casos:

1. $x = 0$
2. $\lambda = \pm \frac{1}{4}$

Caso 1: $\lambda = \frac{1}{4}$ Ya resolvimos este caso y obtuvimos los puntos críticos:

.....

Caso 2: $\lambda = -\frac{1}{4}$

Ahora, resolvamos el caso $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Sustitución de $\lambda = -\frac{1}{4}$

Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, volvemos a la ecuación $y = 2\lambda x$:

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)x = -\frac{x}{2}$$

Sustituyendo $y = -\frac{x}{2}$ en la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$:

$$x^2 + 4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 4$$

Simplificamos:

$$x^2 + x^2 = 4 \implies 2x^2 = 4 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Entonces, si $x = \sqrt{2}$, tenemos $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, y si $x = -\sqrt{2}$, entonces $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por lo tanto, los puntos críticos adicionales son:

$$\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Conclusión Final

Al considerar ambos casos para $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, obtenemos **cuatro puntos críticos** en total:

1. $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3. $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Evaluación de los Puntos Críticos

Evaluamos $f(x, y) = xy$ en cada uno de estos puntos:

- En $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x, y) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.
- En $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x, y) = (-\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$.
- En $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x, y) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.
- En $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(x, y) = (-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$.

Resultado Final

- Los **máximos** de $f(x, y)$ son 1 en los puntos $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Los **mínimos** de $f(x, y)$ son -1 en los puntos $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gracias por señalarlo; al revisar el caso $\lambda = -\frac{1}{4}$, encontramos los puntos adicionales y confirmamos los valores extremos correctamente. 





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso para el cálculo de primitivas de funciones de una variable y aplicaciones

¿Cómo una IA generativa puede ayudarme a resolver problemas de matemáticas?

F. Torralbo

1. Consideraciones generales

El desempeño de la IA generativa, en concreto de ChatGPT¹, para el cálculo de primitivas de funciones de una variable así como la resolución de problemas de área no ha sido tan bueno como para la derivación de funciones de una única variable.

En este documento vamos a presentar tanto ejemplos correctos como aquellos donde la respuesta de la IA no ha sido adecuada, bien por ser incorrecta o bien por precisar información adicional o aclaraciones para llegar a la misma.

En concreto, hemos detectado los siguientes problemas:

- Cuando es necesaria una manipulación previa de la integral, como en >_ 2.1, no es capaz de resolverla correctamente. En dichos casos, es necesario proporcionarle una indicación como en >_ 2.2 para obtener una solución correcta.
- Para algunas integrales que se resuelven por partes como por ejemplo en >_ 2.3, si bien intenta diversos métodos (incluida la integración por partes con la elección correcta) no obtiene la solución. En dichos casos, una indicación precisa del método a utilizar (partes en el ejemplo, ver >_ 2.4) así como especificar que funciones debe elegir como u y dv permite resolver la integral correctamente.
- Las integrales racionales las resuelve normalmente de forma correcta aunque en algunos casos no de forma totalmente convencional (ver p.e. >_ 2.5 o bien la parte final de >_ 2.3).
- En el caso de integrales racionales trigonométricas, en ocasiones razona correctamente, como en >_ 2.6 pero en otras no aplica los métodos estándar o bien no da una solución satisfactoria al problema (p.e. >_ 2.7). En dichos casos, basta con especificar el cambio de variable adecuado para obtener una solución correcta (ver >_ 2.8).
- En el cálculo de áreas el desempeño es correcto aunque a veces es necesario indicarle que lo que se pretende calcular es el *área geométrica* en lugar del *área algebraica* (ver >_ 3.1). En otras ocasiones la IA ha hecho uso de fórmulas conocidas para el cálculo

¹Se ha usado para los ejemplos de este documento el motor gpt-4o.

del área (como por ejemplo en >_ 3.2) pero tras pedirle que hiciese el cálculo usando integración lo resuelve correctamente (ver >_ 3.3).

- En el cálculo de longitudes, el planteamiento es correcto pero la resolución de algunas integrales no las proporciona de forma explícita y usa fórmulas conocidas (ver >_ 4.1). En dicho caso, se le puede pedir explícitamente que detalle los cálculos de la integral proporcionándole el método o cambio de variable adecuado (ver >_ 4.2)
- En general, la resolución de problemas que implican áreas y volúmenes de revolución ha sido correcta, si bien a veces usa una nomenclatura diferente a la usada en clase (ver, por ejemplo, referencia al *método de los discos* en el cálculo del volumen del cono >_ 5.2).

Para que el documento no sea excesivamente largo, se han seleccionado mayoritariamente preguntas/respuestas donde se han detectado problemas. En dicho caso, hemos marcado las respuestas con el símbolo ✖. Además, en algunos casos no se muestra la respuesta completa por no ser relevante. Cuando esto ocurre indicamos el símbolo

..... ⌘

2. Cálculo de primitivas

>_ 2.1 Calcula una primitiva de la función $(4 - x^{2/3})^3$.

✖ ✎ Para encontrar una primitiva de la función $f(x) = (4 - x^{2/3})^3$, utilizaremos un cambio de variable. El objetivo es simplificar la integral a una forma más manejable.

Paso 1: Cambio de variable

Consideremos el cambio de variable:

$$u = 4 - x^{2/3}$$

De este modo, necesitamos encontrar du en términos de dx . Derivamos u con respecto a x :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Por tanto, dx es:

$$dx = -\frac{3}{2}x^{1/3} du$$

Ahora necesitamos expresar $x^{1/3}$ en términos de u . Dado que $u = 4 - x^{2/3}$, tenemos:

$$x^{2/3} = 4 - u$$

Tomando la raíz cúbica de ambos lados, obtenemos:

$$x^{1/3} = (4 - u)^{1/2}$$

Sustituyendo en dx :

$$dx = -\frac{3}{2}(4-u)^{1/2} du$$

Paso 2: Sustitución en la integral

La integral original se convierte en:

$$\int (4-x^{2/3})^3 dx = \int u^3 \left(-\frac{3}{2}(4-u)^{1/2} du \right)$$

Simplificando, tenemos:

$$= -\frac{3}{2} \int u^3 (4-u)^{1/2} du$$

Paso 3: Resolver la integral

Para resolver esta integral, utilizamos el método de integración por partes. Sea:

- $v = u^3$ entonces $dv = 3u^2 du$
- $dw = (4-u)^{1/2} du$ entonces, para w , utilizamos:

$$w = -\frac{2}{3}(4-u)^{3/2}$$

Aplicamos integración por partes:

$$\int v dw = vw - \int w dv$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} &= \left[u^3 \cdot -\frac{2}{3}(4-u)^{3/2} \right] - \int -\frac{2}{3}(4-u)^{3/2} \cdot 3u^2 du \\ &= -\frac{2}{3}u^3(4-u)^{3/2} + 2 \int u^2(4-u)^{3/2} du \end{aligned}$$

La segunda integral puede ser resuelta de manera similar mediante otro cambio de variable o técnicas avanzadas, pero este paso requiere una técnica más avanzada como series de Taylor o aproximación numérica para obtener una expresión cerrada.

Paso 4: Reconstrucción de la integral original

La integral nos da una función en términos de u , pero necesitamos devolver el resultado en términos de x :

$$u = 4 - x^{2/3}$$

Por tanto, la expresión de la primitiva en términos de x se construye al revertir el cambio de variable:

$$\int (4-x^{2/3})^3 dx = -\frac{2}{3}(4-x^{2/3})^3 \cdot x + C$$

Donde C es la constante de integración. Esta representa una primitiva de la función $(4-x^{2/3})^3$.

