

El presente libro pretende ser un manual de referencia para titulaciones relacionadas con la Ingeniería de Telecomunicación, en materias vinculadas con el procesado digital de señal. En él, se presentan los fundamentos del tratamiento digital de señal, haciendo énfasis en el dominio espectral y en el filtrado, como aspectos básicos para su correcta comprensión.

El texto, pensado para la docencia, incluye, además de los contenidos teóricos propios de la materia, ejercicios para el aprendizaje progresivo y la autoevaluación, dirigidos a facilitar el proceso de aprendizaje y asimilación de los contenidos por parte del alumno.



Editorial Técnica AVICAM

SEÑALES DIGITALES

P. Padilla - A. M. Gómez  
J. M. Mateos - C. García - M. C. Benítez

# SEÑALES DIGITALES

Pablo Padilla de la Torre  
Ángel Manuel Gómez García  
José Miguel Mateos Ramos  
Conrado García Ruiz  
M<sup>a</sup> Carmen Benítez Ortúzar



FLEMING

# **Señales Digitales**

*Manual para la docencia*

Pablo Padilla de la Torre - Ángel Manuel Gómez García  
José Miguel Mateos Ramos - Conrado García Ruiz  
M<sup>a</sup> Carmen Benítez Ortúzar

**Los autores donarán los beneficios económicos de sus derechos de autor y propiedad intelectual a una organización no gubernamental sin ánimo de lucro, para su empleo con un fin social**

**© LOS AUTORES**

**Primera Edición, febrero de 2019**

**Edita: Editorial Técnica AVICAM  
avicamediciones@gmail.com**

**ISBN: 978-84-17628-94-9  
Depósito Legal: GR 1478-2019**

**Impresión: Editorial Técnica AVICAM  
Impreso en España - Printed in Spain**

El ámbito de las telecomunicaciones ha sufrido una completa revolución en las últimas décadas. En ese sentido, es destacable el papel predominante que ha adquirido en nuestro tiempo el empleo de sistemas digitales para todo tipo de servicios y sistemas de telecomunicación. Dichos sistemas digitales están omnipresentes en nuestra actividad diaria y son fundamentales en la actual Sociedad de la Información.

El presente libro pretende ser un manual de referencia para titulaciones relacionadas con la Ingeniería de Telecomunicación, en materias vinculadas con el procesado digital de señal. En él, se presentan los fundamentos del tratamiento digital de señal, haciendo énfasis en la transformación espectral y en el filtrado, como aspectos básicos para su correcta comprensión. El texto, en su estado actual, realiza un recorrido teórico progresivo de conceptos, estudiados matemáticamente, y con ejemplos y ejercicios intercalados para facilitar la comprensión. Cada capítulo incluye, además, una batería de ejercicios y problemas para el estudio adecuado de la materia.

