Técnicas Cuantitativas II

Contraste de hipótesis

Test de razón de verosimilitudes
Contraste de hipótesis sobre poblaciones normales

Introducción al contraste de hipótesis

Introducción al contraste de hipótesis

En el presente tema se aborda el problema de inferencia sobre los parámetros desconocidos de una distribución desde un nuevo enfoque. En este caso desarrollaremos un procedimiento, conocido como contraste de hipótesis, que va a permitir discernir si una propuesta sobre los posibles valores que puede tomar un parámetro puede considerarse o no como cierta. Dicha decisión será tomada a partir de una regla, referida como región de rechazo, basada en la información muestral (destacar que no se estudiará cómo se construye dicha región de rechazo, la cual nos será dada directamente).

El procedimiento de contrastación, que estudiaremos en los siguientes apartados, tiene los siguientes pasos:

- Planteamiento de hipótesis nula y alternativa, así como elección del nivel de significación (normalmente 0’05 y 0’01).
- Selección de un estadístico de prueba que conduce a unos límites (valores críticos) que dividen el espacio muestral en una región donde se rechaza la hipótesis nula (región crítica).
- Tomar una decisión.

Contrastes de hipótesis e intervalos de confianza

Para aplicar esta metodología necesitaremos las mismas distribuciones usadas en la obtención de intervalos de confianza. Esta situación no es casual, ya que una regla factible para rechazar un determinado valor para el parámetro o parámetros desconocidos es que dicho valor se encuentre fuera del correspondiente intervalo de confianza. El contraste y los intervalos de confianza son pues, dos cuestiones estrechamente relacionadas.

Consideraremos una hipótesis estadística como cualquier afirmación, verdadera o falsa, sobre alguna característica desconocida de la población. El proceso de contrastación de hipótesis consiste en considerarla provisionalmente como verdadera, se denominará *hipótesis nula* y se denotará como H_0. La veracidad de la hipótesis nula se somete a comprobación experimental frente a otra hipótesis complementaria, que se denominará *hipótesis alternativa* y se denota como H_1. Como consecuencia de la comprobación experimental la hipótesis nula podrá seguir siendo considerada cierta o por el contrario se rechazará.

Para una determinada variable aleatoria cuya distribución de probabilidades depende de un parámetro desconocido, θ, se pueden establecer las siguientes hipótesis:

$$\left.\begin{array}{r} H_0 : \ \theta \in \omega \\ H_1 : \ \theta \in \Theta - \omega \end{array}\right\},$$

donde Θ se define como el conjunto de posibles valores que puede tomar θ y que recibe el nombre de espacio paramétrico.

En tal caso, la hipótesis nula, H_0, afirma que el verdadero valor del parámetro pertenece al subconjunto $\omega \subset \Theta$. Mientras que la hipótesis alternativa, H_1, afirma, por el contrario, que el verdadero valor del parámetro no pertenece al citado subconjunto.

Dependiendo del número de elementos que forman el conjunto ω, se distingue entre:

- Hipótesis simples: Si se refiere a un único valor del parámetro, es decir a un único punto del espacio paramétrico.
- Hipótesis compuestas: Si se refiere a una región del espacio paramétrico.

Ejemplo 1 Sea X una variable aleatoria que modeliza el peso de los alumnos de la UGR y que se distribuye según una normal de media μ y varianza σ^2. Nos planteamos contrastar si el verdadero valor de la media es o no 68 kg. Se han establecido distintas posibilidades clasificadas en simples y compuestas:

$$a) \left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu = 68 \\ H_1 : \ \mu \neq 68 \end{array}\right\}, \qquad b) \left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu \geq 68 \\ H_1 : \ \mu \leq 68 \end{array}\right\}, \qquad c) \left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu \leq 68 \\ H_1 : \ \mu \geq 68 \end{array}\right\}.$$

$\sharp$

Región de rechazo

Tal y como se ha dicho anteriormente, el procedimiento de contrastación de hipótesis consiste en tomar como cierta la hipótesis nula y con la información proporcionada por la muestra decidir si se acepta o no dicha suposición.

Con tal objetivo se tendrá en cuenta la siguiente definición: La **región de rechazo**, R_α, puede considerarse como el conjunto de valores del estadístico de prueba que no tienen posibilidad de presentarse si la hipótesis nula es verdadera. Por otro lado, estos valores no son tan improbables de presentarse si la hipótesis nula es falsa (el valor crítico separa la región de no rechazo de la de rechazo).

