Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2023, nº 115, 79-86*
Sección: Actividades en la SAEM Thales

Que las demostraciones no te dejen sin palabras

Ana M. Martín-Caraballo
Universidad Pablo de Olavide, *ammarcar@upo.es*

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada, *rramirez@ugr.es*

Miguel L. Rodríguez González
Universidad de Granada, *miguelrg@ugr.es*

Resumen: *En el presente trabajo se exponen algunas de las tareas de una sesión para estudiantes inscritos al programa ESTALMAT (Estímulo del TALento MATemático). A partir de representaciones visuales, se proponen tareas para que el estudiantado haga conjeturas y justifique qué se está demostrando, comunicando sus razonamientos al resto del grupo. Además de introducir al estudiantado en diferentes técnicas de demostración, se espera que los estudiantes reflexionen sobre la generalidad de las argumentaciones visuales frente a otros procedimientos analíticos o algebraicos.*

Palabras clave: *argumentación visual, demostración, razonamiento, talento matemático*

Do not let the demonstrations leave you speechless

Abstract: *This paper presents some of the tasks of a session for students enrolled in the ESTALMAT (Stimulating Mathematical Talent) programme. Based on visual representations, tasks are proposed for students to make conjectures and justify what is being demonstrated, communicating their reasoning to the rest of the students in the group. In addition to introducing students to different demonstration techniques, we expect students to reflect on the generality of visual argumentation as against other analytical or algebraic procedures.*

Keywords: *visual representations, demonstrations, reasoning, mathematical talent.*

1. INTRODUCCIÓN A LA SESIÓN

ESTALMAT es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España (https://www.estalmat.org/), que en Andalucía asume la SAEM THALES como un programa para estimular y atender el talento matemático de los chicos y chicas que demanden más de esta aptitud en cuanto a la profundización en competencias matemáticas.

En Andalucía el proyecto se dirige directamente a unos 280 estudiantes de centros andaluces y se organiza en dos sedes, una para Andalucía Occidental en Sevilla (que abarca Cádiz, Córdoba, Huelva y Sevilla) y otra para Andalucía Oriental en Granada (que abarca Almería, Granada, Jaén y Málaga). Los estudiantes se agrupan en cuatro cursos: primero, segundo y dos cursos de veteranos. Además de los estudiantes seleccionados mediante una prueba de selección a nivel nacional, como novedad desde el curso 2021, se ha ampliado la atención no solo a este alumnado

Cómo citar: Martín-Caraballo, A.M., Ramírez, R. y Rodríguez, M.L. (2023). Que las demostraciones no te dejen sin palabras. *Epsilon, 115, 79-86.*

sino a todo el alumnado inscrito para la realización de la citada prueba. Las sesiones en este último caso se realizan de manera online a través de Google Meet y permiten el acceso al estudiantado que se presentó a la prueba pero que no fue seleccionado. De manera aproximada, suelen ser unos 100 estudiantes los que se conectan a este tipo de sesiones. Las temáticas de estas sesiones son variadas: Resolución de problemas numéricos, geométricos y algebraicos; Generalización, Juegos Matemáticos o Justificación son ejemplos de las mismas. En este trabajo vamos a describir algunas de las tareas planteadas en la sesión de Justificación, que denominamos "Demostraciones sin palabras''.

Como en las sesiones presenciales para el grupo seleccionado, el profesorado del proyecto dirige al estudiantado, a través de la resolución de problemas, para que desarrollen su capacidad creativa y el fortalecimiento de sus habilidades de razonamiento, a la vez que se les acerca a algunos de los retos aún por resolver. El trabajo de investigación para resolver los problemas planteados se hace en grupos. La discusión de las ideas desarrolladas en cada grupo está guiada por el profesorado del proyecto y los resultados obtenidos se revisan por estos. La participación activa en estas actividades es esencial para conseguir los objetivos del proyecto. La duración de la sesión es de 3 horas, con un descanso de media hora y, en casi todas las sedes y en particular en las dos de Andalucía, se realiza los sábados por la mañana (desde la 10 hasta las 13:30)

Como sesión de enriquecimiento curricular (Ramírez y Flores, 2016), no se pretende adelantar contenidos que se trabajarán en el aula ordinaria, sino en presentar contenidos extracurriculares o profundizar en contenidos curriculares ya conocidos. En este caso, la sesión parte de tres competencias específicas de la nueva normativa (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022):