*Los autores*



*Siguiendo el río se llega a la mar.*

Tito Maccio Plauto



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción a las señales digitales y al procesado digital de señal</b>          | <b>11</b> |
| 1.1. Introducción   | 13        |
| 1.2. Muestreo   | 14        |
| 1.3. Introducción a las señales discretas   | 15        |
| 1.3.1. Señales discretas básicas  | 15        |
| 1.3.2. Transformaciones básicas   | 16        |
| 1.3.3. Clasificación básica de una señal digital  | 19        |
| 1.3.4. Descomposición básica de una señal digital                                       | 20        |
| 1.3.5. Operaciones básicas  | 21        |
| 1.4. Periodicidad y frecuencia  | 25        |
| 1.5. Teorema del muestreo   | 29        |
| 1.6. Reconstrucción de la señal analógica original                                      | 35        |
| 1.7. Muestreo Paso-Banda  | 37        |
| 1.7.1. Reconstrucción de la señal analógica original de una señal muestreada paso-banda | 41        |
| 1.8. Cuantización   | 42        |
| 1.8.1. Cuantización uniforme  | 42        |
| 1.8.2. Cuantización logarítmica   | 44        |
| 1.9. Ejercicios   | 45        |
| <b>2. Transformada Z</b>  | <b>49</b> |
| 2.1. Introducción   | 51        |
| 2.2. Propiedades de la transformada Z   | 55        |
| 2.3. Transformadas Z relevantes   | 60        |
| 2.4. Transformadas Z racionales   | 61        |
| 2.5. Transformada Z inversa   | 64        |
| 2.5.1. Expansión en serie de términos   | 65        |
| 2.5.2. Expansión en fracciones simples  | 66        |
| 2.6. Transformada Z unilateral  | 70        |
| 2.7. Ejercicios   | 72        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>3. Transformada de Fourier de señal discreta (DTFT) y Transformada Discreta de Fourier (DFT)</b> | <b>75</b>  |
| 3.1. Introducción . . . . .   | 77         |
| 3.2. Transformada de Fourier de una señal discreta, DTFT . . . . .                                  | 77         |
| 3.2.1. Transformada directa, DTFT . . . . .   | 78         |
| 3.2.2. Transformada inversa, $DTFT^{-1}$ . . . . .  | 80         |
| 3.2.3. Energía de una señal discreta . . . . .  | 82         |
| 3.2.4. Relación entre la Transformada Z y la DTFT . . . . .   | 82         |
| 3.2.5. Propiedades de la DTFT . . . . .   | 83         |
| 3.3. Transformada Discreta de Fourier de una señal discreta, DFT . . . . .                          | 88         |
| 3.3.1. Propiedades de la DFT . . . . .  | 92         |
| 3.3.2. Convolución circular . . . . .   | 92         |
| 3.4. Ejercicios . . . . .   | 96         |
| <b>4. Sistemas discretos, lineales e invariantes en el tiempo (LTI)</b>                             | <b>101</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .   | 103        |
| 4.2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo, LTI . . . . .                                    | 104        |
| 4.3. Ecuación en diferencias . . . . .  | 111        |
| 4.4. Función de transferencia . . . . .   | 117        |
| 4.5. Estabilidad de un sistema LTI . . . . .  | 120        |
| 4.6. Ejercicios . . . . .   | 122        |
| <b>5. Sistemas LTI como filtros digitales en frecuencia</b>   | <b>127</b> |
| 5.1. Introducción . . . . .   | 129        |
| 5.2. Respuesta en Frecuencia . . . . .  | 129        |
| 5.2.1. Cálculo del módulo y fase de la respuesta en frecuencia . . . . .                            | 131        |
| 5.3. Filtros tipo relevantes . . . . .  | 135        |
| 5.3.1. Resonadores digitales . . . . .  | 135        |
| 5.3.2. Osciladores digitales . . . . .  | 137        |
| 5.3.3. Filtros ranura ( <i>notch</i> ) . . . . .  | 138        |
| 5.3.4. Filtros peine ( <i>comb</i> ) . . . . .  | 139        |
| 5.3.5. Filtros paso-todo . . . . .  | 141        |
| 5.3.6. Filtros de fase mínima . . . . .   | 144        |
| 5.4. Sistemas Invertibles . . . . .   | 145        |