El resultado final es incorrecto pues la IA no termina de hacer la integral por partes. Es posible terminar el cálculo aplicando el procedimiento por partes tres veces más de manera

que vamos reduciendo el término original $u^3(4-u)^{\frac{1}{2}}$ a $u^2(4-u)^{\frac{3}{2}}$, a continuación a $u(4-u)^{\frac{5}{2}}$ hasta llegar finalmente a $(4-u)^{\frac{7}{2}}$ que es una integral inmediata. Ahora bien, es más sencillo desarrollar el cubo e integrar término a término. Una vez que le damos a la ia dicha indicación si nos proporciona el resultado correcto:

>_ 2.2 En el cálculo anterior, desarrolla primero el cubo y a continuación calcula la integral

 Para calcular una primitiva de la función $f(x) = (4 - x^{2/3})^3$, primero desarrollaremos el cubo y luego integraremos término a término.

Paso 1: Desarrollar el cubo

Empezamos por expandir $(4 - x^{2/3})^3$ usando la fórmula del binomio de Newton:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

En este caso, $a = 4$ y $b = x^{2/3}$:

$$(4 - x^{2/3})^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot x^{2/3} + 3 \cdot 4 \cdot (x^{2/3})^2 - (x^{2/3})^3$$

Calculamos cada término:

- $4^3 = 64$
- $3 \cdot 4^2 \cdot x^{2/3} = 48x^{2/3}$
- $3 \cdot 4 \cdot (x^{2/3})^2 = 12x^{4/3}$
- $(x^{2/3})^3 = x^2$

Entonces, la expansión es:

$$(4 - x^{2/3})^3 = 64 - 48x^{2/3} + 12x^{4/3} - x^2$$

Paso 2: Integrar término a término

Ahora, integramos cada término por separado:

$$1. \int 64 dx = 64x + C_1$$

$$2. \int -48x^{2/3} dx:$$

Utilizamos la regla de integración $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int -48x^{2/3} dx = -48 \int x^{2/3} dx = -48 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} = -48 \cdot \frac{3}{5} x^{5/3} = -\frac{144}{5} x^{5/3} + C_2$$

$$3. \int 12x^{4/3} dx:$$

$$\int 12x^{4/3} dx = 12 \int x^{4/3} dx = 12 \cdot \frac{x^{7/3}}{7/3} = 12 \cdot \frac{3}{7} x^{7/3} = \frac{36}{7} x^{7/3} + C_3$$

4. $\int -x^2 dx$:

$$\int -x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C_4$$

Sumamos todas estas integrales para obtener la primitiva de $f(x)$:

$$\int (4 - x^{2/3})^3 dx = 64x - \frac{144}{5}x^{5/3} + \frac{36}{7}x^{7/3} - \frac{x^3}{3} + C$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ es la constante de integración.

>_ 2.3 **Calcula una primitiva de la función $\arctg(x/(1+x))$**

✖  Para calcular una primitiva de la función $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)$, primero buscaremos simplificar la expresión mediante un cambio de variable que facilite la integración.

Paso 1: Simplificación

Consideremos la función dentro del arctan:

$$u = \frac{x}{1+x}$$

Para simplificar la integración, trabajaremos con la derivada de u :

$$u = \frac{x}{1+x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(1+x) \cdot 1 - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Esto implica:

$$du = \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

Aún no es evidente cómo integrar directamente en términos de u , así que pasemos a otro enfoque. Consideremos una identidad útil para la integración de la función arctan.

Paso 2: Integración de la función arctan

La derivada de $\arctan(v)$ es:

$$\frac{d}{dv} \arctan(v) = \frac{1}{1+v^2}$$

Nos interesa encontrar una forma de expresar nuestra función en un formato donde esta derivada se aplique. Esto no es directamente aplicable aquí sin un cambio de variable adicional, así que veamos otra forma de abordar la integral directamente con integración por partes.

Paso 3: Integración por partes

La integración por partes es una técnica donde:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para $\int \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) dx$, podemos setear:

- $v = \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)$
- $du = dx$

Entonces necesitamos calcular dv :

$$dv = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

Calculando dv es complicado debido a la naturaleza de $\frac{x}{1+x}$, por lo que una estrategia alternativa es reevaluar la derivada de la composición para $\arctan$.

Paso 4: Alternativa de simplificación

Reevaluamos el original:

$$v = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{v}{1-v}$$

Reescribimos la integral como:

$$\int \arctan(v) \cdot \frac{d}{dx}(v) dx$$

Aquí $v = \frac{x}{1+x}$ no facilita una simplificación directa, así que volvamos a una técnica por partes más convencional.

Paso 5: Simplificación por partes

Otra forma es considerar $x = t - 1$ que convierte:

$$\int \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) dx \approx \text{a simpler form}$$

Sin más detalles, complejidades adicionales se requieren para un paso directo, pero generalmente una aproximación numérica o serie puede ser usada.

Solución Final

Dado el contexto, las simplificaciones directas resultan en una función tipo:

$$F(x) = x \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

donde C es la constante de integración, obtenido usualmente por ajuste o métodos numéricos/avanzados. ✗

Todos los procedimientos que la IA ha intentado no han sido fructíferos y, aunque da una respuesta final, no es correcta ni parece estar basada en ninguno de los pasos que ha intentado. En este caso, basta indicarle que debe realizar la integral por partes para que la resuelva correctamente:

>_ 2.4 Resuelve la integral anterior aplicando el método de integración por partes para $u=\arctg(x/(1+x))$ y $dv=dx$



Para resolver la integral $\int \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) dx$ mediante integración por partes, empezaremos eligiendo:

- $u = \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right) dx$
- $dv = dx \Rightarrow v = x$

Paso 1: Calcular du

Para encontrar du , derivamos $\frac{x}{1+x}$:

$$\frac{x}{1+x} = x(1+x)^{-1}$$

Derivando, usando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{(1+x) \cdot 1 - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Ahora, calculamos du :

$$du = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

Simplificamos:

$$\left(\frac{x}{1+x} \right)^2 = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

Entonces:

$$1 + \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 + x^2}{(1+x)^2} = \frac{1+2x+x^2+x^2}{(1+x)^2} = \frac{1+2x+2x^2}{(1+x)^2}$$

Por lo tanto:

$$du = \frac{1}{\frac{1+2x+x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{(1+x)^2}{1+2x+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{1+2x+x^2} dx$$

Paso 2: Aplicar integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$\int \arctan \left(\frac{x}{1+x} \right) dx = x \cdot \arctan \left(\frac{x}{1+x} \right) - \int x \cdot \frac{1}{1+2x+x^2} dx$$

Paso 3: Resolver la integral restante

La integral restante es:

$$\int \frac{x}{1+2x+x^2} dx$$

Para resolver esto, intentamos hacer un cambio de variable o completar el cuadrado en el denominador:

Completemos el cuadrado:

$$1+2x+x^2 = (x+1)^2$$

Así, la integral se convierte en:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

Usamos un cambio de variable:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx \text{ and } x = u-1$$

Entonces:

$$\int \frac{u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du$$

Estas integrales son:

- $\int \frac{1}{u} du = \ln |u|$

- $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$

Por lo tanto, la integral se evalúa como:

$$\ln |u| + \frac{1}{u} + C$$

Sustituyendo de nuevo $u = x + 1$:

$$\ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C$$

Solución Final

Sustituyendo de nuevo en la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\int \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) dx = x \cdot \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \left(\ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1}\right) + C$$

Por lo tanto, la primitiva de la función es:

$$x \cdot \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \ln |x + 1| - \frac{1}{x + 1} + C$$



> 2.5 Calcular una primitiva de la función $(2x+1)/(x^2-x+1)$



Para calcular una primitiva de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x+1}$, podemos intentar descomponer la fracción o utilizar un cambio de variable adecuado. En este caso, el denominador es un polinomio cuadrático, lo que sugiere que podemos descomponer la fracción o usar un método que se aproveche de la estructura del denominador.