Por tanto, la forma de actuar o regla de decisión, siendo la región de rechazo (o crítica) el conjunto de todos los valores del estadístico de prueba para los cuales la hipótesis nula será rechazada, será extraer una muestra y comprobar si pertenece a la región de rechazo.

¡Problema!: Si la muestra se situa en la región de rechazo se tendrían indicios para creer que la hipótesis nula es falsa. Sin embargo, puede ocurrir que se haya obtenido una muestra poco frecuente y tenemos el riesgo de rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.

Tipos de error

Cualquiera que sea la decisión tomada, ya sea de rechazo o no de la hipótesis nula, puede incurrirse en error:

- Se comete error de tipo I cuando se rechaza la hipótesis nula siendo cierta.
- Se comete error de tipo II cuando no rechazamos la hipótesis nula siendo falsa.

En la siguiente tabla se muestran las decisiones que se pueden tomar y las consecuencias posibles:

	H_0 cierta	H_0 falsa
Se rechaza H_0	Error tipo I	Decisión correcta
No se rechaza H_0	Decisión correcta	Error tipo II

Por tanto, de los cuatro escenarios posibles, en dos se toma la decición correcta y en los otros dos se comete un error. Ahora bien, ¿puede controlarse dicho error?

Definiendo el **nivel de significación** como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera y suponiendo que la hipótesis planteada es verdadera, entonces, el nivel de significación indicará la probabilidad de rechazarla. Por dicho motivo se suelen tomar valores bajos, del 1% ó 5%, para el nivel de significación.

Además, dicha elección indica que la probabilidad de cometer error tipo I es baja (por definición). Si bien acabamos de ver que el error tipo I está controlado, por lo general no ocurre lo mismo con el error tipo II (aunque existen situaciones donde se consigue minimizarlo).

Cuando es necesario diseñar un contraste de hipótesis, sería deseable hacerlo de tal manera que las probabilidades de ambos tipos de error fueran tan pequeñas como fuera posible. Sin embargo, con una muestra de tamaño prefijado, disminuir la probabilidad del error de tipo I conduce a incrementar la probabilidad del error de tipo II. El recurso para disminuir el error de tipo II, es aumentar el tamaño muestral.

¿Culpable o inocente?

Supongamos que somos miembros de un jurado y tenemos que decidir si el imputado es culpable o inocente. Si construyo un test de hipótesis donde la hipótesis nula es que el imputado es inocente y la alternativa es que es culpable, los distintos escenarios que pueden surgir son:

	Es inocente	Es culpable
Rechazo inocencia	Error	Decisión correcta
No rechazo inocencia	Decisión correcta	Error

Por como se ha construido el contraste, el error consistente en rechazar la inocencia cuando realmente lo es (error tipo I) es muy pequeño, mientras que el error de que sea culpable y declararlo inocente (error tipo II) no estaría controlado.

¿Es correcta la construcción del contraste? Si consideramos más grave declarar culpable a un inocente que dejar en libertad a un culpable, el contraste será correcto. Por este motivo, cuando se está interesado en la veracidad de alguna afirmación, por como se comportan los errores, su negación se debe formular como hipótesis nula.

Función potencia

Se define la función potencia, P_θ, como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula para cualquier valor del parámetro desconocido.
Si el parámetro desconocido pertenece a la hipótesis nula, entonces la función potencia corresponde a la probabilidad de cometer error tipo I, que como se ha visto con anterioridad es menor o igual al nivel de significación. Esto es:

$$P_\theta = P[(x_1, \ldots, x_n) \in R_\alpha | \theta \in \omega] \leq \alpha.$$

Si el parámetro desconocido no pertenece a la hipótesis nula, entonces la función potencia corresponde a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. Esto es:

$$P_\theta = P[(x_1, \ldots, x_n) \in R_\alpha | \theta \in \Theta - \omega].$$

Además, como:

$$P_\theta = P[(x_1, \ldots, x_n) \in R_\alpha | \theta \in \Theta - \omega] = 1 - P[(x_1, \ldots, x_n) \notin R_\alpha | \theta \in \Theta - \omega],$$

se tiene que, cuando el parámetro no pertenece a la hipótesis nula, la función potencia coincide con uno menos la probabilidad de cometer error tipo II.

