



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

Escuela Internacional de Posgrado

**Máster Universitario en Profesorado**  
Especialidad: Matemáticas  
Campus: Granada

TRABAJO FIN DE MÁSTER

## **Sentido estadístico en Educación Secundaria: Investigación y Propuesta Docente**

Presentado por:  
Rubén Fernández Jurado

Tutor:  
María Magdalena Gea Serrano

Curso académico 22/23

## Declaración de Originalidad del TFM

D. /Dña. Rubén Fernández Jurado, con DNI (NIE o pasaporte) 26519018H, declaro que el presente Trabajo de Fin de Máster es original, no habiéndose utilizado fuentes sin ser citadas debidamente. De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada de 20 de mayo de 2013, *esto conllevará automáticamente la calificación numérica de cero [...] independientemente del resto de las calificaciones que el estudiante hubiera obtenido. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien.*

Y para que así conste firmo el presente documento.

En Granada a 12 de Junio de 2023.

Firmado por  
FERNANDEZ JURADO  
RUBEN - \*\*\*1901\*\* el

Firma del alumno

Trabajo realizado en el marco del Proyecto PID2019-105601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Programa de Becas de Iniciación a la Investigación para Estudiantes de Másteres Oficiales de la Universidad de Granada-Banco Santander, dentro del grupo de investigación FQM126 *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* (Junta de Andalucía).

# Índice

|                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introducción .....                                                                         | 2         |
| <b>Capítulo I: El problema de investigación .....</b>                                      | <b>4</b>  |
| Importancia del sentido estadístico, la comprensión gráfica y la transnumeración.....      | 4         |
| Sentido estadístico desde la perspectiva curricular .....                                  | 6         |
| El currículo norteamericano.....                                                           | 6         |
| El currículo español.....                                                                  | 8         |
| Marco teórico.....                                                                         | 9         |
| Construcción del conocimiento matemático: sistemas de prácticas .....                      | 10        |
| Significados de un objeto matemático .....                                                 | 11        |
| Análisis de contenido.....                                                                 | 12        |
| Objetivos del trabajo .....                                                                | 16        |
| <b>Capítulo II: Antecedentes .....</b>                                                     | <b>17</b> |
| Niveles de lectura, comprensión gráfica y transnumeración .....                            | 17        |
| Investigaciones sobre transnumeración y lectura gráfica en estudiantes de secundaria ..... | 19        |
| Investigaciones sobre medidas de centralización en estudiantes de secundaria .....         | 22        |
| <b>Capítulo III: Estudio de evaluación .....</b>                                           | <b>24</b> |
| Objetivos e hipótesis del estudio de evaluación.....                                       | 24        |
| Método .....                                                                               | 25        |
| Descripción de la muestra.....                                                             | 25        |
| El cuestionario .....                                                                      | 26        |
| Análisis y resultados en el ítem 1.....                                                    | 27        |
| Análisis y resultados en el ítem 2.....                                                    | 36        |
| <b>Capítulo IV: Propuesta Didáctica .....</b>                                              | <b>44</b> |
| Metodología y Secuenciación de las tareas.....                                             | 44        |
| Análisis de instrucción.....                                                               | 55        |
| Análisis de evaluación .....                                                               | 57        |
| <b>Capítulo V: Conclusiones .....</b>                                                      | <b>59</b> |
| <b>Referencias .....</b>                                                                   | <b>61</b> |
| ANEXO I. Saberes básicos del sentido estocástico en secundaria.....                        | 65        |
| ANEXO II. Cuestionario de evaluación.....                                                  | 66        |
| ANEXO III. Rúbricas de evaluación.....                                                     | 68        |

## Introducción

El mundo actual está marcado por los datos y la incertidumbre. En televisión, en periódicos, en revistas, redes sociales... Cada día recibimos una cantidad masiva de datos e información que influyen en nuestras vidas y nuestras decisiones. Más aún, estos datos pueden provenir de variados contextos y tener su origen en fuentes diversas: dispositivos electrónicos (por ejemplo, síntesis estadísticas publicadas en redes sociales y teléfonos móviles), periódicos o medios de comunicación, por parte de instituciones, etc.

Es por esto que los educadores se encuentran ante un reto cuando tienen que desarrollar el sentido estadístico en sus estudiantes desde los primeros niveles educativos. Este objetivo redundaría en la formación de una sociedad estadísticamente culta, esto es, ciudadanos capaces de tomar decisiones y realizar juicios fundamentados de acuerdo a la legitimidad de los datos analizados, manteniendo una actitud crítica durante todo este proceso (Batanero et al., 2013; Batanero, 2019).

Este hecho evidencia la importancia de prestar especial atención a la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde los primeros niveles educativos (Alsina, 2012). En particular, las directrices curriculares en España establecen para la etapa de secundaria una formación determinante para la correcta inserción laboral de los estudiantes o para continuar su formación académica. Sin embargo, las directrices curriculares actuales pueden no ser suficientes para garantizar la formación de ciudadanos estadísticamente cultos, capaces de analizar la gran cantidad de datos que recibimos de forma diaria.

Este Trabajo Final de Máster (TFM) nace del interés por analizar el desempeño de estudiantes de secundaria al abordar tareas sobre el sentido estadístico, lo que puede contribuir no sólo a caracterizar la capacidad de estos para analizar información de forma crítica, cuando se presenta en contexto, sino también a detectar dificultades y errores cometidos a la hora de enfrentarse a problemas estadísticos. Estas dificultades representan limitaciones del aprendizaje, en tanto que pueden estar relacionadas con la asimilación incorrecta o incompleta de uno o varios contenidos matemáticos, lo cual puede derivar en una mala praxis de estos en situaciones cotidianas. Por lo tanto, tan importante es evidenciar cuáles son sus dificultades como planificar una propuesta didáctica que permita intervenir y atender dichas dificultades para lograr un aprendizaje adecuado.

Se analiza, por un lado, el sentido estadístico de un grupo de estudiantes de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (4ºESO) a través de sus respuestas a tareas mediante un cuestionario escrito evaluando la interpretación de medidas de centralización

en gráficos estadísticos. Por otro lado, se propone una intervención didáctica especialmente dirigida para atender las dificultades encontradas según una instrucción de la estadística basada en situaciones contextualizadas y significativas.

Con esta motivación se propone la intervención, posterior a los resultados obtenidos en el estudio de evaluación, puesto que los errores y dificultades frecuentes, detectados en la literatura, es una cuestión que resulta alarmante y que evidencia la necesidad de tomar medidas para el correcto aprendizaje del sentido estadístico del alumnado. De acuerdo a la literatura, los contenidos en estadística resultan complejos de aprender y poner en práctica para los estudiantes de secundaria, por lo que esperamos que la propuesta sirva a los docentes para desarrollar un adecuado desempeño del sentido estadístico de sus estudiantes.

Esta memoria se compone de cuatro capítulos. En el capítulo I se justifica la importancia que tienen el sentido estadístico, la comprensión gráfica y la transnumeración, además de describirse brevemente el marco teórico bajo el que se realiza este TFM, para enunciar finalmente los objetivos de investigación. El capítulo II consiste en una revisión de la literatura existente en torno a algunos modelos sobre la comprensión gráfica e investigaciones sobre lectura de gráficos estadísticos y comprensión de las medidas de centralización por parte de estudiantes de secundaria. En el capítulo III se detalla el estudio de evaluación que se ha realizado a través del análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario diseñado con el objetivo de evaluar el sentido estadístico de los participantes. El capítulo IV consiste en la propuesta de intervención didáctica, en la que se detalla la secuenciación y las tareas que la conforman, un análisis de instrucción y un análisis de evaluación. Finalmente, en el capítulo V se exponen unas conclusiones breves de todo el trabajo, acompañadas de algunas valoraciones y reflexiones finales.

# Capítulo I: El problema de investigación

## Importancia del sentido estadístico, la comprensión gráfica y la transnumeración

En nuestro día a día estamos expuestos constantemente a información y datos en diferentes y variados contextos. Generalmente, esta información suele presentarse en tres formatos distintos: en forma verbal (oral o escrita), en forma de números o símbolos y en formato gráfico o tabular (Gal, 2002). Esta información sirve para tomar decisiones, lo que exige una formación estadística adecuada que nos permita comprender e interpretar dicha información, independientemente de cómo se presente. Esta capacidad para analizar y reflexionar sobre la información que recibimos forma parte del sentido estadístico.

El sentido estadístico engloba las diferentes capacidades o competencias que se ponen en marcha al interpretar, evaluar críticamente y comunicar información, ideas y mensajes basados en datos (Gal, 2002). Dichas competencias, más allá del aprendizaje conceptual, deben asegurar la adquisición de destrezas y habilidades de pensamiento. Por tanto, formar en el sentido estadístico conlleva, entre otras cuestiones, formar ciudadanos estadísticamente cultos (Batanero et al., 2013; Batanero, 2019). Así es que, el correcto desarrollo del sentido estadístico en el ciudadano es fundamental para dotarle de herramientas que le permitan realizar predicciones y tomar decisiones en el día a día de forma fundamentada y crítica.

Como señalan Garzón-Guerrero y Jiménez (2021), los resultados estadísticos aportan rigor y seriedad a lo que se esté tratando de exponer o comunicar y pueden parecer sencillos de interpretar. Esta sencillez y seguridad, la formalidad y el rigor de dichos resultados, pueden generar una confianza excesiva en lo que leemos, y puede suceder que no seamos críticos al reflexionar e interpretar profundamente la información que recibimos. Esto puede dar lugar a una interpretación errónea de la información o a la asimilación de noticias falsas (*fake news*). En definitiva, de acuerdo a muchos autores en educación estadística, el sentido estadístico es esencial en todos los niveles educativos.

De los tres formatos en los que se suele presentar la información, el formato gráfico requiere una atención especial, pues se asume que las representaciones gráficas son transparentes para los ciudadanos y su comprensión es prácticamente automática o evidente (Glazer, 2011). Tal como indican Batanero et al. (2021): la comprensión gráfica de los estudiantes “es una competencia sofisticada, que no debe dejarse al aprendizaje autónomo, sino que ha de ser educada” (2021, p. 208).

Con el fin de educar el sentido estadístico, numerosos autores se han preocupado por la forma en que los estudiantes leen e interpretan gráficos estadísticos (García-Alonso y Bruno, 2019; Garzón-Guerrero y Jiménez, 2021; Gea et al., 2017; López Mojica et al., 2020; Ruiz, 2019; Salcedo et al., 2021), como se describe más adelante en el Capítulo II, en el que se presentan algunos modelos para el análisis de la comprensión gráfica de los estudiantes, así como los resultados más relevantes y frecuentes.

Al interpretar un gráfico estadístico, no basta con únicamente leer la información representada. Es preciso ser capaz de descubrir, a partir de la representación gráfica de los datos, características de la distribución (su forma y medidas características) para, por ejemplo, realizar predicciones. De aquí surge el término *transnumeración* (Wild y Pfannkuch, 1999), que Batanero et al. (2013) consideran fundamental en el sentido estadístico, que consiste en la comprensión de la información representada en diferentes registros, con la consecuente interpretación relacionada de los mismos. Así es que gráficamente se interprete la información para su conversión a otro formato: verbal, tabular, numérico, simbólico, etc. No obstante, la propia interpretación y asimilación de la información representada en un gráfico ya supone un proceso de análisis y reflexión sobre la información que representa. Comprender las diferentes formas de exponer resultados estadísticos (gráficos estadísticos, medidas estadísticas, tablas estadísticas...) no sólo alude a conocer estas formas de representación sino también a cómo hacer conversiones de unas a otras. La transnumeración, en consecuencia, es parte del conocimiento estadístico deseado en la formación de los estudiantes durante su escolarización (Molina-Portillo et al., 2023).

Asimismo, no solo es deseable un nivel adecuado de comprensión gráfica, sino también de aptitud para interpretar medidas estadísticas, como parte de la transnumeración. En particular, las medidas de centralización adquieren relevancia en el análisis estadístico, por tratarse de representantes de la distribución de datos, lo que requiere distinguir cuál es más oportuna. Pero, los estudiantes, generalmente, finalizan la primaria y secundaria con un conocimiento superficial de dichas medidas (Cooper y Shore, 2008). Por tanto, en el esfuerzo por el desarrollo del sentido estadístico, para analizar la información que recibimos de numerosas fuentes en diversos formatos, la comprensión gráfica e interpretación de medidas estadísticas tienen un papel fundamental en la transnumeración.

## Sentido estadístico desde la perspectiva curricular

En esta sección se describe cómo se concreta la enseñanza de la estadística en la etapa de secundaria en el currículo español y norteamericano, por tratarse este último de un referente a nivel internacional.

### ***El currículo norteamericano***

La educación matemática ha sido una cuestión de gran interés y relevancia para la sociedad norteamericana desde principios de siglo. Esto se ha visto reflejado en las actuaciones del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (*National Council of Teacher of Mathematics, NCTM*), el cual elaboró un documento de referencia para contribuir a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conocido como *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000). En particular, la enseñanza de la estadística fue considerada desde las primeras edades.

Más recientemente, dada la necesidad de disponer de unas directrices más concretas para responder a la especificidad del desarrollo del sentido estadístico y el papel de la estadística en la sociedad actual, el NCTM y la Asociación Estadística Americana (*American Statistical Association, ASA*) elaboraron conjuntamente un proyecto de referencia para establecer un marco curricular en evaluación y enseñanza de la estadística y probabilidad, publicado con el nombre *GAISE*, según sus siglas en inglés: *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Franklin et al., 2007). Se considera a la educación estadística como: “un área relativamente nueva para muchos profesores, quienes no han tenido la oportunidad de desarrollar un conocimiento sólido de los principios y conceptos subyacentes a las prácticas de análisis de datos que ahora son llamados a enseñar” (Franklin et al., 2007, p. 5), por lo que el proyecto GAISE trata de ofrecer una guía de actuación en el desarrollo del sentido estadístico de los estudiantes mediante un marco teórico y ejemplos que orienten la labor docente.

Una segunda versión del documento se publica en 2020, a causa de los avances en la tecnología y los cambios que han dado lugar a una sociedad con diversos tipos de datos (más allá de datos cualitativos y cuantitativos, en forma de texto en redes sociales o como audios, vídeos, imágenes, etc.) (Bargagliotti et al., 2020, p. 2), que mantiene los fundamentos que estructuran la primera edición (Franklin et al., 2007): la enseñanza y aprendizaje de la estadística debe enfocarse en la variabilidad, como rasgo que la caracteriza y diferencia del estudio de la Matemática.

Se propone un marco teórico de dos dimensiones. La primera se define por las componentes que conforman el proceso de resolución de proyectos estadísticos, que son: 1) formular una pregunta de investigación estadística; 2) recoger datos; 3) analizar datos; y 4) interpretar resultados. La segunda dimensión establece tres niveles de desarrollo gradual del razonamiento estadístico, según el desempeño de una tarea estocástica: A, B y C. Estos niveles no necesariamente se corresponden con la edad ni con los niveles educativos (Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato), aunque sí se constituyen de manera secuencial en el proceso de desarrollo del razonamiento estadístico.

El proyecto GAISE II enfatiza que los estudiantes conozcan los diversos tipos de datos que existen, cómo se generan y tratan, y cómo analizarlos y valorar su idoneidad y legitimidad. Se propone la instrucción de contenidos como: el análisis de la variabilidad, el papel de la incertidumbre en un estudio estadístico y el cuestionamiento acerca de los diversos tipos de datos existentes, desde el nivel A, y se abordan en profundidad las siguientes cuestiones (Bargagliotti et al., 2020, p. 8):

- La importancia de plantearse preguntas a lo largo de todo el proceso de resolución de problemas estadísticos, considerando sus cuatro fases.
- La consideración de diferentes tipos de datos y variables, comprendiendo el papel de los datos para responder a preguntas de investigación estadística.
- El pensamiento multivariable a lo largo de todos los niveles educativos.
- El pensamiento probabilístico a lo largo de todos los niveles educativos.
- El reconocimiento de que la práctica estadística está fuertemente asociada al uso de la tecnología en cualquier nivel educativo.

Especial mención merece la evaluación, que propone centrar los esfuerzos en la comprensión conceptual, a través de la interpretación y de forma contextualizada, frente a la evaluación tradicional de métodos y cálculos descontextualizados.

En suma, GAISE propone el desarrollo del sentido estadístico desde los primeros niveles educativos, fomentando la evaluación de la comprensión conceptual para garantizar que los estudiantes desarrollen adecuadamente su capacidad para razonar crítica y reflexivamente en situaciones estadísticas. Estas orientaciones resultan de suma importancia en una sociedad marcada por los datos y la información, debiendo concienciar a la comunidad educativa de la importancia que tiene formar adecuadamente a las generaciones venideras para enfrentarse a los retos actuales.

## ***El currículo español***

El actual currículo de la ESO en España, como en la anterior normativa curricular, establece la formación del estudiante bajo el desarrollo de competencias clave, atendiendo a las indicaciones de la Unión Europea (UE, 2006). Estas deben desarrollarse en cada una de las materias a lo largo de toda la etapa, con la novedad de que cada materia también se organiza en torno al desarrollo de competencias específicas. En particular, para la materia de Matemáticas, en la ESO, se determinan diez competencias específicas; y para cada una se concretan diferentes criterios de evaluación (MEFP, 2022).

Los contenidos en la materia se clasifican en saberes básicos o sentidos, como grandes ideas que conforman el sentido matemático, y para su desarrollo, se propone trabajar desde contextos y situaciones reales (situaciones de aprendizaje), que promuevan utilizar las matemáticas mediante la resolución de problemas de forma crítica y reflexiva, considerando el desarrollo de las competencias específicas para la etapa (MEFP, 2022).

Las indicaciones en la normativa estatal organizan la enseñanza de la ESO en dos etapas: una de 1ºESO a 3ºESO y otra para 4ºESO, diferenciando en esta etapa cada una de sus modalidades (A y B). Sin embargo, no relaciona los criterios de evaluación de las competencias específicas en la materia con los saberes básicos a desarrollar. La concreción curricular que la Comunidad Autónoma de Andalucía ha establecido, mediante una instrucción organizativa y de funcionamiento, relaciona los criterios de evaluación y saberes básicos, pero únicamente para los cursos impares de la secundaria, en los que se ha implantado la normativa curricular el presente curso académico 2022/2023 (Consejería de Educación y Deporte, 2022). No obstante, dicha instrucción agrupa las competencias específicas en cinco bloques competenciales, que se mantienen durante toda la etapa y, en consecuencia, permiten agrupar las competencias específicas para 4º ESO de la siguiente manera:

- Resolución de problemas: competencia en interpretar, modelizar y resolver problemas (C.E.1), así como analizar las soluciones y verificar su validez (C.E.2).
- Razonamiento y prueba: formular y comprobar conjeturas (C.E.3) junto a plantear problemáticas y nuevos modelos en base al análisis de los datos (C.E.4).
- Conexiones entre contenidos matemáticos (C.E.5) como con otras materias (C.E.6).
- Representación (C.E.7) y Comunicación (C.E.8) mediante diferentes herramientas para visualizar y estructurar ideas y procesos matemáticos.

- Destrezas socioafectivas en la gestión de emociones, perseverancia y aceptando el error como medio de aprendizaje (C.E.9); junto al disfrute en el estudio de la materia y respeto en la participación activa y colaborativa del alumnado (C.E.10).

En relación con el sentido estocástico, los saberes básicos en secundaria se organizan en tres grandes ideas: organización y análisis de datos, incertidumbre e inferencia. De acuerdo con Ruiz-Hidalgo y Flores (2022, p. 67): “A diferencia del resto de sentidos, los contenidos del sentido estocástico tienen un punto de partida claro: la incertidumbre”. Así es que, aceptamos la definición del sentido estadístico que, desde un punto de vista curricular, aporta el Comité Español de Matemáticas [CEMAT] como:

El sentido estocástico es la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones (CEMAT, 2021, p.35).

Sin encontrar diferencias entre las dos modalidades para Matemáticas en 4º ESO (aunque sí entre los periodos de 1ºESO a 3ºESO y de 4ºESO), el desarrollo del sentido estocástico se organiza como una espiral. Se comienza introduciendo contenidos que van desarrollándose a lo largo de la etapa hasta lograr una mayor profundización en 4ºESO (MEFP, 2022). Las diferencias entre dichas etapas radican en: el estudio de la dependencia entre variables, pues en 4ºESO se introduce el estudio de la correlación y regresión; se profundiza en el análisis de la representatividad muestral; y se inicia el estudio de la probabilidad conjunta y condicionada en experimentos compuestos. En la Tablas A1.1 y A1.2 del Anexo I se muestran los saberes básicos correspondientes a cada una de las tres ideas fundamentales del sentido estocástico en secundaria de 1ºESO a 3ºESO y para 4ºESO (MEFP, 2022).

## Marco teórico

Para este trabajo consideramos el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos como marco teórico. Se considera las matemáticas desde una perspectiva epistemológica, ontológica, semiótico-cognitiva, educativo-instruccional y ecológica para responder a una serie de preguntas con el fin de caracterizar la actividad y el conocimiento matemático, analizando los diferentes elementos que lo conforman (Godino et al., 2020).