Paso 1: Analizar la estructura del denominador

El denominador $x^2 - x + 1$ no se factoriza fácilmente, pero notamos que su derivada es $2x - 1$, que se parece a la parte lineal del numerador. Esto sugiere que la integral podría beneficiarse de un ajuste o descomposición que involucre completar el cuadrado o descomponer el numerador adecuadamente.

Paso 2: Descomposición del numerador

Podemos intentar reescribir $2x + 1$ en una forma que separe el término derivado del denominador más un ajuste:

$$2x + 1 = (2x - 1) + 2$$

Esto se puede reescribir como:

$$\frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(2x - 1) + 2}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 1}$$

Paso 3: Integrar cada término por separado

1. Integrar $\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

Observamos que el numerador es la derivada del denominador:

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx$$



Esta integral se puede resolver reconociendo que la función está en la forma $\frac{f'(x)}{f(x)}$, que se integra como $\ln|f(x)|$:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \ln|x^2-x+1| + C_1$$

2. Integrar $\frac{2}{x^2-x+1}$

Para esta parte, podemos usar una técnica que involucra completar el cuadrado en el denominador:

Completemos el cuadrado para $x^2 - x + 1$:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Entonces, la integral se convierte en:

$$\int \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

Esta es una integral estándar que se asemeja a la forma del arctangente:

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Aquí, $u = x - \frac{1}{2}$ y $a^2 = \frac{3}{4}$, así que $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por lo tanto:

$$\int \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

Simplificamos el coeficiente:

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Entonces, la integral del segundo término es:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

Paso 4: Combinar los resultados

Combinando ambos resultados, la primitiva de $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x+1}$ es:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x+1} dx = \ln|x^2-x+1| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la constante de integración.

> 2.6 Calcular la integral de $\sin^4(x)$



Para calcular la integral de $\sin^4(x)$, utilizaremos identidades trigonométricas para simplificar la expresión antes de integrar. La estrategia general es reducir la potencia mediante identidades de ángulos dobles.

Paso 1: Reducir la potencia usando identidades trigonométricas

Podemos emplear la identidad:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Aplicando esta identidad a $\sin^4(x)$:

$$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2$$

Expandiendo el cuadrado:

$$= \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$$

Paso 2: Simplificar $\cos^2(2x)$ usando la identidad de ángulo doble

Utilizamos la identidad para $\cos^2(2x)$:

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\sin^4(x) = \frac{1 - 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2}}{4}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2}}{4} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}}{4} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \end{aligned}$$

Paso 3: Integrar término a término

Ahora integramos cada término por separado:

$$\int \sin^4(x) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \right) dx$$

1. $\int \frac{3}{8} dx = \frac{3}{8}x + C_1$
2. $\int -\frac{1}{2}\cos(2x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) = -\frac{1}{4}\sin(2x) + C_2$
3. $\int \frac{1}{8}\cos(4x) dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}\sin(4x) = \frac{1}{32}\sin(4x) + C_3$

Paso 4: Combinar los resultados

Sumamos las integrales:

$$\int \sin^4(x) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

donde $C = C_1 + C_2 + C_3$ es la constante de integración.

>_ 2.7 **Calcula una primitiva de la función $1/(1+\cos(x)+\sin(x))$**



Para calcular una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}$, un enfoque útil es simplificar la expresión en el denominador. Una técnica común es usar identidades trigonométricas y cambios de variable para simplificar la función.

Paso 1: Simplificación usando identidades trigonométricas

Primero, recordamos algunas identidades trigonométricas fundamentales:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Sin embargo, en este caso, una forma más directa es completar el cuadrado en el denominador. Podemos reescribir:

$$1 + \cos(x) + \sin(x)$$

Nosotros podemos usar una identidad que vincule $\cos$ y $\sin$ con una combinación de un ángulo doble. Una forma es expresar la función en términos de una única función trigonométrica.

Paso 2: Uso de una transformación conveniente

Consideramos la identidad:

$$1 + \cos(x) + \sin(x) = 1 + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Aquí, podemos usar que:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x) - \sin(x))$$

Entonces,

$$1 + \cos(x) + \sin(x) = 1 + \sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Paso 3: Facilitar la integración

Para simplificar la integración, consideremos un cambio de variable. Sin embargo, en este caso, podemos reescribir:

$$1 + \cos(x) + \sin(x) = 1 + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Paso 4: Racionalización y simplificación

Este paso nos lleva a pensar en un cambio de variable alternativo, o en reescribir la función de modo que la integración sea directa:

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

Paso 5: Integración directa

Consideramos:

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

Esto puede ser transformado en una integral estándar usando la fórmula:

$$\int \frac{1}{a + b \cos(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{a \tan\left(\frac{x}{2}\right) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) + C$$

En este caso, $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$, y podemos simplificar mediante la sustitución de la fórmula de tangente mitad para resolver la integral.

Solución Final

Por tanto, al integrar, obtenemos:

$$\int \frac{1}{1 + \cos(x) + \sin(x)} dx \approx (\text{una solución en términos de arctangente y ajustes trigonométricos})$$

Tales integrales son complejas y típicamente resueltas usando transformaciones y ajustes mediante software o métodos numéricos avanzados, pero usando los principios aquí descritos, puedes trabajar la expresión hacia una forma cerrada. ✖

>_ 2.8 Resuelve la integral anterior aplicando el cambio de variable $t = \tan(x/2)$

 Para resolver la integral $\int \frac{1}{1 + \cos(x) + \sin(x)} dx$, utilizaremos el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Este es un conocido cambio de variable que simplifica integrales de funciones trigonométricas.

Paso 1: Relaciones trigonométricas con $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Cuando hacemos el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, las funciones trigonométricas se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

Además, el diferencial dx en términos de t es:

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Paso 2: Sustitución en la integral

Sustituimos $\sin(x)$, $\cos(x)$, y dx en la integral original:

$$\int \frac{1}{1 + \cos(x) + \sin(x)} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

Simplificamos la expresión dentro del integrando:

$$1 + \cos(x) + \sin(x) = 1 + \frac{1-t^2+2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2+1-t^2+2t}{1+t^2} = \frac{2+2t}{1+t^2}$$

Esto simplifica a:

$$= \frac{2(1+t)}{1+t^2}$$

Paso 3: Simplificar la integral

La integral se convierte en:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\frac{2(1+t)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt &= \int \frac{1+t^2}{2(1+t)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{1+t} dt\end{aligned}$$

Paso 4: Integrar

La integral $\int \frac{1}{1+t} dt$ es una integral estándar:

$$\int \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+t| + C$$

Paso 5: Volver a la variable original

Recordando que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, sustituimos de nuevo:

$$\ln\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Por lo tanto, la primitiva de la función es:

$$F(x) = \ln\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

donde C es la constante de integración.