- C1) Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, **aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento**, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
- C3) Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, **reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación**, para generar nuevo conocimiento.
- C8) **Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada**, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Dependiendo de la actividad, aparecen saberes básicos especialmente asociados al sentido espacial como, por ejemplo: Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características. Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza, la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales: identificación y aplicación. Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas. Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

Atendiendo a las mismas, se plantea el siguiente esquema de trabajo:

1. Se muestra una representación visual y lanzamos la pregunta ¿qué se está demostrando aquí?
2. Cada miembro del grupo establece individualmente una conjetura y trabaja posteriormente en pequeños subgrupos para consensuar una única respuesta.
3. Se realiza una puesta en común para analizar las distintas propuestas.
4. Se plantea una nueva pregunta, ¿es válida la justificación para "cualquier caso"?

5. Se realiza una puesta en común para discutir la validez de las argumentaciones más allá de las representaciones visuales concretas que se están utilizando.
6. Y una nueva pregunta final, ¿se podría justificar de otra manera diferente?
7. La intención de la puesta en común final es recoger argumentaciones y demostraciones diferentes, especialmente las que utilizan procedimientos algebraicos o analíticos que complementan la propuesta visual.

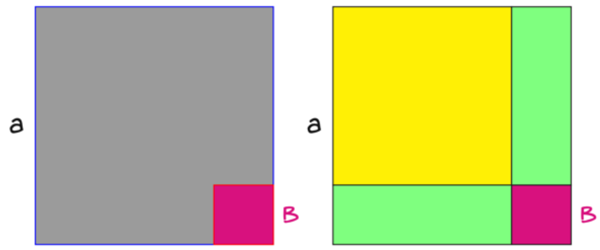
2. ¿ACEPTAS EL RETO?

Os proponemos, lectores con motivación, que a continuación respondáis a las preguntas propuestas y que, si tenéis posibilidad, las compartáis. Para ello os sugerimos completar las seis fases del esquema de trabajo propuesto. Como a Fermat, a nosotros tampoco nos caben las demostraciones en el margen, y por otra parte, también somos fervientes seguidores de John Conway que publicó un trabajo científico con dos figuras y dos palabras (Conway y Soifer, 2005) y queremos escribir lo justo para completar este trabajo así que os animamos a investigar por vuestra cuenta cada una de ellas. Todas las podéis encontrar en algunos libros modernos pero que deseamos que en poco tiempo sean ya clásicos (Alsina y Nelsen, 2010; Nelsen, 1997, 2000, 2014).

Por último, decir que las imágenes requieren que quien las mire razone, pues en otro caso será poco probable que consiga llegar a una conclusión. Así que quien siga leyendo este trabajo, además de mirar debe pensar. Debe comprender qué hay dibujado, debe pensar y razonar y no solo mirar.

2.1. Identidad notable: ¿un poquito de algebra?

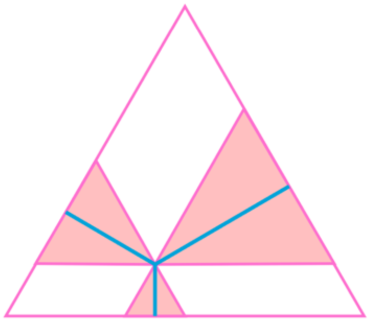
Figura 1
¿A qué es igual el cuadrado de a menos el cuadrado de b?



Para contestar a esta pregunta intenta formar con los rectángulos que tienes en el segundo cuadrado de la Figura 1 otra figura de la que conozcas el área. Por supuesto, es posible girar algunos de los rectángulos que se forman en el segundo cuadrado de la Figura 1.

2.2. Algo de geometría

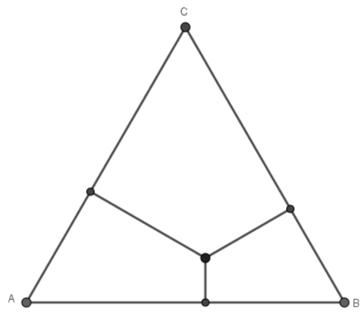
Figura 2
Teorema de Viviani: En un triángulo equilátero la suma de las distancias desde un punto interior a cada lado es igual a _____?



En la Figura se 2 se han formado tres nuevos triángulos equiláteros que girándolos y trasladándolos en el interior del triángulo donde están se podrá ver fácilmente la respuesta a la pregunta planteada.