## Construcción del conocimiento matemático: sistemas de prácticas

Desde un punto de vista epistemológico, el EOS defiende que la actividad humana es la que conforma el conocimiento matemático a través de una serie de prácticas. Más concretamente, con el fin de responder a problemas o situaciones susceptibles de ser abordadas desde las matemáticas, los humanos ponemos en juego una serie de prácticas que definen, en esencia, la actividad y el conocimiento matemáticos. Se entienden aquí las prácticas matemáticas en un sentido amplio, involucrando toda actuación o expresión realizada (cualquiera que sea su representación) con el fin de responder a una situación matemática, así como cualquier comunicación, validación o justificación de su solución (Godino y Batanero, 1994). Sin embargo, todas estas prácticas no se estudian de forma aislada o descontextualizada, sino que, como bien hemos mencionado, deben responder a situaciones y problemas matemáticos. En este sentido, hablamos de resolución de problemas y de los procesos de resolución de problemas matemáticos: desde el enfoque ontosemiótico, un proceso de resolución de un problema matemático no es otra cosa que el conjunto de prácticas involucradas en la resolución de dicho problema, que llamaremos sistemas de prácticas. Así, se considera el término problema, también, desde un sentido amplio, esto es, considerando ejercicios y tareas de diferente nivel de complejidad.

Los sistemas de prácticas, pues, están conformados por las prácticas que llevamos a cabo para responder a una situación matemática y desde la que adquiere significado un objeto matemático, entendido este como “...toda entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática” (Godino et al., 2020, p. 6). Sin embargo, cabe distinguir que las prácticas pueden ser interpretadas desde dos enfoques: personales (propias de la persona que las realiza) o institucionales (compartidas entre una serie de individuos con el mismo conjunto de instrumentos, reglas y modos de funcionamiento al resolver una situación a tratar). Así, por ejemplo, en la resolución de un problema estadístico, la institución propone una serie de prácticas “tipo” sometidas a ciertas reglas, cuyo uso está recomendado en problemas de esa tipología, y a través de instrumentos adecuados, lo que constituye el sistema de prácticas institucionales asociadas a ese tipo de problema. Por otro lado, quien se enfrenta y resuelve, a modo personal, un problema, constituye su sistema de prácticas personales asociadas a dicho tipo de problema.

En definitiva, entendemos que en la resolución de un problema matemático se llevan a cabo diferentes procesos, que se interpretan en el EOS desde la secuencia de prácticas realizadas. Cabe resaltar que estos problemas están asociados a un contexto y

movilizan ciertas prácticas institucionales, lo que implica, desde el EOS, que el conocimiento matemático es relativo, en tanto que depende del contexto y de la institución en la que se enmarquen las prácticas que contribuyen a la construcción de dicho conocimiento, y de la actividad matemática, en general (Godino et al., 2020).

## Significados de un objeto matemático

Los objetos matemáticos son considerados en el EOS como cualquier entidad que intervenga en la práctica matemática (Godino et al., 2020); por tanto, para comprender el significado de los objetos matemáticos debemos tener en cuenta que van asociados a sistemas de prácticas en los que intervienen. Así, la identificación de sistemas de prácticas a la hora de abordar diversos problemas en diferentes contextos en los que se utiliza dicho objeto construye su significado (Godino et al., 2020). En la medida que los sistemas de prácticas sean relativos a un sujeto o institución, su significado, también, lo será. En este sentido, el significado institucional de un objeto matemático es aquel asociado al sistema de prácticas institucionales que lo dotan de significado. Por su parte, el significado personal de un objeto matemático es aquel que provenga de las prácticas personales en las que intervenga y cobre significado dicho objeto. No obstante, existen diferentes tipos de significado institucional y personal de los objetos matemáticos (Godino, 2003).

En referencia al significado institucional de un objeto matemático, se distinguen: el *significado referencial*, como el sentido que dicho objeto adquiere dentro de un campo o disciplina; el *significado pretendido*, como los sistemas de prácticas planificadas por la institución para el aprendizaje de un objeto matemático; el *significado implementado*, como las prácticas y usos que se han llevado a cabo en torno a dicho objeto a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje; finalmente, el *significado evaluado* es el que el docente (o la institución) selecciona e incluye en las pruebas de evaluación para valorar el grado de comprensión y desarrollo competencial en torno al objeto matemático.

En relación con el significado personal de un objeto matemático, se distinguen tres tipos: el *significado global* de un objeto matemático, constituido por todas las prácticas que un sujeto puede realizar efectivamente en relación con dicho objeto; el *significado declarado*, como el conjunto de prácticas que el sujeto demuestra que puede realizar con efectividad en las pruebas de evaluación, según las cuestiones que compongan dichas pruebas; finalmente, el *significado logrado* se refiere a las prácticas que el sujeto logra realizar y que se corresponden con lo establecido por la institución. Se hace notar que el significado personal no tiene por qué ser fruto de prácticas correctas,

sino que se pueden encontrar prácticas que un sujeto manifiesta pero que no se correspondan con el significado de la institución. De este modo, dicho significado declarado no concordante con la institución es justamente una fuente de errores y dificultades, denominados conflictos semióticos en el EOS, en tanto que se corresponde con las prácticas asumidas por un sujeto y que logran realizar aun siendo incorrectas desde el punto de vista de la institución (Godino, 2003).

Además, dado que objetos, prácticas y procesos se desarrollan y organizan en torno a la práctica matemática orientada a la resolución de problemas, en el EOS la comprensión va asociada a la acción y la competencia, más que a un proceso mental, como señalan Godino, et al. (2020): “El posicionamiento pragmatista del EOS lleva a entender la comprensión como competencia y no tanto como proceso mental: se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas” (Godino et al., 2020, p. 8).

### *Análisis de contenido*

La media es, probablemente, la medida de centralización más utilizada por los estudiantes para representar un conjunto de datos, aunque la literatura de investigación advierte que el significado que estos manifiestan no siempre es adecuado (Ver Capítulo II). A pesar de ser la medida preferente en distribuciones más o menos homogéneas, ya que utiliza todos los datos en su cálculo, existen casos en los que no resulta ser un buen representante, siendo la mediana o la moda menos influenciadas por valores extremos.

Las directrices curriculares incluyen el estudio de la media desde tercer ciclo de educación primaria y se combina con el estudio del resto de medidas de centralización en la etapa de 1ºESO a 3ºESO (MEFP, 2022). En particular, la instrucción que establece la Comunidad Autónoma de Andalucía para los cursos de 1ºESO y 3ºESO del presente curso escolar 2022/2023 enfatiza la interpretación de las medidas estadísticas, ya que hace hincapié en atender a su representatividad al elegir la más adecuada para representar a un conjunto de datos (Consejería de Educación y Deporte, 2022). En 4ºESO se repasan los conceptos estudiados durante los años anteriores y se profundiza en su estudio.

Con una perspectiva fenomenológica y didáctica del significado de las medidas de centralización, de acuerdo con el marco teórico del EOS que fundamenta este trabajo (Ver Capítulo I), a continuación, se describe la caracterización de campos de problemas asociados a las medidas de tendencia central desde los que se adquiere su significado, según el estudio epistemológico realizado por Cobo (2003) y estudios posteriores

realizados por Mayén (2009). Se completa el análisis de contenido describiendo las representaciones y procedimientos involucrados en los sistemas de prácticas que se implican en la resolución de dichos campos de problemas.

#### *Campos de problemas asociados a la media*

**PM1.** *Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.* Este campo de problemas se corresponde con situaciones en las que se deben medir ciertas características (dimensiones, peso, altura) de un objeto. Al medir se pueden cometer errores en la medición, por lo que adquiere sentido calcular la media como aproximación del valor real de la característica medida, dadas sus propiedades como estimador de mínima varianza.

**PM2.** *Obtener un reparto equitativo para conseguir una distribución uniforme.* Se busca la media como la cantidad que resulta de establecer un reparto equitativo.

**PM3.** *Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica.* El énfasis en este campo de problemas se encuentra en utilizar la media como mejor representante del conjunto de datos, pues en su cálculo se debe considerar los valores de cada dato y, por tanto, recoge la información que aporta cada uno. Cuando la distribución es simétrica la media se concentra en torno al centro de la distribución.

**PM4.** *Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.* A diferencia del campo de problemas PM3, en esta situación interviene el concepto de muestra, azar y probabilidad, y conlleva apreciar la variabilidad aleatoria.

**PM5.** *Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas.* Este campo de problemas es reconocido por Mayén (2009) al considerar la comparación de dos distribuciones de datos, generalmente, mediante gráficas o tablas estadísticas, para lo que resulta conveniente el cálculo de la media en cada distribución para extraer conclusiones sobre sus tendencias.

#### *Campos de problemas asociados a la mediana*

**PME1.** *Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.* En este campo de problemas se busca un representante de los datos en distribuciones asimétricas. La mediana resulta adecuada, ya que al ordenarlos y considerar el valor central (mediana como valor central) estamos dejando la misma cantidad de datos por debajo y por encima.

**PME2.** *Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales.* Este campo de problemas es especialmente útil al analizar variables ordinales, puesto que los datos son considerados por su frecuencia pero no por su valor.

**PME3.** *Efectuar comparaciones de datos usando gráficos de la caja.* La mediana es una medida conveniente al comparar dos distribuciones de datos, cualquiera que sea su representación.

#### *Campos de problemas asociados a la moda*

**PMO1.** *Obtener un valor representativo de una colección de datos en situaciones en las que interesa fundamentalmente el valor dominante del conjunto.* Este campo de problemas responde a situaciones donde interesa conocer el valor más repetido o escogido por la mayoría, como valor más frecuente en la distribución de la variable.

**PMO2.** *Encontrar el valor representativo en datos cualitativos.* Cuando interesa obtener un representante en variables cualitativas no ordinales.

#### *Representaciones*

En relación con las medidas de posición central, podemos encontrar diferentes representaciones tabulares y gráficas. Entre las representaciones tabulares, encontramos *listas de datos* (cuando los datos se presentan en bruto, sin su frecuencia) o *tablas de frecuencias* (tanto de distribuciones unidimensionales como bidimensionales) con cada valor de la variable junto a su frecuencia asociada, así como por intervalos.

Sobre las representaciones gráficas, distinguimos diferentes tipos de representaciones cuya enseñanza es contemplada durante la enseñanza secundaria: diagrama de barras (de una y de dos variables), diagrama de barras de frecuencias acumuladas, gráfico de cajas, gráfico de puntos, histograma, polígono de frecuencias, diagrama de sectores y pictogramas, entre otras.

Cabe mencionar que las medidas de centralización aparecen representadas principalmente verbalmente (por escrito), así como en valor simbólico, como números asociados a símbolos (Media:  $\bar{X}$ , Moda:  $M_o$ , y Mediana:  $M_e$ ), acompañados de fórmulas (expresiones algebraicas) para su cálculo.

El estudio de evaluación descrito en el Capítulo III de este trabajo muestra los resultados del análisis de respuestas de estudiantes de 4ºESO al interpretar las medidas de centralización, específicamente, en la representación del gráfico de barras; pero, todo el cuestionario (Ver Capítulo III) centra la atención en la representación gráfica, bien en

el gráfico de barras (Tarea 4, tanto de una como de varias variables, respectivamente) bien en el histograma (Tareas 1, 2 y 3). Estos dos gráficos son bastante frecuentes en la educación secundaria, pero la comprensión adecuada de estos no consiste solo en su lectura literal, sino en ser capaz de extraer información de los gráficos, de realizar cálculos numéricos a partir de la información representada, de obtener conclusiones razonadas, de realizar predicciones y de valorar críticamente la información, de acuerdo con los niveles de comprensión de gráficos propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1987; Friel et al., 2001). En particular, con las tareas propuestas en el estudio de evaluación, se esperaba que los estudiantes lleguen, al menos, al segundo nivel de la taxonomía de Curcio, *leer entre los datos*, pues se tiene que obtener la moda de una distribución e identificar valores atípicos (la asimetría de la distribución). Además, para valorar la idoneidad de las medidas de centralización como representantes de los datos, y decidir si prescindir de un valor atípico, se requiere cuestionar la fuente de los datos.

### *Procedimientos*

Los procedimientos empleados para resolver la diversidad de campos de problemas en torno a las medidas de centralización se describen ampliamente en Cobo (2003) y Mayén (2009). Se distinguen los procedimientos, según se trate de la media, moda o mediana, y para todas se evidencian diferencias en los algoritmos cuando los datos de la variable vienen agrupados en intervalos. Además, en el cálculo de la mediana se distingue cuando el número de datos en la distribución es par o impar.

El procedimiento de construir una distribución de datos conocida una medida de centralización es vinculado por las autoras solo al caso particular de la media. En nuestra opinión, este procedimiento puede ser puesto en función para el caso de la moda o la mediana, también, pero pensamos que las autoras lo asocian solo a la media, porque conlleva considerar su algoritmo, aunque sea de manera implícita. En este sentido, las autoras también consideran el procedimiento de invertir el algoritmo de cálculo de la media para obtener un dato faltante en la distribución, que no se aplica al resto de medidas.

Por último, para todas las medidas de centralización se consideran los procedimientos asociados a su cálculo gráfico. Este cálculo tiene una complejidad mayor en tanto que requiere la lectura y extracción correcta de los datos a partir del gráfico. Además, dependiendo del tipo de gráfico el procedimiento podría variar. Por ejemplo, en un diagrama de tallo y hojas el cálculo de la mediana es fácil y visibiliza el dato central de manera clara, mientras que en un diagrama de barras el procedimiento implica

considerar la suma de todas las frecuencias para obtener el valor de la variable que deje por debajo y por arriba la mitad de los datos de la distribución; asimismo, el procedimiento podría ser diferente en el caso del histograma o pictograma.

Como indica Cobo (2003), se detectan más dificultades en el cálculo de la media ponderada y en el cálculo de la mediana a partir de la representación gráfica, probablemente, dada la falta de textos y tareas en los libros en los que se proponga el cálculo de estas medidas a partir de los datos agrupados o de su representación gráfica.

## Objetivos del trabajo

Es preciso tener en cuenta que este se compone de dos vertientes relacionadas e igual de relevantes: *analizar el sentido estadístico de un grupo de estudiantes de 4ºESO cuando interpretan medidas de centralización en gráficos estadísticos y proponer acciones docentes para atender las dificultades encontradas y contribuir al desarrollo de su sentido estocástico en el manejo de estas medidas.*

En relación con el análisis de la interpretación de las medidas de centralización en gráficos de un grupo de estudiantes de 4ºESO, el interés se materializa al realizar un estudio de evaluación. Partiendo de las investigaciones realizadas por Cobo (2003) y Mayén (2009), tanto los ítems de sus investigaciones como los resultados de dichos estudios nos servirán de referencia y nos permitirán comparar nuestros resultados con los obtenidos por las autoras. Asimismo, el desarrollo de las asignaturas que he cursado en el plan de estudios del Máster de Profesorado, en la especialidad de matemáticas, contribuirán al desarrollo de la planificación de la propuesta didáctica. En consecuencia, se enuncian como objetivos de este trabajo:

O1. Realizar un estudio de evaluación del sentido estadístico de un grupo de estudiantes de 4ºESO mediante un cuestionario formado por tareas que movilizan la interpretación de las medidas de centralización a través de la lectura de gráficos.

O2. Diseñar una intervención didáctica para el desarrollo del sentido estocástico de los estudiantes en 4ºESO, ajustada a los resultados obtenidos con el estudio previo, que contribuya, por un lado, a un aprendizaje adecuado de las medidas de centralización y su comprensión gráfica y, por otro lado, al tratamiento de las dificultades identificadas en dicho estudio de evaluación.

## Capítulo II: Antecedentes

En este capítulo se ofrece una visión general del interés que ha suscitado la investigación en torno a la comprensión de gráficos estadísticos y medidas de centralización por parte de los estudiantes en secundaria. Con tal fin, introducimos a continuación una serie de modelos validados y más recurrentes en relación con la comprensión gráfica, que justifican lo esencial que resulta el desarrollo de esta competencia. Se finaliza revisando algunas investigaciones con estudiantes sobre medidas de centralización y lectura de gráficos estadísticos de los últimos años, que evidencian la necesidad de atender estas cuestiones y nos permiten comprender la forma en que los estudiantes aprenden y conocen estos contenidos.

### Niveles de lectura, comprensión gráfica y transnumeración

El esfuerzo por caracterizar el nivel de comprensión de gráficos estadísticos por los estudiantes ha llevado a muchos autores a proponer modelos ampliamente utilizados y validados en investigación. Dichos modelos proponen una serie de niveles de lectura que permiten analizar el grado de desarrollo de la comprensión gráfica y la transnumeración por parte de los estudiantes, según el nivel alcanzado en la resolución de tareas. Vamos a presentar brevemente los modelos más relevantes de los últimos años.

#### *La taxonomía de Curcio*

La taxonomía de Curcio (1987) consiste en una escala de niveles, en orden creciente, para situar la habilidad de leer e interpretar gráficos estadísticos. Esta clasificación es completada, posteriormente, por otros autores (Friel et al., 2001; Shaughnessy, 2007) y son:

- *Leer los datos.* Consiste en una lectura literal del gráfico, sin llegar a considerar tendencias o interpretar el contexto. Acciones propias de este nivel son leer el título o los ejes del gráfico, leer la frecuencia de valores representados, etc.
- *Leer entre los datos.* En este nivel, además de una lectura literal de los datos, se produce una interpretación de los mismos, pues estudian relaciones y conexiones no explícitas entre los datos, así como características del gráfico: la detección de la moda, la comparación de frecuencias o la realización de cálculos numéricos sencillos a partir de la información representada.
- *Leer más allá de los datos.* En este nivel se interpreta la información más allá de los datos y tendencias representadas, pues se infiere comportamientos no

explícitos de los datos que se materializan al realizar predicciones. Un ejemplo de una acción propia de este nivel sería plantear predicciones sobre cómo podría evolucionar el gráfico considerando su comportamiento.

- *Leer detrás de los datos.* Este nivel se relaciona con una valoración crítica de la información, considerando el método de recolección de los datos y el contexto en el que se presentan, emitiendo juicios y reflexiones sobre la información representada. Se corresponde con este nivel, por ejemplo, cuestionarse sobre si es posible generalizar o sobre la fiabilidad de los datos.

### *La taxonomía de Aoyama*

De forma similar a Curcio y colaboradores (Curcio, 1987; Friel et al., 2001), Aoyama (2007) propone una jerarquía de niveles con la que evaluar la capacidad para interpretar información representada gráficamente, así como la habilidad para valorar la información de forma crítica. Se proponen 5 niveles en orden creciente de profundización y reflexión acerca de la interpretación del gráfico: *idiosincrático, lectura gráfica básica, racional, crítico, hipótesis y modelización*.

Esta taxonomía se inspira en el modelo de pensamiento estadístico elaborado por Wild y Pfannkuch (1999; 2004), donde se concretan los diferentes tipos de pensamiento implicados al elaborar una investigación estadística, como son: el *reconocimiento de la necesidad de los datos*, la *transnumeración*, la *consideración de la variabilidad*, el *razonar con modelos estadísticos* y la *integración de lo estadístico y lo contextual*. En particular, para este trabajo interesa especialmente el proceso de pensamiento de la transnumeración, que se entiende como resultado de tres puntos de vista (Wild y Pfannkuch, 2004): (1) cuando características o elementos de la realidad se pueden vincular a elementos involucrados en la resolución de un problema o en el uso de un modelo estadístico, (2) cuando los datos recolectados en crudo se convierten a representaciones gráficas o estadísticos descriptivos para su posterior análisis y (3) cuando se deben emitir los juicios realizados como consecuencia del análisis de los datos con un vocabulario sencillo que permita comunicar dichos resultados y juicios en el contexto real en el que están involucrados.

En este sentido, Chick (2004) plantea un marco teórico con el que expone una serie de técnicas transnumerativas que involucran cambios en la representación, ya sea a través de una nueva variable o transformando y organizando los datos. Estas técnicas son: *organización, agrupación, selección de un subconjunto, cambio del tipo de variable*,

*cálculo de frecuencias, cálculo de proporciones, graficación o tabulación, cálculo de la tendencia central y cálculo de medidas de dispersión*, entre otras. Especialmente señalamos la técnica *graficación o tabulación*, que consiste en la representación de todos o parte de los datos en formato gráfico o tabular, y *cálculo de la tendencia central*, basado en el uso de medidas de centralización para representar y sintetizar la información. Estas son de mayor interés para nuestro trabajo, haciendo un mayor énfasis en la técnica basada en el cálculo de medidas de centralización, por su relación directa con el cuestionario que fundamenta el estudio de evaluación y más adelante se describe en el Capítulo III.