3. Cálculo de áreas de figuras planas

>_ 3.1 Calcula el área de la región plana comprendida entre el eje de abscisas y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$



Para calcular el área de la región plana comprendida entre el eje de abscisas (el eje x) y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, primero debemos determinar los puntos donde la curva interseca el eje x . Estos puntos de intersección son las raíces de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$.

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección con el eje x

Para encontrar las raíces, factorizamos la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8)$$

Ahora, factorizamos el trinomio cuadrático $x^2 - 6x + 8$:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Por lo tanto, la factorización completa es:

$$x(x - 2)(x - 4) = 0$$

Las raíces de la ecuación son $x = 0$, $x = 2$, y $x = 4$.

Paso 2: Determinar el área entre la curva y el eje x

La región de interés está entre los puntos $x = 0$ y $x = 4$. Calculamos el área bajo la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$:

$$A = \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

Paso 3: Calcular la integral

Integramos término a término:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 8x dx$$

Calculando cada término:

$$1. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$2. \int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} = 2x^3$$

$$3. \int 8x dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} = 4x^2$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^4$$

Paso 4: Evaluar la integral

Evalúamos la integral en los límites de 0 a 4:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right) \\ &= \left(\frac{256}{4} - 2 \cdot 64 + 4 \cdot 16 \right) \\ &= (64 - 128 + 64) = 0 \end{aligned}$$

Paso 5: Interpretar el resultado

El resultado 0 indica que el área algebraica entre la curva y el eje x suma cero. Esto sugiere que partes del área están por encima del eje x y otras partes están por debajo, cancelándose mutuamente. Para obtener el área geométrica total (sin considerar el signo), debemos calcular las áreas de las regiones por separado, donde la curva está por encima y por debajo del eje x , y sumárlas.

Paso 6: Calcular el área geométrica total

Para calcular el área geométrica, debemos integrar el valor absoluto de $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ entre los puntos de intersección. Analizamos entre $x = 0$ a $x = 2$ y desde $x = 2$ a $x = 4$ y evaluamos la función para ver cómo se comporta en cada intervalo:

- De $x = 0$ a $x = 2$: $y \geq 0$, por lo que el área es positiva.
- De $x = 2$ a $x = 4$: $y \leq 0$, por lo que el área es negativa y debemos tomar el valor absoluto.

Calculamos las áreas separadamente y sumamos:

Área de $x = 0$ a $x = 2$:

$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 \\
 &= \left(\left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right) \right) \\
 &= \left(\frac{16}{4} - 16 + 16 \right) = 4 - 16 + 16 = 4
 \end{aligned}$$

Área de $x = 2$ a $x = 4$:

$$A_2 = \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right) \right]_2^4 \\
 &= - \left(\left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right) \right) \\
 &= -((64 - 128 + 64) - (4 - 16 + 16)) = -(0 - 4) = 4
 \end{aligned}$$

Paso 7: Sumar las áreas

El área total es $A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$.

Por lo tanto, el área de la región entre la curva y el eje x es 8 unidades cuadradas.



>_ 3.2 **Calcula el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$**



Para calcular el área de la intersección de los círculos definidos por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$, primero analizamos las características de estos círculos y su disposición en el plano.

Paso 1: Descripción de los círculos

1. **Círculo 1:** $x^2 + y^2 = 4$: Este es un círculo centrado en el origen $(0, 0)$ con radio 2.

2. **Círculo 2:** $x^2 + y^2 = 4x$

■ Podemos reescribir esta ecuación como $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

■ Completando el cuadrado para x , obtenemos:

$$(x - 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

■ Este es un círculo centrado en $(2, 0)$ con radio 2.

Paso 2: Encontrar los puntos de intersección

Para encontrar los puntos de intersección de los dos círculos, resolvemos el sistema de ecuaciones:

1. $x^2 + y^2 = 4$

2. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

Restando la segunda ecuación de la primera, podemos simplificar:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - ((x - 2)^2 + y^2) &= 4 - 4 \\x^2 - (x^2 - 4x + 4) &= 0 \\4x - 4 &= 0 \\x &= 1\end{aligned}$$

Sustituimos $x = 1$ en $x^2 + y^2 = 4$:

$$1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Los puntos de intersección son $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$.

Paso 3: Calcular el área de intersección

Los círculos son simétricos respecto al eje x y tenemos un segmento común entre los puntos de intersección. La región de intersección es una lente simétrica a lo largo del eje x .

Para calcular el área de la intersección, podemos encontrar el área de una de las dos "lentes" formadas por la intersección y multiplicar por dos.

Área de una lente

El área de la lente es la diferencia entre el área de un sector circular y el triángulo isósceles formado por el centro del círculo y los puntos de intersección.

..... ✂

Por lo tanto, el área de la intersección de los dos círculos es $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.



En este caso la 1A hace uso de fórmulas conocidas para el área de una lente. En nuestro caso queremos que resuelva el problema usando integración, luego basta pedírselo explícitamente para que lo haga.

>_ 3.3 Calcular el anterior área pero usando una integral



Para calcular el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$ usando integrales, podemos seguir estos pasos:

Paso 1: Identificar las ecuaciones de los círculos

1. Círculo 1: $x^2 + y^2 = 4$ - Centro: $(0, 0)$ - Radio: 2
2. Círculo 2: $x^2 + y^2 = 4x$ - Reescribiendo: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ - Centro: $(2, 0)$ - Radio: 2

Paso 2: Encontrar los puntos de intersección

Como ya hemos calculado, los puntos de intersección son $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$.

Paso 3: Configurar la integral

Para calcular el área de la intersección, consideramos la región en x desde $x = 0$ a $x = 2$. La línea vertical $x = 1$ es el punto de simetría donde las intersecciones ocurren. La función de intersección se puede dividir en dos regiones simétricas sobre el eje x . Vamos a integrar sobre el eje x desde 0 a 2.

Expresión de y en cada círculo:

1. Primer círculo: $x^2 + y^2 = 4$: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

2. Segundo círculo: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$: $y = \pm\sqrt{4 - (x - 2)^2} = \pm\sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4)} = \pm\sqrt{8x - x^2}$

Paso 4: Configurar la integral para el área

El área de la intersección entre $x = 0$ y $x = 2$ es la diferencia entre las áreas bajo las curvas de las dos funciones de y :

$$A = 2 \int_1^2 \left[\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{8x - x^2} \right] dx$$

Multiplicamos por 2 debido a la simetría respecto al eje x .

Paso 5: Evaluar la integral

1. Integrar $\sqrt{4 - x^2}$: Esta es la integral de un semicírculo y se integra fácilmente usando la antiderivada:

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right)$$

2. Integrar $\sqrt{8x - x^2}$: Esta integral es más compleja, pero puede ser transformada usando un cambio de variable o completando el cuadrado. Para resolver $\int \sqrt{8x - x^2} dx$, podemos completar el cuadrado:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) = 16 - (x - 4)^2$$

La integral se convierte en:

$$\int \sqrt{16 - (x - 4)^2} dx$$

Esto es una integral de un semicírculo desplazado, y se evalúa similarmente.

Paso 6: Solución final

Evaluamos las integrales usando los límites de $x = 1$ a $x = 2$ y sumamos los resultados:

1. La integral de $\sqrt{4 - x^2}$ entre 1 y 2.

2. La integral de $\sqrt{8x - x^2}$ entre 1 y 2.

La diferencia de estas integrales nos dará el área de la región de intersección para un lado del eje x , y luego multiplicamos por 2 para obtener el área total.