Test de Razón de Verosimilitudes

Dada una variable aleatoria X que depende de un parámetro desconocido θ y el contraste de hipótesis:

$$\left.\begin{array}{r} H_0 : \ \theta \in \Omega \\ H_1 : \ \theta \in \Theta - \Omega \end{array}\right\},$$

se construye la función:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Omega} L(\theta; x_1, \ldots, x_n)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, \ldots, x_n)}, \tag{1}$$

que es tal que $0 \leq \lambda(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$, de forma que estará próxima a 1 si la hipótesis nula es cierta[1].
Puesto que el supremo en Θ es el estimados máximo verosímil, el denominador queda:

$$\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = L(\widehat{\theta}; x_1, \ldots, x_n),$$

donde $\widehat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil de θ.

[1] Si se verifica la hipótesis nula, el supremo (mínima de las cotas superiores) en el subconjunto Ω y Θ deben de ser muy parecidos (por no decir iguales), por lo que el cociente será próximo a 1.

Entonces, definiendo $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando se observa $x_1,\ldots,x_n$, el Test de Razón de Verosimilitudes (TRV) se expresa como:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) < c \\ 0, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) \geq c \end{cases}, \tag{2}$$

es decir, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando se observa $x_1,\ldots,x_n$ es igual a 1 cuando $\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$. Por tanto, se estaría rechazando la hipótesis nula cuando $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ es *pequeña* (alejada de 1).

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es conocida. Dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, dado el contraste de hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \ \mu = \mu_0 \\ H_1 : \ \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}, \tag{3}$$

el TRV viene dado por:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < c \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) \geq c \end{array} \right. , \tag{4}$$

donde:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0} L(\mu; x_1, \ldots, x_n)}{\sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}} L(\mu; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{L(\mu_0; x_1, \ldots, x_n)}{L(\widehat{\mu}; x_1, \ldots, x_n)}.$$

Como la razón de verosimilitud para una muestra de tamaño n en este caso es:

$$L(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\},$$

teniendo en cuenta que $\widehat{\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1, \ldots, x_n) &= \exp\left\{-\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n}{2\cdot\sigma^2}\cdot\left(\overline{x}^2-2\cdot\mu_0\cdot\overline{x}+\mu_0^2\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{n}{2\cdot\sigma^2}\cdot(\overline{x}-\mu_0)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ es estrictamente decreciente en $(\overline{x}-\mu_0)^2$, el TRV dado en (4) es equivalente a:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & (\overline{x}-\mu_0)^2 > k \\ 0, & (\overline{x}-\mu_0)^2 \leq k \end{cases}, \tag{5}$$

y este a su vez a:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & |\overline{x}-\mu_0| > h \\ 0, & |\overline{x}-\mu_0| \leq h \end{cases}. \tag{6}$$

Test de Razón de Verosimilitudes: ejemplo

Imponiendo que el test de hipótesis ha de tener nivel de significación α:

$$\alpha = P[|\overline{X} - \mu_0| > h | \mu = \mu_0] = P[|\overline{X} - \mu_0| > h] = P\left[|Z| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot h\right],$$

donde Z se distribuye según una normal de media 0 y varianza 1. Entonces, teniendo en cuenta el valor absoluto, $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot h$ es el punto de una normal de media 0 y varianza 1 que deja por debajo $1 - \alpha/2$. Esto es:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot h = Z_{1-\alpha/2} \rightarrow h = Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Entonces, el TRV dado en (6) queda como:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & |\overline{x} - \mu_0| > Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 0, & |\overline{x} - \mu_0| \leq Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases},$$

es decir, se rechazará la hipótesis nula si la muestra seleccionada verifica la relación:

$$|\overline{x} - \mu_0| > Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

la cual corresponde a la región de rechazo del contraste dado en (3).

Contraste de hipótesis para la varianza de una población normal

Con la media poblacional conocida

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es conocida. Entonces, dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, los posibles test, al nivel de significación α, para la varianza de una población normal con media conocida, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{n,\alpha/2}$ ó $\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 > \chi^2_{n,1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 > \chi^2_{n,1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{n,\alpha}$

Donde $\chi^2_{n,a}$ es el punto de una chi cuadrado de n grados de libertad que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[\chi < \chi^2_{n,a}] = a$, donde $\chi \sim \chi^2_n$. Adviértase que tomando como cierta la hipótesis nula, tomaremos como estadístico experimental $\chi^2_{exp} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$.