## Investigaciones sobre transnumeración y lectura gráfica en estudiantes de secundaria

En muchos de los estudios que a continuación se detallan, se propone a los encuestados la lectura e interpretación de un gráfico, de forma crítica, pidiendo realizar predicciones y reflexionar acerca de la información representada. Estas acciones permiten observar tanto el nivel de comprensión gráfica de los participantes como su capacidad para deducir y observar características de la distribución a partir de su representación gráfica, esto es, la transnumeración (Gea et al., 2017). A continuación, presentamos los resultados más destacados de algunas de las investigaciones consultadas, que se han llevado a cabo en los últimos años en relación con el sentido estadístico, la transnumeración y la lectura e interpretación de gráficos estadísticos.

López Mojica et al. (2020) se preocuparon por evaluar la comprensión gráfica de los estudiantes de secundaria cuando se enfrentan a un gráfico estadístico sin detalles y preguntas concretas sobre el mismo. Para analizar las respuestas de los estudiantes, los autores articularon la taxonomía de Curcio (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001) y de Aoyama (2007) y encontraron que, si bien la mayor parte de los estudiantes llegaba a leer el gráfico correctamente e incluso a realizar algunas interpretaciones, en general, no eran capaces de formular hipótesis o realizar predicciones en base a la información presentada (niveles superiores de comprensión gráfica).

Un estudio similar se llevó a cabo con futuros profesores de matemáticas de secundaria, observando dificultades para interpretar conjuntamente la información representada en diferentes registros (tabular y gráfico: histograma, diagrama acumulativo y gráfico de caja), que resumían la esperanza de vida al nacer en 193 países diferentes (Gea et al., 2017). Las respuestas se analizaron en base a la taxonomía de Curcio y colaboradores mostrando que, en general, los futuros profesores llegaron al primer nivel,

*leer los datos*, y al intermedio de *leer entre datos*, pero sólo en el diagrama de caja una mayor cantidad de encuestados logró un nivel superior, *leer más allá de los datos*.

García-Alonso y Bruno (2019), por su parte, analizaron la interpretación gráfica tanto de estudiantes de secundaria como futuros profesores de primaria a través de un cuestionario en el que se proponían dos gráficos estadísticos y una serie de tareas numéricas que requerían leer, interpretar el gráfico y realizar predicciones. Estas respuestas fueron analizadas a través de una adaptación para secundaria (Mooney, 2002) del marco desarrollado por Jones et al. (2001) para evaluar y caracterizar el pensamiento estadístico. Observaron que, a pesar de la importancia que se da al contexto desde la investigación (Alsina, 2011; Behar, 2018; Cobb y Moore, 1997; Wild y Pfannkuch, 1999), los estudiantes no hicieron uso del mismo en la respuesta al cuestionario.

Tal como plantean Cobb y Moore (1997): los datos, en estadística, deben considerarse en su contexto para diferenciarse de simples números (y dicho contexto debe ser cercano y comprensible para los estudiantes). Así, también, lo sugieren Salcedo et al. (2021), quienes elaboran un cuestionario basado en una situación de educación, con el que se pretendía evaluar el nivel de lectura y comprensión de gráficos estadísticos por parte de una muestra de ciudadanos venezolanos. Dicho cuestionario estaba compuesto por cuatro preguntas, de nivel creciente de exigencia, entre las que figuraban preguntas correspondientes al nivel *leer los datos* y al nivel *leer más allá de los datos* (Curcio, 1989 y Friel et al., 2001). La última pregunta proponía un gráfico de barras que requería realizar juicios y valorar la veracidad de la información presentada con el gráfico. Los resultados mostraron que los ciudadanos encuestados, de diferentes niveles de formación académica, no tenían problemas en leer literalmente los gráficos de barras, aunque mostraban dificultades para realizar predicciones o analizar críticamente la información presentada.

Ruiz (2019) utilizó la escala propuesta por Vigo (2016) para evaluar el nivel de comprensión gráfica en la lectura de gráficos estadísticos por parte de estudiantes de primer y tercer curso de secundaria. Se observó, al igual que en el estudio de Salcedo et al. (2021), que los estudiantes eran capaces de leer e identificar correctamente los datos representados, aunque tenían mayor dificultad para obtener conclusiones, predecir tendencias y valorar crítica y reflexivamente la información. Esta dificultad para realizar una lectura gráfica crítica se observa también en el estudio realizado por Garzón-Guerrero y Jiménez (2021), donde se propone a futuros profesores de secundaria un cuestionario formado por diferentes tipos de gráficos, para su valoración crítica.

Por su parte, Pallauta et al. (2021) además de evaluar el nivel de comprensión gráfica de un grupo de estudiantes de secundaria, analizaron su capacidad para recolectar en una tabla la información presentada en un pictograma y un gráfico de barras. Los resultados mostraron que, a pesar de haber trabajado los pictogramas desde edades tempranas, esto resultó complejo para algunos de los encuestados, coincidiendo con las dificultades observadas en un grupo de primaria (Díaz-Levicoy, 2018).

López y Vigo (2018) también se preocuparon por observar los procesos de transnumeración llevados a cabo, en este caso, por profesores de matemáticas en un nivel de secundaria. Analizaron los resultados desde los fundamentos teóricos de Wild y Pfannkuch (1999). Se propuso una actividad que consistía en la comparación de dos distribuciones de datos, para lo que los encuestados utilizaron un diagrama de puntos y calcularon algunas medidas de centralización. Esto permitió valorar la naturalidad con la que se produce la transnumeración, así como la importancia de esta en la resolución de problemas estadísticos, considerando las diferentes representaciones (gráficas y a través de medidas de centralización) como conjunto y no de forma individual. Estrella y Olfos (2015), por otro lado, observaron que desde los primeros niveles educativos (grado 3 en la educación chilena, 3° de primaria) los estudiantes tratan de organizar información estadística en listas, pseudotablas o tablas a partir de información dada gráficamente, incluso sin conocer explícitamente aún el concepto de tabla de frecuencias.

Más recientemente, Molina-Portillo et al. (2023) evaluaron diferentes componentes de la alfabetización estadística (Gal, 2002) en futuros profesores de Educación Primaria a través de un cuestionario formado por gráficos estadísticos extraídos de medios de comunicación. Se pedía a los encuestados representar la información utilizando una tabla, un gráfico que considerasen adecuado y otra forma diferente de analizar e interpretar la información. Los estudiantes mostraron tener más dificultades para pasar a otro tipo de gráfico o a otra forma de representar y analizar la información, evidenciando limitaciones en el uso de medidas de centralización.

En definitiva, la investigación consultada muestra que, por lo general, no existen demasiadas dificultades para leer directamente los datos de un gráfico estadístico e incluso para interpretar la información presente en el mismo. Sin embargo, resulta mucho más complejo realizar una interpretación crítica y de forma reflexiva en base al contexto de los datos, de las tendencias que presentan en su distribución y para realizar predicciones (Garzón-Guerrero y Jiménez, 2021; Gea et al., 2017; López Mojica et al., 2020; Ruiz, 2019; Salcedo et al., 2021). Por otro lado, la organización y recogida de datos

en formato tabular y su traducción a otros formatos o a través de otros objetos (como las medidas de centralización) resultan, generalmente, más complejas (Estrella y Olfos, 2015; Molina-Portillo, 2023), lo que constituye una componente fundamental del sentido estocástico, tal como se evidencia en el currículo español para la etapa de secundaria (MEFP, 2022). Consecuentemente, la educación estadística debe velar por el desarrollo de competencias que permitan una lectura correcta de los gráficos estadísticos, promoviendo la adquisición de habilidades y estrategias que permitan realizar conversiones entre diversos formatos y contribuyendo a desarrollar la capacidad para extraer y analizar información críticamente y de forma apropiada.

## Investigaciones sobre medidas de centralización en estudiantes de secundaria

Han sido varios los autores que se han preocupado por analizar la comprensión de los estudiantes de secundaria de la idea de promedio y de las medidas de tendencia central.

Watson y Moritz llevaron a cabo un estudio longitudinal con estudiantes australianos desde grado 3 (tercero de primaria) hasta grado 9 (3ºESO) en el que evaluaron el desarrollo de la idea de promedio en estudiantes a lo largo de los años, no solo como consecuencia de su formación académica, sino también como consecuencia de sus vivencias y experiencias personales (Watson y Moritz, 2000). Realizaron una entrevista inicial y otra años después, en la que preguntaban a los participantes acerca de cómo entendían ciertas situaciones cotidianas en las que se hablaba de promedio en contextos cercanos como las horas frente a la televisión o el número de hijos de una familia. Observaron que, con el paso de los años, los estudiantes mostraban un mejor aprendizaje del concepto de promedio. Asimismo, parte de los encuestados hablaron del centro (mediana) o de la mayoría (moda) al analizar una situación en la que intervenía un promedio cualquiera, mostrando conocer estas ideas y no limitarse al uso exclusivo de la media. Los autores insisten en la necesidad de enseñar a comprender la importancia de utilizar medidas que resuman la información de un conjunto de datos, cómo obtener estas medidas, cómo se relacionan y cómo se utilizan para comparar conjuntos de datos.

Molero (2017) estudió la forma en que comprendían el concepto de media aritmética los estudiantes de secundaria. Utilizó un cuestionario en el que se pedía razonar en situaciones donde estaba involucrada la media, y se observó que los estudiantes mostraban dificultades con la definición, los algoritmos y la detección de los campos de problemas de la media. Del mismo modo, se detectaron dificultades en los estudiantes al

comparar dos distribuciones de datos, al no hacer uso de la media ni ninguna otra medida para ello, limitándose a comparar dichas distribuciones de forma cualitativa o particular.

La mayoría de estas dificultades en torno a las medidas de centralización ya habían sido observadas por Cai (1995), quien propuso a 250 estudiantes de sexto grado (sexto de primaria) preguntas sobre la media y los algoritmos asociados a esta medida. Un 90% de los encuestados demostró dominar el algoritmo para calcular la media de una serie de datos dados, pero sólo la mitad mostró tener una comprensión conceptual adecuada del concepto de media. Así mismo, los encuestados mostraron dificultades para resolver problemas en los que debía revertirse dicho algoritmo. Tanto Cai (1995) como Watson y Moritz (2000) insisten en la necesidad de enseñar el concepto de promedio de forma intuitiva en un comienzo, avanzando poco a poco hacia la definición formal y, finalmente, llegando al algoritmo de cálculo.

En su tesis, Cobo (2003) observa que, a diferencia de lo que ocurre en otras investigaciones (Cai, 1995; Watson y Moritz, 2000), los estudiantes no muestran dificultades para invertir el algoritmo de la media en problemas con pocos datos y donde los cálculos son sencillos. Sin embargo, Cobo observa dificultades a la hora de realizar medias ponderadas, independientemente de la instrucción recibida. Por otra parte, se advierten dificultades y errores en el reconocimiento de los significados de las medidas de centralización: por ejemplo, se confunde la mayoría con la mediana o con la media. Mayén (2009) estudió, al igual que Cobo (2003), la comprensión de las medidas de centralización por parte de estudiantes de secundaria y bachillerato de México. Mayén prestó mayor atención a los ítems relacionados con la mediana, pues observó bastantes dificultades en torno a este concepto. Destacan la confusión entre las medidas de centralización, incluso calculándolas correctamente (aunque no fuese la que pedía la tarea) o el cálculo de la mediana de una serie de datos sin haberlos ordenado previamente. En general, tanto Mayén (2009) como Cobo (2003) detectaron similares y variados conflictos semióticos en relación con las medidas de centralización. Asimismo, advirtieron cierta dificultad en torno a la interpretación de gráficos estadísticos, dada la naturaleza de los cuestionarios utilizados en sus investigaciones.

En definitiva, se muestra necesario analizar la forma en que los estudiantes razonan acerca de las medidas de centralización, más aún cuando la información viene representada en formato gráfico, como ocurre de forma cotidiana, puesto que la literatura nos dice que existen dificultades en torno a la interpretación de la información desde esta representación.

## Capítulo III: Estudio de evaluación

En este capítulo se presenta el estudio de evaluación del sentido estocástico de un grupo de estudiantes de 4ºESO sobre la interpretación de las medidas de centralización en gráficos estadísticos. Los datos se obtienen mediante un cuestionario cuyas tareas se han empleado en investigaciones previas. En las siguientes secciones se describen los objetivos e hipótesis del estudio, el método empleado y los resultados obtenidos, finalizando, con una reflexión final sobre los resultados de la evaluación realizada.

### Objetivos e hipótesis del estudio de evaluación

Con el estudio de evaluación se responde al objetivo general de este trabajo, como es: “O1. Realizar un estudio de evaluación del sentido estadístico de un grupo de estudiantes de 4ºESO mediante un cuestionario formado por tareas que movilizan la interpretación de las medidas de centralización a través de la lectura de gráficos.”. Su interés se justifica por los resultados de investigaciones previas, donde se muestran limitaciones de los estudiantes de secundaria al interpretar gráficos estadísticos y medidas de centralización. Además, se trata de replicar parcialmente estudios previos, entre otros, el de Cobo (2003), al haberse sucedido diferentes cambios curriculares en el sistema educativo español que, posiblemente, pudieran haber incidido en la mejora del sentido estocástico de los estudiantes. Por tanto, de modo más específico, con este estudio se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

O1.1. Elaborar un cuestionario dirigido a estudiantes de secundaria que permita evaluar su sentido estadístico al interpretar las medidas de centralización a través de la lectura de gráficos estadísticos, según tareas propuestas en la investigación previa, específicamente diseñadas para evaluar dichas competencias.

O1.2. Analizar las respuestas de un grupo de estudiantes de 4ºESO al cuestionario previamente elaborado para tal efecto.

En relación a los objetivos específicos del estudio de evaluación, se establece una única hipótesis previa en cuanto a que: los resultados del estudio coincidirán, a grandes rasgos, con aquellos evidenciados por Cobo (2003) y Mayén (2009) en sus respectivas investigaciones, confirmando la complejidad asociada a los conceptos involucrados en las tareas implicadas en estudios. Esta hipótesis, incluso, podría interpretarse en términos

curriculares, puesto que con casi 20 años de diferencia con el estudio de Cobo (2003), nos encontramos en una situación similar en cuanto al desarrollo del sentido estadístico de los estudiantes en secundaria.

## Método

El estudio de evaluación es esencialmente cualitativo, en la medida que los datos para el análisis se recogen mediante un cuestionario de respuesta abierta, especialmente diseñado para el estudio, cuyas respuestas se analizan tratando de entender toda su riqueza y particularidades en cuanto al fenómeno que se estudia (León y Montero, 2015).

La información que aportan los datos se obtiene mediante una metodología de análisis cualitativa, fundamentada en el análisis de contenido (Cook y Reichardt, 2000). De acuerdo a este método, las respuestas al cuestionario se organizan en categorías (Neuendorf, 2018), algunas establecidas por la literatura previa y otras nuevas resultado de las inferencias realizadas por el autor de este trabajo en base a su conocimiento y el de sus directores, mediante un proceso cíclico y sistemático, en continua revisión para asegurar la fiabilidad de la codificación. Es decir, se realizan sucesivas revisiones conjuntas tanto por el autor como por los directores y demás miembros del equipo de investigación, en caso necesario, hasta llegar al consenso en los casos discordantes. El interés en la clasificación de las respuestas radica en su grado de corrección y tipo de elementos utilizados en las justificaciones de sus respuestas.

Finalmente, las categorías se describen y ejemplifican para comprender mejor los resultados obtenidos en el estudio, y se muestran tablas de resumen de categorías mediante la frecuencia de cada una, para relacionar los resultados con la literatura previa e interpretar mejor los resultados del estudio en su conjunto.

### *Descripción de la muestra*

La muestra participante en el estudio estuvo formada por 39 estudiantes (de entre 15 y 16 años, además de únicamente un estudiante con 17 años) de 4º de ESO de un instituto público de la Comunidad Autónoma de Andalucía. En el centro se imparten los cuatro cursos de ESO y los dos cursos de Bachillerato en sus diferentes modalidades. La muestra original estaba compuesta por 11 estudiantes de un grupo y 29 estudiantes de otro de cuarto curso, aunque uno de los estudiantes se ausentó y no pudo participar en el estudio (de ahí que finalmente fueran 39). El cuestionario fue administrado por los dos

docentes a cargo de ambos grupos durante la hora de matemáticas contemplada en el horario y se realizó de forma individual y autónoma por parte de cada estudiante.

### ***El cuestionario***

El cuestionario diseñado para el estudio se conforma de cuatro tareas, adaptadas de la investigación de Cobo (2003) y Mayén (2009), y se muestra en el Anexo II. Para la selección de los ítems en dichas investigaciones se atiende a dos criterios de selección: que se pida interpretar las medidas de centralización, así como leer e interpretar gráficos estadísticos. La validez de contenido y fiabilidad del cuestionario del presente estudio se justifica desde la literatura previa, por tratarse de ítems utilizados en los estudios de Cobo (2003) y Mayén (2009).

Debido a la limitada extensión de esta memoria, se decidió informar solo de los resultados de dos tareas del cuestionario, que se muestran en la Figura 1. La razón de escoger estas dos tareas es porque se encuentran vinculadas por el mismo gráfico y, conjuntamente, ofrecen una perspectiva del sentido estadístico de los estudiantes sobre la interpretación de las medidas de centralización en su representación gráfica. El resto de las tareas del cuestionario se basan en gráficos diferentes.

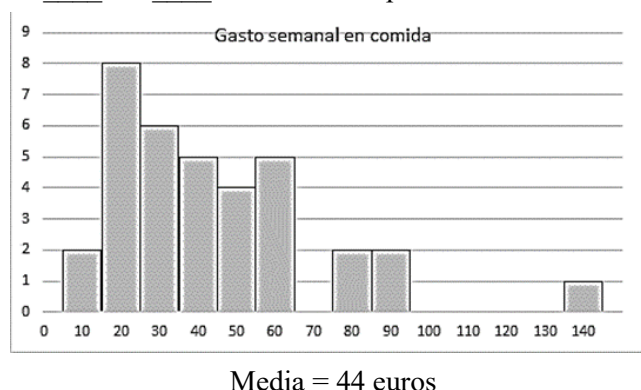
En las tareas del cuestionario se evalúan los campos de problemas PM3 y PM5, descritos en el Capítulo I. La Tarea 4 es la única en la que se aborda el campo de problemas PM5, en la que se espera que los alumnos calculen medidas de centralización para comparar los datos como conjunto y no de forma particular. En las Tareas 1, 2 y 3 se evalúa la comprensión de las medidas de centralización ante la representación gráfica de distribuciones asimétricas, donde la mediana es la medida más adecuada (mejor que la elección de la media) como representante de los datos. En este sentido, se espera que los estudiantes distingan las medidas de centralización, qué representa cada una y cuál es la más adecuada. En relación con la mediana, en el cuestionario de evaluación encontramos tareas relacionadas con el campo de problemas PME1.

Cada tarea del cuestionario es una adaptación de aquellos ítems seleccionados de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009) para el estudio, puesto que, a cada ítem seleccionado de dichas investigaciones se añaden cuatro soluciones diferentes de estudiantes por cada tarea. Estas soluciones se han seleccionado de las respuestas que se muestran en los análisis de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009), mezclando tanto respuestas correctas como incorrectas. Por tanto, además de la resolución que aporta cada participante del estudio, se pide que responda si están de

acuerdo o en desacuerdo las soluciones de cuatro estudiantes hipotéticos. Cabe decir, que ninguno de los estudiantes aporta ayudas a los estudiantes con los que no están de acuerdo en sus soluciones. Consideramos que no es una tarea habitual para ellos e indicar sus errores, en caso de desacuerdo, es suficiente para ellos.

**Tarea 1.** Pedro piensa que en el siguiente gráfico la mediana te dice que una mayoría de familias gasta alrededor de 40 euros cada semana en comida.

¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta.



#### Respuestas de estudiantes

- E1. Sí, porque 40 es la mediana.
- E2. No, sería 75 porque la mediana es el valor medio de la gráfica.
- E3. Sí, porque la media casi siempre coincide o está cerca del valor de la mediana.
- E4. No, porque esto lo dice la moda, que está en 20.

**Tarea 2.** Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 140 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta

#### Respuestas de estudiantes

- E1. No, porque es un dato como los otros y hay que incluirlo. Sólo afectaría a la media.
- E2. Sí, ya que está demasiado alejado de los demás valores.
- E3. No, porque puede influir mucho a la hora de calcular la media y la mediana.
- E4. No, porque todos los datos cuentan para poder obtener el resultado correcto, pues el alumno que gasta esa cantidad también cuenta.

Figura 1. Tareas 1 y 2 del cuestionario

## Análisis y resultados en el ítem 1

En la Tarea 1 se presenta a los estudiantes un histograma con el gasto semanal en comida de varias familias, así como el valor de la media (44€). Seguidamente, se pregunta si están de acuerdo con la afirmación de Pedro acerca de que la mediana informa del gasto de la mayoría de las familias. Por tanto, es necesario distinguir entre las medidas de centralización, así como ser capaz de calcular la moda a partir de la representación gráfica de los datos. Aunque no se necesita calcular la mediana, cuyo valor se da en el enunciado,

se debe tener en cuenta el número de datos que tenemos (35 familias encuestadas) y considerar el dato que, de forma ordenada, deja la mitad por encima y por debajo.