Finalmente, la evaluación de estas integrales puede ser llevada a cabo usando técnicas estándar de integración o software simbólico para obtener el valor numérico exacto. Sin embargo, el resultado esperado considerando la simetría y propiedades de los círculos es $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$. ❌

Hay un pequeño error en la respuesta anterior en el paso 3 cuando obtiene la expresión de cada círculo como gráfica de una función. En concreto para el segundo círculo escribe: $y = \pm\sqrt{4 - (x - 2)^2} = \pm\sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4)} = \pm\sqrt{8x - x^2}$ y debería ser $\sqrt{4x - x^2}$. Sorprendentemente, el resultado final es correcto.

4. Cálculo de longitudes de curvas

>_ 4.1 **Calcula la longitud de la curva $y=x^2$ entre los puntos (0,0) y (1,1)**



Para calcular la longitud de la curva $y = x^2$ entre los puntos (0,0) y (1,1), utilizamos la fórmula para la longitud de arco de una función $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Paso 1: Derivar la función

Para $y = x^2$, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Paso 2: Sustituir en la fórmula de la longitud de arco

Sustituimos la derivada en la fórmula:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Paso 3: Resolver la integral

La integral $\int \sqrt{1 + 4x^2} dx$ es no trivial y puede resolverse usando una sustitución trigonométrica. Usamos la sustitución $x = \frac{1}{2} \tan(\theta)$, lo que implica que $dx = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta$.

Cambio de variable

1. $x = \frac{1}{2} \tan(\theta)$
2. $dx = \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta$
3. Cuando $x = 0$, $\theta = 0$.
4. Cuando $x = 1$, $\theta = \tan^{-1}(2)$.

Sustituir en la integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \int \sqrt{1 + 4 \left(\frac{1}{2} \tan(\theta)\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} \cdot \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \sec(\theta) \cdot \frac{1}{2} \sec^2(\theta) d\theta = \int \frac{1}{2} \sec^3(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Paso 4: Resolver la integral de $\sec^3(\theta)$

La integral de $\sec^3(\theta)$ es un tipo especial que se puede resolver por partes o usando una fórmula conocida. Para simplificar, usaremos:

$$\int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{2} (\sec(\theta) \tan(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|) + C$$

Sustituyamos esto en la integral:

$$\frac{1}{2} \int \sec^3(\theta) d\theta = \frac{1}{4} (\sec(\theta) \tan(\theta) + \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)|)$$

Paso 5: Evaluar los límites

Evalúamos entre $\theta = 0$ y $\theta = \tan^{-1}(2)$:

$$1. \text{ Para } \theta = 0: \sec(0) = 1 \text{ y } \tan(0) = 0$$

$$2. \text{ Para } \theta = \tan^{-1}(2): \sec(\theta) = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \sqrt{5} \text{ y } \tan(\theta) = 2$$

Evalúamos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (\sqrt{5} \cdot 2 + \ln |\sqrt{5} + 2|) - \frac{1}{4} (1 \cdot 0 + \ln |1 + 0|) \\ &= \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2)$. 

En el anterior ejemplo, el cálculo de la integral de la $\sec^3(x)$ no es explícito. A continuación solicitamos que lo haga y le indicamos el cambio de variable.

>_ 4.2 Calcula una primitiva de la función $\sec^3(x)$ usando el cambio de variable $t = \sin(x)$

 Para calcular una primitiva de la función $\sec^3(x)$, podemos usar el cambio de variable $t = \sin(x)$. Este cambio de variable es útil porque nos permite expresar $\sec(x)$ y $\tan(x)$ en términos de t .

Paso 1: Expresar $\sec(x)$ y $\tan(x)$ en términos de t

Dado que $t = \sin(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - t^2} \\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

Paso 2: Diferencial en términos de t

El diferencial dx en términos de t es:

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Paso 3: Sustituir en la integral

La integral de $\sec^3(x)$ se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x) dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} dt\end{aligned}$$

..... $\gg$



La IA comete un error en la simplificación del tercer paso. Pidámosle que lo revise y vuelva a calcularlo:

>_ 4.3 Revisa los cálculos del paso 3 y vuelve a intentar calcular la integral



Para calcular una primitiva de la función $\sec^3(x)$ usando el cambio de variable $t = \sin(x)$, revisemos y ajustemos el cálculo:

Paso 1: Expresar $\sec(x)$ y $\tan(x)$ en términos de t

Dado que $t = \sin(x)$, sabemos:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - t^2} \\ \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\end{aligned}$$

Paso 2: Diferencial en términos de t

El diferencial dx en términos de t es:

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Paso 3: Sustituir en la integral

La integral de $\sec^3(x)$ se transforma como sigue:

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x) dx &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt\end{aligned}$$

Paso 4: Resolver la integral

La integral $\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt$ se puede resolver usando un método de fracciones parciales o un cambio trigonométrico inverso. Aquí, vamos a usar una técnica de integración por partes.

Cambio a una técnica más adecuada



Para $\sec^3(x)$, la técnica de integración por partes es más directa:

$$\int \sec^3(x) dx = \int \sec(x) \cdot \sec^2(x) dx$$

Podemos usar integración por partes:

- $u = \sec(x), \quad dv = \sec^2(x) dx$
- $du = \sec(x) \tan(x) dx, \quad v = \tan(x)$

..... ☞

La IA realiza correctamente el cambio de variable pero decide no seguir dicho método y sugiere en su respuesta realizar la integral por partes lo que requiere de algunas identidades trigonométricas sencillas. Puesto que queremos que lo realice mediante el cambio de variable solicitado, volveremos a indicarle que así lo haga.

>_ 4.4 Resuelve la integral racional del paso 4 mediante descomposición en fracciones simples

 Para resolver la integral

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt$$

mediante la descomposición en fracciones simples, primero necesitamos reconocer la forma en la que el denominador puede ser factorizado o manipulado para aplicar fracciones parciales. Sin embargo, el denominador $(1-t^2)^2$ no se puede factorizar en números reales, pero podemos reescribirlo usando la identidad:

$$1-t^2 = (1-t)(1+t)$$

Esto nos da:

$$(1-t^2)^2 = [(1-t)(1+t)]^2 = (1-t)^2(1+t)^2$$

Paso 1: Descomposición en fracciones simples

La fracción $\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}$ puede ser descompuesta en fracciones simples como:

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

Multiplicamos ambos lados por $(1-t)^2(1+t)^2$ para eliminar los denominadores:

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2$$

Paso 2: Determinar las constantes

Para determinar A, B, C , y D , expandimos y simplificamos el lado derecho y luego igualamos los coeficientes.

..... ☞

Por tanto, $A + A = \frac{1}{2}$, así que $A = \frac{1}{4}$ y $D = \frac{1}{4}$, y entonces $B = \frac{1}{4}$ y $C = \frac{1}{4}$.

Paso 4: Integrar cada término

Volvemos a la integral original con las constantes encontradas:

$$\int \left(\frac{1/4}{1-t} + \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{1/4}{1+t} + \frac{1/4}{(1+t)^2} \right) dt$$

Esto es equivalente a integrar cada término individualmente:

$$1. \frac{1}{4} \int \frac{1}{1-t} dt = -\frac{1}{4} \ln|1-t| + C_1$$

$$2. \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{4(1-t)} + C_2$$

$$3. \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{4} \ln|1+t| + C_3$$

$$4. \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{4(1+t)} + C_4$$

Paso 5: Combinar las integrales

Combinar los resultados, tenemos la primitiva:

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = -\frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{1}{4(1+t)} + C$$

Por lo tanto, la primitiva de $\frac{1}{(1-t^2)^2}$ es:

$$-\frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \ln|1+t| + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right) + C$$

Simplificando los términos:

$$= \frac{1}{4} (\ln|1+t| - \ln|1-t|) + \frac{1}{4} \left(\frac{2t}{1-t^2} \right) + C$$

Finalmente, la expresión se puede reordenar y simplificar según sea necesario, dependiendo de los límites o condiciones específicas del problema que estés resolviendo.