Con la media poblacional desconocida

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es desconocida. Entonces, dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, los posibles test, al nivel de significación α, para la varianza de una población normal con media desconocida, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ ó $\frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}\right\}$	$\frac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha}$

Donde $\chi^2_{n-1,a}$ es el punto de una chi cuadrado de $n-1$ grados de libertad que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[\chi < \chi^2_{n-1,a}] = a$, donde $\chi \sim \chi^2_{n-1}$. En este caso, tomando como cierta la hipótesis nula, tomaremos como estadístico experimental

$$\chi^2_{exp} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2,$$

que se distribuye según una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad y que recordemos que también puede expresarse como $\chi^2_{exp} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$.

Ejemplo 2 Una empresa de ventas de muebles toma una muestra del almacén de 25 muebles elegidos al azar y calcula que el tiempo medio en meses que lo tiene en stock es 1'5 con una cuasivarianza muestral de 0'8. Contraste, con un nivel de significación del 5%, si la varianza poblacional puede tomar el valor 1.
Las hipótesis a contrastar, al 1%, serán:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = 1 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 1 \end{array}\right\}.$$

Puesto que el estadístico experimental toma el valor $\chi^2_{exp} = \dfrac{(25-1)0'8}{1} = 19'20$, se encuentra dentro de los valores críticos $\chi_{0'025} = 12'40$ y $\chi_{0'975} = 39'36$. Por tanto, la conclusión sería que no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula. $\sharp$

Contraste de hipótesis para la media de una población normal

Con varianza poblacional conocida

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es una cantidad conocida. Dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, los posibles test, al nivel de significación α, para la media de una población normal con varianza conocida, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\alpha}$

Donde Z_a es el punto de una normal de media cero y varianza uno que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[Z < Z_a] = a$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

Adviértase que tomando como cierta la hipótesis nula, el estadístico media muestral, $\overline{X}$, seguirá una distribución normal de media μ_0 y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$ y, por tanto, el estadístico experimental usado será:

$$Z_{exp} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Ejemplo 3 De una población normal $N(\mu, 36)$ se selecciona una muestra de tamaño 64 cuya media muestral es 25. Contrastar a un nivel de significación del 0'05, si la media poblacional puede tomar el valor 27.
Las hipótesis a contrastar, al 5%, según el enunciado serán

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 27 \\ H_1 : \mu \neq 27 \end{array}\right\},$$

siendo el estadístico experimental $Z_{exp} = \frac{25 - \mu_0}{\frac{6}{\sqrt{64}}} = \frac{25 - 27}{\frac{6}{\sqrt{64}}} = -2'7$. Dado que el estadístico experimental se encuentra fuera de los valores críticos $Z_{0'025} = -1,96$ y $Z_{0'975} = 1,96$, la conclusión sería rechazar la hipótesis nula. $\sharp$

Con varianza poblacional desconocida

Sea X una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es desconocida. Dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, los posibles test, al nivel de significación α, para la media de una población normal con varianza desconocida, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert\overline{x} - \mu_0\rvert}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} > t_{n-1,1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} < t_{n-1,\alpha}$

Donde $t_{n-1,a}$ es el punto de una t-Student de $n-1$ grados de libertad que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[t < t_{n-1,a}] = a$, donde $t \sim t_{n-1}$.

Adviértase que tomando como cierta la hipótesis nula, el estadístico media muestral, $\overline{X}$, seguirá una distribución t-Student con $n-1$ grados de libertad y, por tanto, el estadístico experimental se obtiene como $T_{exp} = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$.

Ejemplo 4 Supongamos que el número de horas semanales dedicado por los empleados de cierta empresa a navegar por internet tiene una distribución normal. Se toma una muestra de seis empleados y se obtiene: 12'2, 18'4, 23'1, 11'7, 8'2, 24. Contraste, a un nivel de significación de 0'01, si el tiempo medio semanal dedicado por los empleados a navegar por internet es superior a 10 horas.
A partir de los datos se obtiene que $\overline{X} = 16'27$ y $S_{n-1} = 6'53$. Para contrastar, al 1%, las hipótesis $\left.\begin{array}{l} H_0: \mu > 10 \\ H_1: \mu \leq 10 \end{array}\right\}$, el estadístico experimental tomará el valor

$$T_{exp} = \frac{16'27-\mu_0}{\frac{6'53}{\sqrt{6}}} = 2'35.$$

Dado que el estadístico experimental es mayor que el valor crítico $T_{0'01} = -3'36$, la conclusión sería que no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula. $\sharp$