Se evalúa la comprensión del estudiante de las medidas de centralización en cuanto a su representatividad en distribuciones asimétricas, en presencia de datos atípicos (Figura 1). La respuesta a la tarea se considera correcta cuando el estudiante manifiesta desacuerdo con la afirmación de Pedro, puesto que en su argumento confunde la moda con la mediana; en otro caso, la respuesta se clasifica como incorrecta (muestran acuerdo con la afirmación de Pedro) o en blanco (no se responde a la pregunta). Las justificaciones a dichas respuestas se han clasificado atendiendo a los elementos que escogen para argumentar su decisión, sobre el acuerdo o desacuerdo con la afirmación de Pedro, y se describen a continuación, acompañadas de ejemplos para clarificar mejor cada una.

*Define la moda.* Encontramos respuestas donde el estudiante argumenta su decisión definiendo el concepto de moda o indicando que el gasto de la mayoría de las familias corresponde al valor 20€, como se muestra en el siguiente ejemplo. Todas las respuestas que utilizan este argumento están en desacuerdo con la afirmación de Pedro, por tanto, son respuestas correctas.

A12: “Yo no estoy de acuerdo, ya que la mayoría de las familias se gastan 20€ semanales en comida.” (respuesta y justificación correcta a la Tarea 1).

*Define la mediana.* El estudiante define el concepto de mediana para justificar su decisión. Este tipo de justificación se ha empleado siempre para apoyar la afirmación de Pedro, al contrario que en la categoría de justificaciones basadas en la definición de la moda, lo que evidencia que los estudiantes tienen dificultad al comprender el significado de la mediana al interpretar gráficos estadísticos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

A17: “Es la mediana porque a partir de 40 euros hay aproximadamente el mismo número de familias que por debajo de 40.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

*Confunde medidas.* Los estudiantes justifican sus decisiones definiendo al menos dos medidas de tendencia central, pero con errores. No se encuentran respuestas a la tarea que confundan la moda y la media, pero encontramos justificaciones donde se confunde la mediana con la moda (por ejemplo, el estudiante A29) o con la media (por ejemplo, el estudiante A3).

A29: “Porque hay mayoría que gastan menos de 40” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

A3: “Porque si te fijas la media de personas está en 40 euros semanales.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

*Cálculo gráfico de medidas estadísticas.* Los estudiantes, generalmente, realizan cálculos para justificar su desacuerdo ante la afirmación de Pedro. Solo el estudiante A27 calcula

la media explícitamente en su respuesta, siguiendo un algoritmo con errores al tratar de hacer una media ponderada (Figura 2); mientras que el resto basa sus cálculos en la mediana o valor medio en los ejes del gráfico. Por ejemplo, el estudiante A39 calcula la media del rango de la variable (eje X) o el estudiante, A24, quien calcula la mediana sin considerar la frecuencia de cada modalidad de la variable (a ambos lados del valor 50 encontramos 4 modalidades de la variable). Otro ejemplo es el estudiante, A22, quien calcula la mediana a partir del rango de frecuencias de la variable (eje Y).

Tarea 1: La media sería de 60 €

$$\frac{20 + 160 + 180}{18} = 22,5$$

$$\frac{200 + 300 + 160 + 180 + 140}{10} = 98$$

$$\frac{98 + 22,5}{2} = 60,25$$

Figura 2. Cálculo de la media del estudiante A27 en la Tarea 1.

A39: “No, porque la mediana es 70.” (respuesta correcta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

A24: “La mediana creo que es 50.” (respuesta correcta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

A22: “No, la mediana sería de unos 45€ semanales en comida, pues si los números del eje Y son 9, la mediana se encontraría en el 4’5, que en este caso coincide con el valor 45 del eje X”. (respuesta correcta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

*Proximidad de las medidas de centralización.* El estudiante basa su justificación en la representatividad de las medidas centralización en la distribución de los datos, pero comprende mal dicha propiedad. Las respuestas en esta categoría apoyan la afirmación de Pedro, como muestra el siguiente ejemplo, al indicar que siempre son coincidentes:

A28: “Estoy de acuerdo ya que la mediana, la moda y la media casi siempre coinciden o tienen cierta similitud a la hora de ser interpretadas numéricamente” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

*Otras respuestas.* En otras justificaciones encontramos dos estudiantes que indican el total de personas encuestadas (A5), o reescriben el enunciado en su justificación (A25):

A5: “La mediana sí es 40, porque es la suma del nº de encuestados.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

A25: “La mediana de euros gastados a la semana en comida si suele estar sobre más o menos de 40€ semanales pero se suele mantener más o menos esa cantidad todas las semanas.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 1).

En la Tabla 3.1 se observa que solo un tercio de los estudiantes (33,3%) responde correctamente a la tarea, aunque cinco de ellos basan su justificación en cálculos erróneos y dos no justifican su respuesta; por tanto, las respuestas correctas y correctamente justificadas se reducen al 15,4% de estudiantes en la muestra. Todos ellos han basado su justificación en la definición correcta de la moda. Nuestros resultados son peores que los de Cobo (2003) y mejores que los de Mayén (2009) al responder a la tarea, pues las respuestas correctas en dichas investigaciones son del 34,5% y 22%, respectivamente.

En cuanto a las respuestas incorrectas es habitual encontrar la confusión entre la mediana y la media (12,8%), así como no justificar la respuesta (20,5%). Nuestros resultados son peores que los de Cobo (2003), en relación con la definición de la mediana, pues todas las respuestas justificadas de este modo han resultado incorrectas en nuestro estudio, mientras que Cobo encontró respuestas tanto correctas como incorrectas de estudiantes del mismo nivel educativo que los de nuestro estudio.

Por otra parte, no justificar la respuesta ha resultado la categoría más numerosa en nuestro estudio (33,3%), pero merece destacar que solo 3 estudiantes no respondieron a la tarea, mientras que la no respuesta a la tarea ascendía al 35,2% de los estudiantes de secundaria en el estudio de Mayén (2009). Esto es algo positivo, en tanto que observamos compromiso de los estudiantes por responder a la tarea, aunque el número de respuestas no justificadas sigue siendo alarmante y refleja la dificultad que existe para argumentar, pudiendo ser el efecto de un limitado nivel de lectura gráfica del estudiante, puesto que la tarea se enmarca en un nivel 2, según la taxonomía de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al, 2001).

Por otro lado, un 7,7% de los estudiantes confunde mediana y moda (existe otro 12,8% que confunde media y mediana) y un 5,1% considera erróneamente la propiedad de proximidad en las medidas de centralización, algo que también detectó Cobo en un 36% y 12%, respectivamente. Mayén agrupó estas categorías en una única categoría denominada *Confusión entre media, moda y mediana*, con un 8,9% de respuestas a la Tarea 1 en esta categoría.

Tabla 3.1. Frecuencia (%) de respuestas a la Tarea 1, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                                      |                                                     | Desacuerdo<br>(Correcta) | Acuerdo<br>(Incorrecta) | NC     | Total    |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------|--------|----------|
| Define moda                                                           |                                                     | 6 (15,4)                 |                         |        | 6(15,4)  |
| Define mediana                                                        |                                                     |                          | 3(7,7)                  |        | 3(7,7)   |
| Confunde medidas                                                      | Moda y Mediana                                      |                          | 3(7,7)                  |        | 3(7,7)   |
|                                                                       | Mediana y Media                                     |                          | 5(12,8)                 |        | 5(12,8)  |
| Cálculo gráfico de medidas                                            | Calcula media o mediana en ejes (X o Y)             | 4(10,3)                  |                         |        | 4(10,3)  |
|                                                                       | Calcula media o mediana en la distribución de datos | 1(2,6)                   |                         |        | 1(2,6)   |
| Medidas de centralización próximas o coincidentes en una distribución |                                                     |                          | 2(5,1)                  |        | 2(5,1)   |
| Otras justificaciones                                                 |                                                     |                          | 2(5,1)                  |        | 2(5,1)   |
| No justifica                                                          |                                                     | 2(5,1)                   | 8(20,5)                 | 3(7,7) | 13(33,3) |
| Total                                                                 |                                                     | 13(33,3)                 | 23(58,9)                | 3(7,7) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

En cuanto a la segunda parte de la Tarea 1, donde se pide identificar soluciones correctas e incorrectas dadas por cuatro estudiantes (E1, E2, E3 y E4), se espera que muestren desacuerdo con los estudiantes E1, E2 y E3 y acuerdo con el estudiante E4.

La respuesta de E1 es incorrecta, porque la mediana es 40, pero no reconoce que “la mayoría” hace referencia a la moda y no a la mediana. Por su parte, E2 confunde la mediana como valor medio de entre todos los datos (que deja la mitad de ellos por debajo y la mitad por encima), con una aproximación al valor medio del rango de la variable representada en la gráfica. Por último, E3 no identifica que la mediana no se refiere a la mayoría, y justifica su respuesta en la proximidad de la media (44) y la mediana (40), sin tener en cuenta que en distribuciones asimétricas la media y la mediana no tienen por qué coincidir ni estar próximas.

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E1 no encontramos justificaciones basadas en la definición de la moda, y encontramos una subdivisión de la categoría definida anteriormente sobre la propiedad de proximidad de las medidas de centralización, que se describe a continuación:

*Proximidad de las medidas de centralización: las medidas no se relacionan.* El estudiante argumenta que las medidas de centralización no tienen nada que ver o no se relacionan:

A9: “Es cierto, pero no es la solución del ejercicio.” (interpretación incorrecta de la respuesta de E1).

Tabla 3.2. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E1 en la Tarea 1, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                            |                                                     | Desacuerdo<br>(Correcta) | Acuerdo<br>(Incorrecta) | NC      | Total    |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------|---------|----------|
| Define mediana                              |                                                     |                          | 2(5,1)                  |         | 2(5,1)   |
| Confunde medidas                            | Moda y Mediana                                      |                          | 1(2,6)                  |         | 1(2,6)   |
|                                             | Mediana y Media                                     | 1(2,6)                   | 1(2,6)                  |         | 2(5,1)   |
| Cálculo gráfico de medidas                  | Calcula media o mediana en ejes (X o Y)             | 5(12,8)                  |                         |         | 5(12,8)  |
|                                             | Calcula media o mediana en la distribución de datos | 2(5,1)                   |                         |         | 2(5,1)   |
| Proximidad de las medidas de centralización | Todas próximas o coincidentes siempre               |                          | 1(2,6)                  |         | 1(2,6)   |
|                                             | No se relacionan                                    |                          | 1(2,6)                  |         | 1(2,6)   |
| Otras justificaciones                       |                                                     | 3(7,7)                   |                         |         | 3(7,7)   |
| No justifica                                |                                                     | 1(2,6)                   | 15(38,5)                | 6(15,4) | 22(56,4) |
| Total                                       |                                                     | 12(30,8)                 | 21(53,8)                | 6(15,4) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

En la Tabla 3.2 se observa que más de la mitad de los estudiantes (56,4%) no justifica su respuesta, la mayoría por estar de acuerdo con E1 (38,5%), lo que pensamos que lleva al estudiante a no tener necesidad de dar más razones que las que el propio E1 dio en su afirmación. En cualquier caso, el porcentaje de estudiantes que no respondieron (15,4%) duplica a los que no respondieron a la Tarea 1, por lo que consideramos que resulta mucho más complejo valorar la respuesta de un compañero que dar la suya propia. Además, merece destacar que todos los estudiantes que mostraron desacuerdo con E1, respondiendo correctamente, justificaron incorrectamente su respuesta y solo uno la dejó sin justificar. Todo esto evidencia limitaciones en el sentido estadístico de los estudiantes de la muestra en torno a las medidas de centralización en su interpretación gráfica, al no ser críticos con los enunciados que se les pide valorar.

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E2 no encontramos justificaciones basadas en la definición de la moda, y la única justificación basada en la definición de la mediana es considerada correcta, aunque no tenga una estructura y lenguaje formal adecuado:

*Define mediana.* El estudiante A33 define la mediana para argumentar su desacuerdo con la respuesta de E2.

A33: “La mediana es la mitad hacia arriba y hacia abajo no la media total” (respuesta y justificación correcta a la respuesta de E1).

Aparece una nueva categoría de respuesta en la confusión de medidas estadísticas: *Confunde medidas: confunde moda y media.* Encontramos un estudiante en desacuerdo con E2 e insiste en que el valor medio es 20.

A23: “No estoy de acuerdo, ya que, pienso que el valor medio de la gráfica sería 20.”

También, aparecen dos nuevas categorías de respuesta en cuanto al cálculo gráfico de medidas de centralización, puesto que tres estudiantes identifican el error de E2 al confundir el valor medio del rango de la variable con la mediana, mientras que tres estudiantes reafirman el valor del enunciado.

*Cálculo gráfico de medidas: distingue mediana y valor medio.* Cuando el estudiante argumenta su decisión, como A10, al distinguir la mediana del valor medio del rango de la variable, y, en consecuencia, contestando correctamente.

A10: “La mediana no es el valor medio de la gráfica.” (interpretación y justificación correcta a la respuesta de E2).

*Cálculo gráfico de medidas: reafirma el valor de la mediana.* Cuando el estudiante argumenta su decisión, como A34, reafirmando el valor de la mediana del enunciado.

A34: “No estoy de acuerdo porque se ve claramente que la mediana es 40.”

Por último, aparece una nueva categoría al interpretar la afirmación de E2 al centrar la atención en la frecuencia de los valores de la variable en la distribución:

*Valores de la variable con nula o baja frecuencia.* Cuando los estudiantes justifican sus decisiones en la frecuencia de un valor, como posible mediana, generalmente, por su baja frecuencia, por ejemplo:

A13: “No lo creo. Porque 75 es un valor bajo para poder ser la mediana. Con referirme a bajo es, al número de familias que lo gasta.”

En la Tabla 3.3 se observa el incremento en la no respuesta a la valoración de la afirmación de E2, con un 20,5%, aunque, también, el porcentaje de respuestas correctas asciende, en contra de lo que sucedía en las anteriores preguntas. Ante esta situación cabe destacar que del 64,1% de estudiantes que muestran desacuerdo con E2 solo un 15,4% justifica correctamente su respuesta. Una mayoría (17,9%) se basa en el cálculo de medidas de manera incorrecta, confunde medidas de centralización (10,3%), se centra en la frecuencia de los valores de la variable en la distribución (10,3%), aporta otras justificaciones o muestra su desacuerdo sin justificar su respuesta (solo un estudiante). En cualquier caso, el número de estudiantes que no justifica a esta valoración de respuesta es menor que en los anteriores casos. Es posible que este aumento de justificaciones se deba al alto porcentaje de encuestados en desacuerdo con E2.

Tabla 3.3. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E2 en la Tarea 1, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                  |                                                          | Desacuerdo<br>(correcta) | Acuerdo<br>(incorrecta) | NC      | Total    |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------|---------|----------|
| Define mediana                                    |                                                          | 1(2,6)                   |                         |         | 1(2,6)   |
| Confunde medidas                                  | Moda y Media                                             | 1(2,6)                   |                         |         | 1(2,6)   |
|                                                   | Moda y Mediana                                           | 1(2,6)                   |                         |         | 1(2,6)   |
|                                                   | Mediana y Media                                          | 2(5,1)                   | 1(2,6)                  |         | 3(7,7)   |
| Cálculo gráfico de medidas                        | Calcula media o mediana en ejes (X o Y)                  | 2(5,1)                   | 3(7,7)                  |         | 5(12,8)  |
|                                                   | Distingue mediana y valor medio del rango de la variable | 5(12,8)                  |                         |         | 5(12,8)  |
|                                                   | Reafirma como mediana el valor del enunciado             | 3(7,7)                   |                         |         | 3(7,7)   |
|                                                   | Calcula media o mediana en la distribución de datos      | 2(5,1)                   |                         |         | 2(5,1)   |
| Valores de la variable con nula o baja frecuencia |                                                          | 4(10,3)                  |                         |         | 4(10,3)  |
| Otras justificaciones                             |                                                          | 3(7,7)                   |                         |         | 3(7,7)   |
| No justifica                                      |                                                          | 1(2,6)                   | 2(5,1)                  | 8(20,5) | 11(28,2) |
| Total                                             |                                                          | 25(64,1)                 | 6(15,4)                 | 8(20,5) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E3 no encontramos muchas de las justificaciones descritas anteriormente, y la única justificación basada en el cálculo de la media es correcta al mostrar que en distribuciones asimétricas las medidas de centralización no coinciden, a diferencia de las anteriores categorías donde se ofrecían justificaciones incorrectas:

A21: “La media es 61, no estoy de acuerdo.” (interpretación correcta de la respuesta de E3).

Por último, se destaca una nueva categoría de justificación en la que se evidencia la comprensión de la importancia de considerar la forma de la distribución para interpretar la proximidad de las medidas de centralización:

*Proximidad de las medidas de centralización: solo en distribuciones simétricas.* En las interpretaciones de la respuesta de E3 aparece un argumento hasta ahora no manifestado, sobre la propiedad de no proximidad/coincidencia de las medidas de centralización en distribuciones asimétricas. Todas las respuestas que se basan en esta categoría están en desacuerdo con E3, por ejemplo la de A38:

A38: “La media no siempre tiene que estar cerca de la mediana, puede ser mucho más o mucho menos.” (respuesta y justificación correcta a la respuesta de E3).

Tabla 3.4 Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E3 en la Tarea 1, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                    |                                          | Desacuerdo<br>(correcta) | Acuerdo<br>(incorrecta) | NC       | Total    |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------|-------------------------|----------|----------|
| Calcula media o mediana en la distribución de datos |                                          | 1(2,6)                   |                         |          | 1(2,6)   |
| Proximidad de las medidas de centralización         | Próximas o coincidentes siempre          |                          | 10(25,6)                |          | 10(25,6) |
|                                                     | No se relacionan                         | 2(5,1)                   | 1(2,6)                  |          | 3(7,7)   |
|                                                     | Diferentes en distribuciones asimétricas | 7(17,9)                  |                         |          | 7(17,9)  |
| No justifica                                        |                                          | 2(5,1)                   | 6(15,4)                 | 10(25,6) | 18(46,2) |
| Total                                               |                                          | 12(30,8)                 | 17(43,6)                | 10(25,6) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

Se observa que la Tabla 3.4 es más reducida que las anteriores, porque las justificaciones que aportan los estudiantes son más similares, aunque se encuentran nuevas categorías. Cabe destacar que más de la mitad de los estudiantes (51,2%) basa su decisión en la proximidad de las medidas de centralización, siendo correctas sus justificaciones solo en un 17,9%. En cambio, un estudiante calcula la media de los datos. Lo preocupante en estas interpretaciones es que casi la mitad de los estudiantes no justifica, así como que cerca de la mitad de los que sí lo hacen erran en la interpretación

de la representatividad de las medidas o en la propiedad de proximidad entre ellas en distribuciones simétricas.

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E4 no encontramos nuevas justificaciones que no hubieran sido descritas anteriormente. Los resultados se muestran en la Tabla 3.5, donde cabe destacar que cinco estudiantes muestran su desacuerdo con E4 y basan su justificación en la definición de la moda, que justamente es en lo que se basa el razonamiento de E4, mientras que dos de ellos definen correctamente la moda, pero muestran desacuerdo con E4:

A31: “No estoy de acuerdo porque la moda es el dato que más se repite.” (respuesta incorrecta y justificación correcta a la respuesta de E4).

Se observa un bajo porcentaje de estudiantes de acuerdo con E4 (20,6%) y todos los que justifican su acuerdo lo basan en su definición. La principal dificultad que se observa radica en la confusión entre medidas de centralización (33,3%), mientras que un 15,4% considera que las medidas nunca se relacionan o siempre son coincidentes. De esta manera, se evidencian serias dificultades para reconocer las medidas como representantes de la misma distribución de datos.

Tabla 3.5. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E4 en la Tarea 1, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                            |                                       | Acuerdo<br>(correcta) | Desacuerdo<br>(incorrecta) | NC      | Total    |
|---------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|----------------------------|---------|----------|
| Define moda                                 | Correctamente                         | 4(10,3)               | 2(5,1)                     |         | 6(15,4)  |
|                                             | Incorrectamente                       |                       | 3(7,7)                     |         | 3(7,7)   |
| Confunde medidas                            | Moda y Media                          |                       | 7(17,9)                    | 1(2,6)  | 8(20,5)  |
|                                             | Moda y Mediana                        |                       | 5(12,8)                    |         | 5(12,8)  |
| Proximidad de las medidas de centralización | Todas próximas o coincidentes siempre |                       | 1(2,6)                     |         | 1(2,6)   |
|                                             | No se relacionan                      |                       | 5(12,8)                    |         | 5(12,8)  |
| No justifica                                |                                       | 4(10,3)               |                            | 7(17,9) | 11(28,2) |
| Total                                       |                                       | 8(20,6)               | 23(58,9)                   | 8(20,5) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

A modo de síntesis, tras el análisis de las respuestas de los estudiantes a la Tarea 1, se pueden considerar diferentes cuestiones. La primera es que, en general, las respuestas correctas se han justificado con la definición de la moda, y, en menor medida, por el cálculo gráfico de medidas o haciendo uso de la propiedad de proximidad de las medidas de centralización en una distribución simétrica.