La IA indica al inicio de su respuesta que "el denominador $(1-t^2)^2$ no puede ser factorizado en números reales lo cual no es cierto. En cualquier caso, su cálculo es correcto.

5. Cálculo de áreas y volúmenes de revolución

>_ 5.1 Calcula el área de la superficie generado al girar la curva $y=x^3$ alrededor del eje X entre $x=0$ y $x=1$



Para calcular el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^3$ alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$, usamos la fórmula para el área de superficie de revolución alrededor del eje x :

$$A = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Aquí, $y = x^3$ y $a = 0, b = 1$.

Paso 1: Calcular $\frac{dy}{dx}$



La derivada de $y = x^3$ es:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Paso 2: Sustituir en la fórmula del área de superficie

Sustituimos $y = x^3$ y $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ en la fórmula:

$$A = \int_0^1 2\pi(x^3)\sqrt{1+(3x^2)^2} dx = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4} dx$$

Paso 3: Evaluar la integral

Para resolver esta integral, consideramos:

$$A = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4} dx$$

Esta integral se puede evaluar usando un método de sustitución. Hacemos el cambio de variable: Dejemos que $u = 1 + 9x^4$, entonces $du = 36x^3 dx$.

Resolviendo para dx , tenemos:

$$dx = \frac{du}{36x^3}$$

Cuando $x = 0$, $u = 1$, y cuando $x = 1$, $u = 10$.

Sustituimos en la integral:

$$A = 2\pi \int_1^{10} x^3 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{36x^3} = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} \sqrt{u} du$$

Paso 4: Evaluar la integral

La integral $\int \sqrt{u} du$ es directa:

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} u^{3/2}$$

Evalúamos desde $u = 1$ hasta $u = 10$:

$$A = \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^{10} = \frac{\pi}{27} \left[(10)^{3/2} - (1)^{3/2} \right] = \frac{\pi}{27} \left[\sqrt{1000} - 1 \right]$$

Ahora, calculamos la expresión:

$$= \frac{\pi}{27} (31,6227766017 - 1) = \frac{\pi}{27} \times 30,6227766017$$

Finalmente, calculamos el valor:

$$\approx \frac{\pi}{27} \times 30,6227766017 \approx \frac{\pi}{27} \times 30,62$$

Por lo tanto, el área aproximada de la superficie generada es:

$$\approx \frac{\pi \times 30,62}{27} \approx 3,564\pi$$

El cálculo exacto se puede realizar con más precisión, pero esto da una aproximación del área de la superficie.

>_ 5.2 Calcular, usando una integral, el volumen de un cono circular recto de altura h y cuya base tiene radio r



Para calcular el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r usando una integral, podemos considerar el cono como una figura de revolución. Imaginemos la generatriz del cono como una línea recta girando alrededor del eje x .

Paso 1: Configuración del problema

Imaginemos el cono colocado de tal manera que su vértice está en el origen $(0, 0)$ y su base está en el plano $x = h$. La línea recta que forma la generatriz del cono puede representarse por la ecuación de una línea recta desde $(0, 0)$ hasta (h, r) .

La ecuación de esta línea recta (generatriz) es:

$$y = \frac{r}{h}x$$

Paso 2: Fórmula del volumen de revolución

Para encontrar el volumen del cono al rotar esta línea alrededor del eje x , utilizamos el método de discos, que nos da la fórmula:

$$V = \pi \int_0^h (\text{radio del disco})^2 dx$$

En este caso, el radio del disco es la distancia vertical desde el eje x a la línea, que es $y = \frac{r}{h}x$.

Paso 3: Sustituir y calcular la integral

Sustituimos la expresión del radio en la fórmula del volumen:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx$$

Sacamos las constantes fuera de la integral:

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

Ahora calculamos la integral:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Evaluamos esta integral de 0 a h :

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - 0 \right) = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Por lo tanto, el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r es:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Este resultado coincide con la fórmula estándar para el volumen de un cono.

>_ 5.3 Se quiere construir un depósito en forma de paraboloide de revolución, es decir, la forma del depósito será la de la superficie que resulta de rotar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor del eje x . Determinar a de manera que la longitud del eje de revolución del depósito sea 1 y su volumen sean π



Para resolver este problema, necesitamos encontrar el valor de a para que el paraboloides de revolución generado por girar la curva $f(x) = \sqrt{ax}$ alrededor del eje x tenga una longitud de eje de 1 y un volumen de π .

Paso 1: Determinar el límite de integración para la longitud del eje

La longitud del eje de revolución es la distancia entre el inicio y el final a lo largo del eje x . Dado que $f(x) = \sqrt{ax}$ alcanza su altura máxima en el paraboloides (donde el eje de revolución es 1), tenemos:

$$f(1) = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$$

Para que el longitud del eje de revolución (el eje x) sea 1, el paraboloides debe extenderse desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Paso 2: Calcular el volumen del paraboloides

El volumen V de un sólido de revolución generado al rotar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x desde $x = 0$ a $x = 1$ es dado por:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 ax dx$$

Calculemos esta integral:

$$V = \pi \int_0^1 ax dx = \pi \left[\frac{ax^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{a(1)^2}{2} - \frac{a(0)^2}{2} \right) = \pi \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi a}{2}$$

Dado que el volumen debe ser π , igualamos:

$$\frac{\pi a}{2} = \pi$$

Dividiendo ambos lados por π :

$$\frac{a}{2} = 1$$

Multiplicando ambos lados por 2:

$$a = 2$$

Resultado

El valor de a que satisface las condiciones del problema es $a = 2$. Esto asegura que la longitud del eje de revolución es 1 y el volumen del paraboloides es π .





Integración de herramientas de IA generativas en la docencia universitaria: Mejorando la experiencia de aprendizaje en estudios de grado.

Ejemplos de uso para el cálculo de integrales de funciones de dos variables y aplicaciones

¿Cómo una IA generativa puede ayudarme a resolver problemas de matemáticas?

F. Torralbo

1. Consideraciones generales

El desempeño de la IA generativa, en concreto de ChatGPT¹, para el cálculo de integrales dobles de funciones de dos variables así como la resolución de problemas de área y volúmenes ha sido irregular. Es necesario tener cuidado con las respuestas.

En este documento vamos a presentar tanto ejemplos correctos como aquellos donde la respuesta de la IA no ha sido adecuada, bien por ser incorrecta o bien por precisar información adicional o aclaraciones para llegar a la misma.

En concreto, hemos detectado los siguientes problemas:

- En algunos casos el planteamiento de la integral iterada es correcto (determina correctamente el orden en los límites de integración, ver >_ 2.2) mientras que en otros casos no es así (ver >_ 2.3).
- Es necesario en muchas ocasiones preguntarle de forma separada el cálculo de algunas integrales iteradas pues el resultado no es el deseado o bien es incompleto.
- El planteamiento de algunos problemas, si bien correcto, no es el más adecuado o sencillo (ver >_ 2.7).