Contraste de hipótesis para la proporción

Sea X una variable aleatoria distribuida según una Bernuilli de parámetro p, esto es, $X \sim B(p)$. Dada una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ procedente de X, los posibles test, al nivel de significación α, para la proporción muestral, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert P - p_0 \rvert}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > Z_{1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{P - p_0}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > Z_{1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{array}\right\}$	$\dfrac{P - p_0}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < Z_{\alpha}$

Donde Z_a es el punto de una normal de media cero y varianza uno que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[Z < Z_a] = a$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

Adviértase que la proporción muestral, P, se distribuye según una distribución $N(np, npq)$, por lo que el estadístico experimental (supuesto que la hipótesis nula es cierta) quedará definido como $Z_{exp} = \dfrac{P - p_o}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$.

Ejemplo 5 Según el artículo publicado en La voz de Galicia, el 29 de noviembre de 2009, antes de la crisis la edificación daba empleo al 14% de los extranjeros. Si se tomó una muestra de 110 habitantes extranjeros y 85 no trabajaban en la construcción, ¿puede considerarse que la afirmación del periódico es cierta?
De los datos del enunciado se sabe que la proporción muestral es $P = \frac{25}{110} = 0'23$.
Así, para contrastar, al 5%, las hipótesis $\left.\begin{array}{l} H_0 : p = 0'14 \\ H_1 : p \neq 0'14 \end{array}\right\}$, el estadístico experimental tomará el valor $Z_{exp} = \dfrac{0'23 - 0'14}{\sqrt{\frac{0'23 \cdot 0'77}{110}}} = 2'18$.
Dado que el estadístico experimental no se encuentra dentro de los valores críticos $Z_{0'025} = -1'96$ y $Z_{0'975} = 1'96$, la conclusión sería rechazar la hipótesis nula. En consecuencia, la afirmación del periódico no es cierta. $\sharp$

Contraste de hipótesis para el cociente de varianzas

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas según una $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente, donde las medias son desconocidas. Dadas dos muestras aleatorias simples $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ procedentes de X e Y, respectivamente, los posibles test, al nivel de significación α, para la comparación de varianzas de dos poblaciones normales con medias desconocidas, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}\right\}$	$\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} < F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ ó $\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} > F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{array}\right\}$	$\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} > F_{n-1,m-1,1-\alpha}$

Donde $F_{n-1,m-1,a}$ es el punto de una F-Snedecor de $n-1$ y $m-1$ grados de libertad que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[F < F_{n-1,m-1,a}] = a$, donde $F \sim F_{n-1,m-1}$.

Tomando como cierta la hipótesis nula, tomaremos como estadístico experimental:

$$F_{exp} = \frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \sim F_{n-1,m-1}.$$

Ejemplo 6 Dos profesores están interesados en comparar el nivel académico de dos grupos en una misma asignatura. Tomando una muestra de 81 alumnos para el primer grupo, se obtiene una nota media de 5’7 con una cuasivarianza de 1’2. Mientras que para una muestra de 61 alumnos del segundo grupo, se obtiene una nota media de 7 con cuasivarianza igual a 2’2. ¿Existe diferencia entre la dispersión de ambos grupos?
Las hipótesis a contrastar, al 5%, serán:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{array}\right\}.$$

Puesto que el estadístico experimental toma el valor $F_{exp} = \dfrac{1'2}{2'2} \cdot 1 = 0'545$, y dado que el estadístico experimental es menor que uno de los valores críticos, $F_{80,60}(0'025) = \frac{1}{F_{60,80}(0'975)} = \frac{1}{1'6} = 0'625$, la conclusión sería rechazar la hipótesis nula. Es decir, existe diferencia entre las dispersión de ambos grupos. $\sharp$

Contraste de hipótesis para la diferencia de medias procedentes de sendas poblaciones normales independientes

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas según una $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente, donde las varianzas son conocidas. Dadas dos muestras aleatorias simples $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ procedentes de X e Y, respectivamente, los posibles test, al nivel de significación α, para la comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas conocidas, junto a su correspondiente región de rechazo, son:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert\overline{X} - \overline{Y}\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} > Z_{1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} > Z_{1-\alpha}$

Donde Z_a es el punto de una normal de media cero y varianza uno que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[Z < Z_a] = a$, donde $Z \sim N(0,1)$.
En este caso, adviértase que tomando como cierta la hipótesis nula, tomaremos como estadístico experimental $Z_{exp} = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$.