Donde más respuestas correctas con justificaciones correctas se han registrado ha sido en la interpretación de la respuesta del estudiante E3, seguido de la del estudiante

E2. No obstante, en general, las justificaciones a lo largo de toda la tarea se han mostrado inconsistentes, y cabe destacar el alto porcentaje de estudiantes que no ha justificado sus respuestas. En relación con las respuestas incorrectas, así como con aquellas correctas con justificación incorrecta, los porcentajes, en general, son elevados, y las argumentaciones más frecuentes se relacionan con la propiedad errónea de proximidad de las medidas de centralización en distribuciones simétricas o la confusión de medidas.

En general, los resultados muestran que la interpretación de las medidas de centralización mediante la representación gráfica, la discusión sobre su representatividad en distribuciones asimétricas y su obtención a partir de un gráfico no resultan cuestiones sencillas de responder.

## Análisis y resultados en el ítem 2

En esta tarea se pide a los estudiantes que razonen acerca de la influencia de un valor atípico en la distribución de los datos representados en la gráfica de la Tarea 1 (Figura 1), para decidir si debe eliminarse dicho valor del cálculo de la media, moda y mediana, al estar tan alejado del resto.

Es esencial tener en cuenta que un valor atípico podría tratarse de un dato como cualquier otro, en el sentido de no tener por qué tratarse de un error de medición, pero si bien este valor atípico afecta al cálculo de la media, considerarlo o no apenas influirá en el cálculo de la mediana o la moda, por tratarse de un valor extremo en la distribución de la variable. Considerando que las medidas de centralización son medidas que aportan información acerca de todo el conjunto de los datos, consideramos adecuado no considerar dicho valor particular (140€) en el cálculo de las medidas de centralización. Así, en casos como este, es recomendable tomar la mediana o la moda como representante del conjunto de datos, pues no se ven tan afectadas como la media ante valores extremos, y, consecuentemente, resultan más representativas (especialmente la mediana).

La respuesta a la Tarea 2 se considera correcta cuando el estudiante responde afirmativamente que es adecuado quitar el dato atípico para el análisis de las medidas de centralización. No obstante, se acepta como respuesta parcialmente correcta cuando el estudiante responde estar en desacuerdo con Juana argumentando, que el 140 es un valor válido y coherente y que su inclusión influiría únicamente en el cálculo de la media. Cabe mencionar que ni Mayén (2009) ni Cobo (2003) consideraron esta respuesta como correcta ni parcialmente correcta. Por otro lado, ningún estudiante ha manifestado estar de acuerdo con la afirmación de Juana, todos han contestado que están en desacuerdo, lo

que también permitirá valorar cuántos estudiantes, realmente, justifican su respuesta considerando este dato atípico como cualquier otro, aunque afecte al cálculo de la media.

Las justificaciones de las respuestas de los estudiantes a la Tarea 2 se han categorizado según la justificación dada, como se describe a continuación:

*Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización.* Algunos estudiantes han contestado que el valor 140€ afecta únicamente a la media y no a la moda ni a la mediana, dando una respuesta parcialmente correcta por estar en contra de la propuesta de Juana, pero correcta en cuanto a la justificación que aportan, como muestra la respuesta del estudiante A18. En contraposición, otros estudiantes justifican erróneamente su decisión al indicar que 140€ afectaría además a la mediana (A12) o a todas las medidas (A39). Esto muestra que los estudiantes no reconocen la propiedad de moda y mediana de ser más resistentes a valores atípicos.

A18: “Yo creo que no porque no tiene sentido quitar un dato de la gráfica ya que puede afectar a la media.” (respuesta parcialmente correcta y justificación correcta a la Tarea 2).

A12: “No estoy de acuerdo, porque es un dato que es necesario para poder saber la media y la mediana, pero no hace falta para la moda, porque si hay más valores por debajo de 140€ que puedan hacer comprobar la moda sin necesidad de ese dato, pues no se necesita.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2)

A39: “No estoy de acuerdo, hay que calcular primero la media, mediana y moda.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

*Afecta al cálculo de la media.* Dos estudiantes argumentan que quitar el 140 afectaría al cálculo de la media, siendo ambas respuestas parcialmente correctas por estar en contra de Juana. La principal diferencia entre estas respuestas y las de la categoría previa está en que estos estudiantes hacen referencia explícita al cálculo de la media (su algoritmo). Por ejemplo:

A40: “No, ya que 140 euros sirve para realizar la media y también afecta.” (respuesta parcialmente correcta y justificación correcta a la Tarea 2).

*Todos los datos tienen igual importancia.* Las justificaciones que encontramos en esta categoría son incorrectas, debido a que el estudiante no reconoce la distancia del valor atípico al resto de valores en la distribución, además, no se considera su influencia en el cálculo de las medidas de centralización, como muestran los siguientes ejemplos:

A2: “Porque todos los datos deben incluirse.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

A25: “Es un dato como otro y debe utilizarse” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

*Las medidas representan a todos los datos.* Aunque relacionada con la categoría anterior, en esta tipología de respuestas los estudiantes se centran en la representatividad de las medidas en todo el conjunto de datos de la distribución de la variable. Por tanto, si un dato se quita las medidas ya no son correctas porque no representan al conjunto de todos

los datos. Las respuestas en esta categoría han sido incorrectas. Como ejemplo tenemos:

A31: “No, no se debería de quitar porque en esa gráfica está recogiendo todos los gastos.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

*Una medida precisa requiere todos los datos.* En esta categoría, relacionada con las dos anteriores, encontramos matices que la diferencian porque el estudiante enfatiza la precisión o el rigor del cálculo de las medidas al descartar un dato, como explica A14:

A14: “No estoy de acuerdo porque para obtener datos precisos debemos tener en cuenta todos los valores y situaciones posibles. Por ejemplo para calcular los salarios medios, las grandes fortunas alteran la estadística pero también se incluyen sus datos en ese estudio.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

*Otras justificaciones.* Encontramos únicamente una justificación diferente al resto, basada en que siempre existen otros valores por encima de la media, aunque más bajos, y que también se tienen en cuenta. Esta respuesta vuelve a ser incorrecta, al no reconocer la presencia de un valor atípico:

A16: “Si hay que tenerlo en cuenta porque siempre hay un promedio bajo que si supera la media y si hay que tenerlo en cuenta.” (respuesta y justificación incorrecta a la Tarea 2).

En la Tabla 3.6 observamos las pocas respuestas parcialmente correctas basadas en la influencia de los valores atípicos en la media. Estas representan en torno un 15,4% frente al casi 80% de las respuestas incorrectas. Cobo (2003) también obtuvo un porcentaje similar de respuestas correctas a esta tarea (15% basadas en la poca resistencia de la media ante valores atípicos y una única respuesta, 0,7%, basada en el cálculo de la media). Por su parte, Mayén (2009) observó que un tercio de los estudiantes de Bachillerato contestaron correctamente, aunque en secundaria obtuvo un porcentaje similar a Cobo (2003), luego todos estos resultados evidencian las dificultades que existen en torno a la comprensión de los estudiantes de secundaria ante la propiedad de la resistencia de las medidas de centralización en presencia de valores atípicos.

De las respuestas erróneas, cerca de la mitad se basan en que *todos los datos tienen igual importancia* (38,5%), lo que refleja la complejidad que supone para los estudiantes la detección de valores atípicos (directamente relacionado con el nivel 2 de lectura en la taxonomía de Curcio descrita en el Capítulo II) y la consideración de su efecto en el cálculo de las medidas de centralización. Cobo (2003) también obtiene un alto porcentaje de respuestas que indican que todos los valores deben considerarse (52,1%) y Mayén (2009) obtiene respuestas similares a las nuestras, insistiendo en que todos los datos cuentan (en particular, la respuesta de E4 de la Tarea 2 se obtuvo de su investigación).

Nuestros resultados también coinciden con los de Cobo (2003) al registrar ambos estudios respuestas en las que se pone en duda la representatividad de las medidas al descartar un dato, aunque Cobo (2003) obtiene un porcentaje mucho mayor de respuestas en esta categoría. En definitiva, nuestros resultados reflejan, como los de Cobo (2003) y Mayén (2009), lo complejo que resulta para los estudiantes detectar valores atípicos y considerar descartarlos dado su efecto en las medidas de centralización, como representantes de todo el conjunto de datos en la distribución de la variable.

Tabla 3.6. Frecuencia (%) de estudiantes, según grado de corrección en la respuesta y tipo de justificación empleada en la Tarea 2

| Tipo de elemento                                                                            |                                          | Desacuerdo<br>(P. correcta) | Desacuerdo<br>(Incorrecta) | NC     | Total    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------|----------|
| Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización | Solo a la media y no a la moda o mediana | 4(10,3)                     |                            |        | 4(10,3)  |
|                                                                                             | Solo a mediana y media                   |                             | 1(2,6)                     |        | 1(2,6)   |
|                                                                                             | Afecta a todas las medidas               |                             | 2(5,1)                     |        | 2(5,1)   |
| Afecta al cálculo de la media                                                               |                                          | 2(5,1)                      |                            |        | 2(5,1)   |
| Todos los datos tienen igual importancia                                                    |                                          |                             | 15(38,5)                   |        | 15(38,5) |
| Las medidas representan a todos los datos                                                   |                                          |                             | 2(5,1)                     |        | 2(5,1)   |
| Una medida precisa requiere de todos los datos                                              |                                          |                             | 2(5,1)                     |        | 2(5,1)   |
| Otras justificaciones                                                                       |                                          |                             | 1(2,6)                     |        | 1(2,6)   |
| No justifica                                                                                |                                          |                             | 8(20,5)                    | 2(5,1) | 10(25,6) |
| Total                                                                                       |                                          | 6(15,4)                     | 31(79,5)                   | 2(5,1) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta \*P = Parcialmente

En relación a la segunda parte de la Tarea 2, donde se pide identificar soluciones correctas e incorrectas dadas por cuatro estudiantes (E1, E2, E3 y E4) se espera que muestren desacuerdo con los estudiantes E1, E3 y E4 y acuerdo con el estudiante E2. Por tanto, la respuesta de E1 es parcialmente correcta cuando el estudiante considera que el incluir o no este dato es determinante en el cálculo de la media, aunque no para el resto de las medidas de centralización. No obstante, ni Mayén (2009) ni Cobo (2003) consideraron esta respuesta como parcialmente correcta, sino correcta o incorrecta.

Por su parte, el estudiante E2 reconoce que 140€ se trata de un valor atípico, alejado del resto de datos, y aunque la justificación está poco elaborada, se espera que los estudiantes respondan estar de acuerdo con E2. En cambio, la afirmación de E3 es incorrecta, porque no reconoce la propiedad de la mediana de ser más resistente ante la existencia de valores atípicos que la media. Finalmente, E4 considera que todos los datos

tienen un mismo papel en el cálculo de las medidas de centralización. Pero, aunque todos los datos forman parte de la distribución, un dato atípico no afecta en gran medida al cálculo de moda y mediana. Además, las medidas de centralización son representantes de todo el conjunto de datos, por lo que descartar uno no las hace menos representativas.

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E1 no encontramos nuevas justificaciones a las descritas anteriormente y los resultados del análisis se muestran en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E1 en la Tarea 2, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                                                            |                                          | Acuerdo<br>(P. Correcta) | Desacuerdo<br>(Incorrecta) | NC      | Total    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|---------|----------|
| Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización | Solo a la media y no a la moda o mediana | 2(5,1)                   |                            |         | 2(5,1)   |
|                                                                                             | Solo a mediana y media                   |                          | 5(12,8)                    | 1(2,6)  | 6(15,4)  |
|                                                                                             | Afecta a todas las medidas               |                          | 3(7,7)                     |         | 3(7,7)   |
| Todos los datos tienen igual importancia                                                    |                                          | 2(5,1)                   | 3(7,7)                     |         | 5(12,8)  |
| Otras justificaciones                                                                       |                                          |                          | 1(2,6)                     | 1(2,6)  |          |
| No justifica                                                                                |                                          | 12(30,8)                 | 2(5,1)                     | 7(17,9) | 21(53,8) |
| Total                                                                                       |                                          | 16(41)                   | 14(35,9)                   | 9(23,1) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta \*P = Parcialmente

Se observa un elevado número de respuestas no justificadas (53,8%), principalmente en la categoría de respuestas parcialmente correctas (30,8%), debido a que los estudiantes muestran acuerdo con E1 y piensan que la justificación que este aporta es más que suficiente para justificar su acuerdo. Así, del 41% que suman las respuestas parcialmente correctas, solo un 5,1% ha argumentado en base a la resistencia de mediana y moda ante valores atípicos y en la importancia de los datos en el cálculo de la media.

En cuanto a las respuestas incorrectas, se advierte un alto porcentaje de estudiantes que argumentan que el valor atípico afecta a mediana y media (12,8%) o cualquier medida de centralización (7,7%).

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E2, solo encontramos una subdivisión de categoría de las descritas anteriormente, debido a que, explícitamente, el estudiante manifiesta que no importa que el valor 140€ se encuentre alejado del resto de valores de la variable.

*Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización.* El estudiante reconoce que el valor atípico en su justificación, indicando que, aunque se encuentra alejado del resto de datos, no importa en cuanto al cálculo de las medidas de centralización:

A23: “No estoy de acuerdo, ya que, aunque esté alejado, hay gente que ha gastado ese dinero.” (interpretación incorrecta de la respuesta de E2).

Los resultados del análisis se muestran en la Tabla 3.8, donde se observa que solo un estudiante está en contra de la afirmación de E2 y justifica correctamente su decisión en base a la propiedad de mayor resistencia de la mediana y la moda ante valores atípicos frente a la media. El resto de los estudiantes justifica de manera incorrecta sus decisiones (66,7%) o no se decide por estar de acuerdo o en desacuerdo (30,8%) y justifica incorrectamente (15,4). Solo un 15,4% de estudiantes no responden a la valoración de E2.

De las respuestas incorrectas, la gran mayoría (51,3%) se basan en el argumento de que todos los datos tienen igual importancia, aunque aparece aquí una nueva argumentación basada en que no importa que 140€ esté más alejado del resto de datos (12,8%). Estos porcentajes son alarmantes, pues no sólo hay una cantidad considerable de estudiantes que no detecta la existencia de un valor atípico, mostrando evidencias de un bajo nivel de lectura entre los datos en la taxonomía de Curcio (descrita en el Capítulo II), sino que muchos no llegan a indicar si están o no de acuerdo.

Tabla 3.8. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E2 en la Tarea 2, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                                                            |                                          | Desacuerdo<br>(P. correcta) | Desacuerdo<br>(Incorrecta) | NC       | Total    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------|----------|
| Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización | Solo a la media y no a la moda o mediana | 1(2,6)                      |                            |          | 1(2,6)   |
|                                                                                             | No importa que esté alejado              |                             | 5(12,8)                    | 2(5,1)   | 7(17,9)  |
| Afecta al cálculo de la media                                                               |                                          |                             |                            | 1(2,6)   | 1(2,6)   |
| Todos los datos tienen igual importancia                                                    |                                          |                             | 20(51,3)                   | 3(7,7)   | 23(58,9) |
| Otras justificaciones                                                                       |                                          |                             | 1(2,6)                     |          | 1(2,6)   |
| No justifica                                                                                |                                          |                             |                            | 6(15,4)  | 6(15,4)  |
| Total                                                                                       |                                          | 1(2,6)                      | 26(66,7)                   | 12(30,8) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta \*P = Parcialmente

Al analizar las justificaciones de los estudiantes cuando valoran la respuesta de E3 no encontramos nuevas justificaciones a las descritas anteriormente y los resultados del análisis se muestran en la Tabla 3.9.

Tabla 3.9. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E3 en la Tarea 2, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                                                                            |                                          | Desacuerdo<br>(Correcta) | Acuerdo<br>(Incorrecta) | NC       | Total    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------|-------------------------|----------|----------|
| Influencia de los valores atípicos en la representatividad de las medidas de centralización | Solo a la media y no a la moda o mediana | 1(2,6)                   |                         |          | 1(2,6)   |
|                                                                                             | Solo a mediana y media                   |                          | 2(5,1)                  | 2(5,1)   | 4(10,2)  |
|                                                                                             | Afecta a todas las medidas               |                          | 1(2,6)                  |          | 1(2,6)   |
|                                                                                             | No importa que esté alejado              |                          |                         | 1(2,6)   | 1(2,6)   |
| Afecta al cálculo de la media                                                               |                                          | 1(2,6)                   |                         |          | 1(2,6)   |
| Todos los datos tienen igual importancia                                                    |                                          |                          | 4(10,3)                 | 2(5,1)   | 6(15,4)  |
| Las medidas representan la distribución de datos                                            |                                          |                          | 1(2,6)                  |          | 1(2,6)   |
| Una medida precisa requiere de todos los datos                                              |                                          |                          | 1(2,6)                  | 2(5,1)   | 3(7,7)   |
| No justifica                                                                                |                                          |                          | 13(33,3)                | 8(20,5)  | 21(53,8) |
| Total                                                                                       |                                          | 2(5,1)                   | 22(56,4)                | 15(38,5) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

Al igual que ocurría con las valoraciones a la respuesta de E2, encontramos un bajo porcentaje de respuestas correctas (5,1%) y, de nuevo, un alto índice de respuestas incorrectas (56,4%) o sin respuesta (20,5%). De los estudiantes que no muestran acuerdo o desacuerdo a la afirmación de E3, un 18% justifica incorrectamente su respuesta.

Hasta ahora, los resultados obtenidos son muy similares y evidencian el escaso sentido estocástico de los estudiantes de secundaria de la muestra, sobre todo, por la cantidad de estudiantes que no contestan o no justifican y la existencia de sólo dos respuestas correctas.

La situación no es mejor al analizar las respuestas de los estudiantes de la muestra al valorar la respuesta de E4, porque no se encuentra ninguna respuesta correcta ni parcialmente correcta. Encontramos que el 17,9% de los estudiantes no contestan y el resto (82,1%) manifiestan estar de acuerdo con E4, luego la mayoría (61,5%) no justifica su decisión, creemos que consideran las razones de E4 suficientes para argumentar su decisión de acuerdo. De nuevo, como se ha discutido anteriormente en los resultados de las valoraciones de respuestas de los estudiantes E1, E2 y E3, es significativamente elevado el porcentaje de estudiantes que considera que todos los datos tienen igual importancia.

Tabla 3.10. Frecuencia (%) de respuestas al interpretar la respuesta del estudiante E4 en la Tarea 2, según decisión y tipo de justificación

| Tipo de elemento                               | Acuerdo<br>(Incorrecta) | NC      | Total    |
|------------------------------------------------|-------------------------|---------|----------|
| Todos los datos afectan a todas las medidas    | 2(5,1)                  |         | 2(5,1)   |
| Todos los datos tienen igual importancia       | 5(12,8)                 |         | 5(12,8)  |
| Una medida precisa requiere de todos los datos | 1(2,6)                  |         | 1(2,6)   |
| No justifica                                   | 24(61,5)                | 7(17,9) | 31(79,5) |
| Total                                          | 32(82,1)                | 7(17,9) | 39(100)  |

\* NC = No Contesta

A modo de síntesis, los resultados del análisis del ítem 2 muestran, en general, que los estudiantes tienen dificultades para reconocer valores atípicos y la forma en que afectan a las medidas de centralización. En este sentido, ningún estudiante ha manifestado estar de acuerdo con Juana en quitar el valor atípico, justificando correctamente su respuesta. Tampoco han sido numerosas las respuestas que muestran desacuerdo con Juana, pero justifican correctamente su postura.

Puede suceder que, al tratarse de un valor posible en el contexto en que se plantea la tarea, los estudiantes hayan considerado viable la existencia de una familia que gaste esa cantidad de euros, lo que ha dificultado la detección de este valor como atípico. Aun así, los argumentos en las respuestas no han evidenciado razones sobre la influencia de este valor en la media y no en la moda o mediana. Así, el número de respuestas correctas en la interpretación de las respuestas de E2 y E3 ha sido 1 y 2, respectivamente, datos que resultan alarmantes.

En relación con las respuestas incorrectas, que han sido mucho más numerosas que en la Tarea 1, destacan por basar la justificación en la importancia de todos los datos. Esta argumentación ha sido una de las más numerosas a lo largo de toda la tarea. Merece una mención especial la cantidad de respuestas no justificadas, en general.