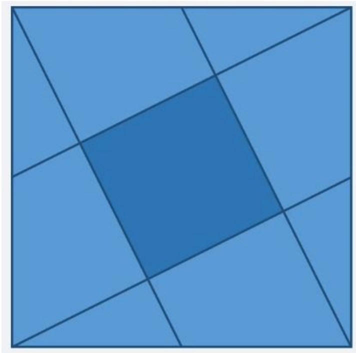
¿Qué ocurre si no dibujamos triángulos equiláteros sobre las distancias a cada lado del triángulo? ¿Será posible demostrar el Teorema de Viviani de otra forma? Para ello, toma como referencia la siguiente figura (ver Figura 3) y además solo tendrás que utilizar que el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura del triángulo dado.

Figura 3.
¿Otra demostración diferente?



¿Y si hacemos algo parecido, pero en un cuadrado?

Figura 4.
Si se trazan rectas que unen los vértices de un cuadrado con los puntos medios de uno de los lados opuestos, como se muestra en la Figura 4, entonces probar que el área del cuadrado central es un quinto del área del cuadrado original (Wells, 1991).



La relación entre las áreas se podrá calcular fácilmente girando y trasladando los triángulos y trapecios que se han formado.

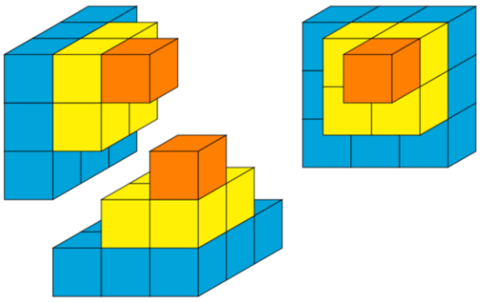
2.3. Juguemos con números y sumas

Figura 5.
¿Qué representa esta secuencia?

La pregunta está relacionada con cierta suma que la historia relaciona con el llamado "príncipe de las matemáticas" K. F. Gauss, cuando solo contaba con unos diez años de edad.

Ahora otra suma, pero pasemos del plano al espacio. Está relacionada con cuadrados de número y su suma…

Figura 6.
¿Contamos cubitos?

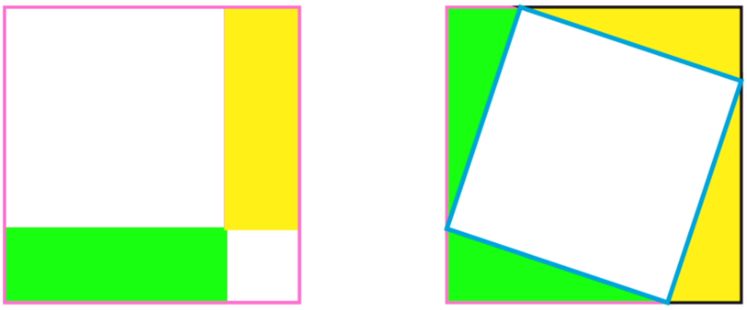


En la Figura 6 se tienen tres copias de cierta estructura geométrica, en primer lugar, piensa en lo que representa esa figura (solo una ya que las otras son iguales), ¿lo tienes? Pues ahora intenta unir las tres en una única estructura compacta, ¿cómo se llama la figura que se forma?

Seguimos con los retos, pero ahora para no abusar de los números y correr el riesgo de aburrirnos, volvamos al álgebra y las identidades notables, pero volveremos en un rato de nuevo con las relaciones de operaciones y números.

2.4. ¿Qué resultado se está demostrando?

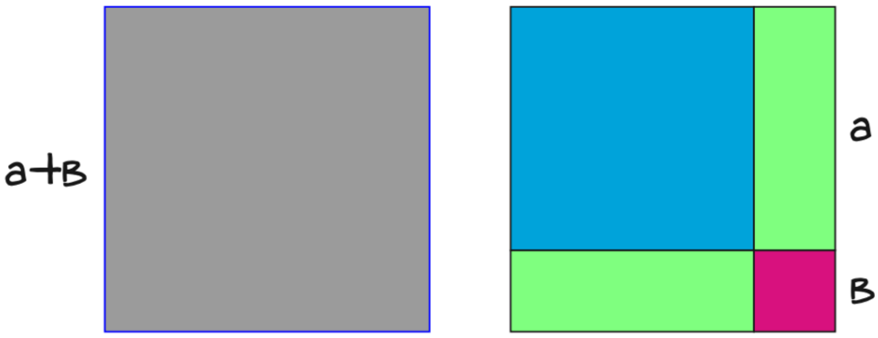
Figura 7.
¿Sabes qué resultado se está demostrando en la siguiente imagen?