Ejemplo 7 El comercial de cierta marca de refrescos trabaja con dos salas de fiestas. Debido a recortes de plantilla en su empresa debe de dejar de trabajar con una de ellas. Para tomar dicha decisión cuenta con dos muestras aleatorias simples de tamaño 100 y 125, respectivamente, sobre el consumo semanal de refrescos en cada una de las salas. Para la primera muestra se obtiene una media de 19070 botellines consumidos, mientras que para la segunda es de 21080. Suponiendo que ambas muestras proceden de poblaciones normales con varianzas poblacionales iguales a 2500 y 7500, respectivamente, ¿coincide el número medio de refrescos consumidos en ambas salas?
Puesto que:

$$Z_{exp} = \frac{|19070 - 21080|}{\sqrt{\frac{2500}{100} + \frac{7500}{125}}} = \frac{2010}{\sqrt{85}} = 218'0151 > 1'96 = Z_{0'975},$$

se rechaza la hipótesis nula del contraste $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right\}$, es decir, no coincide el número medio de refrescos consumidos en ambas salas. $\sharp$

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas según una $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente, donde las varianzas son desconocidas e iguales. Dadas dos muestras aleatorias simples $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ procedentes de X e Y, respectivamente, los posibles test, al nivel de significación α, para la comparación de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert\overline{X} - \overline{Y}\rvert}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{n+m-2,1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{n+m-2,1-\alpha}$

Donde $t_{n+m-2,a}$ es el punto de una t-Student de $n+m-2$ grados de libertad que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[t < t_{n+m-2,a}] = a$, donde $t \sim t_{n+m-2}$.

Además, recordemos que

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_{n-1}^2 + (m-1)S_{m-1}^2}{n+m-2} = \frac{n \cdot S_{n-1}^2 + m \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2}.$$

Adviértase que, supuesto que la hipótesis nula es cierta, se ha usado el estadístico

$$T_{exp} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}},$$

que se distribuye según una t-student con $n+m-2$ grados de libertad.

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Se desea comparar el tiempo que se necesita para completar la inscripción en dos aplicaciones informáticas de búsqueda de empleo que se piensan lanzar al mercado. Se toman dos muestras de 101 individuos cada una y se les pide que accedan a la aplicación y completen la ficha de inscripción, obteniendo una media de 50’2 y 52’9 segundos en la primera y segunda aplicación, respectivamente, y una varianza de 4’75 y 5’35, respectivamente. Si se supone que las poblaciones están normalmente distribuidas, ¿existe diferencia entre las medias del tiempo de inscripción en ambas aplicaciones?

La información que da el enunciado hace referencia a la muestra, por tanto, se tienen las medias y varianzas muestrales. Puesto que piden responder si las medias poblacionales son iguales, la herramienta a usar será un contraste de hipótesis de diferencias de medias. En tal caso, se tienen dos opciones: varianzas conocidas o desconocidas e iguales. En este caso las varianzas son desconocidas, pero no se sabe si son iguales. Por tanto, primero hay que comprobar esta suposición.

Con tal objetivo, se puede realizar el contraste de hipótesis para el cociente de varianzas. Una vez comprobado que las varianzas son iguales, podremos estudiar qué ocurre con las medias.

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Para contrastar si las varianzas son iguales plantearemos las hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}\right\}.$$

En tal caso, puesto que $n = m$ se verifica que $F_{exp} = \frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} = \frac{S_n^2}{S_m^2}$, y por tanto:

$$F_{exp} = \frac{4'75}{5'35} = 0'888.$$

Como $F_{100,100}(0'975) = 1'48$ y $F_{100,100}(0'025) = \frac{1}{1'48} = 0'675$, se concluye que no hay suficiente evidencia como para rechazar la hipótesis nula al nivel de significación del 5%.

Por tanto, podemos concluir que las varianzas poblacionales son iguales.