## Capítulo IV: Propuesta Didáctica

La propuesta didáctica que se presenta en este capítulo se fundamenta en la interpretación de los resultados del estudio de evaluación (Capítulo III) desde el marco teórico EOS, que estructura este trabajo, y la revisión de la literatura, que se presenta en el Capítulo II. Se responde al segundo objetivo general de este trabajo: “O2. Diseñar una intervención didáctica para el desarrollo del sentido estocástico de los estudiantes en 4ºESO, ajustada a los resultados obtenidos con el estudio previo, que contribuya, por un lado, a un aprendizaje adecuado de las medidas de centralización y su comprensión gráfica y, por otro lado, al tratamiento de las dificultades identificadas en dicho estudio de evaluación.”, por lo que se diseña una secuencia de actividades, respondiendo a las directrices curriculares de 4ºESO en el sistema educativo español (Ver Capítulo I).

Este capítulo se compone de tres partes: una primera en la que se presentan, brevemente descritas, las tareas que conforman la propuesta; un análisis de instrucción de algunas de dichas tareas; y un último apartado referente a la evaluación del aprendizaje del estudiante durante el desarrollo de la propuesta.

Por último, es esencial considerar que la propuesta didáctica engloba tanto tareas como proyectos en los que los estudiantes se enfrenten a las diferentes fases de un proceso de investigación estadística, mediante la recogida de datos a través de instrumentos adecuados (primarios), así como haciendo uso de datos extraídos de fuentes apropiadas (secundarios) en un contexto cercano. Por tanto, se pide realizar análisis estadísticos y síntesis de resultados a través de herramientas obteniendo conclusiones que contribuyan a la toma de decisiones, valorando la pertinencia de generalizar; y comunicando efectivamente los resultados y las conclusiones extraídas.

### Metodología y Secuenciación de las tareas

La metodología en la propuesta didáctica es eminentemente activa, pues “Los alumnos aprenden cuando hacen y los docentes enseñan cuando hacen hacer a los estudiantes. Los dos hacen, sólo que cosas distintas” (Goñi, 2008, pp. 189-190).”. Con esta premisa, la estrategia metodológica general que se emplea se basa en el tiempo y la acción (Villardón-Gallego, 2015, p. 169):

- El tiempo es un recurso que dispone el docente para controlar los distintos ritmos de aprendizaje. Puesto que cada estudiante necesita su propio tiempo para reflexionar, si surgen dudas tras resolver cualquier tarea, propondrá tareas de refuerzo para que el

estudiante repase contenidos. Por otro lado, si se detectan altas capacidades en estudiantes durante la propuesta, se tratarán de manera paralela al desarrollo habitual de la misma mediante diferentes recursos disponibles en Internet (por ejemplo: <https://www.amstat.org/ASA/Education/STEW/home.aspx>).

- La acción es el medio de aprendizaje del estudiante. Por tanto, el docente controla la evolución del conocimiento del estudiante mediante las preguntas que realiza, a medida que se desarrollan las tareas de la propuesta didáctica. Pero no solo se trata de valorar las soluciones de las tareas propuestas, sino de ir planteando cuestiones que vayan propiciando la reflexión del estudiante para ayudarles a alcanzar la abstracción en el conocimiento. Por tanto, su escucha será activa y respetuosa, para entender sus necesidades sin cuestionar sus dificultades y, así, comprender qué ocurre con intención de ofrecer retroalimentación.

Las primeras sesiones son fundamentales para comprender el papel de la estadística, al estudiar sus características como medio para estudiar una población, para que entiendan la utilidad de las herramientas que aprenderán a lo largo de la unidad en la resolución de problemas reales, etc. A continuación, se describen progresivamente las tareas, organizadas por sesiones.

### SESIÓN 1. ¿Qué es y para qué nos sirve la estadística?

#### *Tarea 1. ¿Qué te cuentas? (10')*

*a) Imagina que tu trabajo consiste en estudiar las características de los habitantes de una ciudad. Vamos a realizar una lluvia de ideas con diversas características que se podrían estudiar.*

Se espera que el docente posea una lista previa de variables de interés, para guiar el debate. Una vez finalizada la lluvia de ideas, el docente define lo que es una variable estadística y pasa a la siguiente pregunta:

*b) Indica para cada una de las variables de la pregunta anterior el rango de los valores que pueden tomar? Por ejemplo: si estamos estudiando el peso de una persona adulta, este puede variar desde 40kg hasta 100kg, aunque podríamos encontrar casos de personas fuera de ese rango... Además, una persona puede pesar 40kg y 100 g, esto es, 40.1 kg. Si estuviéramos hablando del color del pelo, no utilizaríamos números sino colores como rubio, castaño, negro...*

Con esta tarea se permite repasar el concepto de variable, tipos de variable (cualitativa, cuantitativa discreta y cuantitativa continua) y rango de la variable. La tarea, en general, se realiza entre toda la clase, siendo guiado el debate por el docente.

## *Tarea 2. Ante la estadística somos todos iguales... ¿o no? (15')*

*Si quisiéramos conocer la estatura media de los estudiantes de esta clase ¿sería viable medir a todos? Si quisiéramos conocer la estatura media de los estudiantes de 4ºESO de la provincia ¿sería viable medir a todos? ¿y de la Comunidad Autónoma? ¿y de España? ¿y de Europa?...*

Esta tarea introduce el concepto de población o censo, muestra y muestreo, así como la valoración de la representatividad de la muestra y la elección de una muestra apropiada. Para ello, el docente mostrará ejemplos de censos en centros educativos: *Census at School* (<https://ww2.amstat.org/censusatschool/index.cfm>), visitará la web del Instituto Nacional de Estadística y, en particular, el [video](#) sobre muestra y marco estadístico.

## *Tarea 3. Dj de la fiesta (25')*

En un estudio estadístico, es fundamental comenzar definiendo las preguntas de investigación que guían la recogida y el análisis de datos. Es por esto por lo que se comienza la tarea identificando la variable de interés, se formulan preguntas de investigación y se diseñan instrumentos de recolección apropiados. La tarea es una adaptación de la propuesta en el proyecto GAISE II (Bargagliotti et al., 2020):

*Este año os graduáis. Imaginad que estáis a cargo de la selección de música para la fiesta que tendréis después de la graduación. Para tener en cuenta los gustos de todos los asistentes a la graduación, sería interesante preguntarse ¿Qué tipo de música le gusta al resto de compañeros?*

Surgirán preguntas como la propuesta o nuevas, y se trata de diseñar junto a ellos preguntas y distinguir aquellas que están bien formuladas y recogen bien la información de aquellas que no están bien formuladas y la información que recogen no sirve para responder a la problemática de origen. También, interesa poner en evidencia las ventajas e inconvenientes de utilizar la aplicación Google Form, puesto que encuestar oralmente uno a uno a los estudiantes de los diferentes grupos de 4º ESO es costoso y llevaría demasiado tiempo. También es costoso recoger en papel las respuestas. Además, se discutirá la posibilidad de formular preguntas de respuesta abierta, múltiple y cerrada, así como condicionar unas preguntas con otras, sus ventajas e inconvenientes para su análisis. El docente llevará preparado un formulario de Google que los estudiantes responderán en 5 minutos (aproximadamente, porque se responde en menos tiempo) cuyas variables son: v1: edad, v2: número de hermanos, v3: número de televisores en casa, v4: comida preferida (4 opciones a elegir las cuatro: sopa, verdura, carne o pescado), v5: asignatura preferida (2 opciones a elegir una: matemáticas o lenguaje y literatura), v6: color preferido y v7: número de móviles en casa. A continuación, el docente muestra las posibilidades que ofrece la aplicación para recoger los datos y organizarlos en tablas y

gráficas, fácilmente en las *Hojas de cálculo de Google* y se exploran los diferentes gráficos estadísticos que se pueden realizar en las hojas de cálculo para resumir la información.

#### *Tarea 4. Líderes de investigación I (5')*

Ahora los estudiantes se convierten en *líderes de investigación*. En grupos de 4 a 5 estudiantes escogen una problemática de interés en la población del alumnado del instituto, identificando variables de estudio, planteando preguntas de investigación, y decidiendo la muestra con la que responderán a su problemática (justificando su elección). Cuando el docente valide sus propuestas (que entregarán por escrito para el inicio de la siguiente sesión) diseñarán un formulario de Google para recoger la información con la que podrán generar la hoja de cálculo, diseñar tablas y gráficos estadísticos y analizar sus datos. Estas indicaciones se dan oralmente, pues ahora solo interesa conocer la problemática, variables y preguntas de investigación. Se seleccionarán, seguro, las variables: edad, sexo, curso y aquellas otras (cuantitativas o cualitativas) que interesen.

### SESIÓN 2. Eres un líder en investigación

#### *Tarea 5. Muchas noticias (30')*

Un buen investigador debe ser capaz de leer gráficos estadísticos en cualquier medio y analizarlos correctamente. Se presentarán diferentes tipos de gráficos, por ejemplo, los disponibles en *Gapminder* (<https://www.gapminder.org/tools/>), que hacen uso de fuentes fiables (Naciones Unidas) manipulando las variables disponibles, gráficos a propósito del Covid: <https://www.rtve.es/noticias/coronavirus-graficos-mapas-datos-covid-19-espana-mundo/>, así como otros gráficos extraídos de noticias de medios de comunicación con errores: <http://www.malaprensa.com/search/label/gr%C3%A1ficos>.

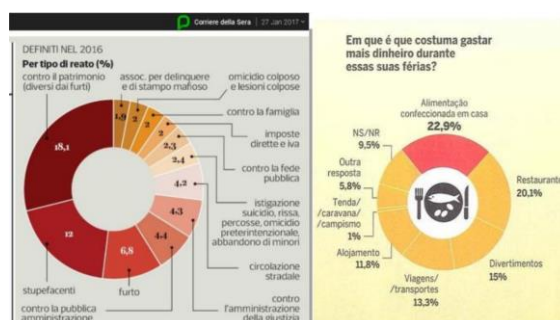


Figura 1. Corriere della Sera (27 enero 2017, pág. 2) (izquierda) y Visão (20 agosto 2009, pág. 85) (derecha).



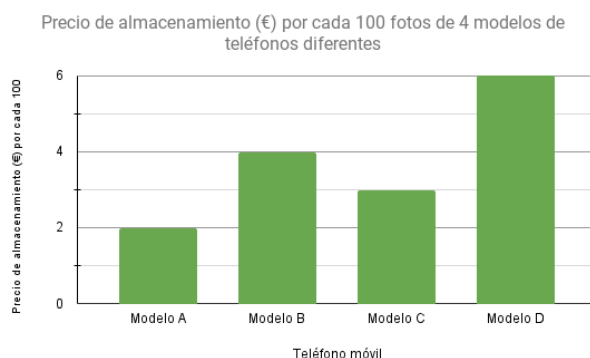
Figura 2. 6 de abril de 2022. Y un gráfico increíble. Malaprensa. <http://www.malaprensa.com/>

### Tarea 6.1. Fotografía estadística (15')

En esta tarea se analizan gráficos estadísticos para tomar decisiones. Se espera que los estudiantes lean el gráfico de forma literal, sean capaces de relacionar cada modelo de teléfono móvil con su precio, y alcancen un segundo nivel de lectura (Curcio, 1989; Friel et al. 2001) al calcular aproximadamente el precio por cada 100 fotos asociado a cada modelo, así como calcular numéricamente lo que costaría el teléfono el primer año. Finalmente, se espera que los estudiantes logren leer más allá de los datos al analizar qué modelo sale más rentable tras, mínimo, 4 años.

Julia quiere comprar un móvil y ha preguntado a varias compañías por sus tarifas. Como quiere tener almacenamiento suficiente, quiere contratar también una tarifa (por año) de almacenamiento en la nube para guardar sus fotos. Ha elaborado una tabla y un gráfico con la información que ha recabado y se muestra a continuación:

| Teléfono móvil | Precio del teléfono € |
|----------------|-----------------------|
| Modelo A       | 1200                  |
| Modelo B       | 750                   |
| Modelo C       | 899                   |
| Modelo D       | 550                   |



Fuente: Elaboración propia

Dado que el sueño de Julia es ser fotógrafa, cuando sale de viaje hace muchas fotos. En un mes en el que viaja, como por ejemplo en agosto, puede llegar a acumular 1000 fotos en su teléfono. Sin embargo, los meses en los que trabaja y no puede viajar ni salir tanto suele acumular unas 600 fotos por mes. Responde las siguientes preguntas, sabiendo que suele viajar unos dos meses al año:

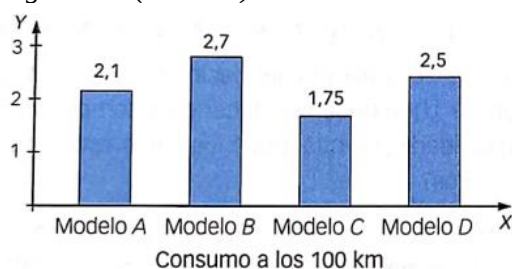
- ¿Qué teléfono crees que debería comprar Julia teniendo en cuenta lo que se gastará cuando lleve con él un año?
- Si a Julia suelen durarle los móviles más de 4 años, ¿cuál crees que es la opción más rentable a largo plazo? (la tarifa por año en la nube no varía)

### Tarea 6.2. Para practicar (individual para casa con entrega)

La siguiente tarea se ha extraído del libro de texto de la editorial Santillana con el interés de que se practique el análisis de gráficos estadísticos y se entregue el próximo día.

Julia ha encontrado un nuevo trabajo en un lugar que está a 23 km de su casa. Ha estado mirando las líneas de autobuses y trenes que van hasta allí, pero el trayecto es muy complicado y perdería mucho tiempo en los desplazamientos. Por eso ha decidido comprarse una moto.

En el concesionario ha visto cuatro modelos de motos que se pueden adaptar a sus necesidades. Para determinar qué moto comprarse, ha elaborado una gráfica con el consumo de gasolina (en litros) de los cuatro modelos.



| Modelo de moto | Precio |
|----------------|--------|
| Modelo A       | 3200 € |
| Modelo B       | 2650 € |
| Modelo C       | 4100 € |
| Modelo D       | 2400 € |

Fuente: Libro de texto de Matemáticas Académicas de la Editorial Santillana (Gámez et al., 2016, p.258).

El contrato que ha firmado es para 5 años y, si dejara de trabajar en ese lugar, la moto no le servirá para mucho. Julia solo quiere la moto para desplazarse a su nuevo trabajo los 5 días laborables. El precio de la gasolina hoy es 1,6 €/l y en la tabla figuran los precios de las cuatro motos que le interesan. Responde las siguientes cuestiones:

- ¿Existe alguna relación entre el precio de cada modelo y su consumo?
- ¿Qué moto crees que es más rentable para Julia?

### Tarea 7. ¿Promedio? (10')

Esta tarea presta atención a la interpretación de medidas de tendencia central como representantes de una distribución de datos. Se pretende evaluar sus conocimientos previos y se espera que muestren alguna dificultad al interpretarlas y elegir una como más representativa. Tras un tiempo para que reflexionen se corrige secuencialmente en clase y se continuará en la sesión 3 con los apartados que no dé tiempo a corregir.

A continuación, se proponen una serie de situaciones en las que se habla de promedios. Interpreta estas situaciones indicando lo que quiere decir cada una y trata de relacionarlas con alguna medida estadística que conozcas.

- El número medio de hijos por familia, en España, está en 1,2.
- En esta clase, el estudiante mediano tiene una calificación de 5,5 en matemáticas.
- La mayor parte de los jóvenes de entre 12 y 16 años prefiere el fútbol como deporte.
- Los jóvenes dedican una media de cinco horas al día a las redes sociales.
- Al acabar la carrera, el tiempo que había tardado Pedro era el tiempo mediano.
- La hamburguesa que más pide la gente es la de ternera.
- La altura de la persona que ocupa el lugar de la mediana en la clase es de 151 cm.
- La nota media de matemáticas en esta clase es de un 7,3.

### SESIÓN 3. Experto en estadísticos

Se dedicará tiempo a dudas (5') y corregir los apartados que no se completaron de la Tarea 7 en la sesión previa (10'), para dar paso a realizar y corregir la siguiente tarea:

*Tarea 8. ¿Tablas o gráficas? (15' para hacerla y 5' para corregirla)*

Esta tarea se realiza por parejas y consiste en que cada miembro de la pareja calcule las medidas de centralización y dispersión de una serie de datos representados numéricamente y de otro conjunto diferente representado gráficamente. Ambos estudiantes tienen las mismas dos distribuciones de datos, aunque cada uno tiene una representación diferente de cada una de ellas (Estudiante A: representación numérica de la distribución 1 y gráfica de la distribución 2 – Estudiante B: representación gráfica de la distribución 1 y numérica de la distribución 2).

*Calcula las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) de los siguientes conjuntos de datos y compara las respuestas con tu compañero.*

#### Hoja del estudiante A

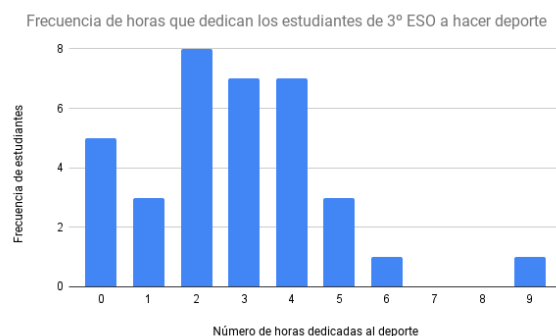
1. Se ha preguntado a los compañeros de 3ºESO sobre el número de horas que dedican a hacer deporte semanalmente, obteniéndose los siguientes resultados: 0, 2, 4, 7, 3, 9, 6, 2, 3, 2, 1, 5, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 4, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 3, 1, 3, 3.



2.

*Fuente: Elaboración propia*

#### Hoja del estudiante B



1.

*Fuente: Elaboración propia*

2. Se ha preguntado por la calle a distintas personas para ver el número de hermanos que tienen, obteniéndose los siguientes resultados: 2, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 5, 3, 1, 4, 3, 2, 4, 4, 4.

a) ¿En cuál de las representaciones (gráfica o numérica) os ha resultado más complejo calcular los estadísticos de tendencia central y dispersión?

b) Una vez calculados los estadísticos de tendencia central y dispersión, ¿Qué información aportan a la interpretación de la información representada, según el contexto de los datos, en cada caso?

En el tiempo restante de la sesión (15' aproximadamente), el docente mostrará diferentes recursos dinámicos programados con Geogebra para visibilizar la influencia de datos atípicos en las medidas de tendencia central.

Recurso 1: <https://www.geogebra.org/m/JjgMscNA>

Recurso 2: <https://www.geogebra.org/m/QxnJTC86#material/xoWkOxDf>

Recurso 3: <https://www.geogebra.org/m/qd7tr6Pr>

Recurso 4: <https://www.geogebra.org/m/xagvKCYU>

Se espera que en casa manipulen estos mismos recursos y, también, que realicen la siguiente tarea, para repasar lo aprendido.

*Tarea 9. Matching pairs (individual para casa sin entrega)*

La siguiente actividad trata de motivar el repaso de medidas de centralización y su interpretación en gráficos estadísticos y se podrá realizar en casa sin ayuda del docente:

En la [siguiente actividad](#) tienes que relacionar cada gráfico con la afirmación que más se ajuste a la información que se representa.



Figura 2. Ejemplo de pareja correcta

[https://app.nearpod.com/?pin=B5E051A7498CD75EAE7DE1A6254AC756-1&utm\\_source=link](https://app.nearpod.com/?pin=B5E051A7498CD75EAE7DE1A6254AC756-1&utm_source=link)

*Tarea 4. Líderes de investigación II (20' aproximadamente)*

El tiempo restante de la sesión se dedica a la atención de dudas sobre el diseño de Google Form, elección de muestra apropiada, y uso de la hoja de cálculo Excel. Todos los estudiantes tienen claro que trabajarán los siguientes puntos para su exposición a toda la clase el día de la sesión 5 de la propuesta didáctica:

- La pregunta de investigación formulada.
- El método de recogida de información utilizado.

- La muestra y la población del estudio, justificando la selección de la muestra.
- La tabla con los datos recogidos, uno o varios gráficos estadísticos que resuman los datos obtenidos y las medidas de centralización y dispersión utilizadas.
- El análisis de los resultados. En esta parte se espera que comentéis brevemente la información recogida, interpretando las medidas y relacionándolas con la representación gráfica, la cual debéis analizar y describir en base a todo lo que hemos ido viendo estos días atrás (valores atípicos, máximos y mínimos, simetría de la distribución...)
- Las conclusiones con relación a lo que se esperaba y si ha habido algún inconveniente o complicación en el estudio, si se puede generalizar a una población mayor y cualquier otra cuestión que se considere relevante.
- Una valoración personal sobre el proceso de investigación en estadística, señalando los puntos que has visto más importantes y los que más te han costado.

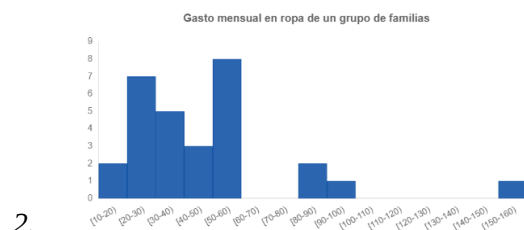
## SESIÓN 4. No te disperses

### Tarea 10. Atípico (15' realizarla y 15' corregirla)

En esta tarea, que se realiza en parejas, se espera que se identifiquen los datos atípicos y su influencia en las medidas de tendencia central. Se pedirá hacer uso de Excel para facilitar los cálculos y el docente ayudará a los estudiantes, si fuera necesario (se habrán indicado las funciones correspondientes para el cálculo de los estadísticos).