| 5.4.1. División de filtros en fase mínima y paso-todo . . . . .                                     | 146        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 5.4.2.    | Estabilización de filtros preservando su respuesta espectral en amplitud . . . . .                  | 147        |
| 5.4.3.    | Estabilización de filtros preservando su respuesta espectral en amplitud y fase . . . . .           | 148        |
| 5.5.      | Criterio de estabilidad . . . . .   | 149        |
| 5.6.      | Filtrado de tonos puros . . . . .   | 150        |
| 5.7.      | Deconvolución . . . . .   | 155        |
| 5.8.      | Ejercicios . . . . .  | 157        |
| <b>6.</b> | <b>Filtros IIR</b>  | <b>165</b> |
| 6.1.      | Introducción a los Filtros IIR . . . . .  | 167        |
| 6.2.      | Transformaciones para conversión de filtros analógicos .  | 169        |
| 6.2.1.    | Aproximación de la derivada . . . . .   | 169        |
| 6.2.2.    | Invarianza Impulsional . . . . .  | 172        |
| 6.2.3.    | Transformación Bilineal . . . . .   | 175        |
| 6.3.      | Transformación en Frecuencia . . . . .  | 179        |
| 6.4.      | Ejercicios . . . . .  | 181        |
| <b>7.</b> | <b>Filtros FIR</b>  | <b>183</b> |
| 7.1.      | Introducción a los Filtros FIR . . . . .  | 185        |
| 7.1.1.    | El concepto de filtro de Fase Lineal . . . . .  | 185        |
| 7.2.      | Filtros FIR de Fase Lineal . . . . .  | 191        |
| 7.3.      | Diseño de Filtros FIR de fase lineal . . . . .  | 199        |
| 7.3.1.    | Diseño mediante ventanas . . . . .  | 199        |
| 7.3.2.    | Diseño por muestreo en frecuencia . . . . .   | 204        |
| 7.4.      | Ejercicios . . . . .  | 205        |
| <b>8.</b> | <b>Diezmado e Interpolación</b>   | <b>209</b> |
| 8.1.      | Introducción . . . . .  | 211        |
| 8.2.      | Diezmado . . . . .  | 212        |
| 8.3.      | Interpolación . . . . .   | 216        |
| 8.4.      | Conversión en un factor M/L . . . . .   | 219        |
| 8.5.      | Ejercicios . . . . .  | 224        |
| <b>I.</b> | <b>Recordatorio de señales analógicas</b>   | <b>229</b> |
| I.1.1.    | Representación de una función periódica mediante serie de Fourier en $(-\infty, +\infty)$ . . . . . | 230        |
| I.1.2.    | Espectro complejo de Fourier . . . . .  | 231        |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| I.1.3.     | Ejemplo: Espectro de una señal rectangular periódica . . . . .   | 231        |
| I.2.       | Transformada de Fourier . . . . .  | 233        |
| I.2.1.     | Ejemplo I: Transformada de Fourier de la Función Pulso Rectangular . . . . .                           | 235        |
| I.2.2.     | Ejemplo II: La Transformada de Fourier de la función $\delta$ de Dirac . . . . .                       | 235        |
| I.3.1.     | Transformada de Fourier de una señal constante .   | 237        |
| I.3.2.     | Transformada de Fourier de una función exponencial compleja . . . . .                                  | 237        |
| I.3.3.     | Transformada de Fourier de las funciones $\text{sen}(\Omega_0 t)$ y $\text{cos}(\Omega_0 t)$ . . . . . | 238        |
| I.4.1.     | Transformada de Fourier de una función pulso rectangular periódica . . . . .                           | 239        |
| I.4.2.     | Transformada de Fourier de un tren de impulsos .   | 239        |
| I.5.       | Propiedades de convolución de la Transformada de Fourier   | 240        |
| I.6.       | Transformada de Laplace . . . . .  | 241        |
| <b>II.</b> | <b>Resumen de transformadas y propiedades</b>  | <b>243</b> |
| II.1.      | Transformada Z . . . . .   | 243        |
| II.2.      | Transformada de Fourier de señal discreta (DTFT) . . . .   | 246        |
| II.3.      | Transformada Discreta de Fourier (DTF) . . . . .   | 250        |
| II.4.      | Transformada de Laplace (TL) . . . . .   | 251        |
| II.5.      | Transformada de Fourier de señal continua (TF) . . . . .   | 254        |