En tal caso, para contrastar si las medias son iguales, podemos usar el estadístico experimental para el caso de varianzas desconocidas e iguales. Esto es:

$$T_{exp} = \frac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}.$$

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Puesto que recordemos que $S_p = 2'2584$, $\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 0'1407$ y $|\overline{X} - \overline{Y}| = 2'7$, es claro que:

$$T_{exp} = \frac{2'7}{2'2584 \cdot 0'1407} = 8'497.$$

Como el valor crítico es $t_{200}(0'975) = 1'972$, es claro que se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, existe diferencia entre las medias del tiempo de inscripción en ambas aplicaciones.

Contraste de hipótesis para la diferencia de proporciones

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que se distribuyen según $B(p_1)$ y $B(p_2)$, respectivamente. Dadas dos muestras aleatorias simples $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ procedentes de X e Y, respectivamente, los posibles test, al nivel de significación α, para la diferencia de proporciones muestrales, junto a su correspondiente región de rechazo, son los siguientes:

Casos	Región de rechazo
$\left.\begin{array}{l} H_0: p_1 = p_2 \\ H_1: p_1 \neq p_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{\lvert P_1 - P_2 \rvert}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} > Z_{1-\alpha/2}$
$\left.\begin{array}{l} H_0: p_1 \leq p_2 \\ H_1: p_1 > p_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} > Z_{1-\alpha}$
$\left.\begin{array}{l} H_0: p_1 \geq p_2 \\ H_1: p_1 < p_2 \end{array}\right\}$	$\dfrac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} < Z_{\alpha}$

Donde Z_a es el punto de una normal de media cero y varianza uno que deja por debajo suya una probabilidad igual a a, es decir, $P[Z < Z_a] = a$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

En este caso, tomaremos como estadístico $Z_{exp} = \frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}}$.

Ejemplo 8 Se encuestaron a 200 estudiantes de la Universidad de Granada, de los cuales 20 manifestaron estar en contra del denominado "Plan Bolonia". En la Universidad de Málaga se encuestaron a 180 estudiantes, siendo 30 los que se mostraron disconformes con el nuevo plan. Al nivel de significación del 5%, ¿puede decirse que la proporción de alumnos que no están de acuerdo con la entrada del Espacio Europeo de Educación Superior es distinta en cada una de las provincias?
Del enunciado se obtiene que $P_1 = \frac{20}{200} = 0'1$ y $P_2 = \frac{30}{180} = 0'1\widehat{6}$. Para contrastar, al 5%, las hipótesis $\left.\begin{array}{l} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{array}\right\}$, se tiene que el estadístico experimental es

$$Z_{exp} = \frac{0'1 - 0'17}{\sqrt{\frac{0'1(1-0'1)}{200} + \frac{0'17(1-0'17)}{180}}} = -1'992.$$

Dado que el estadístico experimental está fuera de los valores críticos $Z_{0'025} = -1'96$ y $Z_{0'975} = 1'96$, la conclusión sería que no hay evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula. Luego, la proporción de alumnos no es distinta en cada una de las provincias. $\sharp$

Ejercicios Propuestos

5.1 Suponga que el número medio de días de ausencia de los trabajadores de cierta empresa es una variable aleatoria normal con desviación típica 0’6. Teniendo en cuenta la siguiente muestra: 2’4, 2’6, 3’7, 2’9, 2’8, 3’1, 3’5, 3, 2’2, 2’5, 3’1, 3’1, ¿se puede decir, con un 5% de significación, que el número medio de ausencias es menor que 3?

5.2 El número medio semanal de accidentes laborales en determinada provincia es 12. Tras una campaña de información y prevención se contabilizaron durante seis semanas consecutivas 8, 11, 9, 7, 9 y 10 accidentes. ¿Puede decirse, al 5% de significación, que la campaña fue efectiva?

5.3 Si de 900 nuevas pólizas aseguradoras, 500 se contrataron por internet. ¿Se puede concluir, al 1% de significación, que los consumidores prefieren mayoritariamente la contratación on-line?

5.4 Un fabricante de ordenadores asegura que el porcentaje de productos defectuosos es del 1%. Al seleccionar una muestra aleatoria de 200 ordenadores se descubren 8 defectuosos. Contraste, con un 10% de significación, la afirmación del fabricante. ¿Y al 95%?

5.5 Una empresa busca comerciales y ofrece un salario variable, asegurando que por término medio se obtiene unos 500 euros mensuales. Un comercial en paro está pensado en considerar la oferta si lo que dice la empresa es cierto y para ello pregunta a nueve empleados obteniendo un salario medio mensual de 498 euros y una cuasidesviación típica de 2 euros. ¿Aceptará el trabajo el comercial en paro? ¿Puede afirmarse que la dispersión es superior a 4?