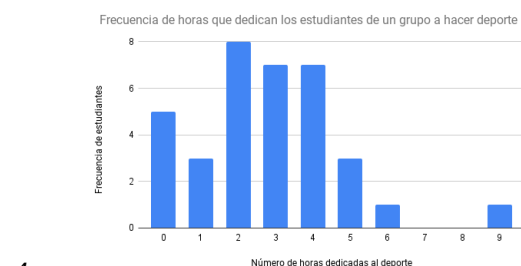
*Razona para escoger la medida que mejor represente el conjunto de datos, en cada caso. Analiza cómo influye eliminar el dato atípico del análisis, cuando proceda, en cada caso.*

1. En un edificio A, de la periferia de Valencia, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son: 220; 17.5; 22; 19; 16.5; 20.5; 21; 19.5; 24; 19. (Martínez y Huerta Palau, 2016).



Fuente: Elaboración propia

3. Calificaciones en una misma asignatura de Javier a lo largo del curso: 7.8, 9.1, 10, 8.5, 6.9, 7.1, 3.2, 7.7, 9.3.



Fuente: Elaboración propia

### Tarea 11. Datos dispersos (15')

La tarea comienza planteando una idea clave que se espera que hayan alcanzado en sesiones previas y el docente hará uso de los recursos presentados al finalizar la sesión 3, si fuera necesario.

*Identifica una situación en la que dos gráficos tengan la misma media, pero diferente dispersión, siendo la dispersión representada en uno mucho mayor que la del otro.*

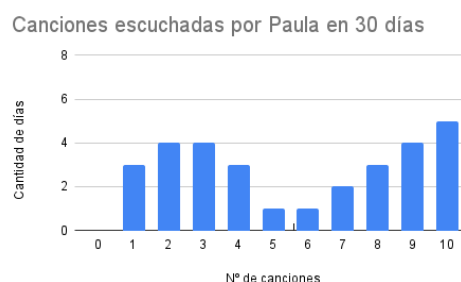
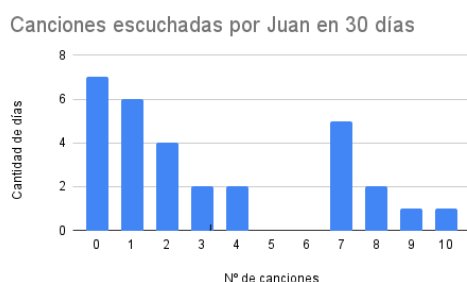
A continuación, se plantea la siguiente tarea, por parejas.

*Paula, Juan, María y Pablo han apuntado a lo largo de un mes la cantidad de canciones que han escuchado cada día y han organizado la información en las gráficas de barras que encontramos más abajo. Además, su profesora de Música ha calculado el promedio de canciones que escucharon al mes y lo ha recogido en la siguiente tabla:*

*Tabla 2.*

| <i>Alumno</i> | <i>Promedio de canciones escuchadas</i> |
|---------------|-----------------------------------------|
| <i>Paula</i>  | <i>5.67</i>                             |
| <i>Juan</i>   | <i>3.27</i>                             |
| <i>María</i>  | <i>6.03</i>                             |
| <i>Pablo</i>  | <i>5.07</i>                             |

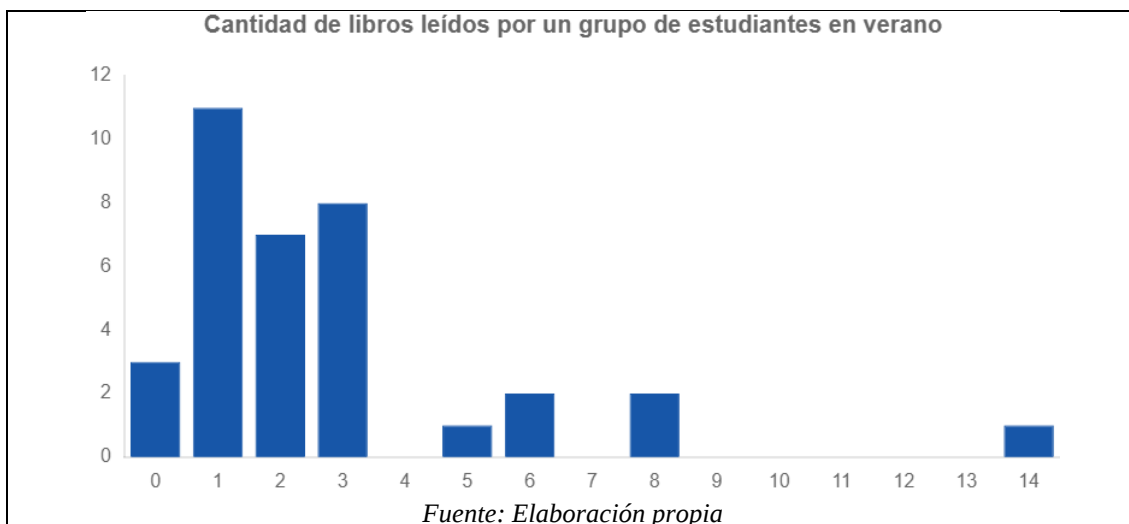
*Analizando las siguientes gráficas, ¿quién de ellos dirías que tiene los datos más dispersos? La media se muestra con una pequeña línea en el eje X, N° de canciones.*



*Fuente: Elaboración propia*

### Tarea 12. Y tú, ¿cuánto lees? (individual para casa con entrega)

*El siguiente gráfico representa la cantidad de libros que lee un grupo de estudiantes a lo largo del verano. Calcula las medidas de centralización y dispersión, interprétalas y di si estás de acuerdo o no con las afirmaciones que algunos estudiantes han hecho, **justificando tu respuesta.***



- E1. “La mayoría hemos leído 1, 2 o 3 libros, aunque algunos han leído ninguno.”
- E2. “Hay una persona que ha leído 14 libros y eso es muchísimo, es un dato que debería quitarse del análisis porque si no afecta mucho a la media de libros que hemos leído.”
- E3. “La mediana es 6 porque es el que más cerca está del medio que es 7.”
- E4. “Como la mediana es 2, la mayoría lee entorno a dos libros.”
- E5. “La media tiene que ser 2 o así porque la mediana es 2 y tienen que coincidir.”
- E6. “La mediana y la media no tienen por qué estar cerca porque en esta gráfica hay un valor muy grande y eso hace influir a la media, pero no a la mediana.”
- E7. “No puede quitarse el 14, aunque algunos digan que sí, porque afectaría a todo.”
- E8. “Si se quita el 14 las medidas no serían representativas, estarían mal, porque hemos quitado un valor y entonces no tiene sentido que representen al conjunto de los datos.”
- E9. “La mayoría ha leído un libro, porque 1 es la moda.”
- E10. “No pasa nada porque el 14 esté muy alejado, es un dato igual que los otros”.

#### *Tarea 4. Líderes de investigación III (10' aproximadamente)*

El tiempo restante de la sesión se dedica a la atención de dudas sobre el análisis de los datos de la investigación que están realizando y presentarán en la siguiente sesión.

### SESIÓN 5. Todos somos líderes en investigación

#### *Tarea 4. Líderes de investigación IV (55')*

Como cierre de la propuesta didáctica, se dedica la última sesión a la exposición de resultados de los análisis que cada grupo ha preparado como investigación. La presentación no debe durar más de 10 minutos y el guion a considerar es el que se describió en la *Tarea 4 Líderes de investigación II*.

Tabla 4.1. Cronograma de sesiones

| Sesiones | Tareas                 | Contenido                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | T1, T2, T3 y T4(I)     | Introducción: variables y muestra.<br>Formulación de preguntas de investigación, recolección, organización de datos con Google Form y hojas de cálculo.<br>Inicio de un proyecto de investigación: selección de variable y muestra y formulación de pregunta(s) de investigación.                                                                  |
| 2        | T5, T6.1, T6.2 y T7    | Lectura e interpretación de gráficos estadísticos I: introducción.<br>Medidas de centralización: interpretación.                                                                                                                                                                                                                                   |
| 3        | T7, T8, T9, T4(II)     | Medidas de centralización: cálculo e interpretación.<br>Valores atípicos y medidas de centralización.<br>Proyecto de investigación: selección de variable y muestra, formulación de pregunta(s) de investigación y elaboración de un instrumento de recolección de datos. Recolección de datos.                                                    |
| 4        | T10, T11, T12, T4(III) | Estadísticos de tendencia central y dispersión.<br>Análisis de datos en gráficos y tablas estadísticas. Toma de decisiones y valoración de conclusiones.<br>Proyecto de investigación: selección de variable y muestra, formulación de pregunta(s) de investigación y elaboración de un instrumento de recolección de datos. Recolección de datos. |
| 5        | T4(IV)                 | Evaluación final. Presentación de un estudio estadístico.                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

### *Análisis de instrucción*

Se analizan ahora con mayor detalle las Tareas 6.1, 7, 9 y 12, de acuerdo con el análisis de instrucción, que forma parte del análisis didáctico (Rico y Moreno, 2016).

La Tarea 6.1 consistía en analizar una tabla y un gráfico de barras y se espera que los alumnos alcancen los dos primeros niveles de lectura propuestos en la taxonomía de Curcio (Capítulo II).

| <b>Tarea 6.1. Fotografía estadística</b> |                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Meta                                     | Leer e interpretar correctamente una tabla y un gráfico estadístico, realizando operaciones numéricas a partir de la lectura de la información representada para tomar decisiones apropiadas. |
| Contenido                                | Gráfico de barras.<br>Transnumeración.<br>Operaciones numéricas básicas.                                                                                                                      |
| Competencias                             | 1.1, 2.2, 4.2, 5.2, 6.1, 7.2, 8.1, 9.2.                                                                                                                                                       |
| Formulación                              | Por escrito, con indicaciones del docente para su correcta comprensión y ejecución.                                                                                                           |
| Materiales y recursos                    | Papel, lápiz, calculadora (opcional), pizarra, tiza y proyector.                                                                                                                              |
| Agrupamientos e interacciones            | Individual.<br>Gran grupo (corrección y debate).                                                                                                                                              |
| Contexto                                 | Social.                                                                                                                                                                                       |
| Temporalización                          | 10 minutos para hacerla individualmente.<br>5 minutos para la corrección.                                                                                                                     |
| Complejidad                              | Conexión.                                                                                                                                                                                     |
| Secuenciación                            | Desarrollo.                                                                                                                                                                                   |

La Tarea 7 es una tarea de inicio en relación con las medidas de centralización y trata la idea de promedio, en base al trabajo de Watson y Moritz (2000).

| <b>Tarea 7. ¿Promedio?</b>    |                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Meta                          | Interpretación de situaciones cotidianas en las que se hace uso de las medidas de centralización para expresar promedios.                                                                        |
| Contenido                     | Medidas de centralización: media, moda y mediana.                                                                                                                                                |
| Competencias                  | 5.1, 6.1, 6.3, 7.1, 8.2.                                                                                                                                                                         |
| Formulación                   | Por escrito, con indicaciones del docente para su correcta comprensión y ejecución.                                                                                                              |
| Materiales y recursos         | Papel, lápiz, pizarra y tiza.                                                                                                                                                                    |
| Agrupamientos e interacciones | Individual.<br>Gran grupo (corrección y debate).                                                                                                                                                 |
| Contexto                      | Social.                                                                                                                                                                                          |
| Temporalización               | 10 minutos para responderla.<br>10 minutos para corregirla.<br>La temporalización es aproximada, porque se dedican 10 minutos en el final de la Sesión 2 y otros 10 en el inicio de la Sesión 3. |
| Complejidad                   | Conexión.                                                                                                                                                                                        |
| Secuenciación                 | Inicio.                                                                                                                                                                                          |

La Tarea 9 es un ejemplo de tarea motivadora mediante el juego para poner en práctica los conceptos abordados.

| <b>Tarea 9. Matching pairs</b> |                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Meta                           | Leer e interpretar correctamente diferentes gráficos estadísticos, interpretando sus medidas de centralización y escogiendo con efectividad y coherencia la opción correcta. |
| Contenido                      | Gráficos estadísticos, propiedades y estadísticos de centralización.<br>Transnumeración.<br>Operaciones numéricas básicas.                                                   |
| Competencias                   | 3.1, 4.1, 5.1, 5.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.1, 9.2, 10.1.                                                                                                                      |
| Formulación                    | Online.                                                                                                                                                                      |
| Materiales y recursos          | Ordenador, Tablet o móvil.                                                                                                                                                   |
| Agrupamientos e interacciones  | Individual.                                                                                                                                                                  |
| Contexto                       | Educativo.                                                                                                                                                                   |
| Temporalización                | Unos 10 minutos.                                                                                                                                                             |
| Complejidad                    | Conexión.                                                                                                                                                                    |
| Secuenciación                  | Desarrollo.                                                                                                                                                                  |

La Tarea 12 es una tarea que permite evaluar la evolución de los estudiantes a lo largo de la instrucción, ya que es similar a los ítems del cuestionario realizado en el estudio de evaluación del Capítulo III.

| <b>Tarea 12. Y tú, ¿cuánto lees?</b> |                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Meta                                 | Evaluar la comprensión de los estudiantes de las medidas de centralización y dispersión en un contexto y a partir de la representación gráfica de los datos.                                   |
| Contenido                            | Gráfico de barras.<br>Cálculo e interpretación de medidas de centralización: media, moda y mediana, y dispersión: varianza y desviación típica.<br>Valores atípicos.                           |
| Competencias                         | 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 5.2, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 9.2.                                                                                                                                              |
| Formulación                          | Por escrito, con indicaciones del docente para su correcta comprensión y ejecución.                                                                                                            |
| Materiales y recursos                | Papel y lápiz.                                                                                                                                                                                 |
| Agrupamientos e interacciones        | Individual                                                                                                                                                                                     |
| Contexto                             | Educativo.                                                                                                                                                                                     |
| Temporalización                      | 5 minutos de explicación y lectura inicial.<br>50 minutos para la tarea individual.<br>Los tiempos son aproximados al tratarse de una tarea para casa con entrega al docente al día siguiente. |
| Complejidad                          | Reflexión                                                                                                                                                                                      |
| Secuenciación                        | Cierre.                                                                                                                                                                                        |

### *Análisis de evaluación*

En este último apartado, se detalla cómo se evalúa el desempeño y aprendizaje de los estudiantes durante la implementación de esta propuesta didáctica. Se distinguen dos partes en este análisis de evaluación: una dedicada a la evaluación y el aprendizaje continuo del estudiante y otra como evaluación final a lo largo de la propuesta, según el diseño y realización del estudio estadístico que han realizado y expuesto.

### *Evaluación formativa*

Esta evaluación se centra, principalmente, en el desempeño de los estudiantes en las Tareas 6.2 y 12. La tarea 6.2 es similar a la tarea 6.1 y evalúa la comprensión gráfica de los estudiantes. La tarea 12 engloba tanto la lectura de gráficos estadísticos como el análisis de las medidas de centralización, dispersión y la presencia de valores atípicos.

Dados los resultados obtenidos en el estudio de evaluación realizado con el cuestionario de evaluación (Capítulo III), estas tareas permitirían observar, de forma individual y global, el desempeño de los estudiantes e inferir una mejora o no en las dificultades reflejadas en el estudio de evaluación. En particular, para la corrección de la Tarea 12 se propone el uso de una rúbrica y una lista de control de errores que nos permitan valorar si los estudiantes continúan cometiendo los mismos errores detectados en el análisis de sus respuestas al cuestionario, con el fin de mejorar aquellos puntos que requieran una mayor atención y evaluar el grado de aprendizaje de los estudiantes. Esta

evaluación específica de la Tarea 12 debe combinarse con la corrección de la Tarea 6.2, que nos aporta información del grado de comprensión de cada estudiante.

Además, se lleva un registro de participación en las tareas que involucran un debate grupal, así como mientras se realizan algunas de las tareas en parejas, para ir midiendo el desempeño de estos a lo largo de la propuesta didáctica.

En el anexo III se encuentra la rúbrica que se utilizará para evaluar la Tarea 12, junto con la [siguiente lista de control](#) con la que registrar las dificultades manifestadas por cada alumno.

### *Evaluación sumativa*

Como evaluación sumativa se propone la evaluación de la investigación que se ha realizado a lo largo de toda la propuesta didáctica (Tarea 4), con la que se ha desarrollado una investigación estadística en grupo (desde el diseño y recogida de datos hasta la elaboración de conclusiones, pasando por la interpretación de gráficos y medidas de centralización y dispersión, entre otras que hayan considerado necesarias emplear).

Se propone la rúbrica de evaluación que se puede encontrar en el anexo III, aunque cabe mencionar que estas tareas estarían guiadas en todo momento por el docente, quien, a lo largo de toda la instrucción, iría realizando comentarios y correcciones breves para asegurar que todas las investigaciones de los estudiantes avanzan coherentemente. Esta rúbrica estaría a disposición de los estudiantes antes de comenzar las exposiciones. Además, no sólo el docente evalúa cada exposición con esta rúbrica, sino que otro estudiante evalúa, al mismo tiempo a sus compañeros. De este modo, para cada exposición se tendrían dos evaluaciones: la del docente y la de otro compañero del aula.

La evaluación formativa supondría un 50% de la calificación final de la unidad, que se divide a su vez en un 20% para la participación en las tareas de debate grupal y por parejas y un 30% para la tarea 12, de acuerdo con la rúbrica diseñada para esta tarea. La lista de control es únicamente un instrumento para registrar dificultades por parte del docente, por lo que no supone ningún porcentaje en la calificación de los estudiantes. El resto de la calificación de la unidad, un 50%, recae sobre la evaluación sumativa, esto es, el proyecto de investigación que los estudiantes deben realizar a lo largo de la unidad para su presentación en la última sesión. Este 50% se evaluaría con la rúbrica diseñada para tal efecto y que podemos encontrar en el anexo III, dividiéndose en un 10% y un 40%, correspondientes a la evaluación de otro compañero del aula y la evaluación del docente, respectivamente.

## Capítulo V: Conclusiones

A lo largo del presente TFM hemos comprobado la complejidad que entraña el aprendizaje de la estadística para los estudiantes de secundaria. Especialmente en relación con la comprensión de gráficos estadísticos y la interpretación de las medidas de localización, tanto la literatura como los resultados de Cobo (2009), Mayén (2003) y los nuestros reflejan la necesidad de atender estos objetos en la instrucción de la estadística.

Los gráficos estadísticos son una de las formas principales de representación de la información que encontramos en diferentes contextos en el día a día, por lo que es esencial el desarrollo de competencias que permitan una adecuada lectura e interpretación de estos. Esta es una cuestión que ha preocupado a los investigadores desde hace tiempo, llegando a desarrollarse modelos como los de Curcio y colaboradores (Curcio, 1987; Friel et al., 2001) o Aoyama (2007) para contribuir a la investigación sobre la competencia gráfica.

Por otro lado, más allá del cálculo de las medidas de centralización, es fundamental saber interpretarlas y entender su papel como representantes de los datos. Muchos libros de texto basan la instrucción de estas medidas en su cálculo algorítmico descontextualizado, lo que se materializa en tareas rutinarias, algo que la propia literatura ha denunciado ser insuficiente para una correcta comprensión de estos objetos matemáticos. Esto evidencia la necesidad de planificar y llevar a cabo actuaciones docentes que fomenten un aprendizaje correcto de estos conceptos matemáticos, a través de la resolución de problemas contextualizados donde se relacionen entre sí y se valore la pertinencia de usar una u otra según la presencia de valores atípicos. Las intervenciones didácticas como la propuesta en este TFM son esenciales para velar por un verdadero aprendizaje de estos estadísticos descriptivos.

En los resultados del estudio de evaluación, observamos también la ausencia de justificaciones en la resolución de tareas estadísticas. La argumentación en las respuestas a preguntas estadísticas es fundamental, pues manifiesta una verdadera comprensión conceptual y un conocimiento adecuado de las propiedades que se están utilizando, por lo que se debe fomentar la argumentación desde los primeros niveles.

A pesar de que las directrices curriculares nacionales (MEFP, 2022) e internacionales (Bargagliotti et al., 2020; Franklin et al., 2007; NCTM, 2000) del último siglo hayan mostrado mayor preocupación por la instrucción de la estadística, los resultados de este y otros estudios recientes que se han expuesto en este trabajo evidencian la necesidad de seguir prestando una atención especial al sentido estocástico. Si bien, en

la actualidad, la comunidad educativa ha comprendido la importancia del desarrollo de este sentido, se debe fomentar su enseñanza de forma contextualizada y a través de acciones docentes como las que se recogen en este TFM y se recomiendan en la literatura.