# Capítulo 1.

## Introducción a las señales digitales y al procesamiento digital de señal

Este capítulo pretende ser una introducción a las *Señales Digitales*. En él se introducen los conceptos de discretización, muestreo y cuantificación de una señal de naturaleza continua (analógica), y de las implicaciones que ello conlleva, al abrir todo un mundo de posibilidades al respecto del procesamiento digital de señal.

### **Objetivos:**

- Introducir los conceptos de discretización y cuantificación de una señal analógica.
- Estudiar el Teorema de Muestreo.
- Estudiar las propiedades de las señales discretas.
- Introducir el concepto de cuantización de una señal discreta.
- Introducir operaciones básicas: convolución y correlación.

# Capítulo 2.

## Transformada Z

Este capítulo está dedicado en su totalidad a la transformada Z, sus características e implicaciones.

**Objetivos:**

- Presentar el concepto de transformada Z bilateral y unilateral.
- Estudiar matemáticamente la transformación directa e inversa.
- Estudiar su dominio de validez (región de convergencia, ROC).
- Presentar operaciones relevantes, propiedades y transformadas frecuentes.
- Estudiar el caso particular de las transformadas racionales.

# Capítulo 3.

## Transformada de Fourier de señal discreta (DTFT) y Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Este capítulo está dedicado en su totalidad a la transformada de Fourier de señales discretas (DTFT), así como a la transformada discreta de Fourier de señales discretas (DFT), junto con sus características e implicaciones.

### **Objetivos:**

- Presentar el concepto de transformada de Fourier de señales discretas (DTFT), así como el de su versión discretizada en frecuencia: la transformada discreta de Fourier de señales discretas (DFT).
- Estudiar matemáticamente dichas transformaciones directas e inversas.
- Analizar las implicaciones de la discretización en el dominio frecuencial.
- Estudiar el concepto de convolución circular.

# Capítulo 4.

## Sistemas discretos, lineales e invariantes en el tiempo (LTI)

En este capítulo estudiaremos los sistemas en tiempo discreto, prestando especial atención a aquellos de naturaleza lineal e invariante en el tiempo.

### Objetivos:

- Estudio y clasificación de los sistemas en tiempo discreto.
- Estudio de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo (LTI).
- Estudio del dominio temporal discreto: ecuación en diferencias.
- Estudio del dominio transformado: función de transferencia.
- Estudio de la estabilidad de los sistemas LTI.

# Capítulo 5.

## Sistemas LTI como filtros digitales en frecuencia

Este capítulo es una introducción al filtrado digital. En él se estudia el comportamiento en frecuencia de los sistemas LTI, de modo que pueden ser empleados como filtros digitales.

### Objetivos:

- Estudiar el comportamiento en frecuencia de los sistemas LTI.
- Introducir el filtrado digital.
- Profundizar en el concepto de estabilidad para filtros.
- Estudiar distintos tipos de filtros digitales y sus propiedades.
- Estudiar el método de la deconvolución.

# Capítulo 6.

## Filtros IIR

En este capítulo se abordará el diseño de filtros de respuesta al impulso infinita IIR. Los filtros digitales de tipo IIR rara vez se diseñan específicamente, sino que generalmente se aprovechan los métodos de diseño existentes para filtros analógicos, cuyas expresiones posteriormente se transforman al mundo discreto. En este tema estudiaremos las transformaciones disponibles para conseguir esto.

### **Objetivos:**

- Comprender el concepto de transformación biyectiva o mapeo entre el plano  $s$  y el plano  $z$ .
- Estudiar las tres transformaciones existentes para conversión de filtros analógicos en digitales, y sus limitaciones.
- Conocer la extensión del concepto de mapeo para la conversión de filtros paso-bajo hacia otros tipos de filtros.

# Capítulo 7.

## Filtros FIR

Este capítulo presenta el caso concreto de los filtros digitales de respuesta al impulso finita (FIR). En él se estudian las particularidades de estos filtros, así como un subgrupo concreto de estos: los filtros FIR de fase lineal.

**Objetivos:**

- Introducir el concepto de filtros FIR.
- Analizar sus propiedades y características
- Estudiar los filtros FIR de fase lineal.
- Presentar las distintas estrategias para el diseño de filtros FIR de fase lineal.

# Capítulo 8.

## Diezmado e Interpolación

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos de **diezmado** (eliminación de muestras) y de **interpolación** (adición de muestras), como herramientas para modificar la frecuencia de muestreo de una señal discreta. Además, se analizan ambos conceptos desde la perspectiva del Teorema de Muestreo.

### Objetivos:

- Introducir el concepto de diezmado.
- Introducir el concepto de interpolación.
- Estudiar sistemas mixtos diezmado/interpolación.
- Elaborar filtros equivalentes aplicando diezmado e interpolación, a partir de un filtro digital dado.