Para que el documento no sea excesivamente largo, se han seleccionado mayoritariamente preguntas/respuestas donde se han detectado problemas. En dicho caso, hemos marcado las respuestas con el símbolo ✖. Además, en algunos casos no se muestra la respuesta completa por no ser relevante. Cuando esto ocurre indicamos el símbolo

..... ✂

¹Se ha usado para los ejemplos de este documento el motor gpt-4o.



2. Cálculo de integrales iteradas

>_ 2.1 **Calcula la integral de la función $f(x,y)=3x^2y^3+3xy$ en el recinto $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$**

Para resolver esta integral doble, primero identificamos la función que vamos a integrar y los límites de integración. La función dada es $f(x, y) = 3x^2y^3 + 3xy$ y el recinto es $-2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$.

La integral doble que debemos calcular es:

$$\int_0^2 \int_{-2}^2 (3x^2y^3 + 3xy) dx dy$$

Empezamos integrando respecto a x , manteniendo y constante. La integral de $3x^2y^3$ respecto a x es:

$$\int 3x^2y^3 dx = y^3 \int 3x^2 dx = y^3 [x^3] = y^3 x^3$$

Evaluable de -2 a 2 :

$$y^3 [(2)^3 - (-2)^3] = y^3(8 + 8) = 16y^3$$

Ahora, la integral de $3xy$ respecto a x es:

$$\int 3xy dx = y \int 3x dx = y \left[\frac{3}{2}x^2 \right] = \frac{3}{2}yx^2$$

Evaluable de -2 a 2 :

$$\frac{3}{2}y [(2)^2 - (-2)^2] = \frac{3}{2}y(4 - 4) = 0$$

Por lo tanto, la integral respecto a x del término completo es:

$$\int_{-2}^2 (3x^2y^3 + 3xy) dx = 16y^3 + 0 = 16y^3$$

Ahora integramos respecto a y de 0 a 2 :

$$\int_0^2 16y^3 dy = 16 \int_0^2 y^3 dy = 16 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^2$$

Evaluable:

$$16 \left[\frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right] = 16 \left[\frac{16}{4} \right] = 16 \times 4 = 64$$

Por lo tanto, la integral doble de la función $f(x, y)$ sobre el recinto dado es 64.

>_ 2.2 **Calcula la integral de la función $f(x,y)=xy$ en el recinto delimitado por las rectas de ecuaciones $x=-2$, $x=2$ y las gráficas de las funciones $g_1(x)=x-2$ y $g_2(x)=-x+2$**

Para calcular la integral de la función $f(x, y) = xy$ sobre el recinto delimitado por las rectas $x = -2$, $x = 2$, y las funciones $g_1(x) = x - 2$ y $g_2(x) = -x + 2$, primero visualizamos el área de integración en el plano xy .

Describir el recinto de integración:

- La línea $y = x - 2$ tiene un punto de intersección con $x = -2$: $y = -2 - 2 = -4$.

- La línea $y = -x + 2$ tiene un punto de intersección con $x = 2$: $y = -2 + 2 = 0$.
- Las líneas $g_1(x) = x - 2$ y $g_2(x) = -x + 2$ se intersectan en $x = 2, y = 0$.

El recinto de integración es entonces un trapecio con vértices en $(-2, -4)$, $(2, 0)$, y las otras intersecciones de las rectas con $x = -2$ y $x = 2$.

Configurar la integral doble:

Para integrar sobre el área delimitada por las funciones, es conveniente integrar primero respecto a y y luego respecto a x . Los límites de integración para y están dados por las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$. Los límites para x son de -2 a 2 .

La integral doble se configura como:

$$\int_{-2}^2 \int_{x-2}^{-x+2} xy \, dy \, dx$$

Integrar respecto a y :

Primero integramos la función xy respecto a y :

$$\int xy \, dy = x \int y \, dy = x \left[\frac{y^2}{2} \right] = \frac{xy^2}{2}$$

Evaluamos desde $y = x - 2$ hasta $y = -x + 2$:

$$\left[\frac{x(-x+2)^2}{2} - \frac{x(x-2)^2}{2} \right]$$

Simplificamos cada término:

- $(-x+2)^2 = x^2 - 4x + 4$
- $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Estos son idénticos, así que la resta de estos términos simplifica a 0, lo que indica que los términos se cancelan al integrar sobre el simétrico intervalo desde -2 a 2 .

Resultado final:

Debido a la simetría del recinto y la función xy , que es impar respecto a y para los límites simétricos dados, el resultado de esta integral es 0.

Por lo tanto, la integral doble de $f(x, y) = xy$ sobre el recinto dado es 0.

El recinto de integración es un triángulo isósceles y no un trapecio como indica la IA en su respuesta. No obstante, los cálculos son correctos.

>_ 2.3 **Calcula la integral de la función $f(x,y)=1/(x+y)$ en el triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$**

- ✖ Para calcular la integral de $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ sobre el triángulo con vértices en $(1, 1)$, $(2, 3)$, y $(3, 2)$, primero debemos determinar las ecuaciones de las líneas que forman los lados del triángulo y luego establecer los límites de integración.

Paso 1: Determinar las ecuaciones de las líneas

Línea entre (1, 1) y (2, 3): - Pendiente: $m = \frac{3-1}{2-1} = 2$ - Ecuación: $y - 1 = 2(x - 1)$ o simplificada, $y = 2x - 1$.

Línea entre (2, 3) y (3, 2): - Pendiente: $m = \frac{2-3}{3-2} = -1$ - Ecuación: $y - 3 = -1(x - 2)$ o simplificada, $y = -x + 5$.

Línea entre (1, 1) y (3, 2): - Pendiente: $m = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$ - Ecuación: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ o simplificada, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Paso 2: Configurar la integral doble

El triángulo está delimitado por las siguientes líneas:

- De $x = 1$ a $x = 2$, el límite inferior es $y = 2x - 1$ y el límite superior es $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- De $x = 2$ a $x = 3$, el límite inferior es $y = -x + 5$ y el límite superior es $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

La integral doble se divide en dos partes:

$$\int_1^2 \int_{2x-1}^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} \frac{1}{x+y} dy dx + \int_2^3 \int_{-x+5}^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} \frac{1}{x+y} dy dx$$

..... ✖

La integral iterada está mal planteada puesto que la recta $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ está “por debajo” de las rectas $y = 2x + 1$ e $y = -x + 5$. Así, la integración correcta sería:

$$\int_1^2 \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1} \frac{1}{x+y} dy dx + \int_2^3 \int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-x+5} \frac{1}{x+y} dy dx$$

La primera integral sí es capaz de hacerla correctamente:

>_ 2.4 **Calcula la integral de la función $1/(x+y)$ respecto de y desde $x/2+1/2$ hasta $2x-1$.**

🌀 Para calcular la integral de la función $\frac{1}{x+y}$ respecto de y , desde $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ hasta $y = 2x - 1$, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Configurar la integral

La integral se expresa como:

$$\int_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{2x-1} \frac{1}{x+y} dy$$

Paso 2: Calcular la integral

La antiderivada de $\frac{1}{x+y}$ respecto a y es $\ln|x+y|$. Por lo tanto, la integral es:

$$\left[\ln|x+y| \right]_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{2x-1}$$

Paso 3: Evaluar en los límites

Evaluamos la integral en los extremos de integración:

1. Evaluar en $y = 2x - 1$:

$$\ln |x + (2x - 1)| = \ln |3x - 1|$$

2. Evaluar en $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$:

$$\ln \left| x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right| = \ln \left| \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \right|$$

La integral evaluada es:

$$\ln |3x - 1| - \ln \left| \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \right|$$

..... ☞

Finalmente, pedimos que calcule cada una de las integrales anteriores. Mostraremos únicamente la primera pues la segunda es equivalente.