Este Trabajo de Fin de Máster resulta de especial valor dada su doble naturaleza: de investigación y didáctico. No solo se ha tratado de exponer la necesidad de desarrollar el sentido estadístico de los estudiantes, revisando la literatura de los últimos años acerca de este sentido (más concretamente, sobre la comprensión gráfica y de las medidas de centralización), sino que también se ha realizado un estudio de evaluación cuyos resultados han reforzado las preocupaciones señaladas por otros investigadores. Del mismo modo, la detección de dificultades en el aprendizaje de la estadística motiva el diseño de intervenciones docentes que contribuyan al tratamiento de estas dificultades y al desarrollo del sentido estocástico, a través de la resolución de problemas y la realización de proyectos estadísticos, como se planifica en este trabajo. Los estudiantes aprenden más y se encuentran mucho más motivados cuando recogen sus propios datos y son partícipes de las diferentes fases que conforman una investigación estadística.

Si bien nos hemos centrado en la comprensión gráfica y las medidas de centralización, existen muchas otras cuestiones cuya comprensión no resulta sencilla, como la variabilidad o el razonamiento probabilístico en la resolución de tareas y problemas estadísticos. Una posible continuación de este estudio sería el análisis de estos últimos contenidos, que forman parte de los saberes a desarrollar en 4º ESO. En este sentido, una posible limitación de nuestro estudio ha sido la detección de una gran cantidad de dificultades y un bajo nivel de desarrollo del sentido estadístico en el análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario propuesto, lo que nos ha obligado a orientar la propuesta didáctica a estos contenidos, no habiendo podido ampliar dicha propuesta con la inclusión de un mayor análisis de la variabilidad y la correlación.

La enseñanza de la matemática se enfoca ahora, en el currículo actual, en el desarrollo de competencias. La estadística es una disciplina esencial para la formación de ciudadanos competentes y alfabetos. Las diferentes asignaturas que hemos cursado en este máster nos dotan de las herramientas suficientes para contribuir al desarrollo competencial de los estudiantes, a través de una adecuada instrucción, no sólo de la estadística, sino de toda la Matemática. En definitiva, el mundo cambia y debemos educar coherentemente a las nuevas generaciones, para lo que la estadística constituye uno de los pilares de la educación matemática para asegurar una formación que les permita enfrentarse a los retos actuales y a las situaciones venideras.

## Referencias

- Alsina, Á. (2011). Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años.
- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2, (3), 298-318.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Batanero, C., Garzón-Guerrero, J. y Valenzuela-Ruiz, S. (2021). Sentido gráfico y su importancia en la comprensión de la Información sobre la COVID. *Revista Paradigma*, 42(1), 206-224.
- Batanero, C. (2019). Statistical sense in the information society. En *Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias-CISETC* (pp. 28-38).
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II) report. American Statistical Association.
- Behar, R. (2018). *Importancia del contexto en la formación del pensamiento y la cultura estadística*. En Álvarez, Ingrith (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 85-110). Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol.3, pp. 144-151). PME group.
- Chick, H. (2004, June). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the twenty-seventh annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167-174).
- Cobb, G. W. y Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American mathematical monthly*, 104(9), 801-823.
- Cobo, B. (2003). Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/librotesis.html>
- Consejería de Educación y Deporte. (2022). *Instrucción conjunta 1 /2022, de 23 de junio, de la Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa y de la Dirección General de Formación Profesional, por la que se establecen aspectos de organización y funcionamiento para los centros que impartan Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2022/2023*.
- Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Paideia.
- Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2008). Students' Misconceptions in Interpreting Center and Variability of Data Represented via Histograms and Stem-and-Leaf Plots. *Journal of Statistics Education*, 16(2).

- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing Graph Comprehension. Elementary and Middle School Activities*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Drive, Reston, VA 22091.
- Díaz-Levicoy, D. (2018). Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de Educación Primaria.
- Estrella, S. y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. En *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework. ASA.
- Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. <https://doi.org/10.2307/749671>.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.
- Gámez, J.C., Gaztelu, A.M., Loysele, F., Marín, S., Pérez, C. y Sánchez D. (2016). *Matemáticas. Enseñanzas Académicas*. Santillana.
- García-Alonso, I. y Bruno, A. (2019). Lectura de gráficos estadísticos y tareas numéricas en alumnado de secundaria y futuros profesores. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 313-322). Valladolid: SEIEM.
- Garzón-Guerrero, J. A. y Jiménez Castro, M. (2021). Un estudio exploratorio de la competencia gráfica de futuros profesores de Portugal e Italia a través de la interpretación de diagramas estadísticos de barras y sectores extraídos de la prensa escrita. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*.
- Gea, M.M., Arteaga, P. y Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 19-37.
- Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: A review of the literature. *Studies in science education*, 47(2), 183-210.
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. *Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada*.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Font, V., & Batanero, C. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 47-59.
- Goñi, J. M. (2008). *3<sup>2</sup>-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Editorial Graó.

- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., Mooney, E. S., Wares, A., Jones, M. R., Perry, B., Putt, I.J. y Nisbet, S. (2001). Using students' statistical thinking to inform instruction. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 109–144.
- León, O.G. y Montero, I. (2015). *Métodos de investigación en Psicología y Educación. Las tradiciones cuantitativa y cualitativa*. Madrid: McGraw Hill.
- López, S. y Vigo, K. (2018). *El proceso de transnumeración con profesores de matemática en el análisis de datos*. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 133-140).
- Martínez, M. L. y Huerta Palau, Pedro (2016). *Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas de centralización afectadas por valores atípicos*.
- Mayén, S. (2009). Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/librotesis.html>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE 30-03-2022).
- Mojica, J. M. L., Baltazar, E. J. E. y Arredondo, E. H. (2020). Exploración de la comprensión gráfica de estudiantes de secundaria. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, (11), 925.
- Molero, A. (2017). Comprensión del concepto de media aritmética en los estudiantes de educación secundaria obligatoria. [Trabajo fin de máster, Universidad de Granada].
- Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Ruz, F. y Contreras, J. (2023). Análisis de la transnumeración vinculada a la alfabetización estadística en futuros maestros. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 27(1), 277-300. DOI: 10.30827/profesorado.v27i1.21488.
- Mooney, E. S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 23–63.
- National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Neuendorf, K. A. (2018). Content analysis and thematic analysis. En P. Brough (Ed.) *Advanced research methods for applied psychology: Design, Analysis and Reporting* (1st ed.) (pp. 211–223). Routledge. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781315517971>
- Pallauta, J. D., Arteaga, P. y Garzón-Guerrero, J. A. (2021). Secondary School Students' Construction and Interpretation of Statistical Tables. *Mathematics*, 9(24), 3197.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, 17-46.
- Rico, L. y Moreno, A. (Coords.). (2016). *Elementos de Didáctica de Matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación*

- en educación matemática* (pp. 55-79). Editorial Universidad de Granada y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Ruiz, I. (2019). Lectura y comprensión de gráficos estadísticos en estudiantes de secundaria de Badajoz. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html)
- Salcedo, A., González, J. y González, J. (2021). Lectura e interpretación de gráficos estadísticos, ¿cómo lo hace el ciudadano?. *Revista Paradigma*, 42(Extra 1), 61-88.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistical learning and reasoning. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009).
- Unión Europea [UE]. (2006). Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, Diario Oficial de la Unión Europea, 2006/962/CE.
- Vigo, J. M. (2016). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos de Formación Profesional Básica*. Trabajo de Máster. Universidad de Granada.
- Villardón-Gallego, L. (2015). *Competencias genéricas en educación superior. Metodologías específicas para su desarrollo*. Editorial Narcea.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 11-50.
- Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, 67(3), 223-248.

## ANEXO I. Saberes básicos del sentido estocástico en secundaria

Tabla A1.1<sup>1</sup> Saberes básicos en sentido estocástico para 1ºESO a 3ºESO, según el Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2022)

| <b>Categoría</b>                        | <b>Código y breve descripción</b>                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Organización y análisis de datos</i> | O.1. Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucren una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales. |
|                                         | O.2. Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y continuas en contextos reales.                         |
|                                         | O.3. Representación mediante tecnología (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del gráfico más adecuado.                                                 |
|                                         | O.4. Interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de las medidas de localización en situaciones reales.                                                                  |
|                                         | O.5. Variabilidad: Interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales.                                                          |
|                                         | O.6. Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.                                                                            |
| <i>Incertidumbre</i>                    | I.1. Identificación de fenómenos deterministas y aleatorios.                                                                                                                 |
|                                         | I.2. Planificación, realización y análisis de experimentos simples.                                                                                                          |
|                                         | I.3. Cálculo de probabilidades mediante experimentación. Frecuencia relativa y regla de Laplace.                                                                             |
| <i>Inferencia</i>                       | IE.1. Formulación de preguntas adecuadas sobre las características de interés de una población.                                                                              |
|                                         | IE.2. Presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales para responder cuestiones de investigación estadística.                       |
|                                         | IE.3. Deducción de conclusiones a partir de una muestra para emitir juicios y tomar decisiones.                                                                              |

Tabla A1.2<sup>2</sup> Saberes básicos en sentido estocástico para 4º ESO, según el Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP, 2022)

| <b>Categoría</b>                        | <b>Código y breve descripción</b>                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Organización y análisis de datos</i> | O.1. Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucren una variable bidimensional. Tablas de contingencia.                                                           |
|                                         | O.2. Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de una y dos variables cualitativas, cuantitativas discretas y continuas en contextos reales.                                                        |
|                                         | O.3. Interpretación y análisis de la variabilidad mediante las medidas de centralización y dispersión.                                                                                                                |
|                                         | O.4. Representación mediante tecnología (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...), análisis, interpretación y obtención de conclusiones razonadas de gráficos estadísticos de una y dos variables.              |
|                                         | O.5. Interpretación de la relación entre dos variables, valorando gráficamente con herramientas tecnológicas la pertinencia de realizar una regresión lineal. Ajuste lineal con herramientas tecnológicas.            |
| <i>Incertidumbre</i>                    | I.1. Planificación, realización y análisis de experimentos compuestos.                                                                                                                                                |
|                                         | I.2. Cálculo de probabilidades aplicando la regla de Laplace y técnicas de recuento en experimentos simples y compuestos (mediante diagramas de árbol, tablas...) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas. |
| <i>Inferencia</i>                       | IE.1. Diferentes etapas del diseño de estudios estadísticos.                                                                                                                                                          |
|                                         | IE.2. Estrategias y herramientas de presentación e interpretación de datos relevantes en investigaciones estadísticas mediante herramientas digitales.                                                                |
|                                         | IE.3. Análisis del alcance de las conclusiones de un estudio estadístico valorando la representatividad de la muestra.                                                                                                |

<sup>1</sup> Se utiliza la codificación O.X. para referirse al descriptor X del ítem *Organización y análisis de datos*; I.X. para referirse al descriptor X del ítem *Incertidumbre*; e IE.X. para referirse al descriptor X del ítem *Inferencia*.

<sup>2</sup> Misma codificación que en la tabla A1.1.

## ANEXO II. Cuestionario de evaluación

Apellidos y Nombre: \_\_\_\_\_

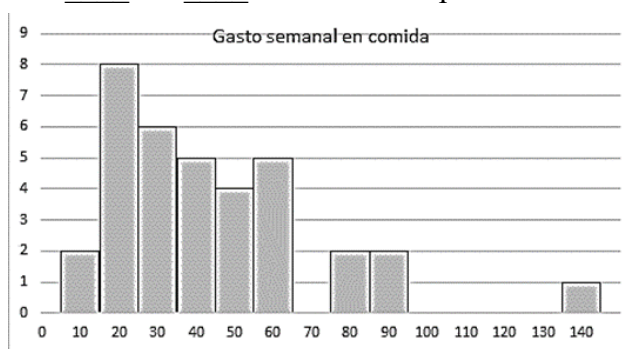
Curso: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_

A continuación, presentamos tareas junto con algunas de las soluciones obtenidas por estudiantes. Se pide:

- Resuelve las tareas planteadas, justificando tus respuestas.
- Indica, para cada una de las tareas, cuál o cuáles de las respuestas de otros estudiantes a las tareas son correctas. Para cada una de las respuestas incorrectas, indica dónde se encuentra el error o errores que se cometen y cómo justificarías dicho error o errores a quienes los cometen para ayudarles a superarlos.

**Tarea 1.** Pedro piensa que en el siguiente gráfico la mediana te dice que una mayoría de familias gasta alrededor de 40 euros cada semana en comida.

¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta.



Media = 44 euros

### Respuestas de estudiantes

- E1. Sí, porque 40 es la mediana.
- E2. No, sería 75 porque la mediana es el valor medio de la gráfica.
- E3. Sí, porque la media casi siempre coincide o está cerca del valor de la mediana.
- E4. No, porque esto lo dice la moda, que está en 20.

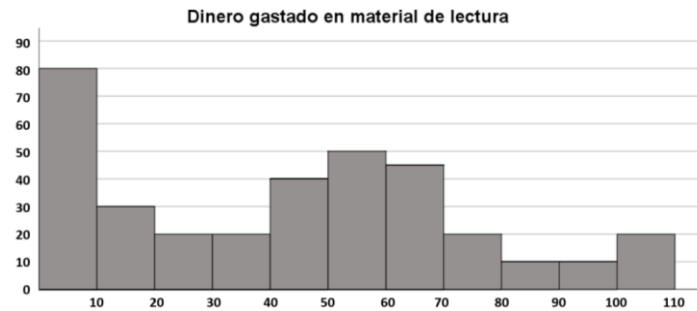
**Tarea 2.** Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 140 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta

### Respuestas de estudiantes

- E1. No, porque es un dato como los otros y hay que incluirlo. Sólo afectaría a la media.
- E2. Sí, ya que está demasiado alejado de los demás valores.
- E3. No, porque puede influir mucho a la hora de calcular la media y la mediana.
- E4. No, porque todos los datos cuentan para poder obtener el resultado correcto, pues el alumno que gasta esa cantidad también cuenta.

**Tarea 3.** El profesor dio este gráfico a los estudiantes.



Media = 43,3 euros Mediana = 45 euros

Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura a partir del gráfico, porque la mayor parte de familias no gastaron nada o muy poco y el segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal “promedio” en material de lectura.

¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta

#### Respuestas de estudiantes

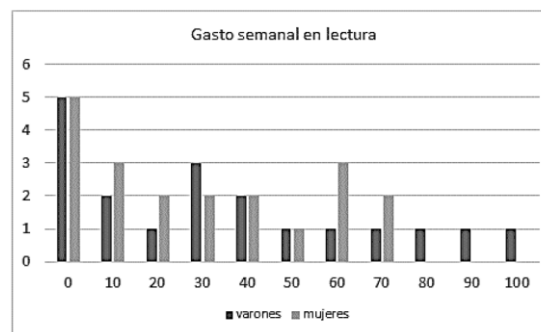
E1. Sí, tiene razón al decir que la media es pobre, ya que existen datos muy disparados y eso afecta el resultado.

E2. No, porque la mediana es sólo el valor central y sin embargo, la media representa el promedio de los datos.

E3. No, porque la media nos indica el gasto medio de las familias en material de lectura y la mediana el valor medio entre todos los valores.

E4. Sí, de las personas que compran libros es el número más repetido.

**Tarea 4.** Antonio cree que su gráfico indica que los varones y mujeres tienden a gastar diferente cantidad de dinero en material de lectura.



¿Estás de acuerdo? Sí \_\_\_\_ No \_\_\_\_ Justifica la respuesta

#### Respuestas de estudiantes

E1. Sí, porque no coinciden las barras de los varones, ya que siempre son menores.

E2. Sí, si se saca el promedio por separado se vería la diferencia entre varones y mujeres.

E3. Las mujeres gastan más que los varones, sobre todo en intervalos como del 10 al 20, del 20 al 30, de 60 al 70 y sólo contrarrestado del 30 al 40 por los varones.

E4. Claramente se puede apreciar que, aunque en los valores mínimos y máximos de dinero, las diferencias son nulas, las mujeres gastan más dinero. Hay el doble de mujeres que gastan 70€ y el triple de mujeres que gastan 60€.

## ANEXO III. Rúbricas de evaluación

### *Rúbrica de evaluación de la Tarea 12*

| Criterios                                                          | Nivel 0 - Bajo                                                   | Nivel 1 – En progreso                                                                                                                                                     | Nivel 2 - Correcto                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cálculo de la media                                                | Error de cálculo siempre.                                        | Al menos comete dos veces error en el cálculo                                                                                                                             | No comete error en el cálculo.                                                                                |
| Cálculo de la moda                                                 | Error de cálculo siempre.                                        | Al menos comete dos veces error en el cálculo                                                                                                                             | No comete error en el cálculo.                                                                                |
| Cálculo de la mediana                                              | Error de cálculo siempre.                                        | Al menos comete dos veces error en el cálculo.                                                                                                                            | No comete error en el cálculo.                                                                                |
| Cálculo de la varianza                                             | Error de cálculo siempre.                                        | Al menos comete dos veces error en el cálculo.                                                                                                                            | No comete error en el cálculo.                                                                                |
| Cálculo de la desviación típica                                    | Error de cálculo siempre.                                        | Al menos comete dos veces error en el cálculo.                                                                                                                            | No comete error en el cálculo.                                                                                |
| Interpreta medidas de centralización en distribuciones asimétricas | No identifica datos atípicos.                                    | Identifica datos atípicos, pero no acepta quitarlos del análisis por falta de representatividad de las medidas, aunque puedan ser debidos a errores de registro o medida. | Identifica la influencia de los datos atípicos en la media y no en la mediana y la moda.                      |
| Interpreta medidas de centralización y dispersión                  | No interpreta adecuadamente las medidas en el contexto.          | Interpreta sólo una o dos medidas adecuadamente en su contexto, pero no relaciona la dispersión.                                                                          | Interpreta conjuntamente medidas de centralización y dispersión en contexto.                                  |
| Transnumeración                                                    | No interpreta adecuadamente medidas estadísticas en el contexto. | Interpreta sólo unas medidas adecuadamente en su contexto, pero no relaciona representaciones.                                                                            | Interpreta conjuntamente medidas de centralización y dispersión en contexto y en diferentes representaciones. |

***Rúbrica de evaluación de la tarea 4. Líderes de investigación***

| Criterios                                           | Insuficiente (0)                                                                                                           | Aceptable (1)                                                                                                                        | Excelente (2)                                                                               |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pregunta de investigación                           | No enuncia la pregunta de investigación.                                                                                   | Enuncia la pregunta de investigación de forma poco precisa.                                                                          | Enuncia con claridad la pregunta de investigación.                                          |
| Justificación de la elección de la muestra          | No justifica la selección de la muestra.                                                                                   | Justifica la muestra escogida, aunque es poco representativa.                                                                        | Justifica la muestra escogida y es representativa.                                          |
| Diseño del instrumento de recolección de datos      | Diseña un formulario de recogida de datos, pero no se corresponde con lo necesario para responder a la pregunta formulada. | Diseña un formulario de recogida de datos, pero se corresponde parcialmente con lo necesario para responder a la pregunta formulada. | Diseña un formulario de recogida de datos apropiado para responder a la pregunta formulada. |
| Recogida y organización de datos                    | Recoge datos, pero no los organiza ni representa adecuadamente.                                                            | Recoge datos, pero alguna representación es incorrecta.                                                                              | Recoge y organiza los datos correctamente en tablas y gráficas estadísticas.                |
| Interpretación de gráficos estadísticos             | No interpreta o lo hace de forma incorrecta.                                                                               | Lee gráficos o tablas, pero tiene dificultad en interpretar tendencias o medidas en algunos.                                         | Lee e interpreta gráficos y tablas correctamente.                                           |
| Cálculo e interpretación de la moda                 | No calcula la moda o lo hace mal.                                                                                          | Calcula la moda correctamente pero no la interpreta en el contexto o lo hace mal.                                                    | Calcula e interpreta la moda correctamente en su contexto.                                  |
| Cálculo e interpretación de la media (si procede)   | No calcula la media o lo hace mal.                                                                                         | Calcula la media bien, pero no la interpreta en contexto o lo hace mal.                                                              | Calcula e interpreta la media correctamente en su contexto.                                 |
| Cálculo e interpretación de la mediana (si procede) | No calcula la mediana o lo hace mal.                                                                                       | Calcula la mediana bien, pero no la interpreta en el contexto o lo hace mal.                                                         | Calcula e interpreta la mediana correctamente en su contexto.                               |

|                                            |                                                                          |                                                                                                                                      |                                                                                                                                |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Detección de valores atípicos (si procede) | No detecta la presencia de valores atípicos.                             | Detecta la presencia de valores atípicos, pero lo interpreta de forma errónea.                                                       | Detecta la presencia de valores atípicos y los interpreta correctamente.                                                       |
| Obtención de conclusiones y generalización | No elabora conclusiones del estudio ni valora la posible generalización. | Elabora unas conclusiones poco precisas, que no se corresponden con los datos o generalizando sin valorar la pertinencia de hacerlo. | Elabora unas conclusiones claras y concisas, relacionadas con el trabajo presentado y valorando la pertinencia de generalizar. |