En matemáticas a los resultados importantes se les denomina Teoremas (a otros resultados que se utilizan para demostrar los teoremas se denominan lemas o también proposiciones, además a las propiedades que se deducen de los teoremas, lemas y proposiciones se les denomina corolarios) y en la Figura 7 se demuestra uno de los teoremas más conocidos por todos. La demostración anterior está descrita en un antiguo tratado chino llamado "Chou Pei Suan Ching". Seguro que ya has descubierto de qué Teorema se trata, hay que tener en cuenta que los dos cuadrados de la Figura 7 tienen el mismo área.

2.5. ¿Y este resultado?

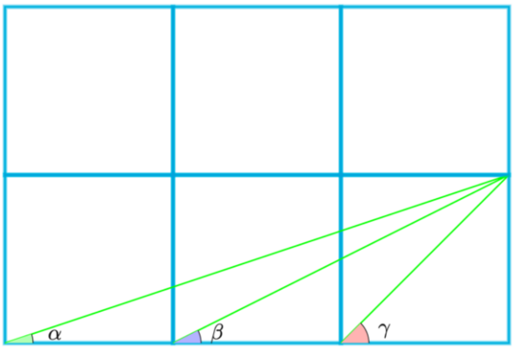
Figura 8.
¿A qué es igual el cuadrado de a más b?



Deducir esta igualdad es fácil, solo hay que utilizar áreas de figuras muy conocidas, son cuadrados y rectángulos así que no habrá problema.

2.6. ¿Cuántos suman los ángulos?

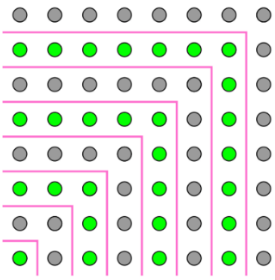
Figura 9.
¿Cuál es el valor de la suma de los tres ángulos dibujados en la Figura 9?



Podrás deducir esa suma si dibujas un triángulo más en el rectángulo dado, imagina que el dibujo es una mesa de billar, cuando la bola choca con un lado con un cierto ángulo ¿con qué ángulo sale despedida después de chocar con el lado?

2.7. ¡Otro de bolas! Volvemos a números y operaciones

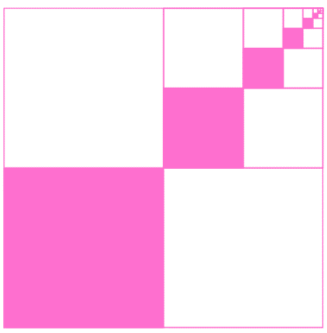
Figura 10.
¿Qué representa la siguiente figura?



Vamos sumando… mira bien la figura a ver si ves qué números queremos sumar y cuánto vale esa suma.

2.8. ¡Una suma con muchos términos ….!

Figura 11.
Calcula el área de la parte coloreada en la siguiente figura.



Este reto se puede resolver de varias formas, una de ellas es geométrica y solo tienes que pensar en cuadrados sin colorear y coloreados y sus áreas, la otra forma podría decirse que es más analítica y solo tendrás que sumar áreas de los cuadrados coloreados, sin tener en cuenta los no coloreados.

3. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Fundación para la Ciencia y Tecnología la financiación, en convocatoria competitiva, concedida a Estalmat Andalucía con el proyecto con referencia (FCT-22-18347) y título ‘’Aulas abiertas al enriquecimiento científico’’.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. y Nelsen, R. B. (2010). *Charming Proofs, A Journey Into Elegant Mathematics*. Mathematical Association of America.

Conway, J.H. y Soifer, A. (2005). Covering a triangle with triangles. *American Mathematical. Monthly, 112*(1), 78.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.*

Nelsen, Roger B. (1997). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.

Nelsen, Roger B. (2000). *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.

Nelsen, Roger B. (2017). *Proofs without Words III: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.

Ramírez, R. y Flores, P. (2016), Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular. *Revista SUMA, 83*, 33-41

Wells, D. (1991), *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Books.