>_ 2.5 **Calcula la integral de la función $\log(3/2 x - 1)$ en el intervalo $[2, 3]$**

☎ Para calcular la integral de la función $\ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right)$ en el intervalo $[2, 3]$, podemos utilizar la técnica de integración por partes. La fórmula para la integración por partes es:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

En este caso, seleccionamos:

- $u = \ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) \right] dx = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}x - 1} dx$
- $dv = dx \Rightarrow v = x$

Paso 1: Aplicar la integración por partes

$$\int \ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) dx = x \ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) - \int x \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}x - 1} dx$$

Paso 2: Evaluar el término restante

La integral restante es:

$$\int x \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}x - 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{x}{\frac{3}{2}x - 1} dx$$

Para resolver esta integral, podemos realizar un cambio de variable: sea $u = \frac{3}{2}x - 1$, entonces $du = \frac{3}{2} dx$ o $dx = \frac{2}{3} du$. Además, $x = \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}$.

Sustituyendo:

$$\frac{3}{2} \int \frac{\left(\frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \right)}{u} \cdot \frac{2}{3} du = \int \left(1 + \frac{2}{3u} \right) du$$

Esta integral se descompone en dos partes:

$$\int du + \frac{2}{3} \int \frac{1}{u} du$$

La solución es:

$$u + \frac{2}{3} \ln |u|$$

Regresando a la variable original:

$$\frac{3}{2}x - 1 + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3}{2}x - 1 \right|$$

Paso 3: Integrar en el intervalo [2, 3]

Finalmente, evaluamos la integral original en el intervalo [2, 3]:

$$\left[x \ln \left(\frac{3}{2}x - 1 \right) - \left(\frac{3}{2}x - 1 + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3}{2}x - 1 \right| \right) \right]_2^3$$

Calculamos en $x = 3$ y $x = 2$ y restamos:

1. Evaluar en $x = 3$:

$$3 \ln \left(\frac{3}{2} \cdot 3 - 1 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 3 - 1 + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3}{2} \cdot 3 - 1 \right| \right)$$

Simplificando:

$$3 \ln(3,5) - (3,5 + \frac{2}{3} \ln(3,5))$$

2. Evaluar en $x = 2$:

$$2 \ln \left(\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 \right| \right)$$

Simplificando:

$$2 \ln(2) - (2 + \frac{2}{3} \ln(2))$$

Finalmente, restamos los valores calculados en los extremos para obtener el valor de la integral en el intervalo [2, 3].

Tras aplicar integración por partes la integral resultante es racional polinómica. En lugar de dividir los polinomios, que sería lo más sencillo, la IA realiza un cambio de variable que le permite también resolver la integral.

>_ 2.6 **Calcula la integral de la función $f(x,y)=x^2+y^2+8xy$ en el anillo de centro (0,0) y radios 1 y 2**



Para calcular la integral de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8xy$ sobre un anillo centrado en el origen con radios interno 1 y externo 2, es conveniente usar coordenadas polares. En coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, y el elemento de área dA es $r dr d\theta$.

Paso 1: Expresar la función en coordenadas polares

La función se transforma de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

$$8xy = 8(r \cos \theta)(r \sin \theta) = 8r^2 \cos \theta \sin \theta$$



Por lo tanto, en coordenadas polares, la función es:

$$f(r, \theta) = r^2 + 8r^2 \cos \theta \sin \theta$$

Paso 2: Establecer los límites de la integral

El anillo está definido por $1 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Paso 3: Configurar la integral en coordenadas polares

La integral doble en coordenadas polares es:

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 + 8r^2 \cos \theta \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^3 + 8r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr \, d\theta$$

Paso 4: Calcular la integral interna respecto a r

$$\int_1^2 (r^3 + 8r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr = \int_1^2 r^3 \, dr + 8 \cos \theta \sin \theta \int_1^2 r^3 \, dr$$

La integral de r^3 es:

$$\int r^3 \, dr = \frac{r^4}{4}$$

Evaluamos de 1 a 2:

$$\left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto, la integral respecto a r es:

$$\frac{15}{4} + 8 \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{4} (1 + 8 \cos \theta \sin \theta)$$

Paso 5: Calcular la integral externa respecto a θ

$$\int_0^{2\pi} \frac{15}{4} (1 + 8 \cos \theta \sin \theta) \, d\theta$$

La integral se separa en dos términos:

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} \, d\theta = \frac{15}{4} \cdot 2\pi = \frac{15\pi}{2}$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{15}{4} \cdot 8 \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{15 \cdot 8}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = 30 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \, d\theta = 15 \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \, d\theta$$

La integral de $\sin(2\theta)$ sobre un intervalo completo de 0 a 2π es cero, porque la función es periódica y simétrica respecto al eje:

$$15 \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \, d\theta = 0$$

Resultado final

La integral total es:

$$\frac{15\pi}{2} + 0 = \frac{15\pi}{2}$$

Por lo tanto, la integral de $f(x, y)$ sobre el anillo es $\frac{15\pi}{2}$.

>_ 2.7

Se considera R la región del triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,5)$ que es exterior al círculo de centro $(0,0)$ y radio 1. Calcula la integral en esa región de la función $f(x,y)=x$



Para calcular la integral de la función $f(x, y) = x$ sobre la región R , definida como la parte del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 5)$ que es exterior al círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1, seguimos estos pasos:

Paso 1: Describir la región de integración

La región R es el triángulo menos la parte del círculo de radio 1. La ecuación de la línea que conecta $(0, 0)$ y $(2, 5)$ es:

$$y = \frac{5}{2}x$$

La región del triángulo en términos de x y y es:

- Para $0 \leq x \leq 2$
- Para $0 \leq y \leq \frac{5}{2}x$

El círculo tiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Paso 2: Determinar la región de integración exenta del círculo

Queremos integrar sobre el triángulo pero excluir el círculo. Para esto, podemos usar coordenadas polares, ya que el círculo es más fácil de manejar en ese sistema.

Paso 3: Integrar en coordenadas polares

En coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, y $dA = r dr d\theta$.

La región polar que cubre el triángulo es aproximadamente cuando:

- θ va de 0 a $\arctan(\frac{5}{2})$.
- r va de 1 (el borde del círculo) a la línea del triángulo, que en coordenadas polares es más complicado, pero por simplicidad podemos expresar este límite en función de θ .

Paso 4: Configurar y calcular la integral

La integral de $f(x, y) = x = r \cos \theta$ en coordenadas polares, para la región R , es:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\arctan(\frac{5}{2})} \int_1^{2/\cos \theta} r \cos \theta \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\arctan(\frac{5}{2})} \cos \theta \int_1^{2/\cos \theta} r^2 dr d\theta \end{aligned}$$

..... ☞

El planteamiento en coordenadas polares es complicado por que requiere expresar la recta $x = 2$ en coordenadas polares como $r = \frac{2}{\cos \theta}$, procedimiento no visto en clase. Es más sencillo, calcular por un lado la integral sobre todo el triángulo (usando coordenadas cartesianas), por otro lado la integral sobre el sector del disco que está dentro del triángulo (usando coordenadas polares) y finalmente restar ambas integrales para obtener el resultado.