5.6 Supongamos que el tiempo medio que se emplea en realizar cierta tarea dentro de un proceso de producción se distribuye según una normal. Se quiere estudiar la hipótesis de que en la fábrica A, donde se ha instalado una nueva maquinaria, el tiempo necesario para realizar la tarea es menor que en la fábrica B, que sigue funcionando con la maquinaria antigua. A la vista de la siguiente muestra:

FABRICA A	28	25	27	68	44	30	53	60	50	25	53
FABRICA B	27	37	43	29	61	58	75	46	56	80	57

¿Se puede decir con un nivel de significación del 1% que la hipótesis planteada es cierta?

5.7 El comercial de cierta marca de refrescos trabaja con dos salas de fiestas. Debido a recortes de plantilla en su empresa debe de dejar de trabajar con una de ellas. Para tomar dicha decisión cuenta con dos muestras aleatorias simples de tamaño 100 y 125, respectivamente, sobre el consumo semanal de refrescos en cada una de las salas. Para la primera muestra se obtiene una media de 1907 botellines consumidos, mientras que para la segunda es de 2108. Suponiendo que ambas muestras proceden de poblaciones normales con varianzas poblacionales iguales a 250 y 750, respectivamente, ¿coincide el número medio de refrescos consumidos en ambas salas?

5.8 Se considera que el gasto en personal de empresas aseguradoras se distribuye según una normal. Para comparar el gasto en personal de la aseguradora A y B se toman 25 empleados de cada una de las empresas y se obtiene que en la aseguradora A el salario medio es de 14 (en miles de euros anuales) con $\sum(X_i - \overline{X})^2 = 4996$ y en la aseguradora B es de 14'5 (en miles de euros anuales) con $\sum(Y_i - \overline{Y})^2 = 5362$. Si se puede suponer que las varianzas son iguales, ¿se aceptaría que el salario medio no cambia de una empresa a otra?

5.9 La calificación media de 58 opositores al cuerpo de Inspección Tributaria es de 5’5 con cuasivarianza muestral de 0’2 y para 44 opositores a Funcionario de Prisiones la calificación media es de 5’8 con cuasivarianza muestral de 0’12. Asumiendo que las calificaciones se distribuyen normalmente y que las desviaciones típicas son iguales, contrastar si hay evidencias de que las calificaciones medias sean distintas en cada una de estas oposiciones.

5.10 Se quiere comparar los resultados obtenidos en la asignatura de Métodos Cuantitativos en la convocatoria de diciembre y en la convocatoria de junio. Se toma una muestra de siete alumnos de la convocatoria de diciembre y se obtiene 4’4, 6, 5, 4, 3, 3’8, 5’1 y de una muestra de 10 alumnos que se presentaron en la convocatoria de junio se ha obtenido $\sum_{i=1}^{10} Y_i = 48$ y $\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 236'96$. Teniendo en cuenta los datos anteriores, ¿puede concluirse que la calificación en ambas convocatorias tienen la misma dispersión?

5.11 De una muestra de 54 hombres, 21 dice tener coche propio, mientras que de una muestra de 60 mujeres, 18 son las que afirman tener su propio coche. A un nivel de confianza del 99%, ¿existen diferencias entre la proporción de hombres y mujeres con coche propio?

5.12 Una empresa tiene dos turnos de producción cada uno de ocho horas y con el mismo número de trabajadores, pero uno diurno y otro nocturno. Para comparar la productividad de ambos turnos se toma una muestra aleatoria de 21 días de cada uno de los turnos obteniéndose que las cuasidesviaciones típicas obtenidas fueron 0’838 y 1’502, respectivamente. Suponiendo normalidad en las puntuaciones, ¿se puede afirmar, al 5% de significación, que existen diferencias entre las varianzas poblacionales?

5.13 Consideremos una muestra de 110 empleados de la construcción en la que 60 son españoles y 50 extranjeros. De los trabajadores españoles, 17 ocupan puestos de responsabilidad y, de los extranjeros, solo 6 tienen cargos de responsabilidad. A la vista de dicha muestra, ¿puede considerarse, con un 95% de confianza, que la proporción de inmigrantes en cargos de responsabilidad es al menos diez puntos inferior a la proporción de españoles en cargos de responsabilidad dentro de la construcción?